В. В. АЛЕКСЕЕВ, Ю. В. КУЛАКОВ,
Ю. В. МИНИН, Н. Г. ШАХОВ

ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Часть 2

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

В. В. АЛЕКСЕЕВ, Ю. В. КУЛАКОВ,
Ю. В. МИНИН, Н. Г. ШАХОВ

ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

В четырёх частях

Часть 2

Утверждено Учёным советом университета в качестве учебного пособия
для студентов 1, 2, 4, 5 курсов, обучающихся по направлениям подготовки
09.03.02, 09.04.02 «Информационные системы и технологии»,
27.04.03 «Системный анализ и управление» и специальности 10.05.03
«Информационная безопасность автоматизированных систем»
очной, очно-заочной и заочной форм обучения

Учебное электронное издание

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

УДК 62(075.8)
ББК з965я73
О-75

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор,
директор Научно-исследовательского института математики,
физики и информатики
ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
Е. С. Жуковский

Кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой «Системы автоматизированной поддержки
принятия решений»
ФГБОУ ВО «ТГТУ»
И. Л. Коробова

О-75 **Основы** интеллектуальных автоматизированных систем [Электронный ресурс] : учебное пособие. В 4 ч. / В. В. Алексеев, Ю. В. Кулаков, Ю. В. Минин, Н. Г. Шахов. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ».
ISBN 978-5-8265-2139-7.

Ч. 2. – 2023. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 1,71 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-8265-2521-0.

Содержит теоретический материал по понятиям нечёткой и лингвистической переменных, нечётким высказываниям и список рекомендуемой литературы
Предназначено для студентов 1, 2, 4, 5 курсов, обучающихся по направлениям подготовки 09.03.02, 09.04.02 «Информационные системы и технологии», 27.04.03 «Системный анализ и управление» и специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем» очной, очно-заочной и заочной форм обучения.

УДК 62(075.8)
ББК з965я73

ISBN 978-5-8265-2139-7 (общ.)
ISBN 978-5-8265-2521-0 (ч. 2)

ВВЕДЕНИЕ

Во второй части учебного пособия представлен материал, который ориентирован на изучение вопросов, связанных с понятиями и определениями нечёткой и лингвистической переменных, а также нечёткими высказываниями.

Среди вопросов, связанных с основными понятиями и определениями нечёткой и лингвистической переменных, рассматриваются понятия: нечёткой переменной; лингвистической переменной; нечёткого числа; операций над нечёткими числами; нечётких чисел и интервалов (L-R)-типа; операций над треугольными нечёткими числами и трапециевидными интервалами (L-R)-типа; (L-R)-представлений термов лингвистических переменных.

В материале по нечётким высказываниям рассматриваются:

– высказывания на множествах значений лингвистических переменных в случаях одной и двух лингвистических переменных;

– правила преобразований нечётких высказываний;

– способы задания нечёткой импликации;

– логико-лингвистическое описание систем;

– пример модели нечёткого управления;

– вопросы полноты и непротиворечивости правил нечёткого управления.

Новизна данного учебного пособия, в сравнении с ранее изданной литературой по основам интеллектуальных автоматизированных систем [1 – 14], заключается в рассмотрении примеров практически к каждому даваемому понятию и определению.

Применение данного пособия будет способствовать формированию у обучающихся следующих компетенций по направлениям подготовки и специальностям.

По направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»: способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности (ОПК-1).

По направлению подготовки 09.04.02 «Информационные системы и технологии»: способен разрабатывать оригинальные алгоритмы и программные средства, в том числе с использованием современных интеллектуальных технологий, для решения профессиональных задач (ОПК-2); способен использовать методы и средства системной инженерии в области получения, передачи, хранения, переработки и представления информации посредством информационных технологий (ОПК-6).

По направлению 27.04.03 «Системный анализ и управление»: способен применять методы математического, функционального и системного анализа для решения задач моделирования, исследования и синтеза автоматического управления техническими объектами (ОПК-6).

По специальности 10.05.03 «Информационная безопасность автоматизированных систем»: способен использовать математические методы, необходимые для решения задач профессиональной деятельности (ОПК-3); способен обеспечить эффективное применение информационно-технологических ресурсов автоматизированной системы с учётом требований информационной безопасности (ПК-6).

3. НЕЧЁТКАЯ И ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННЫЕ

3.1. ПОНЯТИЯ НЕЧЁТКОЙ И ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННЫХ

Понятия нечёткой и лингвистической переменных используются при описании объектов и явлений с помощью нечётких множеств.

3.1.1. НЕЧЁТКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ

Нечёткой переменной (НП) называется совокупность параметров α, X и A:

$$\text{НП} = \langle \alpha, X, A \rangle, \tag{3.1}$$

где α – имя нечёткой переменной; X – универсальное множество, на котором задано множество A; A – нечёткое множество, определяющее значения нечёткой переменной с именем α.

Например, НП является переменная с именем α = «Высокий рост человека», значением которой может быть нечёткое множество A = {(150; 0), (160; 0,1), (170; 0,2), (180; 0,5), (190; 0,7), (200; 0,9), (210; 1)}, заданное на множестве $X = \{x \mid x = 10i,\ i \in N\}$ натуральных чисел, кратных десяти.

НП также является, например, переменная с именем α = «Нормальная температура воздуха в помещении», значением которой может быть нечёткое множество A, заданное функцией принадлежности на множестве $X = R$ действительных чисел.

График функции принадлежности нечёткого множества A, представляющего значение нечёткой переменной с именем α = «Нормальная температура воздуха в помещении», может быть получен в пакете MatLab, например, с помощью программы, приведённой на листинге 3.1.

Листинг 3.1. Программа построения графика функции принадлежности нечёткого множества A, являющегося значением нечёткой переменной с именем α = «Нормальная температура воздуха в помещении»:

```
x = 10:1:35;
y = trapmf (x, [15 20 25 30]);
plot(x,y);
grid;
xlabel('Нормальная температура воздуха в помещении');
```

Рис. 3.1. Результат работы программы

Результат работы программы приведен на рис. 3.1. При этом ордината какой-либо точки графика обозначает значение принадлежности соответствующей абсциссы (температуры) нечёткому множеству *A*.

Заметим, что в дальнейшем будем отождествлять нечёткую переменную с её именем. Например, НП с именем α = «Высокий рост человека», будем называть нечёткой переменной «Высокий рост человека», а НП с именем α = «Нормальная температура воздуха в помещении» – нечёткой переменной «Нормальная температура воздуха в помещении».

3.1.2. ЛИНГВИСТИЧЕСКАЯ ПЕРЕМЕННАЯ

Лингвистической переменной (ЛП) называется совокупность параметров β, *T*, *X*, *G* и *M*:

$$\text{ЛП} = \langle \beta, T, X, G, M \rangle, \tag{3.2}$$

где β – имя лингвистической переменной; *T* – множество значений (термов) лингвистической переменной (так называемое терм-множество), состоящее из нечётких переменных; *X* – универсальное множество, на котором заданы нечёткие переменные; *G* – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами терм-множества с целью генерации новых термов (нечётких переменных); M – семантическая процедура, определяющая значения исходных термов из терм-множества и термов, сгенерированных синтаксической процедурой G.

Применение синтаксической процедуры G к терм-множеству T обозначим через $G(T)$. Тогда $G(T)$ представляет собой множество сгенерированных термов, а объединение исходного терм-множества с множеством сгенерированных термов $T \cup G(T)$ – расширенное терм-множество ЛП.

Заметим, что во избежание большого количества символов символ β можно использовать как для названия самой переменной, так и для её значений. Например, лингвистическую переменную с именем β = «Возраст» будем называть лингвистической переменной «Возраст», а лингвистическую переменную с именем β = «Толщина изделия» – лингвистической переменной «Толщина изделия».

Кроме того, можно пользоваться одним и тем же символом для обозначения нечёткого множества и его названия. Например, терм T = «Молодой», являющийся значением лингвистической переменной β = «Возраст», одновременно есть и нечёткое множество A = «Молодой».

Присвоение различным символам одних и тех же значений предполагает, что контекст позволяет разрешить возможные неопределённости при использовании этих символов и значений.

3.1.3. ПРИМЕР ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Пусть, например, некоторый эксперт определяет толщину выпускаемого изделия с помощью величин «Малая толщина», «Средняя толщина» и «Большая толщина». При этом минимальная толщина изделия равна 10 мм, а максимальная – 80 мм.

Формализация такого описания может быть выполнена с помощью лингвистической переменной $\langle \beta, T, X, G, M \rangle$, где β – «Толщина изделия»; T – {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»}; X – [10, 80]; G – процедура образования новых термов с помощью логических связок «и», «или», частицы «не», модификаторов «очень», «слегка» и т.п. Например, «Средняя и большая толщина», «Малая или средняя толщина», «Небольшая толщина», «Очень малая толщина», «Слегка большая толщина» и т.д.; M – процедура задания на X = [10, 80] нечётких множеств (термов) A_1 = «Малая толщина»,

A_2 = «Средняя толщина», A_3 = «Большая толщина», а также нечётких множеств для новых термов из $G(T)$ в соответствии с правилами трансляции нечётких связок «и», «или», частицы «не», модификаторов «очень», «слегка» с использованием операций над нечёткими множествами: пересечения $A \cap B$, объединения $A \cup B$, дополнения $\overline{A}$, концентрации $\mathrm{CON}\, A = A^2$, растяжения $\mathrm{DIL}\, A = A^{0,5}$ и т.п.

Пусть рассмотренные выше базовые значения A_1 = «Малая толщина», A_2 = «Средняя толщина», A_3 = «Большая толщина» лингвистической переменной «Толщина изделия» зависят от области определения X. Упомянутые зависимости могут быть получены в пакете MatLab с помощью программы, приведённой на листинге 3.2.

Листинг 3.2. Программа построения графиков функций принадлежности нечётких множеств A_1 = «Малая толщина», A_2 = «Средняя толщина» и A_3 = «Большая толщина», являющихся значениями лингвистической переменной «Толщина изделия»:

```
x = 0:1:90;
y1 = trapmf (x, [10 10 20 40]);
y2 = trimf (x, [25 45 65]);
y3 = trapmf (x, [50 70 80 80]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'b');
hold off;
grid;
xlabel(' A1 = "Малая толщина", A2 = "Средняя толщина", A3 = "Большая толщина" ');
```

Результат работы программы приведён на рис. 3.2.

Тогда нечёткие множества для новых термов из $G(T)$ A_4 = «Средняя и большая толщина», A_5 = «Малая или средняя толщина», A_6 = «Не большая толщина», A_7 = «Очень малая толщина», A_8 = «Слегка большая толщина» могут быть получены в соответствии с правилами трансляции нечётких связок «и», «или», частицы «не», модификаторов «очень» и «слегка». Эти множества мож-

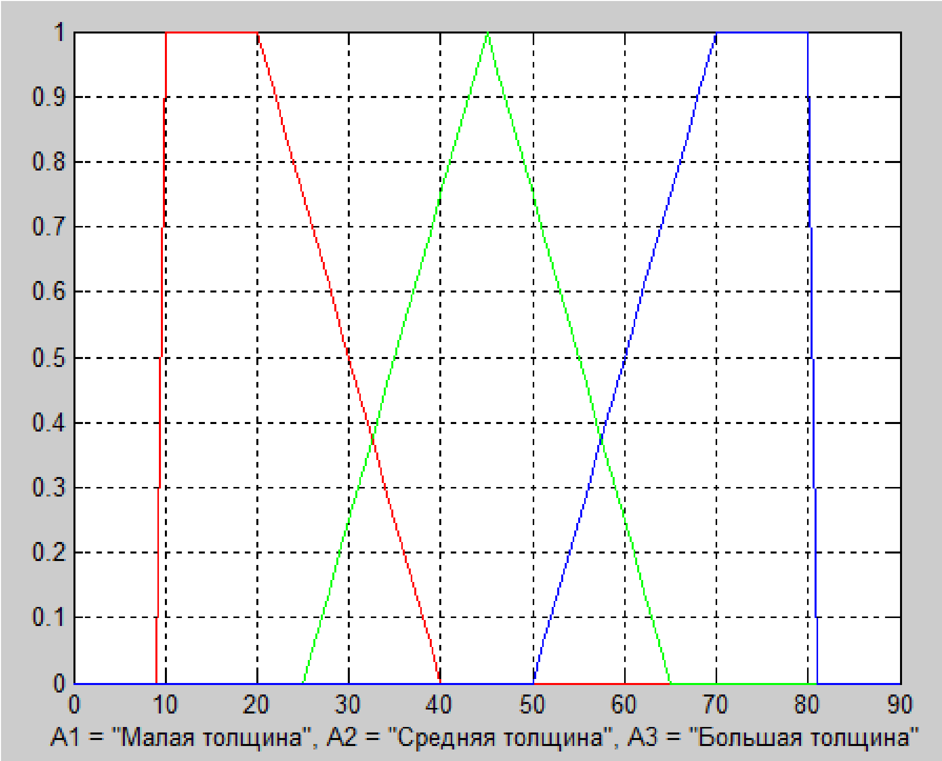

Рис. 3.2. Результат работы программы

но представить с использованием операций над нечёткими множествами: пересечения $A_2 \cap A_3$, объединения $A_1 \cup B_2$, дополнения $\overline{A}_3$, концентрации $\mathrm{CON}\,A = A^2$ и растяжения $\mathrm{DIL}\,A = A^{0,5}$.

Новый терм A_4 = «Средняя и большая толщина», образованный из элементов A_2 = «Средняя толщина» и A_3 = «Большая толщина» терм-множества T = {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»} по синтаксической процедуре G с помощью логической связки «и», в результате выполнения семантической процедуры M получит значение нечёткого множества $A_2 \cap A_3$. График функции принадлежности данного нечёткого множества могут быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой на листинге 3.3.

Листинг 3.3. График функции принадлежности нечёткого множества A_4 = «Средняя и большая толщина» приведён на рис. 3.3 и изображён чёрным цветом. Программа построения графика функции принадлежности нечёткого множества A_4 = «Средняя и большая толщина», являющегося значением лингвистической переменной «Толщина изделия»:

```
x = 0:1:90;
y1 = trapmf (x, [10 10 20 40]);
```

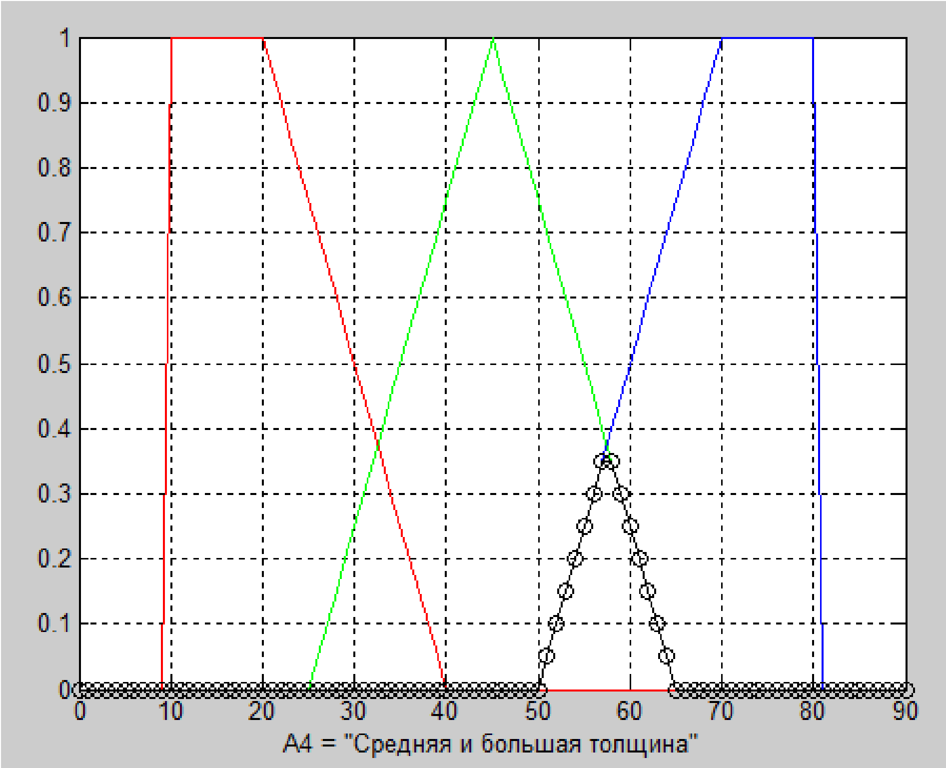

Рис. 3.3. График функции принадлежности нечёткого множества A_4 = «Средняя и большая толщина»

```
y2 = trimf (x, [25 45 65]);
y3 = trapmf (x, [50 70 80 80]);
y4=min(y2, y3);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'b');
hold on;
plot(x, y4, 'ko-');
hold off;
grid;
xlabel(' A4 = "Средняя и большая толщина" ');
```

Новый терм A_5 = «Малая или средняя толщина», образованный из элементов A_1 = «Малая толщина» и A_2 = «Средняя толщина» терм-множества T = {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»} по синтаксической процедуре G с помощью логической связки «или», в результате выполнения семантической процедуры M получит значение нечёткого множества $A_1 \cup A_2$. График функции принадлежности данного нечёткого множества могут быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой на листинге 3.4.

Листинг 3.4. График функции принадлежности нечёткого множества A_5 = = «Малая или средняя толщина» приведён на рис. 3.4 и изображён чёрным цветом. Программа построения графика функции принадлежности нечёткого множества A_5 = «Малая или средняя толщина», являющегося значением лингвистической переменной «Толщина изделия»:

```
x = 0:1:90;
y1 = trapmf (x, [10 10 20 40]);
y2 = trimf (x, [25 45 65]);
y3 = trapmf (x, [50 70 80 80]);
y5=max(y1, y2);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'b');
hold on;
```

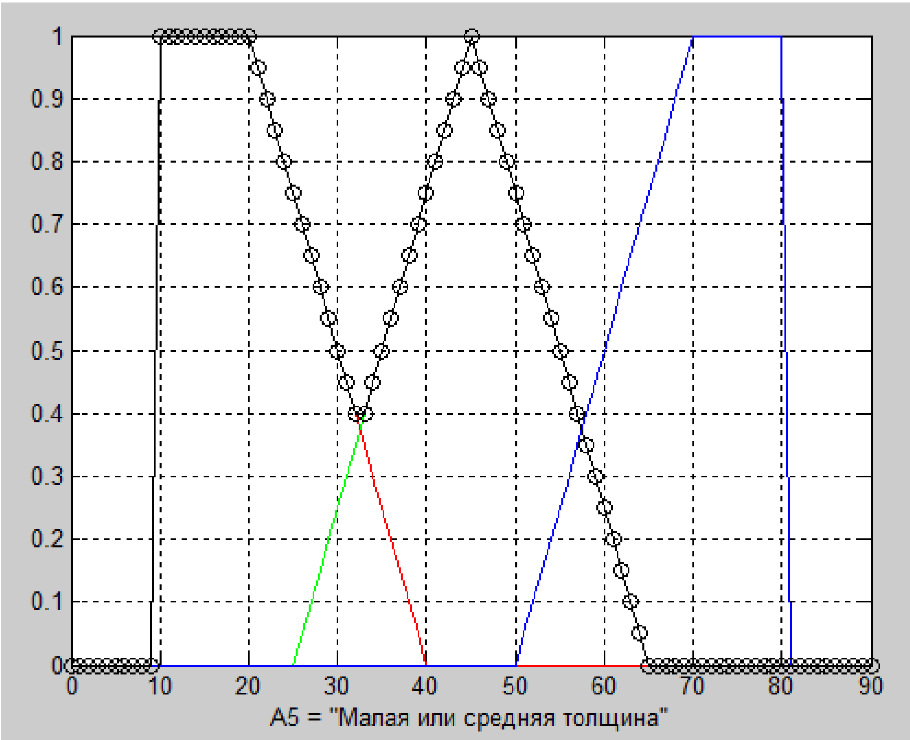

Рис. 3.4. График функции принадлежности нечёткого множества A_5 = «Малая или средняя толщина»

```
plot(x, y5, 'ko-');
hold off;
grid;
xlabel(' A5 = "Малая или средняя толщина" ');
```

Новый терм A_6 = «Небольшая толщина», образованный из элемента A_3 = «Большая толщина» терм-множества T = {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»} по синтаксической процедуре G с помощью частицы «не», в результате выполнения семантической процедуры M получит значение нечёткого множества $\overline{A}_3$. График функции принадлежности данного нечёткого множества могут быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой на листинге 3.5.

Листинг 3.5. График функции принадлежности нечёткого множества A_6 = = «Небольшая толщина» приведён на рис. 3.5 и изображён чёрным цветом. Программа построения графика функции принадлежности нечёткого множества A_6 = «Небольшая толщина», являющегося значением лингвистической переменной «Толщина изделия»:

```
x = 0:1:90;
y1 = trapmf (x, [10 10 20 40]);
y2 = trimf (x, [25 45 65]);
y3 = trapmf (x, [50 70 80 80]);
y6=1 - y3;
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'b');
hold on;
plot(x, y6, 'ko-');
hold off;
grid;
xlabel(' A6 = "Не большая толщина" ');
```

Новый терм A_7 = «Очень малая толщина», образованный из элемента A_1 = «Малая толщина» терм-множества T = {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»} по синтаксической процедуре G с помощью концентра-

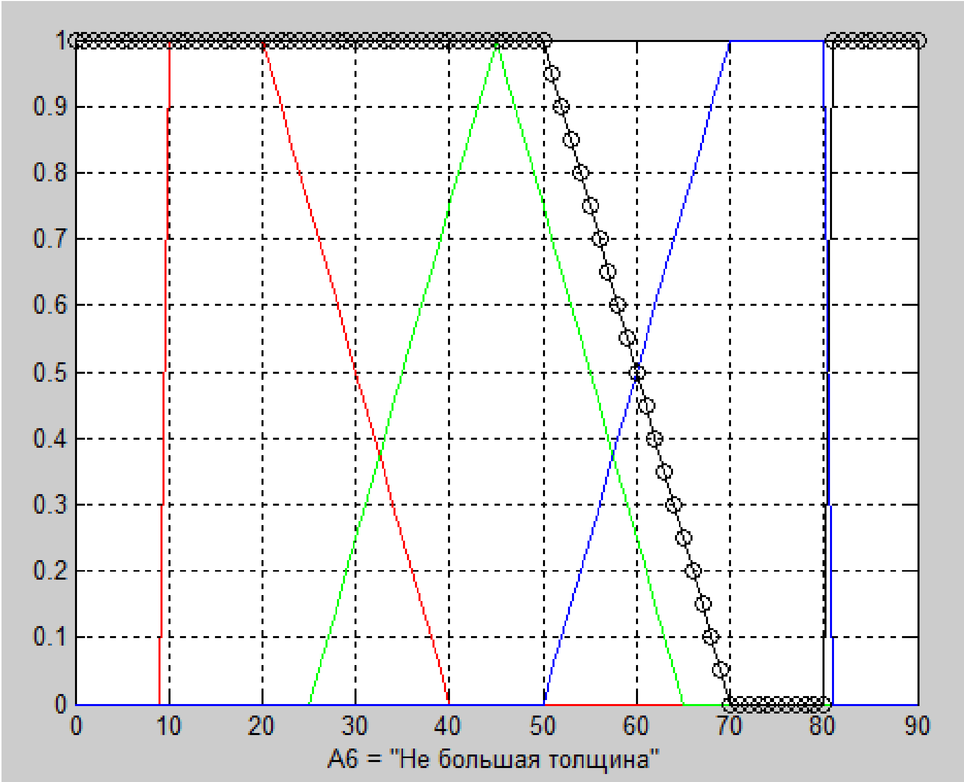

Рис. 3.5. График функции принадлежности нечёткого множества *A*$_7$ = «Очень малая толщина»

ции, в результате выполнения семантической процедуры *M* получит значение нечёткого множества $\mathrm{CON} A_1 = A_1^2$. График функции принадлежности данного нечёткого множества могут быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.6.

Листинг 3.6. График функции принадлежности нечёткого множества A_7 = = «Очень малая толщина» приведён на рис. 3.6 и изображён чёрным цветом. Программа построения графика функции принадлежности нечёткого множества A_7 = «Очень малая толщина», являющегося значением лингвистической переменной «Толщина изделия»:

```
x = 0:1:90;
y1 = trapmf (x, [10 10 20 40]);
y2 = trimf (x, [25 45 65]);
y3 = trapmf (x, [50 70 80 80]);
y7 = prod([y1; y1]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
```

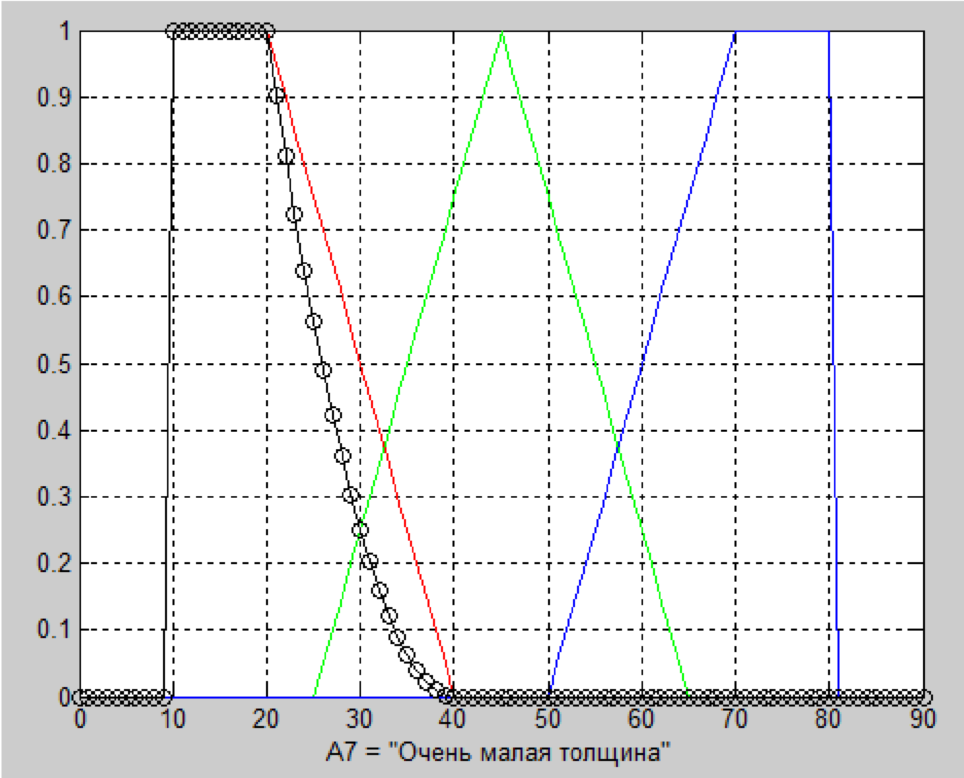

Рис. 3.6. График функции принадлежности нечёткого множества A_7 = «Очень малая толщина»

```
hold on;
plot(x, y3, 'b');
hold on;
plot(x, y7, 'ko-');
hold off;
grid;
xlabel(' A7 = "Очень малая толщина" ');
```

Новый терм A_8 = «Слегка большая толщина», образованный из элемента A_3 = «Большая толщина» терм-множества T = {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»} по синтаксической процедуре G с помощью растяжения, в результате выполнения семантической процедуры M получит значение нечёткого множества $\mathrm{DIL}\,A_3 = A_3^{0,5}$. График функции принадлежности данного нечёткого множества могут быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.7.

Листинг 3.7. График функции принадлежности нечёткого множества A_8 = = «Слегка большая толщина» приведён на рис. 3.7 и изображён чёрным цветом. Программа построения графика функции принадлежности нечёткого множества

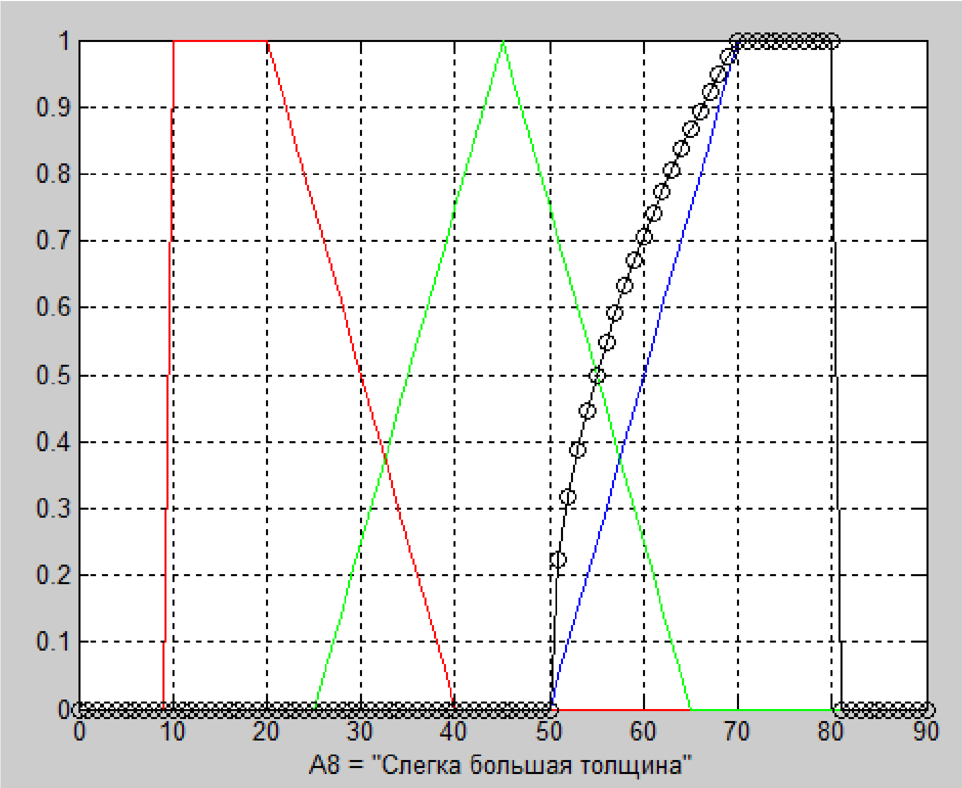

Рис. 3.7. График функции принадлежности нечёткого множества
A_8 = «Слегка большая толщина»

A_8 = «Слегка большая толщина», являющегося значением лингвистической переменной «Толщина изделия»

```
x = 0:1:90;
y1 = trapmf (x, [10 10 20 40]);
y2 = trimf (x, [25 45 65]);
y3 = trapmf (x, [50 70 80 80]);
y8 = sqrt(y3);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'b');
hold on;
plot(x, y8, 'ko-');
hold off;
grid;
xlabel(' A8 = "Слегка большая толщина" ');
```

3.2. ПОНЯТИЕ НЕЧЁТКОГО ЧИСЛА

Нечёткое число – это нечёткая переменная, определённая на числовой оси, т.е. нечёткое число определяется как нечёткое множество A на множестве действительных чисел R с функцией принадлежности $\mu_A(x) \in [0, 1]$, где x – действительное число. Например, нечёткими числами являются нечёткие множества A_1, …, A_8 (см. рис. 3.2 – 3.7).

Нечёткое число A называется *нормальным*, если его высота $\sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)$ равна 1. Например, нормальными нечёткими числами являются нечёткие числа A_1, A_2, A_3 и A_5, …, A_8 (см. рис. 3.2 и 3.4 – 3.7).

Нечёткое число A называется *выпуклым*, если для любых x, y и z таких, что $x \geq y \geq z$, выполняется условие:

$$\mu_A(y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(z). \qquad (3.3)$$

Другими словами, при отклонении от своего максимума влево или вправо функция принадлежности не возрастает. Например, выпуклыми нечёткими числами являются нечёткие числа A_1, …, A_4 и A_7, A_8 (см. рис. 3.2, 3.3 и 3.6, 3.7).

Множество α-*уровня* нечёткого числа A определяется как:

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}. \qquad (3.4)$$

Например, множеством α-уровня нечёткого числа A_1 при α = 0,5 является отрезок [10, 30] (см. рис. 3.2).

Множество S_A $(S_A \subset R)$ называется *носителем* нечёткого числа A, если оно определено как:

$$S_A = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}. \qquad (3.5)$$

Например, носителем нечёткого числа A_3 является отрезок [50, 80] (см. рис. 3.2).

Нечёткое число A является *унимодальным*, если условие $\mu_A(x) = \sup\limits_{x \in X} \mu_A(x)$ выполняется только для одной абсциссы на действительной оси. Например, унимодальными нечёткими числами являются нечёткие числа A_2 и A_4 (см. рис. 3.2 и 3.3).

Выпуклое нечёткое множество A называется *нечётким нулём*, если выполняется условие

$$\mu_A(0) = \sup_{x \in R}(\mu_A(x)) \,. \tag{3.6}$$

Например, график функции принадлежности нечёткого множества, представляющего нечёткий нуль, может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой на листинге 3.8.

Листинг 3.8. График функции принадлежности нечёткого множества A_9 = «Нечёткий нуль» приведён на рис. 3.8. Программа построения графика функции принадлежности нечёткого множества A_9 = «Нечёткий нуль»:

```
x = -5:0.1:5;
y9 = trimf (x, [-3 0 3]);
plot(x, y9);
grid;
xlabel(' A9 = "Нечёткий нуль" ');
```

Нечёткое число является *положительным*, если любой элемент его носителя больше нуля:

$$\forall x \in S_A \quad x > 0 \tag{3.7}$$

и *отрицательным*, если любой элемент его носителя меньше нуля:

$$\forall x \in S_A \quad x < 0 \,. \tag{3.8}$$

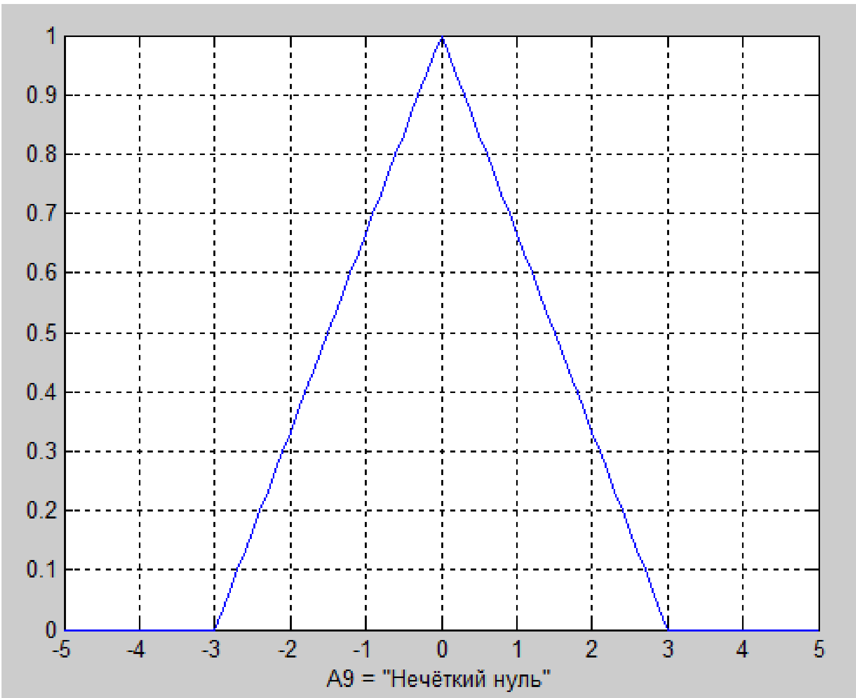

Рис. 3.8. График функции принадлежности нечёткого множества A_9 = «Нечёткий нуль»

Например, графики функций принадлежности нечётких множеств, представляющих отрицательное нечёткое число и положительное нечёткое число, могут быть получены в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.9.

Листинг 3.9. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{10} = = «Отрицательное нечёткое число» и A_{11} = «Положительное нечёткое число» приведены на рис. 3.9 и изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков функций принадлежности нечётких множеств A_{10} = «Отрицательное нечёткое число» и A_{11} = «Положительное нечёткое число»:

```
x = -10:0.1:10;
y10 = trimf (x, [-8 -5 -2]);
y11 = trimf (x, [2 5 8]);
plot(x, y10, 'r');
hold on;
plot(x, y11, 'g');
hold off;
grid;
xlabel(' A10 = " Отрицательное нечёткое число " A11 = " Положительное нечёткое число " ');
```

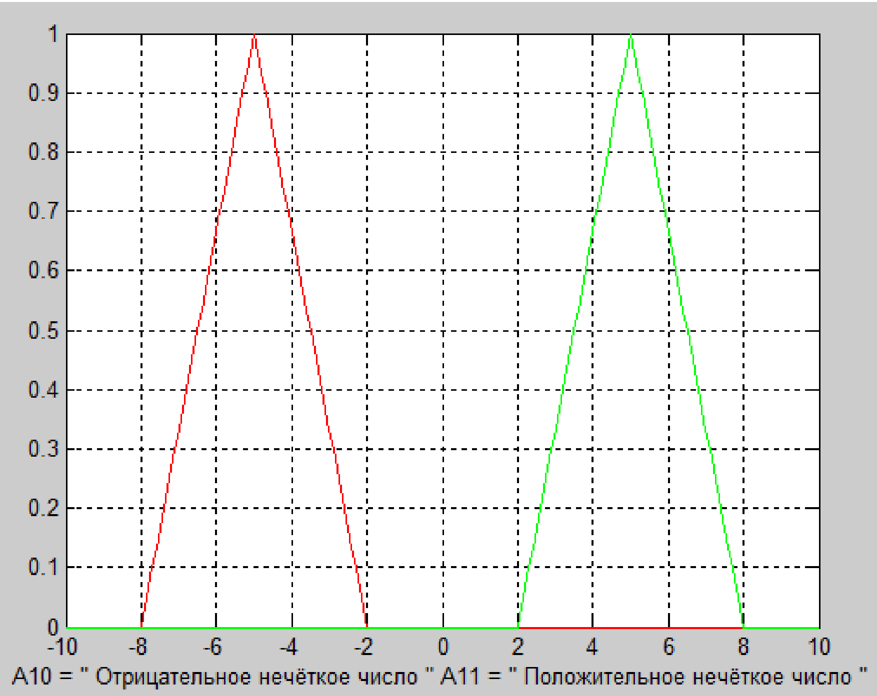

Рис. 3.9. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{10} = «Отрицательное нечёткое число» и A_{11} = «Положительное нечёткое число»

3.3. ОПЕРАЦИИ НАД НЕЧЁТКИМИ ЧИСЛАМИ

Пусть A, B и C являются некоторыми нечёткими числами, а через символ '$\tilde{*}$' обозначена нечёткая операция, соответствующая произвольной обычной операции '$*$' над чёткими числами. Тогда, согласно принципу обобщения, для любых чисел $x, y, z \in R$ справедливо взаимно однозначное соответствие:

$$C = A \tilde{*} B \Leftrightarrow \sup_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)). \tag{3.9}$$

Расширенные (согласно принципу обобщения) бинарные арифметические операции для нечётких чисел определяются через соответствующие операции для чётких чисел следующим образом:

$$C = A \tilde{+} B \Leftrightarrow \sup_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)); \tag{3.10}$$

$$C = A \tilde{-} B \Leftrightarrow \sup_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)); \tag{3.11}$$

$$C = A \tilde{\cdot} B \Leftrightarrow \sup_{z=x \cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)); \tag{3.12}$$

$$C = A \tilde{\div} B \Leftrightarrow \sup_{z=x \div y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)). \tag{3.13}$$

3.3.1. СУММА НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего сумму (3.10), например, для нечётких чисел A_{12} = «Нечёткое число 5» и A_{13} = = «Нечёткое число 10» может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой на листинге 3.10.

Листинг 3.10. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{12} = «Нечёткое число 5», A_{13} = «Нечёткое число 10» и A_{14} = «Сумма нечётких чисел 5 и 10» приведены на рис. 3.10 и изображены соответственно красным, зелёным и синим цветами. Программа построения графиков функций принадлежности нечётких множеств A_{12} = «Нечёткое число 5», A_{13} = «Нечёткое число 10» и A_{14} = «Сумма нечётких чисел 5 и 10»:

```
x = 0:0.1:25;
y1 = trimf (x, [2 5 8]);
```

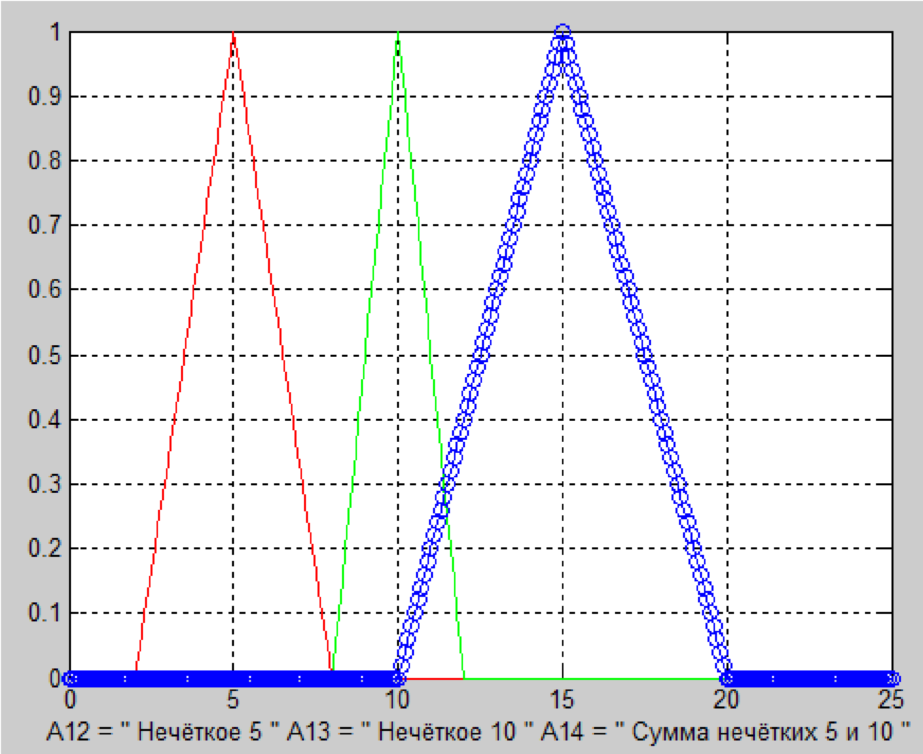

Рис. 3.10. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{12} = «Нечёткое число 5», A_{13} = «Нечёткое число 10» и A_{14} = «Сумма нечётких чисел 5 и 10»

```
y2 = trimf (x, [8 10 12]);
y3 = fuzarith (x, y1, y2, 'sum');
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' A12 = " Нечёткое 5 " A13 = " Нечёткое 10 " A14 = " Сумма нечёт-
ких 5 и 10 " ');
```

3.3.2. РАЗНОСТЬ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

График функции принадлежности нечёткого множества, представляюще-го разность (3.11), например, для нечётких чисел A_{12} = «Нечёткое число 5» и A_{13} = «Нечёткое число 10» может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой на листинге 3.11.

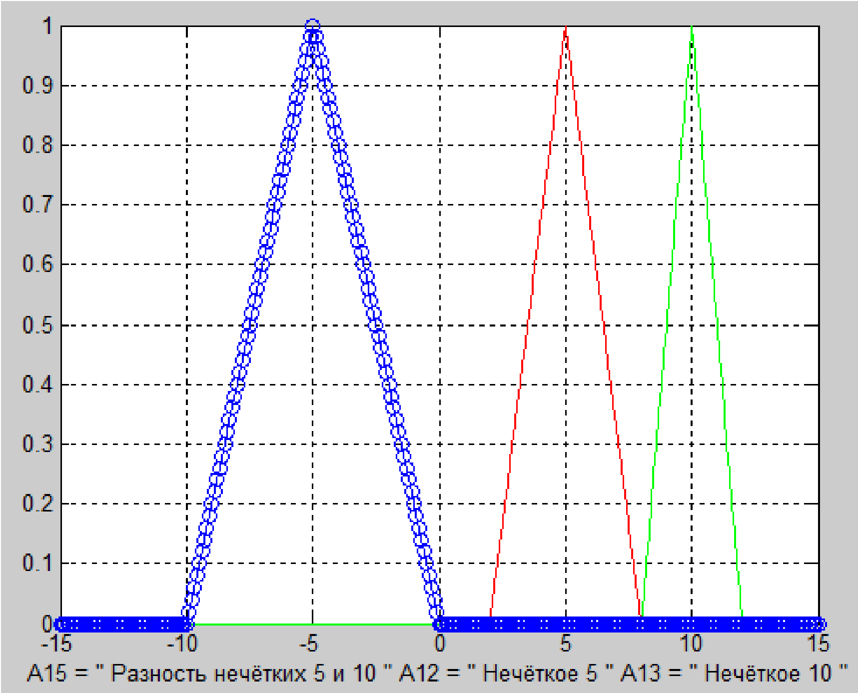

Рис. 3.11. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{12} = «Нечёткое число 5», A_{13} = «Нечёткое число 10» и A_{15} = «Разность нечётких чисел 5 и 10»

Листинг 3.11. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{12} = «Нечёткое число 5», A_{13} = «Нечёткое число 10» и A_{15} = «Разность нечётких чисел 5 и 10» приведены на рис. 3.11 и изображены соответственно красным, зелёным и синим цветами. Программа построения графиков функций принадлежности нечётких множеств A_{12} = «Нечёткое число 5», A_{13} = «Нечёткое число 10» и A_{15} = «Разность нечётких чисел 5 и 10»

```
x = -15:0.1:15;
y1 = trimf (x, [2 5 8]);
y2 = trimf (x, [8 10 12]);
y3 = fuzarith (x, y1, y2, 'sub');
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' A15 = " Разность нечётких 5 и 10 " A12 = " Нечёткое 5 " A13 = " Нечёткое 10 " ');
```

3.3.3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего произведение (3.12), например, для нечётких чисел A_{16} = «Нечёткое число 2» и A_{17} = «Нечёткое число 3» может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.12.

Листинг 3.12. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{16} = «Нечёткое число 2», A_{17} = «Нечёткое число 3» и A_{18} = «Произведение нечётких чисел 2 и 3» приведены на рис. 3.12 и изображены соответственно красным, зелёным и синим цветами. Программа построения графиков функций принадлежности нечётких множеств A_{16} = «Нечёткое число 2», A_{17} = «Нечёткое число 3» и A_{18} = «Произведение нечётких чисел 2 и 3»:

```
x = 0:0.1:25;
y1 = trimf (x, [0 2 4]);
y2 = trimf (x, [0 3 6]);
y3 = fuzarith (x, y1, y2, 'prod');
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
```

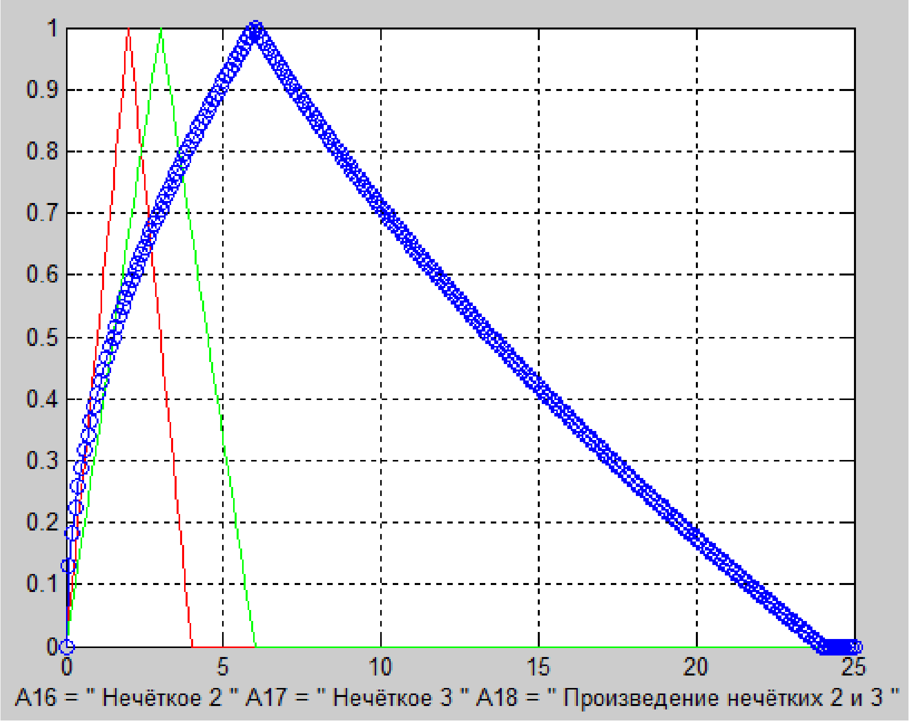

Рис. 3.12. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{16} = «Нечёткое число 2», A_{17} = «Нечёткое число 3» и A_{18} = «Произведение нечётких чисел 2 и 3»

```
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' A16 = " Нечёткое 2 " A17 = " Нечёткое 3 " A18 = " Произведение нечётких 2 и 3 " ');
```

3.3.4. ЧАСТНОЕ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего частное (3.13), например, для нечётких чисел A_{19} = «Нечёткое число 15» и A_{20} = «Нечёткое число 3» может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.13.

Листинг 3.13. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{19} = «Нечёткое число 15», A_{20} = «Нечёткое число 3» и A_{21} = «Частное нечётких чисел 15 и 3» приведены на рис. 3.13 и изображены соответственно красным, зелёным и синим цветами. Программа построения графиков функций принадлежности нечётких множеств A_{19} = «Нечёткое число 15», A_{20} = «Нечёткое число 3» и A_{21} = «Частное нечётких чисел 15 и 3»:

```
x = 0:0.1:25;
y1 = trimf (x, [10 15 20]);
```

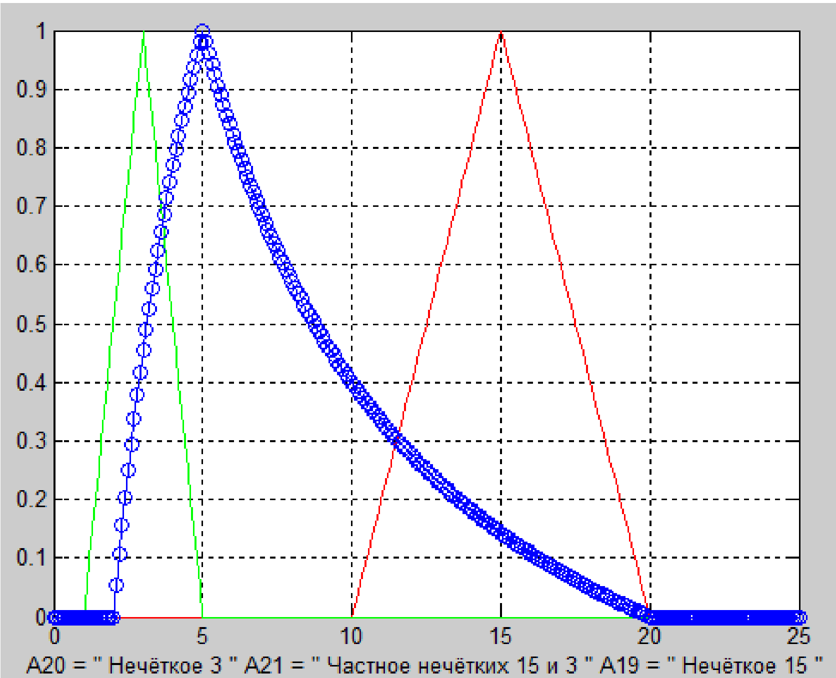

Рис. 3.13. Графики функций принадлежности нечётких множеств A_{19} = «Нечёткое число 15», A_{20} = «Нечёткое число 3» и A_{21} = «Частное нечётких чисел 15 и 3»

```
y2 = trimf (x, [1 3 5]);
y3 = fuzarith (x, y1, y2, 'div');
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' A20 = " Нечёткое 3 " A21 = " Частное нечётких 15 и 3 " A19 = " Нечёткое 15 " ');
```

3.4. ПОНЯТИЕ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ И ИНТЕРВАЛОВ (*L*-*R*)-ТИПА

3.4.1. НЕЧЁТКИЕ ЧИСЛА (*L*-*R*)-ТИПА

Нечёткие числа (*L*-*R*)-*типа* – это задаваемые по определённым правилам нечёткие числа специального вида, обеспечивающего снижение объёма вычислений при операциях над ними.

Функции принадлежности нечётких чисел (*L*-*R*)-типа задаются с помощью не возрастающих на множестве неотрицательных действительных чисел функций действительного переменного $L(x)$ и $R(x)$, удовлетворяющих свойствам чётности и нормирования:

$$L(-x) = L(x),\ R(-x) = R(x); \tag{3.14}$$

$$L(0) = R(0). \tag{3.15}$$

Примерами функций $L(x)$ и $R(x)$ могут служить функции:

$$L(x) = e^{-|x|^p},\ \ p \geq 0; \tag{3.16}$$

$$R(x) = \frac{1}{1+|x|^p},\ \ p \geq 0. \tag{3.17}$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего функцию вида (3.16), например, при параметре $p = 1$ может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.14.

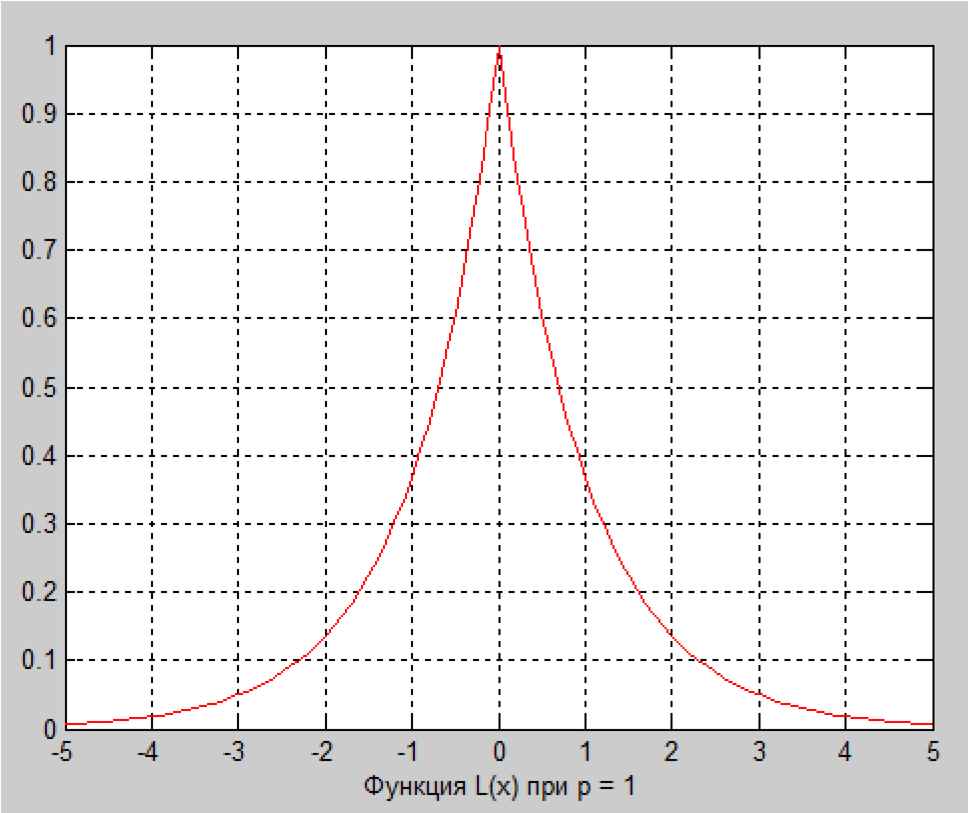

Рис. 3.14. График функции действительного переменного *L*(*x*)

Листинг 3.14. График функции действительного переменного $L(x)$, вычисленной по формуле (3.16) при $p = 1$, изображён на рис. 3.14. Программа построения графика функции (3.16) при $p = 1$:

```
x = -5:0.1:5;
p=1;
y = exp(-abs(x)*p);
plot(x, y, 'r');
grid;
xlabel(' Функция L(x) при p = 1');
```

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего функцию вида (3.17), например, при параметре $p = 1$ может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.15.

Листинг 3.15. График функции действительного переменного $R(x)$, вычисленной по формуле (3.17) при $p = 1$, изображён на рис. 3.15. Программа построения графика функции (3.17) при $p = 1$

```
x = -5:0.1:5;
p=1;
y = 1 ./ (1 + abs(x).^p);
```

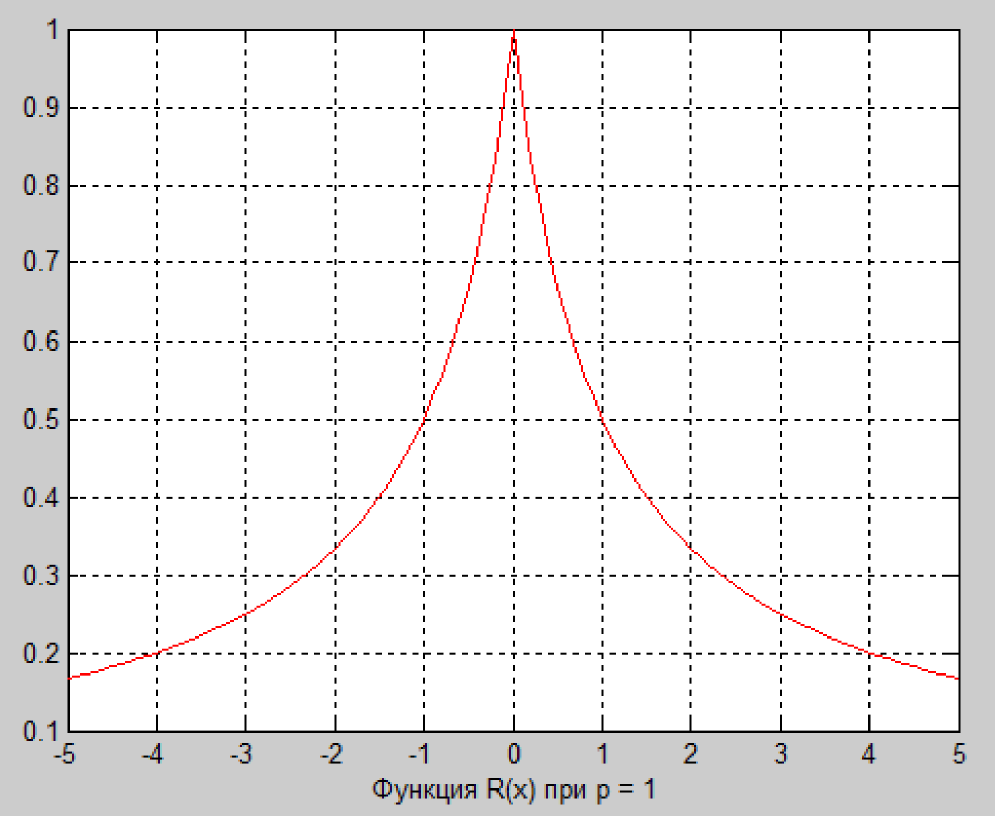

Рис. 3.15. График функции действительного переменного *R*(*x*)

```
plot(x, y, 'r');
grid;
xlabel(' Функция R(x) при p = 1');
```

Пусть $L(x)$ и $R(x)$ являются конкретными функциями (L-R)-типа. Тогда унимодальное нечёткое число A с модой a (функция принадлежности $\mu_A(x)$ только при $x = a$ принимает значение 1) задаётся с помощью функций $L(x)$ и $R(x)$ следующим образом:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}), & \text{если } \ x \le a; \\ R(\frac{x-a}{\beta}), & \text{если } \ x > a, \end{cases} \tag{3.18}$$

где α и β – левый и правый коэффициенты нечёткости, большие нуля.

Следовательно, при заданных функциях $L(x)$ и $R(x)$ унимодальное нечёткое число A может быть задано тройкой его параметров (a, α, β).

В частности, унимодальным нечётким числом (L-R)-типа может служить *треугольное нечёткое число* (ТНЧ) – нормальное нечёткое число, функция принадлежности которого имеет треугольный вид.

Примерами треугольных нечётких чисел являются «Средняя толщина» (см. рис. 3.2), «Нечёткий нуль» (см. рис. 3.8), «Отрицательное нечёткое число» и «Положительное нечёткое число» (см. рис. 3.9), «Нечёткое 5», «Нечёткое 10» и «Сумма нечётких 5 и 10» (см. рис. 3.10), «Разность нечётких 5 и 10» (см. рис. 3.11), «Нечёткое 2» и «Нечёткое 3» (см. рис. 3.12) и «Нечёткое 15» (см. рис. 3.13).

3.4.2. НЕЧЁТКИЕ ИНТЕРВАЛЫ (*L*-*R*)-ТИПА

Не унимодальное нечёткое число называется *толерантным нечётким числом*. Толерантное нечёткое число имеет границы толерантности a и b, на промежутке между которыми всюду функция принадлежности имеет значение, равное 1. Следовательно, толерантное нечёткое число задаётся четвёркой параметров (a, b, α, β).

В частности, толерантным нечётким числом (L-R)-типа является *трапециевидный нечёткий интервал* (ТНИ) – нормальный нечёткий интервал, заданный трапециевидной функцией принадлежности.

Примерами трапециевидных нечётких интервалов являются «Нормальная температура воздуха в помещении» (см. рис. 3.1), «Малая толщина» и «Большая толщина» (см. рис. 3.2).

Заметим, что операции над треугольными нечёткими числами и трапециевидными нечёткими интервалами (L-R)-типа могут помочь в достижении понимания смысла операций над нечёткими числами.

3.5. ОПЕРАЦИИ НАД ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ЧИСЛАМИ (*L*-*R*)-ТИПА

Рассмотрим арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления над треугольными нечёткими числами $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$, а также операцию вычисления обратного к $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ нечёткого числа.

3.5.1. СУММА ТРЕУГОЛЬНЫХ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

Результат выполнения операции сложения треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ обозначим через $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$. Параметры a, α и β этой суммы определяются следующим образом:

$$a = a_1 + a_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2. \qquad (3.19)$$

Например, параметры a, α и β суммы $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ для нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2) определяются с помощью формул (3.19) следующим образом:

$$a = a_1 + a_2 = 3 + 2 = 5, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 + 2 = 3, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 = 2 + 2 = 4.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего сумму треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.16.

Листинг 3.16. На рисунке 3.16 представлен синим цветом график функции принадлежности суммы $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (5, 3, 4) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветом. Программа построения графиков треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2), $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2) и их суммы $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = = (5, 3, 4):

```
x = -1:0.1:9;
y1 = trimf (x, [2 3 5]);
```

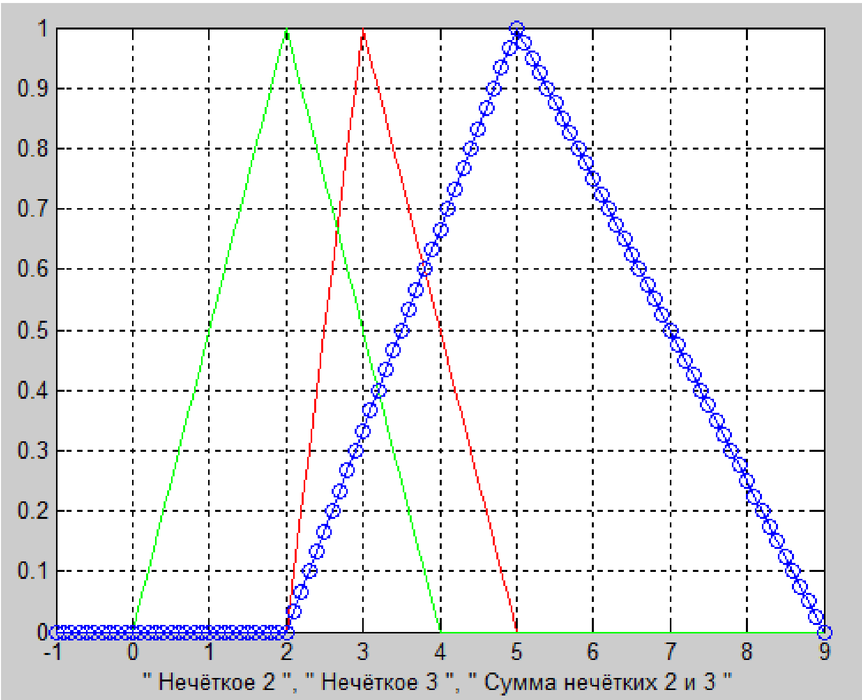

Рис. 3.16. График функции принадлежности суммы $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (5, 3, 4) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2)

```
y2 = trimf (x, [0 2 4]);
y3 = trimf (x, [2 5 9]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Нечёткое 2 ", " Нечёткое 3 ", " Сумма нечётких 2 и 3 " ');
```

3.5.2. РАЗНОСТЬ ТРЕУГОЛЬНЫХ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

Теперь результат выполнения операции вычитания треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ обозначим через $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$. Параметры a, α и β результата выполнения операции вычитания треугольных чисел C_Δ = $= A_\Delta - B_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ определяются следующим образом:

$$a = a_1 - a_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \beta_2, \quad \beta = \beta_1 + \alpha_2. \tag{3.20}$$

Например, параметры a, α и β разности $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ для нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2) определяются с помощью формул (3.20) следующим образом:

$$a = a_1 - a_2 = 3 - 2 = 1, \quad \alpha = \alpha_1 + \beta_2 = 1 + 2 = 3, \quad \beta = \beta_1 + \alpha_2 = 2 + 2 = 4.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего разность треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (2, 2, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.17.

Листинг 3.17. На рисунке 3.17 представлен синим цветом график функции принадлежности разности $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (1, 3, 4) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2), $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2) и их разности $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (–2, 1, 5):

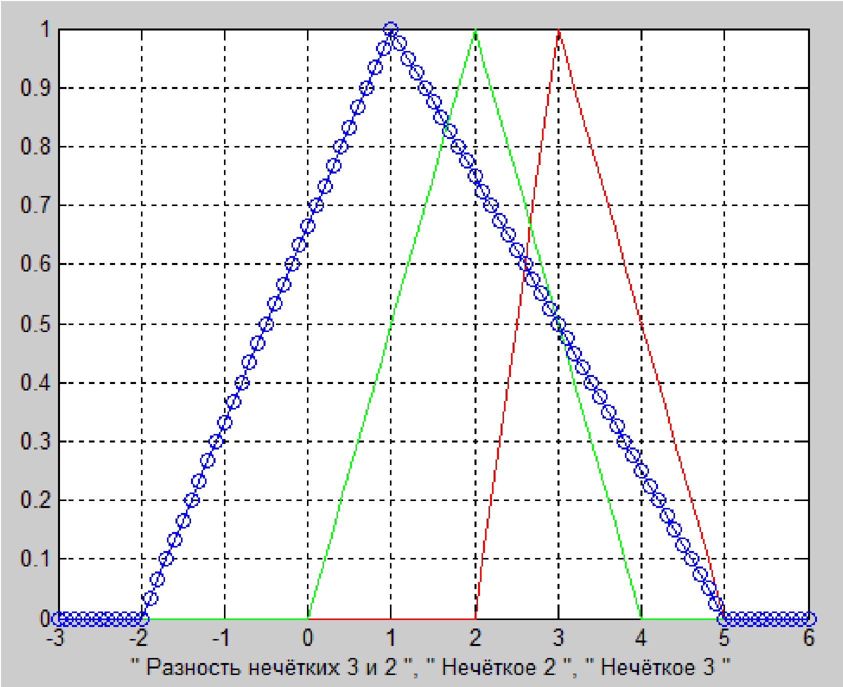

Рис. 3.17. График функции принадлежности разности $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (1, 3, 4) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 1, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2)

```
x = -3:0.1:6;
y1 = trimf (x, [2 3 5]);
y2 = trimf (x, [0 2 4]);
y3 = trimf (x, [-2 1 5]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Разность нечётких 3 и 2 ", " Нечёткое 2 ", " Нечёткое 3 " ');
```

3.5.3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

Для операции умножения треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ различают три характерных случая:

1) случай положительных модальных значений a_1 и a_2;
2) случай отрицательных модальных значений a_1 и a_2;
3) случай модальных значений a_1 и a_2 разного знака.

Рассмотрим каждый из этих характерных случаев.

Теперь результат выполнения операции умножения треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ обозначим через $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$. Параметры a, α и β этого произведения для случая, когда $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \quad \alpha = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1, \quad \beta = a_1\beta_2 + a_2\beta_1. \tag{3.21}$$

Например, параметры a, α и β произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ для нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2) определяются с помощью формул (3.21) следующим образом:

$$a = a_1 a_2 = 2 \cdot 3 = 6, \quad \alpha = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8;$$

$$\beta = a_1\beta_2 + a_2\beta_1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего произведение треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (3, 1, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.18.

Листинг 3.18. На рисунке 3.18 представлен синим цветом график функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (6, 8, 10) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2), $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2) и их произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (6, 8, 10):

```
x = -5:0.1:20;
y1 = trimf (x, [0 2 4]);
y2 = trimf (x, [2 3 5]);
y3 = trimf (x, [-2 6 16]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Нечёткое 2 ", " Нечёткое 3 ", " Произведение нечётких 2 и 3 " ');
```

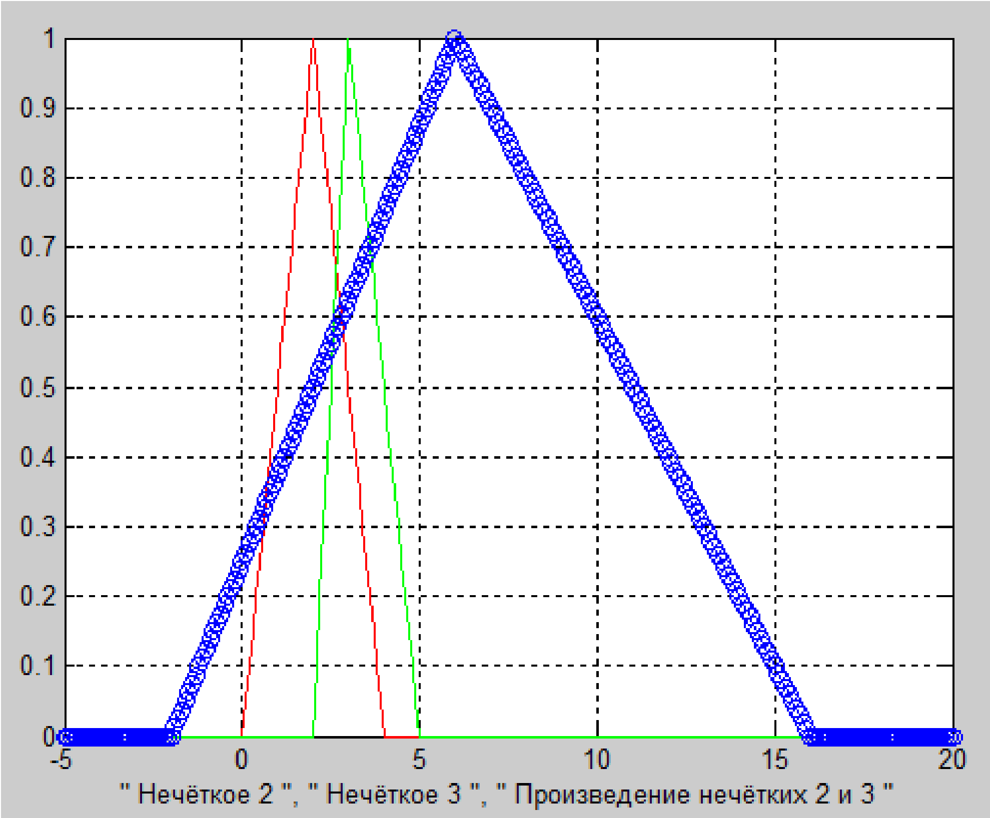

Рис. 3.18. График функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (6, 8, 10) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2)

Параметры a, α и β произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ для случая модальных значений разного знака, т.е. когда $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$ или $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$, определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \quad \alpha = a_2 \alpha_1 - a_1 \beta_2, \quad \beta = a_2 \beta_1 - a_1 \alpha_2. \tag{3.22}$$

Например, параметры a, α и β произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ для нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2), т.е. когда $a_1 > 0$ и $a_2 < 0$, определяются с помощью формул (3.22) следующим образом:

$$a = a_1 a_2 = 2(-3) = -6, \quad \alpha = a_2 \alpha_1 - a_1 \beta_2 = (-3)2 - 2 \cdot 2 = -6 - 4 = -10;$$

$$\beta = a_2 \beta_1 - a_1 \alpha_2 = (-3)2 - 2 \cdot 1 = -6 - 2 = -8.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего произведение треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (–3, 1, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.19.

Листинг 3.19. На рисунке 3.19 представлен синим цветом график функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (–6, –10, –8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно зелёным и красным цветами. Программа построения графиков треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2), $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2) и их произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (–6, –10, –8):

```
x = -14:0.1:4;
y1 = trimf (x, [0 2 4]);
y2 = trimf (x, [-4 -3 -1]);
y3 = trimf (x, [-14 -6 4]);
plot(x, y1, 'g');
hold on;
plot(x, y2, 'r');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Произведение 2 и минус 3 ", " Нечёткое минус 3 ", " Нечёткое 2 " ');
```

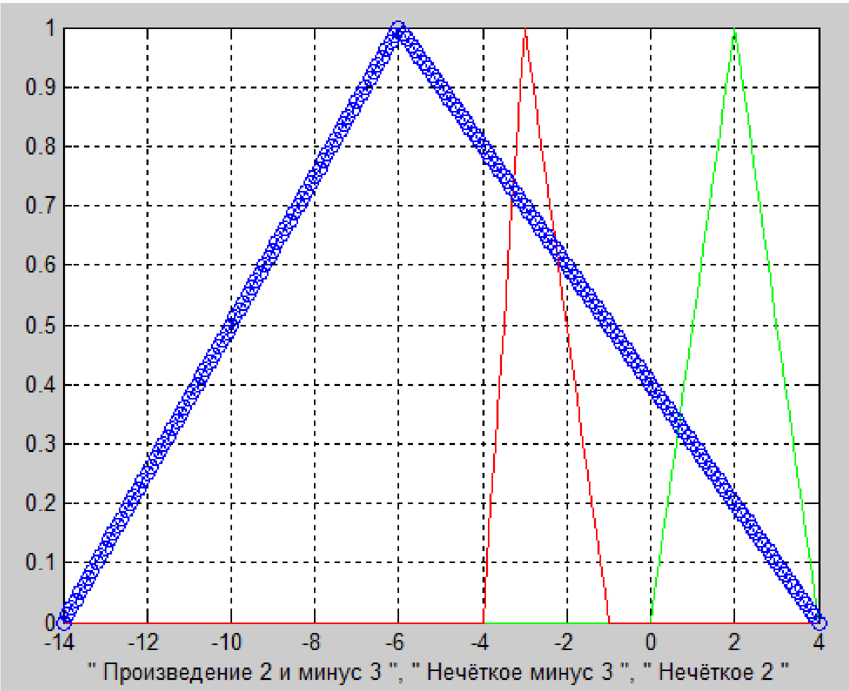

Рис. 3.19. График функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (–6, –10, –8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2)

В другом примере параметры a, α и β произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ для нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2), т.е. когда $a_1 < 0$ и $a_2 > 0$, определяются с помощью формул (3.22) следующим образом:

$$a = a_1 a_2 = (-2)3 = -6, \quad \alpha = a_2\alpha_1 - a_1\beta_2 = 3\cdot 2 - (-2)2 = 6 + 4 = 10;$$

$$\beta = a_2\beta_1 - a_1\alpha_2 = 3\cdot 2 - (-2)1 = 6 + 2 = 8.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего произведение треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (3, 1, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.20.

Листинг 3.20. На рисунке 3.20 представлен синим цветом график функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (–6, 10, 8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2), $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2) и их произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (–6, 10, 8):

```
x = -20:0.1:5;
y1 = trimf (x, [-4 -2 0]);
y2 = trimf (x, [2 3 5]);
```

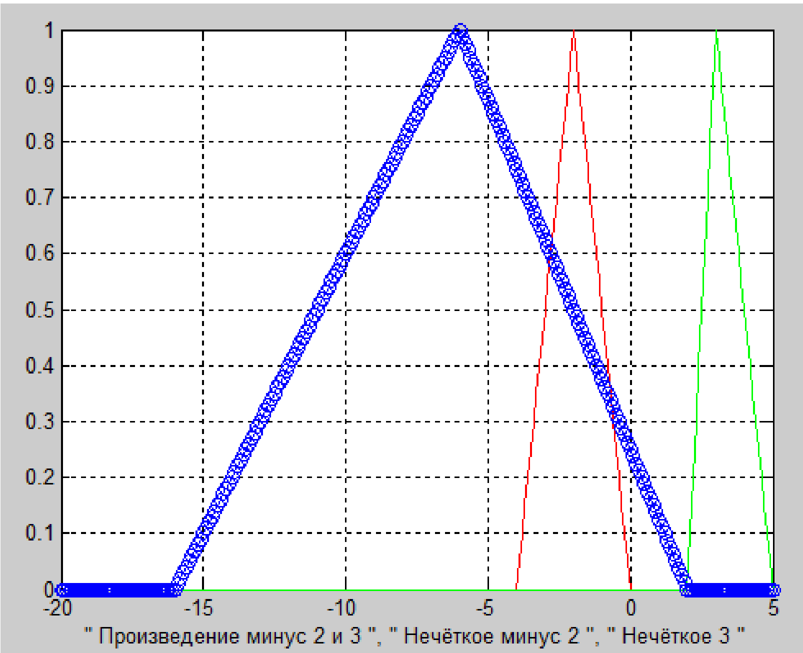

Рис. 3.20. График функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (–6, 10, 8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 1, 2)

```
y3 = trimf (x, [-16 -6 2]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Произведение минус 2 и 3 ", " Нечёткое минус 2 ", " Нечёткое 3 " ');
```

Параметры a, α и β произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ для случая отрицательных модальных значений, т.е. когда $a_1 < 0$ и $a_2 < 0$ определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \quad \alpha = -a_2\beta_1 - a_1\beta_2, \quad \beta = -a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2. \tag{3.23}$$

Например, параметры a, α и β произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2) определяются с помощью формул (3.23) следующим образом:

$$a = a_1 a_2 = (-2)(-3) = 6, \quad \alpha = -a_2\beta_1 - a_1\beta_2 = -(-3)2 - (-2)2 = 6 + 4 = 10;$$

$$\beta = -a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2 = -(-3)2 - (-2)1 = 6 + 2 = 8.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего произведение треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (–3, 1, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.21.

Листинг 3.21. На рисунке 3.21 представлен синим цветом график функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (6, 10, 8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно зелёным и красным цветами. Программа построения графиков треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2), $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2) и их произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (6, 10, 8):

```
x = -4:0.1:14;
y1 = trimf (x, [-4 -2 0]);
```

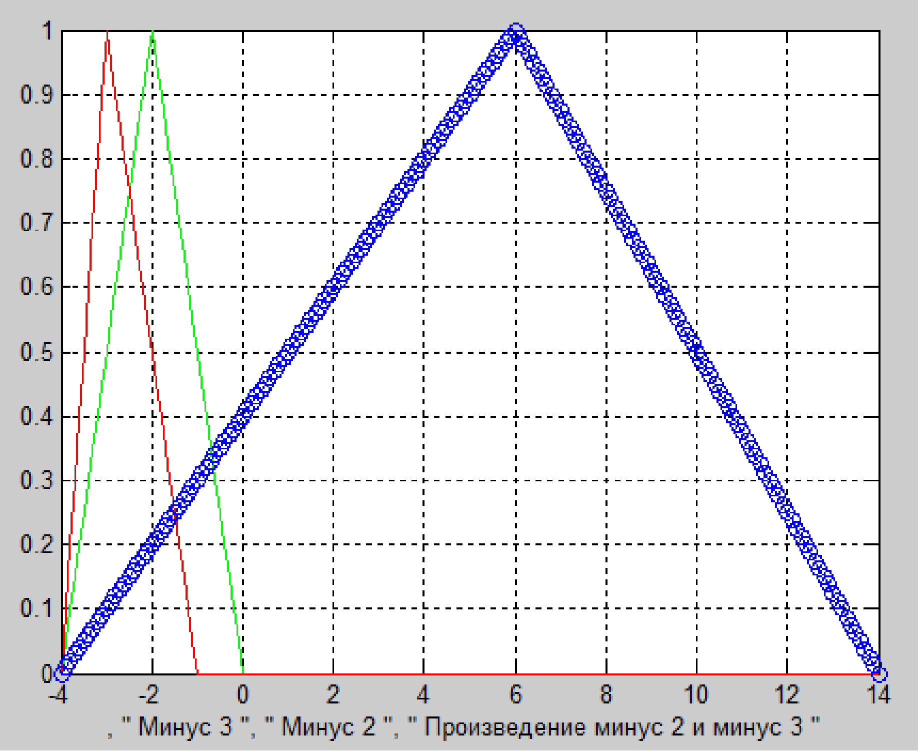

Рис. 3.21. График функции принадлежности произведения $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (6, 10, 8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (–2, 2, 2) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (–3, 1, 2)

```
y2 = trimf (x, [-4 -3 -1]);
y3 = trimf (x, [-4 6 14]);
plot(x, y1, 'g');
hold on;
plot(x, y2, 'r');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(', " Минус 3 ", " Минус 2 ", " Произведение минус 2 и минус 3 " ');
```

3.5.4. ЧАСТНОЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ НЕЧЁТКИХ ЧИСЕЛ

Для операции деления треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ рассмотрим случай, когда их носители принадлежат положительной части числовой прямой и, соответственно, положительных модальных значений a_1 и a_2.

Параметры a, α и β частного $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ в таком случае определяются следующим образом:

$$a = a_1 / a_2, \quad \alpha = (a_1\beta_2 + a_2\alpha_1) \big/ a_2^2, \quad \beta = (a_1\alpha_2 + a_2\beta_1) \big/ a_2^2. \qquad (3.24)$$

Например, параметры a, α и β частного $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (6, 8, 10) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2) определяются с помощью формул (3.24) следующим образом:

$$a = a_1 / a_2 = 6/2 = 3;$$

$$\alpha = (a_1\beta_2 + a_2\alpha_1) \big/ a_2^2 = (6 \cdot 2 + 2 \cdot 8)/2^2 = (12 + 16)/4 = 28 / 4 = 7;$$

$$\beta = (a_1\alpha_2 + a_2\beta_1) \big/ a_2^2 = (6 \cdot 2 + 2 \cdot 10)/2^2 = (12 + 20)/4 = 32 / 4 = 8.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего частное треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (6, 8, 10) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (2, 2, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.22.

Листинг 3.22. На рисунке 3.22 представлен синим цветом график функции принадлежности частного $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (3, 7, 8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (6, 8, 10) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков треугольных чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (6, 8, 10), $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2) и их частного $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (3, 7, 8):

```
x = -4:0.1:16;
y1 = trimf (x, [0 2 4]);
y2 = trimf (x, [-4 3 11]);
y3 = trimf (x, [-2 6 16]);
plot(x, y1, 'g');
hold on;
plot(x, y2, 'bo-');
hold on;
plot(x, y3, 'r');
hold off;
grid;
xlabel(', '' Нечёткое 2 '', '' Частное нечётких 6 и 2 '', '' Нечёткое 6 '' ');
```

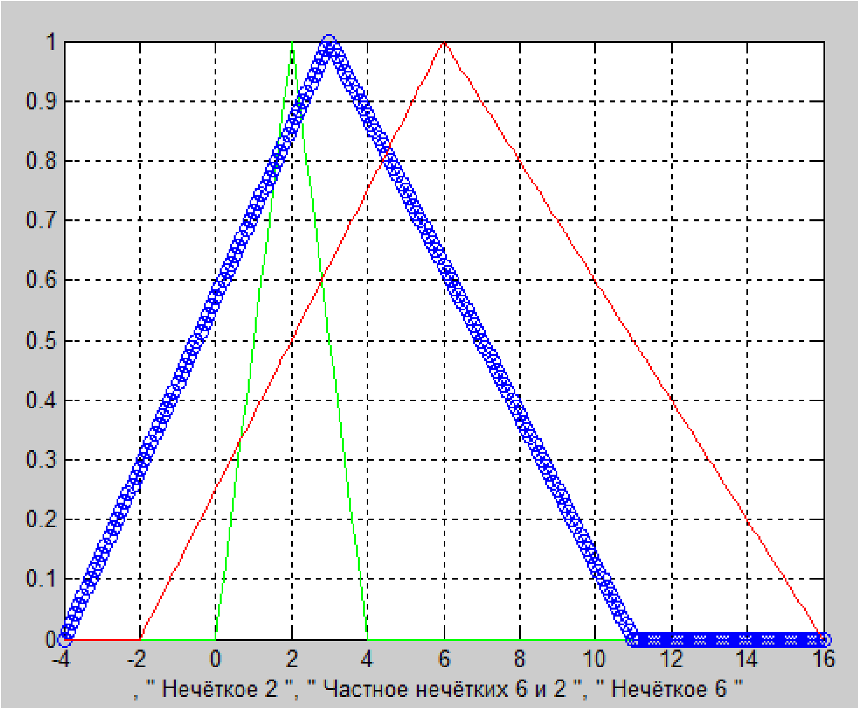

Рис. 3.22. График функции принадлежности частного $C_\Delta = (a, \alpha, \beta)$ = (3, 7, 8) треугольных нечётких чисел $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (6, 8, 10) и $B_\Delta = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (2, 2, 2)

3.5.5. ОБРАТНОЕ ТРЕУГОЛЬНОЕ НЕЧЁТКОЕ ЧИСЛО

Параметры a, α и β треугольного нечёткого числа $A_\Delta^{-1} = (a, \alpha, \beta)$, обратного к положительному нечёткому треугольному числу $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$, т.е. в случае, когда носитель $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ принадлежит положительной части числовой прямой и соответственно положительным является модальное значение a_1, определяются следующим образом:

$$a = 1/a_1, \quad \alpha = \beta_1 / a_1^2, \quad \beta = \alpha_1 / a_1^2. \tag{3.25}$$

Например, параметры a, α и β треугольного нечёткого числа $A_\Delta^{-1} = (a, \alpha, \beta)$, обратного к треугольному числу $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 3, 6) определяются с помощью формул (3.25) следующим образом:

$$a = 1/a_1 = 1/2 = 0{,}5;$$

$$\alpha = \beta_1 / a_1^2 = 6/2^2 = 6/4 = 1{,}5, \quad \beta = \alpha_1 / a_1^2 = 3/2^2 = 3/4 = 0{,}75.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего обратное к треугольному числу $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 3, 6), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.23.

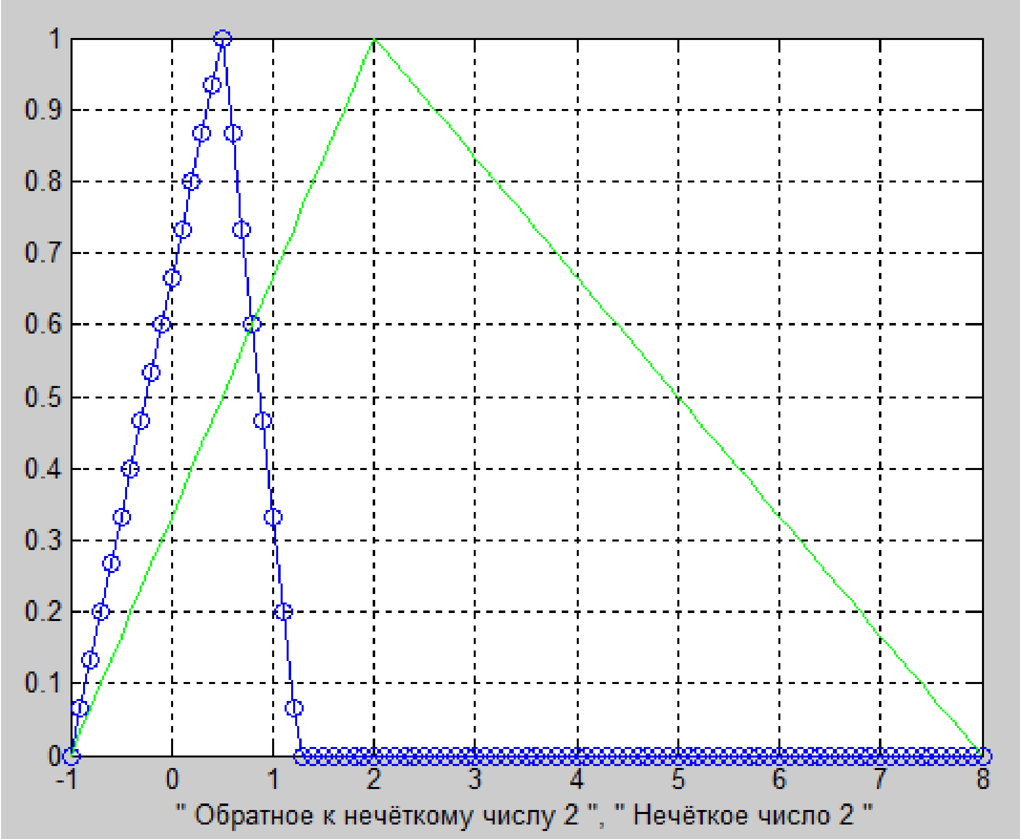

Рис. 3.23. График функции принадлежности обратного числа $A_\Delta^{-1} = (a, \alpha, \beta)$ = (0,5; 1,5; 0,75) по отношению к треугольному нечёткому числу $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 3, 6)

Листинг 3.23. На рисунке 3.23 представлен синим цветом график функции принадлежности обратного числа $A_\Delta^{-1} = (a, \alpha, \beta)$ = (0,5; 1,5; 0,75) по отношению к треугольному нечёткому числу $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 3, 6), график функции принадлежности которого изображён зелёным цветом. Программа построения графиков треугольного числа $A_\Delta = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (2, 3, 6) и обратного к нему числа $A_\Delta^{-1} = (a, \alpha, \beta)$ = (0,5; 1,5; 0,75):

```
x = -1:0.1:8;
y1 = trimf (x, [-1 0.5 1.25]);
y2 = trimf (x, [-1 2 8]);
plot(x, y1, 'bo-');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
grid;
xlabel(' " Обратное к нечёткому числу 2 ", " Нечёткое число 2 " ');
```

3.6. ОПЕРАЦИИ НАД ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ИНТЕРВАЛАМИ (*L*-*R*)-ТИПА

Аналогично описанным в предыдущем подразделе арифметическим операциям над нечёткими треугольными числами здесь рассмотрим арифметические операции сложения, вычитания, умножения и деления над трапециевидными нечёткими интервалами $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$, а также операции расширенного максимума и расширенного минимума трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$.

3.6.1. СУММА ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ НЕЧЁТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

Результат выполнения операции сложения трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ обозначим через $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$. Параметры a, b, α и β этой суммы определяются следующим образом:

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2. \tag{3.26}$$

Например, параметры a, b, α и β суммы $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ для нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (1, 2, 1, 1) определяются с помощью формул (3.26) следующим образом:

$$a = a_1 + a_2 = 3 + 1 = 4, \quad b = b_1 + b_2 = 5 + 2 = 7;$$

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 1 + 1 = 2, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 = 2 + 1 = 3.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего сумму трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (1, 2, 1, 1), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.24.

Листинг 3.24. На рисунке 3.24 представлен синим цветом график функции принадлежности суммы $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (4, 7, 2, 3) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2), $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (1, 2, 1, 1), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2), $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (1, 2, 1, 1) и их суммы $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (4, 7, 2, 3):

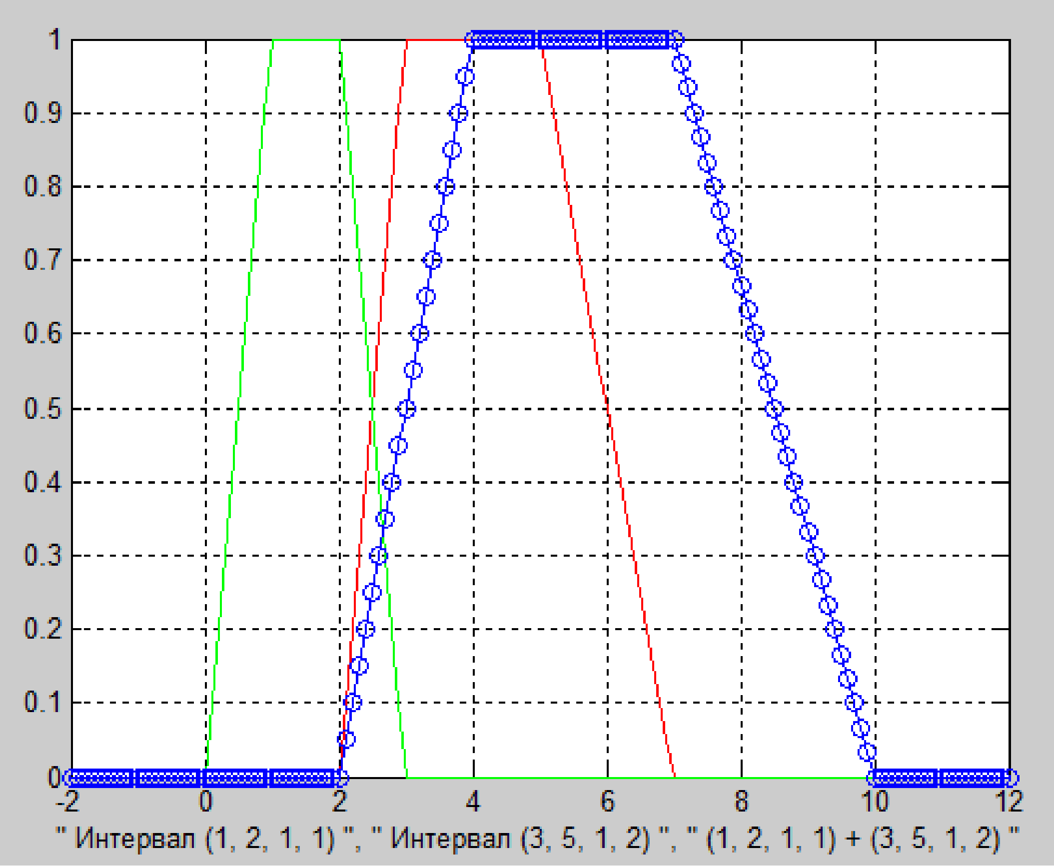

Рис. 3.24. График функции принадлежности суммы $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ **= (4, 7, 2, 3) трапециевидных нечётких интервалов** $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ **= (3, 5, 1, 2),** $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ **= (1, 2, 1, 1)**

```
x = -2:0.1:12;
y1 = trapmf (x, [2 3 5 7]);
y2 = trapmf (x, [0 1 2 3]);
y3 = trapmf (x, [2 4 7 10]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Интервал (1, 2, 1, 1) ", " Интервал (3, 5, 1, 2) ", " (1, 2, 1, 1) + (3, 5, 1, 2) " ');
```

3.6.2. РАЗНОСТЬ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ НЕЧЁТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

Теперь результат выполнения операции вычитания трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ обозначим через $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$. Параметры a, b, α и β этой суммы определяются следующим образом:

$$a = a_1 - a_2, \quad b = b_1 - b_2, \quad \alpha = \alpha_1 + \beta_2, \quad \beta = \beta_1 + \alpha_2. \tag{3.27}$$

Например, параметры a, b, α и β разности $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ для нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2) определяются с помощью формул (3.27) следующим образом:

$$a = a_1 - a_2 = 4 - 3 = 1, \quad b = b_1 - b_2 = 7 - 5 = 2;$$

$$\alpha = \alpha_1 + \beta_2 = 2 + 2 = 4, \quad \beta = \beta_1 + \alpha_2 = 3 + 1 = 4.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего разность трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2) может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.25.

Листинг 3.25. На рисунке 3.25 представлен синим цветом график функции принадлежности разности $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (1, 2, 4, 4) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (3, 5, 1, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3), $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (3, 5, 1, 2) и их разности $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (1, 2, 4, 4):

```
x = -4:0.1:12;
y1 = trapmf (x, [2 4 7 10]);
y2 = trapmf (x, [2 3 5 7]);
y3 = trapmf (x, [-3 1 2 6]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
```

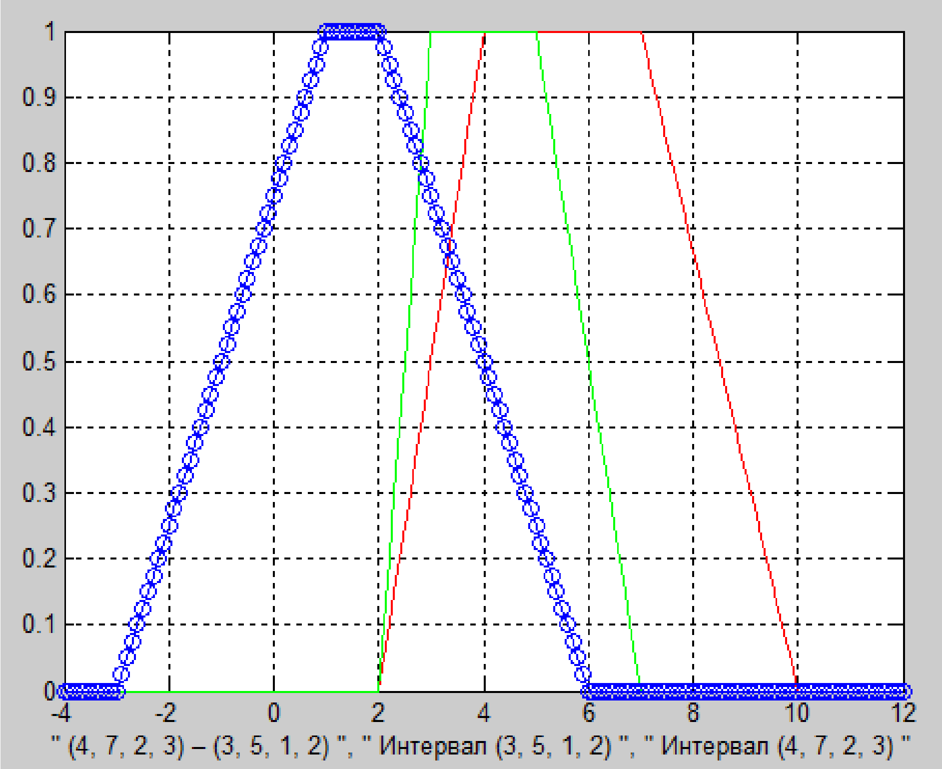

Рис. 3.25. График функции принадлежности разности $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (1, 2, 4, 4) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2)

hold off;

grid;

xlabel(' " (4, 7, 2, 3) – (3, 5, 1, 2) ", " Интервал (3, 5, 1, 2) ", " Интервал (4, 7, 2, 3) " ');

3.6.3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ НЕЧЁТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

Теперь результат выполнения операции умножения положительных трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$, т.е. носители которых являются подмножествами положительной части числовой прямой R₊, обозначим через $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$. Параметры *a*, *b*, α и β такого произведения определяются следующим образом:

$$a = a_1 a_2, \quad b = b_1 b_2, \quad \alpha = a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1, \quad \beta = b_1 \beta_2 + b_2 \beta_1. \qquad (3.28)$$

Например, параметры *a*, *b*, α и β произведения $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ для нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2) определяются с помощью формул (3.28) следующим образом:

$$a = a_1 a_2 = 4 \cdot 3 = 12, \quad b = b_1 b_2 = 7 \cdot 5 = 35;$$

$$\alpha = a_1 \alpha_2 + a_2 \alpha_1 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 4 + 6 = 10;$$

$$\beta = b_1 \beta_2 + b_2 \beta_1 = 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 14 + 15 = 29.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего произведение трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2). может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.26.

Листинг 3.26. На рисунке 3.26 представлен синим цветом график функции принадлежности произведения $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (12, 35, 10, 29) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно зелёным и красным цветами. Программа построения графиков трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3), $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2) и их произведения $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (12, 35, 10, 29):

```
x = 0:0.1:70;
y1 = trapmf (x, [2 3 5 7]);
```

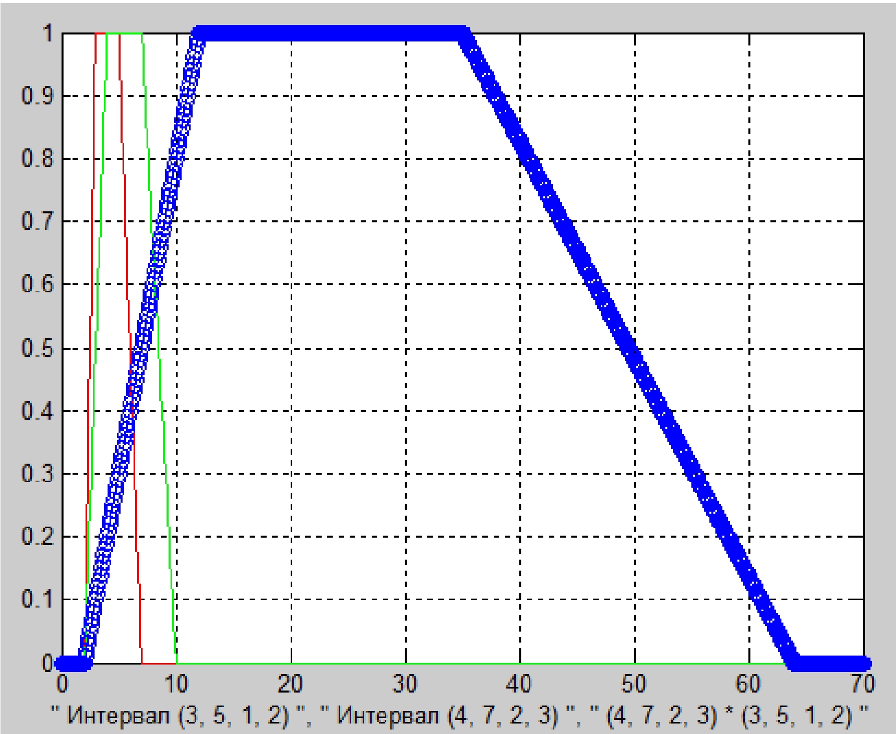

Рис. 3.26. График функции принадлежности произведения $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (12, 35, 10, 29) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (4, 7, 2, 3) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2)

```
y2 = trapmf (x, [2 4 7 10]);
y3 = trapmf (x, [2 12 35 64]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Интервал (3, 5, 1, 2) ", " Интервал (4, 7, 2, 3) ", " (4, 7, 2, 3) * (3, 5, 1, 2) " ');
```

3.6.4. ЧАСТНОЕ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ НЕЧЁТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

Теперь результат выполнения операции деления положительных трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$, т.е. носители которых являются подмножествами положительной части числовой прямой R+, обозначим через $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$. Параметры *a, b,* α и β такого частного определяются следующим образом:

$$a = a_1 / b_2, \quad b = b_1 / a_2, \quad \alpha = (a_1\beta_2 + b_2\alpha_1) \big/ b_2^2, \quad \beta = (b_1\alpha_2 + a_2\beta_1) \big/ a_2^2. \quad (3.29)$$

Например, параметры *a, b,* α и β частного $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (12, 35, 10, 29) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2) определяются с помощью формул (3.29) следующим образом:

$$a = a_1 / b_2 = 12/5 = 2{,}4, \quad b = b_1 / a_2 = 35/3 = 11{,}67;$$

$$\alpha = (a_1\beta_2 + b_2\alpha_1) \big/ b_2^2 = (12 \cdot 2 + 5 \cdot 10)/5^2 = 74 / 25 = 2{,}96;$$

$$\beta = (b_1\alpha_2 + a_2\beta_1) \big/ a_2^2 = (35 \cdot 1 + 3 \cdot 29)/3^2 = 122 / 9 = 13{,}56.$$

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего частное трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (12, 35, 10, 29) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.27.

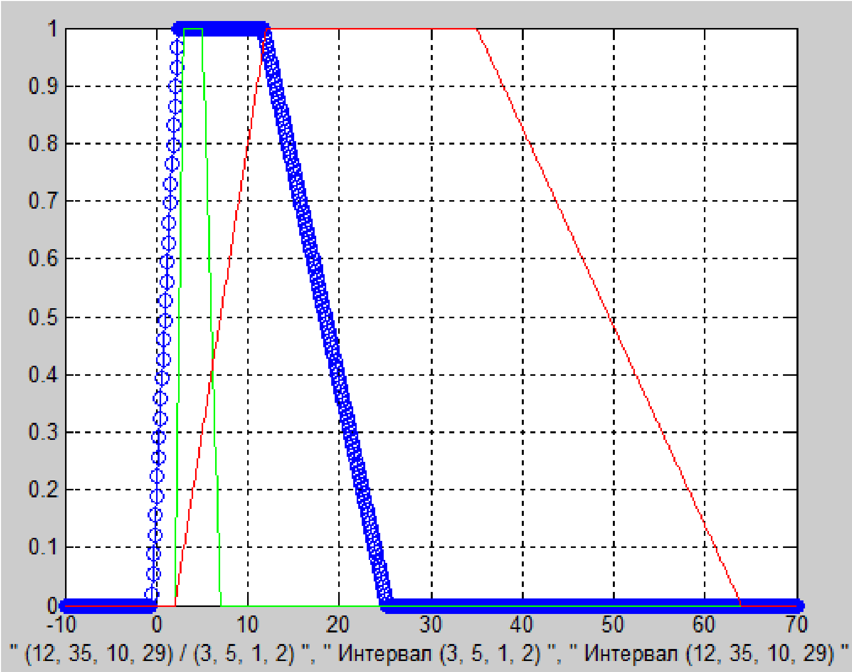

Рис. 3.27. График функции принадлежности частного $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (2,4, 11,67, 2,96, 13,56) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (12, 35, 10, 29) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2)

Листинг 3.27. На рисунке 3.27 представлен синим цветом график функции принадлежности частного $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (2,4; 11,67; 2,96; 13,56) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (12, 35, 10, 29) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (12, 35, 10, 29) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (3, 5, 1, 2) и их частного $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (2,4; 11,67; 2,96; 13,56):

```
x = -10:0.1:70;
y1 = trapmf (x, [-0.56 2.4 11.67 25.23]);
y2 = trapmf (x, [2 3 5 7]);
y3 = trapmf (x, [2 12 35 64]);
plot(x, y1, 'bo-');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'r');
hold off;
```

grid;

xlabel(' " (12, 35, 10, 29) / (3, 5, 1, 2) ", " Интервал (3, 5, 1, 2) ", " Интервал (12, 35, 10, 29) " ');

3.6.5. РАСШИРЕННЫЙ МАКСИМУМ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ НЕЧЁТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

На этот раз результат выполнения операции расширенного максимума трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$, т.е. $\max\{A_T, B_T\}$, обозначим через $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$. Параметры a, b, α и β такого максимума определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a = \max(a_1, a_2); \\ b = \max(b_1, b_2); \\ \alpha = a - \max(a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2); \\ \beta = \max(b_1 + \beta_1, b_2 + \beta_2) - b. \end{cases} \tag{3.30}$$

Например, параметры a, b, α и β расширенного максимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (1, 2, 1, 1) определяются с помощью формул системы (3.30) следующим образом:

$$a = \max(a_1, a_2) = \max(3, 1) = 3, \quad b = \max(b_1, b_2) = \max(5, 2) = 5;$$

$$\alpha = a - \max(a_1 - \alpha_1,\ a_2 - \alpha_2) = 3 - \max(3 - 1,\ 1 - 1) = 3 - \max(2, 0) = 3 - 2 = 1;$$

$$\beta = \max(b_1 + \beta_1,\ b_2 + \beta_2) - b = \max(5 + 2, 2 + 1) - 5 = \max(7, 3) - 5 = 7 - 5 = 2.$$

Как видно из полученных значений a, b, α и β, расширенный максимум $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (1, 2, 1, 1), совпал с первым из них, т. е. с нечётким интервалом $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2).

Рассмотрим другой пример выполнения операции расширенного максимума. В нём параметры a, b, α и β расширенного максимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (7, 9, 2, 1) определяются с помощью формул системы (3.30) следующим образом:

$$a = \max(a_1,\ a_2) = \max(3,\ 7) = 7,\quad b = \max(b_1,\ b_2) = \max(10,\ 9) = 10;$$

$$\alpha = a - \max(a_1 - \alpha_1,\ a_2 - \alpha_2) = 7 - \max(3-2,\ 7-2) = 7 - \max(1,\ 5) = 7 - 5 = 2;$$

$$\beta = \max(b_1 + \beta_1,\ b_2 + \beta_2) - b = \max(10+2,\ 9+1) - 10 = \max(12, 10) - 10 =$$

$$= 12 - 10 = 2.$$

Как видно из полученных значений *a*, *b*, α и β, расширенный максимум $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ в данном случае не совпал ни с одним из них.

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего расширенный максимум трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.28.

Листинг 3.28. На рисунке 3.28 представлен синим цветом график функции принадлежности расширенного максимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (7, 10, 2, 2) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1) и их расширенного максимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = = (7, 10, 2, 2):

```
x = 0:0.1:14;
y1 = trapmf (x, [1 3 10 12]);
y2 = trapmf (x, [5 7 9 10]);
y3 = trapmf (x, [5 7 10 12]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " Интервал (3, 10, 2, 2) ", " Интервал (7, 9, 2, 1) ", " max((3, 10, 2, 2), (7, 9, 2, 1)) " ');
```

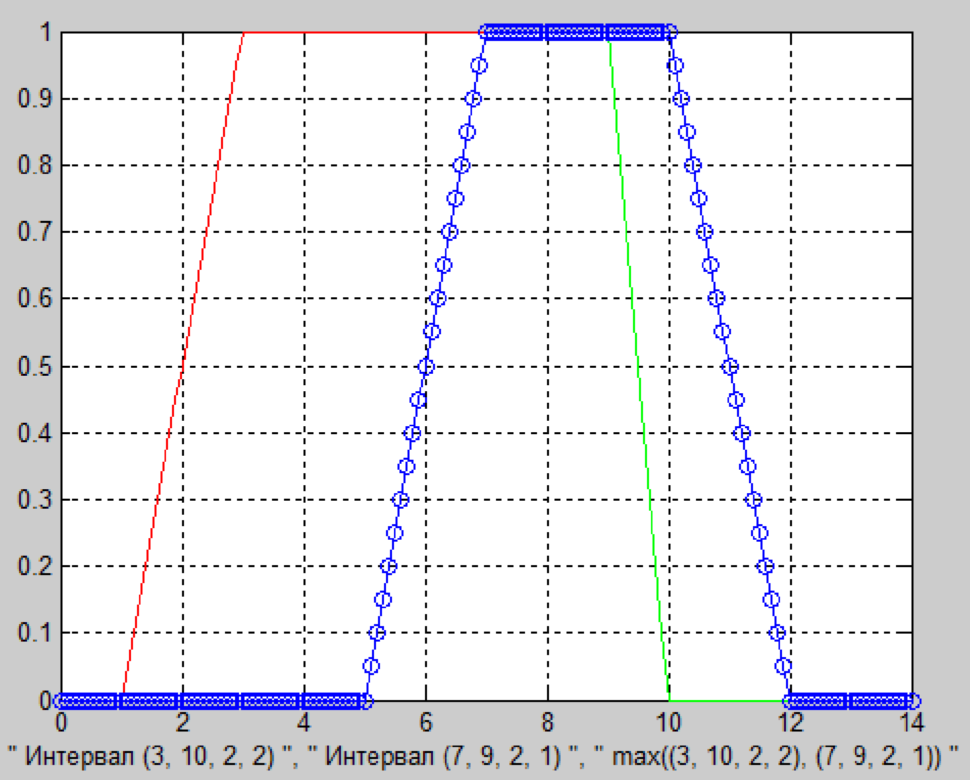

Рис. 3.28. График функции принадлежности расширенного максимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = = (7, 10, 2, 2) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1)

3.6.6. РАСШИРЕННЫЙ МИНИМУМ ТРАПЕЦИЕВИДНЫХ НЕЧЁТКИХ ИНТЕРВАЛОВ

Здесь результат выполнения операции расширенного минимума трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$, т.е. $\min\{A_T, B_T\}$, обозначим через $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$. Параметры a, b, α и β такого минимума определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a = \min(a_1, a_2); \\ b = \min(b_1, b_2); \\ \alpha = a - \min(a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2); \\ \beta = \min(b_1 + \beta_1, b_2 + \beta_2) - b. \end{cases} \tag{3.31}$$

Например, параметры a, b, α и β расширенного минимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = = (1, 2, 1, 1) определяются с помощью формул системы (3.31) следующим образом:

$$a = \min(a_1, a_2) = \min(3, 1) = 1, \quad b = \min(b_1, b_2) = \min(5, 2) = 2;$$

$$\alpha = a - \min(a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2) = 1 - \min(3-1, 1-1) = 1 - \min(2, 0) = 1 - 0 = 1;$$

$$\beta = \min(b_1 + \beta_1, b_2 + \beta_2) - b = \min(5+2, 2+1) - 2 = \min(7, 3) - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Как видно из полученных значений a, b, α и β, расширенный минимум $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 5, 1, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (1, 2, 1, 1) совпал со вторым из них, т.е. с нечётким интервалом $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (1, 2, 1, 1).

Рассмотрим другой пример выполнения операции расширенного минимума. В нём параметры a, b, α и β расширенного минимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1) определяются с помощью формул системы (3.31) следующим образом:

$$a = \min(a_1, a_2) = \min(3, 7) = 3, \quad b = \min(b_1, b_2) = \min(10, 9) = 9;$$

$$\alpha = a - \min(a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2) = 3 - \min(3-2, 7-2) = 3 - \min(1, 5) = 3 - 1 = 2;$$

$$\beta = \min(b_1 + \beta_1, b_2 + \beta_2) - b = \min(10+2, 9+1) - 9 = \min(12, 10) - 9 =$$

$$= 10 - 9 = 1.$$

Как видно из полученных значений a, b, α и β, расширенный минимум $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ в данном случае не совпал ни с одним из них.

График функции принадлежности нечёткого множества, представляющего расширенный минимум трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1), может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.29.

Листинг 3.29. На рисунке 3.29 представлен синим цветом график функции принадлежности расширенного минимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = (3, 9, 2, 1) трапециевидных нечётких интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2) и $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1), графики функций принадлежности которых изображены соответственно красным и зелёным цветами. Программа построения графиков трапециевидных интервалов $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ = (3, 10, 2, 2), $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ = (7, 9, 2, 1) и их расширенного минимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ = = (3, 9, 2, 1):

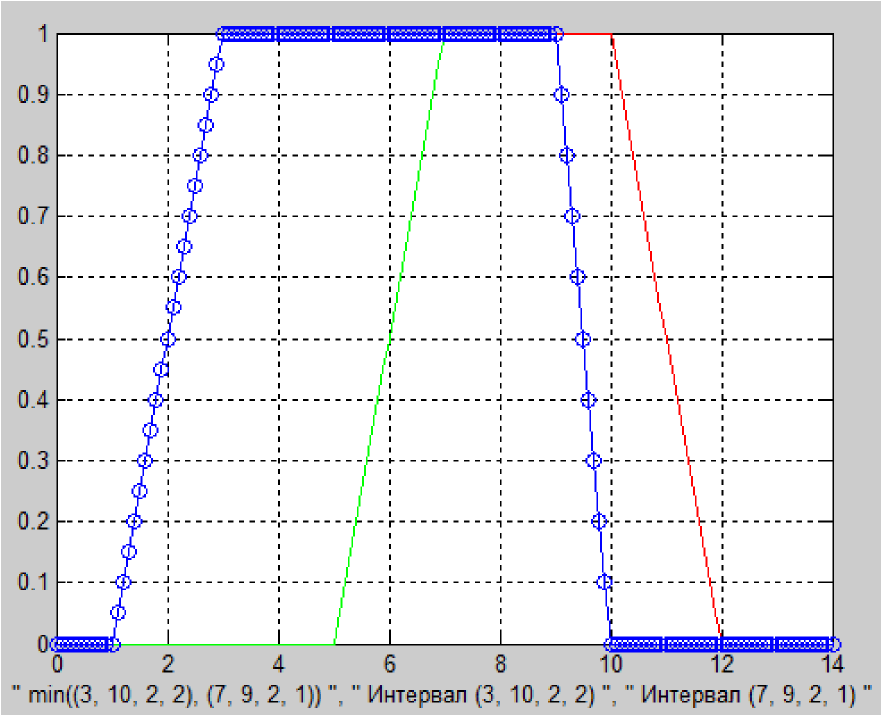

Рис. 3.29. График функции принадлежности расширенного минимума $C_T = (a, b, \alpha, \beta)$ **= = (3, 9, 2, 1) трапециевидных нечётких интервалов** $A_T = (a_1, b_1, \alpha_1, \beta_1)$ **= (3, 10, 2, 2) и** $B_T = (a_2, b_2, \alpha_2, \beta_2)$ **= (7, 9, 2, 1)**

```
x = 0:0.1:14;
y1 = trapmf (x, [1 3 10 12]);
y2 = trapmf (x, [5 7 9 10]);
y3 = trapmf (x, [1 3 9 10]);
plot(x, y1, 'r');
hold on;
plot(x, y2, 'g');
hold on;
plot(x, y3, 'bo-');
hold off;
grid;
xlabel(' " min((3, 10, 2, 2), (7, 9, 2, 1)) ", " Интервал (3, 10, 2, 2) ", " Интервал (7, 9, 2, 1) " ');
```

3.7. (*L*-*R*)-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрев операции над (*L*-*R*)-числами и (*L*-*R*)-интервалами, отметим, что в конкретных ситуациях функции действительного переменного $L(x)$ и $R(x)$, а также параметры унимодальных нечётких чисел вида (a, α, β) и толерантных нечётких чисел вида (a, b, α, β) должны выбираться определённым образом. Их необходимо подбирать таким образом, чтобы результаты операций были точно или приблизительно равны нечётким числам с теми же функциями $L(x)$ и $R(x)$, а параметры нечётких чисел не выходили за рамки ограничений на эти параметры для исходных нечётких чисел, особенно, если результаты операций будет участвовать в дальнейших операциях.

3.7.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ЧИСЛАМИ И ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ИНТЕРВАЛАМИ

Заметим, что решение задач математического моделирования сложных систем с применением аппарата нечётких множеств требует выполнения большого объёма операций над различными лингвистическими переменными. Для удобства выполнения операций, а также для ввода-вывода и хранения данных желательно работать с функциями принадлежности какого-либо стандартного вида.

В таблице 3.1 приведены рекомендации по представлению некоторых типовых термов лингвистических переменных с помощью треугольных нечётких чисел и трапециевидных нечётких интервалов.

3.1. Характеристики термов

Терм лингвистической переменной	Представление терма
Средний, около, приблизительно равно	(a, α, β), где $\alpha < \infty$, $\beta < \infty$
Малый, низкий	(a, α, β), где $\alpha = \infty$, $\beta < \infty$
Большой, высокий	(a, α, β), где $\alpha < \infty$, $\beta = \infty$
Приблизительно в диапазоне, в интервале	(a, b, α, β), где $\alpha < \infty$, $\beta < \infty$
Точно в диапазоне, в интервале	(a, b, α, β), где $\alpha = 0$, $\beta = 0$
Точно равно	(a, α, β), где $\alpha = 0$, $\beta = 0$
Не превышает значения	(a, b, α, β), где $a = -\infty$, $\alpha = \infty$, $\beta < \infty$
Не меньше	(a, b, α, β), где $b = +\infty$, $\alpha < \infty$, $\beta = \infty$
Полностью неопределённое значение	(a, b, α, β), где $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$

3.7.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «СРЕДНИЙ», «ОКОЛО», «ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО РАВНО» ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ЧИСЛАМИ

Представление термов типа «Средний», «Около», «Приблизительно равно» (табл. 3.1) задаётся треугольными нечёткими числами вида (a, α, β), в которых параметр a является некоторым средним значением какой-либо величины или значением, которому приблизительно равна какая-либо величина; параметры α и β также являются конечными числами.

Пусть, например, a = 5, α = 2 и β = 2. Тогда можно говорить о термах «Среднее значение равно пяти», «Около пяти» или «Приблизительно равно пяти». График функции принадлежности подобных термов лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.30.

Листинг 3.30. На рисунке 3.30 изображён график функции принадлежности треугольного нечёткого числа (5, 2, 2), представляющего терм «Приблизительно равно пяти». Программа построения графика треугольного числа (5, 2, 2), представляющего терм «Приблизительно равно пяти»:

```
x = 0:0.1:10;
y = trimf (x, [3 5 7]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Приблизительно равно пяти " ');
```

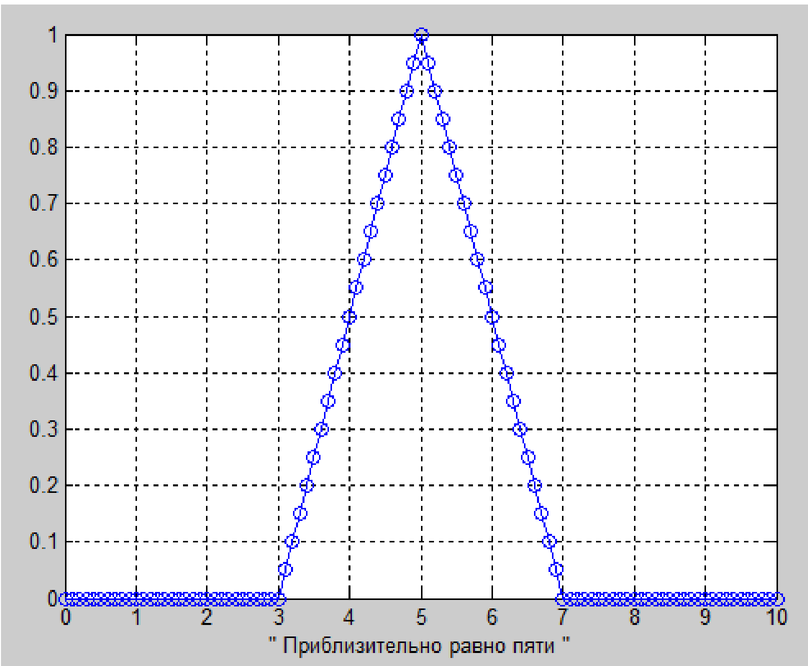

Рис. 3.30. График функции принадлежности треугольного нечёткого числа (5, 2, 2)

3.7.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «МАЛЫЙ», «НИЗКИЙ» ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ЧИСЛАМИ

Представление термов типа «Малый», «Низкий» (табл. 3.1) задаётся треугольными нечёткими числами вида (a, α, β), в которых параметр a является верхним предельным значением некоторой малой величины; параметр α является бесконечным, а параметр β – конечным числом.

Пусть, например, a = 3, α = ∞ и β = 2. Тогда можно говорить о термах «Малая величина» или «Низкое значение», подразумевая при этом число не более трёх. График функции принадлежности подобных термов лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.31.

При задании аргументов функций trimf и trapmf задаются не бесконечные, а конечные значения и речь идёт об аппроксимации представляемой величины в ограниченной области определения функции.

В данном случае используемое в листинге в качестве одного из аргументов функции trimf значение –1000 является достаточным для получения графика необходимой формы в диапазоне от 0 до 10.

Листинг 3.31. На рисунке 3.31 изображён график функции принадлежности треугольного нечёткого числа (3, ∞, 2), представляющего терм «Величина не более трёх является малой». Программа построения графика треугольного числа (3, ∞, 2), представляющего терм «Величина не более трёх является малой»:

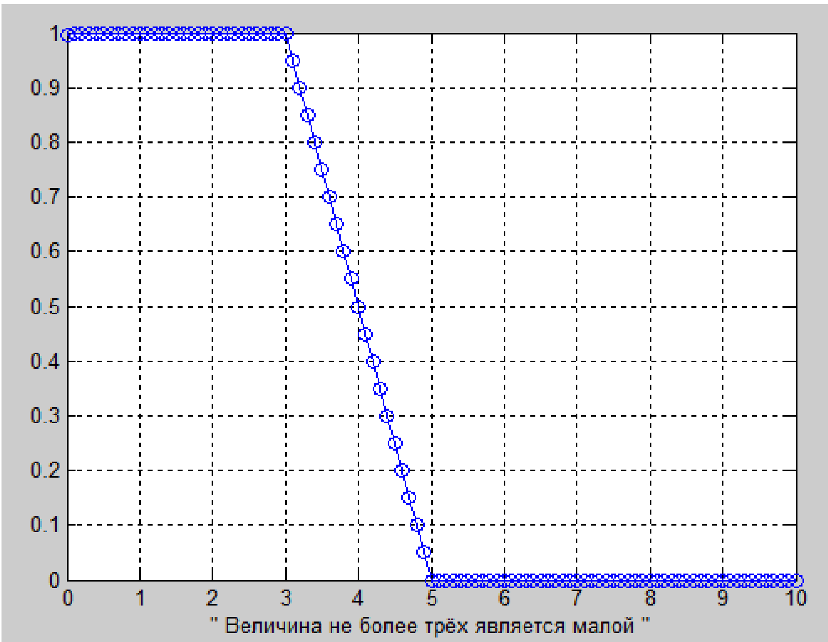

Рис. 3.31. График функции принадлежности треугольного нечёткого числа (3, ∞, 2)

```
x = 0:0.1:10;
y = trimf (x, [-1000 3 5]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Величина не более трёх является малой " ');
```

3.7.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «БОЛЬШОЙ», «ВЫСОКИЙ» ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ЧИСЛАМИ

Представление термов типа «Большой», «Высокий» (табл. 3.1) задаётся треугольными нечёткими числами вида (a, α, β), в которых параметр a является нижним предельным значением некоторой большой величины; параметр α является конечным, а параметр β – бесконечным числом.

Пусть, например, a = 7, α = 2 и β = ∞. Тогда можно говорить о термах «Большая величина» или «Высокое значение», подразумевая при этом число не менее семи. График функции принадлежности подобных термов лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.32. Заметим, что используемое в листинге в качестве одного из аргументов функции trimf значение 1000 является в данном случае достаточным для получения графика необходимой формы в диапазоне от 0 до 10.

Листинг 3.32. На рисунке 3.32 изображён график функции принадлежности треугольного нечёткого числа (7, 2, ∞), представляющего терм «Величина не менее семи является большой». Программа построения графика треугольного числа (7, 2, ∞), представляющего терм «Величина не менее семи, является большой»:

```
x = 0:0.1:10;
y = trimf (x, [5 7 1000]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Величина не менее семи является большой " ');
```

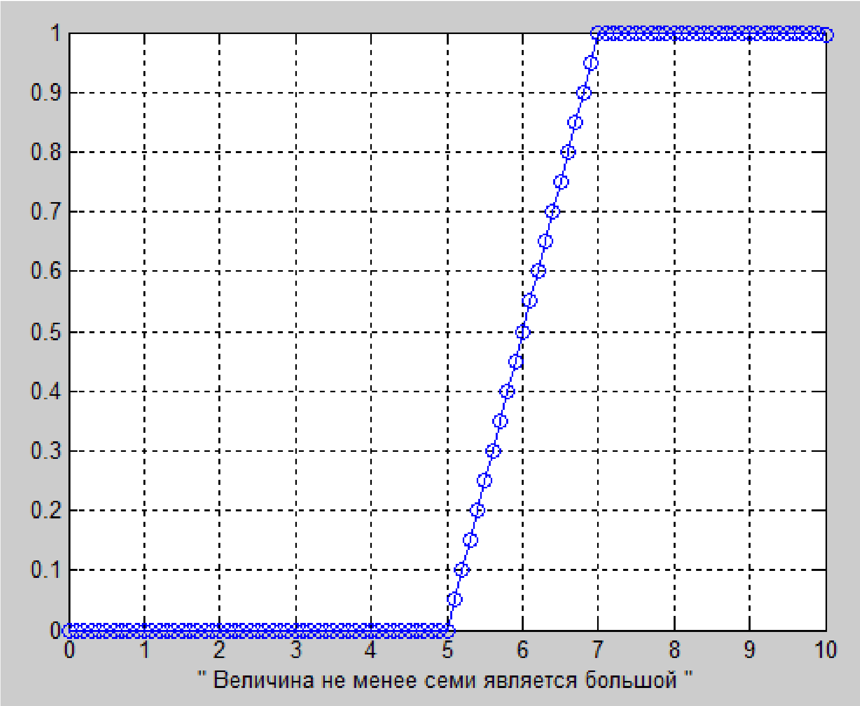

Рис. 3.32. График функции принадлежности треугольного нечёткого числа (7, 2, ∞)

3.7.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО В ДИАПАЗОНЕ», «ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО В ИНТЕРВАЛЕ» ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ИНТЕРВАЛАМИ

Представление термов типа «Приблизительно в диапазоне», «Приблизительно в интервале» (табл. 3.1) задаётся трапециевидными нечёткими интервалами вида (a, b, α, β), в которых параметры a и b являются концами интервалов; параметры α и β – конечными числами.

Пусть, например, a = 4, b = 6, α= 2 и β = 2. Тогда можно говорить о термах «Приблизительно в диапазоне» или «Приблизительно в интервале», подразумевая при этом диапазон, интервал от четырёх до шести. График функции принадлежности подобных термов лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.33.

Листинг 3.33. На рисунке 3.33 изображён график функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (4, 6, 2, 2), представляющего терм «Приблизительно в интервале от 4 до 6». Программа построения графика трапециевидного нечёткого интервала (4, 6, 2, 2), представляющего терм «Приблизительно в интервале от 4 до 6»:

```
x = 0:0.1:10;
y = trapmf (x, [2 4 6 8]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Приблизительно в интервале от 4 до 6 " ');
```

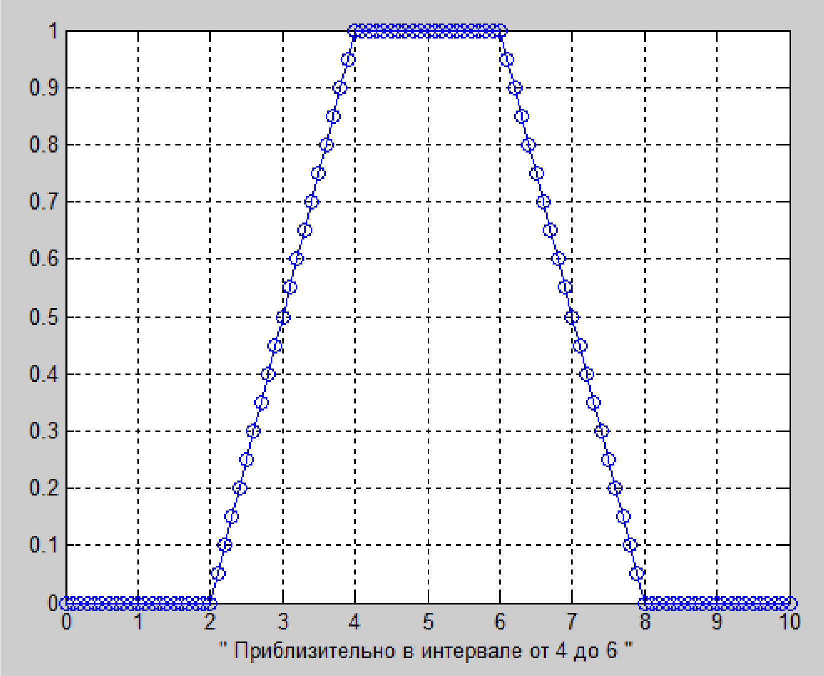

Рис. 3.33. График функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (4, 6, 2, 2)

3.7.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «ТОЧНО В ДИАПАЗОНЕ», «ТОЧНО В ИНТЕРВАЛЕ» ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ИНТЕРВАЛАМИ

Представление термов типа «Точно в диапазоне», «Точно в интервале» (табл. 3.1) задаётся трапециевидными нечёткими интервалами вида (a, b, α, β), в которых параметры a и b являются концами интервалов; параметры α и β – нулевыми значениями.

Пусть, например, a = 4, b = 6, α= 0 и β = 0. Тогда можно говорить о термах «Точно в диапазоне» или «Точно в интервале», подразумевая при этом диапазон, интервал от четырёх до шести. График функции принадлежности подобных термов лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.34.

Листинг 3.34. На рисунке 3.34 изображён график функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (4, 6, 0, 0), представляющего терм «Точно в интервале от 4 до 6». Программа построения графика трапециевидного нечёткого интервала (4, 6, 0, 0), представляющего терм «Точно в интервале от 4 до 6»:

```
x = 0:0.1:10;
y = trapmf (x, [4 4 6 6]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Точно в интервале от 4 до 6 " ');
```

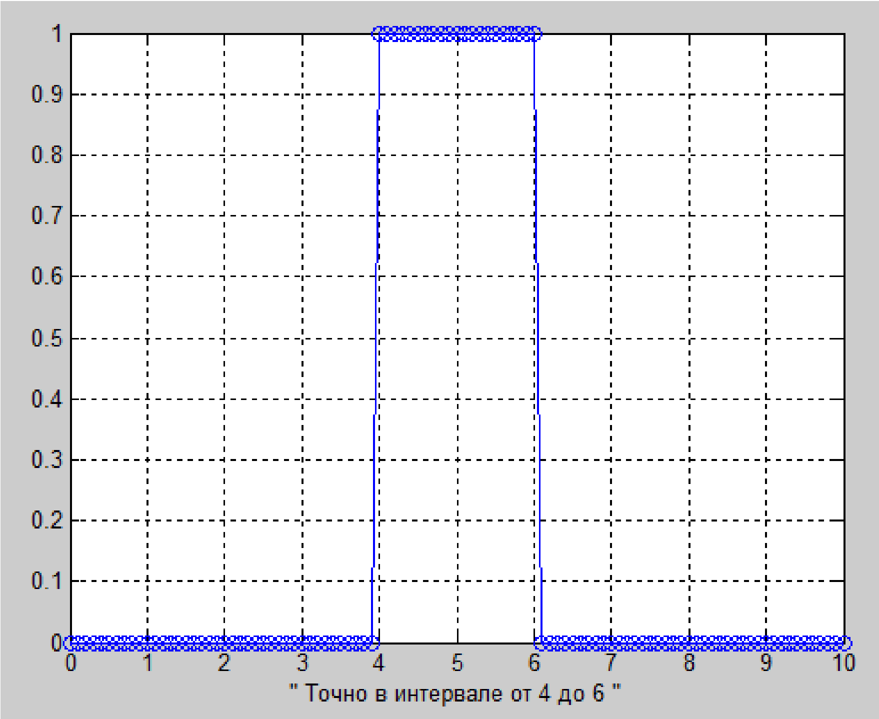

Рис. 3.34. График функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (4, 6, 0, 0)

3.7.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «ТОЧНО РАВНО» ТРЕУГОЛЬНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ЧИСЛАМИ

Представление термов типа «Точно равно» (табл. 3.1) задаётся треугольными нечёткими числами вида (a, α, β), в которых параметр a является некоторым заданным значением какой-либо величины или значением, которому точно равна какая-либо величина; параметры α и β являются нулевыми значениями.

Пусть, например, a = 5, α = 0 и β = 0. Тогда можно говорить о терме «Точно равно пяти». График функции принадлежности такого терма лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.35.

Листинг 3.35. На рисунке 3.35 изображён график функции принадлежности треугольного нечёткого числа (5, 0, 0), представляющего терм «Точно равно пяти». Программа построения графика треугольного числа (5, 0, 0), представляющего терм «Точно равно пяти»:

```
x = 0:0.1:10;
y = trimf (x, [5 5 5]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Точно равно пяти " ');
```

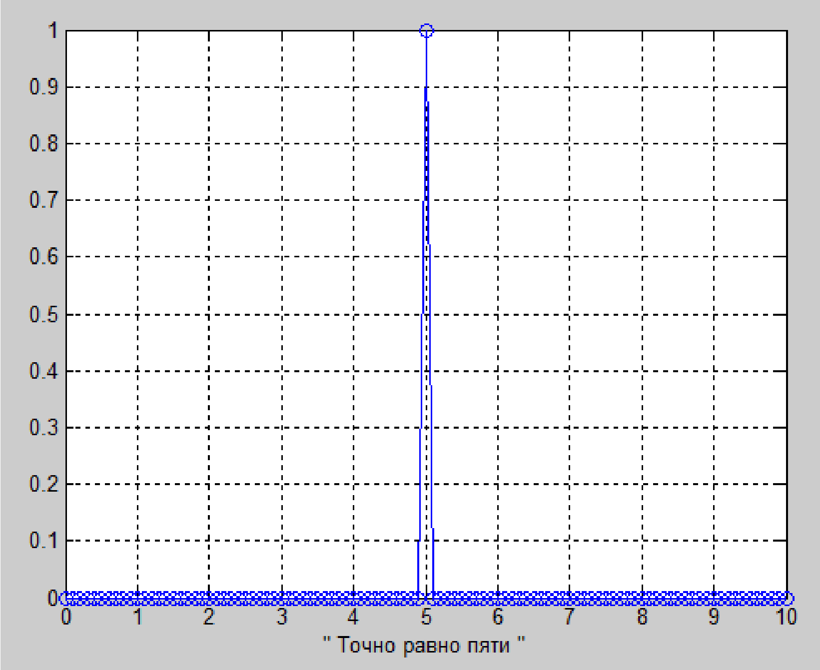

Рис. 3.35. График функции принадлежности треугольного нечёткого числа (5, 0, 0)

3.7.8. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «НЕ ПРЕВЫШАЕТ ЗНАЧЕНИЯ» ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ИНТЕРВАЛАМИ

Представление термов типа «Не превышает значения» (табл. 3.1) задаётся трапециевидными нечёткими интервалами вида (a, b, α, β), в которых параметр a равен минус бесконечности; параметр b является верхним предельным значением оцениваемой величины; параметр α равен бесконечности; параметр β является конечным числом.

Пусть, например, $a = -\infty$, $b = 6$, $\alpha = \infty$ и $\beta = 2$. Тогда можно говорить о терме «Не превышает значения», подразумевая при этом число шесть. График функции принадлежности такого терма лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.36. Заметим, что используемые в листинге в качестве аргументов функции trapmf значения –1000 и 0 являются в данном случае достаточными для получения графика необходимой формы в диапазоне от 0 до 10.

Листинг 3.36. На рисунке 3.36 изображён график функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (–∞, 6, ∞, 2), представляющего терм «Не превышает значения шесть». Программа построения графика трапециевидного нечёткого интервала (–∞, 6, ∞, 2), представляющего терм «Не превышает значения шесть»:

```
x = 0:0.1:10;
```

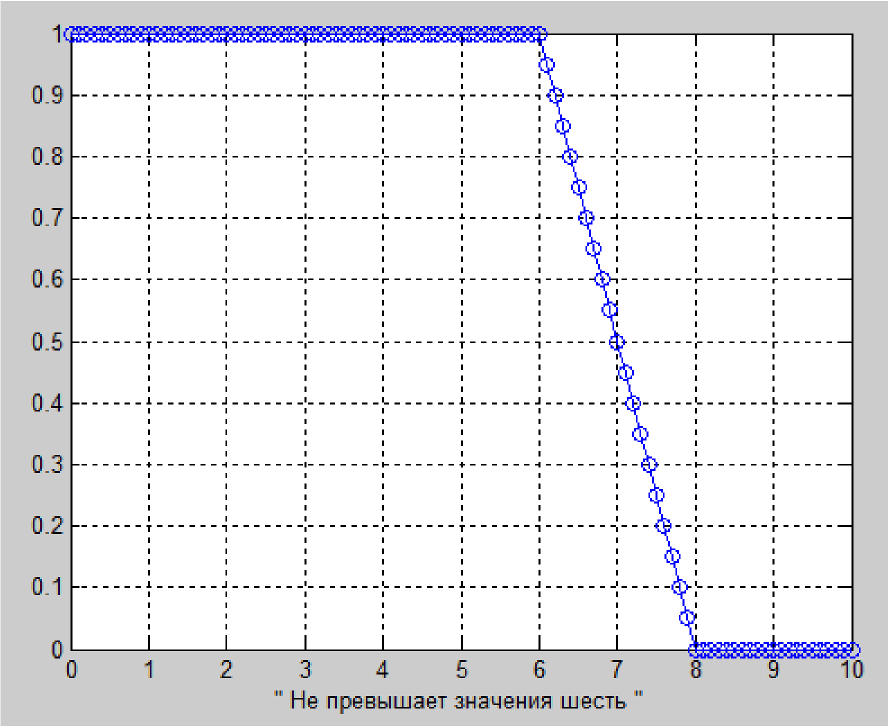

Рис. 3.36. График функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (–∞, 6, ∞, 2)

```
y = trapmf (x, [-1000 0 6 8]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Не превышает значения шесть " ');
```

3.7.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «НЕ МЕНЬШЕ» ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ИНТЕРВАЛАМИ

Представление термов типа «Не меньше» (табл. 3.1) задаётся трапециевидными нечёткими интервалами вида (a, b, α, β), в которых параметр a является нижним предельным значением оцениваемой величины; параметры b и β равны бесконечности; параметр α является конечным числом.

Пусть, например, $a = 4$, $b = \infty$, $\alpha = 2$ и $\beta = \infty$. Тогда можно говорить о терме «Не меньше», подразумевая при этом число четыре. График функции принадлежности такого терма лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.37. Заметим, что используемые в листинге в качестве аргументов функции trapmf значения 1000 и 2000, представляющие значения b и $b + \beta$, являются в данном случае достаточными для получения графика необходимой формы в диапазоне от 0 до 10.

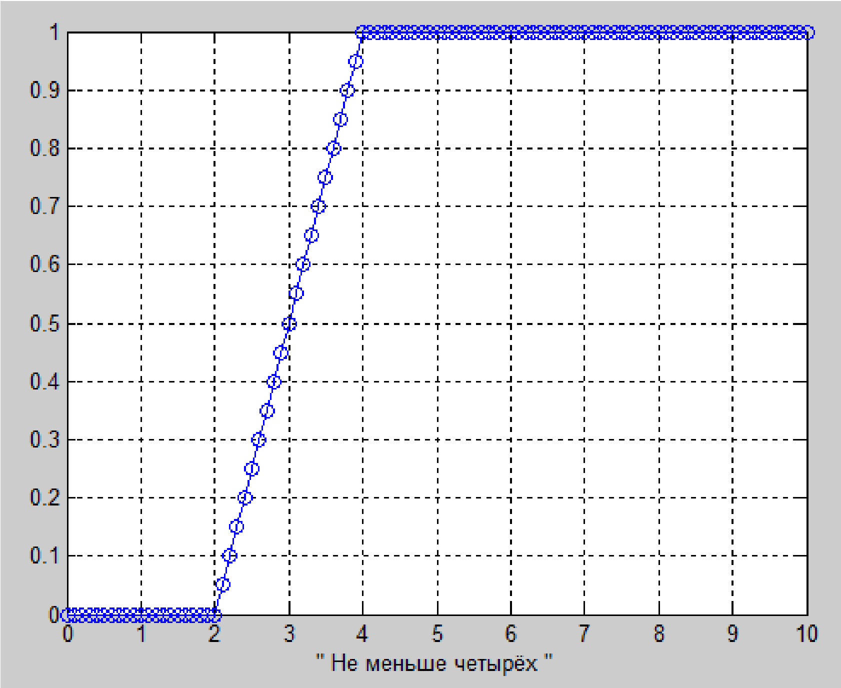

Рис. 3.37. График функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (4, ∞, 2, ∞)

Листинг 3.37. На рисунке 3.37 изображён график функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (4, ∞, 2, ∞), представляющего терм «Не меньше четырёх». Программа построения графика трапециевидного нечёткого интервала (4, ∞, 2, ∞), представляющего терм «Не меньше четырёх»:

```
x = 0:0.1:10;
y = trapmf (x, [2 4 1000 2000]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Не меньше четырёх " ');
```

3.7.10. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕРМОВ «ПОЛНОСТЬЮ НЕОПРЕДЕЛЁННОЕ ЗНАЧЕНИЕ» ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ НЕЧЁТКИМИ ИНТЕРВАЛАМИ

Представление термов типа «Полностью неопределённое значение» (табл. 3.1) можно задавать трапециевидными нечёткими интервалами вида (a, b, α, β), в которых параметр a ниже нижнего предельного значения описываемой величины; параметр b выше верхнего предельного значения описываемой величины; параметры α и β равны бесконечности.

Пусть, например, $a = -2$, $b = 12$, $\alpha = \infty$ и $\beta = \infty$. Тогда можно говорить о терме «Полностью неопределённое значение». График функции принадлежности такого терма лингвистических переменных может быть получен в пакете MatLab с помощью программы, приведённой в листинге 3.38. Заметим, что используемые в листинге в качестве аргументов функции trapmf значения –1000, –2, 12 и 1000, представляющие значения $a - \alpha$, a, b и $b + \beta$ соответственно, являются в данном случае достаточными для получения графика необходимой формы в диапазоне от 0 до 10.

Листинг 3.38. На рисунке 3.38 изображён график функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (–2, 12, ∞, ∞), представляющего терм «Полностью неопределённое значение». Программа построения графика трапециевидного нечёткого интервала (–2, 12, ∞, ∞), представляющего терм «Полностью неопределённое значение»:

```
x = 0:0.1:10;
y = trapmf (x, [-1000 -2 12 1000]);
plot(x, y, 'bo-');
grid;
xlabel(' " Полностью неопределённое значение " ');
```

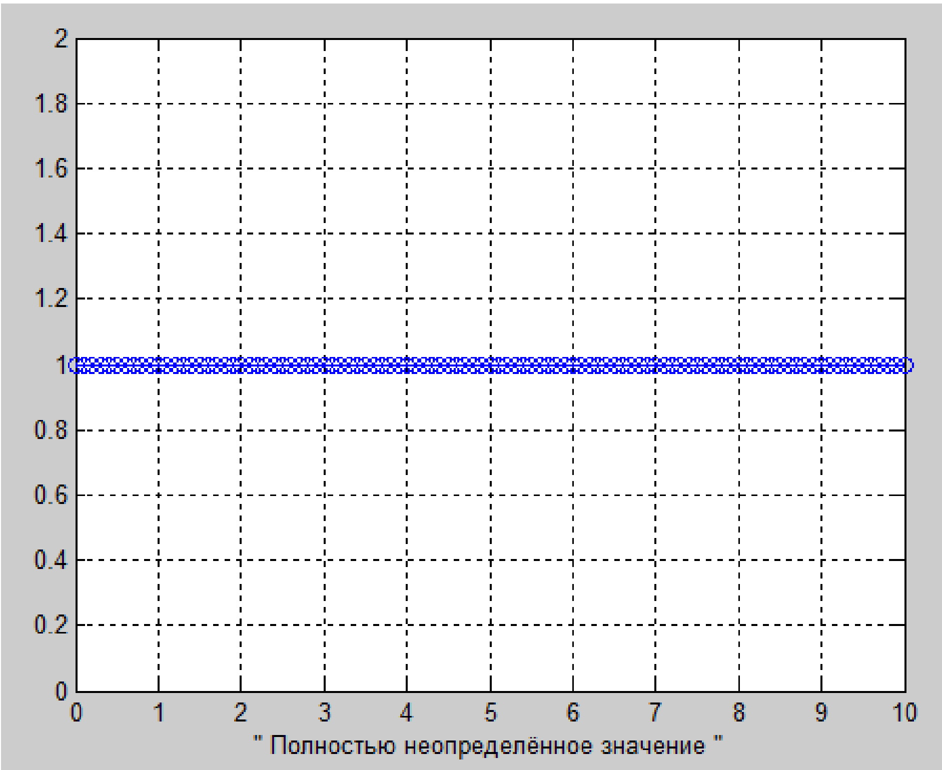

Рис. 3.38. График функции принадлежности трапециевидного нечёткого интервала (–2, 12, ∞, ∞)

4. НЕЧЁТКИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Нечёткими высказываниями называют повествовательные предложения, о которых можно судить на предмет их истинности или ложности, вида:

$$«\alpha \text{ есть } \alpha'»; \tag{4.1}$$

$$«\alpha \text{ есть } m\alpha'», \tag{4.2}$$

где α – имя лингвистической переменной; α' – значение лингвистической переменной, заданное на некотором универсальном множестве; m – модификатор, в качестве значений которого могут выступать слова «очень», «более или менее», «много больше» и т.п.

Например, в нечётком высказывании «Средний рост человека» или в виде (4.1) – «Рост человека есть средний» именем лингвистической переменной является «Рост человека»; значением лингвистической переменной «Рост человека» является нечёткое множество «средний».

В другом нечётком высказывании «Очень малая толщина изделия» или в виде (4.2) – «Толщина изделия есть очень малая», именем лингвистической переменной является «Толщина изделия»; значением лингвистической переменной «Толщина изделия» является нечёткое множество «малая», а его модификатором – слово «очень».

Нечёткими высказываниями также являются высказывания, образованные из предложений вида (4.1), (4.2) с помощью связок «и», «или», «Если-то» и др.

Например, нечёткое высказывание «Скорость автомобиля высокая и эффективность тормозной системы много меньше нормальной» или в виде связки предложений вида (4.1), (4.2) – «Скорость автомобиля есть высокая и эффективность тормозной системы есть много меньше нормальной» составлено из нечёткого высказывания вида (4.1) «Скорость автомобиля есть высокая», нечёткого высказывания вида (4.2) «Эффективность тормозной системы есть много меньше нормальной» с модификатором «много меньше» с помощью связки «и».

Другое нечёткое высказывание «Если обслуживание более или менее хорошее, то чаевые – средние» или в виде связки предложений вида (4.1), (4.2) – «Если обслуживание есть более или менее хорошее, то чаевые есть средние» составлено из нечёткого высказывания вида (4.2) «Обслуживание есть более или менее хорошее» с модификатором «более или менее», нечёткого высказывания вида (4.1) «Чаевые есть средние» с помощью связки «Если-то».

4.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1.1. СЛУЧАЙ ОДНОЙ ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Поскольку значения фиксированной (закреплённой) лингвистической переменной соответствуют нечётким множествам одного и того же универсального множества X, можно отождествлять модификаторы её значений «очень» или «не» с операциями концентрации CON и дополнения, а союзы «и», «или» – с операциями пересечения и объединения нечётких множеств.

Для объяснения понятия лингвистической переменной в п. 3.1.3 была рассмотрена лингвистическая переменная «Толщина изделия» с базовым терм-множеством T = {«Малая толщина», «Средняя толщина», «Большая толщина»}. При этом на универсальном множестве $X = [10, 80]$ были определены нечёткие множества A_1, A_2 и A_3, соответствующие базовым значениям лингвистической переменной «Малая толщина», «Средняя толщина» и «Большая толщина».

В данном случае нечёткому высказыванию «Толщина изделия очень большая» можно поставить в соответствие нечёткое множество $\mathrm{CON} A_3 = A_3^2$; нечёткому высказыванию «Толщина изделия не средняя или большая» – нечёткое множество $\overline{A}_2 \cup A_3$; нечёткому высказыванию «Толщина изделия не малая и не средняя» – нечёткое множество $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2$.

Для нечётких высказываний «Толщина изделия много больше малой» и «Толщина изделия близка к большой» необходимо использовать соответственно нечёткие отношения R_1 – «много больше, чем» и R_2 – «близко к», являющиеся подмножествами декартова произведения $X \times X$. Тогда этим нечётким высказываниям будут соответствовать нечёткие множества $A_1 \bullet R_1$ и $A_3 \bullet R_2$, индуцированные нечёткими отношениями R_1 и R_2.

4.1.2. СЛУЧАЙ ДВУХ ЛИНГВИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть имеются лингвистические переменные $\langle \alpha, T_\alpha, X, G_\alpha, M_\alpha \rangle$ и $\langle \beta, T_\beta, Y, G_\beta, M_\beta \rangle$, а нечётким высказываниям «α есть α′» и «β есть β′» отвечают нечёткие множества A и B, заданные на универсальных множествах X и Y соответственно.

Тогда соединённые с помощью связок «и», «или», «Если-то» и т.п. нечёткие высказывания «α есть α′», «β есть β′» можно привести к высказываниям вида (4.1), введя лингвистическую переменную (α, β), значениями которой будут являться нечёткие множества, заданные на универсальном множестве $X \times Y$. При этом нечёткие множества A и B, заданные на множествах X и Y, будут порождать свои цилиндрические продолжения $\hat{A}$ и $\hat{B}$ с функциями принадлежности:

$$\mu_{\hat{A}}(x, y) = \mu_A(x) \quad \forall y \in Y, \tag{4.3}$$

$$\mu_{\hat{B}}(x, y) = \mu_B(y) \quad \forall x \in X, \tag{4.4}$$

где $(x,\ y) \in X \times Y$.

Заметим, что нечёткие множества, отвечающие составным высказываниям «α есть α′ и β есть β′», «α есть α′ или β есть β′», могут быть преобразованы к виду (4.1) только при условии невзаимодействия переменных, т.е. когда элементы универсальных множеств X и Y не связаны между собой какой-либо функциональной зависимостью.

4.2. ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕЧЁТКИХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

4.2.1. ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ КОНЪЮНКТИВНОЙ ФОРМЫ

Составное нечёткое высказывание «α есть α′ и β есть β′», преобразованное к виду (4.1), принимает форму

$$\text{«}(\alpha,\ \beta) \text{ есть } \alpha' \cap \beta'\text{»}, \tag{4.5}$$

где (α, β) – имя лингвистической переменной; $\alpha' \cap \beta'$ – значение лингвистической переменной.

При этом значение $\alpha' \cap \beta'$ представляет собой нечёткое множество $\hat{A} \cap \hat{B}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\hat{A} \cap \hat{B}}(x,\ y) = \mu_{\hat{A}}(x,\ y) \wedge \mu_{\hat{B}}(x,\ y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y), \tag{4.6}$$

где $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$ – цилиндрические продолжения, определяемые по формулам (4.3) и (4.4).

4.2.2. ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ ДИЗЪЮНКТИВНОЙ ФОРМЫ

Составное нечёткое высказывание «α есть α′ или β есть β′», преобразованное к виду (4.1), принимает форму:

$$«(\alpha,\ \beta)\ \text{есть}\ \alpha' \cup \beta'», \tag{4.7}$$

где (α, β) – имя лингвистической переменной; $\alpha' \cup \beta'$ – значение лингвистической переменной.

При этом значение $\alpha' \cup \beta'$ представляет собой нечёткое множество $\hat{A} \cup \hat{B}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{\hat{A} \cup \hat{B}}(x,\ y) = \mu_{\hat{A}}(x,\ y) \vee \mu_{\hat{B}}(x,\ y) = \mu_A(x) \vee \mu_B(y)\,, \tag{4.8}$$

где $\mu_A(x)$, $\mu_B(y)$ – цилиндрические продолжения, определяемые по формулам (4.3) и (4.4).

4.2.3. ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ ИМПЛИКАТИВНОЙ ФОРМЫ

Условное нечёткое высказывание «Если α есть α', то β есть β'», преобразованное к виду (4.1), принимает форму

$$«(\alpha,\ \beta)\ \text{есть}\ \alpha' \to \beta'», \tag{4.9}$$

где (α, β) – имя лингвистической переменной; $\alpha' \to \beta'$ – значение лингвистической переменной.

При этом значение $\alpha' \to \beta'$ представляет собой нечёткое бинарное отношение *XRY* между универсальными множествами *X* и *Y*, на которых заданы значения лингвистических переменных α и β. Функция принадлежности $\mu_R(x, y)$ данного нечёткого бинарного отношения зависит от выбранного способа задания нечёткой импликации.

4.3. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ НЕЧЁТКОЙ ИМПЛИКАЦИИ

Пусть универсальные множества *X* и *Y*, между которыми задано нечёткое бинарное отношение *XRY*, являются конечными множествами, т.е. содержат конечное число элементов. Тогда под способом задания нечёткой импликации вида $\alpha' \to \beta'$ или «Если *A*, то *B*» (где *A* и *B* представляют собой α' и β', т.е. значения лингвистических переменных α и β) будем понимать конкретную форму функции принадлежности $\mu_R(x, y)$, определяющую соответствующее нечёткое бинарное отношение *XRY*.

Классическая нечёткая импликация или *нечёткая импликация Заде* определяется формулой

$$\mu_R(x, y) = (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \vee (1 - \mu_A(x)). \tag{4.10}$$

Классическая нечёткая импликация для случая, когда $\mu_A(x) \geq \mu_B(y)$, или *нечёткая импликация Гёделя* определяется формулой

$$\mu_R(x, y) = (1 - \mu_A(x)) \vee \mu_B(y). \tag{4.11}$$

Нечёткая импликация минимума корреляции или *нечёткая импликация Мамдани* определяется формулой

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y). \tag{4.12}$$

Нечёткая импликация, предложенная Яном Лукасевичем, или *нечёткая импликация Лукасевича* определяется формулой

$$\mu_R(x, y) = 1 \wedge (1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)). \tag{4.13}$$

Нечёткая импликация, предложенная Джозефом Гогеном, или *нечёткая импликация Гогена* определяется формулой:

$$\mu_R(x, y) = 1 \wedge (\mu_B(y) / \mu_A(x)), \tag{4.14}$$

где $\mu_A(x) > 0$.

Нечёткая импликация в форме ограниченной суммы определяется формулой

$$\mu_R(x, y) = 1 \wedge (\mu_A(x) + \mu_B(y)). \tag{4.15}$$

Нечёткая импликация в форме произведения определяется формулой

$$\mu_R(x, y) = \mu_A(x)\, \mu_B(y). \tag{4.16}$$

Нечёткая импликация, предложенная Н. Вади, или *нечёткая импликация Вади* определяется формулой

$$\mu_R(x, y) = (\mu_A(x)\, \mu_B(y)) \vee (1 - \mu_A(x)). \tag{4.17}$$

Нечёткая импликация, предложенная Лёйтзеном Брауэром, или *нечёткая импликация Брауэра* определяется формулой

$$\mu_R(x,\ y)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ \mu_A(x)\le\mu_B(y);\\ \mu_B(y),\ \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{4.18}$$

Нечёткая импликация стандартной логики последовательностей определяется формулой

$$\mu_R(x,\ y)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ \mu_A(x)\le\mu_B(y);\\ 0,\ \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{4.19}$$

Нечёткая импликация «Если *A*, то *B*» используется в процессе нечёткого логического вывода. Аналогично обычной математической логике, её аргумент *A* называется *посылкой* (*антецедентом*), а аргумент *B* – *заключением* (*консеквентом*).

Несмотря на то, что классическая нечёткая импликация (4.10) чаще всего применяется для решения всевозможных прикладных задач, остальные варианты вычисления значения нечёткой импликации так же имеют право на существование, а в отдельных случаях они снижают вычислительные затраты.

Заметим, что рассмотренные формулы (4.10) – (4.19) для вычисления значения нечёткой импликации традиционно считают основными. Существует достаточно большое число дополнительных способов её вычисления.

4.4. ЛОГИКО-ЛИНГВИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СИСТЕМ

Логико-лингвистическое описание систем основано на представлении этих систем на естественном или близком к естественному языку в терминах лингвистических переменных. При этом лингвистические переменные представляют входные и выходные переменные системы, а поведение исследуемой системы определяется конечным множеством нечётких импликаций L_1, L_2, …, L_k вида

$$\begin{cases}L_1:\ \text{если}\ a_{11}\ \text{и/или}\ a_{12}\ \text{и/или}\ldots\text{и/или}\ a_{1m},\ \text{то}\ b_{11}\ \text{и/или}\ldots\ \text{и/или}\ b_{1n};\\ L_2:\ \text{если}\ a_{21}\ \text{и/или}\ a_{22}\ \text{и/или}\ldots\text{и/или}\ a_{2m},\ \text{то}\ b_{21}\ \text{и/или}\ldots\ \text{и/или}\ b_{2n};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_k:\ \text{если}\ a_{k1}\ \text{и/или}\ a_{k2}\ \text{и/или}\ldots\text{и/или}\ a_{km},\ \text{то}\ b_{k1}\ \text{и/или}\ldots\ \text{и/или}\ b_{kn},\end{cases} \tag{4.20}$$

где a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, m$) – нечёткие высказывания вида (4.1), (4.2) для входных лингвистических переменных; b_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, k$; $j = 1, 2, \ldots, n$) – нечёткие высказывания вида (4.1), (4.2) для выходных лингвистических переменных.

Данное множество импликаций с помощью правил преобразования конъюнктивной и дизъюнктивной форм (4.5) – (4.8) приводится к виду:

$$\begin{cases} L_1 : \text{если } A_1, \text{ то } B_1; \\ L_2 : \text{если } A_2, \text{ то } B_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_k : \text{если } A_k, \text{ то } B_k, \end{cases} \tag{4.21}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ – нечёткие множества, заданные на декартовом произведении универсальных множеств входных лингвистических переменных (универсальном множестве X); $B_1, B_2, \ldots, B_k$ – нечёткие множества, заданные на декартовом произведении универсальных множеств выходных лингвистических переменных (универсальном множестве Y).

Множество импликаций $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ характеризует функциональную зависимость между входными и выходными переменными моделируемой системы и является нечётким бинарным отношением вида XRY, заданным на декартовом произведении $X \times Y$ универсальных множеств входных и выходных переменных X и Y.

Приведём формулировку композиционного правила Лотфи Заде. Если на универсальном множестве входных переменных X задано нечёткое множество A, то композиционное правило вывода $B = A \bullet R$ определяет на универсальном множестве выходных переменных Y нечёткое множество B с функцией принадлежности:

$$\mu_B(y) = \bigvee_{x \in X} (\mu_A(x) \wedge \mu_R(x, y)). \tag{4.22}$$

Следовательно, в данном случае композиционное правило вывода (Заде) определяет закономерность функционирования нечёткой модели исследуемой системы.

Заметим, что главным преимуществом представленной модели является её универсальность. При этом не принципиально, что поступает на вход – конкретные числа или нечёткие множества, представляющие некоторые неопределённости. За полученную универсальность модели приходится платить сложностью работы в системе с пространством размерностью $m \times n$. В связи с этим обстоятельством данной универсальной моделью пользуются очень редко на практике. Чаще всего используют её упрощение, называемое нечётким выводом. Такое упрощение может быть применено в случае, когда все входные лингвистические переменные имеют известные исследователю числовые значения, что довольно часто бывает на практике. Так же на практике в модели системы обычно не используют более чем одну выходную переменную.

4.5. МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ПАРОВЫМ КОТЛОМ

В качестве объекта моделирования выступает лабораторный паровой двигатель, преобразующий энергию водяного пара, генерируемого паровым котлом, в механическую работу возвратно-поступательного движения поршня, а затем во вращательное движение вала двигателя.

Пусть модель парового двигателя имеет два входа и два выхода. Тогда в качестве входных переменных модели могут выступать расход тепла, подаваемого в паровой котёл для его нагрева, и степень открытия дросселя на выходе из него образующегося пара. А в качестве выходных переменных – давление пара в паровом котле и скорость вращения вала двигателя.

Рассмотрим задачу нечёткого управления давлением пара в паровом котле. Понятно, что при увеличении расхода тепла, подаваемого в паровой котёл для его нагрева, давление пара в котле должно расти, а при увеличении степени открытия дросселя на выходе из него образующегося пара – падать. Следовательно, входными переменными модели парового котла являются расход тепла, подаваемого в котёл для его нагрева, и степень открытия дросселя на выходе из котла образующегося пара, а выходной переменной – давление в паровом котле.

Но если рассматривать паровой котёл как объект управления в целях поддержания заданного давления пара в котле, то в качестве входных переменных могут выступать отклонение давления пара в котле от заданного и скорость изменения давления пара, а в качестве выходной переменной – изменение расхода тепла, подаваемого в котёл для его нагрева.

В таком случае при управлении паровым котлом можно рассуждать, например, следующим образом. Если отклонение давления пара в котле от заданного отрицательное большое и скорость изменения отклонения давления пара от заданного отрицательное большое или отрицательное среднее, то увеличение расхода тепла, подаваемого в котёл для его нагрева, должно быть положительное большое.

В другом примере можно рассуждать таким образом. Если отклонение давления пара в котле от заданного отрицательное большое или отрицательное среднее и скорость изменения отклонения давления пара от заданного отрицательная малая, то увеличение расхода тепла, подаваемого в котёл для его нагрева, должно быть положительное среднее.

Определим для задачи нечёткого управления давлением пара в паровом котле входные и выходные лингвистические переменные.

Пусть входными лингвистическими переменными будут *PE* = «Отклонение давления пара от заданного» и *CPE* = «Скорость изменения отклонения давления пара от заданного», а выходной лингвистической переменной – *HC* = = «Изменение расхода тепла, подаваемого в котёл для его нагрева».

Пусть значениями входных и выходной лингвистических переменных в порядке возрастания будут:

NB = «Отрицательное большое»;

NM = «Отрицательное среднее»;

NS = «Отрицательное малое»;

NO = «Отрицательное близкое к нулю»;

ZO = «Близкое к нулю»;

PO = «Положительное близкое к нулю»;

PS = «Положительное малое»;

PM = «Положительное среднее»;

PB = «Положительное большое».

Тогда множеством правил для нечёткого управления давлением пара в паровом котле может быть, например, следующее множество из пятнадцати правил – нечётких высказываний вида (4.1), (4.2), образованных с помощью связок «и», «или», «Если-то»:

1) Если «*PE* есть *NB*» и («*CPE* есть *NB*» или «*CPE* есть *NM*»), то «*HC* есть *PB*»;

2) Если («*PE* есть *NB*» или «*PE* есть *NM*») и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *PM*»;

3) Если «*PE* есть *NS*» и («*CPE* есть *PS*» или «*CPE* есть *NO*»), то «*HC* есть *PM*»;

4) Если «*PE* есть *NO*» и («*CPE* есть *PB*» или «*CPE* есть *PM*»), то «*HC* есть *PM*»;

5) Если «*PE* есть *NO*» и («*CPE* есть *NB*» или «*CPE* есть *NM*»), то «*HC* есть *NM*»;

6) Если («*PE* есть *PO*» или «*PE* есть *ZO*») и «*CPE* есть *NO*», то «*HC* есть *NO*»;

7) Если «*PE* есть *PO*» и («*CPE* есть *NB*» или «*CPE* есть *NM*»), то «*HC* есть *PM*»;

8) Если «*PE* есть *PO*» и («*CPE* есть *PB*» или «*CPE* есть *PM*»), то «*HC* есть *NM*»;

9) Если «*PE* есть *PS*» и («*CPE* есть *PS*» или «*CPE* есть *NO*»), то «*HC* есть *NM*»;

10) Если («*PE* есть *PB*» или «*PE* есть *PM*») и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *NM*»;

11) Если «*PE* есть *PB*» и («*CPE* есть *NB*» или «*CPE* есть *NM*»), то «*HC* есть *NB*»;

12) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *PS*», то «*HC* есть *PS*»;

13) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *NS*»;

14) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *PS*», то «*HC* есть *PS*»;

15) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *NS*».

С использованием закона дистрибутивности из первых одиннадцати правил можно получить двадцать два правила, образованных с помощью только связок «и», «Если-то», а общее количество правил вида (4.1), (4.2) при этом станет равным двадцати шести:

1) Если «*PE* есть *NB*» и «*CPE* есть *NB*», то «*HC* есть *PB*»;
2) Если «*PE* есть *NB*» и «*CPE* есть *NM*», то «*HC* есть *PB*»;
3) Если «*PE* есть *NB*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *PM*»;
4) Если «*PE* есть *NM*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *PM*»;
5) Если «*PE* есть *NS*» и «*CPE* есть *PS*», то «*HC* есть *PM*»;
6) Если «*PE* есть *NS*» и «*CPE* есть *NO*», то «*HC* есть *PM*»;
7) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *PB*», то «*HC* есть *PM*»;
8) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *PM*», то «*HC* есть *PM*»;
9) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *NB*», то «*HC* есть *NM*»;
10) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *NM*», то «*HC* есть *NM*»;
11) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *NO*», то «*HC* есть *NO*»;
12) Если «*PE* есть *ZO*» и «*CPE* есть *NO*», то «*HC* есть *NO*»;
13) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *NB*», то «*HC* есть *PM*»;
14) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *NM*», то «*HC* есть *PM*»;
15) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *PB*», то «*HC* есть *NM*»;

16) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *PM*», то «*HC* есть *NM*»;
17) Если «*PE* есть *PS*» и «*CPE* есть *PS*», то «*HC* есть *NM*»;
18) Если «*PE* есть *PS*» и «*CPE* есть *NO*», то «*HC* есть *NM*»;
19) Если «*PE* есть *PB*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *NM*»;
20) Если «*PE* есть *PM*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *NM*»;
21) Если «*PE* есть *PB*» и «*CPE* есть *NB*», то «*HC* есть *NB*»;
22) Если «*PE* есть *PB*» и «*CPE* есть *NM*», то «*HC* есть *NB*»;
23) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *PS*», то «*HC* есть *PS*»;
24) Если «*PE* есть *NO*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *NS*»;
25) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *PS*», то «*HC* есть *PS*»;
26) Если «*PE* есть *PO*» и «*CPE* есть *NS*», то «*HC* есть *NS*».

Пусть значения *NB*, *NM*, *NS*, *NO*, *ZO*, *PO*, *PS*, *PM* и *PB* входных и выходной лингвистических переменных заданы соответствующими дискретными нечёткими множествами, определёнными на универсальных множествах $X = Y = Z =$ $= \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Функции принадлежности этих нечётких множеств представлены в табл. 4.1.

4.1. Функции принадлежности нечётких множеств

$x \in X$	$\mu_{NB}(x)$	$\mu_{NM}(x)$	$\mu_{NS}(x)$	$\mu_{NO}(x)$	$\mu_{ZO}(x)$	$\mu_{PO}(x)$	$\mu_{PS}(x)$	$\mu_{PM}(x)$	$\mu_{PB}(x)$
–6	1	0,7	0	0	0	0	0	0	0
–5	0,7	1	0,3	0	0	0	0	0	0
–4	0,3	0,7	0,7	0,3	0	0	0	0	0
–3	0	0,3	1	0,7	0	0	0	0	0
–2	0	0	0,7	1	0,3	0	0	0	0
–1	0	0	0,3	0,7	0,7	0	0	0	0
0	0	0	0	0,3	1	0,3	0	0	0
1	0	0	0	0	0,7	0,7	0,3	0	0
2	0	0	0	0	0,3	1	0,7	0	0
3	0	0	0	0	0	0,7	1	0,3	0
4	0	0	0	0	0	0,3	0,7	0,7	0,3
5	0	0	0	0	0	0	0,3	1	0,7
6	0	0	0	0	0	0	0	0,7	1

Каждое из двадцати шести представленных выше управляющих правил может быть преобразовано к виду

$$«Если\ (A_i \times B_i),\ то\ C_i», \tag{4.23}$$

где $(A_i \times B_i)$ – декартово произведение нечётких множеств A_i и B_i, определённых на универсальном множестве X = {–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} и представляющих значения входных лингвистических переменных *PE* (отклонения давления пара от заданного) и *CPE* (скорости изменения отклонения давления пара от заданного) соответственно; C_i – нечёткое множество, заданное на универсальном множестве X = {–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} выходной лингвистической переменной *HC* (изменения расхода тепла, подаваемого в котёл для его нагрева).

Каждая, представляющая одно из двадцати шести правил, i-я нечёткая импликация задаёт некоторое нечёткое бинарное отношение

$$R_i = (A_i \times B_i) \times C_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, 26 \tag{4.24}$$

с функцией принадлежности

$$\mu_{R_i}((x, y), z) = (\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{B_i}(y)) \wedge \mu_{C_i}(z). \tag{4.25}$$

Совокупность всех двадцати шести нечётких бинарных отношений для двадцати шести правил образует обобщённое нечёткое отношение:

$$R = \bigcup_{i=1}^{26} R_i \tag{4.26}$$

с функцией принадлежности

$$\mu_R(x, y, z) = \bigvee_{i=1}^{26} \mu_{R_i}((x, y), z). \tag{4.27}$$

Пусть A' и B' обозначают нечёткие множества для входных переменных нечёткой модели исследуемой системы. Тогда нечёткое множество C' для выходной переменной этой модели может быть определено на основе композиционного правила вывода

$$C' = (A' \times B') \circ R, \tag{4.28}$$

где $\circ$ – символ, обозначающий операцию (max-min)-композиции отношений $A' \times B'$ и R.

Функция принадлежности нечёткого множества C' для выходной переменной модели при этом определяется следующим выражением

$$\mu_{C'}(z) = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_{B'}(y)) \wedge \mu_R(x, y, z). \tag{4.29}$$

Чёткое числовое значение изменения, подаваемого в паровой котёл тепла, может быть определено, например, либо как максимальное значение функции принадлежности для выходной переменной:

$$z_0 = \max_{z \in Z} \mu_{C'}(z), \tag{4.30}$$

либо как абсцисса центра тяжести площади, ограниченной графиком кривой функции принадлежности для выходной переменной:

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \mu_{C'}(z_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_{C'}(z_i)}, \tag{4.31}$$

где N – количество элементов множества Z.

Заметим, что при построении системы нечёткого управления, необходимо отвечать на общие вопросы, касающиеся основ моделирования, а именно на вопросы:

– о полноте и непротиворечивости множества управляющих правил;

– об адекватности представления управляющих правил различными нечёткими отношениями;

– о правильности выбора конкретного вида композиции из множества видов операции композиции.

4.6. ПОЛНОТА И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ПРАВИЛ УПРАВЛЕНИЯ

Полнота множества управляющих правил, образованных из предложений вида (4.1), (4.2) с помощью связки «Если-то», например, для модели парового котла вида (4.23), может означать получение универсального множества входа модели $X \times Y$ в результате объединения носителей нечётких множеств $Supp\,(A_i \times B_i)$ для всех антецедентов $(A_i \times B_i)$ этих правил:

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} Supp\,(A_i \times B_i), \tag{4.32}$$

где n – общее количество правил.

Заметим, что полнота множества управляющих правил означает существование управляющего правила для каждого возможного состояния модели системы с антецедентом (посылкой), отличным от нуля.

Непротиворечивость множества правил управления можно считать обеспеченной при отсутствии в этом множестве пар различных правил, имеющих одинаковые антецеденты и при этом различные или взаимоисключающие консеквенты (следствия).

При этом можно ввести понятие степени непротиворечивости между i-м и k-м правилами C_{ik} и считать её в примере модели нечёткого управления паровым котлом следующей величиной

$$C_{ik} = \left| \max_{x,y}(\mu_{A_i \times B_i}(x,y) \wedge \mu_{A_k \times B_k}(x,y)) - \max_{z}(\mu_{C_i}(z) \wedge \mu_{C_k}(z)) \right|. \qquad (4.33)$$

И тогда оценить непротиворечивость i-го правила из множества управляющих правил можно, просуммировав все непротиворечивости между i-м и k-м правилами C_{ik} по переменной k:

$$C_i = \sum_{k=1}^{N} C_{ik}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N. \qquad (4.34)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вторая часть учебного пособия по основам интеллектуальных автоматизированных систем посвящена изучению вопросов, связанных с нечёткими и лингвистическими переменными, а также нечёткими высказываниями.

Надеемся, что изучение подробных примеров практически к каждому даваемому определению и понятию позволит студентам до мельчайших подробностей разобраться с учебным материалом пособия и подготовиться к применению полученных знаний в профессиональной деятельности при решении различных прикладных задач.

Авторы планируют подготовку и издание других частей данного пособия, посвящённых алгоритмам нечёткого вывода, нечётким реляционным моделям, системам нечётких моделей, области применения нечётких моделей, способам представления и обработки знаний в интеллектуальных системах и другим вопросам создания интеллектуальных автоматизированных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нечёткая логика и нейронные сети : методические указания / сост. : С. И. Абрахин, А. В. Лоханов, К. С. Хорьков. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 60 с.
2. Основы нечёткой логики : учебно-методическое пособие / сост. : Д. Р. Григорьева, Г. А. Гареева, Р. Р. Басыров. – Набережные Челны : Изд-во НЧИ КФУ, 2018. – 42 с.
3. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде ; пер. с англ. – Москва : Мир, 1976. – 167 с.
4. Евтушенко, В. Ю. Нечёткая модель управления паровым котлом / В. Ю. Евтушенко, Е. Ю. Косенко // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 1. – С. 130 – 136.
5. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – Москва : Радио и связь, 1982. – 432 с.
6. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MatLab и fuzzyTECH / А. В. Леоненков. – Санкт_Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.
7. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д. А. Поспелова. – Москва : Наука ; Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 312 с.
8. Нечёткие множества и теория возможностей. Последние достижения / под ред. Р. Р. Ягера ; пер. с англ. – Москва : Радио и связь, 1986. – 408 с.
9. Орловский, С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой входной информации / С. А. Орловский. – Москва : Наука ; Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 208 с.
10. Представление знаний в информационных системах : учебное пособие / Ю. Ю. Громов и др. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 168 с.
11. Прикладные нечеткие системы / К. Асаи и др. ; пер. с япон. – Москва : Мир, 1993. – 368 с.
12. Рыбанов, А. А. Методы анализа нечеткой информации [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. А. Рыбанов, М. В. Фадеева. – Волгоград : Изд-во ВолгГТУ, 2019. – 69 с.
13. Сапкина, Н. В. Свойства операций над нечёткими числами / Н. В. Сапкина // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2013. – № 1. – С. 23 – 28.
14. Тарасян, В. С. Пакет Fuzzy Logic Tolbox for MatLab : учебное пособие / В. С. Тарасян. – Екатеринбург : Изд-во УрГУПС, 2013. – 112 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное электронное издание

АЛЕКСЕЕВ Владимир Витальевич
КУЛАКОВ Юрий Владимирович
МИНИН Юрий Викторович
ШАХОВ Николай Гурьевич

ОСНОВЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ

В четырёх частях

Часть 2

Учебное пособие

Редактор И. В. Калистратова
Компьютерное макетирование Т. Ю. Зотовой
Обложка, упаковка, тиражирование И. В. Калистратовой

ISBN 978-5-8265-2521-0

Подписано к использованию 12.04.2023.
Тираж 50 шт. Заказ № 28

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Телефон (4752) 63-81-08
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru