А. Д. НАХМАН, А. Н. ПЧЕЛИНЦЕВ, Д. Н. ПРОТАСОВ

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»**

А. Д. НАХМАН, А. Н. ПЧЕЛИНЦЕВ, Д. Н. ПРОТАСОВ

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям инженерной и экономической подготовки

Учебное электронное издание

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

УДК 517.9(075.8)
ББК В161.бя73
Н12

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «ТГТУ»
Ю. В. Родионов

Доктор технических наук, профессор кафедры математического моделирования и информационных технологий Института математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
О. А. Ковалева

Нахман, А. Д.

Н12 Задачи по математическому анализу [Электронное издание] : учебное пособие / А. Д. Нахман, А. Н. Пчелинцев, Д. В. Протасов. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2023. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 1,94 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8265-2592-0

Изложены основные понятия, факты и методы математического анализа. Приведены технологические приемы решения типовых задач. Контрольный блок содержит тестовые задания и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям инженерной и экономической подготовки.

УДК 517.9(075.8)
ББК В161.бя73

ISBN 978-5-8265-2592-0

ВВЕДЕНИЕ

Материал настоящего пособия подготовлен в соответствии со следующей структурой стандартного курса математического анализа (анализа функций действительных переменных):

– введение в анализ (основные функциональные понятия, теория пределов и непрерывность);
– дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных;
– интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных;
– элементы векторного анализа;
– теория рядов.

В начале каждого параграфа приводится перечень основных теоретических сведений. Эти теоретические фрагменты не претендуют на полноту изложения; для более детального ознакомления с соответствующей теорией читателю рекомендуется обращаться к учебникам и учебным пособиям; см., напр., [1 – 5].

Изучение элементов математического анализа способствует овладению системой функциональных понятий, развитию умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей. Если функцию одной или нескольких переменных рассматривать как математическую модель реального процесса, то выстраиваются следующие связи понятий:

Характеристики процесса	***Функциональные понятия***
Тенденции процесса, проявляющиеся с течением времени	Предел функции на бесконечности, асимптотическое поведение
Бесперебойное течение процесса (перепады, сбои)	Непрерывность функции (разрывы)
Скорость течения процесса	Производная функции
Изменение состояний в малые промежутки времени	Дифференциал функции
Рост, падение	Монотонность функции
Пиковые состояния (апогей, перигей)	Экстремумы функции (наибольшее, наименьшее значения)
Воспроизводимость состояний процесса	Периодичность функции
Промежуточные состояния	Интерполяция
Прогнозируемые состояния	Экстраполяция

Указанные связи могут быть положены в основу построения, анализа и интерпретации математических моделей объектов и процессов различной природы.

Математический анализ: история и современность. Исчисление бесконечно малых как фундамент математического анализа впервые в систематической форме было разработано И. Ньютоном (XVII век). Первой публикацией, излагающей основные принципы дифференциального исчисления, была работа Г. Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов». Дальнейшее развитие идей Лейбница принадлежит его ученикам Я. Бернулли, И. Бернулли и Г. Лопиталю.

В первом учебнике по математическому анализу, написанному Г. Лопиталем, прослеживается идея зависимости одной переменной от значений другой; эта идея близка современным представлениям о функциональной зависимости. Дифференциальное исчисление функций одной переменной излагалось в терминах дифференциалов, а интегральное счисление рассматривалось как способ отыскания связи переменных по известной связи их дифференциалов. Первое изложение основ интегрального исчисления принадлежит Иоганну Бернулли («Математические лекции о методе интеграла»). Им же предложены методы решения основных типов дифференциальных уравнений первого порядка.

Термин «функция», впервые появившийся у Г. Лейбница в 1692 году, активно использовался в течение следующей половины века Л. Эйлером; понятие функции у него сводилось к понятию аналитического выражения. Дальнейшее развитие идей математического анализа принадлежит Ж. Лагранжу, К. Вейерштрассу, О. Коши. В частности, этими авторами исследовались возможности разложения функций в степенной ряд с коэффициентами ряда, выраженными через производные функций.

В XVIII веке на основе классического анализа были разработаны новые теории: теория обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, затем – в XIX веке – свое развитие получил комплексный анализ.

В XIX – XX веках «прочным фундаментом» математического анализа становится теория множеств и теория меры (М. Жордан, А. Лебег). Получают развитие теория функций действительного переменного и функциональный анализ. Современный математический анализ характеризуется непрерывным развитием, тонкими инструментами исследования и обширными приложениями.

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть даны два множества действительных чисел D и E. ***Соответствие f, которое сопоставляет каждому x ∈ D некоторое единственное число y ∈ E из множества E, называется функцией y = f (x) с областью определения D = D (f).*** Множество $E = E(f)$, $E \subseteq E$ всех получающихся при этом значений y называется множеством значений функции f. Величину x именуют переменной величиной или аргументом функции f.

Если функция $y = f(x)$ обладает тем свойством, что любым двум различным значениям аргумента $x \in D$ соответствуют два различных значения $y \in E$, то тем самым на E определена ***обратная функция*** $x = \varphi(y)$, сопоставляющая каждому «образу» y его «прообраз» x. В последнем равенстве обычно меняют ролями x и y, и обратная функция $y = \varphi(x)$ будет иметь область определения множество E .

Пример. При каких значениях параметра k функция $y = kx + b$ совпадает со своей обратной для любого b?

Решение. Если $k = 0$, то $y = b$, и обратная функция не определена. Иначе $x = \frac{1}{k}y - \frac{1}{k}b$, и обратная функция принимает вид $y = \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}b$. По условию задания $kx + b \equiv \frac{1}{k}x - \frac{1}{k}b$ при любых x и b. Такое возможно тогда и только тогда, когда одновременно $k = \frac{1}{k}$ и $b = -\frac{1}{k}b$. В первом случае $k = \pm 1$, во втором – $k = -1$. В итоге $k = -1$.

Наиболее частый ***способ задания функции – аналитический***, т.е. с помощью записи (выражения, формулы), содержащей набор известных математических операций над числами, некоторой переменной величиной и основными элементарными функциями (перечень таких функций известен из школьного курса).

Множество всех значений аргумента, для которых заданное аналитическое выражение определено (существует), называется ***естественной областью определения функции*** (ЕОО). Это множество может отличаться от заданной области определения. Например, по каким-либо причинам функция может быть задана на некотором подмножестве ЕОО, не совпадающем со всею ЕОО. Может быть и наоборот: функцию доопределяют некоторыми значениями в каких-либо точках, не принадлежащих ЕОО. Например, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ имеет естественной областью определения все действительные значения x, отличные от нуля; в точке $x = 0$ мы можем доопределить ее значением $y = 1$.

Функция y = f (n), определенная на множестве N всех натуральных чисел, называется последовательностью. Для последовательности часто применяют обозначение y_n, записывая при этом множество ее значений. Так, например, последовательность $y_n = \frac{1}{n}$ имеет множество значений $\left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

Пусть функция $u = u(x)$ задана на множестве X и $U = E(u)$ – множество ее значений. Пусть в свою очередь на множестве U задана $\varphi = \varphi(u)$. ***Функция f, сопоставляющая каждому x ∈ X значение f (x) = φ (u(x)), называется суперпозицией (композицией) функций (u) и (φ), или сложной функцией,*** определенной на X. Говорят, что в композиции $\varphi(u(x))$ функция φ – «внешняя», а функция u – «внутренняя». Получение явного вида сложной функции $f = f(x)$ – одна из стандартных задач. Здесь следует руководствоваться правилом: чтобы получить (по заданным u и φ суперпозицию $\varphi(u(x))$, следует ***в аналитическом выражении внешней функции φ везде на месте независимой переменной записать выражение u(x) (т.е. аналитическое выражение внутренней функции)***.

Пример. Найдите $f(6x) - f(3x)$, если $f(x) = \log_2 x,\ x > 1$.

Решение основано на последовательном выборе $6x$ и $3x$ вместо x:

$$f(6x) - f(3x) = \log_2 6x - \log_2 3x = 1.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***элементарной***, если ее аналитическое выражение содержит конечное число арифметических действий над основными элементарными функциями и конечное количество суперпозиций основных элементарных функций.

Так, функция, заданная различными (неупрощаемыми) аналитическими выражениями на различных областях определения, не относится к элементарным. Неэлементарной является функция $f(x) = [x]$ (целая часть x, определяемая как наибольшее целое число, не превосходящее x) и др.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если она определена на множестве D, симметричном относительно начала координат, и для любого значения x из области D ее определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Если при тех же условиях $f(-x) = -f(x)$ на D, то функция называется ***нечетной***.

Функция, не обладающая ни тем, ни другим свойством, называется ***функцией общего вида***.

Ясно, что график четной функции на координатной плоскости симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Пример. Функция $y = f(x)$ определена выражением $y = \dfrac{6}{x^2 + 3x - 4}$ при $x > 0$, $x \neq 1$. Найдите:

а) $f(-2) + f(-4)$, если функция доопределена четным образом;

б) $f(-2) - f(4)$, если функция доопределена нечетным образом.

Решение. В первом случае $f(-x) = f(x)$. Следовательно,

$$f(-2) + f(-4) = f(2) + f(4) = 1 + \frac{1}{4} = 1{,}25.$$

Во втором случае $f(-x) = -f(x)$. Тогда

$$f(-2) - f(4) = -f(2) - f(4) = -1 - \frac{1}{4} = -1{,}25.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует число $T \neq 0$, такое, что для всех x из области ее определения $D(f)$:

а) числа $x+T$ и $x-T$ также содержатся в $D(f)$;

б) имеет место соотношение $f(x \pm T) = f(x)$.

Число T называется периодом функции $f(x)$, а наименьший положительный период – ее основным периодом.

Читателю в качестве теоретического упражнения предлагается проверить, что если $y = f(x)$ имеет основным периодом число T, то функция $y = f(kx+b)$ имеет своим основным периодом число $\dfrac{T}{k}$ (здесь $k>0$ и b – заданные действительные числа).

Пример 1. Найдите основной период функции $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Решение. Как известно, основным периодом тангенса является число $T_0 = \pi$. Согласно только что сформулированному свойству данная функция имеет период $T = \pi : \dfrac{2}{3}$, т.е. $T = \dfrac{3\pi}{2}$.

Пример 2. Функция $y = 2 - x$ задана на интервале $(0;\, 2)$, затем доопределена четным образом и продолжена на всю числовую ось периодическим образом с основным периодом $T = 4$. Найдите значение $y(-65{,}7)$.

Решение. Поскольку функция периодична, то искомое значение – одно из значений, принимаемых данной функцией на множестве $D = (-2;\, 2) \setminus \{0\}$. «Перенесем» точку $x = -65{,}7$ во множество D: $y(-65{,}7) = y(-65{,}7 + Tk)$, где $T = 4$ – основной период функции, а k – некоторое целое число, определяемое соотношением $-2 < -65{,}7 + 4k < 2$. Этому двойному неравенству удовлетворяет единственное целое число $k = 16$. Имеем тогда

$$y(-65{,}7) = y(-65{,}7 + 4 \cdot 16) = y(-1{,}7)\,.$$

В силу четности данной функции на множестве D получаем $y(-1{,}7) = y(1{,}7) = 2 - 1{,}7 = 0{,}3.$ Таким образом, $y(-65{,}7) = 0{,}3.$

Параметрический способ задания функции. Зависимость значений y от значений x может быть задана в виде системы двух равенств

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

в которых $x(t)$ и $y(t)$ – заданные функции переменной t на некотором заданном отрезке $[\alpha, \beta]$. Если функция $x(t)$ на этом отрезке имеет обратную $t = \varphi(x)$, то указанная зависимость будет иметь вид суперпозиции $y = y(\varphi(x))$ и тем самым оказывается функциональной. В этом случае говорят, что функция $y = f(x)$ задана параметрически (через посредство параметра t).

Например, если

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$$

то при $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ имеем параметрически заданную функцию, а при $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ зависимость не будет функциональной (читателю рекомендуется выяснить геометрический образ системы заданных уравнений в обоих случаях, используя при этом основное тригонометрическое тождество).

Тестовые задания

1. Множеством значений функции $f(x) = x^2 + 3$, заданной на отрезке $[-1; 2]$, является…

а) $[3; 7]$;
б) $(3; 7)$;
в) $(4; 7)$;
г) $[4; 7]$.

2. Дана функция $y = \sqrt{5 - 4x - x^2} + \lg(x + 3)$. Тогда ее областью определения является множество…

а) $(-3; 1)$;
б) $(5; 3)\bigcup[1; +\infty)$;
в) $[3; 1]$;
г) $(3; 1]$.

3. Среди следующих функций укажите четные:

а) $f(x) = |x - 1|$;
б) $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$;
в) $f(x) = x|x|$;
г) $f(x) = x + |x|$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите естественную область определения:

1. а) $y = \sqrt{-\sqrt{x^2 - 1}}$; б) $y = \sqrt{-\sqrt[3]{x^2 - 1}}$; в) $y = \sqrt[3]{-\sqrt{x^2 - 1}}$.

2. а) $y = x\lg(\lg x)$; б) $y = x\lg(-\lg x)$; в) $y = -x\lg(-\lg(-x))$.

3. а) $y = \arcsin(\mathrm{tg}\, x)$; б) $y = \mathrm{tg}(\arcsin x)$; в) $y = \mathrm{arctg}(\sin x)$.

Среди данных зависимостей переменной y от переменной x укажите зависимости функциональные и их естественные области определения:

1. а) $y^2 = -x$; б) $y^2 = -x^2$; в) $y = -\sqrt{(-x)^2}$.

2. а) $2^{|x|}0{,}5^{-y} = 0{,}5$; б) $2^x 0{,}5^{-|y|} = 0{,}5$; в) $2^{-|y|}0{,}5^{|x|} = 0{,}5$.

3. а) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

Найдите множество всех значений функции:

а) $y = 2^{\frac{x}{2}}$; б) $y = 2^{\frac{2}{x}}$; в) $y = \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}\right)^2$.

Указание к п. в). Выполняя возведение в квадрат при $x \neq 0$, получим $y = 2 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{x^2}{4}$; при этом $\dfrac{4}{x^2} + \dfrac{x^2}{4} \geq 2$ по свойству суммы двух взаимно-обратных положительных чисел.

Исследуйте функцию на характер четности:

а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} - \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} + \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} - 1$; г) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}} - \sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} + 1$.

Функция $y = f(x)$ определена выражением $y = \dfrac{12}{3-2x}$ при $x < 0$. Найдите $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, если:

а) функция доопределена четным образом;
б) функция доопределена нечетным образом.

Функция $f(x)$ периодична, а функция $g(x)$ – непериодична. Периодичны ли суперпозиции

а) $f(f(x))$; б) $f(g(x))$; в) $g(f(x))$?

Функция $y = 2 - x$ задана на интервале $(-2; 0)$, затем доопределена нечетным образом и продолжена на всю числовую ось периодическим образом с периодом $T = 4$. Найдите значение $y(85{,}7)$.

1.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Понятие предела – одно из основных в материальном анализе. Не приводя строгих определений, объясним смысл указанного понятия. Пусть дана функция $y = f(x)$, и значения аргумента x неограниченно приближаются к значению x_0, но не совпадают с x_0 (что будем записывать в виде $x \to x_0$). Если при этом оказывается, что значения $y = f(x)$ становятся сколь угодно близкими к некоторому числу *A*, то говорят, что *A* есть ***предел функции f (x) в точке x₀*** и записывают

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

В случае, когда значения аргумента *x* неограниченно растут по модулю, оставаясь при этом положительными (отрицательными), мы записываем $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$). Если не принципиально, какого знака значения аргумента *x*, то употребляем символ $x \to \infty$. Запись

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

означает, что значения $y = f(x)$ становятся сколь угодно близкими к числу *A* при $x \to \infty$. Говорят также, что число *A* есть ***предел функции на бесконечности***.

Если в (любом из трех рассмотренных случаев) *A* = 0, то функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой.*** Возможен также случай, когда значения функции $f(x)$ неограниченно растут (к $+\infty$ или $-\infty$) при стремлении аргумента *x* к некоторому x_0

или к бесконечности. В этих случаях записывают соответственно $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, а функцию $f(x)$ называют ***бесконечно большой*** (при $x\to x_0$ и $x\to\infty$ соответственно). Следует заметить, что если функция $f(x)$ – бесконечно большая (бесконечно малая), то функция $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая (бесконечно большая). Для записи этого факта применяют символику: $\dfrac{1}{0}=\infty$, $\dfrac{1}{\infty}=0.$

Если рассмотреть, в частности, функцию натурального аргумента (последовательность) $y_n = f(n)$, то к ней применимо определение предела на бесконечности; используют запись $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Говорят, что ***функция y = f (x) непрерывна в точке x*₀ *= ∈ D (f)***, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)= f(x_0).$$

Это свойство означает ***возможность перехода к пределу под знаком функции.*** Точка x_0, в которой указанное свойство не выполнено, называется точкой разрыва функции.

Следует заметить, что всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения. Разрывы у нее, таким образом, возможны лишь в пограничных точках области определения. Указанное обстоятельство значительно облегчает вычисление пределов элементарных функций.

Пример. Вычислите предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\pi+2-4x)\cos\frac{4x}{3}.$$

Решение. Под знаком предела записана элементарная функция, определенная при всех действительных значениях переменной *x*. Следовательно, «работает» свойство непрерывности: вместо *x* подставляем значение $\dfrac{\pi}{4}$, т.е.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\pi+2-4x)\cos\frac{4x}{3} = (\pi+2-\pi)\cos\frac{\pi}{3} =1.$$

Нам потребуются понятия односторонних пределов: ***предел функции f в точке x*₀ *слева***, обозначаемый $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, есть предел, вычисленный в предположении, что x стремится к x_0, оставаясь меньше x_0; аналогично определяется ***предел справа*** – $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Критерием непрерывности функции в точке x_0 является следующее условие: в этой точке должны существовать оба односторонних предела и при этом

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)= \lim_{x\to x_0+0} f(x)= f(x_0).$$

Если в точке x_0 данный критерий не выполнен, но существуют оба односторонних предела, то говорят что x_0 – точка разрыва первого рода; если хотя бы один из односторонних пределов не существует (бесконечен), то в точке x_0 имеется разрыв второго рода.

Пример. Исследуйте на непрерывность функцию:

а) $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$; б) $y = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x^2+1}}, & x \le -1, \\ \dfrac{1}{x^2+1}, & x > -1. \end{cases}$

Решение. а) На области определения $D(y) = (-\infty;+\infty) \setminus \{-1\}$ имеется разрыв при $x_0 = -1$. Выясним характер разрыва. Имеем

$$\lim_{x\to -1-0} 2^{\frac{1}{x+1}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0; \qquad \lim_{x\to -1+0} 2^{\frac{1}{x+1}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

Правосторонний предел не существует (точнее, бесконечен), следовательно, в точке $x_0 = -1$ имеется разрыв второго рода.

Замечание. Символы -0 и $+0$ указывают на знак бесконечно малой, предел которой был записан в такой форме. Символы $2^{-\infty}$ и $2^{+\infty}$ означают, что число 2 под знаком предела возводилось соответственно в отрицательную и положительную бесконечно большую степень.

Неопределенностями (при $x \to x_0$ или $x \to \infty$) называются такие выражения (под знаком предела), которые при формальной подстановке вместо аргумента x предельного значения (x_0 или ∞) принимают вид $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ и др.

Приемы вычисления пределов. Вычисление пределов рациональных или иррациональных дробей на бесконечности может быть произведено путем одновременного деления числителя и знаменателя на старшую степень аргумента, чем достигается переход от бесконечно больших к бесконечно малым.

При работе с иррациональностями часто используют прием умножения и деления на выражение, сопряженное данной иррациональности.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - x^4}{2x^3 + 3x^2 - 1}$.

Решение. Выполняем одновременное деление числителя и знаменателя на x^4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - x^4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^4} - \frac{x^4}{x^4}}{\frac{2x^3}{x^4} + \frac{3x^2}{x^4} - \frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^3} - 1}{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^4}}.$$

Слагаемые в знаменателе бесконечно малы, следовательно:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - x^4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \infty.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{x+1}+1$, и произведем соответствующие преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Ответ: 0,5.

Замечательные пределы. 1) При $t\to 0$ отношение $\dfrac{\sin t}{t}$ представляет собою неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Можно доказать, что $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

Об этом соотношении говорят как о первом замечательном пределе. Его следствия:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg\ t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin t}{t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg} t}{t}=1.$$

2) При $t\to 0$ для $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ имеем неопределенность вида 1^{∞}. Как оказывается соответствующий предел существует; он стандартно обозначается символом *e*. Число *e иррационально*: $e=2{,}7\ldots$. Итак,

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\ -$$

второй замечательный предел. Равносильная форма:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\,.$$

Пример. Вычислите

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x}{x-2}}$,

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{\operatorname{tg}(x+2)}$.

Решение. а) Раскрываем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, следуя первому замечательному пределу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3.$$

Далее,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x}=3\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1\cdot 1=3.$$

б) Для раскрытия имеющейся неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$ «приближаемся» к стандартной структуре второго замечательного предела, добавляя и вычитая единицу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x+3}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{2x}.$$

Имеем $t=\dfrac{-2}{x+3}\to 0$ при $x\to\infty$, поэтому обратную дробь $\dfrac{x+3}{-2}$ выделяем в показателе:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}\frac{-2}{x+3}2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-4x}{x+3}}.$$

В силу непрерывности показательно-степенной функции можно перейти по отдельности к пределу в основании и показателе степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}=e,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1+\frac{3}{x}}=-4.$$

В итоге $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=e^{-4}$.

в) При $x=2$ формально получаем 1^{∞} и применяем вышеуказанный прием:

$$\lim_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{3x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}(1+(4-2x))^{\frac{1}{4-2x}\frac{(4-2x)\cdot 3x}{x-2}}=\lim_{x\to 2}(1+(4-2x))^{\frac{1}{4-2x}(-6x)}=e^{-6}.$$

г) При $x\to 0$ выражение $(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$ формально превращается в 1^{∞}. Выделяем слагаемое, равное единице $\cos x=1-2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

Далее преобразуем котангенс к функции половинного аргумента:

$$\operatorname{ctg} x=\left(-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\frac{\cos x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right)=\left(-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)\left(-2\sin\frac{x}{2}\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}\right).$$

При

$$g(x)=-2\sin\frac{x}{2}\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}$$

будем иметь

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right)^{g(x)}.$$

В силу равенств

$$\lim_{x\to 0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=e \text{ и } \lim_{x\to 0} g(x)=-2\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2}}=0$$

приходим к результату

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg} x}=e^0=1.$$

д) При $x\to -2$ выражение $\dfrac{2x^2+5x+2}{\operatorname{tg}(x+2)}$ порождает неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Разложим $2x^2+5x+2$ на множители $2(x+0{,}5)(x+2)$. Тогда

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+5x+2}{\operatorname{tg}(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+0{,}5)(x+2)}{\operatorname{tg}(x+2)}=\left(\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{\operatorname{tg}(x+2)}\right)\left(\lim_{x\to -2}(2x+1)\right)\right).$$

При $t=x+2\to 0$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{\operatorname{tg}(x+2)}=1 \text{ и } \lim_{x\to -2}(2x+1)=-3.$$

В итоге $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{\operatorname{tg}(x+2)}=-3.$

При вычислении пределов часто используют прием замены бесконечно малой на эквивалентную. При этом две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными, если предел их отношения равен единице. Применяют обозначение $\alpha\sim\beta$. Так, согласно первому замечательному пределу $\sin t\sim t$ при $t\to 0$. Например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin 2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

Тестовые задания

1. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ равен…

а) –0,5;
б) 1;
в) 0,5;
г) 0.

2) Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^3}-1}{x^2}$ равен…

а) –0,5;
б) 1;
в) 0,5;
г) 0.

3) Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$ равен…

а)1;

б) e^6;

в) e^2;

г) e^3.

4) Если $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$ и $f(x)$ – четная функция, то $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ равен…

а) 5;
б) 5;
в) 0;
г) не существует.

5) Количество точек разрыва функции $y=\dfrac{x-2}{(x^2-1)^2(x^4+4)}$ равно…

а) 1;
б)2;
в) 3;
г) 4.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{x+1}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

Исследуйте функции на непрерывность:

а) $y=3^{\frac{3}{x-3}}$; б) $y=3^{\frac{3}{x-3}}3^{\frac{3}{3-x}}$;

в) $y=\begin{cases}\cos\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right), & x\le\dfrac{3}{4}\\ -\sin x, & x>\dfrac{3}{4}\end{cases}$; г) $y=\begin{cases}\cos\left(x+\dfrac{3\pi}{2}\right), & x\le\dfrac{3}{4}\\ \cos\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right), & x>\dfrac{3}{4}\end{cases}$

1.3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 1

1. Дайте определение функции одного действительного переменного.
2. Что такое естественная область определения функции?
3. Что называется последовательностью?
4. Дайте определение суперпозиции функций (сложной функции).
5. Дайте определение элементарной функции и приведите примеры неэлементарных функций.

6. Дайте определение четной и нечетной функции. Какова геометрическая интерпретация свойств четности и нечетности?

7. Приведите примеры четной, нечетной функций и функции общего вида.

8. Дайте определение периодической функции.

9. Приведите пример функции, имеющей основной период, равный числу π.

10. Дайте определение бесконечно малой и бесконечно большой функции (в точке и на бесконечности).

11. Дайте определение функции, непрерывной в данной точке.

12. Сформулируйте критерий непрерывности функции в точке.

13. Чем отличаются разрывы первого и второго рода?

14. Может ли элементарная функция иметь разрыв в некоторой точке своей области определения?

15. Приведите пример функции, имеющей одну точку разрыва первого рода.

16. Приведите пример функции, имеющей две точки разрыва второго рода.

17. Перечислите известные вам виды неопределенных выражений.

18. Сформулируйте утверждение, называемое первым замечательным пределом.

19. Перечислите известные вам следствия первого замечательного предела

20. Сформулируйте утверждение, называемое вторым замечательным пределом.

21. Изучите по рекомендованной литературе понятие эквивалентных бесконечно малых функций и приведите примеры использования свойства эквивалентности при вычислении пределов.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Если значение аргумента x функции $f(x)$ получило приращение Δx (изменилось на величину Δx), то соответствующее приращение (изменение) функции $f(x)$ есть $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Величину $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ естественно назвать средней скоростью изменения функции *f*, соответствующей изменению аргумента от *x* до $x + \Delta x$; «мгновенной» же скоростью изменения функции в точке *x* тогда следует считать предел вида

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

(если он существует), называемый ***производной*** функции *f* и обозначаемый $f'(x)$, y' или $\dfrac{dy}{dx}$. Операция взятия производной называется дифференцированием функции.

Из определения производной немедленно вытекает следующий ее физический смысл: производная $f'(x)$ есть скорость изменения процесса, описываемого функцией $f(x)$ в момент времени *x*.

Можно доказать, что из дифференцируемости функции в точке *x* вытекает ее непрерывность в этой точке. Обратное неверно.

Можно также доказать, что для дифференцируемой в данной точке функции ее приращение $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ представимо в виде

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x,$$

где $\alpha(x)$ – некоторая бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Главная часть приращения $f'(x)\Delta x$ называется дифференциалом функции в данной точке *x* и обозначается $df(x)$ или dy. Поскольку для функции $y = x$ ее дифференциал совпадает с Δx, применяют запись

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Очевидное соотношение $\Delta f(x) \approx df(x)$ лежит в основе приближенных вычислений «приращенных» значений функции $f(x+\Delta x)$ исходя из ее значения $f(x)$:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Инструментами для нахождения производных элементарных функций служат следующий перечень производных основных (элементарных) функций и правила дифференцирования.

***Таблица производных*:**

1) $(c)' = 0,\ c = \text{const}$;

2) $(x^n)' = nx^{n-1}$;

3) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

9) $(\cos x)' = -\sin x$;

10) $(\sin x)' = \cos x$;

11) $(\text{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; 12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

5) $(e^x)' = e^x$; 13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

6) $(a^x)' = a^x \ln a$; 14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 15) $(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$;

8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; 16) $(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования. Пусть $C = \text{const}$, $C \neq 0$, $u = u(x)$, $\nu = \nu(x)$. Тогда

$$(Cu)' = Cu'; \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'; \quad (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Для ***сложной функции*** $y = f(u(x))$ используется свойство

$$y' = f'(u) \cdot u'(x), \text{ где } u = u(x).$$

В частности, для степенной, показательной и логарифмической функций результат принимает вид

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', \; (e^u)' = e^u \cdot u', \; (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Чтобы продифференцировать показательно-степенную функцию $y = (\phi(x))^{\eta(x)}$, преобразуем ее к экспоненциальному виду

$$y = e^{\eta(x) \ln(\phi(x))}.$$

Производная $y'(x)$ (или, в иных обозначениях, $\frac{dy}{dx}$) функции $y = y(x)$, ***заданной параметрически*** $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, может быть найдена в виде $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Производную $f'(x)$, сопоставленную каждой точке из некоторого числового интервала, также можно рассматривать как некоторую функцию $y = f'(x)$. Тогда можно говорить о возможности ее дифференцирования на том же интервале, т.е. о нахождении ***второй производной*** исходной функции: $f''(x) = (f'(x))'$. Аналогично водятся в рассмотрение третья и другие производные (производные высших порядков).

Примеры.

1. Найдите y', если $y = 2x - \ln(1-5x)$.

Решение. Применим свойство дифференцирования алгебраической суммы: $y' = 2x' - (\ln(1-5x))'$. Далее, работаем с суперпозицией (логарифмическая функция линейного аргумента $u = 1-5x$). По формуле $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ получаем

$$y' = 2x' - \frac{1}{1-5x}(1-5x)' = 2 - \frac{-5}{1-5x} = \frac{7-10x}{1-5x}.$$

2. Материальная точка движется прямолинейно, при этом зависимость пройденного расстояния $s = s(t)$ от времени t (закон движения) имеет вид $s(t) = 4t\sqrt{t^2+5}$. Найдите скорость v точки в момент $t = 2$.

Решение. Согласно физическому смыслу производной скорость в момент $t = 2$ будет вычислена в виде

$$v = v(t) = s'(t) = 4\left(1 \cdot \sqrt{t^2+5} + t\frac{1}{2\sqrt{t^2+5}}\left(t^2+5\right)'\right) = 4\left(\sqrt{t^2+5} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+5}}\right),$$

$$v = v(2) = 4\left(\sqrt{9} + \frac{4}{\sqrt{9}}\right) = \frac{52}{3}.$$

3. Найдите производную функции $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$.

Решение. Показательно-степенную функцию, как указано выше, следует представить в виде $y = e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)}$. Теперь

$$y' = e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)}\left(\sqrt{x}\ln(\sin x)\right)' = e^{\sqrt{x}\ln(\sin x)}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(\sin x)\right) + \sqrt{x}\frac{\cos x}{\sin x}\Bigg) =$$

$$= (\sin x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln(\sin x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\operatorname{ctg} x\right).$$

4. Найдите производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin 3t; \\ y = \operatorname{tg} 3t. \end{cases}$

Решение. Для получения результата потребуются

$$x'(t) = 3\cos 3t, \quad y'(t) = \frac{3}{\cos^2 3t}.$$

Далее, $$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

так что $$y'(x) = \frac{3}{\cos^2 3t} : (3\cos 3t) = \frac{1}{\cos^3 3t}.$$

Тестовые задания

1. Если $y = \dfrac{3+x^2}{x-1}$, то чему равно значение $y'(0)$?

2. Если $y = \operatorname{arctg} 5x$, то $\dfrac{dy}{dx}$ имеет вид:

а) $\dfrac{5}{1+25x^2}$;

б) $\dfrac{1}{1+25x^2}$;

в) $\dfrac{5}{\cos^2(5x)}$;

г) $\dfrac{5}{1-25x^2}$.

3. Если $y = x^2 \cdot 3^{-x}$, то $\dfrac{dy}{dx}$ имеет вид:

а) $2x \cdot 3^{-x} + 3^{-x}\ln 3$;

б) $-2x \cdot 3^{-x} - x^3 3^{-x-1}$;

в) $2x \cdot 3^{-x} - x^2 3^{-x}\ln 3$;

г) $2x \cdot 3^{-x} \cdot \ln 3$.

4. Если $y = \dfrac{\cos x}{e^x}$, то $\dfrac{dy}{dx}$ имеет вид:

а) $\dfrac{-\sin x + \cos x}{e^x}$;

б) $\dfrac{-\sin x - \cos x}{e^x}$;

в) $\dfrac{-\sin x}{e^x}$;

г) $\dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$.

5) Если $y = \sin^3 x$, то $\dfrac{dy}{dx}$ имеет вид:

а) $3\sin^2 x \cos x$;

б) $3\cos^2 x$;

в) $3\sin^2 x$;

г) $-3\sin^2 x \cos x$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите производную функции $y'(x)$:

а) $y = \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} 2x}$; б) $y = (\ln x)^x$; в) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$;

г) $y = e^{3x} + \arcsin\sqrt{x}$; д) $y = (1+\operatorname{ctg}^2 x)e^{-x}$; е); $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{3x-2}}$;

ж) $y = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$; з) $y = 2^{\arccos x} \cdot \cos^2 4x$; и) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$;

к) $\begin{cases} x = 3t + 2t^2, \\ y = 4t^3 - 5t^2; \end{cases}$ л) $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}; \end{cases}$ м) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1-\cos t). \end{cases}$

2.2. КАСАТЕЛЬНАЯ И НОРМАЛЬ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Геометрический смысл производной состоит в следующем: производная $f'(x_0)$ функции f в данной точке x_0 есть тангенс угла наклона касательной (проведенной к графику в этой точке) к полуоси *OX*, или, иными словами, – угловой коэффициент касательной.

Касательная к графику функции (кривой) $y = f(x)$, проведенная в точке x_0, имеет уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение ***нормали*** (т.е. перпендикуляра к касательной) к графику функции (кривой) $y = f(x)$ в точке касания x_0 в случае $f'(x_0) \neq 0$ имеет вид

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример 1. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^2 - 5x + 4$, в точке $M_0(-1; 10)$.

Решение. Определим координаты точки касания: $x_0 = -1,\ y_0 = f(x_0) = 10$. Вычислим $f'(x) = 2x - 5,$ тогда $f'(x_0) = f'(-1) = 1(-1) - 5 = -7$. Составляем уравнение касательной:

$$y = 10 - 7(x+1) \quad \text{или} \quad 7x + y - 3 = 0;$$

уравнение нормали тогда примет вид

$$y = 10 + \frac{1}{7}(x+1) \quad \text{или} \quad x - 7y + 71 = 0.$$

Пример 2. Прямая $y = 1 - 3x$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 - 6x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной значение $y' = (3x^2 - 6x - 5)'$ в точке касания x равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная в этой точке параллельна прямой $y = 1 - 3x$, их угловые коэффициенты равны:

$$(3x^2 - 6x - 5)' = -3 \quad \text{или} \quad 6x - 6 = -3, \ \text{откуда} \ \ x = 0{,}5.$$

Ответ: абсцисса точки касания $x = 0{,}5$.

Правило Лопиталя дает возможности раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. В этих случаях, если существует предел вида $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь a – некоторая точка или бесконечность любого знака.

Если отношение производных при $x \to a$ снова есть неопределенность указанного выше вида, то правило можно применить снова, переходя ко вторым производным, и т.д.

Пример 1. Вычислите $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

Решение. Очевидно, что при $x \to \infty$ имеется неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'\right) : \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Снова при $x \to \infty$ получено неопределенное выражение $\dfrac{\infty}{\infty}$. Повторно применяем правило:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2\sqrt{x})'}{(1+x)'} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$$

Пример 2. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)\sin x$.

Решение. Правило неприменимо к неопределенному выражению $0\cdot\infty$. Поэтому выражение под знаком предела записываем в форме дроби, после чего правило приходится применять дважды. Последовательно получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ x}{(\sin\ x)^{-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-(\cos x)(\sin\ x)^{-2}} = -\left(\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}\right)(\operatorname{tg} x) = 1\cdot 0 = 0.$$

Тестовые задания

1. Чему равен тангенс угла, образованного касательной к кривой с положительным направлением оси *OX*, если касательная проведена к графику $y = \ln 2x$ в точке с абсциссой $x = 1/3$?

2. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = -\cos^2 x$ в точке $x = \dfrac{\pi}{12}$, равен…

а) 0,5;
б) –0,5;
в) 1;
г) –1.

3. Абсцисса x_* точки кривой, заданной уравнением $y = x^2 - 5x + 6$, касательная в которой образует угол $\dfrac{\pi}{4}$ с положительным направлением оси абсцисс, равна…

а) 3;
б) –5;
в) 1;
г) –1.

Задачи для самостоятельного решения

Составьте уравнение касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1. $y = 4\sin 6x$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{18};\ 2\sqrt{3}\right)$.

2. $y=e^{1-x^2}$, $M_0(-1;1)$.

3. $y=\dfrac{4}{x+1}$, $M_0(1;2)$.

4. $y=\sqrt{x^2+5}$, $M_0(2;\,3)$.

5. $y=\ln(2x+1)$, $M_0(0;0)$.

6. $y=\dfrac{x^4}{4}-27x+60$, $M_0(2;\,10)$.

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x^2}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\sin\dfrac{1}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg} 2x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{5x}-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$.

2.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Исследование по первой производной: монотонность, экстремумы. Понятие возрастания и убывания функции на данном интервале, а также понятия максимума и минимума известны из школьного курса. В основе исследования функции на монотонность (возрастание, убывание) и экстремумы (максимумы, минимумы) лежат следующие этапы:

а) следует найти критические точки, т.е. точки, в которых производная данной функции либо не существует, либо обращается в ноль;

б) исследовав знаки производной в полученных интервалах числовой оси, выясняем, где $f'(x)\ge 0$; тем самым будут найдены интервалы возрастания функции $y=f(x)$; на интервалах, где $f'(x)\le 0$, функция убывает;

в) точки перемены знака $f'(x)$ с «+» на «–» служат точками максимума, а с «–» на «+» – точками минимума.

Исследование по второй производной: характер выпуклости. Говорят, что дуга линии имеет определенный характер выпуклости, если она пересекается с любой своей секущей не более чем в двух точках. Такая дуга лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой точке дуги: если целиком ниже касательной, то дуга называется выпуклой (выпуклой вверх), а если выше – то вогнутой (выпуклой вниз).

В основе исследования функции на характер выпуклости лежат следующие положения:

а) интервалы, где $f''(x)\ge 0$, служат интервалами вогнутости графика функции $y=f(x)$; на интервалах, где $f''(x)\le 0$, график функции выпукл;

б) точки перемены знака второй производной $f''(x)$ служат точками перегиба графика, т.е. точками перемены характера выпуклости.

Асимптоты графика. Вертикальная асимптота $x=x_0$ графика функции $y=f(x)$ возникает во всякой точке x_0, где эта функция не определена и хотя бы один из односторонних ее пределов в точке x_0 равен бесконечности.

График функции обладает асимптотой $y = kx + b$ на бесконечности (наклонной асимптотой), если существуют оба числа (оба предела)

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx);$$

при этом, вообще говоря, следует рассмотреть отдельно оба случая $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Если первый из указанных пределов не существует, или существует первый, но не существует второй, то график не обладает асимптотой (на бесконечности соответствующего знака).

Алгоритм полного исследования функции.

1. Исследование элементарными методами: область определения, характер четности, периодичность.
2. Точки разрыва, вертикальные асимптоты.
3. Исследование на монотонность и экстремумы.
4. Характер выпуклости, точки перегиба.
5. Асимптоты на бесконечности.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ и построить ее график.

Решение. 1. Элементарное исследование: областью определения служат все $x \neq 1$; функция не обладает свойствами четности и нечетности (так как область определения не симметрична относительно начала координат); функция непериодична.

2. Функция имеет разрыв в точке $x = 1$. Определим характер разрыва. В случае $x < 1$ функция отрицательна, и левосторонний предел

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty,$$

поскольку знаменатель дроби бесконечно мал. Рассуждая аналогично, получаем предел справа

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{x-1} = +\infty.$$

Таким образом, имеется разрыв второго рода при $x = 1$. Значит, через эту точку проходит вертикальная асимптота с уравнением $x = 1$.

3. Исследуем функцию на монотонность и экстремумы, привлекая для этого первую производную

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Критическими служат точки $x = 1$, $x = 0$, $x = 2$. В промежутках между этими точками производная знакопостоянна. При $x \in (-\infty, 0)$ имеем $y' > 0$, что служит признаком возрастания функции; при $x \in (0, 1)$, а также при $x \in (1, 2)$ имеем $y' < 0$, так что в каждом из этих интервалов функция убывает; далее, $y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$, так что снова получаем возрастание.

Функция достигает своего максимального значения при $x = 0$ (знак производной переменился с «+» на «–»); $y_{\max} = y(0) = 0$. Точка $x = 2$ служит точкой минимума (изменение знака y' с «–» на «+»); $y_{\min} = y(2) = 4$.

4) Исследование характера выпуклости начинаем с нахождения второй производной

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Анализируем знаки: $y'' < 0$ при $x \in (-\infty, 1)$, что служит признаком выпуклости соответствующей дуги графика; далее, $y'' > 0$ при $x \in (1, \infty)$, что свидетельствует о вогнутости дуги в промежутке $(1, +\infty)$. В точке перемены знака $x = 1$ функция не определена, так что перегибов график не имеет.

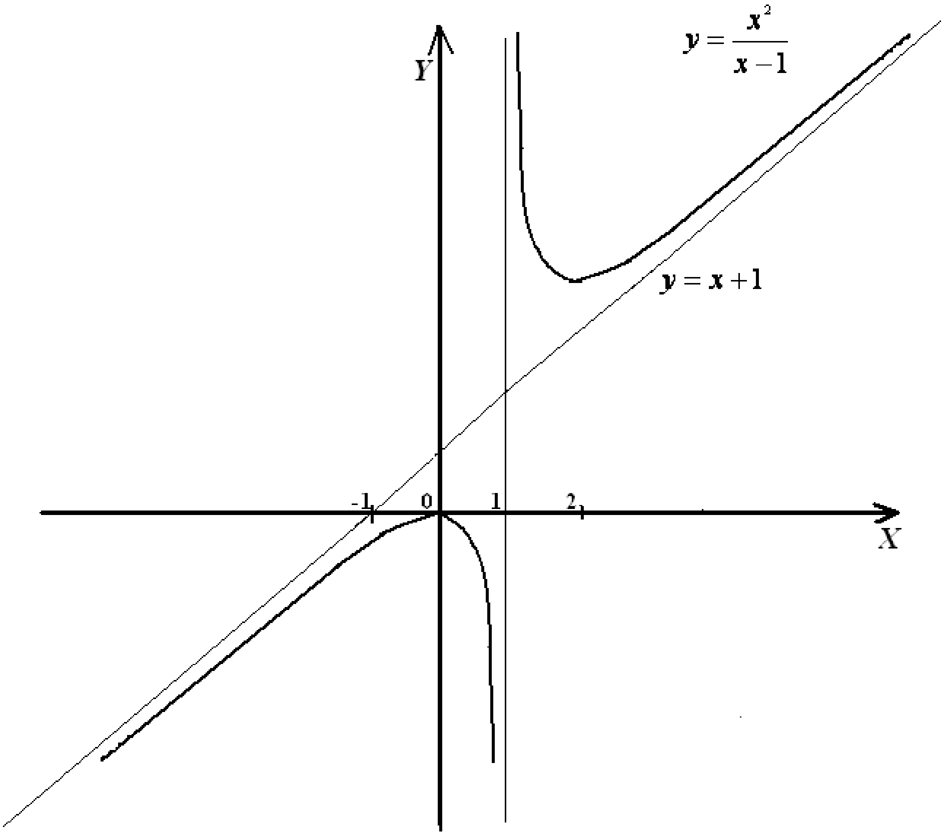
5) Исследуем наличие наклонных асимптот (асимптот на бесконечности). Определяем значения коэффициентов уравнения $y = kx + b$ при $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1.$$

Поскольку каждый из вычисленных пределов $k = 1$, $b = 1$ существует, график обладает асимптотой $y = x + 1$ на $+\infty$. Аналогично получаем асимптоту $y = x + 1$ на $-\infty$.

Результаты полного исследования позволяют теперь изобразить эскиз графика функции:



Тестовые задания

1. Пусть x_1 и x_2 – точки экстремума функции $y = x^3 + 9x^2 + 8x - 1$, тогда $x_1 + x_2$ равно…?

2. Точками экстремума функции $y = x^3 e^{-x}$ являются точки…

а) $(1; e^{-1})$;
б) $(-1; e)$;
в) (0, 0);
г) $(3; 27e^{-3})$.

3. Функция $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ убывает на интервале (ax)

а) (0, 1);
б) (0, 1) и (1, $+\infty$);
в) ($-\infty$, 0) и (1, $+\infty$);
г) ($-\infty$, 0) и (0, 1).

Задачи для самостоятельного решения

Проведите полное исследование функции и постройте эскиз ее графика:

1. $y = \ln(x^2 + 1)$.   2. $y = (x+2)e^{1-x}$.   3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

4. $y = xe^{-x}$.   5. $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$.   6. $y = -x \ln x$.

2.4. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Всякая непрерывная на некотором отрезке $[a,b]$ функция $y = f(x)$ достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения, соответственно, M и m. Эти значения могут достигаться либо в точках экстремумов, либо на концах отрезка. Сказанное относится, в частности, ко всем элементарным функциям на каждом из отрезков, содержащихся в их областях определения. Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ состоит тогда из следующих шагов.

1. Находим производную $f'(x)$.
2. Находим внутренние точки отрезка $[a,b]$, в которых возможен экстремум (т.е. критические точки).
3. Вычисляем значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка (т.е. в точках $x = a$, $x = b$).
4. Среди найденных в пункте 3 значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2, 0]$.

Решение. Вычисляем производную $y' = 3x^2 - 3$ и находим стационарные точки:

$$3(x^2 - 1) = 0, \text{ т.е. } x = -1,\ x = 1.$$

Точка $x = 1$ не принадлежит данному отрезку. Поэтому значения функции вычисляем в точке $x=-1$ и в концевых точках отрезка. Среди значений $y(-2)=2$, $y(-1)=6$, $y(0)=4$ выбираем наибольшее и наименьшее:

$$y_{\text{наибольшее}}= y(-1)=6,\quad y_{\text{наименьшее}}= y(-2)=0.$$

Пример 2. Найдите наименьшее значение функции $y=6\cos x+\frac{24}{\pi}x-2$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$.

Решение. Имеем $y'=-6\sin x+\frac{24}{\pi}$. Стационарная точка определится из условия $y'=0$, так что $\sin x=\frac{4}{\pi}$. Однако, значение синуса, большее единицы, невозможно, так что функция не имеет экстремумов. При этом очевидно, что $y'>0$, что свидетельствует о возрастании функции на $\left[-\frac{2\pi}{3},0\right]$. Следовательно, наименьшее значение достигается на левом конце промежутка, т.е. в точке $-\frac{2\pi}{3}$:

$$y_{\text{наименьшее}} = y\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=6\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{24}{\pi}\frac{2\pi}{3}-2=-3-16-2=-21.$$

Тестовые задания

1. Пусть M – наибольшее, а m – наименьшее значение функции $y(x)=x^2-4x+6$ на отрезке [1, 4], тогда $M+m$ равно…?

2. Пусть M – наибольшее, а m – наименьшее значение функции $y(x)=x^3-3x^2+3x+1$ на отрезке [0, 2], тогда $M-m$ равно…?

3. Пусть M – наибольшее, а m – наименьшее значение функции $y(x)=x+\frac{1}{x}$ на отрезке [0,5; 2], тогда $M+m$ равно…?

Задачи для самостоятельного решения

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

1. $y=x^3-6x^2-5$, $[1,5]$.
2. $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x+\frac{1}{3}$, $[0,3]$.
3. $y=\frac{x^4}{4}-6x^3+7$, $[16,20]$.
4. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$, $[-1,2]$.
5. $y=3x^4-16x^3+2$, $[-3,1]$.
6. $y=108x-x^4$, $[-1,4]$.

7. $y = xe^x$, $[-2,0]$.

8. $y = x + 3\sqrt[3]{x}$, $[-1,1]$.

9. $y = \dfrac{3x}{x^2+1}$, $[0,5]$.

10. $y = (x+2)e^{1-x}$, $[-2,2]$.

2.5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 2

1. Сформулируйте определение производной функции в точке.
2. Каков физический смысл производной?
3. Каков геометрический смысл производной?
4. Приведите пример функции, непрерывной в данной точке, но не дифференцируемой в ней. Можно ли привести пример функции, обладающей производной в некоторой точке, но имеющей в этой точке разрыв?
5. Докажите равенства (1) – (5) и (9), (10) из вышеприведенной таблицы производных.
6. Сформулируйте правила дифференцирования суммы, произведения и частного двух функций.
7. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
8. В чем состоит прием дифференцирования показательно-степенной функции? Приведите соответствующий пример.
9. В чем состоит правило дифференцирования функции, заданной параметрически? Приведите пример нахождения производной функции, заданной параметрически.
10. Что называется дифференциалом функции в данной точке? По какой формуле вычисляется дифференциал?
11. Как с помощью дифференциала приближенно вычислить приращенное значение функции? Приведите соответствующий пример.
12. По рекомендованной литературе ознакомьтесь подробнее с понятием и свойствами дифференциала функции. Объясните, в чем состоит геометрический смысл дифференциала.
13. Какой вид имеет уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проведенной в данной точке x_0?
14. Какой вид имеет уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$, проведенной в данной точке x_0?
15. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$.
16. Дайте определение возрастания и убывания функции на данном интервале. Приведите пример функции, возрастающей (убывающей) на своей области определения.
17. Дайте определение точки максимума и точки минимума данной функции. Приведите соответствующие примеры.

18. Эквивалентны ли понятия экстремума функции и ее наибольшего (наименьшего) значения на данном интервале?

19. Сформулируйте алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы.

20. Изучите по рекомендованной литературе способ исследования функции на экстремум по второй производной и сформулируйте соответствующий алгоритм.

21. В каком случае говорят, что дуга графика функции выпукла (выпукла вверх) на данном интервале? Сформулируйте определение вогнутой (выпуклой вниз) дуги графика.

22. Сформулируйте алгоритм исследования функции на характер выпуклости.

23. Что такое точка перегиба графика и каков алгоритм ее нахождения? Приведите пример точки перегиба какой-либо элементарной функции.

24. Что такое вертикальная асимптота графика и каков вид ее уравнения?

25. Каков вид уравнения наклонной асимптоты графика функции и как найти коэффициенты этого уравнения?

26. Сформулируйте алгоритм полного исследования функции.

27. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на данном отрезке.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Соответствие *f*, которое каждой точке (x, y) из некоторой области *D* координатной плоскости сопоставляет единственное действительное число *z*, называется функцией двух действительных переменных, заданной на области *D*. Используется обозначение $z = f(x, y)$.

Если зафиксировать значение *y*, то функцию *f* можно рассматривать как функцию одной переменной *x*, и, следовательно, ставить вопрос о дифференцировании $z = f(x, y)$ по переменой *x*. В этой ситуации производная $f'_x(x, y)$, вычисленная по переменной *x*, *называется частной производной* от *f* по *x*; она обозначается также $\frac{\partial f}{\partial x}$ или $\frac{\partial z}{\partial x}$. Точно также производную функции *f*, вычисленную по переменной *y* при фиксированном *x*, называют частной производной функции *f* по *y* и обозначают $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ или $\frac{\partial z}{\partial y}$. При вычислении частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования. В частности, если вычисляем $\frac{\partial f}{\partial x}$, то множитель, целиком зависящий только от переменной *y*, можно вынести за знак производной; точно также поступаем с множителем, целиком зависящим только от переменной *x* при нахождении $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Пример. Найти частные производные функции $z = 2x^3\sqrt{y} - 5\cos y + 9$.

Решение. При вычислении z'_x множитель $2\sqrt{y}$ и слагаемое $5\cos y$ рассматриваем как постоянные величины. Следовательно,

$$z'_x = (2\sqrt{y})(x^3)'_x - (5\cos y)'_x + (9)'_x = (2\sqrt{y}) \cdot 3x^2 - 0 + 0 = 6x^2\sqrt{y}.$$

При вычислении z'_y множитель $2x^3$ рассматриваем как постоянную величину:

$$z'_y = x^3(2\sqrt{y})'_y - (5\cos y)'_y + (9)'_y = x^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + 5\sin\, y + 0 = \frac{x^3}{\sqrt{y}} + 5\sin\, y.$$

Итак, $z'_x = 6x^2\sqrt{y}$, $z'_y = \frac{x^3}{\sqrt{y}} + 5\sin\, y$.

Частные производные высших порядков. Частные производные $z'_x = f'_x(x, y)$ и $z'_y = f'_y(x, y)$ данной функции $z = f(x, y)$ можно в свою очередь рассматривать как функции двух переменных *x* и *y*. Следовательно, имеет смысл ставить вопрос о нахождении уже их частных производных – производных второго порядка:

$z''_{xx} = (f'_x(x, y))'_x$ – производная дважды по *x*;

$z''_{yy} = (f'_y(x, y))'_y$ – производная дважды по *y*;

$z''_{xy}=(f'_y(x,y))'_x$, $z''_{yx}=(f'_x(x,y))'_y$ – «смешанные» частные производные второго порядка по переменным x и y.

Для элементарных функций двух переменных результат вычисления смешанных производных на самом деле не зависит от порядка дифференцирования: $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Пример. Вычислить все частные производные второго порядка функции $z=y^2e^x$.

Решение. Сначала вычисляем производные первого порядка:

$$z'_x=y^2(e^x)'_x=y^2e^x,\ z'_y=e^x(y^2)'_y=2ye^x.$$

Теперь $z''_{xx}=\left(y^2e^x\right)'_x=y^2e^x$, $z''_{yy}=\left(2ye^x\right)'_y=2e^x$,

$$z''_{xy}=z''_{yx}=\left(y^2e^x\right)'_x=2ye^x.$$

Тестовые задания

1. Значение частной производной z'_x функции $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ в точке (–1; 1) равно…?

2. Значение частной производной z'_y функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке (–3; 4) равно…?

3. Значение частной производной z'_y функции $z=e^{-xy}$ в точке (5; 0) равно…?

4. Для функции $z=x^3+y^3+x^2y^2$ справедливы соотношения…

а) $z'_y=3y^2+2xy^2+2x^2y$;

б) $z''_{yx}=2y^2+4yx$;

в) $z''_{xx}=6x+2y^2$;

г) $z''_{xy}=4xy$.

5. Для функции $z=y^2e^x+x^2y^3+1$ справедливы соотношения…

а) $z'_y=2y\cdot e^x+3x^2y^2$;

б) $z'_x=2y\cdot e^x+6xy^2$;

в) $z''_{xy}=2e^x+12xy$;

г) $z''_{xy}=2y\cdot e^x+6xy^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить частные производные по переменным x и y данных функций.

1. $z=\sqrt{xy+2y^2}$.

2. $z=x^2y\sin x-3y$.

3. $z=y\cos(4x+2y)$.

4. $z=\sqrt{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}$

5. $z=\ln\left(4\sqrt{x}-xy\right)$.

6. $z=\operatorname{tg}\left(x^3+y^2\right)$.

3.2. ПРОИЗВОДНАЯ НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ

Неявная функция одной переменной. Пусть зависимость переменной y от переменной x, т.е. функция $y = f(x)$ задана неявно, т.е. в виде уравнения $F(x, y) = 0$. Тогда производная функции $y = f(x)$ может быть вычислена в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Пример. Неявная функция $y = f(x)$ задана уравнением

$$x^2 - \sin(y - 4x) - 2y = 0.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$.

Решение. Имеем $F(x, y) = x^2 - \sin(y - 4x) - 2y$. Теперь ищем частные производные функции F:

$$F'_x = 2x - \cos(y - 4x)(-4) - 0 = 2x + 4\cos(y - 4x), \quad F'_y = -\cos(y - 4x) - 2.$$

Следовательно, $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{2x + 4\cos(y - 4x)}{-\cos(y - 4x) - 2}$.

Итак, $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 4\cos(y - 4x)}{\cos(y - 4x) + 2}$.

Неявная функция двух переменных. Уравнением $F(x, y, z) = 0$ задается зависимость переменной z от переменных x и y. Если эта зависимость $z = f(x, y)$ – функциональная, то имеет смысл ставить вопрос о вычислении частных производных z'_x и z'_y.

Имеют место соотношения $z'_x = -\frac{F_x'}{F_z'}$, $z'_y = -\frac{F_y'}{F_z'}$.

Пример. Неявная функция двух переменных задана уравнением $z^3 - e^{x-yz} = 0$. Найти z'_x и z'_y.

Решение. Имеем $F(x, y, z) = z^3 - e^{x-yz}$.

Найдем частные производные

$$F'_x = 0 - e^{x-yz} \cdot 1 = -e^{x-yz}, \; F'_y = 0 - e^{x-yz}(0 - z) = z\,e^{x-yz},$$

$$F'_z = 3z^2 - e^{x-yz}(0 - y) = 3z^2 + ye^{x-yz}.$$

Теперь $z'_x = \frac{e^{x-yz}}{3z^2 + ye^{x-yz}}$, $z'_y = -\frac{ze^{x-yz}}{3z^2 + ye^{x-yz}}$.

Тестовые задания

1. Если $y^3 + 3y = x$, то значение производной $\frac{dy}{dx}$ в точке $x = \frac{10}{3\sqrt{3}}$ и $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ равно…?

2. Если $y - 0{,}5\sin y = x$, то значение производной $\frac{dy}{dx}$ в точке $x = \frac{\pi - 1}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ равно…?

3. Если $x^2+2xy-y^2=2x$, то $\dfrac{dy}{dx}$ имеет вид…

а) $\dfrac{x+y-1}{y-x}$;

б) $2x-2$;

в) $x+y-1$;

г) $\dfrac{x-y-1}{y-x}$.

4. Для функции $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=0$ справедливы соотношения…

а) $z'_x=2x$;

б) $z'_y=-4y-z+1$;

в) $z'_x=\dfrac{2x}{y-6z}$;

г) $z'_y=\dfrac{-4y-z+1}{y-6z}$.

5. Для функции $\ln z=x+y+z-1$ справедливы соотношения…

а) $z'_x=z'_y=1$;

б) $z'_x=\dfrac{1}{z}-1$;

в) $z'_x=\dfrac{z}{1-z}$;

г) $z'_y=\dfrac{z}{1-z}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти производную функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением.

1. $y-x\sin(2y-x)=0$.
2. $\operatorname{tg}(x+y)-xy=0$.
3. $4y-x-\ln(x-y)=0$.
4. $y^5+2xy-x^2+1=0$.
5. $x^3+6x^4y^3-5y+9x=0$.
6. $x+2y-e^{x-y}=0$.

3.3. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ И НОРМАЛИ

Касательная плоскость к поверхности $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0), где $z_0=f(x_0,y_0,z_0)$, имеет уравнение

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Нормаль к поверхности $z=f(x,y)$ в точке (x_0,y_0,z_0), где $z_0=f(x_0,y_0,z_0)$, есть перпендикуляр в точке касания (x_0,y_0,z_0). Она имеет уравнения

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Пример. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\dfrac{5y}{y^2-x}$ в точке с координатами $(2,-1)$.

Решение. Нам даны абсцисса $x_0=2$ и ордината $y_0=-1$ точки касания, найдем аппликату этой точки: $z_0=\dfrac{5\cdot(-1)}{1-2}=5$. Для составления искомых уравнений потребуются значения частных производных в точке касания:

$$z'_x=\left(\frac{5y}{y^2-x}\right)'_x=5y((y^2-x)^{-1})'_x=-5y\,(y^2-x)^{-2},\ z'_x(2,-1)=5;$$

$$z'_y=\left(\frac{5y}{y^2-x}\right)'_y=\frac{5(y^2-2x)-5y\cdot 2y}{(y^2-x)^2}=\frac{-10x-5y^2}{(y^2-x)^2},\ z'_y(2,-1)=-15.$$

Теперь подставляем найденные значения в уравнение касательной плоскости:

$$z-5=5(x-2)-15(y+1)\ \text{или}\ z=5x-15y-20.$$

Запишем также уравнения нормали: $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{-15}=\dfrac{z-5}{-1}$.

Тестовые задания

1. Уравнение нормали к поверхности $z=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}$ в точке $M(3,1,4)$ имеет вид…

а) $z=3(x-3)-(y-1)$;　　б) $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-1}{1}=z$;

в) $3x-y-z=4$;　　г) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$.

2. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2-y^2+3xy-4x+2y-4$ в точке, для которой $x=-1$, $y=0$, имеет вид…

а) $6x+y+z+5=0$;　　б) $z=-6(x+1)-y$;

в) $\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$;　　г) $\dfrac{x+1}{6}=y=z$.

3. Уравнение нормали к поверхности $z=\dfrac{x^2}{2}-y^2$ в точке, для которой $x=2$, $y=-1$, имеет вид…

а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=-z$;　　б) $2x+2y-z-1=0$;

в) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$;　　г) $z=2\cdot(x-2)+2\cdot(y+1)$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к поверхности $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

1. $z=x^2-\ln\left(5-y^2\right),\ M_0(-3,-2)$; 2. $z=e^{y^2-2x^2-1},\ M_0(-1;-3)$

3. $z=\dfrac{1}{xy+4},\ M_0(-3;1)$; 4. $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9},\ M_0(2;3)$.

5. $z=e^x(\sin y+\cos x),\ M_0(0;0)$; 6. $z=\sin(xy),\ M_0\left(1;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$.

3.4. ГРАДИЕНТ И ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Производная по направлению. Рассмотрим вектор $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$, соединяющий точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ координатной плоскости. Предел вида $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}=\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0}\dfrac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{|\overrightarrow{M_0M}|}$ естественно рассматривать как скорость изменения функции в точке M_0 в направлении вектора. Этот предел называется производной функции f в точке M_0 по направлению l.

С физической точки зрения производная по направлению характеризует скорость протекания данного процесса (например, скорость распространения тепла) в данном направлении.

Производную по направлению можно вычислить следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial l}\Big|_{M_0}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha=\dfrac{l_x}{|\vec{l}|},\ \cos\beta=\dfrac{l_y}{|\vec{l}|}$ направляющие косинусы вектора $l=\{l_x,l_x\}$.

Градиент. Вектор, определяющий направление наискорейшего возрастания функции f в точке $M_0(x_0,y_0)$, называется градиентом функции в этой точке и обозначается $\operatorname{grad} f\big|_{M_0}$. Ясен физический смысл этого понятия: в направлении градиента данный физический процесс имеет наибольшую скорость изменения (нарастания).

Градиент имеет следующие координаты:

$$\operatorname{grad} f\big|_{M_0}=\{\ f'_x(x_0,y_0),\ f'_x(x_0,y_0)\}.$$

Пример. Даны функция $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ и точка $M(-2,1)$. Найти:

а) градиент данной функции в точке M;

б) производную этой функции в точке M по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, где точка O – начало координат.

Решение. Преобразуем данную функцию к виду $z=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ и найдем ее частные производные в точке M:

$$z'_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2};\ z'_x(-2,1)=-\frac{2}{5};\quad z'_y=\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2};\ z'_y(-2,1)=\frac{1}{5}.$$

Теперь определяем градиент данной функции в точке M:

$$\operatorname{grad} z\Big|_{M_0} = \left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}.$$

Для нахождения производной данной функции в точке M в направлении вектора $\vec{\ell} = \overrightarrow{OM}$ найдем координаты вектора $\overrightarrow{OM} = \{-2, 1\}$, его модуль $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ и его направляющие косинусы $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Подставляя в формулу для производной по направлению найденные величины и ранее вычисленные значения частных производных в точке M, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}\Big|_M = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\operatorname{grad} z\Big|_{M_0} = \left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$, $\frac{\partial z}{\partial \ell}\Big|_M = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Заметим, что в данном примере производная в направлении градиента совпала с модулем градиента. На самом деле это общая закономерность.

Тестовые задания

1. Градиентом функции $z = x^2 y$ в точке P (1, 1) является…

а) вектор {1, 2};
б) вектор {2, 1};
в) число 3;
г) число $\sqrt{5}$.

2. Градиентом функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке M (2, –2,1) является…

а) вектор {–2, 2, –1};
б) число 3;
в) вектор {4, –4, 2};
г) число 6.

3. Градиентом функции $z = 2x^2 + xy$ в точке P (–1, 1) является…

а) число 4;
б) вектор {3, 1};
в) число $\sqrt{10}$;
г) вектор {–3, –1}.

4. Градиентом функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в точке M (2, 1) является…

а) вектор {9, –3};
б) число 6;
в) вектор {3, –1};
г) число $\sqrt{10}$.

5. Градиентом функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ в точке P (5, 3) является…

а) вектор {5, –3};
б) вектор $\left\{\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$;

в) число –15;

г) число 2.

Задачи для самостоятельного решения

Даны функция $z = z(x, y)$ и точка M. Найдите:

а) градиент данной функции в точке M;

б) производную этой функции в точке M по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, где точка O – начало координат.

1. $z = 2x^2y - 4x\sqrt{y} - 6y^2 + 5,\ M(2;\ 4).$

2. $z = e^{y-2x},\ M(3;\ 6)$.

3. $z = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x},\ M(2;-1).$

4. $z = \dfrac{xy}{2x-5y},\ M(2;-1).$

5. $z = \dfrac{x+y}{2x-y},\ M(1;3).$

6. $z = 5xy^3 - 3x^3y^4,\ M(-2;-1).$

3.5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ

Экстремумы функций двух переменных. Говорят, что функция $z = f(x, y)$ достигает максимума (минимума) в точке $M_0(x_0, y_0)$, если ее значение $z_0 = f(x_0, y_0)$ в указанной точке является наибольшим (наименьшим) по сравнению со значениями $f(x, y)$ из некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D и обладает в D всеми непрерывными частными производными до второго порядка включительно (эти условия выполнены для всякой элементарной функции двух переменных в ее области определения), то поиск экстремумов (максимумов и минимумов) может быть осуществлен по такому алгоритму:

а) найти z'_x и z'_y;

б) найти точки, в которых одновременно $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ (эти точки называются критическими или стационарными);

в) вычислив в каждой найденной критической точке (x_0, y_0) частные производные второго порядка

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0),\quad B = z''_{xy}(x_0, y_0),\quad C = z''_{yy}(x_0, y_0),$$

выяснить знак выражения $\delta = AC - B^2$.

Если $\delta > 0$, то в данной критической точке (x_0, y_0) функция достигает экстремума: в случае $A > 0$ имеется минимум, в случае $A < 0$ – максимум.

Если $\delta < 0$, то в данной критической точке экстремума нет.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 3xy + y^3 - 1$.

Решение. Имеем элементарную функцию, определенную при любых действительных значениях переменных x и y. В соответствии с изложенным алгоритмом:

а) найдем частные производные $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$;

б) найдем критические точки (точки, «подозрительные» на экстремум) из системы уравнений

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases}$$

которая в нашем случае имеет вид

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы $y = x^2$, следовательно,

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет вид $x(x^3 - 1) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Подставляя найденные значения поочередно в первое уравнение системы, получим $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Таким образом, заданная функция имеет две критические точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$;

в) найдем вторые частные производные данной функции:

$$A = z''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x,\ B = z''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3,\ C = z''_{yy} = (3y^2 - 3x)'_y = 6y.$$

Имеем в точке $M_1(0,0)$: $A = z''_{xx}(0,\ 0) = 0$, $B = -3$, $C = z''_{yy}(0,\ 0) = 0$. Значит, $\delta = AC - B^2 = -9 < 0$ в точке $M_1(0,0)$, а тогда в этой точке экстремума нет. Далее, в точке $M_2(1,1)$: $A = z''_{xx}(1,\ 1) = 6$, $B = -3$, $C = z''_{yy}(1,\ 1) = 6$. Следовательно, $\delta = AC - B^2 = 27 > 0$, так что в этой точке имеется экстремум. Поскольку $A = 6 > 0$, то в точке $M_2(1,1)$ данная функция достигает минимума. Определяем минимальное значение функции: $z_{\min}(1,1) = 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + +1^3 - 1 = -2$.

Ответ: $z_{\min}(1,1) = -2$.

Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой ограниченной области D. Всякая непрерывная функция $z = f(x, y)$ достигает в такой области D своего наибольшего и наименьшего значения. В частности, для элементарных функций может быть использован следующий алгоритм нахождения этих значений.

а) Найти частные производные z'_x и z'_y данной функции и определить критические точки, т.е. точки, в которых $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$; при этом рассмотреть лишь те из них, которые расположены внутри области D.

б) Вычислить значения данной функции $z = f(x, y)$ в этих точках.

в) Определить наибольшее и наименьшее значения функции на каждом участке границы области D. При этом, выражая переменную y или переменную x из уравнения соответствующего участка границы, будем всякий раз иметь функцию одной переменной на некотором отрезке. Исследование такой функции на наибольшее и наименьшее значение – знакомая задача.

г) Среди значений, найденных в п. б) и в), выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутой области *D*, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = -3$, $y = -3$.

Решение. Данная элементарная функция определена при любых действительных значениях переменных *x* и *y*. Область *D*, ограниченная указанными линиями, есть прямоугольник с вершинами (0, 0), (–3, 0), (–3, –3), (0, –3). Теперь реализуем указанный выше алгоритм.

а) Найдем частные производные данной функции $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$ и определим критические точки:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $x = -1$ и $y = -1$.

Итак, данная функция имеет единственную стационарную точку $M_1(-1, -1)$, которая, очевидно, принадлежит области *D*. При этом

$$z_1 = z(-1, -1) = (-1)^2 + (-1)^2 - (-1)\cdot(-1) + (-1) + (-1) = -1.$$

б) Исследуем поведение функции на границе области *D*. На участке границы $x = 0$ имеем функцию одной переменной $z = y^2 + y$, $y \in [-3, 0]$. Тогда $z'(y) = 2y + 1$ и $z'(y) = 0$, если $2y + 1 = 0$, откуда $y = -\dfrac{1}{2}$.

Теперь нахождению подлежит значение функции в точке $M_2\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$, принадлежащей границе области *D*: $z_2 = z\left(0, -\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.

На участке границы $y = 0$ имеем функцию одной переменной $z = x^2 + x$, $x \in [-3, 0]$. Тогда $z'(x) = 2x + 1$ и $z'(x) = 0$ при $x = -\dfrac{1}{2}$. В точке $M_3\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$, принадлежащей границе области *D*, имеем $z_3 = z\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$.

На участке границы $x = -3, \; -3 \le y \le 0$ получаем функцию одной переменной $z = y^2 + 4y + 6$, для которой $z'(y) = 2y + 4$ и $z'(y) = 0$, если $y = -2$. В точке $M_4(-3, -2)$ соответствующего участка границы имеем $z_4 = 2$.

На участке границы $y = -3, \; -3 \le x \le 0$ получаем функцию одной переменной $z = x^2 + 4x + 6$, для которой $z'(x) = 2x + 4$ и $z'(x) = 0$, если $x = -2$. В точке $M_5(-2, -3)$ получаем $z_5 = 2$.

Остается вычислить значения данной функции в концевых точках участков границы (в «угловых» точках области *D*) $M_6(0, 0), M_7(-3, 0), M_8(0, -3), M_9(-3, -3)$ и произвести выбор наибольшего и наименьшего значений:

$$z_6(0,0)=0,\ z_7=z(-3,0)=(-3)^2+0^2-(-3)\cdot 0+(-3)+0=6,$$

$$z_8=z(0,-3)=6,\quad z_9=z(-3,-3)=(-3)^2+(-3)^2-(-3)(-3)-3-3=3.$$

Сравнивая эти значения, находим, что наибольшее из них равно 6 и равно 6 и достигается в точках $M_7(-3,0)$ и $M_8(0,-3)$, а наименьшее значение равно -1 и достигается в точке $M_1(-1,-1)$.

Условный экстремум. Точку максимума или минимума функции $z=f(x,y)$, достигнутого при условии, что ее координаты x и y удовлетворяют так называемому уравнению связи $\varphi(x,y)=0$, называют точкой условного экстремума. В простейших случаях из уравнения связи удается выразить однозначным образом одну из переменных через другую, например $y=\tau(x)$. Следовательно, получаем задачу об экстремуме функции одной переменной $z=f(x,\tau(x))$.

Пример. Найдите точку минимума функции $z=x^2+y^2$ при условии связи $x+y-2=0$.

Решение.

1. Из уравнения связи выражаем y и подставляем результат в выражение для z. Получаем функцию одной переменной $z=x^2+(2-x)^2$.

2. Исследуем функцию $z=z(x)$ на экстремум (безусловный). Имеем $z'(x)=2x-2(2-x)=2(2x-2)$. Определяем критическую точку: $x_0=1$. Так как производная при переходе через точку $x_0=1$ меняет знак с «–» на «+», то в этой точке функция $z=z(x)$ имеет минимум.

Из уравнения связи определяем $y_0=2-x_0=1$. Следовательно, точка (1, 1) – точка минимума функции $z=x^2+y^2$ при условии $x+y-2=0$.

Минимальное значение, достигаемое в этой точке, есть значение $z=2$.

Тестовые задания

1. Для стационарных точек функции $z=x^3+3xy^2-15x-12y$ справедливы утверждения…
   а) их число равно 4;
   б) их число равно 2;
   в) сумма их абсцисс равна сумме их ординат и равна 0;
   г) сумма их абсцисс равна сумме их ординат и равна 3;
   д) сумма их абсцисс не равна сумме их ординат.

2. Для функции $z=1+6x-x^2-xy-y^2$, имеющей одну стационарную точку $M(4,-2)$, справедливо утверждение…
   а) ее минимум равен 13;
   б) точка $M(4,-2)$ не является точкой экстремума;
   в) $M(4,-2)$ – точка максимума;
   г) $M(4,-2)$ – точка минимума.

3. Для функции $z=2x^3+2y^3-6xy+5$, имеющей две стационарные точки M_1 (0, 0) и M_2 (1, 1), справедливо утверждение…
   а) ее минимум равен 3;

б) ее максимум равен 5;

в) точка M_2 (1,1) не является точкой экстремума;

г) M_1 (0,0) – точка максимума.

4. Для функции $z = x^2 - y^2$ при условии $y = 2x - 6$ справедливы утверждения…

а) ее условный максимум равен 12;

б) ее условный минимум равен 0;

в) ее условный максимум равен 2;

г) число точек условного экстремума равно 1.

5) Для функции $z = \frac{1}{2}x^2 - xy$ при условии $y = 2x^2$ справедливы утверждения…

а) ее условный минимум равен $\frac{1}{18}$;

б) ее условный минимум равен 0;

в) число точек условного экстремума равно 2;

г) в точке $M\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{18}\right)$ достигается условный максимум;

д) число точек условного экстремума равно 1.

Задачи для самостоятельного решения

Дана функция $z = ax^2 + by^2 + cx + dy + q$. Найдите:

а) ее точки экстремума;

б) наибольшее и наименьшее значения данной функции в прямоугольнике, ограниченном указанными прямыми $x = -2, x = 0, y = -1, \ y = 2$ (значения параметров $a, b, c, d = 6, \ \ q$ для каждого варианта указаны).

1. $a = -2, \ b = -4, \ c = 8, \ d = -6, \ \ q = 3$.
2. $a = 1, \ b = 5, \ c = -8, \ d = -10, \ \ q = 4$.
3. $a = 2, \ b = 4, \ c = -4, \ d = -2, \ \ q = 1$.
4. $a = -2, \ b = -1, \ c = 8, \ d = 2, \ \ q = -4$.
5. $a = 1, \ b = 4, \ c = 6, \ d = 4, \ \ q = -1$.
6. $a = -5, \ b = -2, \ c = 10, \ d = -8, \ \ q = 6$.

3.6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 3

1. Сформулируйте понятие функции двух действительных переменных.
2. Что называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменой x (по переменной y)? В чем состоит правило их нахождения?
3. Дайте определение частных производных второго порядка (дважды по x, дважды по y и смешанных частных производных). Сформулируйте утверждение о равенстве смешанных частных производных.
4. Если функция одной переменной задана неявно, то по какой формуле можно найти ее производную?
5. Если функция двух переменных задана неявно, то по каким формулам можно найти ее частные производные?

6. По рекомендованной литературе изучите понятия касательной плоскости и нормали к поверхности. Какой вид имеет уравнение касательной плоскости к поверхности в заданной точке? Каков вид уравнений нормали?

7. Изучите по рекомендованной литературе понятие и свойства полного дифференциала функции двух переменных. В чем состоит геометрический смысл частных производных и геометрический смысл полного дифференциала?

8. Сформулируйте понятие производной функции двух переменных по данному направлению. Каков физический смысл производной по направлению?

9. Запишите формулу, по которой можно найти значение производной функции двух переменных по данному направлению.

10. Что называется градиентом функции в данной точке? Каков физический смысл градиента? Каковы координаты градиента?

11. Докажите, что производная функции двух переменных, вычисленная в данной точке в направлении градиента, равна модулю градиента.

12. Дайте определение точки экстремума (максимума, минимума) функции двух переменных $z = f(x, y)$.

13. Являются ли условия $z'_x = 0$ и $z'_y = 0$ (выполненные в данной точке) достаточными для того, чтобы в этой точке функция $z = f(x, y)$ имела экстремум?

14. Сформулируйте достаточное условие существования в данной точке максимума (минимума) функции двух переменных.

Сформулируйте алгоритм нахождения точек экстремума функций двух переменных.

15. Охарактеризуйте точки замкнутой ограниченной области, в которых функция двух переменных может достигнуть своего наибольшего и наименьшего значения.

16. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой ограниченной области.

17. Сформулируйте понятие условного экстремума функции двух переменных. Каков алгоритм нахождения точек условного экстремума, если уравнение связи может быть разрешено относительно одной из переменных?

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4.1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Интегрирование есть действие, обратное дифференцированию. Если $f(x)=F'(x)$ на некотором интервале (a,b), то функция $F(x)$ (по отношению к $f(x)$) называется первообразной.

Так, например, для $f(x)=2x$ первообразными являются: $F(x)=x^2$, $F(x)=x^2-1$, ..., и вообще, любая функция вида $F(x)=x^2+C$, где C – произвольная постоянная.

В общем случае совокупность всех первообразных для $f(x)$, $x\in(a,b)$, имеет вид: $\{F(x)+C\}$, где $F(x)$ – некоторая (фиксированная) первообразная, C – произвольная постоянная. Такая совокупность называется неопределенным интегралом для $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

***Таблица интегралов основных элементарных функций*:**

1. $\int dx=x+C$.
2. $\int x^\alpha dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$.
3. $\int \dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
4. $\int e^x dx=e^x+C$.
5. $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$.
6. $\int \sin x dx=-\cos x+C$.
7. $\int \cos x dx=\sin x+C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{a}+C$.
13. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$.
14 $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|+C$.
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$.
16. $\int \operatorname{tg}x dx=-\ln|\cos x|+C$.
17. $\int \operatorname{ctg}x dx=\ln|\sin x|+C$.
18. $\int \dfrac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$.
19. $\int \dfrac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

Линейность интеграла:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx; \quad \lambda, \mu = \mathrm{const}.$$

Приемы интегрирования.

1. ***Замена переменных*** $t = \varphi(x)$ по формуле

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(t)dt .$$

Пример 1. $J = \int \frac{xdx}{1+x^2}$.

Решение. Множитель x в числителе с точностью до постоянного коэффициента совпадает с производной от $1+x^2$, а именно

$$(1+x^2)' = 2x .$$

Поэтому целесообразна следующая замена переменных: $t = 1+x^2$. Следующий шаг состоит в нахождении связи дифференциалов прежней и новой переменной: $dt = 2xdx$.

Вводя числовой коэффициент 2 и одновременно умножив интеграл на 1/2, получим с помощью табличного интеграла 3)

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C .$$

Ответ можно проверить с помощью операции дифференцирования:

$$\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)' + 0 = \frac{x}{1+x^2} .$$

Получив подынтегральную функцию, убеждаемся в правильности результата интегрирования.

Пример 2. $J = \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Рассуждая по аналогии с предыдущим примером, положим $t = \sqrt{x}$; тогда $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Имеем

$$J = 2\int 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = 2\int 2^t dt = 2\cdot\frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2}{\ln 2}2^{\sqrt{x}} + C = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2} + C .$$

2. ***Интегралы табличных функций линейного аргумента*** λx или $\lambda x + a$ $(\lambda,\ a = \mathrm{const})$: здесь следует табличный результат делить на коэффициент λ (к этому правилу легко прийти, применяя замену $t = \lambda x$ или $t = \lambda x + a$ соответственно).

Примеры.

1) $\int \sin 2xdx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \frac{1}{5}\arcsin 5x + C$;

3) $\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C$.

3. ***Прием выделения полного квадрата*** при наличии квадратного трехчлена в знаменателе подынтегральной дроби:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a};$$

далее полагаем $t = x + \frac{b}{2a}$, откуда $x = t - \frac{b}{2a}$, $dx = dt$.

Пример 1. $J = \int \frac{dx}{x^2 + 8x + 20}$.

Решение. Выделяем полный квадрат:

$$x^2 + 8x + 20 = 1\cdot\left(x + \frac{8}{2}\right)^2 + \frac{4\cdot 1\cdot 20 - 8^2}{4\cdot 1} = (x+4)^2 + 4.$$

Положим $t = x + 4$, откуда $dt = dx$. Имеем

$$J = \int \frac{dx}{(x+4)^2 + 4} = \int \frac{dt}{2^2 + t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2} + C.$$

Пример 2. $J = \int \frac{3x-1}{\sqrt{6x-5-x^2}}dx$.

Решение. Поскольку $-x^2 + 6x - 5 = -(x-3)^2 + 4$, то $J = \int \frac{3x-1}{\sqrt{4-(x-3)^2}}dx$.

Положим $t = x - 3$, тогда $x = t + 3, dx = dt$. Следовательно,

$$J = \int \frac{3(t+3)-1}{\sqrt{4-t^2}}dt = \int \frac{3t+8}{\sqrt{4-t^2}}dt = 3\int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt + 8\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = J_1 + J_2.$$

Вычисляем J_1. Заметим, что $d\left(4-t^2\right) = -2tdt$, значит:

$$J_1 = 3\left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{-2tdt}{\sqrt{4-t^2}} = -\frac{3}{2}\int \frac{d\left(4-t^2\right)}{\left(4-t^2\right)^{1/2}} = -\frac{3}{2}\int \left(4-t^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(4-t^2\right) =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\left(4-t^2\right)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = C - 3\sqrt{4-t^2}.$$

Интеграл J_2 – табличный. Итак,

$$J = C - 3\sqrt{4-t^2} + 8\arcsin\frac{t}{2} =$$

$$= C - 3\sqrt{4-\left(x-3\right)^2} + 8\arcsin\frac{x-3}{2} = C - 3\sqrt{6x-5-x^2} + 8\arcsin\frac{x-3}{2}.$$

4. ***Интегрирование «по частям»***:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Пример 1. $J = \int x e^{1+2x} dx$.

Решение. Выберем $u = x$, тогда оставшийся множитель $dv = e^{1+2x} dx$. Следовательно,

$$du = dx,\ v = \int e^{1+2x} dx = \frac{1}{2} e^{1+2x}.$$

По формуле интегрирования по частям имеем

$$J = x \cdot \frac{1}{2} e^{1+2x} - \int \frac{1}{2} e^{1+2x} dx = \frac{1}{2} x e^{1+2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{1+2x} + C = \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \right) e^{1+2x} + C .$$

Заметим, что возможен был также выбор $u = e^{1+2x}, dv = x dx$, но в результате бы интеграл $\int v du$ оказался сложнее исходного.

Пример 2. $J = \int \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Здесь возможен лишь выбор $u = \operatorname{arctg} x, dv = dx$. Тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = \int dx = x .$$

Теперь

$$J = (\operatorname{arctg} x) \cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C.$$

5. ***Интегрирование рациональных дробей.*** Речь идет о дробях типа $\frac{x^2 - x + 3}{8x^3 + 8x^2}$, $\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ и т.п., т.е. об отношении многочленов. Дробь правильная, если степень числителя меньше степени знаменателя (первая дробь в приведенном примере) и неправильная – в противном случае (вторая дробь).

Если предстоит интегрировать правильную дробь, то ее знаменатель записываем в виде произведения множителей типа $(x-a)^n$ и $\left(x^2 + px + q\right)^m$. После этого дробь будет представлена суммой слагаемых вида

$$\frac{A_k}{(x-a)^k} (k = 1,\ ...,\ n) \text{ и } \frac{M_k x + N_k}{\left(x^2 + px + q\right)^k} (k = 1,\ ...,\ m),$$

интегрирование которых уже в основном нам известны.

Пример 1. $J = \int \frac{x^2 - x + 3}{8x^3 + 8x^2} dx$.

Решение. Имеем

$$J = \int \frac{x^2 - x + 3}{8x^3 + 8x^2} dx = \frac{1}{8} \int \frac{x^2 - x + 3}{x^2 (x+1)} dx .$$

Множителю x^2 соответствуют два слагаемых: $\frac{A}{x^2}$, $\frac{B}{x}$; множителю $(x+1)$ – слагаемое $\frac{C}{x+1}$, т.е.

$$\frac{x^2-x+3}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+1}.$$

Интегрирование сведется к табличному, если найти значения A, B, C. Преобразуем последнее равенство к виду

$$x^2-x+3=A(x+1)+Bx(x+1)+Cx^2$$

или

$$x^2-x+3=(B+C)x^2+(A+B)x+A.$$

Как известно из алгебры, многочлены тождественно равны, если совпадают их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестной:

$$\begin{cases} B+C=1 \\ A+B=-1, \\ A=3 \end{cases} \quad \text{откуда} \begin{cases} A=3 \\ B=-4. \\ C=5 \end{cases}$$

Теперь

$$J=\frac{1}{8}\left(-\frac{3}{x}+\ln\frac{|x+1|^5}{|x|^4}+C\right).$$

Интегрирование неправильных дробей сводится к выделению целой части с последующим интегрированием многочлена и правильной дроби:

$$\text{дробь} = \text{частное} + \frac{\text{остаток}}{\text{знаменатель}}.$$

Пример 2. $J=\int\frac{4x^3-2x+1}{x^2+1}dx$.

Решение. Применяя к неправильной дроби алгоритм деления многочленов, получим

$$\frac{4x^3-2x+1}{x^2+1}=4x+\frac{-6x+1}{x^2+1}.$$

Тогда

$$J=\int\left(4x-\frac{6x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=4\int xdx+\int\frac{dx}{1+x^2}-3\int\frac{2x}{x^2+1}dx=$$

$$=4\frac{x^2}{2}+\operatorname{arctg}x-3\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=2x^2+\operatorname{arctg}x-3\ln\left|x^2+1\right|+C.$$

6. ***Интегрирование некоторых типов иррациональностей.***

1) В случае, когда под знаком интеграла содержится рациональная функция аргументов $\sqrt[n]{ax+b}$ и x, применяется подстановка $t=\sqrt[n]{ax+b}$.

2) В случае рациональной функции аргументов $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{ax+b}$, ... и x полагаем $t^N = ax+b$, где N – наименьшее общее кратное чисел m, n, ...

Пример. $J = \int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Решение. Имеем случай 2); здесь $N = 4$. Полагаем $t^4 = x$, откуда $dx = 4t^3 dt$ и

$$J = \int \frac{\sqrt[4]{t^4}\cdot 4t^3 dt}{1+\sqrt{t^4}} = 4\int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = 4\int\left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= 4\left(\frac{1}{3}t^3 - t + \operatorname{arctg} t + C\right) = 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C\right);$$

в заключительном звене цепочки равенств $t = \sqrt[4]{x}$.

7. ***Интегрирование некоторых типов тригонометрических выражений.***

1) Интеграл вида $J_{mn} = \int(\sin x)^m(\cos x)^n dx,\ m, n$ – целые. Если $m = 2k+1$ (нечетно), то $(\sin x)^m = \left(\sin^2 x\right)^k \sin x = \left(1-\cos^2 x\right)^k \sin x$.

Положим $t = \cos x$, тогда

$$J_{mn} = -\int\left(1-\cos^2 x\right)^k(\cos x)^n(-\sin x dx) = -\int\left(1-t^2\right)^k \cdot t^n dt$$

и имеем интеграл от многочлена. Аналогично поступаем в случае нечетного n. Если $m,\ n \geq 0$ и $m = 2k,\ n = 2l$ – четны, то упрощаем интеграл с помощью формул понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Примеры.

1. $\int\cos^4\frac{x}{2}dx = \int\left(\cos^2\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{2}(1+\cos x)\right)^2 dx =$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\int dx + 2\int\cos x dx + \int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x + 2\sin x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int\cos 2x dx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x + 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right).$$

2. $J = \int\sin^2 x\cos^3 x dx = \int\sin^2 x\cos^2 x(\cos x dx) =$

$$= \int\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)(\cos x dx).$$

Положим $t = \sin x$, тогда $dt = \cos x dx$ и

$$J = \int t^2\left(1-t^2\right)dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

2) В случае рациональной подынтегральной функции аргументов $\sin x$ и $\cos x$ может быть эффективной универсальная тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

и приходим к задаче интегрирования рациональной дроби.

Пример. $J = \int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Решение. Применяем замену переменных $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$; согласно вышеприведенным формулам:

$$J = \int \frac{2dt}{1+t^2} : \left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right) = \int \frac{2dt}{1+2t+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = 2 \cdot \frac{(t+1)^{-1}}{-1} + C = C - \frac{2}{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}.$$

8. ***Тригонометрические подстановки*** при интегрировании некоторых иррациональностей продемонстрируем на примере. Так, если подынтегральное выражение содержит только арифметические действия над x и $\sqrt{a^2 - x^2}$, то эффективна замена $x = a\cos t$ (или $x = a\sin t$), после чего $\sqrt{a^2 - x^2} = \pm a\sin t$, $dx = -a\sin t\,dt$.

Пример. $J = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$.

Решение. Положим $x = 3\cos t$ (следовательно, $t = \arccos\frac{x}{3}$), тогда $\sqrt{9-x^2} = 3\sin t$ (для определенности выбран знак плюс при извлечении корня), $dx = -3\sin t\,dt$. Тогда

$$J = \int \frac{3\sin t(-3\sin t)}{(3\cos t)^2}dt = -\int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}dt = -\int \frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}dt =$$

$$= -\int \frac{dt}{\cos^2 t} + \int dt = t - \mathrm{tg}t + C = t - \frac{\sin t}{\cos t} + C = \arccos\frac{x}{3} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

($\cos t$ и $\sin t$ выражены через x из ранее записанных соотношений).

Рассмотренные приемы интегрирования не исчерпывают всех классов интегрируемых элементарных функций. Следует иметь в виду, что не существует общего универсального метода интегрирования, поэтому возможности алгоритмизации в данном разделе математики весьма ограничены. При этом существуют элементарные функции, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции (говорят: «не интегрируются в конечном виде»), например: $\int e^{x^2}dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ и др. Так, к «неберущимся» интегралам приводят многие теоретические и практические задачи теории вероятностей, статистики, механики и др. Для таких интегралов разработаны специальные приемы исследований, например приемы использования степенных рядов (о степенных рядах пойдет речь в гл. 5).

Тестовые задания

1. Одна из первообразных функции $y = \sin 10x$ имеет вид…

а) $-\frac{1}{10}\cos 10x$;

б) $-\frac{1}{10}\cos 10x$;

в) $10\cos 10x$;

г) $-10\cos 10x$.

2. Множество всех первообразных функций $y = \sqrt[3]{4-3x}$ имеет вид…

а) $C - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(4-3x)^4}$;

б) $C + \frac{1}{4}\sqrt[3]{(4-3x)^4}$;

в) $C + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(4-3x)^4}$;

г) $C - \frac{1}{3}\sqrt[3]{(4-3x)^4}$.

3. Первообразная функции $f(x) = \frac{2}{2x-1}$, график которой проходит через точку (1; –3), имеет вид…

а) $F(x) = 2\ln|2x-1| - 3$;

б) $F(x) = \ln|2x-1| - 3$;

в) $F(x) = \ln|2x-1| + 3$;

г) $F(x) = 2\ln|2x-1| + 3$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{e^{3x}\cdot\sqrt{x} - 3x^3 + 4}{2\sqrt{x}}dx$.

2. $\int e^{3\cos x - 1}\cdot \sin x \cdot dx$.

3. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$.

4. $\int x \cdot \sin\frac{x}{3}\cdot dx$.

5. $\int \frac{3\sqrt{x}\cdot\sin x + 2\sin^2 x - 1}{\sin x}dx$.

6. $\int \frac{x^3}{\sqrt{2 + x^4}}dx$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 10x + 26}}$.

8. $\int (1-x)e^{-x}dx$.

9. $\int \frac{dx}{10x - x^2}$.

10. $\int (3x-1)2^x dx$.

11. $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$.

12. $\int \frac{dx}{2\sin x + 1}dx$.

4.2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

К понятию ***определенного интеграла*** приводят многие задачи геометрии, механики и др. Например, может идти речь о площади так называемой криволинейной трапеции. В заданной прямоугольной системе координат эта фигура ограничена отрезком $[a, b]$ оси абсцисс, прямыми $x = a$, $y = b$ и графиком непрерывной на $[a, b]$ функции $y = f(x)$; $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$.

Выделим отрезок $[x, x + \Delta x]$ малой длины Δx. Площадь соответствующей «полоски» может быть приближенно вычислена как площадь прямоугольника со сторонами длины Δx и $f(\bar{x})$, где точка $\bar{x} \in [x, x + \Delta x]$ – произвольна: $\Delta S = f(\bar{x})\Delta x$. Разобьем всю криволинейную трапецию на такие полоски, пронумеруем их (пусть их число равно n) и вычислим приближенно искомую площадь как сумму площадей полосок:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k .$$

Устремляя к нулю каждую из длин Δx_k, будем получать все более точное приближение к площади S. В качестве точного ее значения естественно принять предел (при стремлении к нулю всех Δx_k) последовательности построенных сумм. Можно доказать, что при сформулированных условиях указанный предел существует и является одним и тем же числом для всевозможных разбиений трапеции на полоски и выбора «промежуточных» точек $\bar{x}_k$.

Сконструированный предел «интегральных» сумм в общем случае (без ограничения $f(x) \geq 0$ на $[a, b]$) называется определенным интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

Имеет место следующая формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Наиболее часто используются следующие приемы интегрирования: ***формула интегрирования по частям***

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

и замена переменных. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на $[\alpha, \beta]$, например, возрастает от $x = a$ к $x = b$ при $\alpha \leq t \leq \beta$, то ***формула замены переменных*** имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

(знак «минус» в правой части – в случае убывания $\varphi(t)$).

Заменяя переменную под знаком определенного интеграла, следует переходить к новым пределам интегрирования, и, найдя первообразную, к старой переменной не возвращаться.

Пример 1.

$$\int_1^1 \frac{\cos(\operatorname{arctg} x)}{x^2+1}dx = \int_0^1 \cos(\operatorname{arctg} x)\cdot d\operatorname{arctg} x = \sin(\operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 =$$

$$= \sin(\operatorname{arctg}1) - \sin(\operatorname{arctg}0) = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. $J = \int_2^3 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}dx$.

Решение. Сделаем замену переменных $t=\sqrt{x-2}$, откуда $t^2 = x-2$, $x = t^2+2, dx = 2td$. Новые пределы интегрирования α и β определяются через старые пределы $a=2$ и $b=3$ по той же формуле $t=\sqrt{x-2}$:

$$a=2,\ \alpha=\sqrt{2-2}=0;\ b=3,\ \beta=\sqrt{3-2}=1.$$

Итак,

$$J = \int_0^1 \frac{t}{t+1}2tdt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt .$$

Имеем интеграл неправильной рациональной дроби. Выделим целую часть дроби:

$$\frac{t^2}{t+1} = t-1+\frac{1}{t+1};$$

далее

$$J = 2\left(\int_0^1 tdt - \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{dt}{t+1}\right) = 2\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1 - t\Big|_0^1 + \ln(t+1)\Big|_0^1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1-0}{2} - (1-0) + \ln 2 - \ln 1\right) = 2\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Пример 3. $J = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx.$

Решение. Положим $x = 2\operatorname{tg} t$. Получим $2 \le 2\operatorname{tg} t \le 2\sqrt{3}$, или $1 \le \operatorname{tg} t \le \sqrt{3}$; следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{3}$. В этом случае

$$\sqrt{x^2+4} = \frac{2}{\cos t};\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt.$$

Итак,

$$J=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2/\cos t}{(2\mathrm{tg}t)^4}\cdot\frac{2}{\cos^2 t}dt=\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t\cdot\cos^3 t}dt=\frac{1}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{d\sin t}{\sin^4 t}=$$

$$=-\frac{1}{12}(\sin t)^{-3}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\sin^3\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{3\sqrt{6}-4}{18\sqrt{3}}.$$

Пример 4. $J=\int\limits_1^e\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Интегрируем по частям:

$$u=\ln x, du=\frac{dx}{x};\quad dv=\frac{dx}{\sqrt{x}}, v=2\sqrt{x}.$$

Имеем

$$J=2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e 2\sqrt{x}\frac{dx}{x}=2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e x^{-\frac{1}{2}}dx\right)=$$

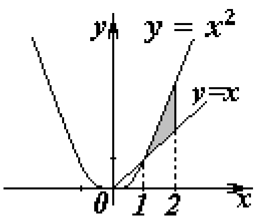
$$=2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e-2\sqrt{x}\Big|_1^e\right)=2\left(\sqrt{e}\ln e-\ln 1-2\left(\sqrt{e}-1\right)\right)=2\left(2-\sqrt{e}\right).$$

Тестовые задания

1. Определенный интеграл $\int\limits_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$ равен…

а) 1,5;
б) e;
в) 1;
г) 0.

2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке,



определяется интегралом…

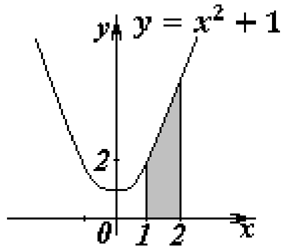
а) $\int\limits_1^2(x^2-x)dx$;

б) $\int\limits_1^4(x^2-x)dx$;

в) $\int_{1}^{2}(x^2 - x)dx$;

г) $\int_{0}^{1}(x^2 - x)dx$.

3. Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке,



равна…

а) $\frac{10}{3}$;

б) $\frac{7}{3}$;

в) $\frac{4}{3}$;

г) $\frac{3}{10}$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти определенные интегралы.

1. $\int_{-1}^{2}(4-2x)dx$.
2. $\int_{0}^{1}(1-x)e^{x}dx$.
3. $\int_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx$.
4. $\int_{0}^{4}\frac{x}{1+3\sqrt{x}}dx$.
5. $\int_{0}^{\pi/4}\cos^2 x\,dx$.
6. $\int_{1}^{2}\left(6\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5}\right)dx$.

4.3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие определенного интеграла на ***случай бесконечных промежутков интегрирования*** распространяется следующим образом:

а) $\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_{a}^{B} f(x)dx$; б) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx$;

в) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$

(относительно последних двух интегралов см. п. а), б)); функцию $f(x)$ полагаем непрерывной на соответствующих интервалах.

Если в случаях а), б) указанный предел не существует или бесконечен, то интеграл называется расходящимся. В случае же в) исходный интеграл считается расходящимся, если таковым является хотя бы один из интегралов в правой части равенства.

Интегралы от функций с разрывами второго рода определяются следующим образом (в п. а) и б) параметр $\varepsilon > 0$):

а) $f(x)$ имеет разрыв на левом конце отрезка, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;$$

б) $f(x)$ имеет разрыв на правом конце отрезка, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

в) $f(x)$ имеет разрыв в точке $c \in (a,b)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(относительно последних двух интегралов см. п. а), б)).

В случаях, если соответствующий предел не существует или бесконечен (см. п. а), б)) интеграл называется расходящимся; расходимость в случае п. в) определяется как расходимость хотя бы одного из двух слагаемых интегралов.

Замену переменных под знаком несобственного интеграла можно осуществить по той же схеме, что и под знаком определенного интеграла.

Пример 1. Вычислите несобственный интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2+6x+2}.$$

Решение. Выделим полный квадрат

$$9x^2+6x+2 = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1;$$

положим $t = x+\frac{1}{3}$, тогда $dx = dt$. При этом новые пределы интегрирования, определяемые подстановкой $t = x+\frac{1}{3}$, будут такими: $\alpha = -\infty;\ \beta = 0$. Имеем

$$J = \int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{9t^2+1} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dt}{1+(3t)^2}.$$

Получив интеграл табличного типа, воспользуемся определением б) интеграла с бесконечным нижним пределом:

$$J=\lim_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{dt}{1+(3t)^2}=\lim_{A\to-\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3t\Big|_A^0=\frac{1}{3}\lim_{A\to-\infty}(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}A)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(0-\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}A\right)=\frac{1}{3}\left(-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. Вычислите несобственный интеграл

$$J=\int_{e+1}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)\ln(x-1)}.$$

Решение. Заметив, что $\frac{dx}{x-1}=d\big(\ln(x-1)\big)$, воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом:

$$J=\lim_{B\to+\infty}\int_{e+1}^{\infty}\frac{d\big(\ln(x-1)\big)}{\ln(x-1)}=\lim_{B\to+\infty}\ln\left|\ln(x-1)\right|\Big|_{e+1}^{B}=$$

$$=\lim_{B\to\infty}\big(\ln|\ln(B-1)|-\ln|\ln e|\big)=\lim_{B\to\infty}\big(\ln|\ln(B-1)|-\ln 1\big)=\infty;$$

следовательно, интеграл является расходящимся.

Замечание. Приведенные примеры показывают, что формула Ньютона–Лейбница распространяется на несобственные интегралы в виде

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a);\quad \int_{-\infty}^{b}f(x)dx=F(b)-F(-\infty).$$

Например,

$$\int_0^{\infty}e^{1-x}dx=-e^{1-x}\Big|_0^{\infty}=-\left(e^{-\infty}-e^{1}\right)=e-\frac{1}{e^{\infty}}=e-0=e.$$

Пример 3. Вычислите интеграл

$$J=\int_{-1}^{2}\frac{dx}{2-\sqrt{x+2}}.$$

Решение. Функция $f(x)=\frac{1}{2-\sqrt{x+2}}$ непрерывна на интервале $[-1,\ 2)$ и имеет разрыв (2-го рода) в концевой точке $x=2$. Следовательно, интеграл относится к классу несобственных. Прежде чем воспользоваться соответствующим определением, заменим переменные: $t=2-\sqrt{x+2}$; пределы интегрирования трансформируются следующим образом:

$$a=-1, \alpha=2-\sqrt{-1+2}=1,\quad b=2, \beta=2-\sqrt{4}=0.$$

Далее, $\sqrt{x+2}=2-t$, $x+2=(2-t)^2$, откуда $dx=2(t-2)dt$. Следовательно,

$$J=\int_1^0\frac{2(t-2)dt}{t}=-2\int_0^1\frac{t-2}{t}dt.$$

Функция $g(t)=\dfrac{t-2}{t}$ имеет разрыв на левом конце отрезка интегрирования $[0,\ 1]$, т.е. в точке $t=0$. Согласно определению

$$J=-2\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{t-2}{t}dt=-2\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{t}{t}dt-\int_{\varepsilon}^{1}\frac{2}{t}dt\right)=-2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(t\Big|_{\varepsilon}^{1}-2\ln|t|\Big|_{\varepsilon}^{1}\right)=$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon+2\ln\varepsilon)=-2(1-0+2\ln 0)=-2(1-\infty)=\infty,$$

т.е. интеграл оказывается расходящимся.

Пример 4. Вычислите несобственный интеграл

$$J=\int_0^1\frac{e^{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}dx.$$

Решение. Функция $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}$ имеет разрыв на правом конце промежутка интегрирования. Согласно п. б) имеем

$$J=\lim_{\varepsilon\to 0}(-2)\int_0^{1-\varepsilon}e^{\sqrt{1-x}}\,d\sqrt{1-x}=-2\lim_{\varepsilon\to 0}e^{\sqrt{1-x}}\Big|_0^{1-\varepsilon}=$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(e^{\sqrt{\varepsilon}}-e^{1}\right)=-2\left(e^{0}-e\right)=2(e-1).$$

Тестовые задания

1. Несобственными являются интегралы…

а) $\displaystyle\int_2^5\frac{3dx}{(x-5)^2}$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}$;

в) $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos x\,dx$;

г) $\displaystyle\int_1^5\frac{dx}{1+x^2}$.

2. Сходящимися являются несобственные интегралы…

а) $\displaystyle\int_0^2(2-x)^{-\frac{3}{5}}dx$;

б) $\displaystyle\int_0^2(2-x)^{-\frac{5}{7}}dx$;

в) $\int\limits_0^2 (2-x)^{-\frac{5}{3}} dx$;

г) $\int\limits_0^1 (1-x)^{-\frac{7}{5}} dx$.

3. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость $\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x} dx$.

а) 0,25;

б) $0{,}25^{e^{-4}}$;

в) $0{,}25e^{-4}$;

г) $0{,}25e^{-1}$.

д) расходится.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите значения несобственных интегралов или установите их расходимость

1. $\int\limits_2^{\infty} xe^{4-x^2} dx$.   2. $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.   3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{8+2x^3}$.   4. $\int\limits_1^{\infty} \frac{2+\ln x}{x} dx$.

5. $\int\limits_0^{9} \frac{xdx}{\sqrt{9-x}}$.   6. $\int\limits_3^{4} \frac{xdx}{x^2-9}$.

4.4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ К ЗАДАЧАМ ГЕОМЕТРИИ

Перечислим основные геометрические приложения определенных интегралов.

Площадь фигуры.

а) Если плоская фигура D ограничена линиями $x=a,\ x=b$, $y=g(x),\ y=f(x)$, где g и f – непрерывны на $[a,\ b]$ и $g(x)\le f(x)$ при $x\in[a,\ b]$, то ее площадь (см. рис. 4.1)

$$S=\int\limits_a^b \left[f(x)-g(x)\right]dx.$$

В частности, при $g(x)\equiv 0$ имеем площадь криволинейной трапеции (рис. 4.2).

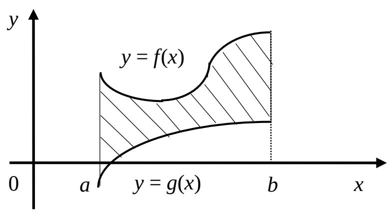


Рис. 4.1

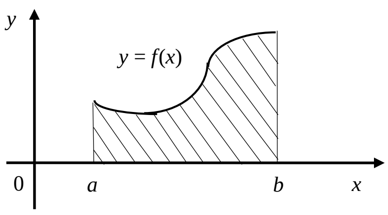


Рис. 4.2

б) Пусть $y = f(x) \geq 0$ задана параметрически, т.е. в виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

причем x пробегает отрезок $\{a, \ b]$ при $\alpha \leq t \leq \beta$. Тогда площадь криволинейной трапеции, указанной на рис. 4.2, находится по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt.$$

Пример 1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и одной аркой циклоиды:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Решение. Имеем

$$S = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\big(2(t - \sin t)\big)' dt = 2\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= 2\left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \right) = 2\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)dt \right) =$$

$$= 2\left(2\pi - 0 + \frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} \right) = 2(2\pi + \pi) = 6\pi.$$

Длина дуги линии.

а) Если линия L задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то длина ее дуги, соответствующей значениям $x \in [a, \ b]$ (см. рис. 4.2), вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

б) Дуга заданной параметрически линии

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

в случае $t \in [\alpha, \ \beta]$ имеет длину

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(x)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$$

(предполагается монотонность $x(t)$ на отрезке $[\alpha, \ \beta]$).

Пример. Найти длину дуги линии

$$y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

Решение. График функции $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ изображен на рис. 4.3. Имеем

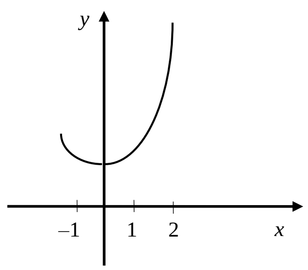


Рис. 4.3

$$l = \int_0^2 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^2 \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{e^x + 2 + e^{-x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot 2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(e - e^{-1}\right) - (1-1) = e - \frac{1}{e}.$$

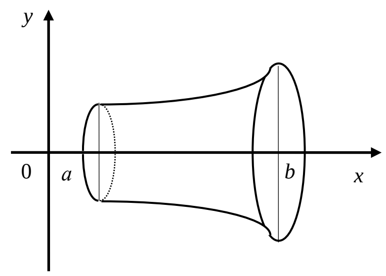


Рис. 4.4

Объем тела вращения. Тело, образованное вращением вокруг $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0$ при $x \in [a, b]$), имеет объем (рис. 4.4)

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Найдите объем тела, образованного вращением криволинейного треугольника вокруг оси $0x$, если треугольник ограничен осью $0x$, прямой $x = \frac{\pi}{4}$ и графиком $y = \mathrm{tg}x$.

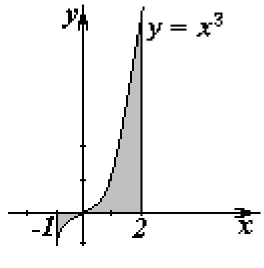
Решение. Имеем

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx\right) =$$

$$= \pi\left(\mathrm{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \pi\left(1 - 0 - \frac{\pi}{4}\right) = \pi - \frac{\pi^2}{4}.$$

Тестовые задания

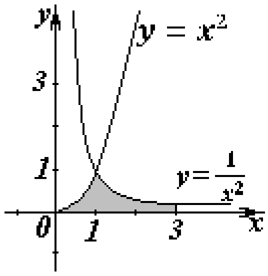
1. Площадь фигуры, изображенной на рисунке,



равна…

а) 4,25;
б) 3,75;
в) 4;
г) 3,25.

2. Площадь фигуры, изображенной на рисунке,



равна…

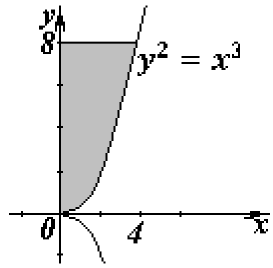
а) 1;

б) 0,33;

в) 0,66;

г) 2.

3. Площадь фигуры, изображенной на рисунке,



равна…

а) 19,2;

б) 32;

в) 12,8;

г) 64.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right),\ y=0,\ x=-1,\ x=1;$ б) $y=3\sin 2x,\ y=0\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right).$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

а) $y=e^{-x},\ y=2x+1,\ x=1;$ б) $y=-\sqrt{x},\ y=2x,\ x=4.$

3. Найти длину участка линии $y=2(x+1)\sqrt{x+1}$ при $-1\le x\le 0$.

4. Вывести формулу вычисления объема прямого кругового конуса.

5. Вывести формулу вычисления объема шара.

4.5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 4

1. Что называется первообразной данной функции? Единственным ли образом можно найти первообразную?

2. Что называется неопределенным интегралом данной функции?

3. Каким образом можно проверить любое равенство из таблицы интегралов?

4. Запишите формулу, по которой осуществляется замена переменных под знаком неопределенного интеграла.

5. Запишите формулу интегрирования по частям и объясните, как ею пользоваться.

6. Опишите в общих чертах порядок действий при интегрировании правильной рациональной дроби.

7. Опишите в общих чертах порядок действий при интегрировании неправильной рациональной дроби.

8. Опишите порядок действий при интегрировании выражений, рациональным образом зависящих от $\sqrt[n]{ax+b}$.

9. Объясните, в каких случаях можно пользоваться универсальной тригонометрической подстановкой, и запишите соответствующие формулы.

10. Всегда ли первообразные элементарных функций выражаются через элементарные функции?

11. Среди следующих интегралов укажите «неберущиеся»:

$$\int e^{2x}dx,\ \int e^{2x^2}dx,\ \int\frac{dx}{\ln(x+1)},\ \int\frac{\sin 6x}{x}dx,\ \int\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)},\ \int x\sin x\,dx.$$

12. В чем состоит идея нахождения площади криволинейной трапеции?

13. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.

14. Запишите формулу, по которой осуществляется замена переменных под знаком определенного интеграла, и объясните соответствующий порядок действий.

15. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле и объясните соответствующий порядок действий.

16. Как, следуя определению, вычислить несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (рассмотрите три возможных вида). В каких случаях говорят, что соответствующий несобственный интеграл расходится?

17. Как, следуя определению, вычислить несобственные интегралы от функций, имеющих разрывы второго рода (рассмотрите три случая: разрыв на левом конце промежутка интегрирования, разрыв на правом конце, точка разрыва внутри промежутка)? В каких случаях говорят, что соответствующий несобственный интеграл расходится?

18. Запишите формулу, по которой вычисляется площадь криволинейной трапеции в случаях явного задания функций, определяющих верхнюю и нижнюю границы фигуры. Запишите соответствующую формулу для криволинейной трапеции в случае параметрического задания границы.

19. Запишите формулу, по которой вычисляется длина дуги кривой в случае ее явного задания. Запишите соответствующую формулу для случая параметрического задания линии.

20. Запишите формулу, по которой вычисляется объем тела вращения.

5. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Формально составленная ***бесконечная сумма*** $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots$ действительных чисел $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots,$ или $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$, называется ***числовым рядом***. Конечную сумму первых n членов

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n$$

назовем n-й частичной суммой ряда. Если существует число $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, то числовой ряд называется ***сходящимся*** к сумме S, а в противном случае – ***расходящимся.***

Основная задача, которая решается в теории числовых рядов – сходится или расходится данный ряд; вопрос о его сумме можно ставить лишь тогда, когда доказана сходимость. Сумму же сходящегося ряда всегда можно вычислить приближенно, взяв достаточно большое количество n членов в составе его частичной суммы S_n; при этом точность вычисления увеличивается с ростом n.

Необходимое условие сходимости ряда. Если числовой ряд сходится, то существует предел (при $n \to \infty$) его общего члена w_n, причем $\lim_{n\to\infty} w_n = 0.$

Обратное утверждение неверно.

Из необходимого признака сходимости легко следует ***достаточный признак расходимости ряда*:** если $\lim_{n\to\infty} |w_n| \neq 0$, или если предел вида $\lim_{n\to\infty} w_n$ не существует, то ряд расходится.

Пример. Докажите сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ и найдите его сумму.

Решение. Выполнив преобразование

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n+1)-(2n-1)}{2(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

сложим первые n членов. При этом обнаруживаем, что члены, начиная со второго и кончая предпоследним, будут взаимно уничтожаться:

$$2S_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, ряд оказался сходящимся и его сумма $S = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим следующий ряд, называемый ***гармоническим***:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Можно доказать, что его частичные суммы неограниченно растут с ростом *n*, так что указанный ряд расходится.

Как оказывается, обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in R,$$

сходится при каждом $p > 1$ и расходится при остальных действительных значениях p.

Сумма геометрической прогрессии. Пусть a и q – ненулевые действительные числа. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^n,\ \ldots$$

ряд, составленный из ее членов

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n ,$$

и исследуем его сходимость.

Случай 1: $|q| \geq 1$; в этом случае $|aq^n| = |a| \cdot |q|^n \geq |a|$. Могут представиться две возможности: либо предел общего члена ряда не существует, либо он существует, но больше или равен числа $|a| > 0$. В обоих случаях по достаточному признаку расходимости получаем, что ряд расходится.

Случай 2: $|q| < 1$; в этом случае n-я частичная сумма ряда имеет вид

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

(формула суммы первых членов геометрической прогрессии). Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^n).$$

Последний предел существует, так как

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ при } |q| < 1.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд оказался сходящимся к сумме

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, исследуемый ряд сходится к сумме $\dfrac{a}{1-q}$ тогда и только тогда, когда $|q| < 1$, и расходится в противном случае.

Тестовые задания

1. Укажите ряды, для которых выполняется необходимое условие сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\sqrt[3]{n^4}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{-n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7n-2}{9n-1}$.

2. Укажите ряды, для которых не выполняется необходимое условие сходимости ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{5+n}}{n^2}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+2n^3}{n^3}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{4n+1}$.

3. Сумма числового ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}$ равна…

а) $\frac{4}{5}$;

б) $\frac{1}{4}$;

в) $\frac{5}{4}$;

г) $\frac{1}{625}$.

5.2. СХОДИМОСТЬ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{5.1}$$

составленный из положительных чисел, называют ***знакоположительным.***

Одним из способов исследования сходимости знакоположительного ряда является сравнение его общего члена с общим членом некоторого ряда, поведение которого известно («эталонного ряда»). Таким «эталоном» может, например, служить ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии или обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле).

Признак сравнения по величине. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5.2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{5.3}$$

и при всех $n = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство $a_n \le b_n$.

Тогда: 1) если сходится ряд (5.3) к некоторой сумме B, то сходится и ряд (5.2) к некоторой сумме A; при этом для их сумм имеет место соотношение $A \le B$;

2) если ряд (5.2) расходится, то расходится и ряд (5.3).

Признак сравнения в предельной форме. Пусть даны два знакоположительных ряда (5.2) и (5.3), причем существует (конечный) предел вида

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},\ L > 0.$$

Тогда ряды (5.2) и (5.3) сходятся или расходятся одновременно.

Примеры.

1. Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{(2^n+1)n^2}.$$

Решение. Оценим сверху общий член ряда:

$$a_n < \frac{2n^2+1}{2^n n^2} = \left(2+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ представляет собою сумму геометрической прогрессии с первым членом $a = 3$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$, меньшим единицы; следовательно, этот ряд сходится. На основании признака сравнения тогда сходится и данный ряд.

2. Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+3n-2}.$$

Решение. При больших значениях n поведение общего члена ряда

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+3n-2}$$

определяется поведением старших степеней параметра n. Следовательно, имеет смысл сравнить данный ряд с рядом, общий член которого имеет вид

$$b_n = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n},$$

т.е. с гармоническим (расходящимся) рядом. По признаку сравнения в предельной форме получим

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+3n-2} : \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3(1+3/n^2-2/n^3)} = 1,$$

т.е. $L \neq 0$. Отсюда заключаем, что поведение сравниваемых рядов одинаково, а значит, данный ряд расходится.

Использование признаков сравнения знакоположительных рядов предполагает наличие некоторого эталона для сравнения. Следующие признаки позволяют исследовать поведение ряда исходя лишь из вида его общего члена.

Радикальный признак Коши. Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Если $K < 1$, то ряд (5.1) сходится; если же $K > 1$, то ряд расходится.

В случае $K = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда: существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов, для которых $K = 1$.

Признак Даламбера. Пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $D < 1$, то ряд (5.1) сходится; если же $D > 1$, то ряд расходится.

В случае $D = 1$ (подобно признаку Коши) признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Пример 1. Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

Решение. Имеем знакоположительный ряд с общим членом

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},$$

вид которого наводит на мысль использовать признак Коши. Вычисляем

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e.$$

Поскольку $K = e = 2{,}71... > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 2. Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)5^n}{n^2}.$$

Решение. Общий член знакоположительного ряда

$$a_n=\frac{(2n+1)5^n}{n^2}$$

растет (с ростом n) достаточно быстро, что указывает на возможность применения признака Даламбера. Найдем a_{n+1}:

$$a_{n+1}=\frac{(2(n+1)+1)5^{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Теперь вычисляем соответствующий предел:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{(2n+1)5^n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\frac{5^{n+1}}{5^n}=$$

$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2=5\cdot\frac{2}{2}\cdot 1=5>1.$$

Имеем $D>1$; согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

Пример 3. Исследуйте сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$$

Решение. Наличие $n!$ в знаменателе дроби

$$a_n=\frac{\sqrt{n+1}}{n!}$$

свидетельствует о ее быстром убывании, в силу чего может быть эффективен признак Даламбера. Имеем

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)!}$$

и $D=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}\cdot\dfrac{n!}{(n+1)!}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{n!}{n!(n+1)}=0.$$

Поскольку оказалось $D<1$, то данный ряд сходится.

Тестовые задания

1. С помощью признаков сравнения, укажите какие из рядов сходятся:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5^n \cdot n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n^2+2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{4^n+n}$.

2. С помощью радикального признака Коши, укажите какие из рядов сходятся:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+4}\right)^{n^2}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+2}{5n}\right)^{\frac{n^2}{2}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{2n+14}\right)^{n}$.

3. Используя признак Даламбера, укажите, какие из рядов сходятся:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n+1}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{4^n n!}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n+1}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{5^n-1}$.

5.3. СХОДИМОСТЬ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИХСЯ РЯДОВ. ХАРАКТЕР СХОДИМОСТИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО РЯДА

Рассмотрим последовательность

$$\{a_n\},\ a_n \in R,\ a_n > 0, n = 1, 2, \ldots \qquad (5.4)$$

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n-1}a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad (5.5)$$

называется ***знакочередующимся.*** Достаточный признак его сходимости содержится в следующей теореме.

Признак Лейбница. Если последовательность (5.4) является убывающей и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то знакочередующийся ряд (5.5) сходится. При этом для суммы S ряда справедлива оценка

$$0 \le S \le a_1.$$

Можно доказать (в качестве следствия теоремы) такое правило: при замене суммы знакочередующегося ряда суммой первых его нескольких членов абсолютная погрешность не превзойдет модуля первого из отброшенных членов.

Примеры.

1. Ряд вида $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}...$ является сходящимся, поскольку выполнены оба условия признака Лейбница: последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является, очевидно, убывающей и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$

2. Вычислим сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$ с точностью до 0,01. Имеем знакочередующийся ряд с $a_n=\frac{n}{2^n}$ и отрицательным первым членом

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\frac{5}{2^5}+\frac{6}{2^6}-\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}-\frac{9}{2^9}+\frac{10}{2^{10}}-...,$$

причем для последовательности $\{a_n\}$ выполнены условия признака Лейбница (заметим, что показательная функция $y=2^x$ растет (при $x\to\infty$) быстрее линейной $y = x$).

Согласно вышеприведенному правилу, сумму ряда можно вычислить приближенно, оставив все первые его члены, модули которых еще больше 0,01, и отбросив все члены, начиная с того, который уже меньше 0,01. Таким является член $\frac{10}{2^{10}} < 0{,}01$, тогда как предшествующий ему $\frac{9}{2^9} = 0{,}017\ldots > 0{,}01$.

Имеем (с точностью до 0,01)

$$S \approx -\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\frac{5}{2^5}+\frac{6}{2^6}-\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}-\frac{9}{2^9}\approx 0{,}16.$$

Рассмотрим теперь ряд из произвольных действительных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{5.6}$$

среди членов которого имеются как положительные, так и отрицательные числа; такой ряд называется ***знакопеременным*** (на самом деле интерес представляет лишь случай, когда и тех и других членов бесконечно много). Построим также ряд, составленный из *абсолютных величин* (модулей) членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{5.7}$$

Справедливо следующее утверждение: если сходится ряд (5.7), то сходится и ряд (5.6).

Сходимость ряда (5.6) в этом случае называется ***абсолютной.***

***Обратное утверждение неверно*:** знакопеременный ряд может быть сходящимся, тогда как ряд из модулей (5.7) расходящимся. Примером служит сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n},$$

для которого ряд из модулей – расходящийся гармонический ряд. В подобных случаях говорят, что ряд (5.6) ***сходится условно.***

Пример 1. Исследуйте сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n+5}$.

Решение. Имеем модуль общего члена, равный $\left|\dfrac{(-1)^n n}{n+5}\right| = \dfrac{n}{n+5}$,

и теперь легко заметить, что последнее выражение не стремится к нулю (его предел при $n \to \infty$ равен единице). Согласно достаточному признаку расходимости, данный ряд будет расходящимся.

Пример 2. Исследуйте сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \sin \dfrac{\pi}{2^n}$.

Решение. В записи общего члена $w_n = (-1)^n n \sin \dfrac{\pi}{2^n}$ множитель $\sin \dfrac{\pi}{2^n} > 0$,

поскольку $0 < \dfrac{\pi}{2^n} \le \dfrac{\pi}{2}$. Значит, $|w_n| = n \sin \dfrac{\pi}{2^n}$, а тогда для ряда из модулей число Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{n \sin\dfrac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{n\dfrac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

(здесь мы воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin t$ и t при $t \to 0$ в случаях, когда значения t выбраны равными $\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ и $\dfrac{\pi}{2^n}$).

Итак, $D < 1$, откуда следует сходимость ряда из модулей, а тогда данный ряд сходится абсолютно.

2. Среди данных рядов укажите условно сходящиеся:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n-1}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+1}$.

2. Среди данных рядов укажите абсолютно сходящиеся:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{5^n}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+5}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2n+2}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{n+1}$.

3. Установите соответствие между видами сходимости и знакопеременными рядами:

L1: расходится

L2: условно сходится

L3: абсолютно сходится

R1:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{6^n}$;

R2:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$;

R3:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2n+3}$.

5.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Бесконечные суммы можно строить не только из чисел, но и из функций. Пусть на некотором числовом множестве G задана бесконечная последовательность функций $\{u_n(x)\}$, $n=1, 2, \ldots$ Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{5.8}$$

называется ***функциональным рядом*** на G. При каждом $x = x_0 \in G$ имеем *числовой* ряд из членов $u_n(x_0)$. Если получаемый числовой ряд сходится, то x_0 называется его точкой сходимости, а если расходится – то точкой расходимости. На множестве $G_0 \subset G$ всех точек сходимости ряда (5.8) задана тогда функция $S = S(x)$, называемая суммой ряда.

Построим, в частности, ряд из последовательности степенных функций $\{x^n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ с помощью произвольной последовательности действительных чисел $\{\alpha_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$

Ряд вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{5.9}$$

называется ***степенным*** (стандартный степенной ряд); для (5.9) употребляем также обозначение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Очевидно, что любой стандартный степенной ряд сходится в точке $x_0 = 0$. Действительно, все его частичные суммы $S_n(x_0) = a_0$, и, следовательно, предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ существует и равен a_0. Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (5.9) сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится на промежутке, определяемом неравенством $|x| < |x_0|$. Если же x' – точка расходимости, то ряд (5.9) расходится при всех x, таких, что $|x| > |x'|$.

Радиус сходимости R (радиус промежутка сходимости) можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D} \text{ или } R = \frac{1}{K}, \tag{5.10}$$

если, соответственно, существует «число Даламбера»

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

или «число Коши»

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Формулы (5.10) остаются справедливыми, если $D = 0$ или $(K = 0)$: тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся числовая ось. Если же $D = +\infty$ $(K = +\infty)$, то $R = 0$, т.е. «областью» сходимости является единственная точка $x_0 = 0$.

Пример 1. Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-nx}, \ a > 1.$$

Решение. Имеем функциональный ряд, который становится степенным после замены переменной $y = a^{-x}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n.$$

Получена сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем y. Ряд сходится тогда и только тогда, когда $|y| < 1$. Значит, область сходимости определяется неравенством $a^{-x} < 1$, откуда при $a > 1$ должно выполняться неравенство $-x < 0$, так что $x > 0$. Окончательно, получили, что область сходимости ряда есть полупрямая $x > 0$.

Пример 2. Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{nx^n}.$$

Решение. Если положить $X = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, то получим степенной ряд действительной переменной X

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} X^n$$

с коэффициентами вида $a_n = \frac{5^n}{n}$. Число Даламбера находим в виде

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n5^{n+1}}{(n+1)5^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 5,$$

откуда $R = \frac{1}{5}$, и интервал абсолютной сходимости ряда определяется соотношением

$$-\frac{1}{5} < X < \frac{1}{5};$$

вне этого интервала степенной ряд расходится. Исследуем концы интервала.

а) $X = \frac{1}{5}$. В этой точке значение общего члена ряда

$$f_n(X) = \frac{5^n}{n} X^n \text{ есть величина } f_n\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5^n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{n},$$

так что приходим к числовому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(гармонический ряд), который расходится;

б) $X = -\frac{1}{5}$.

Имеем

$$f_n\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{5^n}{n}\frac{(-1)^n}{5^n}=\frac{(-1)^n}{n};$$

полученный знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

является (как установлено выше) условно сходящимся.

Итак, область сходимости степенного ряда определяется соотношением $-\frac{1}{5}\le X<\frac{1}{5}$. Поскольку $X=\frac{1}{x}$, то остается решить двойное неравенство $-\frac{1}{5}\le\frac{1}{x}<\frac{1}{5}$. Можно записать, что $\frac{1}{|x|}<\frac{1}{5}$ либо $\frac{1}{x}=-\frac{1}{5}$. В первом случае имеем $|x|>5$, что равносильно совокупности двух неравенств: $x>5$, $x<-5$, во втором – $x=-5$. Окончательно имеем область сходимости в виде

$$x\in(-\infty,-5]\bigcup(5,+\infty).$$

Задания для самостоятельного решения

Вычислите суммы следующих рядов:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{-n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}-6^{n+2}+1}{9^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{1-n}-16^{n/2}-5}{5^n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. 5. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-3n+2}$. 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{\pi(n-1)}{2n}-\cos\frac{\pi n}{2(n+1)}\right)$.

Исследуйте сходимость знакоположительных рядов, применив признаки Даламбера или Коши:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+4n}{8^n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+3)^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+n)!}{2^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n}}{\sqrt{n+1}}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^n$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}5^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(9n+1)4^n$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n}{(n+1)!}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)^n$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{8n+1}}{3^n}$.

Исследуйте сходимость знакоположительных рядов, применив признаки сравнения или достаточный признак расходимости:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\frac{\pi}{3n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n+2}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+3}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5n+2}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}$. 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+3n}$. 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4+\sqrt{n}}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^2+2}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(n^2+n\right)^2}$. 10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n\sqrt{n}}$.

Применив подходящий признак, исследуйте сходимость следующих знакоположительных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+2\sqrt{n}}{2+n}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n^2+1}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln 2n}{n}$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n)!}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+3^n}{4^n}\right)^{2n}$.

Исследуйте знакочередующиеся ряды на сходимость и, в случае сходимости, установить ее вид (абсолютная, условная):

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+5}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+2}}{\sqrt{n^2+1}}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{1+\sqrt{n-1}}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+2)^n}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+n+1}}$. 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$. 7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-n)^n}{(n+1)^n}$. 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}$. 10. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{1-2n}4^{n+3}$.

Вычислите с точностью до 0,001 сумму ряда:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n+500}$.

5.5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ 5

1. Что называется числовым рядом? Как определяется его частичная сумма? В каком случае числовой ряд называется сходящимся, а в каком – расходящимся?
2. Приведите примеры сходящегося и расходящегося числовых рядов.
3. Ознакомьтесь по рекомендованной литературе с простейшими свойствами сходящихся рядов и сформулируйте эти свойства.
4. Верно ли утверждение: «Если общий член числового ряда на бесконечности имеет своим пределом число 0, то ряд сходится»? Обоснуйте свой ответ.
5. В чем состоит достаточный признак расходимости ряда?
6. Запишите обобщенный гармонический ряд. Что можно сказать о его сходимости?
7. Дайте определение бесконечной геометрической прогрессии Что можно сказать о поведении ряда, составленного из ее членов?
8. Сформулируйте признак сравнения знакоположительных рядов и признак сравнения в предельной форме.
9. Укажите несколько «эталонных» рядов, которые могут быть использованы в процессе применения признаков сравнения.

10. В чем состоит радикальный признак Коши сходимости знакоположительного ряда?

11. В чем состоит признак Даламбера сходимости знакоположительного ряда?

12. В каких случаях радикальный признак Коши и признак Даламбера не дают ответа на вопрос о сходимости знакоположительного ряда?

13. Каков общий вид знакочередующегося ряда? В чем состоит признак Лейбница сходимости такого ряда?

14. Какова оценка абсолютной погрешности при приближенной замене суммы знакочередующегося ряда суммой первых его нескольких членов?

15. Что означает высказывание: «знакопеременный ряд сходится абсолютно»?

16. Верно ли утверждение: «если данный знакопеременный ряд сходится, то сходится и ряд из модулей его членов»?

17. В каком случае говорят, что знакопеременный ряд сходится условно?

18. Каков общий вид функционального ряда? Что называется точкой его сходимости (расходимости)?

19. Каков общий вид степенного ряда? Существует ли точка, в которой сходится любой стандартный степенной ряд?

20. Сформулируйте теорему Абеля для степенных рядов.

21. Может ли быть так, что некоторый стандартный степенной ряд сходится на промежутке $[0; +\infty)$ и расходится на $(-\infty; 0)$?

22. Каков вид сходимости степенного ряда внутри его промежутка сходимости?

23. Запишите формулы, по которым может быть найден радиус сходимости степенного ряда. Сформулируйте алгоритм нахождения интервала сходимости степенного ряда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ряды широко используются в математике и ее приложениях, в теоретических исследованиях, в приближенных вычислениях. Многие числа могут быть записаны в виде специальных рядов, с помощью которых удобно вычислять их приближенные значения с нужной точностью.

Метод разложения в ряды является эффективным способом изучения функций. Он применяется для вычисления приближенных значений функций, для вычисления и оценок интегралов, для решения всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных).

Специальные функциональные ряды применяются в механике, теплофизике, математическом моделировании процессов диффузии, в теории вероятностей и других предметных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бермант, А. Ф.** Краткий курс математического анализа : учебник / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – 10-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.
2. **Мышкис, А. Д.** Лекции по высшей математике : учебное пособие / А. Д. Мышкис. – СПб. : Лань, 2021. – 688 с.
3. **Демидович, Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П.Демидович. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
4. **Индивидуальные** задания по высшей математике / А. П. Рябушко, В. В.Бархатов и др. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – Ч. 1. – 304 с. ; Ч. 2. – 396 с. ; Ч. 3. – 367 с. ; Ч. 4. – 336 с.
5. **Нахман, А. Д.** Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных : методические указания и контрольные задания / А. Д. Нахман, Е. А. Петрова. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 32 с.
6. **Нахман, А. Д.** Введение в теорию и практику числовых и функциональных рядов : учебное пособие / А. Д. Нахман. – Palmarium Academic Publishing OmniScriptum GmbH&Co.KG, Germany, 2015. – 93 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное электронное издание

НАХМАН А. Д.
ПЧЕЛИНЦЕВ А. Н.
ПРОТАСОВ Д. Н.

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Графический и мультимедийный дизайнер Т. Ю. Зотова
Обложка, упаковка, тиражирование Л. В. Комбаровой

ISBN 978-5-8265-2592-0

9 785826 525920

Подписано к использованию 03.06.2023.
Тираж 50 шт. Заказ № 49

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел./факс (4752) 63-81-08.
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru