

Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА,
Д. Н. ПРОТАСОВ, А. Н. ПЧЕЛИНЦЕВ, И. Ю. ПЧЕЛИНЦЕВА

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ



Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

**Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Е. А. МОЛОКАНОВА,
Д. Н. ПРОТАСОВ, А. Н. ПЧЕЛИНЦЕВ, И. Ю. ПЧЕЛИНЦЕВА**

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов 1 и 2 курсов инженерных и экономических направлений
высшего профессионального образования

Учебное электронное издание



Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2024

УДК 51(075.8)
ББК 221я73
У68

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой
функционального анализа ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
Е. А. Панасенко

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры
«Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
Ю. В. Родионов

У68 **Уравнения** математической физики и обработка информации при
численном моделировании [Электронный ресурс] : учебное пособие /
Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, Д. Н. Протасов, А. Н. Пчелинцев,
И. Ю. Пчелинцева. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»,
2024. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК
не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 2,8 Mb ; RAM ;
Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-8265-2771-9

Содержит теоретический материал и задачи по уравнениям математической
физики, а также ответы и решения задач.

Предназначено для студентов 1 и 2 курсов инженерных и экономических
направлений высшего профессионального образования. Адресовано, прежде всего,
хорошо успевающим студентам, организованным в ТГТУ в группу «кадрового
резерва науки», и преподавателям вузов для проведения дополнительных учебных
занятий по математике, хотя может быть интересно всем, кто любит эту науку.

УДК 51(075.8)
ББК 221я73

*Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.*

ISBN 978-5-8265-2771-9

© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический
университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2024

ВВЕДЕНИЕ

Предназначено для студентов 1 и 2 курсов инженерных и экономических направлений высшего профессионального образования. Цель пособия – способствовать самостоятельной работе студентов над разделом «Уравнения математической физики».

Основное внимание в пособии уделено методам решения уравнений в частных производных. Изучаемые уравнения возникают при моделировании многочисленных процессов в естествознании, технике, военном деле.

В пособии раскрывается содержание всего теоретического материала, выносимого на занятия группы «кадрового резерва науки» Тамбовского государственного технического университета и предназначенного для самостоятельного изучения. Пособие содержит достаточное количество подробно разобранных решений типовых задач, а также список задач, рекомендуемых для групповых занятий и самостоятельной работы.

1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Для описания многих физических процессов обыкновенных дифференциальных уравнений оказывается недостаточно. Например, при изучении зависимости какой-либо физической величины u от координат точки $P(x, y, z)$ и от времени t , т.е. $u = u(x, y, z, t)$, составляется дифференциальное уравнение, содержащее частные производные неизвестной функции: $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}$

и т.д. Такое уравнение называется уравнением в частных производных.

Математическими моделями процессов колебаний струны и распространения тепла в стержне являются уравнения в частных производных.

1.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Рассмотрим натянутую струну длины l с закрепленными концами. Под струной в математической физике понимают гибкую упругую нить. Если струну в начальный момент времени вывести из положения равновесия, например оттянуть и подвергнуть удару, то точки струны будут совершать движения – струна начнет колебаться. Составим математическую модель колебаний струны, представляющую собой уравнение движения каждой точки струны.

Сделаем следующие упрощающие предположения.

1. Струна однородная: $\rho = \text{const}$ – линейная плотность.
2. Изучаются малые поперечные колебания струны. Это позволяет считать, что: а) точка струны колеблется в направлении, перпендикулярном положению равновесия (поперечные колебания); б) колебания происходят в одной плоскости; в) струна нерастяжимая, т.е. отрезок струны при колебании сохраняет свою длину.

3. Сила натяжения \bar{T} в каждой точке направлена по касательной к струне и постоянна по величине $|\bar{T}| = T = \text{const}$. В процессе колебаний на струну могут действовать также какие-то внешние силы.

Выберем систему координат следующим образом. В силу предположения 2б рассмотрим прямоугольную декартову систему координат на плоскости Oxi . Пусть в положении равновесия струна расположена вдоль оси Ox , x – координата точки струны, $0 \leq x \leq l$. Положение u точки x струны изменяется со временем t . Таким образом, $u = u(x, t)$ – величина отклонения точки с абсциссой x в момент времени t от положения равновесия. Для каждого фиксированного t графиком функции $u = u(x, t)$ на плоскости Oxi является форма, которую принимает струна в этот момент времени t . Выведем уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x, t)$, предполагая, что она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. При этом будем опираться на второй закон Ньютона: $\bar{F} = m\bar{a}$.

Рассмотрим струну в некоторый фиксированный момент t .

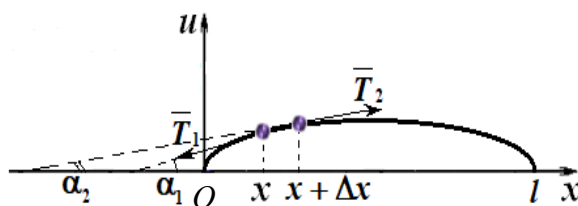


Рис. 1.1

Равнодействующая \bar{F} всех сил направлена по вертикали в силу предположения 2а. Кроме сил натяжения \bar{T} , на струну могут действовать внешние силы, параллельные оси Ou . Обозначим через $g(x, t)$ плотность распределения этих сил, функция $g(x, t)$ непрерывна при $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$. Найдем равнодействующую \bar{F} на участке $[x; x + \Delta x]$. На этот участок действуют силы натяжения \bar{T}_1 и \bar{T}_2 , заменяющие влияние отброшенных частей струны. В силу предположения 3 проекция равнодействующей этих сил T_u на ось Ou равна

$$T_u = T_{2u} - T_{1u} = T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1,$$

где α – угол, который образует касательная к кривой $u = u(x, t)$ в данной точке (рис. 1.1). В силу предположения 2 и геометрического смысла производной (тангенс угла наклона касательной) имеем

$$\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x},$$

так как $\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$. Поэтому проекцию T_u можно записать в виде

$$T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 \approx T(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = T(u'_x(x + \Delta x; t) - u'_x(x; t)) = Tu''_{xx}(\bar{x}, t)\Delta x,$$

где $\bar{x} \in [x; x + \Delta x]$. Здесь применили теорему Лагранжа для функции $u'_x(x, t)$.

По свойствам непрерывных функций найдется такое $\bar{x} \in [x; x + \Delta x]$, что равнодействующая внешних сил на этом отрезке равна $g(\bar{x}, t)\Delta x$. Тогда модуль равнодействующих всех сил будет равен сумме

$$F \approx Tu''_{xx}(\bar{x}, t)\Delta x + g(\bar{x}, t)\Delta x.$$

Аналогично, по свойствам непрерывных функций найдется такое $\tilde{x} \in [x; x + \Delta x]$, что ускорение на этом отрезке имеет среднее значение $u''_{tt}(\tilde{x}, t)$. По второму закону Ньютона с учетом того, что масса участка струны приближенно равна $\rho\Delta x$, получаем

$$Tu''_{xx}(\bar{x}, t)\Delta x + g(\bar{x}, t)\Delta x \approx \rho\Delta x u''_{tt}(\tilde{x}, t).$$

Разделим все члены равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$. При $\Delta x \rightarrow 0$ все значения \bar{x} , \tilde{x} , принадлежащие промежутку $[x; x + \Delta x]$, стремятся к x . Тогда приближенное равенство становится точным, и в силу непрерывности функций $u''_{xx}(x, t)$, $g(x, t)$, $u''_{tt}(x, t)$ уравнение принимает вид

$$\rho u''_{tt}(x, t) = T u''_{xx}(x, t) + g(x, t).$$

Положим $a^2 = T/\rho$, тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} g(x, t). \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) является математической моделью колебаний струны и называется *уравнением колебания струны* или *волновым уравнением*. Если $g(x, t) \equiv 0$, получаем однородное уравнение, называемое *уравнением свободных колебаний струны*. Если $g(x, t)$ хотя бы в одной точке не равна нулю, то неоднородное уравнение (1.1) называется *уравнением вынужденных колебаний струны*.

1.2. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ

Рассмотрим тонкий стержень длины l . Если в начальный момент времени стержень нагрет, вообще говоря, неравномерно, то с течением времени тепло будет переходить от более нагретых точек к менее нагретым. Составим математическую модель распространения тепла в стержне.

Сделаем следующие упрощающие предположения.

1. В каждый момент времени температура во всех точках поперечного сечения стержня одинакова.

2. Стержень однородный: $\rho = \text{const}$ – объемная плотность, $c = \text{const}$ – удельная теплоемкость.

3. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, т.е. через боковую поверхность не происходит теплообмен с окружающей средой.

4. Внутри стержня нет источников тепла.

Как и при изучении процесса колебания струны, введем прямоугольную систему координат Oxi . Примем ось стержня за ось абсцисс, $0 \leq x \leq l$. Тогда температура u каждой точки стержня x будет меняться со временем, т.е. $u = u(x, t)$. Выведем уравнение, которому удовлетворяет температура u , основываясь на уравнении теплового баланса.

При составлении уравнения теплового баланса будем опираться на следующие законы теории теплопроводности. Количество тепла ΔQ , которое необходимо, чтобы изменить температуру тела на Δu , равно

$$\Delta Q = c \rho V \Delta u, \quad (1.2)$$

где V – объем тела; ρ – плотность; c – удельная теплоемкость. Количество тепла Q , протекающее через поперечное сечение стержня за промежуток времени Δt (тепловой поток), равно

$$Q = -k S u'_x(x, \bar{t}) \Delta t, \quad (1.3)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня; k – коэффициент теплопроводности; $\bar{t} \in [t; t + \Delta t]$, т.е. $u'_x(x, \bar{t})$ – среднее значение функции $u'_x(x, t)$

на отрезке $[t; t + \Delta t]$. Поток считается положительным, если он направлен в сторону возрастания x . Поэтому в формуле (1.3) взят знак «минус». Коэффициент теплопроводности будем считать постоянным. Вообще, даже для однородного тела k изменяется в зависимости от u , но при небольших изменениях u этой зависимостью можно пренебречь.

Составим для участка стержня $[x; x + \Delta x]$ уравнение теплового баланса. В силу предположений 3, 4 все количество тепла, которое приобретает или отдает участок $[x; x + \Delta x]$, уходит на изменение температуры этого участка. Чтобы не загромождать выкладки, средние значения $u = u(\bar{x}, \bar{t})$, $\bar{x} \in [x; x + \Delta x]$, $\bar{t} \in [t; t + \Delta t]$, функции u и ее частных производных будем заменять приближенно значениями функции u и ее частных производных в точке $(x; t)$, так как $\bar{x} \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\bar{t} \rightarrow t$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Как и при выводе уравнения колебания струны, предельный переход обращает это приближенное равенство в точное, если частные производные функции u непрерывны.

По формуле (1.3) количество тепла, входящее через сечение с абсциссой x за промежуток времени Δt , равно $-k S u'_x(x, t) \Delta t$. Количество тепла, которое получил участок стержня $[x; x + \Delta x]$ за время Δt , равно

$$\Delta Q \approx -k S u'_x(x, t) \Delta t + k S u'_x(x + \Delta x, t) \Delta t \approx k S \Delta t u''_{xx}(x, t) \Delta x.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лагранжа. С другой стороны, за тот же промежуток времени температура изменилась на $u'_t(x, t) \Delta t$. Поэтому по формуле (1.2)

$$\Delta Q \approx c \rho S \Delta x u'_t(x, t) \Delta t.$$

Приравнявая два выражения для ΔQ и сокращая на $S \Delta x \Delta t$, получим

$$c \rho u'_t(x, t) = k u''_{xx}(x, t).$$

Обозначив $a^2 = k/c\rho$, окончательно получим уравнение теплопроводности для однородного стержня

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1.4)$$

Величина $a = \sqrt{k/c\rho}$ называется коэффициентом температуропроводности.

Если внутри стержня имеются источники тепла, то уравнение получается неоднородное:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t).$$

1.3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Дифференциальные уравнения (1.1) и (1.4) содержат частные производные функции $u = u(x, t)$. Уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, независимые переменные x_1, x_2, \dots, x_n и частные производные неизвестной функции, называется *дифференциальным уравнением в частных производных*. Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется *порядком уравнения*.

Математическими моделями процессов колебаний струны и распространения тепла в стержне являются уравнения (1.1) и (1.4) в частных производных второго порядка. И многие другие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, называемых *уравнениями математической физики*. Основными уравнениями математической физики являются:

волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right);$$

уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f(x, y, z).$$

Если в уравнении Пуассона $f(x, y, z) \equiv 0$, получим уравнение Лапласа.

К волновому уравнению приходим при изучении различного вида волн – упругих, звуковых, электромагнитных. К уравнению теплопроводности – при изучении процесса распространения тепла в однородном изотропном теле (в случае стационарного распределения температуры получаем уравнение Пуассона), явления диффузии. Уравнение Лапласа, как и уравнение Пуассона, описывает стационарный процесс. К данному типу процесса относятся: стационарное распределение температуры в телах, стационарная фильтрация жидкостей или газов через пористые среды, безвихревое течение идеальной несжимаемой жидкости, распределение гравитационного, электрического и магнитного потенциалов и т.п. [11].

Основные уравнения записаны для случая, когда $u = u(x, y, z, t)$, где x, y, z – координаты точки в пространстве, t – время. В случае, когда $u = u(x, t)$, волновое уравнение (1.1) описывает не только колебания струны, но и продольные колебания стержня, крутильные колебания вала, электрические колебания. Задачи о колебаниях плоской мембраны, о колебаниях газа в неограниченной трубке приводят к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Задача о распространении температуры внутри тонкой пластинки приводит к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Частным случаем рассматриваемой задачи является стационарное распределение температуры внутри пластинки, т.е. температура в каждой точке пластинки установилась и не меняется со временем. Тогда $\partial u / \partial t = 0$ и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Получили уравнение Лапласа.

1.4. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Решением уравнения в частных производных является всякая функция, которая, будучи подставлена в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Как и обыкновенное дифференциальное уравнение, уравнение в частных производных имеет бесчисленное множество частных решений. Общее решение уравнения с частными производными зависит от произвольных функций. Для того, чтобы из общего решения выделить частное, т.е. определить эти функции для конкретной задачи, вводят в рассмотрение дополнительные условия, которые вытекают из физического смысла задачи. *Задачи математической физики* состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Такими дополнительными условиями чаще всего являются начальные и граничные условия. *Начальными условиями* называются условия, относящиеся к какому-нибудь одному моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. *Граничными или краевыми условиями* называются условия, заданные на границе рассматриваемой области.

В задаче о колебании струны начальные условия определяют положение струны и скорость каждой точки струны в начальный момент времени: $u(x,0) = f(x)$, $u'_t(x,0) = F(x)$. Кроме этого, условие закрепления концов дает краевые условия: $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Итак, задача о свободном колебании струны состоит в следующем: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0) = f(x); \quad u'_t(x,0) = F(x) \quad (1.6)$$

и краевым условиям:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0. \quad (1.7)$$

Функция $f(x)$ должна удовлетворять условиям $f(0) = f(l) = 0$, так как концы струны закреплены, т.е. начальные и конечные условия должны быть согласованы.

Решается также задача о колебаниях бесконечной струны: струна очень длинная, интересуют ее колебания в средней части. В этом случае краевые условия не учитываются, и решается задача Коши (начальная задача): найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.6).

Если струна длинная, и изучаются ее колебания вблизи одного из концов (полубесконечная струна), то учитываются начальные условия и одно из краевых условий: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.6) и краевому условию

$$u(0, t) = 0.$$

В задаче о распределении температуры в однородном стержне начальные условия определяют температуру каждой точки стержня в начальный момент времени: $u(x, 0) = f(x)$. Если на концах стержня поддерживается определенная температура, то имеем краевые условия:

$$u(0, t) = \varphi_1(t); \quad u(l, t) = \varphi_2(t).$$

Эти краевые условия называются условиями I типа.

Краевые условия II типа – это условия:

$$u'_x(0, t) = F_1(t); \quad u'_x(l, t) = F_2(t).$$

Наиболее общие краевые условия получаются на основании закона Ньютона: поток тепла через единицу поверхности тела в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды. Таким образом, величина потока через конец $x = l$ равна $h_2(u(l, t) - \varphi_2(t))$, где h_2 называется коэффициентом теплообмена, $h_2 > 0$, $\varphi_2(t)$ – температура среды на этом конце стержня. С другой стороны, по формуле (1.3) этот поток равен $-k u'_x(l, t)$. Итак,

$$-k u'_x(l, t) = h_2(u(l, t) - \varphi_2(t)).$$

Аналогично на конце $x = 0$ имеем

$$k u'_x(0, t) = h_1(u(0, t) - \varphi_1(t)).$$

Знак «плюс» берется, так как поток ищется в направлении убывания x . Получили краевые условия III типа:

$$k u'_x(0, t) = h_1 (u(0, t) - \varphi_1(t)); \quad -k u'_x(l, t) = h_2 (u(l, t) - \varphi_2(t)).$$

Краевые условия I типа получаются из краевых условий III типа при $h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow \infty$. Например,

$$\frac{k}{h_1} u'_x(0, t) = u(0, t) - \varphi_1(t).$$

При $h_2 \rightarrow \infty$ получаем $u(0, t) - \varphi_1(t) = 0$. Если требуется на концах стержня поддерживать определенную разность температур, т.е. $u(0, t) - \varphi_1(t) = \mu_1(t), u(l, t) - \varphi_2(t) = \mu_2(t)$, то краевые условия III типа примут вид:

$$u'_x(0, t) = F_1(t); \quad u'_x(l, t) = F_2(t),$$

т.е. получили краевые условия II типа.

Общая задача о распределении температуры в однородном стержне без внутренних источников тепла состоит в следующем: найти решение уравнения (1.4), удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = f(x) \tag{1.8}$$

и краевым условиям:

$$\begin{aligned} k u'_x(0, t) &= h_1 (u(0, t) - \varphi_1(t)); \\ -k u'_x(l, t) &= h_2 (u(l, t) - \varphi_2(t)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Рассматриваются задачи о распределении температуры в бесконечном и полубесконечном стержне. Бесконечный стержень – это стержень большой длины, изучается температурный режим в средней части стержня. Задача ставится так: найти решение уравнения (1.4), удовлетворяющее начальному условию (1.8). Это задача Коши. Полубесконечный стержень – это стержень большой длины, изучается температурный режим вблизи одного из концов. Задача ставится так: найти решение уравнения (1.4), удовлетворяющее начальному условию (1.8) и первому из краевых условий (1.9).

Задача, в которой есть и начальные, и краевые условия, называется *смешанной*. Смешанными являются задачи: (1.1), (1.6), (1.7) и (1.4), (1.8), (1.9).

При решении задач, описываемых уравнением Лапласа, начальных условий не возникает, и изучаются чисто граничные условия. Так как урав-

нение Лапласа описывает стационарные, т.е. неизменные по времени процессы. В зависимости от типа граничного условия различают три основных вида граничной задачи для уравнения Лапласа (1.5):

первая граничная задача, или задача Дирихле, имеет граничное условие

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Gamma;$$

вторая граничная задача, или задача Неймана, имеет граничное условие

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} = g(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Gamma;$$

Третья, или смешанная граничная, задача имеет граничное условие

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial n} + \beta(x, y)u(x, y) = g(x, y) \text{ при } (x, y) \in \Gamma.$$

Здесь Γ – граница области; $g(x, y)$, $\beta(x, y)$ – функции, определенные на Γ ; $\partial u(x, y)/\partial n$ – производная по направлению внешней нормали к линии Γ .

1.5. ПОНЯТИЕ О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Задача математической физики называется корректной, если выполнены три условия.

1. Задача имеет решение.
2. Это решение единственное.
3. Решение устойчиво относительно начальных, краевых условий и коэффициентов уравнения. Это означает, что малым изменениям начальных, краевых условий и коэффициентов уравнения соответствует малое изменение решения.

Доказательства существования, единственности и устойчивости решения – это специальные вопросы теории уравнений математической физики. Их рассматривать не будем. Отметим лишь, что все поставленные выше задачи при достаточно общих условиях относительно функций: $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $g(x, y)$, $\beta(x, y)$, $f(x)$, $F(x)$ (которые на практике всегда выполнены) корректны.

2. МЕТОД ДАЛАМБЕРА

Метод Даламбера предназначен для решения задач о свободных колебаниях струны, т.е. для задач вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.1)$$

Как будет показано ниже, общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at), \quad (2.2)$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Подстановка функции (2.2) в уравнение (2.1) убеждает, что она удовлетворяет этому уравнению. Решение (2.2) уравнения (2.1) называется решением уравнения Даламбера.

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ будем выбирать так, чтобы решение (2.2) удовлетворяло начальным и граничным условиям рассматриваемой задачи.

2.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Если струна бесконечная, то в уравнении (2.1) $x \in (-\infty; +\infty)$, переменная t принимает неотрицательные значения, поэтому точка (x, t) лежит в области

$$D = \{(x; t) : -\infty < x < +\infty, 0 \leq t < +\infty\}.$$

Задача о колебаниях бесконечной струны является задачей Коши: найти решение $u(x, t)$ уравнения (2.1) при $(x; t) \in D$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x, 0) = f(x); \quad u'_t(x, 0) = F(x). \quad (2.3)$$

Здесь функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на всей числовой оси, т.е. $-\infty < x < +\infty$.

Будем искать решение в виде (2.2). Для определения функций φ и ψ воспользуемся начальными условиями (2.3):

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x);$$

$$u'_t(x, 0) = -a\varphi'(x) + a\psi'(x) = F(x).$$

Проинтегрируем второе из этих соотношений на отрезке $[0; x]$, получим

$$-a(\varphi(x) - \varphi(0)) + a(\psi(x) - \psi(0)) = \int_0^x F(s) ds.$$

Таким образом, для определения φ и ψ имеем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x);$$

$$-\varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x F(s) ds + C,$$

где $C = -\varphi(0) + \psi(0) = \text{const}$. Решением системы являются функции:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x F(s) ds - \frac{C}{2};$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x F(s) ds + \frac{C}{2}.$$

Подставим эти функции в решение Даламбера (2.2), получим

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \psi(x + at) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \left(- \int_0^{x-at} F(s) ds + \int_0^{x+at} F(s) ds \right) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(s) ds.$$

Итак, решение задачи (2.1), (2.3) находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(s) ds,$$

которая называется *формулой Даламбера*. Для того чтобы функция $u(x, t)$ имела непрерывную вторую производную, достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела непрерывную вторую производную, а функция $F(x)$ имела непрерывную первую производную.

2.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Для полубесконечной струны имеем $x \in [0; +\infty)$, поэтому областью определения функции $u(x, t)$ в уравнении (2.1) является область

$$D = \{(x, t): 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t < +\infty\}.$$

Задача о колебаниях полубесконечной струны с закрепленным правым концом формируется так: найти решение уравнения (2.1) при $(x, t) \in D$, удовлетворяющее начальным условиям (2.3) и краевому условию

$$u(0, t) = 0. \quad (2.4)$$

Здесь функции $f(x)$ и $F(x)$ определены при $x \in [0; +\infty)$.

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.3), определяется по формуле Даламбера. Но в этой формуле функции $f(x)$ и $F(x)$ должны быть определены при $x \in (-\infty; +\infty)$. Доопределим функции на промежуток $(-\infty; 0)$ так, чтобы выполнялось краевое условие (2.4):

$$u(0, t) = \frac{1}{2}(f(-at) + f(at)) + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} F(s) ds = 0.$$

Если обозначим at через x , тогда

$$f(x) = -f(-x) - \frac{1}{a} \int_{-x}^x F(s) ds.$$

Если обозначим at через $-x$, тогда

$$f(-x) = -f(x) - \frac{1}{a} \int_x^{-x} F(s) ds.$$

Сложив эти два равенства, получим:

$$f(-x) = -f(x); \quad \int_{-x}^x F(s) ds = 0.$$

Первое равенство предполагает нечетность функции $f(x)$. Продифференцировав второе равенство по x , получим:

$$F(x) + F(-x) = 0 \text{ или } F(-x) = -F(x).$$

Аналогично, функция $F(x)$ должна быть нечетной. Итак, решение уравнения колебаний полубесконечной струны, определяется по формуле Даламбера, где функции $f(x)$ и $F(x)$ продолжены для $x \in (-\infty; 0)$ нечетным образом.

Кроме этого, для того чтобы полученное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, необходимо, помимо условий дифференцируемости функций $f(x)$ и $F(x)$, потребовать выполнение условий:

$$f(0) = 0; \quad F(0) = 0,$$

т.е. согласования начальных и граничных условий.

2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Струна длины l закреплена на концах. $x \in [0; l]$ и область определения функции $u(x, t)$ в уравнении (2.1) принимает вид

$$D = \{(x; t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t < +\infty\}.$$

Имеем задачу: найти решение уравнения (2.1) при $(x; t) \in D$, удовлетворяющее начальным условиям (2.3), если $x \in [0; l]$, и краевым условиям:

$$u(0, t) = 0; \quad u(l, t) = 0. \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.3) и краевому условию (2.4), находится по формуле Даламбера, если функции $f(x)$ и $F(x)$ продолжены нечетным образом на промежуток $[-l; 0)$. Но в формуле Даламбера функции $f(x)$ и $F(x)$ должны быть определены при $x \in (-\infty; +\infty)$, а у нас $x \in [-l; l]$. Доопределим эти функции на остальную часть числовой оси так, чтобы выполнялось второе из краевых условий (2.5):

$$u(l, t) = \frac{1}{2}(f(l - at) + f(l + at)) + \frac{1}{2a} \int_{l-at}^{l+at} F(s) ds = 0.$$

Если обозначим $l - at$ через x , тогда

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(2l - x)) + \frac{1}{2a} \int_x^{2l-x} F(s) ds = 0.$$

Если обозначим $l + at$ через x , тогда

$$\frac{1}{2}(f(2l - x) + f(x)) + \frac{1}{2a} \int_{2l-x}^x F(s) ds = 0.$$

Складывая эти два равенства и учитывая, что функция $f(x)$ является нечетной, получим:

$$f(x) = -f(2l - x) = f(x - 2l); \quad \int_x^{2l-x} F(s) ds = 0.$$

Из первого равенства следует $2l$ – периодичность функции $f(x)$. Продифференцировав второе равенство по x , получим:

$$-F(2l - x) - F(x) = 0 \quad \text{или} \quad F(x) = F(x - 2l).$$

Следовательно, функции $f(x)$ и $F(x)$ – периодические с периодом $2l$.

Итак, решение уравнения о колебаниях ограниченной струны определяется по формуле Даламбера, при этом функции $f(x)$ и $F(x)$ продолжаются из промежутка $[0; l]$ в промежутки $[-l; 0)$ нечетным образом, а затем с периодом $2l$.

Чтобы полученное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, необходимо, помимо условий дифференцируемости функций $f(x)$ и $F(x)$, потребовать еще выполнение условий согласования начальных и граничных условий:

$$f(0) = f(l) = 0; \quad f''(0) = f''(l); \quad F(0) = F(l) = 0.$$

На практике в случае ограниченной струны формулой Даламбера пользуются редко, так как она не дает инструмента для исследования процесса колебаний. Если концы струны закреплены, то многократные отражения от концов продолжают сложный колебательный процесс, природа которого не описывается формулой Даламбера. Гораздо удобнее получить решение задачи в виде суммы простых гармоник. Такое решение дает метод Фурье.

2.4. ПОНЯТИЕ ОБ ОБОБЩЕННОМ РЕШЕНИИ

При решении конкретных физических задач может оказаться, что функции $f(x)$ и $F(x)$ не удовлетворяют указанным условиям, но существуют удовлетворяющие этим условиям функции $\bar{f}(x)$ и $\bar{F}(x)$, такие, что $f(x) - \bar{f}(x)$ и $F(x) - \bar{F}(x)$ могут быть сделаны сколь угодно малыми. Если при этом решение $u(x; t)$ задачи Коши (2.1), (2.3) тоже сколь угодно мало отличается от решения задачи Коши для уравнения (2.1) с начальными условиями:

$$u(x, 0) = \bar{f}(x); \quad u'_t(x, 0) = \bar{F}(x),$$

то решение $u(x, t)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.1), (2.3). Так, для существования обобщенного решения всех трех рассмотренных выше задач, определяемого формулой Даламбера, достаточно, чтобы функции $f(x)$ и $F(x)$ удовлетворяли следующим условиям:

$f(x)$ – непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной;

$F(x)$ – кусочно-непрерывная функция.

Введение обобщенных решений естественно, так как функции $f(x)$ и $F(x)$ в конкретных задачах физики известны нам только приближенно. Поэтому соответствующая функция $u(x, t)$, даваемая формулой Даламбера, также является только некоторым приближением к точному решению поставленной задачи.

3. МЕТОД ФУРЬЕ

Дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$Au''_{xx} + 2Bu''_{xt} + Cu''_{tt} + Eu'_x + Gu'_t = 0 \quad (3.1)$$

называется *линейным однородным* уравнением в частных производных. Такими уравнениями являются уравнения (2.1), (1.4) и (1.5). Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, решения уравнения (3.1) обладают свойством L : если $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – решения, C_1 и C_2 – произвольные числа, то $C_1u_1(x, t) + C_2u_2(x, t)$ – тоже решение. На этом основан метод Фурье, который предназначен для решения задач математической физики с линейными однородными уравнениями.

Суть метода Фурье заключается в следующем. Если мы решаем задачу с уравнением (3.1) и однородными (нулевыми) граничными условиями, то решения этой задачи обладают свойствами L . Поэтому на первом этапе находим некоторый запас функций: $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, ..., $u_n(x, t)$, ..., удовлетворяющий уравнению (3.1) и однородным граничным условиям. Отличные от тождественного нуля решения $u_n(x, t)$, $n = 1, 2, \dots$, называются *собственными функциями* задачи. На втором этапе строим ряд из этих функций. Предположим, что ряд сходится, и обозначим через $u(x, t)$ сумму ряда

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x, t). \quad (3.2)$$

Если этот ряд допускает дважды почленное дифференцирование по x и t , то в силу свойства L функция $u(x, t)$ является решением этой задачи. Коэффициенты ряда C_n , $n = 1, 2, \dots$, подбираем так, чтобы функция $u(x, t)$ удовлетворяла начальным условиям.

Для того чтобы осуществить этот план, будем искать решение задачи в виде произведения функций, одна из которых зависит только от x , другая – только от t :

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.3)$$

Поэтому метод Фурье называют еще методом разделения переменных. Подставляя функцию (3.3) в уравнение математической физики, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения. Решая эти уравнения, находим собственные функции задачи.

При подборе коэффициентов ряда (3.2) начальные условия необходимо также представить в виде ряда. В процессе решения задачи таким рядом оказывается тригонометрический ряд – ряд Фурье.

3.1. РЯДЫ ФУРЬЕ

Ряд Фурье представляет собой разложение периодической функции с периодом $T = 2l$ по бесконечному базису, которым является система тригонометрических функций:

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}; \sin \frac{\pi x}{l}; \cos \frac{2\pi x}{l}; \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}; \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

Таким образом, функция $f(x)$ представляется суммой ряда Фурье:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \quad (3.4)$$

$$= a_0 + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \dots + a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots$$

Коэффициенты ряда Фурье $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$ вычисляются по формулам, называемым формулами Эйлера–Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

Не любую периодическую функцию можно представить в виде суммы ряда Фурье. Достаточные условия разложения функции в ряд Фурье дает следующая теорема.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-l; l]$ или имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода, моно-

тонна на $[-l;l]$ или имеет конечное число экстремумов, то ее ряд Фурье сходится на отрезке $[-l;l]$. Сумма ряда равна значению $f(x)$ (3.4) в точках непрерывности и равна среднему арифметическому правого и левого пределов функции в точках разрыва:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Условия этой теоремы называют условиями Дирихле, а заключение теоремы, т.е. разложение функции в ряд Фурье, обозначают

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Пусть функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям Дирихле, является четной. По формулам (3.5) имеем $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$, поскольку функции $f(x)\sin(n\pi x/l)$ являются нечетными, а интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля промежутку равен нулю. Кроме того, из четности функций $f(x)\cos(n\pi x/l)$ следует, что коэффициенты a_n можно найти по формуле

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, разложение в ряд Фурье четной функции принимает вид

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.6)$$

Для нечетной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле, аналогичными рассуждениями получаем $a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots$ и

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Разложение в ряд Фурье нечетной функции имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Представление функции $f(x)$, описываемое формулой (3.6), называется ее разложением в ряд по косинусам, а формулой (3.7) – разложением в ряд по синусам. Если функция $f(x)$ задана только на промежутке $[0;l]$, то можно ее доопределить на полуинтервале $[-l;0)$ и разложить доопределенную функцию на всем отрезке $[-l;l]$ в ряд Фурье. Если продолжить функцию на промежуток $[-l;0)$ четным образом, то получим ряд по косинусам, а если нечетным образом – ряд по синусам.

3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Задача: найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.8)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0) = f(x); \quad u_t'(x,0) = F(x) \quad (3.9)$$

и краевым условиям:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0. \quad (3.10)$$

Будем решать задачу методом Фурье.

I этап. Найдем функции, удовлетворяющие уравнению (3.8) и однородным граничным условиям (3.10). Будем искать решение в виде (3.3). Подставляя эту функцию $u(x,t)$ в уравнение (3.8), получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделив уравнение на $a^2 X(x)T(t)$, приходим к уравнению

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3.11)$$

В этом равенстве переменные разделены: левая часть уравнения не зависит от x , а правая часть не зависит от t . Поэтому равенство (3.11) может выполняться лишь в случае, когда обе части его не зависят ни от x , ни от t ,

т.е. являются постоянными. Обозначим эту постоянную через C . Тогда уравнение (3.11) распадается на два обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$X''(x) - C X(x) = 0; \quad (3.12)$$

$$T''(t) - C a^2 T(t) = 0. \quad (3.13)$$

Найдем $X(x)$. Из краевых условий (3.10) следует, что

$$X(0)T(t) = X(l)T(t) \equiv 0.$$

Тогда

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (3.14)$$

В противном случае должно быть $T(t) \equiv 0$ и, следовательно, $u(x, t) \equiv 0$. А это невозможно, если $f(x) \neq 0$ или $F(x) \neq 0$. Итак, $X(x)$ является решением краевой задачи (3.12), (3.14).

Для определения знака постоянной C рассмотрим возможные случаи.

1) $C = \lambda^2 > 0$. Тогда общее решение $X(x)$ уравнения (3.12) равно

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Из краевых условий (3.14) имеем:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$, так как определитель системы отличен от нуля. Решение $X(x) \equiv 0$ нас не интересует.

2) $C = 0$. Общее решение $X(x)$ уравнения (3.12) равно

$$X(x) = C_1 + C_2 x.$$

Из краевых условий (3.14) имеем:

$$C_1 = 0; \quad C_2 l = 0.$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$. Этот случай тоже дает $X(x) \equiv 0$.

3) $C = -\lambda^2 < 0$. Общее решение $X(x)$ уравнение (3.12) равно

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Из краевых условий (3.14) имеем:

$$C_1 = 0; \quad C_2 \sin \lambda l = 0.$$

Последнее равенство возможно при $C_2 \neq 0$, если $\sin \lambda l = 0$, т.е. $\lambda_k = k\pi/l$, $k = 1, 2, \dots$. Числа $\lambda_k^2 = (k\pi/l)^2$ называются *собственными числами*, а функции $\sin(k\pi x/l)$ являются *собственными функциями* задачи (3.12), (3.14).

Итак, нетривиальное решение задачи (3.12), (3.14) при $C = -(k\pi/l)^2$ принимает вид

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x; \quad A_k = \text{const}; \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим теперь уравнение (3.13) при $C = -(k\pi/l)^2$. Его общее решение

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + D_k \sin \frac{k\pi a}{l} t.$$

Итак, решения уравнения (3.8), удовлетворяющие краевым условиям (3.10), – это функции:

$$u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

где $a_k = A_k B_k$, $b_k = A_k D_k$. Функции $u_k(x, t)$ являются *собственными функциями* задачи (3.8) – (3.10); колебания, описываемые этими функциями, называются *собственными колебаниями* струны.

II этап. Составим ряд из функций $u_k(x, t)$. Предположим, что этот ряд сходится, и обозначим $u(x, t)$ сумму ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (3.15)$$

Если ряд (3.15) допускает дважды почленное дифференцирование по x и t , то в силу линейности и однородности уравнения (3.8) функция $u(x, t)$ является его решением. Функция $u(x, t)$ также удовлетворяет краевым условиям (3.10), так как этим условиям удовлетворяет каждый член ряда.

Подберем теперь коэффициенты a_k и b_k так, чтобы $u(x, t)$ удовлетворяла начальным условиям (3.9), т.е.:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x);$$

$$u'_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi a}{l} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x = F(x).$$

Эти равенства представляют собой разложения в ряды Фурье по синусам функций $f(x)$ и $F(x)$ на промежутке $(0; l)$. Поэтому равенства справедливы, если:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$
(3.16)

Итак, решением задачи (3.8) – (3.10) является сумма ряда (3.15), где коэффициенты a_k и b_k определяются по формулам (3.16).

Условия сходимости и почленной дифференцируемости ряда (3.15) предоставляет следующая теорема, принимаемая без доказательства.

Теорема 3.1. Если $f(x)$ на отрезке $[0; l]$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям:

$$f(0) = f(l) = 0; \quad f''(0) = f''(l) = 0,$$

а $F(x)$ непрерывно дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(l) = 0,$$

то функция $u(x, t)$, определяемая рядом (3.15), имеет непрерывные производные второго порядка. При этом возможно почленное дифференцирование ряда (3.15) по x и t 2 раза, и полученные ряды сходятся абсолютно и равномерно при $0 \leq x \leq l$ и при любом $t > 0$.

Замечание. В практических задачах функции $f(x)$ и $F(x)$ могут не удовлетворять условиям теоремы, но являются такими, что соответствующие разложения в ряды Фурье по синусам сходятся к ним. А тогда сходится и ряд (3.12). В этом случае получаем обобщенное решение задачи (3.8) – (3.10).

3.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В КОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

Рассмотрим уравнение теплопроводности для конечного стержня в предположении, что температура окружающей среды равна нулю, т.е. в краевых условиях (1.9) $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$. Тогда имеем смешанную задачу с линейным однородным уравнением и однородными краевыми условиями: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.17)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad (3.18)$$

и краевым условиям:

$$\begin{aligned} k u'_x(0, t) - h_1 u(0, t) &= 0; \\ -k u'_x(l, t) - h_2 u(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Решим задачу методом Фурье.

I этап. Найдем функции, удовлетворяющие уравнению (3.17) и краевым условиям (3.19). Будем искать решение в виде (3.3), т.е.

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Подставляя в уравнение (3.17) эту функцию, получим

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделим переменные

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = C = \text{const.}$$

Получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Решим сначала уравнение

$$T'(t) - Ca^2T(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$T(t) = Me^{Ca^2t}; \quad M = \text{const.}$$

Для определения знака постоянной C рассмотрим возможные случаи.

1) $C = 0$. Тогда $T(t) = \text{const}$. Ясно, что температура с течением времени должна изменяться, поэтому $T(t) = \text{const}$ не дает решения задачи.

2) $C = \lambda^2 > 0$. Тогда $T(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, что невозможно из физических соображений, так как внутренних источников тепла нет.

3) $C = -\lambda^2 < 0$. Тогда $T(t) = Me^{-a^2\lambda^2t}$.

Решаем теперь уравнение

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Его общее решение

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

при любом действительном λ .

Тогда искомое решение уравнения (3.17) имеет вид

$$u(x, t) = X_k(x)T_k(t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)e^{-a^2\lambda^2t},$$

где $A = C_1M$, $B = C_2M$. Полученное решение содержит три произвольные постоянные: A , B и λ . Для нахождения их потребуем, чтобы это решение удовлетворяло краевым условиям (3.19). Так как

$$u'_x(x, t) = (-A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x)e^{-a^2\lambda^2t},$$

получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} kB\lambda - h_1A = 0; \\ kA\lambda \sin \lambda x - kB\lambda \cos \lambda x - Ah_2 \cos \lambda x - Bh_2 \sin \lambda x = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Для краевых условий общего вида эту систему однозначно разрешить нельзя. Действительно, преобразуя уравнение (3.20), получим, если $h_1 \neq 0$:

$$\begin{cases} A/B = k\lambda/h_1, \\ A(k\lambda \sin \lambda x - h_2 \cos \lambda x) = B(h_2 \sin \lambda x + k\lambda \cos \lambda x). \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений отношение A/B , получим уравнение

$$\frac{k}{h_1} \lambda = \frac{h_2 \operatorname{tg} \lambda l + kl}{k\lambda \operatorname{tg} \lambda l - h_2},$$

или

$$\operatorname{tg} \lambda l = \frac{k(h_1 + h_2)\lambda}{k\lambda^2 - h_1 h_2}.$$

Можно показать, что это уравнение имеет бесконечно много решений. Решения эти в общем случае не выразить формулой. В конкретных же ситуациях иногда удастся значение λ находить точно. Рассмотрим два случая, когда систему (3.20) можно решить точно.

Первый случай: концы стержня теплоизолированы: $h_1 = h_2 = 0$. Тогда краевые условия (3.19) примут вид

$$u'_x(0, t) = 0; \quad u'_x(l, t) = 0, \quad (3.19a)$$

а система (3.20) превратится в систему

$$kB\lambda = 0;$$

$$kA\lambda \sin \lambda x - kB\lambda \cos \lambda x = 0.$$

Если $\lambda = 0$, имеем решение $u(x, t) = A = \text{const}$. Если $\lambda \neq 0$, то $B = 0$, и для определения λ получаем уравнение $\sin \lambda x = 0$. Откуда

$$\lambda_n = \frac{\pi}{l} n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что $A \neq 0$, так как тривиальное решение не рассматривается.

Таким образом, искомые решения примут вид:

$$u_n(x, t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} x e^{-\left(\frac{\pi a n}{l}\right)^2 t}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad u_0(x, t) = \frac{A_0}{2}.$$

Числа $\lambda_n^2 = (\pi n/l)^2$, $n = 1, 2, \dots$, называются собственными числами, а функции $u_n(x, t)$ – собственными функциями задачи (3.17), (3.19a).

Второй случай: на концах стержня поддерживается нулевая температура: $h_1 \rightarrow \infty$, $h_2 \rightarrow \infty$. Тогда краевые условия (3.19) примут вид:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (3.19б)$$

Уравнения для определения A , B и λ можно получить из уравнений (3.20), предварительно разделив их на h_1 и h_2 , при $h_1 \rightarrow \infty$ и $h_2 \rightarrow \infty$. Получаем

$$A = 0; \quad B \sin \lambda l = 0.$$

Очевидно, что $B \neq 0$, $\lambda \neq 0$, так как тривиальное решение не рассматривается. Поэтому $\lambda_n = \pi n / l$, $n = 1, 2, \dots$. Искомое решение примет вид

$$u_n(x, t) = B_n \sin \frac{\pi n}{l} x e^{-(\pi a n / l)^2 t}.$$

Числа $\lambda_n^2 = (\pi n / l)^2$, $n = 1, 2, \dots$, называются собственными числами, а функции $u_n(x, t)$ – собственными функциями задачи (3.17), (3.19б).

II этап. Составим ряд из собственных функций рассматриваемой задачи, т.е. ряд (3.3). Найдем коэффициенты этого ряда, используя начальные условия (3.18).

Для первого случая при краевых условиях (3.19а) составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{l} x e^{-(\pi a n / l)^2 t}. \quad (3.21)$$

Каждый член этого ряда является решением задачи (3.17), (3.19а). Если ряд сходится и допускает почленное дифференцирование, то в силу линейности и однородности уравнения (3.17) и однородности краевых условий (3.19а) сумма ряда $u(x, t)$ также является решением задачи (3.17), (3.19а).

Подберем теперь A_n , $n = 1, 2, \dots$, так, чтобы выполнялось начальное условие (3.18), т.е.

$$u(x, 0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{\pi n}{l} x = f(x).$$

Это равенство будет выполняться, если взять в качестве A_n , $n = 1, 2, \dots$, коэффициенты разложения в ряд Фурье по косинусам функции $f(x)$ на промежутке $(0; l)$, т.е. положить

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Итак, решение задачи (3.17), (3.18), (3.19а) – это функция $u(x, t)$, определяемая рядом (3.21), коэффициенты которого вычисляются по формуле (3.22).

Для второго случая при краевых условиях (3.19б) составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x e^{-(\pi a n/l)^2 t}. \quad (3.23)$$

Так же как и в первом случае, если этот ряд сходится и допускается почленное дифференцирование, то его сумма $u(x, t)$ является решением задачи (3.17), (3.19б). Подберем коэффициенты B_n так, чтобы выполнялось начальное условие (3.18), т.е. чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x).$$

В качестве коэффициентов B_n нужно взять коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на промежутке $(0; l)$, т.е.

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Итак, решением задачи (3.17), (3.18), (3.19б) является функция $u(x, t)$, определяемая рядом (3.23), коэффициенты которого вычисляются по формуле (3.24).

Условия сходимости и почленного дифференцирования рядов (3.21) и (3.23) предоставляет следующая теорема, которую принимаем без доказательства.

Теорема 3.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; l]$, имеет кусочно-непрерывную производную и $f(0) = f(l) = 0$ для первого случая,

и $f'(0) = f'(l) = 0$ для второго случая, тогда ряды (3.21) и (3.23) сходятся абсолютно и равномерно при $0 < x < l$ и любом $t > 0$, допускают почленное дифференцирование по x и t сколько угодно раз.

Замечание. В практических задачах для существования обобщенного решения достаточно, чтобы функция $f(x)$ разлагалась в ряд Фурье.

3.4. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

Рассмотрим задачу о распространении температуры в бесконечном стержне, т.е. задачу Коши: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.25)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = f(x). \quad (3.26)$$

В отличие от двух рассмотренных выше задач, эта задача не содержит однородных краевых условий. Однако ее тоже можно решать методом Фурье по обычной схеме.

I этап. Ищем решение в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Как и в случае конечного стержня, решение уравнения (3.25) имеет вид

$$u(x, t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Так как граничные условия отсутствуют, то параметр λ остается произвольным, $\lambda \in (-\infty; +\infty)$. Будем брать для каждого λ свои постоянные A и B , т.е. $A = A(\lambda)$, $B = B(\lambda)$. Тогда получаем семейство решений уравнения (3.25)

$$u_\lambda(x, t) = (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t},$$

где $x \in (-\infty; +\infty)$.

II этап. С помощью найденных решений $u_\lambda(x, t)$ построим решение уравнения (3.25), удовлетворяющее начальному условию (3.26). Проинтегрируем (просуммируем) $u_\lambda(x, t)$ по λ :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_\lambda(x, t) d\lambda.$$

Покажем, что если этот интеграл сходится, то функция $u(x, t)$ является решением уравнения (3.25). Подставим $u(x, t)$ в уравнение (3.25). Считая возможным дифференцирование под знаком интеграла, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} d\lambda; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} d\lambda.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x^2} \right) d\lambda.$$

Подынтегральная функция обращается в ноль, так как при любом λ функция $u_\lambda(x, t)$ является решением уравнения (3.25). Итак, решение уравнения (3.25) имеет вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x) e^{-a^2\lambda^2 t} d\lambda \quad (3.27)$$

при любых $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, при которых интеграл сходится и возможно дифференцирование под знаком интеграла.

Подберем теперь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы выполнялось начальное условие (3.26):

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x) d\lambda = f(x).$$

Получили интеграл Фурье для функции $f(x)$, поэтому функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cos\lambda s ds; \\ B(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\sin\lambda s ds. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Подставим формулы (3.28) в выражение (3.27), получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) (\cos \lambda s \cos \lambda x + \sin \lambda s \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t} ds,$$

или окончательно

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) \cos \lambda(s-x) e^{-a^2 \lambda^2 t} ds. \quad (3.29)$$

Это и есть решение задачи (3.25), (3.26).

Замечание. Поменяем в представлении (3.29) порядок интегрирования:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(s-x) d\lambda.$$

Внутренний интеграл можно вычислить. Действительно, положим

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \lambda(s-x) = \mu z.$$

Тогда

$$d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad \mu = \frac{s-x}{a\sqrt{t}}.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(s-x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz = \frac{1}{a\sqrt{t}} I(\mu).$$

Дифференцируя интеграл $I(\mu)$ по параметру μ , найдем, что

$$I'(\mu) = - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} z \sin \mu z dz,$$

причем это дифференцирование законно в силу равномерной сходимости полученного интеграла. Интегрируя далее по частям, имеем

$$I'(\mu) = - \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz = - \frac{\mu}{2} I(\mu).$$

Получили дифференциальное уравнение

$$I'(\mu) = - \frac{\mu}{2} I(\mu),$$

общим решением которого является множество функций

$$I(\mu) = C e^{-\mu^2/4}.$$

Для того чтобы найти постоянную C , полагаем $\mu = 0$. Это дает

$$C = I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Поэтому

$$I(\mu) = \sqrt{\pi} e^{-\mu^2/4},$$

и внутренний интеграл будет равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(s-x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} I\left(\frac{s-x}{a\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(s-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Подставив это соотношение в (3.29), окончательно получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds. \quad (3.30)$$

Последний интеграл носит название *интеграла Пуассона*.

Примем без доказательства следующую теорему.

Терема 3.3. Если функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на всей числовой оси, то решение задачи (3.25), (3.26) представимо в виде (3.29) или в виде интеграла Пуассона (3.30).

Замечание. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то функция $u(x,t)$, определяемая формулой (3.30), непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка по x и t при $x \in (-\infty, +\infty)$ и $t \in (0, +\infty)$.

3.5. ЗАДАЧА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

Рассмотрим задачу о распределении температуры в полубесконечном стержне, у которого на конце $x = 0$ поддерживается нулевая температура.

Пусть

$$D = \{(x;t) : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq t < +\infty\}.$$

Имеем задачу: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in D, \quad (3.31)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = f(x) \quad (3.32)$$

и краевому условию

$$u(0,t) = 0. \quad (3.33)$$

Здесь функция $f(x)$ определена на промежутке $[0; +\infty)$. Будем полагать, кроме того, что она непрерывна и ограничена на этом промежутке и $f(0) = 0$.

В случае бесконечного стержня, т.е. для задачи Коши (3.31), (3.32), решение находится по формуле Пуассона (3.30). Перепишем эту формулу в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int_{-\infty}^0 f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds + \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds \right) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int_0^{+\infty} f(-s) e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}} ds + \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} ds \right) = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(f(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} + f(-s) e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}} \right) ds. \end{aligned}$$

Но функция $f(x)$ не определена при отрицательных значениях аргумента. Доопределим ее так, чтобы выполнялось краевое условие (3.33):

$$u(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4a^2t}} (f(s) + f(-s)) ds = 0.$$

Поскольку $f(s)$ – произвольная непрерывная функция при $s \geq 0$, а $e^{-s^2/(4a^2t)} > 0$, то последнее равенство будет выполняться, если

$$f(-s) = -f(s),$$

т.е. функцию $f(x)$ нужно продолжить нечетным образом в промежуток $(-\infty; 0)$. Тогда получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(s) \left(e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2t}} \right) ds.$$

Эта функция является решением задачи (3.31), (3.32), (3.33).

3.6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КРУГА

Пусть область D – круг:

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Тогда границей круга является линия

$$\Gamma = \{(x, y): x^2 + y^2 = R^2\}.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3.34)$$

если $(x, y) \in D$, и граничному условию

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (3.35)$$

если $(x, y) \in \Gamma$. Эта задача является задачей Дирихле.

Для решения задачи удобно воспользоваться полярными координатами ρ и φ . За полюс этой системы координат выберем центр круга D . Тогда в граничном условии (3.35) функция $g(x, y)$ в полярных координатах будет функцией одной переменной φ , так как $\rho = R = \text{const}$ на Γ . А это позволит применить для решения задачи метод Фурье.

Формулы преобразования координат задаются системами уравнений:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pm \frac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Тогда

$$u(x, y) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \bar{u}(\rho, \varphi);$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\rho \cos \varphi}{\rho} = \cos \varphi; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\rho \sin \varphi}{\rho^2} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции двух переменных

найдем частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ как функции полярных координат:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho} + \\ &+ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \sin \varphi - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \sin \varphi + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\rho^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi \partial \rho} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + \\ &+ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\rho} + \\ &+ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\rho^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}, \end{aligned}$$

и уравнение Лапласа в полярных координатах примет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (3.36)$$

если $(\rho; \varphi) \in \bar{D}$, где $\bar{D} = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \rho < R, -\infty < \varphi < +\infty\}$.

Учитывая, что $g(x, y) = g(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = \bar{g}(\varphi)$, граничное условие примет вид

$$\bar{u}(R, \varphi) = \bar{g}(\varphi). \quad (3.37)$$

Для решения задачи (3.36), (3.37) применим метод Фурье.

I этап. Будем искать решение задачи в виде

$$\bar{u}(\rho, \varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi).$$

Подставим это выражение в (3.32), получим

$$P''(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho}P'(\rho)\Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2}P(\rho)\Phi''(\varphi) = 0$$

или, разделив переменные,

$$\frac{\rho^2 \left(P''(\rho) + \frac{1}{\rho}P'(\rho) \right)}{P(\rho)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = C = \text{const.}$$

Найдем $\Phi(\varphi)$ из уравнения

$$\Phi''(\varphi) + C\Phi(\varphi) = 0. \quad (3.38)$$

Так как $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, то из трех возможных ситуаций: $C = 0$, $C = \lambda^2 > 0$, $C = -\lambda^2 < 0$ – подходит вторая. Тогда общее решение дифференциального уравнения (3.38) примет вид

$$\Phi(\varphi) = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi.$$

Из 2π -периодичности функции $\Phi(\varphi)$ следует также, что $\lambda = k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, т.е.

$$\Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi.$$

Найдем $P(\rho)$ из уравнения

$$P''(\rho) + \frac{1}{\rho}P'(\rho) - \frac{k^2}{\rho^2}P(\rho) = 0. \quad (3.39)$$

Это линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, коэффициенты которого $1/\rho$, $-k^2/\rho^2$ не являются постоянными, а есть функции переменной ρ .

При $k > 0$ будем искать решение уравнения (3.39) в виде $P(\rho) = \rho^m$.

Подставим в уравнение, получим

$$m(m-1)\rho^{m-2} + m\rho^{m-2} - k^2\rho^{m-2} = 0,$$

или

$$m^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm k.$$

Решения $P_1(\rho) = \rho^k$ и $P_2(\rho) = \rho^{-k}$ уравнения (3.39) являются линейно-независимыми функциями. Действительно, определитель Вронского для них

$$W(\rho) = \begin{vmatrix} \rho^k & \rho^{-k} \\ k\rho^{k-1} & -k\rho^{-k-1} \end{vmatrix} = -\frac{k}{\rho} - \frac{k}{\rho} = -\frac{2k}{\rho} \neq 0,$$

так как $k \neq 0$. Следовательно, $P_1(\rho)$ и $P_2(\rho)$ образуют фундаментальную систему решений, и общее решение уравнения (3.39) примет вид

$$P_k(\rho) = C_k \rho^k + D_k \rho^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Функция ρ^{-k} обращается в бесконечность в центре круга D . Если $D_k \neq 0$, то $P_k(\rho)$ при $\rho = 0$ обращается в бесконечность, поэтому функция

$$\bar{u}_k(\rho, \varphi) = P_k(\rho)\Phi_k(\varphi)$$

будет разрывная при $\rho = 0$, в центре круга D , что противоречит условию задачи. Следовательно, $D_k = 0$, и решения уравнения (3.36) примут вид:

$$\bar{u}_k(\rho, \varphi) = P_k(\rho)\Phi_k(\varphi) = \rho^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

где $a_k = C_k A_k$, $b_k = C_k B_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

При $k = 0$ уравнение (3.39) примет вид

$$P''(\rho) + \frac{1}{\rho} P'(\rho) = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка. Делаем замену $P'(\rho) = V(\rho)$, получаем $P''(\rho) = V'(\rho)$ и дифференциальное уравнение первого порядка

$$V'(\rho) + \frac{1}{\rho} V(\rho) = 0.$$

Его общее решение $V(\rho) = C_1/\rho$. Тогда, возвращаясь к старым переменным, имеем

$$P'(\rho) = \frac{C_1}{\rho} \Rightarrow P(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Это решение также обращается в бесконечность при $\rho = 0$, поэтому $C_1 = 0$ и $P_0 = C_2$. Решение уравнения (3.36) примет вид

$$\bar{u}_0(\rho, \varphi) = P_0(\rho)\Phi_0(\varphi) = \frac{a_0}{2},$$

где $a_0 = 2C_2A_0$.

II этап. Составим ряд из функций $\bar{u}_k(\rho, \varphi)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Предположим, что этот ряд сходится, и обозначим через $\bar{u}(\rho, \varphi)$ сумму ряда

$$\bar{u}(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \rho^k. \quad (3.40)$$

Если этот ряд сходится и допускает дважды почленное дифференцирование по ρ и φ , то в силу линейности и однородности уравнения (3.36) функция $\bar{u}(\rho, \varphi)$ является его решением.

Подберем коэффициенты a_0 , a_k и b_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, так, чтобы $\bar{u}(\rho, \varphi)$ удовлетворяла краевому условию (3.37), т.е.

$$\bar{u}(R, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} R^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = \bar{g}(\varphi).$$

Последнее равенство представляет собой разложение функции $\bar{g}(\varphi)$ в ряд Фурье, поэтому

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\varphi) d\varphi; & R^k a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\varphi) \cos k\varphi d\varphi; \\ R^k b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\varphi) \sin k\varphi d\varphi, & k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$

Итак, решением задачи (3.36), (3.37) является сумма $\bar{u}(\rho, \varphi)$ ряда (3.40), коэффициенты которого a_k и b_k вычисляются по формулам (3.41).

Можно получить решение задачи (3.36), (3.37) не в виде ряда, а в виде интеграла. Для этого преобразуем $\bar{u}(\rho, \varphi)$, подставив в равенство (3.40) формулы (3.41):

$$\begin{aligned}\bar{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k (\cos k\tau \cos k\varphi + \sin k\tau \sin k\varphi) \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \cos k(\tau - \varphi) \right) d\tau.\end{aligned}$$

Согласно формуле Эйлера $\cos \alpha = (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})/2$ получаем

$$\bar{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \frac{1}{2} (e^{ik(\tau-\varphi)} + e^{-ik(\tau-\varphi)}) \right) d\tau.$$

Имеем суммы двух геометрических прогрессий

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} e^{i(\tau-\varphi)} \right)^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} e^{-i(\tau-\varphi)} \right)^k,$$

модули знаменателей которых

$$\left| \frac{\rho}{R} e^{i(\tau-\varphi)} \right| = \left| \frac{\rho}{R} e^{-i(\tau-\varphi)} \right| = \frac{\rho}{R} < 1.$$

Тогда по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем

$$\begin{aligned}\bar{u}(\rho, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\tau) \left(1 + \frac{\frac{\rho}{R} e^{i(\tau-\varphi)}}{1 - \frac{\rho}{R} e^{i(\tau-\varphi)}} + \frac{\frac{\rho}{R} e^{-i(\tau-\varphi)}}{1 - \frac{\rho}{R} e^{-i(\tau-\varphi)}} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\tau) \left(1 + \frac{\rho}{R} \frac{-2\frac{\rho}{R} + 2\cos(\tau-\varphi)}{1 - 2\frac{\rho}{R}\cos(\tau-\varphi) + \frac{\rho^2}{R^2}} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\tau) \left(1 - \frac{2R\rho\cos(\tau-\varphi) - 2\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\tau-\varphi) + \rho^2} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{g}(\tau) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\tau-\varphi) + \rho^2} d\tau.\end{aligned}$$

Последний интеграл называется интегралом Пуассона. Получили решение задачи Дирихле в круге в форме интеграла, зависящего от параметров ρ и φ . Он существует для всех значений ρ и φ , таких, что $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$, и удовлетворяет уравнению (3.36) и краевому условию (3.37).

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 3.4. Если функция $\bar{g}(\varphi)$ непрерывна на границе Γ круга D , то задача Дирихле имеет единственное решение, которое представляется интегралом Пуассона.

Замечание. Интеграл Пуассона теряет смысл при $\rho = R$ (подынтегральная функция обращается в нуль при $\tau \neq \varphi$ и в бесконечность при $\tau = \varphi$, и говорить об интеграле от такой функции не имеет смысла). Поэтому когда говорят, что функция $\bar{u}(\rho, \varphi)$, представляемая интегралом Пуассона, удовлетворяет граничным условиям, то под этим подразумевают, что

$$\lim_{\rho \rightarrow R} \bar{u}(\rho, \varphi) = \bar{g}(\varphi) \text{ при любом постоянном } \varphi.$$

4. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений можно использовать интегральное преобразование Лапласа

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (4.1)$$

Здесь комплекснозначную функцию $f(t)$ действительного переменного t называют оригиналом, а функцию $F(p)$ комплексного переменного – p -изображением. Дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на переменную p , поэтому задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами приводятся к алгебраическим задачам для изображений.

Аналогична идея применения интегральных преобразований в уравнениях математической физики: выбирают интегральное преобразование, которое позволило бы дифференциальные операции по одной из переменных заменить алгебраическими операциями. Поэтому задача для уравнения в частных производных преобразуется в задачу для обыкновенного дифференциального уравнения. Найдя решение преобразованной задачи, с помощью обратного преобразования находят и решение исходной.

Наиболее часто применяемыми интегральными преобразованиями являются преобразование Лапласа (4.1) и преобразование Фурье:

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ist} dt. \quad (4.2)$$

Для последнего обратным будет преобразование

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{ist} ds. \quad (4.3)$$

Рассмотрим примеры применения интегральных преобразований для решения задач математической физики.

4.1. ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

Рассмотрим задачу: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = f(x). \quad (4.5)$$

Будем предполагать, что функция $f(x)$ обращается в нуль вне некоторой конечной области.

Решим эту задачу с помощью интегрального преобразования Фурье (4.2), полагая

$$\bar{u}(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ixs} dx,$$

где t – параметр.

Перейдем в уравнении (4.4) от оригиналов $u(x, t)$ к изображениям $\bar{u}(s, t)$. По теореме о дифференцировании интеграла по параметру

$$\bar{u}'_t(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_t(x, t) e^{-ixs} dx.$$

Затем найдем изображение функции $u'_t(x, t)$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_x(x, t) e^{-ixs} dx.$$

Возьмем этот интеграл по частям:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_x(x, t) e^{-ixs} dx = \frac{1}{2\pi} u(x, t) e^{-ixs} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{is}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ixs} dx.$$

Функция $u(x, t)$ при фиксированном t обращается в нуль вне некоторой конечной области в силу предположения для функции $f(x)$ и того, что за конечный промежуток времени тепло, распространяющееся с конечной скоростью, проходит лишь конечное расстояние. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} u(x, t) e^{-ixs} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

и
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_x(x,t) e^{-ixs} dx = \frac{is}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x(x,t) e^{-ixs} dx = is \bar{u}(s,t).$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u''_{xx}(x,t) e^{-ixs} ds = is(is \bar{u}(s,t)) = -s^2 u(s,t).$$

В силу линейности преобразования Фурье преобразованное уравнение (4.4) примет вид

$$u'_t(s,t) + s^2 a^2 \bar{u}(s,t) = 0. \quad (4.6)$$

Начальное условие (4.5) примет вид

$$\bar{u}(s,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixs} dx. \quad (4.7)$$

Получили задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, где s – параметр.

Общим решением уравнения (4.6) является множество функций

$$\bar{u}(s,t) = C e^{-s^2 a^2 t}.$$

Постоянную C , которая может зависеть от параметра s , найдем из начального условия (4.7):

$$\bar{u}(s,0) = C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixs} dx.$$

Тогда решением задачи Коши (4.6), (4.7) является функция

$$\bar{u}(s,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-s^2 a^2 t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\tau s} d\tau. \quad (4.8)$$

Функция (4.8) является решением преобразованной задачи. На основании обратного преобразования Фурье (4.3) получаем решение задачи (4.5), (4.4) в виде

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(s,t) e^{ixs} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs} e^{-s^2 a^2 t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\tau s} d\tau \right) ds.$$

Поменяем порядок интегрирования, получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 a^2 t} e^{is(x-\tau)} ds \right) d\tau. \quad (4.9)$$

Внутренний интеграл можно вычислить по формуле Эйлера:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 a^2 t} e^{is(x-\tau)} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 a^2 t} \cos s(x-\tau) ds + i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 a^2 t} \sin s(x-\tau) ds.$$

Первый интеграл в правой части равенства вычислен выше в п. 3.3:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 a^2 t} \cos s(x-\tau) ds = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}}.$$

Второй интеграл также сходится и, как интеграл от нечетной функции, равен нулю. Подставив эти интегралы в равенство (4.9), окончательно получим решение задачи (4.4), (4.5) в виде интеграла Пуассона:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} d\tau.$$

4.2. ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ

Рассмотрим задачу: найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{4.10}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = 0 \text{ при } x > 0, \tag{4.11}$$

и краевому условию первого типа

$$u(0,t) = \varphi(t). \tag{4.12}$$

Чтобы согласовать начальное и граничное условия, положим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 0, \\ \varphi(0) & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Будем решать задачу (4.10) – (4.12) с помощью преобразования Лапласа (4.1), полагая, что $u(x,t)$ является оригиналом, как функция переменного t , и

$$u(x,t) \doteq \bar{u}(x,t),$$

где x – параметр, $x > 0$.

Случай 1. $\varphi(t) = u_0 = \text{const}$. Перейдем в уравнении (4.10) от оригиналов к изображениям. По теореме о дифференцировании оригинала

$$u'_t(x, t) \doteq p\bar{u}(x, p) - u(x, 0) = p\bar{u}(x, p).$$

Применяя теорему о дифференцировании интеграла по параметру x , получим

$$u'_x(x, t) \doteq \bar{u}'_x(x, p), \quad u''_{xx}(x, t) \doteq \bar{u}''_{xx}(x, p).$$

Таким образом, изображение решения $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$u''_{xx}(x, p) - \frac{P}{a^2} \bar{u}_{xx}(x, p) = 0. \quad (4.13)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, здесь p – параметр.

В краевом условии (4.12) перейдем от оригиналов к изображениям.

Учитывая, что $u_0 \doteq \frac{u_0}{p}$, получим,

$$\bar{u}(0, p) = \frac{u_0}{p}. \quad (4.14)$$

Это условие является начальным условием для уравнения (4.13).

Общее решение уравнения (4.13)

$$\bar{u}(x, p) = C_1 e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}} + C_2 e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} \quad (4.15)$$

содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 . Для их определения одного условия (4.14) недостаточно. В качестве второго условия используем факт, вытекающий из физического смысла задачи: $u(x, t)$ ограничена при $x \rightarrow +\infty$, так как $\varphi(t) = u_0$ и внутренних источников тепла нет. Но тогда можно показать, что $\bar{u}(x, p)$ тоже ограничена при $x \rightarrow +\infty$. \sqrt{p} имеет два значения, отличающихся знаком. Для определенности будем считать, что $\text{Re}(\sqrt{p}) > 0$, а $\text{Re}(-\sqrt{p}) < 0$. Тогда

$$\left| e^{\frac{x\sqrt{p}}{a}} \right| = e^{\frac{x}{a} \text{Re} \sqrt{p}} \rightarrow +\infty, \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

$$\left| e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} \right| = e^{\frac{x}{a} \operatorname{Re}(-\sqrt{p})} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

Так как $\bar{u}(x, p)$ при $x \rightarrow +\infty$ ограничена, то $C_1 = 0$, и решением уравнения (4.13) является функция

$$\bar{u}(x, p) = C_2 e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

Постоянную C_2 найдем из условия (4.14): $C_2 = \frac{u_0}{p}$. Таким образом,

искомое изображение

$$\bar{u}(x, p) = \frac{u_0}{p} e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

По таблице преобразований Лапласа [6] находим оригинал

$$\frac{1}{p} e^{-\alpha\sqrt{p}} \doteq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy.$$

При $\alpha = \frac{x}{a}$ получаем

$$u(x, t) = u_0 \left(1 - \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right), \quad t > 0, \quad (4.16)$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy$ – интеграл вероятностей.

Найденное решение $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.10) и краевому условию (4.12). Покажем, что оно удовлетворяет и начальному условию

(4.11). При $t \rightarrow +0$ справедливо $\frac{x}{2a\sqrt{t}} \rightarrow +\infty$. По свойствам интеграла вероятностей имеем

$$\Phi(+\infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-y^2} dy = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = u_0(1 - \Phi(+\infty)) = 0,$$

т.е. решение (4.16) удовлетворяет начальному условию (4.11). Итак, решением задачи (4.10) – (4.12) является функция (4.16).

Случай 2. $\varphi(t)$ – любой оригинал и $\varphi(t) \doteq \bar{\varphi}(p)$. Тогда решение уравнения (4.13) определяется равенством (4.15). Из краевого условия (4.12) получим $\bar{u}(0, p) = \bar{\varphi}(p)$. Тогда постоянная $C_2 = \bar{\varphi}(p)$. Таким образом, изображением решения задачи (4.10) – (4.12) является функция

$$\bar{u}(x, p) = \bar{\varphi}(p) e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}}.$$

По таблице преобразований Лапласа [6] находим оригинал

$$u(0, t) = \varphi(t),$$

поэтому

$$e^{-\frac{x\sqrt{p}}{a}} = \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t^2}}.$$

Теперь по теореме об умножении изображений

$$u(x, t) = \frac{x}{4a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}} ds. \quad (4.17)$$

Доказательство того, что $u(x, t)$ удовлетворяет начальному условию (4.11), в этом случае очень громоздкое, поэтому его не приводим.

Замечание 1. Если $\varphi(t)$ – оригинал, то формула (4.17) дает обобщенное решение задачи (4.10) – (4.12).

Замечание 2. Решение задачи (4.10) – (4.12) для случая 1 получено в виде (4.15), в котором используется интеграл вероятностей $\Phi(z)$. Для вычисления значения функции $\Phi(z)$ пользуются специальной таблицей (см. например [5], табл. 3 на стр.411). Графиком функции $\Phi(z)$ является кривая, изображенная на рис. 4.1.

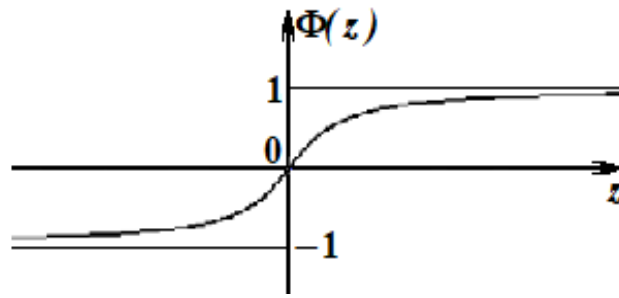


Рис. 4.1

Замечание 3. В пункте 3.4 рассмотрена задача о распространении тепла в полубесконечном стержне с однородными (нулевыми) граничными условиями. Здесь мы рассматривали задачу с однородными начальными условиями. С помощью преобразований Лапласа можно получить решение задачи и с однородными начальными условиями. В этом случае функция $u(x, t)$ должна являться оригиналом, как функция переменной x , т.е. t будет параметром.

5. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ

В параграфе 3 рассмотрен метод Фурье решения задач математической физики с однородными уравнениями и однородными краевыми условиями. Неоднородными были только начальные условия. Однако этот метод можно распространить и на неоднородные задачи. Ниже приведены способы решения задачи математической физики с неоднородным уравнением и однородными краевыми условиями и задачи с неоднородными краевыми условиями.

Кроме того, решение задачи с однородным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

неоднородным начальным условием

$$u(x, 0) = f(x) \quad (5.2)$$

и неоднородным краевым условием

$$u(0, t) = \varphi(t) \quad (5.3)$$

можно получить, опираясь на результаты п. 3.4 и 4.2. Решением задачи (5.1) – (5.3) будет функция

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где $u_1(x, t)$ – решение задачи (3.27) – (3.29), а $u_2(x, t)$ – решение задачи (4.10) – (4.12). Легко проверить, что функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (5.1) и условиям (5.2) и (5.3). Используя представления функций $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(s) \left(e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}} \right) ds + \frac{x}{4a\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-s)}} ds.$$

5.1. МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим этот метод на примере волнового уравнения. Имеем задачу: найти решение уравнения

$$u_{tt}''(x, t) = a^2 \bar{u}_{xx}'' + g(x, t), \quad (5.4)$$

где $g(x, t) \neq 0$ ни в одной точке, удовлетворяющего начальным условиям:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u'_t(x, 0) = F(x) \quad (5.5)$$

и краевым условиям:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (5.6)$$

Здесь уравнение (5.4) и начальные условия (5.5) (если $f(x)$ или $F(x)$ тождественно не равны нулю) являются неоднородными, а краевые условия (5.6) – однородные.

Решая соответствующую задачу (2.1), (2.3) и (2.5) с однородным уравнением методом Фурье, получаем собственные функции $\{\sin k\pi x/l\}$ и решение в виде ряда (3.15). Будем искать решение задачи (5.4) – (5.6) также в виде ряда по собственным функциям $\{\sin k\pi x/l\}$, а именно

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (5.7)$$

Этот ряд удовлетворяет краевым условиям (5.6).

Подберем функции $c_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, так, чтобы ряд (5.7) удовлетворял уравнению (5.4) и начальным условиям (5.5). Для этого функцию $g(x, t)$ разложим в ряд по функциям $\{\sin k\pi x/l\}$, считая переменную t параметром:

$$g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Тогда уравнение (5.4) примет вид

$$u''_{tt} \doteq a^2 u''_{xx} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (5.8)$$

Допуская возможность почленного дифференцирования ряда, имеем:

$$u''_{tt}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c''_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$u''_{xx}(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя это в уравнение (5.8), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k''(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравняем коэффициенты при $\{\sin k\pi x/l\}$, получим

$$c_k''(t) = -\frac{k^2 \pi^2 a^2}{l^2} c_k(t) + b_k(t), \quad (5.9)$$

где $k = 1, 2, \dots$. Каждое из этих уравнений является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Общие решения уравнений зависят от двух произвольных постоянных, для определения которых должны быть заданы начальные условия, т.е. для каждого номера k должны быть заданы числа $c_k(0)$ и $c_k'(0)$. Эти числа легко найти из начальных условий (5.5). Действительно, согласно условиям (5.5):

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x);$$

$$u_t'(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k'(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = F(x).$$

Эти равенства можно рассматривать как разложения функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по синусам, поэтому числа $c_k(0)$ и $c_k'(0)$ являются соответствующими коэффициентами Фурье:

$$c_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx;$$

$$c_k'(0) = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Это и будут начальные условия для функций $c_k(t)$. Найдя все $c_k(t)$ как решения задачи Коши (5.9), (5.10) и подставив их в ряд (5.7), получим искомого решение задачи (5.4) – (5.6).

Аналогично решается задача для неоднородного уравнения теплопроводности.

5.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С НЕОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Во многих случаях при решении задачи с неоднородными граничными условиями можно с помощью замены переменной свести данную задачу к задаче с однородными граничными условиями.

Рассмотрим, например, задачу для уравнения колебания струны (5.4), (5.5) с неоднородными граничными условиями:

$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(l,t) = \beta(t), \quad (5.11)$$

где $\alpha(t)$ или $\beta(t)$ тождественно не равны нулю.

Для того чтобы свести эту задачу к задаче с однородными краевыми условиями, сделаем замену переменной

$$v(x,t) = u(x,t) - w(x,t), \quad (5.12)$$

где $w(x,t)$ – какая угодно функция, удовлетворяющая условию (5.11). Проще всего в качестве такой функции взять функцию, линейную относительно x :

$$w(x,t) = \alpha(t) + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} x.$$

Если функция $w(x,t)$ выбрана таким способом, то функция (5.12) удовлетворяет нулевым граничным условиям. Действительно,

$$v(0,t) = u(0,t) - w(0,t) = \alpha(t) - \alpha(t) \equiv 0,$$

$$v(l,t) = u(l,t) - w(l,t) = \beta(t) - \beta(t) \equiv 0.$$

Искомая функция $u(x,t)$ должна удовлетворять уравнению (5.4) и начальным условиям (5.5), поэтому функция $w(x,t)$ должна удовлетворять уравнению

$$v_{tt}'' + w_{tt}'' = a^2(v_{xx}'' + w_{xx}'') + g(x,t)$$

или, так как $w_{xx}'' = 0$,

$$v_{tt}'' - a^2 v_{xx}'' = g(x,t) - w_{tt}''(x,t) \quad (5.13)$$

и начальным условиям:

$$v(x,0) = u(x,0) - w(x,0) = f(x) - \alpha(0) - \frac{\beta(0) - \alpha(0)}{l} x; \quad (5.14)$$

$$v'_t(x,0) = u'_t(x,0) - w'_t(x,0) = F(x) - \alpha'(0) - \frac{\beta'(0) - \alpha'(0)}{l} x. \quad (5.15)$$

Кроме того, функция $v(x,t)$ удовлетворяет нулевым краевым условиям $v(0,t) = 0, v(l,t) = 0$.

Для того чтобы найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (5.13), начальным условиям (5.14), (5.15) и нулевым граничным условиям, достаточно применить метод Фурье, рассмотренный в п. 5.1. Зная $v(x,t)$, можно из формулы (5.12) найти $u(x,t)$. В силу единственности решения заключаем, что других решений задача (5.4), (5.5), (5.11) не имеет.

Аналогично может быть решена задача и для уравнения теплопроводности. В случае краевых условий II или III типа формула (5.12) для функций $w(x,t)$ не подходит, так как не приводит к однородным краевым условиям. В качестве $w(x,t)$, если заданы условия:

$$u'_x(0,t) = \alpha(t); u'_x(l,t) = \beta(x),$$

можно взять функцию

$$w(x,t) = \alpha(t)x + \frac{\beta(t) - \alpha(t)}{l} \frac{x^2}{2}.$$

Если заданы краевые условия:

$$u(0,t) = \alpha(t); u'(l,t) = \beta(t),$$

то в качестве $w(x,t)$ можно использовать функцию

$$w(x,t) = \alpha(t) + \frac{\beta(t)}{l} \frac{x^2}{2}.$$

В обоих случаях функция $w(x,t)$ выбрана так, чтобы $v(x,t)$, определяемая равенством (5.12), удовлетворяла соответствующим краевым однородным условиям:

$$u'_x(0,t) = 0; u'_x(l,t) = 0,$$

или

$$u(0,t) = 0; u'_x(l,t) = 0.$$

6. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Преыдушие параграфы были посвящены решению отдельных задач математической физики – задач для линейных уравнений второго порядка. Сейчас будем исходить не из той или иной физической задачи, а непосредственно из математической задачи исследования и решения квазилинейного уравнения второго порядка в частных производных.

6.1. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ. КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД

Наиболее общее уравнение в частных производных второго порядка в случае $u = u(x, y)$ имеет вид

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) = 0. \quad (6.1)$$

Уравнение (6.1) называется *квазилинейным*, если функция F линейная относительно всех вторых производных, т.е. уравнение вида

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0. \quad (6.2)$$

Метод решения уравнения (6.2) и характер описываемого им физического процесса зависят от функции

$$\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y).$$

Определение 1. Дифференциальное уравнение (6.2) в точке (x, y) принадлежит гиперболическому типу, если $\delta(x, y) > 0$; параболическому типу, если $\delta(x, y) = 0$; эллиптическому типу, если $\delta(x, y) < 0$.

В волновом уравнении (1.1) $\delta = a^2 > 0$, следовательно, это уравнение гиперболического типа во всех точках области $D \subset R^2$. В уравнении теплопроводности (1.4) $\delta = 0 \cdot a^2 = 0$, следовательно, это уравнение параболического типа во всех точках области $D \subset R^2$. В уравнении Лапласа (1.5) $\delta = -1$, следовательно, это уравнение эллиптического типа во всех точках области $D \subset R^2$.

Может оказаться, что в различных точках области уравнение (6.2) принадлежит различным типам. В этом случае будем его называть уравнением смешанного типа. Например, уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$\delta = -y$. Если $y < 0$, то уравнение гиперболического типа; если $y > 0$, то эллиптического типа; если $y = 0$, то параболического. Поэтому в любой окрестности точек оси Ox это уравнение смешанного типа.

Можно подобрать такую замену переменных x и y , что уравнение (6.2) примет более простой вид. Введем вместо x и y новые независимые переменные ξ и η :

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (6.3)$$

такие, что при переходе в уравнении (6.2) к переменным ξ и η тип уравнения не изменяется. Самый простой вид, к которому можно привести уравнение (6.2), – канонический.

Определение 2. Уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \Phi \left(\eta, \xi, u, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \quad (6.4)$$

где $\lambda = 0, 1, -1$, называется каноническим видом уравнения (6.2).

Если уравнение (6.2) гиперболического типа, то $\lambda = -1$; если параболического, то $\lambda = 0$; если эллиптического, то $\lambda = 1$.

6.2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассмотрим уравнение (6.2). Будем предполагать, что функции $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно в некоторой области $D \subset R^2$ и $A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$ в области D .

Упростим уравнение (6.2), т.е. приведем его к каноническому виду с помощью замены переменных (6.3). Функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ подберем позднее, пока будем считать их дифференцируемыми нужное число раз.

Выразим частные производные функции u по x и y через производные по ξ и η . По теореме о дифференцировании сложной функции двух переменных имеем:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta'_x; \quad u''_{xx} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)'_x \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi''_{xx} + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)'_x \eta'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta''_{xx} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \eta'_x \right)'_x \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi''_{xx} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \xi'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \eta'_x \right)'_x \eta'_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta''_{xx} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (\xi'_x)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \xi'_x \eta'_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (\eta'_x)^2 \right)'_x \xi'_x + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi''_{xx}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} u'_y &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi'_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta'_y; \\ u''_{xy} &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \xi'_x \xi'_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \eta'_x \eta'_y \right] + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi''_{xy} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta''_{xy}, \\ u''_{yy} &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (\xi'_y)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \eta'_y \eta'_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (\eta'_y)^2 \right]' + \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi''_{yy} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta''_{yy}. \end{aligned}$$

Подставляя u'_x , u'_y , u''_{xx} , u''_{xy} , u''_{yy} из этих формул в уравнение (6.2), получим

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F} = 0, \quad (6.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A(\xi'_x)^2 + 2B\xi'_x \xi'_y + C(\xi'_y)^2; \\ \bar{B} &= A\xi'_x \eta'_x + B(\xi'_x \eta'_y + \xi'_y \eta'_x) + C\xi'_y \eta'_y; \\ \bar{C} &= A(\eta'_x)^2 + 2B\eta'_x \eta'_y + C(\eta'_y)^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Если система (6.3) однозначно разрешима, то выразив x и y через ξ и η , подставив их в функции \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} и \bar{F} , получим уравнение (6.5) с независимыми переменными ξ и η . Итак, в результате замены переменных в квазилинейном уравнении (6.2) получили квазилинейное уравнение (6.5), коэффициенты которого вычисляются по формулам (6.6).

Функции $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ будем выбирать так, чтобы решить две задачи:

- 1) уравнения (6.2) и (6.5) должны быть одного типа;
- 2) уравнение (6.5) должно иметь канонический вид.

Первую задачу позволяет решить следующая теорема.

Теорема 6.1. Если якобиан

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \xi'_x(x, y) & \xi'_y(x, y) \\ \eta'_x(x, y) & \eta'_y(x, y) \end{vmatrix} \neq 0$$

в области $D \subset R^2$, то преобразование (6.3) независимых переменных уравнения (6.2) не меняет тип уравнения в области D .

Доказательство. Условие $J(x, y) \neq 0$ в области D является достаточным для того, чтобы система (6.3) была однозначно разрешима, т.е. имела единственное решение $x = x(\xi, \eta)$ и $y = y(\xi, \eta)$ или, другими словами, функции $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ отображают область D плоскости Oxy на область \bar{D} плоскости $O\xi\eta$; при этом каждой точке $(\xi, \eta) \in \bar{D}$ соответствует только одна точка области D (т.е. функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области D на \bar{D}).

Найдем $\bar{\delta}(\xi, \eta)$, если $(\xi, \eta) \in \bar{D}$, $\bar{\delta}(\xi, \eta) = \bar{B}^2(\xi, \eta) - \bar{A}(\xi, \eta)\bar{C}(\xi, \eta)$. Непосредственной подстановкой формул (6.6) нетрудно проверить, что

$$\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = (B^2 - AC) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2.$$

Левая и правая части этого равенства есть функции от ξ и η . Вернемся в правой части равенства к старым переменным x и y , получим:

$(B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y))J^2(x, y) = \delta(x, y)J^2(x, y)$, $(x, y) \in D$, $J(x, y) \neq 0$ в D , следовательно, $\delta(x, y)$ при $(x, y) \in D$ и $\bar{\delta}(\xi, \eta)$ при $(\xi, \eta) \in \bar{D}$ имеют один и тот же знак или одновременно равны нулю. Тип уравнения не меняется.

Теорема 6.1 доказана.

Замечание. Как было отмечено в доказательстве теоремы, условие $J(x, y) \neq 0$ является достаточным для того, чтобы система (6.3) была однозначно разрешима.

6.3. УРАВНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК

Будем решать вторую задачу: подберем функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ так, чтобы уравнение (6.5) имело наиболее простой вид (желательно канонический). Уравнение (6.5) становится простым, если $\bar{A} = \bar{C} = 0$. Для этого функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ нужно подобрать так, чтобы они являлись решениями уравнения

$$A(z'_x)^2 + 2Bz'_xz'_y + C(z'_y)^2 = 0. \quad (6.7)$$

Это нелинейное уравнение в частных производных первого порядка. Для решения уравнения (6.7) удобно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема 6.2. Для того чтобы функция $z = z(x, y)$, определенная во всех точках области D , удовлетворяла уравнению (6.7), необходимо и достаточно, чтобы каждая кривая семейства

$$z(x, y) = k$$

являлась интегральной кривой уравнения

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = 0 \quad (6.8)$$

в области D .

Доказательство. Необходимость. Пусть $z = z(x, y)$ – решение уравнения (6.7), l – произвольная кривая семейства $z(x, y) = k$ (т.е. k фиксировано). Тогда $z(x, y) - k = 0$ и полный дифференциал функции $z(x, y)$ равен

$$z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy = 0, \quad \forall (x, y) \in l.$$

Следовательно,

$$\frac{dx}{z'_y(x, y)} = -\frac{dy}{z'_x(x, y)} = \lambda(x, y), \quad \forall (x, y) \in l,$$

$$dx = \lambda z'_y, \quad dy = \lambda z'_x.$$

Подставим эти выражения в левую часть уравнения (6.8):

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = \lambda(A(z'_x)^2 + 2Bz'_x z'_y + C(z'_y)^2) = 0, \quad \forall (x, y) \in l,$$

так как $z = z(x, y)$ является решением уравнения (6.7). Следовательно, l – интегральная кривая уравнения (6.8).

Достаточность. Пусть каждая кривая семейства $z(x, y) = k$ является интегральной кривой уравнения (6.8). Пусть $(x_0, y_0) \in D$. Выделим из семейства $z(x, y) = k$ кривую $l: z(x, y) = k_0 = f(x_0, y_0)$, она проходит через точку (x_0, y_0) .

$$z(x, y) - k_0 = 0, \quad \forall (x, y) \in l \Rightarrow z'_x(x, y)dx + z'_y(x, y)dy = 0, \quad \forall (x, y) \in l \Rightarrow$$

$$dx = \lambda z'_y, \quad dy = \lambda z'_x.$$

Подставляем последние выражения в левую часть уравнения (6.8), получаем

$$A(dy)^2 - 2Bdydx + C(dx)^2 = \lambda(A(z'_x)^2 + 2Bz'_x z'_y + C(z'_y)^2) = 0, \quad \forall (x, y) \in l \Rightarrow$$

$$A(z'_x)^2 + 2Bz'_x z'_y + C(z'_y)^2 = 0, \quad \forall (x, y) \in l,$$

и, в частности, для (x_0, y_0) . А так как точка (x_0, y_0) – произвольная точка области D , то равенство (6.7) выполняется во всех точках области D .

Теорема 6.2 доказана.

Теорема 6.2 открывает путь для упрощения уравнения (6.2). Для этого сначала составляется вспомогательное уравнение (6.8), оно называется *уравнением характеристик* для уравнения (6.2). Интегральные кривые уравнения характеристик называются *характеристиками*. Найдя хотя бы одно семейство характеристик $z(x, y) = k$, можно в системе (6.3) положить $\xi = z(x, y)$ и тогда на основании теоремы 6.2 и формул (6.5) получим $\bar{A} = 0$.

6.4. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Характеристическое уравнение (6.8) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка. Если $A \neq 0$, запишем его в виде

$$A(y')^2 - 2By' + C = 0. \quad (6.9)$$

Если $A = 0$, но $C \neq 0$, то уравнение характеристик можно записать относительно $x' = \frac{dx}{dy}$; если же $A = C = 0$, то, как будет рассмотрено ниже, уравнение (6.2) уже имеет канонический вид.

Будем предполагать, что $A \neq 0$. Тогда имеем уравнение (6.9) – квадратное уравнение относительно y' . Дискриминант уравнения (6.9): $B^2 - AC$.

В зависимости от знака дискриминанта получаем три ситуации.

1) $\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) > 0$ в области D . Тогда уравнение (6.2) принадлежит гиперболическому типу в области D . Уравнение (6.9) распадается на два уравнения:

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \quad \text{и} \quad y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Пусть общие интегралы этих уравнений соответственно имеют вид:

$$\xi(x, y) = k_1, \quad \eta(x, y) = k_2. \quad (6.10)$$

Следовательно, согласно теореме 6.2 функции $\xi = \xi(x, y)$ и $\eta = \eta(x, y)$ являются решениями уравнения (6.7). Поэтому, сделав в уравнении (6.2) соответствующую замену переменных

$$\xi = \xi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta = \eta(x, y),$$

получим в уравнении (6.5) $\bar{A} = \bar{C} = 0$. Если якобиан $J(x, y) \neq 0$, то уравнение (6.5) имеет гиперболический тип $\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = \bar{B}^2 > 0$, следовательно, $\bar{B} \neq 0$.

Разделив в уравнении (6.5) обе части равенства на $2\bar{B}$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1(\eta, \xi, u, u'_\xi, u'_\eta).$$

Этот вид уравнения также называется каноническим. Если положить $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, то можно привести уравнение к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \Phi \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right).$$

2) $\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) = 0$ в области D . Тогда уравнение (6.2) принадлежит параболическому типу в области D . Разрешив уравнение (6.9) относительно y' , получим $y' = B/A$. Решая это уравнение, находим только одно семейство характеристик:

$$\xi(x, y) = k. \quad (6.11)$$

В уравнении (6.2) делаем замену переменных

$$\xi = \xi(x, y) \text{ и } \eta = \eta(x, y).$$

За $\eta(x, y)$ возьмем любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию, такую чтобы якобиан $J(x, y) \neq 0$ в области D . В силу теоремы 6.2 в уравнении (6.5) $\bar{A} = 0$. В силу теоремы 6.1 выполняется равенство $\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = 0$, следовательно, $\bar{B} = 0$.

Докажем, что $\bar{C} \neq 0$. Из формул (6.6), учитывая, что $C = B^2/A$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{C} &= A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{B^2}{A} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{A} \left[\left(A \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2A \frac{\partial \eta}{\partial x} B \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(B \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{1}{A} \left(A \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\bar{C} = -A \xi'_y J^2.$$

Для этого продифференцируем по x равенство (6.11):

$$\xi'_x + \xi'_y y' = 0, \quad y' = B/A \Rightarrow \xi'_x = -\frac{B}{A} \xi'_y$$

и вычислим якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{B}{A} \xi'_y & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} = \frac{1}{A} \xi'_y (A \eta'_x + B \eta'_y).$$

Так как $\xi'_y \neq 0$, $J \neq 0$, то $C \neq 0$; поэтому, разделив в уравнении (6.5) обе части на \bar{C} , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Это канонический вид уравнения параболического вида.

3) $\delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) < 0$ в области D . Тогда уравнение (6.2) принадлежит эллиптическому типу в области D . В этом случае уравнение характеристик (6.9) как квадратное уравнение относительно y' не имеет действительных корней. Предположим, что решение дифференциального уравнения (6.9) имеет вид

$$z(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y) = k. \quad (6.12)$$

Тогда в уравнении (6.2) делаем замену переменных

$$\xi = \xi(x, y) \text{ и } \eta = \eta(x, y).$$

По теореме 6.2 функция $z(x, y)$, определяемая равенством (6.12), является решением уравнения (6.7), поэтому

$$A(\xi'_x + i\eta'_x)^2 - 2B(\xi'_x + i\eta'_x)(\xi'_y + i\eta'_y) + C(\xi'_y + i\eta'_y)^2 = 0,$$

или, разделяя действительную и мнимую части,

$$\begin{aligned} & A(\xi'_x)^2 - 2B\xi'_x\xi'_y + C(\xi'_y)^2 - A(\eta'_x)^2 - 2\eta'_x\eta'_y - C(\eta'_y)^2 + \\ & + i(A\xi'_x\eta'_x + B(\xi'_x\eta'_y + \xi'_y\eta'_x) + C\xi'_y\eta'_y) = 0. \end{aligned}$$

Тогда, в силу равенства (6.6),

$$\bar{A} - \bar{C} + i\bar{B} = 0 \Rightarrow \bar{A} = \bar{C}, \bar{B} = 0.$$

Так как по теореме 6.1 имеем $\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} < 0$, то $-\bar{A}\bar{C} = -\bar{B}^2 < 0$, следовательно, $\bar{A} \neq 0$. Разделив в уравнении (6.5) обе части на \bar{A} , получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Это канонический вид уравнения эллиптического типа.

Рассматриваемый метод приведения уравнения (6.2) к каноническому виду называется *методом характеристик*. Каноническое уравнение имеет

более простой вид, чем уравнение (6.2); если мы его сможем решить, т.е. найти u как функцию от ξ и η , то для того чтобы найти решение исходного уравнения, достаточно вернуться к старым переменным, выразив ξ и η через x и y .

6.5. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Найдем общее решение уравнения колебаний струны:

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0. \quad (6.13)$$

Под общим решением уравнения в частных производных будем подразумевать семейство всех функций, являющихся решениями этого уравнения.

Уравнение (6.13) гиперболического типа. Приведем его к каноническому виду с помощью рассмотренного выше метода характеристик. Для этого составим уравнение характеристик

$$(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0.$$

Решая его, получаем два семейства характеристик:

$$x - at = k \quad \text{и} \quad x + at = k.$$

Следовательно, для приведения уравнения (6.13) к каноническому виду делаем замену переменных

$$x - at = \xi \quad \text{и} \quad x + at = \eta.$$

Выразим u''_{tt} и u''_{xx} через произведение от u по ξ и η и подставим их в уравнение (6.13).

$$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\xi + u'_\eta,$$

$$u'_t = -au'_\xi + au'_\eta,$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{tt} = a^2 u''_{\xi\xi} - 2a^2 u''_{\xi\eta} + a^2 u''_{\eta\eta}.$$

Подставляя выражения для u''_{xx} и u''_{tt} в уравнение (6.13), получаем

$$(a^2 u''_{\xi\xi} - 2a^2 u''_{\xi\eta} + a^2 u''_{\eta\eta}) - a^2 (u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}) = 0,$$

или

$$u''_{\xi\eta} = 0.$$

Уравнение приведено к каноническому виду.

Для того чтобы решить это каноническое уравнение, перепишем его в виде

$$(u'_{\xi})'_{\eta} = 0.$$

Следовательно, u'_{ξ} не зависит от η , т.е.

$$u'_{\xi} = f(\xi).$$

Интегрируя по ξ полученное равенство, имеем

$$u = \int f(\xi) d\xi = \varphi(\xi) + C,$$

где C – величина, не зависящая от ξ , но C может зависеть от η . Поэтому $C = \psi(\eta)$. Обозначили через $\varphi(\xi)$ первообразную функции $f(\xi)$. Тогда

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

или, возвращаясь к старым переменным,

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \quad (6.14)$$

Это – общее решение уравнения колебания струны. Здесь функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, как следует из приведенных выше выкладок, – произвольные функции; однако, чтобы удовлетворяла уравнению (6.13) функция, определяемая равенством (6.14), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны быть дважды непрерывно дифференцируемыми.

Общее решение (6.14) использовано в п. 2.1 для получения формулы Даламбера.

7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В ПЛАСТИНЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

7.1. НАХОЖДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВНУТРИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Приведем пример реализации метода Фурье при решении задачи о распространении тепла в пластине. Пусть дана пластина толщиной l с коэффициентом температуропроводности a , распределение температуры в которой зависит только от координаты x (рис. 7.1). Такое допущение характерно для неограниченных пластин, когда в каждой точке поверхности пластины поддерживается один и тот же температурный режим.

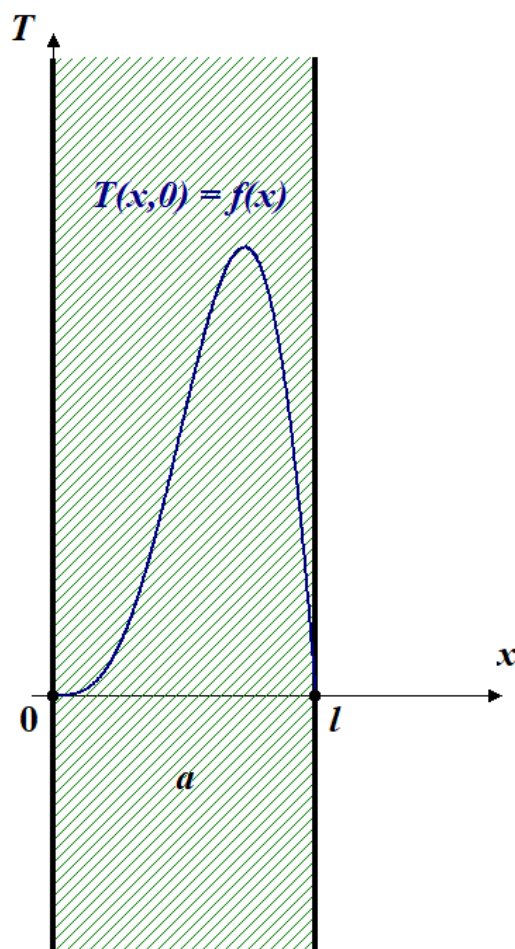


Рис. 7.1. Поперечное сечение плоской пластины
с коэффициентом температуропроводности a

Пусть на краях пластины поддерживается со временем постоянная температура, равная нулю. В начальный момент времени $t = 0$ распределение температуры внутри пластины имеет вид

$$T(x,0) = \gamma x^2 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (7.1)$$

где γ – заданное положительное число. График функции $f(x)$ представлен на рис. 7.1. Очевидно, что

$$f(0) = f(l) = 0. \quad (7.2)$$

Найдем распределение температуры $T(x,t)$ в любой точке с координатой x , принадлежащей пластине, в любой момент времени t .

Составим постановку задачи о распределении температуры. Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

для $0 < x < l$ и $t > 0$. Граничные условия первого рода (т.е. граничные условия Дирихле, когда распределение температуры на границах задано в явном виде) запишутся по условию задачи как

$$T(0,t) = 0 \quad (7.4)$$

и

$$T(l,t) = 0 \quad (7.5)$$

при $t > 0$. Заметим, что в начальный момент времени $t = 0$ при $x = 0$ и $x = l$ начальное условие (7.1) сопрягается с граничными условиями (7.4) и (7.5), т.е. функция температуры в этих точках в рассматриваемый момент времени не имеет разрывов, что физически обосновано.

Составлена математическая модель задачи о распространении в пластине, которая полностью совпадает с математической моделью о распространении тепла в конечном стержне (3.13), (3.14), (3.15).

Для решения данной задачи будем использовать метод Фурье. Напомним, что на первом этапе находим функции $T_n(x,t)$, удовлетворяющие уравнению (7.1) и условиям (7.4) и (7.5).

На втором этапе строим их линейную комбинацию в виде ряда Фурье (3.19)

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{-a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (7.6)$$

где D_1, D_2, D_3, \dots – некоторые коэффициенты, значения которых подбираются так, чтобы функция $T(x,t)$ удовлетворяла начальному условию (7.1).

Для того чтобы найти коэффициенты D_n , необходимо разложить функцию

$$f(x) = \gamma x^2 \sin \frac{\pi x}{l}$$

из начального условия (7.1) в ряд Фурье по синусам на отрезке $[-l;l]$ по координате x . Заметим, что исходя из физических соображений, необходима только часть $[0;l]$ отрезка $[-l;l]$, поэтому функцию $f(x)$ обычно продолжают на отрезке $[-l;0]$ нечетным образом, т.е. полагают для $x \in [0;l]$

$$f(-x) = -f(x).$$

Но в нашем случае функция $f(x)$ уже является нечетной, поэтому не требуется ее нечетного продолжения на отрицательные значения x .

Итак, в качестве D_n берем коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам на промежутке $(0;l)$ (3.20):

$$D_n = \frac{2\gamma}{l} \int_0^l x^2 \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{\pi x}{l} dx.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Тогда получаем

$$D_n = \frac{\gamma}{l} \left(\int_0^l x^2 \cos \frac{(n-1)\pi x}{l} dx - \int_0^l x^2 \cos \frac{(n+1)\pi x}{l} dx \right). \quad (7.7)$$

Для вычисления определенных интегралов применяем 2 раза метод интегрирования по частям. В общем виде для натуральных значений k рассмотрим неопределенный интеграл

$$I_k(x) = \int x^2 \cos \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Возьмем интеграл по частям:

$$U(x) = x^2; \quad dV = \cos \frac{k\pi x}{l} dx; \quad dU = 2x dx; \quad V(x) = \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} dx;$$

$$I_k(x) = \frac{x^2 l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} - \frac{2l}{k\pi} \int x \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Поскольку степень x понизилась, к полученному интегралу повторно применяем правило интегрирования по частям:

$$U(x) = x; \quad dV = \sin \frac{k\pi x}{l} dx; \quad dU = dx; \quad V(x) = -\frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} dx;$$

$$I_k(x) = \frac{x^2 l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} - \frac{2l}{k\pi} \left(-\frac{x l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} + \frac{1}{k\pi} \int \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right),$$

откуда имеем (для упрощения дальнейших рассуждений мы опустим произвольную постоянную, добавляемую при нахождении неопределенного интеграла)

$$I_k(x) = \frac{x^2 l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} + \frac{2l^2 x}{(k\pi)^2} \cos \frac{k\pi x}{l} - \frac{2l^3}{(k\pi)^3} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Используя первообразные $I_k(x)$, вычислим определенные интегралы в равенстве (7.7):

$$D_n = \frac{\gamma}{l} (I_{n-1}(l) - I_{n-1}(0) - I_{n+1}(l) + I_{n+1}(0)).$$

Заметим, что

$$I_k(0) = 0; \quad I_k(l) = \frac{2l^3}{\pi^2} \frac{\cos k\pi}{k^2},$$

$$\cos k\pi = \begin{cases} 1, & \text{если } k - \text{четное,} \\ -1, & \text{если } k - \text{нечетное,} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \cos k\pi = (-1)^k.$$

Поэтому формула вычисления коэффициентов D_n при $n \geq 2$ принимает вид

$$D_n = \frac{2\gamma l^2}{\pi^2} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \right).$$

А поскольку $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$ при натуральных $n \geq 2$, то

$$D_n = \frac{8\gamma l^2}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n-1)^2 (n+1)^2}.$$

При $n = 1$

$$D_1 = \frac{\gamma}{l} \left(\int_0^l x^2 dx - \int_0^l x^2 \cos \frac{2\pi x}{l} dx \right) = \frac{\gamma}{l} \left(\frac{l^3}{3} - (I_2(l) - I_2(0)) \right) = \gamma l^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right).$$

Таким образом, получено распределение температуры внутри пластины, изображенной на рис. 7.1, в виде ряда

$$T(x, t) = \gamma l^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right) e^{-a \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 t} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{8\gamma l^2}{\pi^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n-1)^2 (n+1)^2} e^{-a \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

В параграфе 3 сформулированы без доказательства (теорема 3.2) условия сходимости и почленного дифференцирования функционального ряда, являющегося разложением решения задачи о распространении тепла в конечном стержне. Приведем обоснование соответствующих условий для полученного в рассмотренной задаче распределения температуры $T(x, t)$. Для этого составим ряд

$$Q(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{(n-1)^2 (n+1)^2} e^{-a \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (7.8)$$

исследуем его сходимость, а также сходимость первой производной по t и второй производной по x в области

$$S = \{(x, t) \mid x \in [0; l], t \in [\tau_1; \tau_2]\},$$

где $\tau_2 > \tau_1 > 0$ – заданные моменты времени.

Поскольку

$$\left| (-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi x}{l} \right| = \left| \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq 1;$$

$$\frac{n}{(n-1)^2 (n+1)^2} < 1$$

при натуральных $n \geq 2$,

$$e^{-a \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} > 0$$

и коэффициент $a > 0$, имеем оценку

$$|Q(x, t)| < \sum_{n=2}^{\infty} e^{-a \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 t} \leq \sum_{n=2}^{\infty} e^{-a \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \tau_1} \equiv \sum_{n=2}^{\infty} u_n. \quad (7.9)$$

Чтобы применить признак Даламбера для числового ряда, стоящего в правой части оценки (7.9), найдем отношение

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{-a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tau_1(n+1)^2}}{e^{-a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tau_1 n^2}} = \frac{e^{-a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tau_1(n^2+2n+1)}}{e^{-a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tau_1 n^2}} = e^{-a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \tau_1(2n+1)}.$$

По свойству показательной функции с отрицательным показателем $u_{n+1}/u_n < 1$,

откуда ряд $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ сходится по признаку Даламбера. Тогда функциональный ряд (7.8) сходится равномерно в области S по признаку Вейерштрасса.

Почленно продифференцируем ряд (7.8) по переменной t и дважды по переменной x , и исследуем сходимость полученных рядов:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -a\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{(n-1)^2 (n+1)^2} e^{-a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{(n-1)^2 (n+1)^2} e^{-a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (7.11)$$

Как видно из записи производных, общий вид ряда, составляющего эти производные, один и тот же:

$$P(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-a\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \frac{n^3}{(n-1)^2 (n+1)^2} (-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (7.12)$$

Поскольку для последовательности

$$\alpha_n^{\{q\}} = \frac{n^q}{(n-1)^2 (n+1)^2}$$

при $q = 3$ в данном случае (или при $q = 1$ в предыдущем случае) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n^{\{q\}} = 0,$$

то из определения предела числовой последовательности следует, что существует такой номер члена последовательности $n^* \geq 2$, что при всех $n > n^*$ имеет место неравенство $\alpha_n^{\{3\}} < 1$.

Тогда получим неравенство, аналогичное неравенству (7.9), для оценки абсолютной величины функции $P(x, t)$. Следовательно, ряды (7.10) и (7.11)

сходятся равномерно в области S , откуда ряд (7.8) дифференцируем по t и дважды дифференцируем по x в области S .

Особенно интересным исследованием является доказательство равномерной сходимости ряда (7.8) при $t = 0$ с использованием признака Дирихле для функциональных рядов [10, с. 429]. Для этого перепишем его в общем виде:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n^{\{q\}} \beta_n(x), \quad (7.13)$$

где $\beta_n(x) = (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{\pi x}{l} n\right)$.

Сначала покажем, что при $n \geq 2$ последовательность

$$\alpha_n^{\{q\}} = \frac{n^q}{n^4 - 2n^2 + 1} = \frac{1}{n^{4-q} - 2n^{2-q} + n^{-q}}$$

является убывающей. Рассмотрим последовательность

$$\varphi_n^{\{q\}} = n^{4-q} - 2n^{2-q} + n^{-q}$$

и исследуем ее на возрастание при $n \geq 2$. Для этого построим аналогичную функцию непрерывного аргумента y :

$$g^{\{q\}}(y) = y^{4-q} - 2y^{2-q} + y^{-q}.$$

Найдем производную:

$$\frac{dg^{\{q\}}}{dy} = (4-q)y^{3-q} + 2(q-2)y^{1-q} - qy^{-q-1}.$$

При $q = 3$ производная принимает вид

$$\frac{dg^{\{3\}}}{dy} = 1 + 2y^{-2} - 3y^{-4}.$$

Заметим, что $2y^{-2} - 3y^{-4} > 0$, так как $2y^2 > 3$ при $y \geq 2$. Тогда $\frac{dg^{\{3\}}}{dy} > 0$ при

$y \geq 2$. Следовательно, функция $g^{\{q\}}(y)$ является возрастающей при $y \geq 2$.

При $q = 1$ имеем

$$\frac{dg^{\{1\}}}{dy} = 3y^2 - 2 - y^{-2}.$$

Поскольку функция $h_1(y) = 3y^2 - 2$ является возрастающей, а функция $h_2(y) = y^{-2}$ – убывающей при $y \geq 2$, и $h_1(2) > h_2(2)$, то $\frac{dg^{\{1\}}}{dy} = h_1(y) - h_2(y) > 0$.

Следовательно, функция $g^{\{1\}}(y)$ является возрастающей при $y \geq 2$.

Таким образом, последовательность $\varphi_n^{\{q\}}$ является возрастающей, а последовательность $\alpha_n^{\{q\}}$ – убывающей при $n \geq 2$.

Теперь покажем, что последовательность частичных сумм вида $\sum_{n=2}^p \beta_n(x)$ ограничена по абсолютной величине некоторым числом K , т.е.

$$\left| \sum_{n=2}^p \beta_n(x) \right| \leq K.$$

Представим синус в этой сумме через комплексную экспоненту, т.е.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi x}{l} n\right) &= \frac{e^{\frac{i\pi x}{l} n} - e^{-\frac{i\pi x}{l} n}}{2i}; \\ \sum_{n=2}^p \beta_n(x) &= \sum_{n=2}^p (-1)^{n-1} \frac{e^{\frac{i\pi x}{l} n} - e^{-\frac{i\pi x}{l} n}}{2i} = \frac{i}{2} \left(\sum_{n=2}^p (-1)^n e^{\frac{i\pi x}{l} n} - \sum_{n=2}^p (-1)^n e^{-\frac{i\pi x}{l} n} \right) = \\ &= \frac{i}{2} \left(\sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n+1} e^{\frac{i\pi x}{l} (n+1)} - \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n+1} e^{-\frac{i\pi x}{l} (n+1)} \right), \end{aligned}$$

где i – мнимая единица. Каждая из представленных сумм является суммой членов геометрической прогрессии. Тогда

$$\sum_{n=2}^p \beta_n(x) = \frac{i}{2} \left(\frac{e^{\frac{i2\pi x}{l}} \left((-1)^p e^{\frac{i\pi x}{l} p} - 1 \right)}{-e^{\frac{i\pi x}{l}} - 1} - \frac{e^{-\frac{i2\pi x}{l}} \left((-1)^p e^{-\frac{i\pi x}{l} p} - 1 \right)}{-e^{-\frac{i\pi x}{l}} - 1} \right). \quad (7.14)$$

Поскольку при любых натуральных значениях числа p выполняются неравенства

$$\left| e^{\frac{i\pi x}{l} p} \right| \leq 1; \quad \left| e^{-\frac{i\pi x}{l} p} \right| \leq 1,$$

то величина, стоящая в правой части равенства (7.14), является ограниченной величиной, когда знаменатели $-e^{\frac{i\pi x}{l}} - 1 \neq 0$, $-e^{-\frac{i\pi x}{l}} - 1 \neq 0$, или, представив экспоненты по формуле Эйлера (с учетом четности косинуса и нечетности синуса), $\cos \frac{\pi x}{l} \neq -1$, $\sin \frac{\pi x}{l} \neq 0$, откуда $\frac{\pi x}{l} \neq \pi$ или $x \neq l$. Следовательно, модули комплексных величин

$$\frac{1}{-e^{\frac{i\pi x}{l}} - 1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{-e^{-\frac{i\pi x}{l}} - 1}$$

достигают своих наибольших значений при $x \in [0; x^*]$, где $x^* \in (0; l)$ – фиксированная величина, поскольку являются непрерывными функциями от x .

Таким образом, существует положительное число K , такое, что при любых $x \in [0; x^*]$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{n=2}^p \beta_n(x) \right| \leq K.$$

Следовательно, ряд (7.13) сходится равномерно при $x \in [0; x^*]$ по признаку Дирихле.

7.2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Рассмотрим компьютерную реализацию алгоритма вычисления температуры в точке пластины с координатой x в заданный момент времени t по формуле (7.15).

Выполним начальное присваивание значения температуры по значению, стоящему до ряда в формуле (7.15) с заданной точностью. На языке C++ такой фрагмент программы запишется следующим образом:

```
double sum = gamma*1*1*(1.0/3-1/(2*pi*pi))*
exp(-a*pow(pi/l, 2)*t)*sin(pi*x/l);
```

Далее вычислим значение числа m , на которое умножается ряд: чтобы затем реализовать корректное суммирование с заданной точностью будем умножать каждый член ряда на m :

```
double m = 8*gamma*1*1/(pi*pi);
```

Число `pi` мы вычисляем как $\pi = 4 \cdot \arctg 1$,

где функция арктангенса объявлена в заголовке `cmath`, т.е.

```
#include <cmath>
const double pi = 4*atan(1);
```

Инициализируем счетчик и переменную знака:

```
int n = 2;
int s = -1;
```

Для реализации вычисления суммы ряда с заданной точностью будем вычислять текущий его член и сравнивать модуль этого члена с заданной точностью `eps`. Если значение модуля меньше `eps`, то суммирование прекращается. Это условие следует из необходимого условия сходимости ряда. Фрагмент программы на языке C++, реализующий цикл суммирования, выглядит так:

```
while(true)
{
double c = m*s*n*exp(-a*pow(n*pi/l,2)*t)*
sin(n*pi*x/l)/pow((n-1)*(n+1),2);
if(fabs(c) < eps)
// Сравнение модуля общего члена ряда с точностью вычислений
break;
// Выходим из цикла, когда закончили суммирование
sum += c;
// Если продолжаем суммировать, то добавляем с к
// текущей сумме sum
n++;
s = -s; // Изменение знака на противоположный
}
```

Описанный алгоритм можно оформить в функцию вычисления значения температуры.

Далее приведем программу на языке C++ с комментариями, готовящую файл с командами для графопостроителя Gnuplot построения графиков распределения температуры внутри плоской пластины в заданные моменты времени.

```

#include <fstream>
using namespace std;
#include <cmath>

// Толщина пластины в метрах
#define l 0.01

// Количество разбиений по координате x, через
// которые вычисляем температуру
#define N 1000

// Количество графиков через равные шаги по времени
#define M 5

// Максимальный момент времени в секундах
#define tmax 6

// Коэффициент температуропроводности пластины в м^2/с
const double a = 1.172e-5;

// Коэффициент гамма в начальном условии (1) в град/м^2
const double gamma = 1e5;

// Число pi
const double pi = 4*atan(1);

// Функция вычисления значения температуры в точке с координатой
// x в момент времени t с точностью eps
double T(double x, double t, double eps = 1e-9)
{
    double sum = gamma*l*l*(1.0/3-1/(2*pi*pi))*
    exp(-a*pow(pi/l, 2)*t)*sin(pi*x/l);
    double m = 8*gamma*l*l/(pi*pi);
    int n = 2;
    int s = -1;

    while(true)
    {
        double c = m*s*n*exp(-a*pow(n*pi/l,2)*t)*
        sin(n*pi*x/l)/ pow((n-1)*(n+1),2);
        if(fabs(c) < eps)
            break;
        // Выходим из цикла, когда закончили суммирование
        sum += c;
        // Если продолжаем суммировать, то добавляем
        // c к текущей сумме sum
        n++;
        s = -s; // Изменение знака на противоположный
    }
    return sum;
}

int main()
{
    // Создаем (открываем на запись) текстовый файл с командами

```



```

// для графопостроителя
ofstream gf("input.txt");

// Указываем формат, размеры картинки и шрифта
gf << "set term png size 1100, 700 font 20" << endl;

// Указываем имя файла с графиками
gf << "set output \"graphic.png\"" << endl;

// Диапазон изменения координаты x
gf << "set xrange [0:" << 1 << "]" << endl;

// Метка на оси абсцисс
gf << "set xlabel \"x, m\"" << endl;

// Метка на оси ординат
gf << "set ylabel \"T, C\"" << endl;

// Команда построения графиков по точкам со сглаживанием
// с использованием кубических сплайнов
gf << "plot \"-\" with lines lw 2 lc 1 title \"\" smooth
csplines";
if(M == 1)
// Если строим один график
gf << endl;
else
// Если строим несколько графиков
gf << ",\\" << endl;

// Цикл с указанием нескольких графиков температур,
// накладываемых друг на друга в одной системе координат
for(int j = 1; j < M; j++)
{
gf << "      \"-\" with lines lw 2 lc 1 title \"\" smooth
csplines";
if(j != M-1)
gf << ",\\" << endl;
else
// Если дошли до последнего графика
gf << endl;
}

// Вычисляем шаг по координате x
double hx = (double)1 / N;

// Вычисляем шаг по времени между графиками
double ht = (double)tmax / M;

// Цикл по времени t
for(int j = 0; j < M; j++)
{
double t = j * ht; // Текущее время

// Цикл по координате x
for(int i = 0; i < N; i++)
{
double x = i * hx; // Текущая координата

```

```

// Выводим в файл пару чисел -
// координату x и температуру
gf << x << " " << T(x, t) << endl;
}

// Вывод разделителя графиков (конец серии
// точек для текущего графика)
if(j != M-1)
gf << "e" << endl;
}
gf.close();

return 0;
}

```

После запуска данной программы необходимо вызвать графопостроитель Gnuplot командой
gnuplot.exe input.txt

В результате получим графики температур, представленные на рис. 7.2.

Как видно из данных графиков, в начальный момент времени температура в пластине распределена несимметрично. Далее тепло начинает распространяться от более нагретых участков к менее нагретым, при этом на границах поддерживается постоянная температура, равная нулю, охлаждая то, что пришло изнутри тела. Тогда по закону сохранения энергии средняя температура внутри тела начинает снижаться, при этом график распределения температуры начинает становиться более симметричным относительно середины пластины, что и подтверждает рис. 7.2.

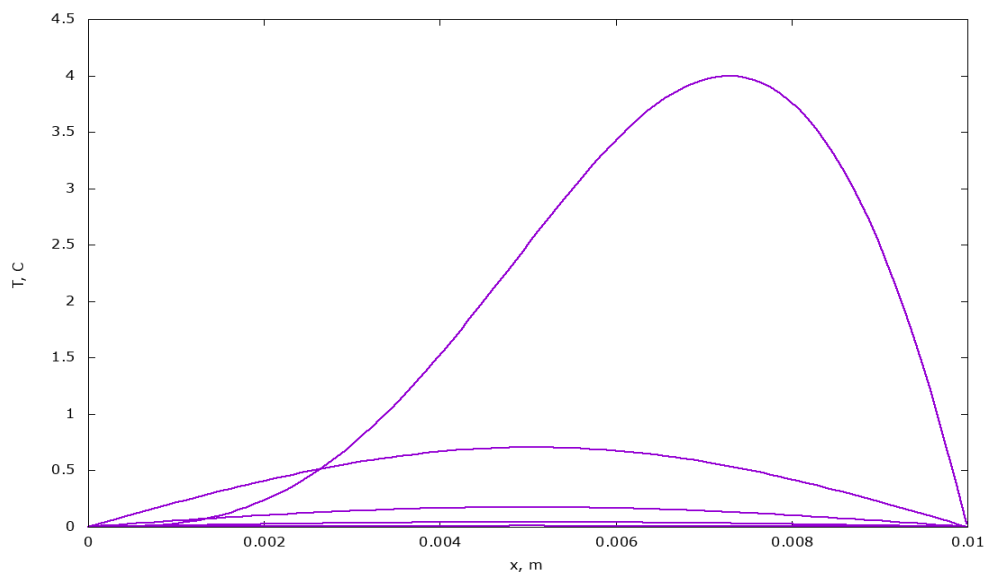


Рис. 7.2. Графики распределения температур в плоской пластине с течением времени

8. ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ – РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ГАЛЬВАНИЧЕСКОЙ ВАННЕ

В параграфах 2 – 5 пособия рассмотрены аналитические методы решения задач математической физики. К ним относится метод Даламбера, метод Фурье и метод интегральных преобразований. В частности, для решения задачи с уравнением Лапласа (задача Дирихле для круга) применялся метод Фурье, существенным условием реализации которого является линейность уравнения и линейность краевых условий. Если, например, краевые условия не являются линейными, то для решения задачи привлекают численные методы. Рассмотрим задачу расчета электрических полей в гальванической ванне с нелинейными краевыми условиями.

Пусть в гальванической ванне, имеющей форму параллелепипеда, расположены электроды. Рассчитаем толщину получаемого металлического (цинкового) покрытия на поверхности катода за заданное время Δt . Для этого необходимо найти распределение потенциалов в гальванической ванне.

Будем предполагать, что высота слоя электролита совпадает с высотой ванны, а дно является квадратом со стороной, длина которой равна l . Кроме того, сделаем допущение: бесконечно тонкий анод и катод располагаются в ванне друг напротив друга вдоль противоположных стенок, покрывая каждый всю соответствующую стенку ванны. Как известно из курса физики, металлическое покрытие наносится на катод.

Исходя из принятых допущений, в любом горизонтальном сечении ванны конфигурация электрического поля не будет изменяться. Тогда все расчеты будут эквивалентны расчетам электрического поля в плоском сечении ванны, показанном на рис. 8.1.

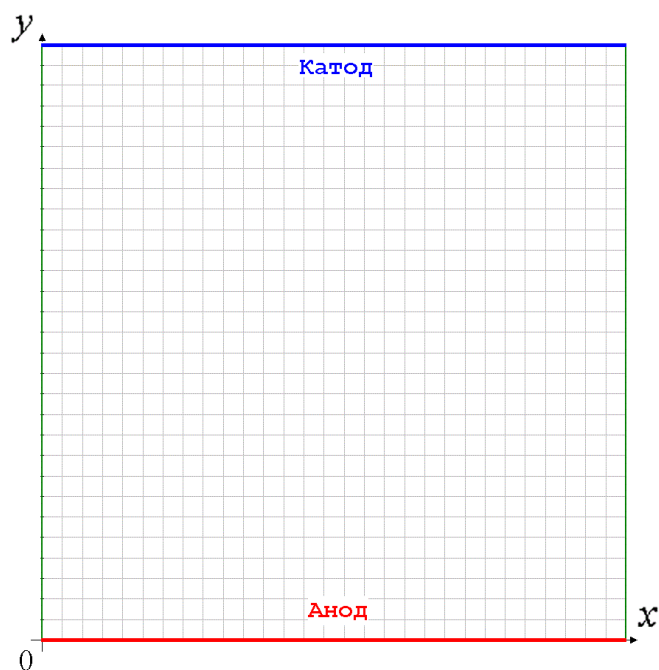


Рис. 8.1. Горизонтальное сечение гальванической ванны с введенной сеткой по координатам

Пусть к гальванической ванне подведено постоянное напряжение U . Обозначим через $\varphi(x, y)$ потенциал в точке с координатами (x, y) гальванической ванны. Для описания распределения потенциала внутри электролита используем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad (8.1)$$

где $0 < x < l$ и $0 < y < l$.

Заметим, что вдоль границ $x=0$ и $x=l$ располагаются изоляционные стенки ванны, т.е. они не проводят электрический ток. Тогда плотность тока в рассматриваемых точках границы равна нулю. Следовательно, по закону Ома

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{(0,y)} = 0, \quad y \in (0;l) \quad (8.2)$$

и

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{(l,y)} = 0, \quad y \in (0;l). \quad (8.3)$$

Вблизи поверхности электродов в процессе нанесения покрытия идут физико-химические процессы (например, окисления или восстановления),

изменяющие их потенциалы. Отметим, что на аноде потенциал будет несколько ниже, чем значение U . Такое явление называют поляризацией. Обозначим через $F_a(i_a)$ и $F_k(i_k)$ зависимости изменения потенциалов анода и катода от анодной i_a и катодной i_k плотностей тока соответственно.

Будем рассматривать цинковый электролит со следующими характеристиками [2]: $F_a(i_a) \equiv 1,2$; $F_k(i_k) = 0,0016i_k^2 + 0,055i_k + 1,347$ для $i_a, i_k \in [0;4]$, А/дм²; $\chi = 0,35$ (Ом·дм)⁻¹ – проводимость цинкового электролита.

Граничные условия для электродов ванны запишутся следующим образом:

$$\varphi(x,0) + F_a(i_a(x)) = U; \quad (8.4)$$

$$\varphi(x,l) - F_k(i_k(x)) = 0. \quad (8.5)$$

Анодная и катодная плотности токов выражаются через производные потенциала по закону Ома следующим образом:

$$i_a(x) = -\chi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(x,0)}, \quad x \in [0;l], \quad (8.6)$$

$$i_k(x) = -\chi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(x,l)}, \quad x \in [0;l]. \quad (8.7)$$

Для вычисления толщины получаемого покрытия используем закон Фарадея: $\delta_c(x, \Delta t) = \frac{k_{Me}}{\rho} i_k(x) \Delta t$, где k_{Me} – электрохимический эквивалент металла покрытия; ρ – плотность металла покрытия.

На сегодняшний день аналитические методы решения уравнения (8.1) с краевыми условиями (8.2) – (8.5) применяют для линейных функций поляризации $F_a(i_a)$ и $F_k(i_k)$ (см., например, [13]), основанные на методе разделения переменных. Для нелинейных функций используют численные методы.

Введем сетку по координатам x и y :

$$\begin{aligned} x_i &= (i-1)h_x; \\ y_j &= (j-1)h_y; \\ i &= 1, \dots, N_x; \quad j = 1, \dots, N_y, \end{aligned}$$

где h_x и h_y – шаги сетки по x и y соответственно, нумерация слоев сетки берется с единицы; N_x и N_y – максимальные номера слоев по x и y соответственно. Для рис. 8.1

$$N_x = N_y = 30. \quad (8.8)$$

Далее заменяются производные, входящие в соотношения (8.1) – (8.3), (8.6) и (8.7), конечно-разностными аналогами, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &\cong \frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{h_x^2}; & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &\cong \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{h_y^2}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{(0,y)} &\cong \frac{\varphi_{2,j} - \varphi_{1,j}}{h_x}; & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{(l,y)} &\cong \frac{\varphi_{N_x,j} - \varphi_{N_x-1,j}}{h_x}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(x,0)} &\cong \frac{\varphi_{i,2} - \varphi_{i,1}}{h_y}; & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_{(x,l)} &\cong \frac{\varphi_{i,N_y} - \varphi_{i,N_y-1}}{h_y}. \end{aligned}$$

Собирая полученные соотношения в единое целое, имеем нелинейную систему алгебраических уравнений из $s = N_x N_y$ уравнений с s неизвестными:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i+1,j}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j+1}}{h_y^2} = 0, \\ &i = 2, \dots, N_x - 1, j = 2, \dots, N_y - 1; \\ &\frac{\varphi_{2,j} - \varphi_{1,j}}{h_x} = 0, \quad j = 2, \dots, N_y - 1; \\ &\frac{\varphi_{N_x,j} - \varphi_{N_x-1,j}}{h_x} = 0, \quad j = 2, \dots, N_y - 1; \\ &\varphi_{i,1} + F_a \left(-\chi \frac{\varphi_{i,2} - \varphi_{i,1}}{h_y} \right) - U = 0, \quad i = 1, \dots, N_x; \\ &\varphi_{i,N_y} - F_k \left(-\chi \frac{\varphi_{i,N_y} - \varphi_{i,N_y-1}}{h_y} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, N_x. \end{aligned} \right. \quad (8.9)$$

Для нахождения приближенного решения системы (8.9) воспользуемся методом Ньютона.

Объединим неизвестные потенциалы в вектор-столбец

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,2} \\ \vdots \\ \varphi_{1,N_y} \\ \varphi_{2,1} \\ \varphi_{2,2} \\ \vdots \\ \varphi_{2,N_y} \\ \vdots \\ \varphi_{N_x,1} \\ \varphi_{N_x,2} \\ \vdots \\ \varphi_{N_x,N_y} \end{bmatrix}.$$

Тогда нелинейная система (8.9) в общем виде переписется как $\Lambda(\Psi) = \mathbf{0}$, где $\Lambda(\Psi)$ – векторнозначная функция от Ψ .

Начальное приближение для этого метода обычно выбирается исходя из того, что на аноде потенциал близок к значению U , а на катоде – к нулю. Тогда сделаем линейную интерполяцию значений потенциалов от U до нуля по слоям сетки по j , т.е. на первом слое начальное приближение равно

$$\Psi_{(i-1)N_y+1}^{(0)} = \varphi_{i,1}^{(0)} = U,$$

на слое с номером $j = N_y$ –

$$\Psi_{(i-1)N_y+N_y}^{(0)} = \varphi_{i,N_y}^{(0)} = 0.$$

Для значений $i = 2, \dots, N_x - 1$ начальные значения потенциалов определяются, по сути, из уравнения прямой:

$$\Psi_{(i-1)N_y+j}^{(0)} = \varphi_{i,j}^{(0)} = U_a \frac{N_y - j}{N_y - 1}.$$

На сегодняшний день метод Ньютона реализован во многих математических пакетах. Будем использовать пакет Maxima, поскольку он относится к свободно распространяемому программному обеспечению. В данном паке-

те для метода Ньютона не требуется обращать матрицу Якоби $\nabla\Lambda(\Psi^{(r)})$ функции Λ в точке $\Psi^{(r)}$ на каждой итерации с номером r из-за больших объемов вычислений – достаточно решить быстрой модификацией метода Гаусса систему линейных уравнений

$$\nabla\Lambda(\Psi^{(r)})\Psi^{(r+1)} = \nabla\Lambda(\Psi^{(r)})\Psi^{(r)} - \Lambda(\Psi^{(r)}).$$

Вычисления в пакете продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие $|\Psi^{(r+1)} - \Psi^{(r)}| < \varepsilon_{nt}$, где ε_{nt} – заданная точность.

Рассмотрим процесс формирования команд для пакета Maxima с целью расчета распределения потенциалов в гальванической ванне. Сначала описываются функции анодной и катодной поляризации. Для построчного чтения результатов необходимо отключить многострочный вывод результатов, подгрузить библиотеку с реализацией метода Ньютона и установить точность данного метода (рис. 8.2).

```
[ (%i1) Fa(ia):=1.2$
[ (%i2) Fk(ik):=(-0.0016*ik^2+0.055*ik+1.347)$
[ (%i3) display2d:false$
[ (%i4) load(mnewton);
[ (%o4) "C:/PROGRA~2/MAXIMA~1.0-2/share/maxima/5.28.0-2/share/mnewton/mnewton.mac"
[ (%i5) newtonepsilon:10^-2$
```

Рис. 8.2. Подготовка вычислений в пакете Maxima

Проведем расчеты для ванны с размером $l=0,986$ дм. Примем $h_x = h_y = 0,034$ дм, $U = 3,67$ В, $k_{Me} = 1,22$ г/(А·ч), $\rho = 7,133$ г/см³, $\Delta t = 0,67$ ч [12]. Поскольку для размеров, указанных в выражении (8.8), получается система (8.9) из 900 уравнений с 900 неизвестными, то для пакета Maxima список левых частей каждого уравнения системы (8.9) формируется в символьном виде программой, написанной на языке C++. На рисунке 8.3 приведены примеры уравнений, являющихся разностными уравнениями Лапласа. На рисунке 8.4 показаны примеры разностных уравнений, соответствующих уравнению (8.4).


```

--> mnewton (
[
(phi_1_2-2*phi_2_2+phi_3_2)/0.001156+(phi_2_1-2*phi_2_2+phi_2_3)/0.001156,
(phi_1_3-2*phi_2_3+phi_3_3)/0.001156+(phi_2_2-2*phi_2_3+phi_2_4)/0.001156,
(phi_1_4-2*phi_2_4+phi_3_4)/0.001156+(phi_2_3-2*phi_2_4+phi_2_5)/0.001156,
(phi_1_5-2*phi_2_5+phi_3_5)/0.001156+(phi_2_4-2*phi_2_5+phi_2_6)/0.001156,
(phi_1_6-2*phi_2_6+phi_3_6)/0.001156+(phi_2_5-2*phi_2_6+phi_2_7)/0.001156,
(phi_1_7-2*phi_2_7+phi_3_7)/0.001156+(phi_2_6-2*phi_2_7+phi_2_8)/0.001156,
(phi_1_8-2*phi_2_8+phi_3_8)/0.001156+(phi_2_7-2*phi_2_8+phi_2_9)/0.001156,
(phi_1_9-2*phi_2_9+phi_3_9)/0.001156+(phi_2_8-2*phi_2_9+phi_2_10)/0.001156,
(phi_1_10-2*phi_2_10+phi_3_10)/0.001156+(phi_2_9-2*phi_2_10+phi_2_11)/0.001156,
(phi_1_11-2*phi_2_11+phi_3_11)/0.001156+(phi_2_10-2*phi_2_11+phi_2_12)/0.001156,
(phi_1_12-2*phi_2_12+phi_3_12)/0.001156+(phi_2_11-2*phi_2_12+phi_2_13)/0.001156,
(phi_1_13-2*phi_2_13+phi_3_13)/0.001156+(phi_2_12-2*phi_2_13+phi_2_14)/0.001156,
(phi_1_14-2*phi_2_14+phi_3_14)/0.001156+(phi_2_13-2*phi_2_14+phi_2_15)/0.001156,
(phi_1_15-2*phi_2_15+phi_3_15)/0.001156+(phi_2_14-2*phi_2_15+phi_2_16)/0.001156,
(phi_1_16-2*phi_2_16+phi_3_16)/0.001156+(phi_2_15-2*phi_2_16+phi_2_17)/0.001156,
(phi_1_17-2*phi_2_17+phi_3_17)/0.001156+(phi_2_16-2*phi_2_17+phi_2_18)/0.001156,
(phi_1_18-2*phi_2_18+phi_3_18)/0.001156+(phi_2_17-2*phi_2_18+phi_2_19)/0.001156,
(phi_1_19-2*phi_2_19+phi_3_19)/0.001156+(phi_2_18-2*phi_2_19+phi_2_20)/0.001156,
(phi_1_20-2*phi_2_20+phi_3_20)/0.001156+(phi_2_19-2*phi_2_20+phi_2_21)/0.001156,
(phi_1_21-2*phi_2_21+phi_3_21)/0.001156+(phi_2_20-2*phi_2_21+phi_2_22)/0.001156,
(phi_1_22-2*phi_2_22+phi_3_22)/0.001156+(phi_2_21-2*phi_2_22+phi_2_23)/0.001156,
(phi_1_23-2*phi_2_23+phi_3_23)/0.001156+(phi_2_22-2*phi_2_23+phi_2_24)/0.001156,
(phi_1_24-2*phi_2_24+phi_3_24)/0.001156+(phi_2_23-2*phi_2_24+phi_2_25)/0.001156,
(phi_1_25-2*phi_2_25+phi_3_25)/0.001156+(phi_2_24-2*phi_2_25+phi_2_26)/0.001156,
(phi_1_26-2*phi_2_26+phi_3_26)/0.001156+(phi_2_25-2*phi_2_26+phi_2_27)/0.001156,
(phi_1_27-2*phi_2_27+phi_3_27)/0.001156+(phi_2_26-2*phi_2_27+phi_2_28)/0.001156,
(phi_1_28-2*phi_2_28+phi_3_28)/0.001156+(phi_2_27-2*phi_2_28+phi_2_29)/0.001156,
(phi_1_29-2*phi_2_29+phi_3_29)/0.001156+(phi_2_28-2*phi_2_29+phi_2_30)/0.001156,|

```

Рис 8.3. Фрагмент функции mnewton, содержащий разностные уравнения Лапласа

```

phi_1_1+Fa(0.35*(phi_1_1-phi_1_2)/0.034)-3.67,
phi_2_1+Fa(0.35*(phi_2_1-phi_2_2)/0.034)-3.67,
phi_3_1+Fa(0.35*(phi_3_1-phi_3_2)/0.034)-3.67,
phi_4_1+Fa(0.35*(phi_4_1-phi_4_2)/0.034)-3.67,
phi_5_1+Fa(0.35*(phi_5_1-phi_5_2)/0.034)-3.67,
phi_6_1+Fa(0.35*(phi_6_1-phi_6_2)/0.034)-3.67,
phi_7_1+Fa(0.35*(phi_7_1-phi_7_2)/0.034)-3.67,
phi_8_1+Fa(0.35*(phi_8_1-phi_8_2)/0.034)-3.67,
phi_9_1+Fa(0.35*(phi_9_1-phi_9_2)/0.034)-3.67,
phi_10_1+Fa(0.35*(phi_10_1-phi_10_2)/0.034)-3.67,
phi_11_1+Fa(0.35*(phi_11_1-phi_11_2)/0.034)-3.67,
phi_12_1+Fa(0.35*(phi_12_1-phi_12_2)/0.034)-3.67,
phi_13_1+Fa(0.35*(phi_13_1-phi_13_2)/0.034)-3.67,
phi_14_1+Fa(0.35*(phi_14_1-phi_14_2)/0.034)-3.67,
phi_15_1+Fa(0.35*(phi_15_1-phi_15_2)/0.034)-3.67,
phi_16_1+Fa(0.35*(phi_16_1-phi_16_2)/0.034)-3.67,
phi_17_1+Fa(0.35*(phi_17_1-phi_17_2)/0.034)-3.67,
phi_18_1+Fa(0.35*(phi_18_1-phi_18_2)/0.034)-3.67,
phi_19_1+Fa(0.35*(phi_19_1-phi_19_2)/0.034)-3.67,
phi_20_1+Fa(0.35*(phi_20_1-phi_20_2)/0.034)-3.67,
phi_21_1+Fa(0.35*(phi_21_1-phi_21_2)/0.034)-3.67,
phi_22_1+Fa(0.35*(phi_22_1-phi_22_2)/0.034)-3.67,|

```

Рис. 8.4. Фрагмент функции mnewton, содержащий разностные аналоги для уравнения (8.4)

Поскольку в приведенном примере анод и катод занимают полностью соответствующие стенки ванны, то, как известно [13], толщина получаемого покрытия во всех точках на катоде будет одинаковой. Для рассматриваемого случая в результате расчетов мы имеем 4,5 мкм. В реальных производственных задачах деталь-катод занимает часть стенки и может иметь различную форму. Следовательно, на краях детали толщина покрытия будет выше, чем в центральной части из-за неравномерности электрического поля вблизи катода. Поэтому в настоящее время актуальной проблемой является разработка методов снижения неравномерности гальванических покрытий.

9. УПРАЖНЕНИЯ

9.1. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = \sin x$, $u'_t(x,0) = x^2$

Решение. Имеем задачу Коши для волнового уравнения, т.е. случай колебаниях бесконечной струны. Согласно результатам п. 2.1 решение для задачи находится по формуле Даламбера. Здесь $f(x) = \sin x$, $F(x) = x^2$, поэтому

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x-t) + \sin(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} y^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} y^2 dy = \\ &= \sin x \cos t + \frac{1}{6} \left((x+t)^3 - (x-t)^3 \right) \end{aligned}$$

при $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$.

Задача 2. Решите задачу: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \geq 0$,

$$u(x,0) = \sin x, \quad u'_t(x,0) = x^2, \quad u(0,t) = 0.$$

Решение. Имеем задачу о свободных колебаниях полубесконечной струны. Согласно результатам п. 2.2 решение этой задачи определяется по формуле Даламбера, где функции $u(x,0)$ и $u'_t(x,0)$ продолжены на $(-\infty, 0)$ нечетным образом.

Функция $f(x) = u(x,0) = \sin x$ – нечетная. Продолжим функцию $u'_t(x,0) = x^2$ на промежуток $(-\infty, 0)$ нечетным образом:

$$F(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \in [0, +\infty); \\ -x^2, & \text{если } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Если $x-t \geq 0$, тогда по формуле Даламбера

$$u(x,t) = \sin x \cos t + \frac{1}{6} \left((x+t)^3 - (x-t)^3 \right).$$

Если $x - t < 0$, тогда

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\sin(x-t) + \sin(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^0 (-y^2) dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} y^2 dy = \\ &= \sin x \cos t + \frac{1}{6} ((x+t)^3 + (x-t)^3). \end{aligned}$$

И окончательно

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t + \frac{1}{6} ((x+t)^3 + (x-t)^3) & \text{при } 0 \leq x < t; \\ \sin x \cos t + \frac{1}{6} ((x+t)^3 - (x-t)^3) & \text{при } x > t, \end{cases}$$

где $x \in [0, +\infty)$.

Задача 3. Струна с закрепленными концами $x=0$ и $x=l$ оттянута в точке $x=l/3$ на малое расстояние h от положения равновесия и затем отпущена без сообщения ее точкам начальной скорости. Найдите смещение $u(x, t)$.

Решение. Имеем задачу о свободных колебаниях конечной струны с закрепленными концами:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$u(x, 0) = f(x); \quad u'_t(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = 0; \quad u(l, t) = 0.$$

Построим график функции $f(x)$ и, воспользовавшись этим графиком, найдем аналитическое выражение для нее (рис. 9.1):

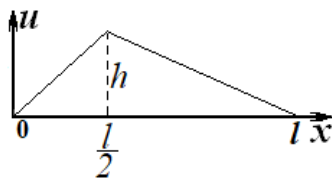


Рис. 9.1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3h}{l}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{l}{3}; \\ \frac{3h(l-x)}{2l}, & \text{если } \frac{l}{3} < x \leq l. \end{cases}$$

Решаем задачу методом Фурье. Согласно результатам п. 3.1, решением задачи является сумма ряда (3.11), коэффициенты которого определяются по формулам (3.12). Тогда $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, так как $F(x) = 0$.

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \frac{3h}{l} x \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{l/3}^l \frac{3h}{2l} (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k=1, 2, \dots$$

Оба интеграла легко вычисляются по частям:

$$a_k = \frac{6h}{kl\pi} \left(-x \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^{l/3} + \frac{2}{l} \int_0^{l/3} \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right) +$$

$$+ \frac{3h}{kl\pi} \left(-(l-x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{l/3}^l - \int_{l/3}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right) = \frac{9h}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{3}.$$

Подставим a_k и b_k в ряд (3.11), получим решение задачи:

$$u(x, t) = \frac{9}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{3} \cos \frac{k\pi a}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

Задача 4. Найдите решение уравнения Лапласа для внутренней части кольца $0 \leq \rho \leq 2$, удовлетворяющее краевым условиям $u(1, \varphi) = 0$, $u(2, \varphi) = y$.

Решение. Имеем задачу Дирихле для кольца. В полярных координатах, согласно результатам п. 3.5, она имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < \rho < 2, \quad (9.1)$$

$$u(1, \varphi) = 0, \quad u(2, \varphi) = 2 \sin \varphi. \quad (9.2)$$

Будем решать ее методом Фурье.

I этап. Ищем решение задачи в виде $u(\rho, \varphi) = P(\rho)\Phi(\varphi)$. Тогда, как было показано в п. 3.5, имеем:

$$\Phi_0(\varphi) = A_0, \quad \Phi_k(\varphi) = A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi;$$

$$P_0(\rho) = C_0 \ln \rho + D_0; \quad P_k(\rho) = C_k \rho^k + D_k \rho^{-k}; \quad k=1, 2, \dots$$

Составим последовательность решений начальной задачи:

$$u_k(\rho, \varphi) = P_k(\rho)\Phi_k(\varphi).$$

Подставим первое краевое условие в $u_k(\rho, \varphi)$, получим

$$u_0(1, \varphi) = A_0 D_0 = 0; \quad u_k(1, \varphi) = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(C_k + D_k) = 0.$$

Если $A_k = B_k = 0$, то

$$A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi = 0,$$

имеем тривиальное решение, что противоречит второму краевому условию.

Поэтому $C_k + D_k = 0$ и $D_0 = 0$. Тогда

$$u_k(\rho, \varphi) = (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)(\rho^k - \rho^{-k}),$$

где

$$u_0(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} \ln(\rho); \quad \frac{a_0}{2} = C_1 A_0.$$

II этап. Составим ряд из собственных функций:

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} \ln(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)(\rho^k - \rho^{-k}). \quad (9.3)$$

Этот ряд является решением уравнения (9.1) и удовлетворяет первому краевому условию, так как уравнение и краевое условие однородные. Найдем коэффициенты ряда, подставив второе краевое условие в $u(\rho, \varphi)$:

$$u(2, \varphi) = \frac{a_0}{2} \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)(2^k - 2^{-k}) = 2 \sin \varphi.$$

Получили разложение функции $2 \sin \varphi$ в ряд Фурье на промежутке $(-\pi, \pi)$. Тогда коэффициенты ряда вычисляются по формулам

$$a_0 \ln 2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin \varphi d\varphi = 0;$$

$$a_k (2^k - 2^{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin \varphi \cos k\varphi d\varphi = 0, \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$b_k (2^k - 2^{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin \varphi \sin k\varphi d\varphi = 0, \quad k = 2, 3, \dots;$$

$$b_1 \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin^2 \varphi d\varphi = 2 \Rightarrow b_1 = \frac{4}{3}.$$

Подставим коэффициенты в ряд (9.3), получим решение задачи (9.1) – (9.2):

$$u(\rho, \varphi) = \frac{4}{3} \sin \varphi \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right).$$

Задача 5. Решите задачу:

$$u'_t = a_2 u''_{xx},$$
$$u(x,0) = \frac{x}{l}; \quad u(l,t) = e^{-t}; \quad u(0,t) = 0. \quad (9.4)$$

Решение. Имеем задачу с неоднородными граничными условиями. Для приведения неоднородных граничных условий к однородным произведем замену неизвестной функции согласно теории п. 6.2. В нашем случае $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = e^{-t}$, поэтому

$$w(x,t) = \frac{x}{l} e^{-t}, \quad u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l} e^{-t}.$$

Если $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (9.4), то $v(x,t)$ является решением уравнения

$$\left(v(x,t) + \frac{x}{l} e^{-t} \right)'_t = a^2 \left(v(x,t) + \frac{x}{l} e^{-t} \right)''_{xx}.$$

То есть

$$v'_t = a^2 v''_{xx} + \frac{x}{l} e^{-t}. \quad (9.5)$$

Из начального условия

$$u(x,0) = v(x,0) + \frac{x}{l} = \frac{x}{l}$$

получаем

$$v(x,0) = 0. \quad (9.6)$$

Из граничных условий имеем:

$$v(0,t) = 0; \quad v(l,t) = 0. \quad (9.7)$$

Для функции $v(x,t)$ получили задачу (9.5) – (9.7) о распространении тепла в конечном стержне с неоднородным уравнением (9.5) и однородными краевыми условиями (9.7).

Будем решать эту задачу согласно теории п. 6.2. Собственными функциями задачи для однородного уравнения теплопроводности с однородными

краевыми условиями является функции $\sin(k\pi x/l)$ (см. п. 3.2). Поэтому решение задачи (9.5) – (9.7) ищем в виде ряда

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (9.8)$$

Разложим функцию $x e^{-t}/l$ в ряд по $\sin(k\pi x/l)$ при фиксированном t :

$$\frac{x}{l} e^{-t} = \frac{e^{-t}}{l} \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l};$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} x \left(\frac{-l}{\pi k} \right) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{2}{\pi k} \int_0^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2l}{\pi k} (-1)^{k+1};$$

$$\frac{x}{l} e^{-t} = \frac{2}{\pi} e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Подставим ряд (9.8) в уравнение (9.5):

$$\sum_{k=1}^{\infty} T'_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = -a^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l} + \frac{2}{\pi} e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin(k\pi x/l)$ для каждого k , получим

$$T'_k(t) + \left(\frac{k\pi\alpha}{l} \right)^2 T_k(t) = \frac{2}{\pi k} (-1)^{k+1} e^{-t}. \quad (9.9)$$

Из начального условия (9.6) следует, что $T_k(t) = 0$. Имеем задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Найдем решения задач Коши. Общими решениями соответствующих однородных уравнений являются множества функций

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right)^2 t}.$$

Частные решения будем искать в виде $T_k(t) = A_k e^{-t}$. Тогда

$$-A_k e^{-t} + A_k \left(\frac{k\pi\alpha}{l} \right)^2 e^{-t} = \frac{2}{\pi k} (-1)^{k+1} e^{-t}$$

и

$$A_k = \frac{2(-1)^{k+1} l^2}{\pi k \left((k\pi\alpha)^2 - l^2 \right)}.$$

Общие решения неоднородных уравнений (9.9) принимают вид

$$T_{\text{кон}}(t) = C_k e^{-\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right)^2 t} + \frac{2(-1)^{k+1} l^2}{\pi k \left((k\pi\alpha)^2 - l^2 \right)} e^{-t}.$$

Найдем C_k из начального условия $T_k(t) = 0$:

$$0 = C_k + \frac{2(-1)^{k+1} l^2}{\pi k \left((k\pi\alpha)^2 - l^2 \right)}; \quad C_k = \frac{2(-1)^k l^2}{\pi k \left((k\pi\alpha)^2 - l^2 \right)}.$$

Решениями задач Коши для уравнений (9.9) будут функции

$$T_k(t) = \frac{2(-1)^k l^2}{\pi k \left((k\pi\alpha)^2 - l^2 \right)} \left(e^{-\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \right),$$

которые являются коэффициентами ряда (9.8) при фиксированном t . Подставим $T_k(t)$ в ряд (9.8), получим решение задачи (9.5) – (9.7):

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k l^2}{\pi k \left((k\pi\alpha)^2 - l^2 \right)} \left(e^{-\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \right).$$

Тогда решением исходной задачи будет функция

$$u(x,t) = \frac{x}{l} e^{-t} + \frac{2l^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \left((k\pi\alpha)^2 - l^2 \right)} \left(e^{-\left(\frac{k\pi\alpha}{l}\right)^2 t} - e^{-t} \right).$$

Задача 6. Определите тип уравнения и приведите его к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sqrt{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{y}{x}} - 1 \right) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Решение. Определим тип уравнения. Для этого найдем функции

$$\delta(x, y) = B^2 - AC = \left(\sqrt{xy} \right)^2 - xy = 0,$$

так как $B = \sqrt{xy}$, $A = x$, $C = y$. Уравнение параболического типа.

Приведем его к каноническому виду. Составим уравнение характеристик и решим его:

$$x dy^2 - 2\sqrt{xy} dx dy + y dx^2 = 0;$$

$$x(y')^2 - 2\sqrt{xy} y' + y = 0;$$

$$y'_{1,2} = \frac{2\sqrt{xy} \pm \sqrt{4xy - 4xy}}{2x} = \sqrt{\frac{y}{x}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} + C.$$

Получили одно семейство характеристик: $\xi = \sqrt{y} - \sqrt{x}$.

В качестве второй переменной $\eta = \eta(x, y)$ возьмем такую функцию, чтобы якобиан преобразования не равнялся нулю. Так, если $\eta = x$, то

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2\sqrt{y}} \neq 0.$$

Выразим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и т.д. через производные по ξ и η :

$$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\xi \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) + u'_\eta \cdot 1;$$

$$u'_y = u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} \right);$$

$$u''_{xx} = (u''_{\xi\xi} \xi'_x + u''_{\xi\eta} \eta'_x) \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) + u'_\xi \left(\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right) + u''_{\eta\xi} \xi'_x + u''_{\eta\eta} \eta'_x =$$

$$= u''_{\xi\xi} \frac{1}{4x} - u''_{\xi\eta} \frac{1}{\sqrt{x}} + u''_{\eta\eta} + u'_\xi \left(\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right);$$

$$u''_{xy} = (u''_{\xi\xi} \xi'_y + u''_{\xi\eta} \eta'_y) \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}} \right) + u''_{\eta\xi} \xi'_y + u''_{\eta\eta} \eta'_y = u''_{\xi\xi} \left(\frac{-1}{4\sqrt{xy}} \right) + u''_{\xi\eta} \frac{1}{2\sqrt{y}};$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi} \frac{1}{4y} + u'_\xi \frac{1}{4\sqrt{y^3}}.$$

Подставив в исходное уравнение, получим

$$u''_{\xi\xi} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + u''_{\xi\eta} (-\sqrt{x} + \sqrt{x}) + u''_{\eta\eta} x + u'_{\xi} \left(\frac{1}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt{y}} - \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt{y}} \right) = 0,$$

или $u''_{\eta\eta} = 0$.

Это и есть канонический вид уравнения.

9.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 7. Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее

начальным условиям $u(x,0) = 0$, $u'_t(x,0) = x$.

Задача 8. Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее

начальным условиям $u(x,0) = \frac{x}{1+x^2}$, $u'_t(x,0) = \sin x$.

Задача 9. Найдите форму струны, определяемой уравнением

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, в момент $t = \pi/2a$, если $u(x,0) = \sin x$, $u'_t(x,0) = 1$.

Задача 10. Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее

начальным условиям $u(x,0) = x$, $u'_t(x,0) = x^2$ и краевому условию $u(0,t) = 0$.

Задача 11. Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяю-

щее начальным условиям $u(x,0) = x^2$, $u'_t(x,0) = \sin^2 x$ и краевому условию $u(0,t) = 0$.

Задача 12. Если концы струны соединены с невесомыми колечками, скользящими без трения по вертикальным проволокам, то в концах струна будет все время горизонтальной, т.е.

$$u'_x(0,t) = 0; \quad u'_x(l,t) = 0.$$

Как в этом случае применить метод Даламбера?

Указание. Решите задачу сначала для случая полубесконечной струны с первым из краевых условий, следуя рассуждениям п. 2.2. Затем воспользуйтесь вторым из краевых условий, следуя рассуждениям п. 2.3.

Задача 13. Струна длиной l , закрепленная на концах, изогнута так, что приняла форму параболы $u = x(l - x)$, и отпущена без начальной скорости. Найдите закон колебаний струны.

Задача 14. По струне длиной l , закрепленной на концах и находившейся в состоянии покоя, ударили молоточком. В результате удара точки струны, расположенные на отрезке $[c - h, c + h]$, получили начальную скорость v_0 . Найдите закон колебаний струны. Рассмотрите предельный случай задачи: сохраняя постоянным импульс молоточка, будем уменьшать h , $h \rightarrow 0$ при этом начальная скорость $v = v_0/h$.

Задача 15. Струна закреплена на концах $x = 0$ и $x = 3$. В начальный момент струна имеет вид ломаной OAB , изображенной на рис. 9.2, где $O(0;0)$, $A(2;-0,1)$, $B(3;0)$.

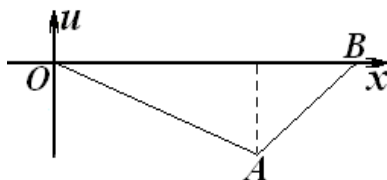


Рис. 9.2

Найдите форму струны для любого момента времени t , если начальные скорости точек струны $u'_t(x,0) = \sin \pi x/3$.

Задача 16. Решите задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x,0) = A \sin \frac{\pi x}{l}; \quad u'_t(x,0) = B \sin \frac{2\pi x}{l}; \quad u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Задача 17. Найдите закон свободных колебаний закрепленной на конце $x = 0$ однородной струны, если правый ее конец при $x = l$ перемещается так, что касательная к струне остается постоянно горизонтальной. В начальный момент струна находилась в положении равновесия и ей была придана начальная скорость $u'_t(x,0) = \sin(\pi x/l)$.

Указание. Имеем краевые условия $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$.

Задача 18. Закрепленной в точке $x = l$ однородной струне, левый конец которой в точке $x = 0$ может перемещаться с горизонтальной касательной, придана начальная скорость $v = x(l - x)/l^2$. Найдите закон ее свободных колебаний, если в начальный момент она имела форму $u(x, 0) = \sin(\pi x/l)$.

Задача 19. Для $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ решите уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x(x - l)$$

при нулевых начальных и краевых условиях $u(x, 0) = u_t'(x, 0) = 0$, $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Задача 20. Найдите закон свободных колебаний струны, правый конец которой $x = l$ закреплен, а левый при $x = 0$ движется по закону $u(0, t) = \sin(\pi at/l)$. Начальные скорость и отклонение струны равны нулю.

Задача 21. Найдите решение однородного уравнения теплопроводности при начальном условии

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 < x \leq l/2; \\ l - x, & \text{если } l/2 < x < l \end{cases}$$

и граничных условиях $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Задача 22. Дан тонкий однородный стержень длиной l , изолированный вне внешнего пространства, начальная температура которого равна $f(x) = x(l - x)/l^2$. Концы стержня поддерживаются при нулевой температуре. Определите температуру стержня при $t \geq 0$.

Задача 23. Решите задачу о распределении температуры в тонком однородном изотропном стержне без внутренних источников, если концы стержня теплоизолированы, и начальное распределение температуры задано функцией $u(x, 0) = A \cos(3\pi x/l)$, l – длина стержня.

Задача 24. Найдите закон распределения температуры внутри стержня, если на конце стержня $x = 0$ поддерживается нулевая температура, а правый конец стержня $x = l$ теплоизолирован от окружающей среды. Температура стержня задана функцией $u(x, 0) = f(x)$.

Указание. Имеем краевые условия $u(0, t) = u(l, t) = 0$.

Задача 25. На конце стержня $x=0$ поддерживается температура тающего льда $u(0,t)=0$, а другой конец $x=l$ – теплоизолирован, т.е. $u'_x(l,t)=0$. Найдите распределение температуры в любой момент времени t , если известно начальное распределение температуры:

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{200x}{l}, & \text{если } 0 < x \leq \frac{l}{2}; \\ 100, & \text{если } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Задача 26. Решите задачу:

$$u'_t = u''_{xx} + \sin \frac{\pi x}{2}; \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u'_x(2,t) = 0.$$

Задача 27. Дан тонкий однородный стержень длиной l . Начальная температура равна нулю. В точке $x=l$ температура поддерживается равной нулю, а в точке $x=0$ меняется по закону $u(0,t) = A \sin \omega t$. Найдите закон распределения температуры стержня при $t > 0$.

Задача 28. Найдите закон изменения температуры в однородном изотропном стержне длиной l , если начальная температура стержня задана равенством $u(x,0) = u_0 x^2 / l^2$. Левый конец стержня теплоизолирован, а правый поддерживается при постоянной температуре $u(l,t) = u_0$.

Задача 29. Решите уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для следующего начального распределения температуры стержня:

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0, & \text{если } x_1 < x \leq x_2; \\ 0, & \text{если } x < x_1. \end{cases}$$

Результат преобразуйте к интегралу вероятностей.

Задача 30. Найдите решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = u_0$ и краевому условию $u(0,t) = 0$. Результат преобразуйте к интегралу вероятностей.

Задача 31. Найдите решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворявшее

начальному условию

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 - (x/l) & \text{при } 0 \leq x < l; \\ 1 + (x/l) & \text{при } -l < x \leq 0; \\ 0 & \text{при } x \geq l \text{ и } x \leq -l. \end{cases}$$

Результат преобразуйте к интегралу вероятностей.

Указания к задачам 29, 30, 31. Произведите замену $z = x - (s/2\sqrt{t})$.

Задача 32. Найдите решение задачи $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

$$u(x,0) = f(x), \quad u'_x(0,t) = 0.$$

Задача 33. Найдите стационарное распределение температуры внутри бесконечного цилиндра радиусом R , если на левой половине поверхности цилиндра ($0 \leq \varphi < \pi$) подчеркивается температура $-T$, а на правой половине ($-\pi \leq \varphi < 0$) – температура T . Найдите решение в форме ряда. Вычислите температуру в точке $\varphi = \pi/2$, $\rho = R/2$.

Указания. Рассмотрите задачу Дирихле в полярных координатах.

Задача 34. Найдите закон стационарного распределения температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиусом R , если на его поверхности поддерживается температура $u(R, \varphi) = u_0 \sin \varphi$, где $u_0 = \text{const}$. Решение найдите в форме ряда.

Задача 35. Найдите решение задачи Дирихле для круга радиусом R , если на границе круга $u(x, y) = xy$.

Задача 36. Тонкая пленка натянута на проволочный каркас – окружность радиусом R с центром в начале координат; уравнение контура пленки $u(R, \varphi) = u_0 \cos 3\varphi$. Найдите форму поверхности, по которой расположится пленка.

Указание. Имеем задачу Дирихле для круга.

Задача 37. Найдите решение уравнения Лапласа внутри кольца, ограниченного окружностями $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = 1$ и $\Gamma_2 : x^2 + y^2 = 4$, удовлетворяющее условиям: $u(x, y)|_{\Gamma_1} = 0$, $u(x, y)|_{\Gamma_2} = y$.

Указание. Решите задачу в полярных координатах.

Задача 38. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leq x \leq 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура постоянна: $u(x, 0) = \varphi_0 = \text{const}$. Концы стержня теплоизолированы, и по стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $g(x, t) = e^{-t} \cos(5\pi x)$.

Задача 39. Найдите распределение температуры в тонком однородном стержне $0 \leq x \leq 1$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если в начальный момент времени температура постоянна: $u(x, 0) = \varphi_0 = \text{const}$. На левом конце стержня поддерживается нулевая температура, правый конец теплоизолирован. По стержню непрерывно распределены источники тепла с плотностью $g(x, t) = e^t \sin(1,5\pi x)$.

Указания к задачам 38, 39. Имеем задачу для неоднородного уравнения теплопроводности вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t).$$

Задача 40. В следующих уравнениях определите тип уравнения и приведите его к каноническому виду:

а) $u''_{xx} + 5u''_{xy} + 6u''_{yy} + 2u'_x = 0$;

б) $u''_{xx} + 2u''_{xy} + \cos^2 x u''_{yy} - \text{ctg} x (u'_x + u'_y) = 0$;

в) $u''_{xx} + 4u''_{xy} + 5u''_{yy} = 0$;

г) $x^2 u''_{xx} - 2xy u''_{xy} + y^2 u''_{yy} + 2xu'_x = 0$;

д) $y^2 u''_{xx} + x^2 u''_{xy} - \frac{x^2}{y} u'_y - \frac{y^2}{x} u'_x = 0$;

е) $u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} + 3 = 0$;

ж) $u''_{xx} - 2 \sin x u''_{xy} - \cos^2 x u''_{yy} - \cos x u'_y = 0$.

Задача 41. Найдите общие решения уравнения б задачи 40 и задачи 6 п. 9.1.

Задача 42. Приведите к каноническому виду и найдите общее решение уравнения $x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} - 2u'_y = 0$.

Задача 43. Приведите к каноническому виду и найдите общее решение уравнения $u''_{xx} - y u''_{yy} - 0,5 u'_y = 0$ в полуплоскости $y > 0$.

Задача 44. Приведите к каноническому виду и найдите общее решение уравнения $u''_{xx} - 2u''_{xy} + 2u''_{yy} = 0$.

Задача 45. Найдите решение уравнения $a^2 u''_{xx} - 2au''_{xt} + u''_{tt} = 4a^2 u/l^2$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = f(x)$, $u'_x(0,t) = F(x)$.

Указание. Приведите уравнение к каноническому виду, найдите общее решение, а затем частное.

Задача 46. Найдите решение уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = 2 - x^3$, $u'_t(x,0) = 5x$ и краевому условию $u'_x(0,t) = 0$.

Указание. Имеем задачу о колебаниях полубесконечной струны со свободным левым концом. По аналогии с задачей п. 2.2 решение определяется по формуле Даламбера при условии продолжения функций, задающих начальные условия, на промежуток $(-\infty, 0)$ четным образом.

Задача 47. Решите уравнение Лапласа в плоской области, ограниченной двумя концентрическими окружностями радиусами τ и R , если заданы граничные условия $u(\tau, \varphi) = A = \text{const}$, $u(R, \varphi) = B = \text{const}$.

Задача 48. Найдите стационарное распределение температуры на однородной тонкой круглой пластине радиусом R , верхняя половина границы которой поддерживается при температуре $u(x, y) = x^2 + y^2$, а нижняя – при температуре 0° .

Задача 49. Для $0 \leq x \leq l$ и $t \geq 0$ найдите решение уравнения $u'_t = u''_{xx}$ при начальном условии $u(x,0) = 1$ и граничных условиях $u(0,t) = e^{-\frac{1}{4l^2}}$, $u(l,t) = 0$.

Задача 50. Один конец стержня $x=0$ теплоизолирован, а другой поддерживается при температуре $u(l,t)=0$. В начальный момент времени температура во всех точках стержня $u(x,0)=u_0 = \text{const}$. Найдите распределение температуры при $t > 0$.

Задача 51. Решите задачу:

$$u'_t = a^2 u''_{xx}; \quad u(x,0) = \begin{cases} u_0, & \text{если } 0 < x \leq l/2; \\ 0, & \text{если } l/2 < x < l, \end{cases} \quad u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0.$$

Задача 52. Решите задачу:

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}; \quad u(x,0) = -\frac{x^2}{10l}; \quad u'_t(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0; \quad u'_x(l,t) = -\frac{1}{10}.$$

Задача 53. Струна, закрепленная на концах, в начальный момент имеет форму ломаной OAB . Найдите форму струны для любого момента времени t , если начальные скорости отсутствуют (рис. 9.3).

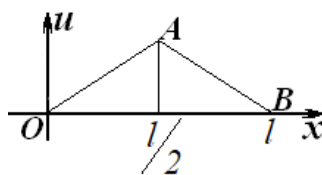


Рис. 9.3

Задача 54. Решите задачу:

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \quad u(x,0) = -x^2, \quad u'_t(x,0) = x, \quad u(0,t) = 0, \quad u'_x(0,t) = 0.$$

Задача 55. Найдите решение уравнения $u''_{tt} = u''_{xx}$, удовлетворяющее начальным условиям $u(x,0) = x^2$, $u'_x(x,0) = \cos x$.

Задача 56. Найдите форму струны, определяемой уравнением, $u''_{tt} = u''_{xx}$, в момент $t = \pi$, если $u(x,0) = \sin x$, $u'_t(x,0) = x \cos x$.

Задача 57. Найдите закон колебания струны длиной l , если плотность внешней силы постоянна и равна $g(x,t) = a^2/10l$, где a – коэффициент в уравнении колебания струны. Левый конец струны закреплен, а правый свободно перемещается с горизонтальной касательной. Начальное отклонение и начальная скорость равны нулю.

ОТВЕТЫ

7. $u = xt$. **8.** $u = \frac{1}{2} \left(\frac{x+t}{1+(x+t)^2} + \frac{x-t}{1+(x+t)^2} \right) + \sin x \sin t$. **9.** $u = \pi/2a$, т.е. струна

параллельна оси абсцисс. **10.** $u(x,t) = \begin{cases} x + x^2 + (x^3/3) & \text{при } 0 < x < t; \\ x + tx^2 + (t^3/3) & \text{при } x \geq t. \end{cases}$

11. $u(x,t) = \begin{cases} 2axt + \frac{1}{4a}(2x - \sin 2x \cos 2at) & \text{при } 0 \leq \frac{x}{a} < t; \\ x^2 + a^2 t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{4a} \cos 2x \sin 2at & \text{при } \frac{x}{a} \geq t. \end{cases}$

12. Начальные условия продолжить четным образом на промежуток $(-l, 0)$ и затем периодически на всю числовую ось с периодом $2l$.

13. $u = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi at}{l} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}$.

14. $u = \frac{4lv_0}{\pi^2 a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi h}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l}$. После воздействия сосредоточенного импульса ($h \rightarrow 0$) получаем закон колебания струны:

$u = \frac{4v_0}{\pi a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi at}{l}$.

15. $u = \sin \frac{\pi at}{3} \sin \frac{\pi x}{3} - \frac{0,9}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{2k\pi}{3} \sin \frac{k\pi x}{3} \cos \frac{k\pi at}{3}$.

16. $u = A \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{Bl}{a\pi} \sin \frac{2\pi at}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}$.

17. $u = \frac{16l}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \sin \frac{(2k+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$.

18. $u = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{(2k+1)(2k-3)} \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l} + \frac{4l}{\pi^2 a} \left(-1 + \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} \right) \frac{1}{(2k-1)^3} \sin \frac{(2k-1)\pi a}{2l} \right) \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$.

$$19. u = \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \left(\cos \frac{(2k-1)\pi t}{l} - 1 \right) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$

$$20. u = \frac{l-x}{l} \sin \frac{\pi at}{l} - \left(\frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi at}{l} + \frac{at}{l} \cos \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} \left(\sin \frac{\pi kat}{l} - \frac{1}{k} \sin \frac{\pi at}{l} \right) \sin \frac{\pi kx}{l}.$$

$$21. u = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k^2} e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

$$22. u = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-\frac{a^2(2k+1)^2 \pi^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}. \quad 23. u = A \cos \frac{3\pi x}{l} e^{-\frac{9a^2 \pi^2 t}{l^2}}.$$

$$24. u = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{a^2(2k-1)^2 \pi^2 t}{4l^2}} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}, \text{ где } A_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} dx.$$

$$25. u = \frac{800}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{4} e^{-\frac{a^2(2k-1)^2 \pi^2 t}{4l^2}} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

$$26. u = \frac{128}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-3)(2k-1)(2k+1)} \left[1 - e^{-\frac{(2k-1)^2 \pi^2 t}{16}} \right] \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$

$$27. u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\frac{a^2 k^2 \pi^2 t}{l^2}} - \frac{2A\omega l^2}{a^2 \pi^3 k^3} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} + \frac{A(l-x)}{l} \sin \omega t.$$

$$28. u = \frac{u_0 x^2}{l^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{32u_0 (-1)^{k-1}}{(2k-1)^3 \pi^3} \left[1 - e^{-\frac{(2k-1)^2 a^2 \pi^2 t}{4l^2}} \right] \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

$$29. u = \frac{u_0}{2} \left[\Phi \left(\frac{x-x_1}{2\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{x-x_2}{2\sqrt{t}} \right) \right]. \quad 30. u = u_0 \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right).$$

$$31. u = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{l} \right) \Phi \left(\frac{x+l}{2\sqrt{t}} \right) - 2 \frac{x}{l} \Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) - \left(1 - \frac{x}{l} \right) \Phi \left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}} \right) \right] + \\ + \frac{1}{l} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[e^{-(x+l)^2/4t} - 2e^{-x^2/4t} + e^{-(x-l)^2/4t} \right].$$

$$32. u = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_0^{+\infty} f(s) e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda s \cos \lambda x ds. \quad 33. u = \frac{-4T}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{2k-1} \frac{\sin(2k-1)\varphi}{2k-1}.$$

$$34. u = u_0 \frac{\rho}{R} \sin \varphi. \quad 35. u = \frac{\rho^2}{2} \sin 2\varphi. \quad 36. u = u_0 \left(\frac{\rho}{R} \right)^3 \cos 3\varphi.$$

$$37. u = \frac{4}{3} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi. \quad 38. u = \varphi_0 + \frac{1}{25\pi^2 a^2} \left(e^{-t} - e^{-25\pi^2 a^2 t} \right) \cos(5\pi x).$$

$$39. u = \left(\frac{4\varphi_0}{3\pi} e^{-2,25\pi^2 a^2 t} + \frac{1}{1+2,25\pi^2 a^2} \left(e^t - e^{-2,25\pi^2 a^2 t} \right) \right) \sin(1,5\pi x) + \\ + \frac{4\varphi_0}{\pi} \sum_{k=1, k \neq 2}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \left(\frac{\pi(2k-1)}{2} x \right) e^{-\pi^2 a^2 \frac{(2k-1)^2}{4} t}.$$

40. а) гиперболического типа $u''_{\eta\eta} + 4u'_{\xi} + 6u'_{\eta} = 0$; б) гиперболического типа $u''_{\xi\eta} = 0$; в) эллиптического типа $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$; г) параболического типа $u''_{\eta\eta} = 0$ ($\eta = y$); д) эллиптического типа $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$; е) параболического типа $u''_{\xi\xi} + 3 = 0$ ($\eta = x$); ж) гиперболического типа $u''_{\xi\eta} = 0$.

41. $u = \varphi(y - x + \cos x) + \psi(y - x - \cos x)$, $u = x\varphi(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \psi(\sqrt{y} - \sqrt{x})$, где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

42. $u''_{\xi\eta} = \frac{-1}{2\eta} u'_{\xi}$, $u = \sqrt{\frac{x}{y}} \varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

43. $u''_{\xi\eta} = 0$, $u = \varphi(x + 2\sqrt{y}) + \psi(x - 2\sqrt{y})$, где φ и ψ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

44. $u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0$, $u = \varphi(x + y, x)$, где $\varphi(s, t)$ – любая характеристическая, т.е. удовлетворяющая уравнению Лапласа функция.

$$\mathbf{45.} \quad u = f(x + at) \operatorname{ch} \frac{2at}{l} + \left[\frac{l}{at} F(x + at) - \frac{l}{2} f'(x + at) \right] \operatorname{sh} \frac{2at}{l}.$$

$$\mathbf{46.} \quad u(x, t) = \begin{cases} 2 - x^3 - 3xt^2 + 5xt & \text{при } x > t; \\ 2 - t^3 - 3tx^2 + 2,5(x^2 + t^2) & \text{при } x \leq t. \end{cases}$$

$$\mathbf{47.} \quad u = \frac{B \ln \frac{\rho}{R} + A \ln \frac{R}{\rho}}{\ln \frac{R}{r}}. \quad \mathbf{48.} \quad u = \frac{R^2}{2} + \frac{2R^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R} \right)^k \frac{\sin(2k-1)\varphi}{2k-1}.$$

$$\mathbf{49.} \quad u = e^{-\frac{1}{4l^2}} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)(\pi(2k+1)^2 - 1)} \left[e^{-\frac{1}{4l^2}} - e^{-\frac{(\pi(2k+1))^2 t}{4l^2}} \right].$$

$$\mathbf{50.} \quad u = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} e^{-\frac{(2k-1)^2 a^2 \pi^2}{4l^2}} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

$$\mathbf{51.} \quad u = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-\frac{(2k-1)^2 a^2 \pi^2 t}{4l^2}} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$

$$\mathbf{52.} \quad u = \frac{8l}{5\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l} - \frac{x}{10}.$$

$$\mathbf{53.} \quad u = \frac{8h^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l} \cos \frac{(2k-1)\pi at}{l}.$$

$$\mathbf{54.} \quad u = \begin{cases} x^2 + a^2 t^2 + tx & \text{при } x > at; \\ x^2 + a^2 t^2 + \frac{1}{2a}(x^2 + a^2 t^2) & \text{при } 0 < x < at. \end{cases}$$

$$\mathbf{55.} \quad u = x^2 + t^2 + \sin t \cos x. \quad \mathbf{56.} \quad u = -(\pi + 1) \sin x.$$

$$\mathbf{57.} \quad u = \frac{8l}{5\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \left(1 - \cos \frac{(2k-1)\pi at}{2l} \right) \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое моделирование многих физических и технических процессов приводит к постановке задач математической физики. Курс уравнений математической физики опирается на знание таких разделов высшей математики, как дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения и ряды. Этот сложный для восприятия курс математики в пособии представлен в достаточно простой форме без ущерба математической строгости и логики изложения материала. Особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению решения простейших задач. Рассмотрены обоснования математических моделей, формулировка и классификация основных задач, аналитические методы решения, такие как метод Даламбера, метод Фурье, метод интегральных преобразований, приведен пример численного решения конкретной технической задачи. Расположение материала соответствует основным типам уравнений и методам их решения. В последней главе пособия представлены разборы решений нескольких типовых задач и приведен набор большого числа задач для самостоятельного решения.

Знакомство с методами составления математических моделей на основании физических законов и их математической интерпретации, технологией проведения необходимых расчетов в рамках построенных моделей и решением задач практико-ориентированного характера способствует формированию общих профессиональных компетенций, приобретаемых бакалаврами инженерных и экономических направлений подготовки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пискунов, Н. С.** Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. Т. 2 / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – 560 с.
2. **Кошляков, Н. С.** Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков. – М. : Высш. шк., 1970. – 712 с.
3. **Очан, Ю. С.** Методы математической физики / Ю. С. Очан. – М. : Высш. шк., 1965. – 36 с.
4. **Очан, Ю. С.** Сборник задач по методам математической физики / Ю. С. Очан. – М. : Высш. шк., 1973. – 192 с.
5. **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1966. – 415 с.
6. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1984. – 813 с.
7. **Сборник** задач по математике для вузов. Специальные курсы / под ред. А. В. Ефимова. – М. : Наука, 1984. – 608 с.
8. **Атанасян, В. А.** Специальные главы математического анализа / В. А. Атанасян, Н. Я. Виленкин, М. Л. Смолянский. – М. : Просвещение, 1966. – 166 с.
9. **Мантуров, О. В.** Курс высшей математики / О. В. Мантуров. – М. : Высш. шк, 1991. – 448 с.
10. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1966. – 800 с.
11. **Формалев, В. В.** Уравнения математической физики : учебник / В. В. Формалев. – М. : ЛЕНАНД, 2021. – 648 с.
12. **Пчелинцева, И. Ю.** Система автоматизированного управления процессом нанесения гальванического покрытия в ванне с токонепроводящим экраном / И. Ю. Пчелинцева, Ю. В. Литовка // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2022. – Т. 23, № 4. – С. 188 – 196.
13. **Каданер, Л. И.** Равномерность гальванических покрытий / Л. И. Каданер. – Харьков : Изд-во ХГУ, 1960. – 414 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	4
1.1. Вывод уравнения колебаний струны	4
1.2. Вывод уравнения распространения тепла в стержне	7
1.3. Основные уравнения математической физики	9
1.4. Задачи математической физики	11
1.5. Понятие о корректности задач математической физики	14
2. МЕТОД ДАЛАМБЕРА	15
2.1. Решение задачи о колебаниях бесконечной струны	15
2.2. Решение задачи о колебаниях полубесконечной струны	17
2.3. Решение задачи о колебаниях ограниченной струны	18
2.4. Понятие об обобщенном решении	20
3. МЕТОД ФУРЬЕ	21
3.1. Ряды Фурье	22
3.2. Решение задачи о колебаниях ограниченной струны	24
3.3. Решение задачи о распространении температуры в конечном стержне	28
3.4. Задача о распределении температуры в бесконечном стержне	33
3.5. Задача о распределении температуры в полубесконечном стержне	36
3.6. Решение задачи Дирихле для круга	38
4. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ	45
4.1. Задача о распространении тепла в бесконечном стержне	46
4.2. Задача о распространении тепла в полубесконечном стержне	48
5. РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ	53
5.1. Метод Фурье для неоднородного уравнения	53
5.2. Решение задачи с неоднородными граничными условиями	56

6. ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ	58
6.1. Классификация уравнений в частных производных. Канонический вид	58
6.2. Замена переменных в уравнении с частными производными	59
6.3. Уравнение характеристик	62
6.4. Приведение уравнения к каноническому виду	64
6.5. Общее решение уравнения колебания струны	67
7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛА В ПЛАСТИНЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ	69
7.1. Нахождение распределения температуры внутри плоской пластины	69
7.2. Численно-аналитическое моделирование распределения температуры	77
8. ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ – РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ГАЛЬВАНИЧЕСКОЙ ВАННЕ	82
9. УПРАЖНЕНИЯ	89
9.1. Решения задач	89
9.2. Задачи для самостоятельного решения	97
ОТВЕТЫ	105
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	109
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	110

Учебное электронное издание

ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна
МОЛОКАНОВА Елена Анатольевна
ПРОТАСОВ Дмитрий Николаевич
ПЧЕЛИНЦЕВ Александр Николаевич
ПЧЕЛИНЦЕВА Ирина Юрьевна

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Графический и мультимедийный дизайнер Н. И. Кужильная
Обложка, упаковка, тиражирование Л. В. Комбаровой

ISBN 978-5-8265-2771-9



9 785826 527719

Подписано к использованию 16.04.2024.
Тираж 50 шт. Заказ № 50

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел./факс (4752) 63-81-08.
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru