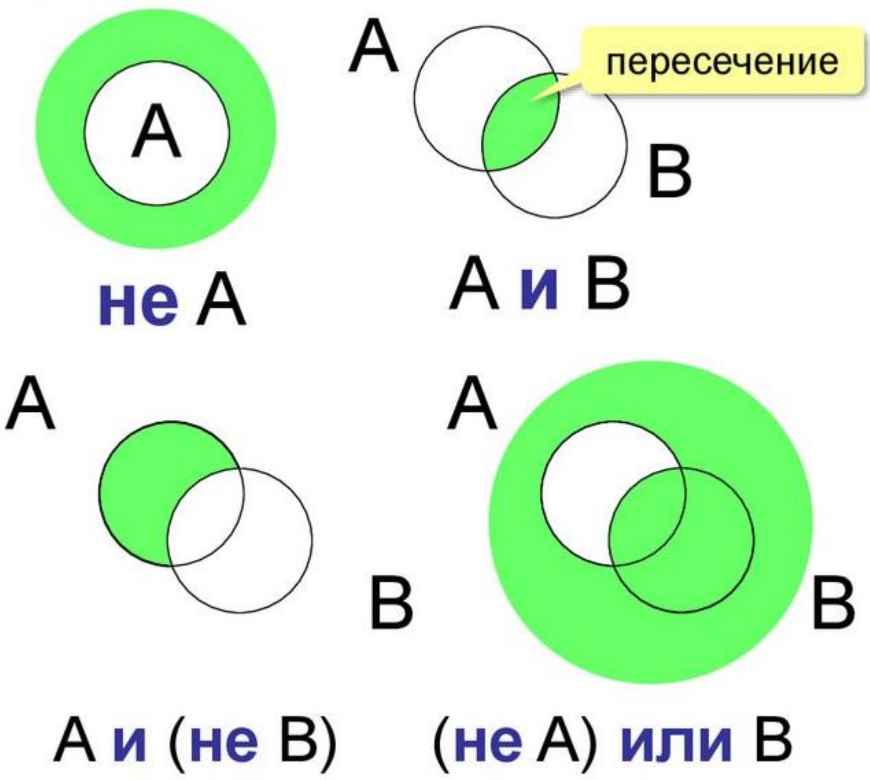
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ



Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические рекомендации
для самостоятельной работы студентов 2 курса
направления подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика»
и специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование»
дневной и заочной форм обучения

Учебное электронное издание

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

УДК 510.6(076)
ББК В12я73-5
Э45

Рекомендовано Методическим советом университета

Рецензент

Кандидат экономических наук, доцент кафедры
«Высшая математика» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
Д. Н. Протасов

Э45 **Элементы** математической логики [Электронный ресурс] : методические рекомендации по решению задач / сост. : О. Ю. Радько, И. А. Парфёнова. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2023. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 1,3 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.

Содержат основные положения требований к информационным системам, типовые требования и показатели качества, типовую номенклатуру показателей, вариант реализации оценки качества программного продукта.
Предназначены для самостоятельной работы студентов 2 курса направления подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» и специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» дневной и заочной форм обучения.

УДК 510.6(076)
ББК В12я73-5

ВВЕДЕНИЕ

В данной методической разработке содержатся задачи для самостоятельной работы по курсу «Элементы математической логики» для студентов дневной, очно-заочной и заочной формы обучения по направлению подготовки бакалавров 38.03.05 – «Бизнес-информатика», а также специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование». Представлены задачи по таким темам курса, как: «Высказывания и операции над ними. Формулы алгебры логики», «Тавтологии. Основные равносильности алгебры высказываний», «Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Совершенные нормальные формы формул алгебры высказываний», «Анализ и упрощение релейно-контактных схем». Варианты заданий для самостоятельных работ приведены в табл. 1. Номер варианта самостоятельной работы определяются в соответствии с порядковым номером студента в списке группы.

1. Варианты заданий для самостоятельных работ

№ студента	Самостоятельная работа № 1	Самостоятельная работа № 2	Самостоятельная работа № 3	Самостоятельная работа№ 4
1	2	3	4	5
1	I	VIII	VII	IX
2	II	IX	VIII	I
3	III	X	VI	III
4	IV	VII	I	VII
5	V	II	II	II
6	VI	VII	III	VIII
7	VII	I	IX	V
8	VIII	VI	VI	VI
9	IX	III	II	VIII
10	X	VI	VII	IX
11	I	IV	IX	IV
12	X	IX	III	X
13	III	VIII	V	II
14	IV	VII	II	VI
15	V	III	IX	III
16	VI	II	IV	VI
17	VII	X	I	V
18	VIII	II	III	VII
19	IX	V	VI	I
20	X	I	VII	III

Тема 1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Высказыванием называется повествовательное предложение, имеющее вполне определённое значение истинности: «истина» или «ложь».

Речевая практика устанавливает определённые требования, предъявляемые к высказываниям. Эти требования были сформулированы ещё Аристотелем и известны как основные законы формальной логики.

Закон тождества: каждый из предметов, о которых идёт речь, всё время должен оставаться самим собой.

В противном случае изменчивость предмета привела бы к тому, что уже в ходе самого рассуждения истинные высказывания становились бы ложными, вследствие чего из этих высказываний нельзя было бы извлечь никакой надёжной информации.

Закон непротиворечия: одно и то же нельзя одновременно и утверждать и отрицать.

Если в высказывании что-то одновременно и утверждается и отрицается, то это высказывание по существу никакой информации не несёт, а следовательно оно абсолютно бесполезно и поэтому может выступать средством общения.

Закон исключённого третьего: каждое высказывание непременно должно быть либо истинным, либо ложным.

Любое осмысленное высказывание всегда может быть либо истинно, либо ложно, третьего не дано.

Необходимо помнить, что в алгебре логики мы отвлекаемся от смысловых значений высказываний и учитываем только их истинностные значения, это означает, что **составные высказывания рассматриваются только с точки зрения их логической структуры. Определяющим является то обстоятельство, что высказывания, имеющие одинаковую структуру, подчиняются одинаковым законам при определении их истинностных значений.**

При анализе сложных высказываний мы отвлекаемся от конкретного смысла элементарных высказываний и учитываем только их истинностные значения, т.е. изучаем общие схемы построения составных высказываний.

Рассмотрим, например, следующие высказывания:

1) Если будет солнце, то будет тепло. Это высказывание можно записать так: С→ Т.
2) Если пойдёт дождь, то будет пасмурно: Д → П.
3) Если я выучу теорему, то решу задачу: Т → З.

Все три высказывания построены по одной и той же схеме, все они имеют одну и ту же форму: А → В, а значит, логическая структура составных высказывания одна и та же. Буквы А и В, участвующие в записи данной формулы, используются как переменные. Вместо А и В можно подставить любые конкретные элементарные высказывания.

Анализ логической структуры составных высказываний привёл нас к понятию переменной, значениями которой являются высказывания. Эти переменные являются переменными типа «высказывание». Поэтому их называют **«высказывательными переменными»** или **«пропозициональными переменными»**. Этот термин происходит от слова propositio (предложение, высказывание).

В естественном, обиходном языке существуют всевозможные связки, с помощью которых из элементарных высказываний образуются более сложные составные высказывания. Одной из таких связок является союз «и», смысл связки «и» заключается в том, что **утверждаются оба** высказывания, соединённые этой связкой. Это значит, что высказывание «А и В» истинно тогда и только тогда, когда истинны и А, и В. Такая связка «и» называется **«конъюнкцией.** Во всех остальных случаях это высказывание ложно. Значит, при любых значениях переменных А и В мы можем найти значение высказывания «А * В». Это удобнее всего сделать в форме таблицы, называемой «таблицей истинности»:

Таблица 2

A	B	A * B	B * A
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Рассмотрим теперь составное высказывание «А или В». Смысл связки «или» заключается в том, что **утверждается, по крайней мере, одно** из высказываний, соединённых связкой «или». Эта связка обозначается символом «∨». Связка «∨», понимаемая в том и только в том смысле, в каком она определена приведённой в табл. 3, называется **«дизъюнкцией».** Таблица истинности для высказывания «А ∨ В» будет выглядеть следующим образом.

Таблица 3

A	B	A ∨ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Слово «или» означает, что высказывание вида «A или B» должно быть понято в том смысле, что истинно или A, или B, или оба. Но в некоторых случаях значение высказывание вида «A или B» понимается в том смысле, что истинно **только A или только** B, но не оба вместе. Говорят, что в первом случае слово «или» употреблено в **неразделительном** смысле, а во втором – в **разделительном.** Если данная связка употребляется в разделительном смысле, то она называется строгой дизъюнкцией и обозначатся символом «$\overline{\vee}$». Таблица истинности для высказывания «A $\overline{\vee}$ B» будет выглядеть следующим образом:

Таблица 4

A	B	A $\overline{\vee}$ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Связка «если…, то…». Эта связка может быть задана и в другой форме: «…если…». Эквивалентность этих форм следует из того, что высказывания «Если A, то B» и «B, если A» выражают одну и ту же мысль. Эта связка называется **«импликацией»** (обозначается как «→»), также импликацией принято называть и саму формулу A → B. Здесь A называется **«посылкой», B – «заключением».**

Следует помнить, что импликация ложна тогда и только тогда, когда «из истины следует ложь», т.е. когда посылка истинна, а заключение ложно.

Таблица истинности для высказывания «A → B» будет выглядеть следующим образом:

Таблица 5

A	B	A → B	B → A
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Связка «тогда и только тогда…, когда…», «…необходимо и достаточно для…». Эта связка называется **«эквивалентностью»** (обозначается как «↔»). Таблица истинности для высказывания «A ↔ *B*» будет выглядеть следующим образом:

Таблица 6

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логические связки конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность являются **бинарными,** т.е. двухместными связками. Это значит, что в рассматриваемой связке предполагается наличие двух мест, куда могут быть подставлены выражения, соединяемые этой связкой, мы отметим эти места многоточиями, то возникнут выражения вида …∨…, … → … , …↔… Эти выражения имеют форму высказываний.

В алгебре логики есть и одноместные логические операции. Одной из этих операций является отрицание. Соответствующая логическая связка также называется **«отрицанием»** или **«инверсией». Она** выражается с помощью таких слов, как «не», «неверно, что» и т.п. Обычно данная операция обозначается с помощью черты, которую ставят над отрицаемым предложением. Определить отрицание можно с помощью таблицы истинности:

Таблица 7

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

Рассмотренные связки позволяют получить из элементарных высказываний любое составное высказывание.

ФОРМУЛА. ОЦЕНКА ФОРМУЛЫ И ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ

Формулой языка алгебры логики называется выражение, составленное по определённым правилам из пропозициональных переменных, логических связок и скобок, которое позволяет наглядно описать форму строения составных высказываний. При этом необходимо учитывать, что:

1. **Любая пропозициональная переменная является формулой.**
2. **Если пропозициональная переменная A формула, то её отрицание $\bar{A}$ – тоже формула.**
3. **Если пропозициональные переменные A и B формулы, то A * B, AVB, $A \veebar B$, A→B, A ↔ B – тоже формулы.**

Например, выражение ((A * B) → (C ∨ D)) является формулой.

Если A – формула, а B – какая-либо её составная часть, в свою очередь, являющаяся формулой, то B называется подформулой формулы A (под «составной частью» формулы A понимаем такую её часть, которая может быть выписана из неё без пропусков).

Например: формула ((A * B) → (C ∨ D)) имеет следующие подформулы: (A * B), A, B, (C ∨ D), C, D.

А вот выражение «(A * B) →» не является формулой и поэтому не может быть подформулой исходной формулы (хотя и является её частью).

Выражение (A → (CD)) тоже не может быть подформулой исходной формулы, так как оно не является её составной частью.

Для упрощения формул применяются следующие правила опускания скобок:

1. **Наружные скобки можно опустить.**
2. **Если подформула имеет вид ($\bar{M}$), то скобки можно опустить.**
3. **Логические операции упорядочиваются по «силе связывания» согласно принципу – сильнее всего связывает конъюнкция, затем – дизъюнкция, а слабее всего связывает импликация**.

Например, рассмотрим нашу формулу: ((A * B) → (C ∨ D)).

После опускания излишних скобок получим: A * B → C ∨ D.

Самостоятельная работа № 1

Таблица 8

№ варианта	Задание
I	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $(((\big((A\vee B) \to (\bar{C} * D)\big) \to (\bar{A} \vee \bar{C}))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(\bar{A}VB \to C)V(\bar{D} \to BCVA)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: X → (Y → ¬Z). Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Если Петя не пойдёт в кино, то он будет смотреть телевизор или пойдёт к своим друзьям. Если же он пойдёт к друзьям, то он не пойдёт в кино. А если он пойдёт в кино, то он не приготовит уроки. Если же он приготовит уроки, то будет смотреть телевизор. Вывод: если Петя выполнит уроки, но не пойдёт в кино, то он не пойдёт и к своим друзьям.
II	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $((\bar{B} \to A \vee C)) \vee ((\bar{A} \vee B) \to C))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(C \to \bar{A} \veebar \bar{B}) \to (C \vee \bar{D} \to \bar{A}B)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: ¬X → (Y → Z). Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Надо купить либо яблоки, либо груши. При этом надо учесть следующее: не может быть, чтобы все большие груши были спелыми. Все спелые яблоки большие. Если будут куплены груши, то они будут или неспелыми, или небольшими. Вывод: если будут куплены яблоки, то они будут большими и сладкими.

№ варианта	Задание
III	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $((\bar{A} \vee (BC)) \rightarrow ((\bar{C}\bar{D}) \vee B))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(\bar{A} \vee BC \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow AC \vee \bar{D})$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $X \vee \neg Y \vee \neg Z$. Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: В вазе лежит только одно яблоко. Известно, что оно или красное, или зелёное. Если это яблоко красное и большое, то оно сладкое. Если же это яблоко зелёное и не сладкое, то оно не большое. Выяснилось также, что это яблоко сладкое. Вывод: если это яблоко не большое и не красное, то оно зелёное.
IV	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $(((A\bar{C}) \rightarrow (B \vee D)) \vee ((A \rightarrow (D \vee C)) \rightarrow \bar{B}))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(C \vee BD \rightarrow \bar{A}) \vee (\bar{B} \vee C \rightarrow D)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $\neg X \vee Y \vee \neg Z$. Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Будет пасмурная погода со снегом. Если будет снег, то будет дождь. Если будет пасмурная погода с ветром, то дождя не будет. Вывод: ветра не будет.
V	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $(((A \vee B)\vee\bar{A}) \rightarrow (B \vee D))V((A\vee(BVC)) \rightarrow (B\vee C)))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(C \vee B \rightarrow D \rightarrow \bar{A}) \vee (A \longrightarrow D \vee C \rightarrow D)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $X \rightarrow (\neg Y \rightarrow Z)$. Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Надо купить рубашку, которая может быть или белой, или голубой, или розовой. Если будет куплена голубая или розовая рубашка, то она будет шерстяной. Если же будет куплена льняная или шерстяная рубашка, то она будет белой или голубой. Вывод: если будет куплена голубая рубашка, то она будет шерстяной.
VI	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $((\bar{A} \vee ((BC) \longrightarrow (AC))) \rightarrow ((\bar{C}A\bar{D}) \longrightarrow B))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(A\bar{C} \vee BC \rightarrow D \longrightarrow B) \vee (B \rightarrow A \longrightarrow C \vee D \overset{-}{\longrightarrow} AB)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $X \rightarrow (Y \rightarrow \neg Z)$. Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Либо будет снег, либо будет дождь. Погода будет пасмурной и ветреной. Если не будет снега, то погода будет не пасмурной. Ветреная, дождливая погода бывает только при пасмурной погоде. Вывод: будет ветреная погода с дождём или снегом.
VII	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $((\overline{A} \vee B \rightarrow C) \longrightarrow ((A\vee C)\vee B)\vee (A \longrightarrow C))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $\overline{A} \longrightarrow B * (A\vee C) \longrightarrow A\vee \overline{B} \longrightarrow C)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $\neg(\neg X \wedge \neg Y) \vee Z$.

№ варианта	Задание
VII	Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: На день рождения было решено купить астры или георгины. Было также решено, что купленные цветы должны быть светлыми и красными. В магазине выяснилось, что все светлые астры не красные. Вывод: Були куплены георгины.
VIII	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $\Big(\big((\bar{A} \to (D \to C)\big) \to B)\Big) \vee \big(D * (B \to A)\big)$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(\bar{A} \vee B \to C \vee D) \vee BVA \to (B \to B \vee D\bar{A} \to C)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $\neg(X \vee Y \vee \neg Z)$. Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Для того, чтобы Сергей пошёл в кино, достаточно, чтобы Андрей, или Володя не пошли в кино. Володя идёт в кино вместе с Дашей. Не может быть, чтобы в кино пошли Андрей и Сергей. Вывод: для того чтобы Андрей пошёл в кино, необходимо, чтобы в кино пошли Даша и Сергей.
IX	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $(((A \to \bar{C}) \to (A * B)) \vee (\big(A \vee (D \vee C)\big) \vee A * \bar{B}))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(C \vee B \leftrightarrow D \to \bar{A}) \vee (\bar{B} \leftrightarrow C \leftrightarrow D \to A * C)$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $\neg X \vee Y \wedge \neg Z$. Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать их на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Известно, что посетитель буфета взял или кефир, или молоко, или сок. Если он взял кефир или молоко, то взятый им напиток был холодным. Если же он вял не холодный напиток, то это не сок. Вывод: посетитель взял холодный напиток.
X	Задание 1. В следующей формуле опустите излишние скобки: $(((A \leftrightarrow (C \to \bar{B})) \to (B \leftrightarrow (A * C))) \vee (\big(A \leftrightarrow (D \vee C)\big) \vee \bar{B}))$. Задание 2. В следующей формуле восстановите опущенные скобки: $(CVB \leftrightarrow D \to \bar{A}) \vee (\bar{B} \vee C \to D) \leftrightarrow A \vee D \vee C$. Задание 3. Составить таблицу истинности сложного высказывания: $\neg(X \vee Y) \vee Z$. Задание 4. Установить логическую структуру следующих предложений, записать и х на языке логики высказываний и проверить истинность сложного высказывания: Несколько друзей решили пойти на озеро или на речку. Известно, что на озеро они не пойдут только тогда, когда погода буде пасмурной. Если же они на озеро пойдут, то будут кататься на лодке. Известно также, что если они при пасмурной погоде пойдут на речку, то кататься на лодке не придётся. Вывод: погода была пасмурной, но друзья всё же катались на лодке.

Тема 2. ТАВТОЛОГИИ. ОСНОВНЫЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Тавтологией называется формула, которая при **любых** оценках пропозициональных переменных принимает значение «истина».

Чтобы проверить, что какая-то формула является тавтологией, надо составить таблицу истинности для этой формулы и убедиться, что она состоит только из одних «единиц».

Например**,** рассмотрим нижеприведённые формулы и докажем, что они являются тавтологиями, и каждая из этих тавтологий имеет конкретный смысл:

$$A \to A. \tag{1}$$

Таблица 9

A	$\bar{A}$	$A \to A$
0	1	1
0	1	1
1	0	1
1	0	1

Данная тавтология означает, что **любое утверждение является следствием самого себя**

$$A * \bar{\bar{A}}. \tag{2}$$

Таблица 10

A	A	$\bar{\bar{A}}$	$A * \bar{\bar{A}}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1

Данная тавтология выражает закон противоречия: **не может быть, чтобы одновременно выполнялось A и не A**

$$A \vee \bar{A}. \tag{3}$$

Таблица 11

A	$\bar{A}$	$A \vee \bar{A}$
0	1	1
0	1	1
1	0	1
1	0	1

Данная тавтология выражает **закон исключённого третьего**

$$A * \bar{A} \to B. \tag{4}$$

Таблица 12

A	$\bar{A}$	B	$A * \bar{A}$	$A * \bar{A} \to B$
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	1

Данная тавтология выражает мысль, что **из противоречия следует всё что угодно**

$$A \to (B \to A). \tag{5}$$

Таблица 13

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Данная тавтология означает, что **если высказывание А истинно, то оно следует из любого высказывания В**

$$(A \to B) \vee (B \to A). \quad (6)$$

Таблица 14

A	B	A → B	B → A	(A → B) ∨ (B → A)
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Данная тавтология означает, что **каковы бы ни были два высказывания А и В – или из А следует В, или из В следует А**

В алгебре логики тавтологии играют особую роль. Любая тавтология, какие бы истинностные значения не принимали пропозициональные переменные, всегда принимает значение «истина». Поэтому все тавтологии равносильны между собой, а значит, все они являются взаимозаменимыми. Поэтому любую тавтологию мы можем заменить символом «1».

Наряду с тавтологиями рассматривают и **тождественно-ложные формулы**. Очевидно, что отрицание каждой тавтологии является тождественно-ложной формулой. Поэтому любую тождественно-ложную формулу можно обозначить символом «0».

Для каждой формулы алгебры логики может быть построена соответствующая ей таблица истинности. Рассмотрим простой пример. Пусть нам дана формула: $\overline{A} \vee \overline{B} \to A$.

Выполним пошагово построение таблицы истинности для данной формулы:

1. Составляем таблицу всевозможных комбинаций значений для переменных А, В.
2. Составляем таблицу оценок для $\overline{A}$. Эти оценки, очевидно, будут противоположны оценкам А.
3. Составляем таблицу оценок для $\bar{B}$. Эти оценки, очевидно, будут противоположны оценкам В.
4. Составляем таблицу для $\overline{A} \vee \overline{B}$. При этом надо исходить из оценок для $\overline{A}$, записанных в третьем столбце, и оценок для $\bar{B}$, записанных в четвёртом столбце.
5. Составляем таблицу оценок для $\overline{A} \vee \overline{B} \to A$.

Таблица 15

A	B	$\overline{A}$	$\bar{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B} \to A$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1

Рассмотрим ещё одну формулу A*B ∨ A и аналогичным образом постоим для неё таблицу истинности:

Таблица 16

A	B	A*B	A*B∨A
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Рассматривая полученные табл. 13 и 14, легко убедиться, что значения формул $\overline{A} \vee \overline{B} \to A$ и $A * B \vee A$ одинаковы на любых совпадающих наборах значений переменных А и В – они либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. Такие формулы называются **«равносильными».** Равносильные формулы отличаются друг от друга только тем, что соответствующие подформулы у них различны.

Факт утверждения о равносильности двух формул обычно обозначается знаком равенства, таким образом, можно записать, что: $\overline{A} \vee \overline{B} \to A = A * B \vee A$.

Отношение равносильности даёт возможность выполнения равносильных преобразований алгебры логики. Но, кроме отношения равносильности, существуют и другие отношения между формулами, такие как: совместность, несовместность, противоположность, логическое следование.

Две формулы называются **«совместными»,** если хотя бы при одной оценке пропозициональных переменных они одновременно оказываются истинными. В противном случае формулы называются **«несовместными».**

Две формулы называются **«противоположными»,** если принимают противоположные истинностные значения. В этом случае каждая из этих формул является отрицанием другой.

Формула B называется **«логическим следствием»** формулы A (из A логически следует B), если при любых оценках $A \to B$ всё время принимает значение «истина». Это значит, что ни при каких оценках пропозициональных переменных не может представиться случай, когда A истинно, а B ложно (т.е. не может быть, чтобы из истины следовала ложь).

Основные равносильности алгебры логики

1. $A \lor B = B \lor A$; $1'. AB = BA$;
2. $A \lor (B \lor C) = (A \lor B) \lor C$; $2' A(BC) = (AB)C$;
3. $A(B \lor C) = AB \lor AC$; $3'. A \lor BC = (A \lor B) * (A \lor C)$;
4. $A \lor A = A$; $4'. A * A = A$;
5. $\bar{A} \bar{V} \bar{B} = \bar{A} * \bar{B}$; $5'. \bar{A} * \bar{B} = \bar{A} \lor \bar{B}$;
6. $A \lor 0 = A$; $6'. A * 1 = A$;
7. $A \lor 1 = 1$; $7'. A * 0 = 0$;
8. $A \lor \bar{A} = 1$; $8. A * \bar{A} = 0$;
9. $A \lor A * B = A$; $9'. A * (A \lor B) = A$;
10. $A \lor \bar{A} * B = A \lor B$; $10'. A * (\bar{A} \lor B) = AB$.

Эти равносильности можно проверить с помощью построения таблиц истинности. Равносильности 1 – 10 и двойственных им равносильностей со штрихами достаточно, чтобы доказать любую другую равносильность (если только соответствующие формулы не содержат импликацию, эквивалентность или строгую дизъюнкцию)

Например, рассмотрим формулу:

$(A \lor B)(C \lor D) =$ |***обозначим подформулу* A ∨ B *через* X *и воспользуемся равносильностью 3***| $=$ $= X(C \lor D) = XC \lor XD = (A \lor B)C \lor (A \lor B)D = AC \lor BC \lor AD \lor BD = AC \lor AD \lor BC \lor BD$.

Таким образом, мы доказали, что имеет место следующую равносильность:

$$\mathbf{(A \lor B)(C \lor D) = AC \lor AD \lor BC \lor BD.}$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОРМУЛ, СОДЕРЖАЩИХ ИМПЛИКАЦИЮ, ЭКВИВАЛЕНЦИЮ И СТРОГУЮ ДИЗЪЮНКЦИЮ

С помощью таблиц истинности можно легко доказать, что $A \to B = \bar{A} \lor B$. Это очень важная равносильность! Её надо хорошо запомнить; так как она очень часто используется при преобразовании формул алгебры логики. Построим для данной формулы таблицу истинности. Для удобства можно записывать истинностные значения для левой и правой части формулы в одной таблице:

Таблица 17

A	B	$\bar{A}$	B	$\bar{A} \lor B$	$A \to B$
0	0	1	1	**1**	**1**
0	1	1	0	**1**	**1**
1	0	0	1	**0**	**0**
1	1	0	0	**1**	**1**

Сравнивая значения в последних двух столбцах таблицы 15, легко видеть, что формула $A \to B = \bar{A} \lor B$ действительно является равносильностью алгебры логики.

1. **Эквиваленцией** или **двойной импликацией** называется связка, обозначаемая символом «↔». Смысл этой связки определяется следующим образом: A эквивалентно B тогда и только тогда, когда из A следует B и из B следует A.

Легко видеть, что:

$$A \leftrightarrow B = (A \to B) * (B \to A) = (\bar{A} \lor B) * (\bar{B} \lor A) = A * B \lor \bar{A} * \bar{B}$$

Это значит, что высказывание A эквивалентно B тогда и только тогда, когда оба истинны или оба ложны.

Необходимо помнить, что конъюнкция и дизъюнкция связывают сильнее, чем эквиваленция! Например, в записи $(A \vee B) \leftrightarrow (C * D)$ можно опустить скобки: $A \vee B \leftrightarrow C * D$.

2. Если сравнить табличные определения строгой дизъюнкции и эквиваленции, данные в разделе 1, легко видеть, что одна из этих операций является отрицанием другой: $\overline{A \leftrightarrow B} = A \mathbin{\overline{\vee}} B$, и наоборот, $\overline{A \mathbin{\overline{\vee}} B} = A \leftrightarrow B$.

Таким образом, $A \mathbin{\overline{\vee}} B = \overline{A * B \vee \overline{A} * \overline{B}} = \overline{A * B} \vee \overline{\overline{A} * \overline{B}}$ — as printed: $A \mathbin{\overline{\vee}} B = \overline{A * B \vee \overline{A} * \overline{B}} = A * B \vee \overline{A} * \overline{B} = (\overline{A} * A) \vee (\overline{B} * A) \vee (\overline{B} * B) \vee (\overline{A} * B) = \overline{B} * A \vee \overline{A} * B$.

ОТРИЦАНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Отрицание высказывания – это операция, заключающаяся в таком преобразовании содержания высказывания, в результате которого получают высказывание, находящееся в отношении противоречия (контрадикторности) к исходному.

При отрицании высказывания меняются его качество и количество. Отрицая общее, получаем частное, и наоборот, отрицая частное, получаем общее. Отрицая утвердительное высказывание, получаем отрицательное, и наоборот, отрицая отрицательное высказывание, получаем утвердительное.

Предположим, что требуется сформулировать отрицание высказывания «каждый экономист знает некоторого программиста». Это суждение по качеству – утвердительное, а по количеству – обще-частное. Следовательно, в результате отрицания исходного суждения мы должны получить суждение по качеству – отрицательное, а по количеству – часто-общее. Таковым является суждение «Некоторые экономисты не знают ни одного программиста».

Результатом отрицания конъюнктивного высказывания является дизъюнктивное суждение, в котором составляющие его простые высказывания являются отрицаниями составляющих суждений исходного конъюнктивного суждения. Например, отрицая конъюнктивное высказывание «Все экономисты изучают математику, и все программисты изучают логику», получим высказывание «Некоторые экономисты не изучают математику или некоторые программисты не изучают математику».

Таким образом, **отрицая суждение формы $A \wedge B$, получаем суждение формы $\neg A \vee B$.**

Результатом отрицания нестрогого дизъюнктивного высказывания является конъюнктивное высказывание, в котором составляющие его высказывания являются отрицаниями составляющих высказываний исходного дизъюнктивного высказывания. Результатом отрицания нестрогого дизъюнктивного высказывания «Идёт дождь или идёт снег» является конъюнктивное высказывание «Нет дождя и нет снега».

Таким образом, **отрицая высказывание формы $A \vee B$, получаем высказывание формы $\neg A \wedge \neg B$.**

Строго-дизъюнктивные суждения отрицаются в соответствии со следующими схемами:

$$\neg A \underline{\vee} B \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B);$$

$$\underline{\vee}_3 (A, B, C) \leftrightarrow (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C).$$

Этими же схемами можно воспользоваться для нахождения отрицания эквивалентных высказываний, так как строго-дизъюнктивные и эквивалентные высказывания находятся в отношении противоречия.

Например, результатом отрицания высказывания «Либо Петров совершил это преступление, либо Сидоров» является высказывание «Это преступление совершили Петров и Сидоров, или ни тот, ни другой не совершали этого преступления».

Отрицанием импликативного высказывания является конъюнктивное высказывание, в котором одним из составляющих высказываний является основание исходного высказывания, а вторым – отрицание следствия исходного высказывания.

Отрицая высказывание «Если Иванов имеет высшее образование, то он знает какой-нибудь иностранный язык», получим конъюнктивное высказывание вида «Иванов имеет высшее образование, но не знает ни одного иностранного языка».

Таким образом отрицание высказывания $A \to B$ выполняется по схемам:

$$A \wedge \neg B,$$

$$\neg (A \to B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B).$$

Рассмотрим пример: требуется найти отрицание сложного высказывания «Если урок будет интересным, никто из мальчиков – Петя, Ваня, Коля – не будет смотреть в окно»

Введём обозначения для простых суждений, входящих в состав приведённого сложного суждения и воспользуемся правилами отрицания высказываний.

Пусть П – высказывание «Петя посмотрит в окно», В – высказывание «Ваня посмотрит в окно», К – высказывание «Коля посмотрит в окно», И – высказывание «Урок будет интересным». Тогда, формализуя исходное сложное суждение и учитывая, что нужно найти его отрицание, получим:

$$\neg (И \to \neg П \neg В \neg К) \leftrightarrow И * (П + В + Л).$$

Следовательно, отрицание исходного сложного суждения можно сформулировать в виде: **«Урок будет интересным, но хотя бы один их мальчиков (Петя, Ваня, Коля) будет смотреть в окно»**.

Самостоятельная работа № 2

Таблица 18

№ варианта	Задание
I	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \to z,\ y \to (x \to z)$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \wedge (y \vee z) \leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $\overline{Y} \to ((\overline{Y} \to X) \wedge (X \to Y))$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(AB \vee AB\overline{C} \vee B\overline{C} \vee C)(\overline{C} \vee AC \vee \overline{A}BC) = B \vee AC$. Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Если погода пасмурная и дует ветер, то дождя нет, но дождь идёт, значит, нет ветра. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(\neg a \to \neg b) \to (b \to a)$.
II	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $\overline{x} \vee ((\overline{y} \vee z) \to z\overline{y}),\ (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge \overline{x \wedge y \wedge z})$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $(a \to b) \wedge (b \to c) \wedge (\overline{a \to b})$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $\left(Z(X \to Y) \to \wedge (X \vee \overline{Y})\right) \to \overline{Z}$ Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(BD \vee A\overline{D} \vee A\overline{B}D \vee \overline{A}\overline{B}D)(A \vee \overline{A}\overline{D} \vee BD) = A \vee BD$. Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Если светит солнце, то для того, чтобы не было дождя, достаточно, чтобы дул ветер. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \vee b) \leftrightarrow (b \vee a)$.
III	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $\overline{x}\,\overline{z} \vee xy \vee x\overline{z},\ z \to xy$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $\left((X \to Y) \wedge (X \to \overline{Y})\right) \to \overline{X}$ Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(\overline{A}\,\overline{C} \vee C \vee \overline{C}D \vee AB)(C \vee \overline{C}D \vee A\overline{D} \vee \overline{C}\,\overline{D}\,\overline{B}) = C \vee D \vee AB \vee \overline{A}\,\overline{B}$. Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \to b) \leftrightarrow (\neg a \vee b)$.
IV	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $\overline{z} \vee xy \vee x\overline{z},\ z \to xy$ Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \vee y \leftrightarrow y \vee x$.

№ варианта	Задание
IV	Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $(X \to \overline{Y}) \to ((X \to Y) \to \overline{X})$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(BC \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}C)(AB \vee \overline{C} \vee AC) = A.$ Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Погода будет не только пасмурной, но и дождливой, несмотря на ветер. Значит, солнечной погоды не будет, разве что прекратится дождь. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \,\&\, b) \leftrightarrow \neg\,(a \longrightarrow \neg b)$.
V	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \to z, y \to (x \to z)$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x\wedge(y\vee z) \leftrightarrow (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$; Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $\overline{Y} \to ((\overline{Y} \to X) \wedge (X \to Y))$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(AB \vee \overline{A}B \vee \overline{B}C)(AB\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee \overline{B}) = B\overline{C} \vee \overline{B}C.$ Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Если погода пасмурная, то дождь идёт тогда и только тогда, когда нет ветра. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \,\&\, b) \leftrightarrow (b \,\&\, a)$.
VI	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $U = (x\vert y \to z) \vee (x \to z)$, $B = (x \to y) \vee z$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x\wedge(x\vee y) \leftrightarrow x$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $(Y \leftrightarrow X) \to (X \to (X \wedge Y))$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(AB \vee A\overline{B}C \vee \overline{B}\,\overline{A}\,\overline{C})(\overline{A}BC \vee \overline{A}B\overline{C} \vee ABC) = ABC.$ Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Пойдёт дождь, разве что поднимется ветер, значит, погода будет либо солнечной, либо пасмурной и ветреной. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \to b) \,\&\, \neg b \to \neg a$.
VII	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $\overline{x}\,\overline{z} \vee xy \vee x\overline{z}, z \to xy$ Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $((X \wedge \overline{Y}) \to Y) \to (X \to Y)$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(B\overline{C} \vee ABC \vee C\overline{A}B)(A\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B} \vee AB\overline{C}) = AB\overline{C} \vee \overline{B}C.$

№ варианта	Задание
VII	Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Если для солнечной погоды необходимо отсутствие дождя, то для того, чтобы пошёл дождь, достаточно, чтобы погода была пасмурной и безветренной. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \rightarrow b)\ \&\ a \rightarrow b$.
VIII	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z,\ y \rightarrow (x \rightarrow z)$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \vee (y \vee z) \leftrightarrow (x \vee y) \vee z$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $\bar{Y} \rightarrow ((\bar{Y} \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow Y))$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(ABD \vee A\bar{B} \vee B\bar{A}\bar{D})(AD \vee \bar{A}BD \vee \bar{A}\bar{B}\bar{D}) = AD \vee BD \vee \bar{A}B$. Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Погода не только солнечная, но и безветренная, значит, дождя не будет, если не поднимется ветер. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \rightarrow b)\ \&(b \rightarrow a) \leftrightarrow -(a \leftrightarrow b)$.
IX	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $\bar{x}\,\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}\bar{z}y$, $B = z \rightarrow xy$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \vee y \leftrightarrow y \vee x$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $(X \rightarrow \bar{Y}) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow \bar{X})$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(\bar{A}B\bar{C} \vee AB\bar{C}BC \vee A\bar{B}\bar{C})(A \vee \bar{A}B \vee \bar{A}\bar{B}C) = A \vee B$. Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Будет ветреная погода, разве что пойдёт дождь. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a\ \&\ b) \leftrightarrow -(\neg a \vee \neg b)$.
X	Задание 1. Доказать равносильность двух данных формул: $(x \mid y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow z)$, $(x \rightarrow y) \vee z$. Задание 2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $\overline{x \vee y} \leftrightarrow \bar{x} \wedge \bar{y}$. Задание 3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу. $(Y \rightarrow X) \rightarrow (\bar{X} \rightarrow (Y \rightarrow X))$; Задание 4. Проверьте следующие равносильности, предварительно упростив выражения, заключённые в скобки: $(\bar{A}B \vee \bar{A}C \vee AB \vee \bar{A}\bar{B}\bar{C}) \times (\bar{A}\bar{B} \vee B\bar{A}\bar{C} \vee ACD \vee AC\bar{D}) = \bar{A} \vee B$. Задание 5. Перевести на язык алгебры логики сложное высказывание и найти его отрицание: Дождь идёт только тогда, когда погода пасмурная и безветренная, но дождя нет, значит, погода либо солнечная, либо пасмурная и ветреная. Задание 6. Определите двумя способами, является ли данное высказывание тавтологией: $(a \vee b) \leftrightarrow -(\neg a\ \&\ \neg b)$.

Тема 3. ДИЗЪЮНКТИВНЫЕ И КОНЪЮНКТИВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция, состоящая только из переменных или их отрицаний. Например: $A\bar{B}\bar{C}D$, $A\overline{A}B$, $XX\bar{Y}\bar{Z}$.

Дизъюнктивно-нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Например: $AA\bar{B}C \vee \bar{A}BC\bar{C} \vee AB \vee \bar{B}\bar{B}C$. Данную ДНФ можно упростить и привести к виду: $A\bar{B}C \vee AB \vee \bar{B}C$. Применяя к полученной формуле законы поглощения, получим: $AC \vee AB \vee \bar{B}C$. Но эта формула также не является ещё минимальной. Для минимизации формулы можно применить правила, основанные на соображениях симметрии.

Правило 1. Если ДНФ является трёхчленом, зависящим от трёх переменных, и если симметрия нарушена только по одной из переменных, то пропадает тот член дизъюнкции, который эту переменную не содержит.

Покажем, что это действительно так:

$$AC \vee AB \vee \bar{B}C = AC * 1 \vee AB \vee \bar{B}C = AC(B \vee \bar{B}) \vee AB \vee \bar{B}C = ABC \vee A\bar{B}C \vee AB \vee \bar{B}C = \left|\begin{array}{l}\text{по}\\ \text{закону}\\ \text{поглощения9}\end{array}\right| = AB \vee \bar{B}C.$$

Правило 2. Если ДНФ является трёхчленом, зависящим от трёх переменных, и если симметрия нарушена по двум из этих переменных, то данная ДНФ равносильна дизъюнкции, одним из членов которой является переменная, по которой симметрии не нарушена, а вторым членом служит тот член первоначальной ДНФ, который эту переменную не содержит.

Рассмотрим формулу: $AB \vee \bar{B}\bar{C} \vee AC = A \vee \bar{B}\bar{C}$.

Покажем справедливость правила 2:

$$AB \vee \bar{B}\bar{C} \vee AC = A(B \vee C) \vee \bar{B}\bar{C} = A(\overline{B \vee C}) \vee B \vee C = \left|\begin{array}{l}\text{по}\\ \text{закону}\\ \text{поглощения}\end{array}\right| = A \vee B \vee C = A \vee \bar{B}\bar{C}.$$

Для каждой формулы существует бесконечно многоразличных, но равносильных ей ДНФ. Если дана одна из её ДНФ, то путём повторения имеющихся элементарных конъюнкций, добавления нулевых конъюнкций, добавления поглощаемых конъюнкций можно построить бесконечно много новых, но равносильных ей ДНФ. Среди всех этих ДНФ есть единственная форма, которая отличается однородностью, которая называется **«совершенной дизъюнктивно-нормальной формой»** (СДНФ).

СДНФ – это такая ДНФ, которая удовлетворяет условиям:

1. **Все элементарные конъюнкции различны.**
2. **Нет нулевых конъюнкций.**
3. **Ни одна из элементарных конъюнкций не содержит одинаковых членов.**
4. **Каждая элементарная конъюнкция содержит все переменные.**

Чтобы получить СДНФ, надо сначала найти минимальную ДНФ – это обеспечит выполнение условий 1, 2 и 3. После этого надо преобразовать эту минимальную ДНФ, используя основные равносильности алгебры логики, чтобы было выполнено условие 4.

Например, рассмотрим формулу:

$$AB \vee \bar{B}C \vee \bar{A}BC = AB * 1 \vee \bar{B}C * 1 \vee \bar{A}BC = AB(C \vee \bar{C}) \vee \bar{B}C(A \vee \bar{A}) \vee \bar{A}BC == ABC \vee AB\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee \bar{A}\bar{B}C \vee \bar{A}BC$$

Приведение формул к виду СДНФ бывает необходимо при решении конкретных, содержательных задач, в частности, в тех случаях, когда требуется получить **полный** перечень всех тех случаев, при которых условия задачи будут выполнены.

Например:

Задача. Известно, что если Андрей и Володя пойдут в кино, то Серёжа в кино не пойдёт. Известно также, что если Володя не пойдёт в кино, то в кино пойдут Андрей и Серёжа. Надо узнать, кто при этих условиях может пойти в кино.

Решение.

Введем обозначения для простых суждений, сформулированных в условии задачи.

А – «Андрей пойдёт в кино»,

В – «Володя пойдёт в кино»

С – «Серёжа пойдёт в кино».

Тогда условие задачи можно записать следующим образом:

$$AB \to \bar{C},\ \bar{B} \to AC.$$

Воспользуемся одной из основных равносильностей алгебры логики, позволяющей выразить операцию импликации через операции нестрогой дизъюнкции и инверсии. Тогда наше условие примет вид:

$$\bar{A}\bar{B} \vee \bar{C},\ B \vee AC.$$

Так как оба условия задачи должны быть выполнены одновременно, то необходимо рассмотреть их конъюнкцию. Составим эту конъюнкцию и преобразуем её к ДНФ – виду:

$$(\bar{A}\bar{B} \vee \bar{C})(B \vee AC) = (\bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C})(B \vee AC) = \bar{A}B \vee A\bar{B}C \vee B\bar{C}.$$

Таким образом, мы свели условия задачи к формуле $\bar{A}B \vee A\bar{B}C \vee B\bar{C}$, которая должна быть истинной. Для истинности нестрогой дизъюнкции достаточна истинность хотя бы одной из её составляющих, следовательно, для выполнения условий задачи достаточно, чтобы имел место один из трёх случаев:

1. $\bar{A}B$, т.е. в кино может пойти Володя без Андрея.
2. $A\bar{B}C$, т.е. в кино могут пойти Андрей с Серёжей, но без Володи.
3. $B\bar{C}$, т.е. в кино может пойти Володя без Серёжи.

Однако, это решение нельзя признать окончательным, так как в первом и в третьем случаях мы получили неполные ответы, а именно: в случае $\bar{A}B$, например, ничего не известно о Серёже, а в случае $B\bar{C}$ ничего не известно об Андрее.

Чтобы получить полный ответ, надо ранее преобразовать к СДНФ-виду, для этого воспользуемся сформулированным ранее определением:

$$\bar{A}B \vee A\bar{B}C \vee B\bar{C} = \bar{A}B(C \vee \bar{C}) \vee A\bar{B}C \vee B\bar{C}(A \vee \bar{A} = \bar{A}BC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C} =$$
$$= \left| \begin{matrix} \text{воспользуемся равносильностью} \\ A \vee A = A \end{matrix} \right| = \boldsymbol{\bar{A}BC \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}C \vee AB\bar{C}}.$$

Теперь мы действительно получили **полный** перечень всех случаев, при которых выполняются условия задачи, причем этих случаев не три, а четыре.

КОНЪЮНКТИВНО-НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА (КНФ)

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция, состоящая только из переменных или их отрицаний. Например: $\bar{A} \vee BV\bar{C} \vee D,\ X \vee \bar{X} \vee Y$.

Конъюнктивно-нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Рассмотрим следующий пример:

$$(A \vee A \vee \bar{B})(AB \vee C \vee \bar{C})(A \vee \bar{C})(\bar{B} \vee C) = \left| \begin{matrix} \text{воспользуемся равносильностями} \\ A \vee A = A,\ A \vee A \vee \bar{B} = A \vee \bar{B},\ C \vee \bar{C} = 1 \end{matrix} \right| = (A \vee \bar{B})(A \vee \bar{C}) \times (\bar{B} \vee C).$$

Кроме того, мы использовали тот факт, что если член дизъюнкции А равен 1, то и вся дизъюнкция равна 1. Значит: $A \vee B \vee C \vee \bar{C} = 1$. Но А • 1 = А. Значит, единичный член конъюнкции можно просто опустить.

Полученная формула не является минимальной. Для КНФ тоже существуют правила поглощения, основанные на соображениях симметрии, их получить по закону двойственности из аналогичных правил для ДНФ-форм.

Правило 3. Если КНФ зависит от трёх переменных и представляет собой конъюнкцию трёх элементарных дизъюнкций и если симметрия нарушена только по одной из переменных, то поглощается та элементарная дизъюнкция, которая эту переменную не содержит.

Правило 4. Если КНФ зависит от трёх переменных и представляет собой конъюнкцию трёх элементарных дизъюнкций и если симметрия нарушена по двум из этих переменных, то данная КНФ равносильна конъюнкции, одним из членов которой является переменная, по которой симметрия не нарушена, а вторым членом является тот член первоначальной КНФ, который эту переменную не содержит.

Чтобы найти минимальную КНФ, равносильную данной формуле, необходимо сделать следующее:

1. **Исходную формулу привести к ДНФ-виду.**
2. **Разложить её на множители по формулам $3'$ и $11'$.**
3. **Применить законы поглощения.**

Например:

$$\overline{(\bar{A}\vee\bar{B})(B\vee\bar{C})}\vee AC\vee\overline{B\vee C} = AB\vee\bar{B}C\vee AC(B\vee C) = AB\vee\bar{B}C\vee AC = AB\vee\bar{B}C =$$
$$= (A\vee\bar{B})(A\vee C)(B\vee\bar{B})(B\vee C) = (A\vee\bar{B})(A\vee C)(B\vee C) = (A\vee\bar{B})(B\vee C).$$

В каких случаях нужны преобразования, приводящие исходные формулы к минимальной форме? Обычно это требуется при решении задач, в которых надо минимизировать количество результатных новых суждений и при этом необходимо сформулировать эти суждения кратчайшим образом, ответ должен иметь вид минимальной КНФ.

Рассмотрим следующий пример:

В школе решили организовать спортивную секцию. Ученики предложили несколько правил приема в секцию, а именно:

1. **Если ученик не отличник и не здоров, то он не может быть принят.**
2. **Если ученик является отличником, то не может быть, чтобы он был здоров и его не приняли.**
3. **Если ученик не принят, то он не отличник.**
4. **Если ученик не здоров, то он не отличник и не будет принят.**

Учитель физкультуры сказал, что количество правил нужно свести к минимуму и постараться сделать так, чтобы формулировки правил были максимально простыми. Но при этом совокупность новых правил должна получиться эквивалентной четырём уже сформулированным правилам.

Через некоторое время эту задачу действительно удалось решить. Определить, какие правила получились в итоге.

Решение. Обозначим элементарные высказывания: ученик является отличником – О, ученик здоров – З, ученик принят – П. Теперь мы можем записать исходные правила в символической форме. Полученные формулы мы сразу же упростим, воспользовавшись равносильностью $X\to Y=\overline{X}\vee Y$, законом де Моргана $\overline{XY}=\overline{X}\vee\overline{Y}$ и законом снятия двойного отрицания $\overline{\overline{X}}=X$. Мы получим следующие цепочки равносильностей:

1. $\overline{O}\,\overline{З}\to\overline{П}=\overline{\overline{O}\,\overline{З}}\vee\overline{П}=\overline{\overline{O}}\vee\overline{\overline{З}}\vee\overline{П}=O\vee З\vee\overline{П}$.
2. $O\to\overline{З\overline{П}}=\overline{O}\vee\overline{З\overline{П}}=\overline{O}\vee\overline{З}\vee\overline{\overline{П}}=\overline{O}\vee\overline{З}\vee П$.
3. $\overline{П}\to\overline{O}=\overline{\overline{П}}\vee\overline{O}$.
4. $\overline{З}\to\overline{O}\,\overline{П}=\overline{\overline{З}}\vee\overline{O}\,\overline{П}=З\vee\overline{O}\,\overline{П}$.

Так как все четыре условия должны выполняться, то должна быть истинной их конъюнкция. Составим эту конъюнкцию и приведём её к минимальной дизъюнктивной форме. Мы получим следующий результат: $\overline{П}\,\overline{О}\vee ЗП$.

Этот ответ нельзя считать окончательным и вот почему. Формула $\overline{П}\,\overline{О}\vee ЗП$ представляет собой дизъюнкцию, которая истинна тогда и только тогда, когда истинным является хотя бы одна из её составляющих. Это может быть или только $\overline{П}\,\overline{О}$ или только $ЗП$, т.е. получив формулу $\overline{П}\,\overline{О}\vee ЗП$, нельзя считать, что мы получили два истинных утверждения, так как из истинности дизъюнкции не следует, что истинны все её компоненты. Необходимо начать с того, что искомые правила должны представлять собой истинные высказывания, а значит, должна быть истинна их конъюнкция. Но истинна конъюнкция, следовательно, истинно и каждое из отдельных высказываний, её составляющих. Поэтому. чтобы найти новые правила, достаточно найти их конъюнкцию.

Следовательно, формулу $\overline{П}\,\overline{О}\vee ЗП$ необходимо преобразовать в конъюнкцию. Но число новых правил должно быть минимальным и каждое правило должно быть сформулировано кратчайшим образом, значит, формула должна иметь вид минимальной КНФ.

Чтобы выполнить это преобразование, воспользуемся законом исключённого третьего и законом поглощения. Получим следующую цепочку равносильностей:

$$\overline{П}\,\overline{О}\vee ЗП=(\overline{П}\vee З)(\overline{П}\vee П)(\overline{О}\vee З)(\overline{О}\vee П)=(\overline{П}\vee З)(\overline{О}\vee З)(\overline{О}\vee П)=(\overline{П}\vee З)(\overline{О}\vee П)=(П\to З)(О\to П).$$

Таким образом, мы получили два новых правила приёма в секцию:

1. Если ученик является отличником, то он будет приняв $(О\to П)$**;**

2. Если ученик принят, то необходимо, чтобы он был| здоров $(П\to З)$**.**

Самостоятельная работа № 3

Таблица 19

№ варианта	Задание
I	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $B \vee \bar{A}\bar{C} \vee A \vee \bar{C}$. б. $AC \vee \bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B \vee \bar{A} \vee \bar{B}$. 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $A \vee \overline{BC \vee \bar{C}} \vee A\overline{B}$. б. $[(AB \to C) \to (A \vee C \to A\bar{B})] \to AB$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $(B \vee C \to \bar{A}) \to [(C \to B) \to AC]$. 4. На праздник было решено пригласить гостей. В связи с этим были высказаны следующие соображения: если мы пригласим Андрея, то Володю приглашать не надо. Но Серёжу можно пригласить только тогда, когда будет приглашён Володя. А если мы пригласим Андрея с Володей, то Серёжу пригласить нельзя. На следующий день было решено, что нужно сделать противоположное, т.е. в качестве инструкции по приглашению гостей взять отрицание конъюнкции всего того, что было сказано накануне. Упростить новую инструкцию и свести её к простейшим условиям. (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску минимальной КНФ*) 5. Относительно погоды на воскресенье были высказаны следующие соображения: 1) Если будет жарко, то необходимым условием пасмурной погоды будет отсутствие ветра. 2) Пасмурное небо бывает только при холодной и безветренной погоде. 3) Если будет ветрено, то достаточным условием жаркой погоды будет ясное небо. 4) Если небо будет ясным, то погода будет холодной, если будет дуть ветер. 5) Пасмурное небо является необходимым условием ветреной и холодной погоды. Синоптик сказал, что первые три высказывания сводятся к двум простейшим условиям, из которых, однако, истинным будет только одно. Из четвёртого и пятого высказываний истинным будет тоже только одно. Какая погода будет в воскресенье?
II	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $\bar{A} \vee \overline{B \vee A} \vee \overline{B \vee C} \vee AB\bar{C}$. б. $\bar{A} \vee (A \vee C)\bar{B} \vee \bar{A}B \vee ((AB \vee \bar{A}) \longrightarrow C)$ 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $ABC \vee \overline{BC \vee \bar{A}C} \vee A\overline{B}$. б. $[(\bar{C} \to B) \to A] \to B(\bar{C} \longleftrightarrow A)$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[AB \to (A \vee B\bar{C} \to \bar{B})] \to (A \vee C \longleftrightarrow B \vee \bar{C})$. 4. У Пети был день рождения, и он хотел пригласить своих друзей. В связи с этим были высказаны следующие суждения: Мама сказала: «Если мы пригласим Володю, то надо пригласить и Андрея. А Серёжу приглашать не надо». Папа сказал: «Неверно, что Андрея или Володю, а также Серёжу можно пригласить тогда и только тогда, когда будет приглашён или Серёжа, или Володя». Бабушка сказала: «Нельзя пригласить ни Андрея, ни Володю». Пете это не понравилось, и он сказал, что в качестве инструкции надо взять не эти высказывания, а их отрицания. Родители засмеялись и согласились, но потребовали, чтобы Петя новую инструкцию свёл к простейшим условиям. Какие условия получились? (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску минимальной КНФ*) 5. Во время похода ребята устроили привал. До родника они ещё не дошли, а пить очень хотелось. Поэтому Катя попросила Петю сходить за водой. Петя согласился, но поставил три условия: 1) Если ты соберёшь мне стакан земляники, то, для того чтобы я пошёл за водой, необходимо ещё приготовить мне бутерброд с колбасой. 2) Если я откажусь от земляники, то мое согласие пойти за водой должно быть достаточным условием для приготовления бутерброда с колбасой или бутерброда с сыром. 3) Ты приготовишь мне бутерброд с сыром только при условии, что я откажусь от земляники. Значит, я за водой не пойду. Катя ответила, что, к сожалению, сможет выполнить только первое условие. К какой формулировке сводятся условия, поставленные Петей? Что ему ответила Катя?

№ варианта	Задание
III	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $B\vee\overline{C\vee\bar{A}}\vee\overline{\bar{C}\vee B\vee A}\bar{B}C$. б. $BC\vee ABC\vee(\bar{A}\vee\bar{B})\bar{C}\vee\bar{B}C\vee\bar{A}\bar{C}$. 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $A\bar{B}\vee C\vee\overline{AVB}$. б. $[A \rightarrow (\bar{B} \longleftrightarrow A\vee C)] \rightarrow [(B \rightarrow A\vee C) \rightarrow AC]$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[A \rightarrow (A\vee C \longleftrightarrow \bar{B})] \rightarrow (A\vee C \rightarrow BC)$. 4. Однажды три мальчика пошли с учителем на рыбалку. По дороге ребята высказали следующие суждения: 1) Тихая погода и наличие лодки являются достаточным условием хорошего улова. 2) Хороший улов бывает только при тихой погоде. Значит, лодку брать не надо. 3) Если будет тихая погода, то невозможно, чтобы наличие лодки было необходимым условием плохого улова. Учитель показал ребятам, что эти высказывания сводятся к двум простейшим условиям. Вернувшись с рыбалки, ребята рассказали, что лодку они не достали, а из двух простейших условий, указанных учителем, оказалось выполненным только одно. Как прошла рыбалка? Если из двух условий выполнено только одно, то это значит, что выполнено либо первое, либо второе. (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску минимальной КНФ*) 5. Петя обещал подарить сестре либо собаку, либо кошку; либо белую, либо чёрную; либо послушную, либо вредную. Сестра высказала следующие предположения: 1) Чтобы зверёк был чёрным и вредным, достаточно, чтобы это была кошка. 2) Если зверёк будет белым, то, для того чтобы это была собака, достаточно, чтобы он был послушным. 3) Если зверёк будет вредным, то он может быть только тогда, когда это кошка. 4) Если это кошка, то она будет послушной, если чёрная. 5) Зверёк может быть собакой, если он послушный и чёрный. Петя сказал ей, что первые три высказывания можно свести к двум простейшим условиям, из которых, однако, истинным будет только одно. Из четвёртого и пятого условий истинно тоже только одно. Какого зверька Петя хотел подарить сестре?
IV	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $AB\vee\overline{\bar{B}C\vee A\vee\bar{B}C}\vee\overline{ABC}$. б. $\bar{A}\vee AB\bar{C}\vee(\bar{B}\vee C)(\bar{A}\vee B)$. 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $C\vee\bar{B}\bar{C}\vee\bar{B}\vee A\bar{B}\vee\bar{A}C$. б. $[\bar{A} \rightarrow B(A \rightarrow C)] \rightarrow (\bar{A}\vee B \longleftrightarrow C)B$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[B \rightarrow (A\vee C \rightarrow \bar{C})] \rightarrow A(\bar{B} \longleftrightarrow AC)$. 4. Ученики X класса узнали, что к ним в класс должен прийти мальчик, приехавший из другого города. Обсуждая эту новость, ребята высказали ряд предположений: 1) Для того, чтобы новичок был добрым, достаточно, чтобы он был умным и сильным. 2) Если новичок силач, то он либо глупый, либо злой. 3) Если новичок умный, то, для того чтобы он был добрым, необходимо, чтобы он был сильным. Учитель предложил ребятам свести эти высказывания к простейшим условиям. Когда же простейшие условия были найдены, учитель сказал, что из этих условий выполнено только одно. Кроме того, учитель сказал: «Необходимое условие доброты – это ум. Значит, новичок умный, но слабый». Каким был новичок? (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску минимальной КНФ*) 5. Мать послала сына за цветами и сказала: «Купи либо астры, либо гладиолусы; либо красные, либо фиолетовые; либо светлые, либо тёмные. Кроме того, при выборе цветов ты должен выполнить следующие условия: 1) Если цветы будут тёмными, то они могут быть фиолетовыми только тогда, когда это гладиолусы. 2) Чтобы цветы были астрами, необходимо, чтобы они были светлыми и красными. 3) Если цветы будут красными, то, для того чтобы это были астры, достаточно, чтобы они были тёмными. 4) Если цветы будут светлыми, то они могут быть фиолетовыми, если это астры.

№ варианта	Задание
IV	5) Все фиолетовые светлые цветы являются гладиолусами». Когда сын вернулся домой, он сказал, что первые три условия он свёл к двум простейшим условиям, но выполнить ему удалось только одно из этих условий. Из четвёртого и пятого условий ему тоже удалось выполнить только одно. Какие цветы заказывала мать, и какие купил ей сын?
V	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $BC\vee\bar{A}\bar{C}\vee A\vee A\bar{B}C$. б. $[A\bar{B}C\vee\bar{A}(B\vee\bar{C})]\bar{C}\vee(A\vee C)\bar{B}\vee\bar{A}B\bar{C}$ 2. Привести формулы к минимальной КНФ а.$(A\vee\bar{B})(\bar{A}\vee C)(\bar{B}\vee\bar{C})$. б. $[(B \to C) \to A] \to [(\bar{C}\vee B \to \bar{A}) \to BC]$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[(B\vee C \longleftrightarrow A) \to \bar{B}] \to [(\bar{B} \to \bar{A}\vee C) \to (BC \to A)]$. 4. По случаю новоселья семья решила купить новый шкаф. Все хотели, чтобы шкаф был либо дубовый, либо коричневый; либо светлый, либо тёмный. Отцу дали целый ряд рекомендаций. 1) Мать сказала: «Ты можешь купить светлый шкаф, если только он будет берёзовым жёлтого цвета». 2) Бабушка сказала: «Если шкаф будет берёзовым, то светлый тон должен быть достаточным признаком жёлтой окраски». 3) Дети сказали: «Если шкаф будет коричневым, то для того, чтобы он был тёмным, необходимо, чтобы он был сделан из дуба». Отец сообразил, что эти рекомендации сводятся к двум простейшим условиям. Но он купил шкаф, который удовлетворял только одному из этих условий. Он поступил так потому, что хотел, чтобы шкаф был светлым и берёзовым или тёмным, но жёлтым. И это условие действительно оказалось выполненным. Какой шкаф был куплен? (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску минимальной КНФ*) 5. По поводу погоды в воскресенье синоптик сказал следующее: 1) Если будет снег с дождём, то града не будет. 2) Если пойдёт снег, то не будет ни дождя, ни града. Но снег не пойдёт. Значит, будет дождь или град. 3) Если возможен снег без града, то может быть и град без дождя. На следующий день синоптик уточнил, что его три высказывания сводятся к двум простейшим условиям, из которых, однако, истинно только одно. Кроме того, он сказал, что-либо будет снег, либо дождь с градом. Какую погоду предсказал синоптик?
VI	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $B\vee A\bar{B}\bar{C}\vee AB\vee\bar{B}C$. б. $\bar{A}(A \longrightarrow C)\bar{B}\vee(A \overline{\longrightarrow} B)\vee(AB\vee\bar{A})C$ 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $A\vee C\vee\bar{B}\vee C\vee A(BC\vee\bar{B}\bar{C})$. б. $[A \to (\bar{C} \longleftrightarrow A\vee B)] \to (A\vee B \longleftrightarrow BC)$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[AB \to (A\vee\bar{C} \to \bar{B})] \to (A\vee C \longleftrightarrow B\vee\bar{C})$. 4. На Олимпиаде по математике была предложена необычная задача. На столе стояла корзина с яблоками и было известно, что каждое из этих яблок либо большое, либо маленькое; либо сладкое, либо кислое; либо жёлтое, либо зелёное. На столе лежала инструкция, в которой говорилось, что из корзины можно взять те и только те яблоки, которые удовлетворяют следующим условиям: 1) Сладкое яблоко следует взять только при условии, что оно большое и жёлтое. 2) Если яблоко большое, то сладкий вкус должен быть достаточным признаком жёлтого цвета. 3) Если яблоко зелёное, то, для того чтобы оно было кислым, необходимо, чтобы оно было маленьким. Задача состояла в том, чтобы свести требования инструкции к двум простейшим условиям. Кроме того, нужно было узнать, какие яблоки разрешено взять из корзины. (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску СДНФ-формы*) 5. Дети знали, что отец им купил либо яблоки, либо груши. Они высказали ряд предположений, порою противоречащих друг другу: 1) Если отец купил яблоки, то они будут спелыми только тогда, когда они красные. 2) Для того чтобы плоды были зелёными, достаточно чтобы это были неспелые груши. 3) Все зелёные плоды – это неспелые яблоки.

№ варианта	Задание
VI	4) Если отец купил яблоки, то, для того чтобы они были спелыми, необходимо, чтобы они были зелёными. 5) Все спелые яблоки всегда бывают красными. Отец сказал, что первые три предположения сводятся к двум простейшим условиям, из которых, однако, выполнено только одно. Из четвёртого и пятого условий выполнено тоже только одно. Какой была покупка отца?
VII	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $\overline{A\bar{B}C\vee BC}\vee\overline{A\vee B}\vee AC\vee A\bar{C}$. б. $\bar{A}\vee(AB\longrightarrow\bar{C})\vee(\bar{B}\longrightarrow C)(\bar{A}\longrightarrow B)$ 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $[(C\bar{B}\longleftrightarrow A)\rightarrow C]\rightarrow(\bar{A}\vee C\longleftrightarrow C)B$. б. $[(A\longleftrightarrow BC)\rightarrow C]\rightarrow(A\vee C\longleftrightarrow B)$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[(A\bar{B}\rightarrow C)\rightarrow B]\rightarrow(C\longleftrightarrow A\vee B)$. 4. В ящике лежат шары: синие и красные, большие и маленькие, деревянные и пластмассовые. Предлагается достать шар, соблюдая следующие правила: 1) Чтобы шар был синим, достаточно, чтобы он был большим только при условии, что он пластмассовый. 2) Шар может быть красным или большим, если он деревянный. 3) Чтобы шар был большим, достаточно, чтобы он был деревянным и красным. Докажите, что эти правила сводятся к двум простейшим условиям. Выясните, какие шары им удовлетворяют. (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску СДНФ-формы*) 5. Мать принесла яблоки. Дети стали гадать, какие яблоки она принесла, и высказали ряд предположений: 1) Если яблоки будут сладкими, то, для того чтобы они были большими, достаточно, чтобы они были не зелёными. 2) Яблоки будут маленькими, если они не кислые, но зелёные. 3) Для того чтобы яблоки были зелёными, необходимо, чтобы они были большими тогда и только тогда, когда они сладкие. Мать сказала, что эти высказывания сводятся к двум простейшим условиям, из которых, однако, истинно только одно. Кроме того, мать сказала, что яблоки, принесенные ею, либо кислые и маленькие, либо зелёные. Какие яблоки принесла мать?
VIII	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $B\vee\overline{AC\vee\bar{B}}C\vee\overline{\bar{C}\vee AB}\vee A\bar{C}$. б. $[AB\bar{C}\longrightarrow\bar{A}(B\vee\bar{C})]\bar{C}\vee(B\longrightarrow C)\bar{B}\vee\bar{A}$ 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $[(A\longleftrightarrow B\vee\bar{C})\rightarrow\bar{A}\vee C]\rightarrow(A\bar{C}\vee B\rightarrow\bar{A}\bar{B})$. б. $[C\rightarrow(\bar{A}\longleftrightarrow B\vee C)]\rightarrow(AC\vee B\longleftrightarrow ABC)$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[AB\vee(A\vee B\bar{C}\rightarrow\bar{B})]\vee(A\vee BC\rightarrow B\vee\bar{C})$. 4. Мать послала сына за цветами и сказала: купи гвоздики, либо розы; либо бордовые, либо красные; светлые, либо тёмные. Кроме того, постарайся выполнить следующие условия: 1) Чтобы цветок был красным или гвоздикой, достаточно, чтобы он был тёмным. 2) Цветок может быть бордовым, если он светлый. 3) Цветок может быть розой, если только он светлый и красный. Когда сын вернулся с цветами, он сказал, что смог выполнить только одно из поставленных условий. Какие цветы заказала мать, и как выполнил сын её заказ? (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску СДНФ-формы*) 5. При обсуждении прогноза погоды на воскресенье были высказаны следующие предположения: 1) Если погода будет пасмурной, то, для того, чтобы было холодно, необходимо, чтобы дул ветер. 2) Если погода будет холодной, то не может быть, чтобы солнце светило только тогда, когда нет ветра. 3) Для того чтобы было пасмурно и ветрено, достаточно, чтобы было холодно. Но погода будет жаркой. Значит, пасмурно будет только тогда, когда нет ветра. Известно, что эти предположения сводятся к двум простейшим условиям. В воскресенье оказалось, что из этих двух простейших условий выполнено только одно. Кроме того, относительно погоды в воскресенье известно, что было либо жарко и безветренно, либо пасмурно и холодно. Какая погода была в воскресенье?

№ варианта	Задание
IX	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $B\vee A\bar{B}C\vee\overline{AC\vee\bar{B}\vee AC}\vee\overline{ABC}$. б. $AC\vee AC\ \vee(AB\vee ABC)(C\vee B)$. 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $[(A\bar{B}\rightarrow C)\rightarrow B]\rightarrow(A\bar{C}\longleftrightarrow A\vee B)$. б. $[\bar{A}C\rightarrow(C\longleftrightarrow\bar{B})]\rightarrow(\bar{A}\vee\bar{B}\rightarrow A\bar{C})$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $[(B\vee C\longleftrightarrow AC)\rightarrow\bar{A}B]\rightarrow(B\rightarrow\bar{A})$. 4. Прощаясь с сыном, мать дала ему на дорогу письменные принадлежности: чёрные и фиолетовые чернила, белую и голубую почтовую бумагу. Она ему сказала: пиши чаще и постарайся выполнить три условия: 1) Все короткие письма должны быть написаны на голубой бумаге фиолетовыми чернилами. 2) Ты можешь мне написать длинные письма чёрными чернилами, если воспользуешься голубой бумагой. 3) Если письмо не будет длинным, то пиши фиолетовыми чернилами. Когда стали приходить письма, оказалось, что ни одно из этих условий не выполнено. Какие письма хотела получить мать и какие письма писал ей сын? (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску СДНФ-формы*) 5. На день рождения мои родители решили подарить бабушке кольцо или перстень: золотой или серебряный, большой или маленький. В связи с этим были высказаны следующие суждения: 1) Мы можем купить золотой перстень только при условии, что он будет большим. 2) Если мы купим золотой предмет, то не может быть, чтобы маленький размер был необходимым признаком кольца. 3) Если мы купим золотой предмет, то он будет маленьким. Но мы купим серебряный предмет. Значит, мы купим кольцо, если оно большое. Выяснилось, что эти суждения сводятся к двум простейшим условиям. Когда же окончательно выбрали подарок, то оказалось, что из этих двух простейших условий выполнено только одно. Кроме того, известно, что родители выбрали либо большое кольцо, либо золотой перстень. Какой подарок купили бабушке?
X	1. Привести формулы к минимальной ДНФ а. $\overline{\overline{AB\vee AC}\vee\bar{B}}\vee\overline{\bar{C}\vee AB}\vee A\bar{B}C$. б. $(A\longrightarrow C)\vee(B\ \bar{\longrightarrow}\ \bar{C})\vee\bar{A}B\vee\bar{A}\vee\bar{B}$ 2. Привести формулы к минимальной КНФ а. $[(B\bar{C}\rightarrow A)\rightarrow C]\rightarrow A(C\longleftrightarrow B)$. б. $(A\vee\bar{B}\bar{C}\rightarrow\bar{A}\vee\bar{C})\rightarrow(B\rightarrow A\vee C)$. 3. Приведите формулу к виду СДНФ $(A\vee B\rightarrow C)\rightarrow[(A\rightarrow\bar{B}C)\rightarrow B(A\longleftrightarrow C]$. 4. В кафе пришли три посетителя. Они узнали, что на обед можно заказать: харчо либо борщ, плов либо азу, сок либо компот. Обсуждая меню, каждый из посетителей высказал свое мнение: 1) Я хочу заказать сок, если мы возьмём азу либо борщ. 2) Чтобы я согласился взять борщ и плов, достаточно заказать сок. А на компот я соглашусь только при условии, что будет заказано азу или харчо. 3) Если мы закажем сок, то надо взять харчо и плов, хочу заказать борщ. Значит, надо взять азу и сок. Официант ничего не понял и попросил посетителей изложить свои желания в более ясной форме. Посетители подумали и свели свои требования к трём простейшим условиям. Тогда официант сказал, что из этих трёх простейших условий он сможет выполнить только одно. Кроме того, он сказал, что обеды комплексные и поэтому надо брать либо азу, либо борщ и плов. Что заказывали посетители, и что им предложил официант? (*Указание*: *решение задачи сводится к поиску СДНФ-формы*) 5. В коробке лежат шары: красные и зелёные, большие и маленькие, деревянные и пластмассовые. Из коробки надо достать шар, соблюдая следующие условия: 1) Для того чтобы шар был красным, достаточно, чтобы он был большим и пластмассовым. 2) Шар может быть пластмассовым только тогда, когда он маленький и красный. 3) Если шар деревянный, то, для того чтобы он был зелёным, достаточно, чтобы он был большим. 4)Если шар зелёный, то не может быть, чтобы он был большим и пластмассовым. Известно, что эти условия сводятся к двум простейшим. Когда же вынули шар, оказалось, что выполнено только одно из этих условий. Кроме того, вынутый шар был либо красным пластмассовым, либо зелёным и маленьким. Какой шар вынули из коробки?

Тема 4. АНАЛИЗ И УПРОЩЕНИЕ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

Релейно-контактная схема (РКС) представляет собой схематическое изображение некоторого устройства, состоящего из переключателей, соединяющих их проводников, входов в схему и выходов из неё.

В релейно-контактной схеме **любой переключатель имеет только два состояния**: замкнутое и разомкнутое.

Простейшая схема состоит из одного переключателя *X*, одного входа и одного выхода. Если переключателю *X* поставить в соответствие высказывание *x* – «Переключатель *X* замкнут, то при истинности *x* схема проводит электрический ток, а при ложности – не проводит. Таким образом, любому высказыванию *x* можно поставить в соответствие следующую двухполюсную релейно-контактную схему:

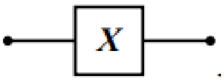


Рис. 1. Простейшая РКС для высказывания *x*

Отрицание высказывания *x* будем изображать двухполюсной схемой:

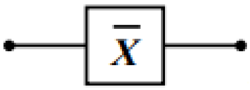


Рис. 2. РКС для отрицания высказывания *x*

Конъюнкцию двух высказываний *x* и *y* можно представить двухполюсной схемой с последовательным соединением переключателей *X* и *Y*:

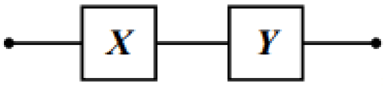


Рис. 3. РКС для конъюнкции высказываний *x* и *y*

Дизъюнкцию можно представить двухполюсной схемой с параллельным соединением этих элементов:

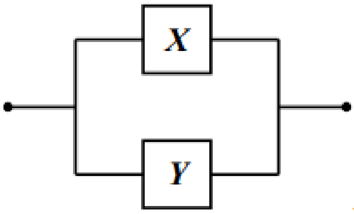


Рис. 4. РКС для дизъюнкции высказываний *x* и *y*

Так как любая формула алгебры логики может быть представлена в нормальной форме, то ей можно поставить в соответствие некоторую РКС. Верно и обратное утверждение – каждой РКС можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики. Рассмотрим примеры:

а) составить РКС для формулы $\overline{Y}Z \to X \vee Y$

Сначала упростим формулу, используя основные равносильности алгебры логики (приложение1):

$$\overline{Y}Z \to X\vee Y = \overline{\overline{Y}Z} \vee X \vee Y = Y \vee \overline{Z} \vee X \vee Y = X \vee Y \vee \overline{Z}.$$

Тогда искомая РКС будет иметь вид:

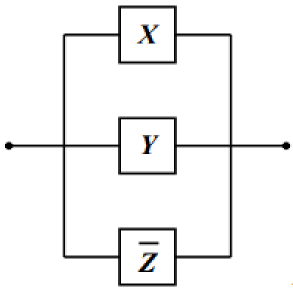


Рис. 5. РКС для формулы $\overline{Y}Z \to X\vee Y$

б) упростить РКС и изобразить упрощённую схему:

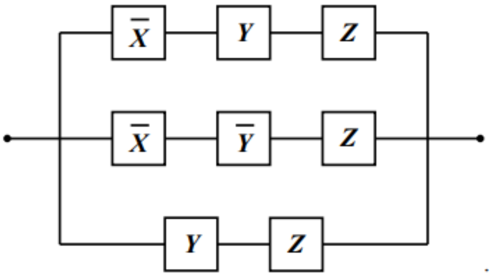


Рис. 6. Исходная РКС

Запишем формулу алгебры логики, эквивалентную исходной РКС, упростим ее, используя основные равносильности алгебры логики, а затем представим результатную РКС графически:

$$\overline{X}\,YZ\vee \overline{X}\,\overline{Y}\,Z\vee YZ = \overline{X}\,Z(Y\vee \overline{Y})\vee YZ = \overline{X}\,Z\vee YZ = (\overline{X}\vee Y)Z.$$

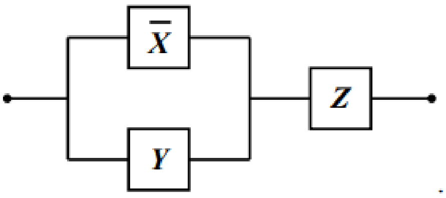
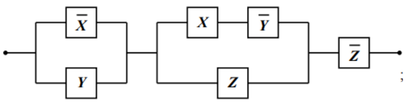
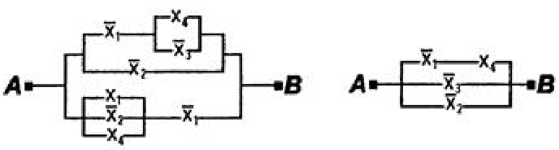
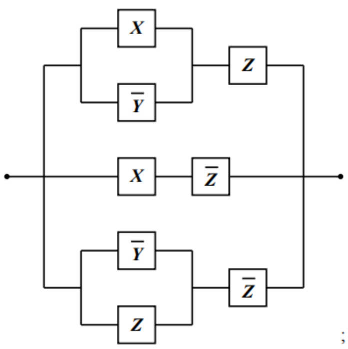
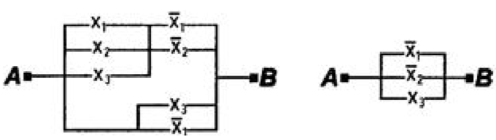
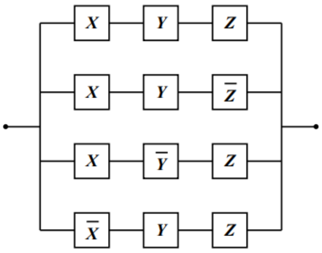
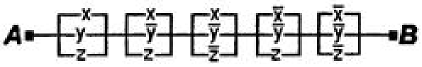
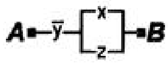
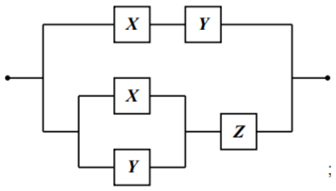
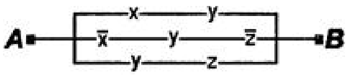
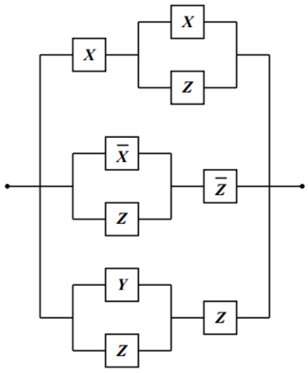
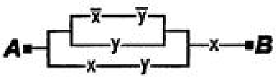
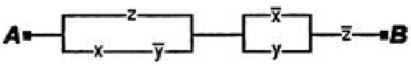
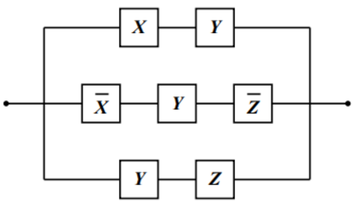
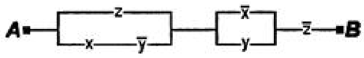
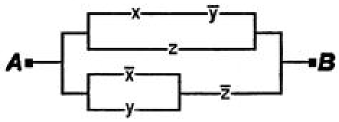


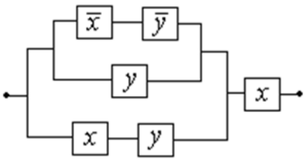
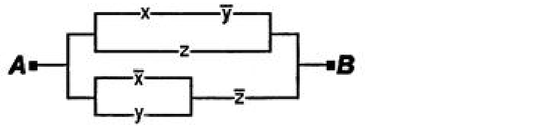
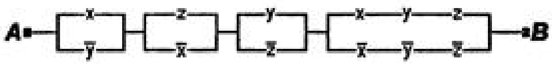
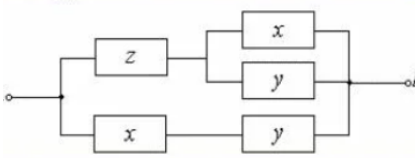
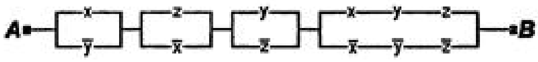
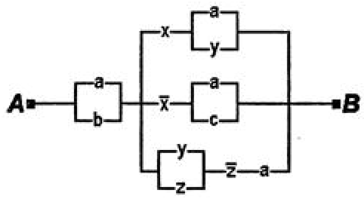
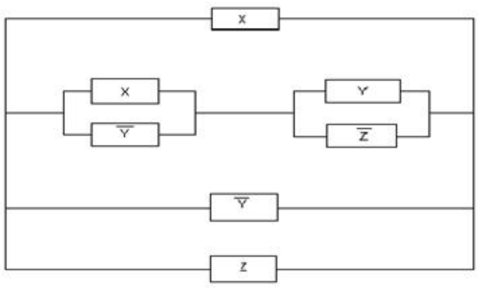
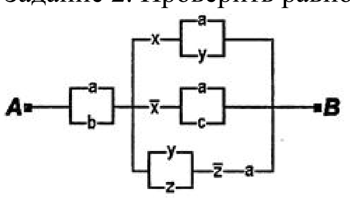
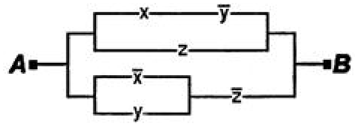
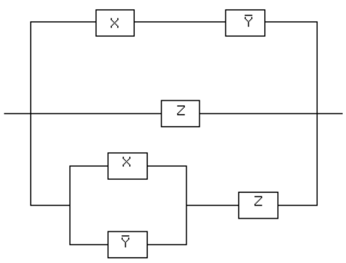
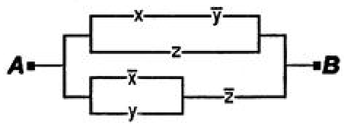
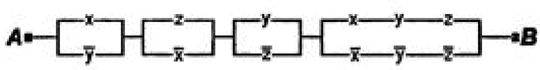
Рис. 6. Упрощенная РКС

Самостоятельная работа № 4

Таблица 20

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th colspan="2">Задание</th></tr>
<tr><td rowspan="2">I</td><td>Задание 1. Упростить РКС:
</td><td>Задание 2. Проверить равносильность схем:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание 3. Составить РКС для формулы:
$X\vee (\overline{Y}Z\vee X\vee Y)$
Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">II</td><td>Задание 1. Упростить РКС:
</td><td>Задание 2. Проверить равносильность схем:
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание 3. Составить РКС для формулы:
$XYZ\vee \overline{XYZ}\vee \overline{YX}\vee \overline{X}Y.$
Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th colspan="2">Задание</th></tr>
<tr><td rowspan="2">III</td><td>Задание 1. Упростить РКС:
</td><td>Задание 2. Проверить равносильность схем:
 </td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание 3. Составить РКС для формулы:
$(XYZ \to \overline{Z}) \vee XY \to \overline{X}Y.$
Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IV</td><td>Задание 1. Упростить РКС:
</td><td>Задание 2. Проверить равносильность схем:
 </td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание 3. Составить РКС для формулы:
$X(YZ \vee \overline{YZ}) \vee \overline{X}(\overline{Y}Z \vee \overline{Z}Y).$
Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V</td><td>Задание 1. Упростить РКС:
</td><td>Задание 2. Проверить равносильность схем:

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание 3. Составить РКС для формулы:
$(\overline{X} \vee Y) \vee (ZY \vee X) \vee U.$
Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">VI</td><td>Задание 1. Упростить РКС:
</td><td>Задание 2. Проверить равносильность схем:

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Задание 3. Составить РКС для формулы:
$\overline{(\overline{X} \vee XYZ) \vee (ZY \to X)} \vee U.$
Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)</td></tr>
</table>

№ варианта	Задание	
VII	Задание 1. Упростить РКС: 	Задание 2. Проверить равносильность схем:  
	Задание 3. Составить РКС для формулы: $(X\to Y)(Y\to Z)$. Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)	
VIII	Задание 1. Упростить РКС: 	Задание 2. Проверить равносильность схем:  
	Задание 3. Составить РКС для формулы: $\overline{(X\to Y)\to(X\vee(Y\to Z))}$. Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)	
IX	Задание 1. Упростить РКС: 	Задание 2. Проверить равносильность схем:  
	Задание 3. Составить РКС для формулы: $\big((X\to Y)(Y\to Z)\big)\to(X\to Z)$. Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)	
X	Задание 1. Упростить РКС: 	Задание 2. Проверить равносильность схем:  
	Задание 3. Составить РКС для формулы: $(X\to(Y)\to Z))\to(Y\to X)$. Задание 4. Составить РКС для своего варианта формулы из п. 3 самостоятельной работы № 4 (табл. 19)	

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

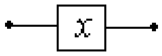
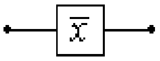
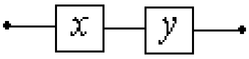
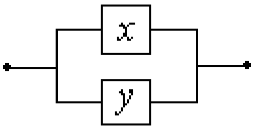
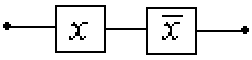
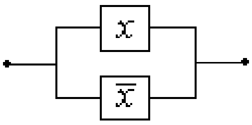
ПЕРЕВОД ВЫРАЖЕНИЙ ЕСТЕСТВЕННОГО ЯЗЫКА НА СИМВОЛИЧЕСКИЙ ЯЗЫК АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Форма высказывания естественного языка	Соответствующая формула языка алгебры логики
Не А Неверно, что А А не имеет места	$\overline{A}$
А и В Как А, так и В Не только А, но и В А вместе с В А, несмотря на В А, в то время как В	AB
А, но не В Не В, а А	$\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}}$
А или В А, или В, или оба	$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}$
А либо В А, разве что В Либо А, либо В Не А, разве что не В Либо не А, либо не В А или В, но не оба	$\mathrm{A}\overline{\mathrm{B}} \vee \overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}$
Либо А, либо В и С А, разве что В и С	$\mathrm{A}\overline{\mathrm{BC}} \vee \overline{\mathrm{A}}\mathrm{BC}$
Либо А и В, либо С и D	$\mathrm{AB}\overline{\mathrm{CD}} \vee \overline{\mathrm{AB}}\mathrm{CD}$
Если А, то В; В если А А, только если В А только тогда, когда В А достаточно для В А только при условии, что В В необходимо для А А. значит В для В достаточно А А влечёт В ля А необходимо В Все А есть В Из А следует В В тогда, когда А	$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$
А эквивалентно В А тогда и только тогда, когда В А если и только если В А необходимо и достаточно для В	$\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}$

ОСНОВНЫЕ РАВНОСИЛЬНОСТИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ
(наиболее часто используемые)

1. Закон тождества: $a \Leftrightarrow a, a \to a$.
2. Закон непротиворечия: $\overline{a\overline{a}} = 1, a\overline{a} = 0$.
3. Закон исключённого третьего: $a \vee \overline{a} = 1$.
4. Закон двойного отрицания: $\overline{a} = a$.
5. Законы ассоциативности: $ab = ba. a \vee b = b \vee a$.
6. Законы коммутативности: $a(bc) = (ab)c. a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
7. Законы дистрибутивности: $a(b \vee c) = (a \vee c)(a \vee b)$; $a \vee (bc) = (a \vee b)(a \vee c)$.
8. Законы поглощения: $a(a \vee c) = a. a(\overline{a} \vee c) = a \vee b$.
9. Законы де Моргана: $\overline{a \vee b} = \overline{a}\,\overline{b}. \overline{ab} = \overline{a} \vee \overline{b}$.
10. Связь конъюнкции, дизъюнкции, импликации и отрицания: $a \vee b = \overline{\overline{a}\,\overline{b}}$.
11. $a \vee b = \overline{a} \to b$:
12. $ab = \overline{\overline{a} \vee \overline{b}}$.
13. $ab = \overline{a \to \overline{b}}$.
14. $a \to b = \overline{a} \vee b$.
15. $a \to b = \overline{\overline{a}\,\overline{b}}$.
16. Модусы (разновидности схемы утверждений): $(a \to b)\overline{a} \to b$ – утверждающий модус.
17. $(a \to b)\overline{b} \to \overline{a}$ – отрицающий модус.
18. Отрицающеутверждающий модус: $(a \vee b)\overline{a} \to b. (a \dot{\vee} b)a \to \overline{b}$.
19. Законы транзитивности: $(a \to b)(b \to c) \to (a \to c)$; $(a \to b) \to (b \to c) \to (a \to c)$.
20. Законы контрапозиции: $(a \to b) \to (\overline{b} \to \overline{a})$.
21. $(\overline{a} \to \overline{b}) \to (b \to a)$.
22. $(a \to \overline{b}) \to (b \to \overline{a})$.
23. $(\overline{a} \to \overline{b}) \to (\overline{b} \to a)$.
24. $\overline{a} \to (a \to b)$.
25. $(\overline{a} \vee a) \to b$.
26. Законы косвенного доказательства:
27. $(\overline{a} \to b)(\overline{a} \to \overline{b}) \to a$.
28. $(\overline{a} \to b\overline{b}) \to \overline{a}$.
29. Законы Клавия:
30. $(\overline{a} \to a) \to a$
31. $(a \to \overline{a}) \to \overline{a}$.

ПРОСТЕЙШИЕ РКС

РКС	Формула	Значения
Переключатель x: 	Простейшее высказывание: x	$x = 1$, если переключатель замкнут; $x = 0$, если переключатель разомкнут
Переключатель $\bar{x}$ 	Отрицание простейшего высказывания: $\bar{x}$	$\bar{x} = 0$, если переключатель замкнут; $\bar{x} = 1$, если переключатель разомкнут
Последовательное соединение:  (схема замкнута, когда оба переключателя замкнуты)	Конъюнкция высказываний: $x \wedge y$	$x \wedge y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases}$ $x \wedge y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0. \end{array}\right.$
Параллельное соединение:  (схема разомкнута, когда оба переключателя разомкнуты)	Дизъюнкция высказываний: $x \vee y$	$x \vee y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ $x \vee y = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ y = 1. \end{array}\right.$
Схема, которая всегда разомкнута 	$x \wedge \bar{x}$	$x \wedge \bar{x} \equiv 0$
Схема, которая всегда замкнута 	$x \vee \bar{x}$	$x \vee \bar{x} \equiv 1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бесценный, И. П.** Математическая логика [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. П. Бесценный, Е. В. Бесценная. – Омск : Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, 2016. – 76 с. – URL : http://www.iprbookshop.ru/59613.html
2. **Лихтарников, Л. М.** Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения : учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. – 4-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2022. – 288 с. – URL : https://e.lanbook.com/book/210281 (дата обращения: 01.05.2022).
3. **Высшая** математика для экономистов : практикум для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
4. **Мадер, В. В.** Школьнику по алгебре логики : книга для внеклассного чтения учащихся 10–11-х кл. сред. шк. / В. В. Мадер. – М. : Просвещение, 1993. – 126. – (Мир знаний).
5. **Скорубский, В. И.** Математическая логика : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. И. Скорубский, В. И. Поляков, А. Г. Зыков. – М. : Юрайт, 2018. – 211 с. – (Сер. Бакалавр. Академический курс). – URL : www.biblio-online.ru/book/1DCFB4A3-0E32-447B-B216-5FDE5657D5D3
6. **Судоплатов, С. В.** Математическая логика и теория алгоритмов : учебник и практикум для академического бакалавриата / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. – 5-е изд., стер. – М. : Юрайт, 2018. – 255 с. – (Сер. Бакалавр. Академический курс). – URL : www.biblio-online.ru/book/4A10DE4E-50A1-4D31-943A-6F5BD68B635B
7. **Унучек, С. А.** Математическая логика [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. А. Унучек. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 239 с. – URL : http://www.iprbookshop.ru/69312.html

Учебное электронное издание

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Методические рекомендации

С о с т а в и т е л и :

РАДЬКО Оксана Юрьевна
ПАРФЁНОВА Ирина Анатольевна

Редактирование Е. С. М о р д а с о в о й
Графический и мультимедийный дизайнер Т. Ю. З о т о в а

Подписано к использованию 18.04.2023
Тираж 50 шт. Заказ № 29

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14.
Тел./факс (4752) 63-81-08.
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru