

Рис. 4.3.1

3°. Рассуждения, приводящие к разложению $f(z)$ в ряд (4.3.1), будут носить тот же характер, что в параграфе 4.2. Проведем внутри кольца окружности γ и Γ с центром в точке z_0 так, чтобы z оказалась внутренней точкой в новом кольце (т.е. между γ и Γ); пусть c – окружность (с центром в точке z) столь малого радиуса, что также расположена между γ и Γ . Теперь по теореме Коши для многосвязной области (ограниченной c , γ и Γ) имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)}{s-z} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds,$$

если теорему применить к аналитической функции $\frac{f(s)}{s-z}$.

По интегральной формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(s)}{s-z} ds = f(z),$$

следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds - \int_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z} ds \right). \quad (4.3.3)$$

Представим дробь $\frac{1}{s-z}$ на окружности Γ в виде

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} = \frac{1}{s-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n,$$

так как при $q = \frac{z-z_0}{s-z_0}$ имеем на Γ $|q| < 1$, а значит

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Подобным образом на γ :

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z-z_0} \left(-\frac{1}{1 - \frac{s-z_0}{z-z_0}} \right) = -\frac{1}{z-z_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{s-z_0}{z-z_0} \right)^m,$$

так как $q = \frac{s-z_0}{z-z_0}$ обладает свойством $|q| < 1$ на γ .

Почленно интегрируя в (4.3.3) полученные ряды (обоснование почленного интегрирования было приведено в параграфе 4.2), получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds \right) \cdot (z-z_0)^n +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{-m}} ds \right) \cdot \frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}. \quad (4.3.4)$$

Если во второй сумме изменить нумерацию по формуле $n = m + 1$ и обозначить

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{n+1}} ds; \quad C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{-n+1}} ds,$$

то приходим к доказываемому разложению вида (4.3.2). При вычислениях C_n контуром интегрирования (согласно теореме Коши для двусвязной области) может быть выбрана любая окружность ℓ (с центром в точке z_0), расположенная целиком в данном кольце (вместо ранее рассмотренных контуров γ и Γ).

Итак, согласно (4.3.4)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad (4.3.5)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(s)}{(s-s_0)^{n+1}} ds; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3.6)$$

4°. Поставленная задача решена: $f(z)$, аналитичная в указанном кольце, может быть представлена в виде суммы ряда (4.3.5), называемой *рядом Лорана*; коэффициенты ряда вычисляются по формулам (4.3.6).

Впрочем, иногда можно применить другие, более простые приемы. Продемонстрируем их на примерах.

5°. **Пример 1.** Функцию $f(z) = \frac{1}{z+2}$ разложить в ряд по степеням $(z-1)$.

Решение. Центром кольца (или колец), в которых будет происходить разложение, должна быть, согласно условию, точка $z_0 = 1$. Особой точкой является $z_1 = -2$, лежащая на окружности с центром z_0 радиуса $R = 3$ (см. рис. 4.3.1), т.е. на окружности $|z-1| = 3$.

Следовательно, предстоит вести рассмотрение для $|z-1| < 3$ и $|z-1| > 3$ отдельно. В каждом случае воспользуемся суммой бесконечной геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - \dots + (-1)^n q^n + \dots; \quad |q| < 1.$$

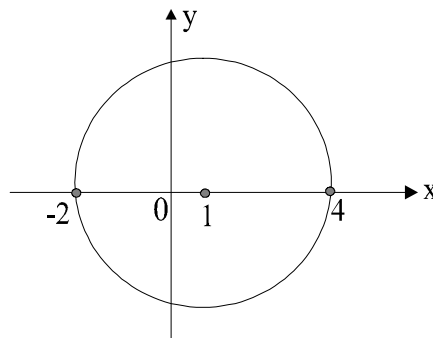


Рис. 4.3.1

В первом случае представим

$$f(z) = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}.$$

Здесь $|q| = \left| \frac{z-1}{3} \right| < 1$ для $|z-1| < 3$; следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{z-1}{3} + \frac{(z-1)^2}{3^2} - \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^n} + \dots \right).$$

Во втором случае

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z-1}}$$

для $|q| = \left| \frac{3}{z-1} \right| < 1$ (а это верно при $|z-1| > 3$) имеем

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \cdot \left(1 - \frac{3}{z-1} + \frac{3^2}{(z-1)^2} - \dots + (-1)^n \frac{3^n}{(z-1)^n} + \dots \right).$$

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{3} - \frac{z-1}{3^2} + \frac{(z-1)^2}{3^3} - \dots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{3^{n+1}} + \dots \quad \text{в круге } |z-1| < 3;$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{3}{(z-1)^2} + \frac{3^2}{(z-1)^3} - \dots + (-1)^n \frac{3^n}{(z-1)^{n+1}} + \dots \quad \text{для } |z-1| > 3.$$

Пример 2. $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z}$ разложить по степеням z .

Решение. Функция $f(z)$ аналитична при всех $z \neq 0$, т.е. для $|z| > 0$. В этой области воспользуемся разложением Маклорена функции $\cos w$ (см. (2.5.3)) при $w = \frac{1}{z}$:

$$\cos \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!z^4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{2n}} + \dots$$

Почленно умножая на z^3 , получаем разложение

$$f(z) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{4!z} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{2n-3}} + \dots; \quad |z| > 0.$$

4.4. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ

1°. Особая точка z_0 функции $f(z)$, т.е. точка, в которой $f(z)$ не аналитична, называется *изолированной*, если в некоторой окрестности z_0 не существует других особых точек для $f(z)$. Другими словами, $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 , но не в самой этой точке.

Окрестностью точки z_0 служит "кольцо" вида $R_1 < |z - z_0| < R_2$, для которого $R_1 = 0$. Разложение Лорана $f(z)$ в этом "кольце" называем *рядом Лорана в окрестности данной изолированной особой точки*.

Будем называть ряд

$$C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots \quad (4.4.1)$$

правильной частью, а ряд

$$\frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots \quad (4.4.2)$$

— *главной* частью ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n. \quad (4.4.3)$$

Возможны также случаи:

а) Ряд Лорана (4.4.3) состоит из своей правильной части, т.е.

$$C_{-1} = C_{-2} = \dots = C_{-n} = \dots = 0.$$

Тогда точку z_0 называем *устранимой* особой точкой (из дальнейших рассуждений станет ясно, почему выбран такой термин).

б) Главная часть ряда Лорана содержит только конечное число ненулевых членов, например, она имеет вид

$$\frac{C_{-1}}{z - z_0} + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad \text{т.е. } C_{-(n+1)} = C_{-(n+2)} = \dots = 0.$$

В этом случае точку z_0 называем *полюсом n -го порядка*; в частности, при $n=1$ — *простым полюсом*.

в) если главная часть (4.4.2) имеет бесконечное количество ненулевых членов, то точка z_0 называется *существенно особой*.

2°. Рассмотрим случай а). Имеет место

Т е о р е м а 1. Если в некоторой окрестности особой точки z_0 функция $f(z)$ ограничена, т.е. существует постоянная M , такая, что $|f(z)| < M$ во всех точках этой окрестности, то z_0 – устранимая особая точка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что $C_{-n} = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Имеем согласно (4.3.6) для произвольной окружности ℓ с центром в точке z_0 радиуса ρ (столь малого, что окружность ℓ целиком расположена в указанной окрестности), что

$$|C_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\ell} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot \frac{1}{\rho^{-n+1}} \cdot 2\pi\rho = M\rho^n,$$

если повторить рассуждения п. 5⁰ параграфа 3.9. В силу произвольной малости ρ все $C_{-n} = 0$, что и утверждалось.

Итак, в окрестности устранимой особой точки z_0

$$f(z) = C_0 + C_1(z-z_0) + \dots + C_n(z-z_0)^n + \dots \quad (4.4.4)$$

Если в точке z_0 доопределить функцию $f(z)$ суммой этого ряда при $z = z_0$, т.е. положить $f(z_0) = C_0$, то (4.4.4) как сумма степенного ряда в круге $|z-z_0| < R$ будет аналитична (в том числе, аналитична и в точке z_0). Тем самым мы как бы устранили "особенность" в точке z_0 , сделав эту точку правильной.

Например, при $z \neq 0$ из соотношения (2.5.2) получаем

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} + \dots,$$

т.е. точка $z = 0$ является особой и устранимой. Достаточно положить $\frac{\sin z}{z} = 1$ при $z = 0$, чтобы эта точка стала правильной.

3⁰. Рассмотрим случай б).

Т е о р е м а 2. Точка z_0 тогда и только тогда является полюсом n -го порядка, когда существует аналитическая в точке z_0 функция $\varphi(z)$, такая что $\varphi(z_0) \neq 0$ и

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}. \quad (4.4.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z_0 – полюс n -го порядка, тогда (по определению)

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad C_{-n} \neq 0;$$

другими словами,

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \left(C_{-n} + (z-z_0)C_{-n+1} + \dots + C_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \right. \\ \left. + (z-z_0)^n \sum_{n=1}^{\infty} C_n (z-z_0)^n \right). \quad (4.4.6)$$

По условию (так как $f(z)$ в окрестности точки z_0 аналитична), правильная часть ряда Лорана – сходящийся (в окрестности точки z_0) степенной ряд, сумму которого можно считать аналитичной и в точке z_0 , доопределив ее значением C_0 (см. п. 2⁰). Следовательно, сумма, записанная в скобках в (4.4.6), – это некоторая аналитическая функция $\varphi(z)$, т.е. мы пришли к (4.4.5); при этом $\varphi(z_0) = C_{-n} \neq 0$.

Обратно, пусть $f(z)$ имеет вид (4.4.5) и $\varphi(z_0) \neq 0$. Разложив $\varphi(z)$ в ряд вида (4.2.2), имеем

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \{ C_0 + C_1(z-z_0) + \dots + C_n(z-z_0)^n + C_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots \} = \\ = \frac{C_0}{(z-z_0)^n} + \frac{C_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + C_n + C_{n+1}(z-z_0) + \dots,$$

где $C_0 = \varphi(z_0) \neq 0$. Таким образом, в полученном разложении Лорана коэффициент C_0 перед $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ отличен от нуля, т.е.

z_0 оказывается полюсом n -го порядка. Теорема полностью доказана.

Согласно (4.4.5), $z = z_0$ – полюс n -го порядка для $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта точка является нулем n -го порядка для функции $\frac{1}{f(z)}$.

Т е о р е м а 3. Точка $z = z_0$ является полюсом (n -го порядка) функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно формуле (4.4.5) в точке z_0 , являющейся полюсом n -го порядка

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\varphi(z)|}{|z - z_0|^n} = +\infty,$$

так как $\varphi(z_0)$ существует в силу аналитичности φ в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$.

Обратно, если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty, \text{ то } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0,$$

а тогда точка z_0 являются нулем (некоторого n -го порядка) для

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}, \text{ т.е. } (z - z_0)^n \varphi(z) = \frac{1}{f(z)},$$

где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$ (см. соотношение (4.2.8)).

Теперь

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n},$$

где $\frac{1}{\varphi(z)}$ аналитична в точке z_0 так как $\varphi(z_0) \neq 0$.

Следовательно, $f(z)$ имеем вид (4.4.5), а тогда, по теореме 2, $z = z_0$ – полюс n -го порядка. Теорема 3 доказана.

4⁰. Рассмотрим, наконец, случай в) существенно особой точки $z = z_0$. Поведение $f(z)$ в ее окрестности описывается следующей теоремой Сохоцкого-Вейерштрасса.

Т е о р е м а 4. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого комплексного числа B в каждой окрестности точки z_0 найдется хотя бы одна точка z , такая что

$$|f(z) - B| < \varepsilon.$$

Смысл теоремы состоит в том, что в достаточно малых окрестностях существенно особой точки $f(z)$ может принять значение, сколь угодно близкое к наперед заданному произвольному числу B .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: для заданных B и $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U точки z_0 , что

$$|f(z) - B| \geq \varepsilon \text{ при всех } z \in U.$$

Но тогда функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - B} \quad (4.4.7)$$

определена и ограничена в указанной окрестности точки z_0 , так как

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - B|} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно, согласно теореме 1, точка z_0 является устранимой особой точкой для $g(z)$. Тогда при $z \neq z_0$ $g(z)$ есть сумма степенного ряда (4.4.4), т.е. равна некоторой аналитической функции. При этом не исключено, что первые несколько коэффициентов C_0, C_1, \dots в (4.4.4) равны нулю, т.е.

$$g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z) \text{ при некотором } m = 0, 1, \dots; \varphi(z_0) \neq 0.$$

Согласно определению (4.4.7)

$$f(z) = B + \frac{1}{g(z)} = B + \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}. \quad (4.4.8)$$

Функция $\frac{1}{\varphi(z)}$ является аналитичной в окрестности точки z_0 . Действительно, вместе с $\varphi(z_0) \neq 0$ все значения $\varphi(z)$ из достаточно малой окрестности z_0 остаются ненулевыми, поскольку $\varphi(z)$ аналитична, а значит и непрерывна в этой окрестности. Согласно соотношению (4.4.8) для $m=0$ $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0 , т.е. z_0 – устранимая особая точка; для $m \neq 0$ (4.4.8) означает, что z_0 – полюс m -го порядка. В обоих случаях получаем противоречие с условием теоремы.

Значит, утверждение теоремы 4 установлено.

В иной форме теорема Сохоцкого-Вейерштрасса звучит так: если z_0 – существенно – особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа B найдется последовательность точек z_k , такая, что $z_k \rightarrow z_0$ и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = B.$$

Найдется также и последовательность $z_k \rightarrow z_0$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |f(z_k)| = +\infty.$$

5⁰. П р и м е р. Определить характер каждой особой точки функции:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)^3}; \text{ б) } f(z) = \operatorname{tg} z; \text{ в) } f(z) = \frac{1}{e^z - e}; \text{ г) } f(z) = \ln \frac{z+1}{z}.$$

Р е ш е н и е. а) Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - (2i)^2)^3} = \frac{z}{(z-2i)^3(z+2i)^3}.$$

Изолированными особыми точками являются $z_1 = 2i$ и $z_2 = -2i$. Рассмотрим случай z_1 :

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)^3} \cdot \frac{z}{(z+2i)^3} = \frac{\varphi(z)}{(z-2i)^3}, \text{ где } \varphi(z) = \frac{z}{(z+2i)^3}.$$

В точке $z_1 = 2i$ функция $\varphi(z)$ аналитична, при этом $\varphi(z_1) = \frac{2i}{(4i)^3} = -\frac{1}{32} \neq 0$. Теперь, согласно теореме 2 (см. (4.4.5)) видим, что $z_1 = 2i$ – полюс третьего порядка.

Аналогично,

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)^3} \cdot \psi(z), \text{ где } \psi(z) = \frac{z}{(z-2i)^3}$$

– аналитична в точке $z_2 = -2i$ и $\psi(-2i) \neq 0$; таким образом и точка $z_2 = -2i$ – полюс третьего порядка.

б) $f(z) = \operatorname{tg} z$ достаточно рассмотреть при $|z| \leq \pi$ в силу периодичности тангенса. Поскольку $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, и $\cos z = 0$

при $z = \pm \frac{\pi}{2}$, то следует определить "кратность" указанных нулей. Так как $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, то согласно разложению (2.5.2) имеем

$$\begin{aligned} \cos z &= \left(\frac{\pi}{2} - z\right) - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{2} - z\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - z\right) \cdot \varphi(z), \text{ где } \varphi(z) = 1 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{2} - z\right)^2 + \dots, \end{aligned}$$

при этом $\varphi(z)$ аналитична для $z_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi(z_0) = 1 \neq 0$.

Значит,

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} \cdot \frac{\sin z}{\varphi(z)}, \text{ где } \psi(z_0) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

для аналитической в точке $z_0 = \frac{\pi}{2}$ функции $\psi(z) = \frac{\sin z}{\varphi(z)}$, так что $\operatorname{tg} z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - z} \psi(z)$.

В силу (4.4.5) $z = \frac{\pi}{2}$ является простым полюсом для $f(z)$; точно так же, из представления $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ получаем, что $z = -\frac{\pi}{2}$ – простой полюс. С учетом периодичности $f(z)$ (период $T = \pi$) все точки вида $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – простые полюсы для $f(z) = \operatorname{tg} z$.

$$\text{в) } f(z) = \frac{1}{e^{z-1} - 1}, \text{ где согласно (2.5.1)}$$

$$e^{z-1} - 1 = \left(1 + \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} + \dots + \frac{(z-1)^n}{n!} + \dots\right) - 1 = (z-1) \left(1 + \frac{z-1}{2!} + \dots\right);$$

из этого представления вытекает, что

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-1},$$

где $\varphi(z) = \frac{1}{e\left(1 + \frac{z-1}{2!} + \dots\right)}$ – аналитична в точке $z = 1$ и $\varphi(1) = \frac{1}{e} \neq 0$. Следовательно, $z = 1$ – простой полюс функции $f(z)$.

г) Запишем $f(z)$ в виде $f(z) = \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$. Воспользовавшись разложением Маклорена (п. 5⁰ параграфа 4.2) логарифмической функции для аргумента $\frac{1}{z}$ (вместо z) имеем

$$\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(n+1)z^{n+1}} + \dots$$

Теперь мы видим, что $z = 0$ – существенно особая точка для $f(z)$.

6⁰. В связи с возможностью представления функций степенными рядами выделяют классы целых и мероморфных функций.

Рассмотрим функцию $f(z)$, однозначную и аналитическую в любой окрестности нуля. Как нам известно (параграф 4.2), ее можно представить в виде суммы ряда по целым неотрицательным степеням z . Возможны случаи:

а) коэффициенты ряда (4.2.2) $C_1 = C_2 = \dots = C_n = \dots = 0$, значения $f(z)$ при всех z совпадают с C_0 ; в этом случае $f(z) \equiv \operatorname{const}$;

б) среди коэффициентов ряда (4.2.2) – лишь конечное число ненулевых; в этом случае $f(z)$ есть многочлен $P_n(z)$ не-
которой степени n , $n \in \mathbb{N}$;

в) среди коэффициентов ряда (4.2.2) – бесконечное множество отличных от нуля чисел; в этом случае $f(z)$ называют *целой трансцендентной функцией*.

Ясно, что случай а) соответствует тому, что для $f(1/z)$ точка $z = 0$ является устранимой особой точкой, случай б) – тому что для $f(1/z)$ эта точка есть полюс n -го порядка; в случае в) имеем дело с существенно особой точкой.

Если функцию $f(z)$ можно представить в виде частного двух целых функций

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{\psi(z)}$$

(где $\psi(z)$ не равна нулю тождественно), то $f(z)$ называется *мероморфной функцией*. В частности, мероморфными являются функции целые (случай $\psi(z) \equiv 1$) и рациональные (частные двух многочленов).

Особыми точками мероморфной функцией $f(z)$ могут быть, очевидно, только нули функции $\psi(z)$, которые оказываются полюсами для $f(z)$; число полюсов может оказаться и бесконечным: так, например, функция $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ имеет полюсами все нули функции $\cos z$, количество которых бесконечно.

Можно доказать, что мероморфная функция, обладающая конечным количеством полюсов, представима в виде суммы целой и рациональной функций.

4.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1⁰. Разложить данную функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности данной точки z_0 , пользуясь стандартными разложениями:

$$\text{а) } f(z) = (z+2)e^z; \quad z_0 = -2;$$

б) $f(z) = \sin z$; $z_0 = \frac{\pi}{4}$;

в) $f(z) = \ln(z+2)$; $z_0 = -1$.

2⁰. Найти нули функции и определить порядок каждого из них:

а) $f(z) = (z^2 + 9)^2 (z^4 - 1)$; б) $f(z) = (1 - e^z)z^2$;

в) $f(z) = \sin z \cos z$; г) $f(z) = \frac{\sin^2 z}{z}$.

3⁰. Разложить в ряд Лорана данную функцию $f(z)$ в окрестности данной точки z_0 :

а) $f(z) = \frac{1}{z+6}$; $z_0 = 4$; б) $f(z) = \frac{1}{i-z}$; $z_0 = 2i$;

в) $f(z) = \sin \frac{\pi}{z-1}$; $z_0 = 1$; г) $f(z) = z^3 \ln \frac{2z-1}{2z}$; $z_0 = 0$;

д) $f(z) = (z+1)^3 \cos \frac{1}{z+1}$; $z_0 = -1$.

4⁰. Найти изолированные особые точки данных функций и указать их характер (для полюсов – указать их порядок):

а) $f(z) = \frac{1}{\sin 2z}$; б) $f(z) = e^{\frac{1}{i+z}}$; в) $f(z) = \frac{z+3}{(z^2 + iz)^3}$;

г) $f(z) = \frac{\pi}{1 - \cos z}$; д) $f(z) = \frac{z}{(z^2 + i)^4}$.

5.1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ВЫЧЕТАХ

1°. Пусть $z = z_0$ – *правильная или изолированная особая точка* однозначной функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 . Выберем произвольную окружность γ с центром в точке z_0 , целиком расположенную в указанной окрестности и направление обхода против часовой стрелки на γ .

Величину

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad (5.1.1)$$

назовем *вычетом* функции $f(z)$ относительно точки z_0 и обозначим в виде $\text{Выч}[f(z); z_0]$. При сформулированных условиях интеграл (5.1.1) существует и, в силу теоремы Коши для многосвязной (именно, двусвязной) области (см. (3.7.3)), не зависит от выбора контура интегрирования γ , расположенного в указанной окрестности точки z_0 .

2°. В разложении $f(z)$ в окрестности z_0 в ряд Лорана

$$C_{-1} = \text{Выч}[f(z); z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Тогда для правильной или устранимой особой точки z_0 имеем всегда $\text{Выч}[f(z); z_0] = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно, так как в случае полюса или существенно особой точки z_0 может оказаться $C_{-1} \neq 0$.

3°. **Пример 1.** Найти $\text{Выч}\left[z \cos \frac{1}{z^2}; 0\right]$.

Решение. Используем разложение (2.5.3), взяв в качестве аргумента $\frac{1}{z^2}$:

$$\cos \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{4!z^8} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{4n}} + \dots,$$

тогда в окрестности точки $z_0 = 0$

$$z \cos \frac{1}{z^2} = z - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z^7} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!z^{4n-1}} + \dots$$

Теперь мы видим, что $z_0 = 0$ – существенно особая точка данной функции, но член, содержащий $\frac{1}{z}$ (случай $n = -1$) в ее разложении отсутствует, т.е. $C_{-1} = 0$. Значит, искомый вычет равен нулю.

Пример 2. Найти $\text{Выч}\left[\frac{1}{z+i}; i\right]$.

Решение. Так как в точке $z_0 = i$ функция $f(z) = \frac{1}{z+i}$ – аналитична, ($f(i) = \frac{1}{2i}$ и в круге $|z-i| < 2$ не содержится особых точек для $f(z)$; читателю рекомендуется сделать рисунок), то искомый вычет равен нулю.

4°. Пусть Γ – замкнутый контур, гладкий или кусочно-гладкий, обходимый против часовой стрелки и ограничивающий односвязную область D , а функция $f(z)$ однозначна и аналитична на Γ , а также в области D за исключением n изолированных особых точек z_1, z_2, \dots, z_n . Следующий результат называется *основной теоремой о вычетах*.

Т е о р е м а. Имеет место равенство:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}[f(z); z_k].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим n окружностей γ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) с центрами в особых точках z_1, z_2, \dots, z_n столь малых радиусов, что каждый из полученных кругов содержит ровно одну особую точку (свой центр). Обход на каждой из них выбирается против часовой стрелки (рис. 5.1.1). В силу теоремы Коши для составного контура имеем

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$$

или

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Выч}[f(z); z_k],$$

что и утверждалось.

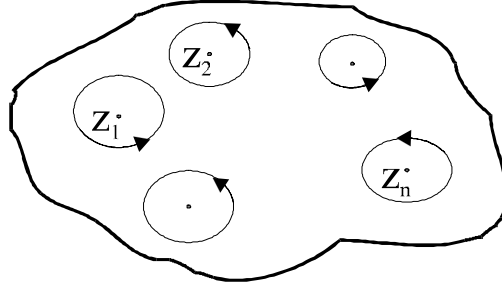


Рис. 5.1.1

5.2. ВЫЧЕТ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛЮСА

1°. Пусть $z = z_0$ — простой полюс. Докажем, что

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z). \quad (5.2.1)$$

Так как в окрестности точки z_0

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — сумма степенного ряда, являющегося правильной частью ряда Лорана, то

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = C_{-1} = (z - z_0) f(z) - (z - z_0) \varphi(z). \quad (5.2.2)$$

При этом предел $\varphi(z)$ при $z \rightarrow z_0$ существует (именно, он равен $\varphi(z_0)$), так как $\varphi(z)$ как сумма степенного ряда аналитична, а значит и непрерывна в точке z_0 . Но тогда

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \lim_{z \rightarrow z_0} C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \varphi(z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) - 0 \cdot \varphi(z_0). \end{aligned}$$

Согласно (5.2.2) теперь получаем формулу (5.2.1).

2°. Если $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0 , $\varphi(z_0) \neq 0$ и z_0 является нулем первого порядка для $\psi(z)$, то имеет место соотношение

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (5.2.3)$$

Действительно, согласно формуле (5.2.1)

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}}, \quad (5.2.4)$$

поскольку $\psi(z_0) = 0$. Предел числителя дроби в (5.2.4) равен $\varphi(z_0)$, предел знаменателя

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} = \psi'(z_0)$$

по определению производной. Следовательно,

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

что и утверждалось.

3⁰. П р и м е р 1. Найти Выч[ctgz; 0].

Р е ш е н и е. Так как $\text{ctgz} = \frac{\cos z}{\sin z}$ и точка $z = 0$ – простой полюс для $\sin z$, причем $\cos 0 = 1$, то по формуле (5.2.3) имеем

$$\text{Выч}[\text{ctgz}; 0] = \frac{\cos z}{(\sin z)'} \Big|_{z=0} = \frac{\cos z}{\cos z} \Big|_{z=0} = 1.$$

П р и м е р 2. Вычислить

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 16} dz,$$

где γ – окружность $|z| = 5$, обходимая против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Так как функция $e^{\pi z}$ аналитична при всех z ,

$$z^2 + 16 = (z - 4i)(z + 4i),$$

то

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z - 4i)(z + 4i)}$$

имеет два простых полюса в круге $|z| \leq 5$: $z_1 = 4i$, $z_2 = -4i$. Мы намерены использовать основную теорему о вычетах, поэтому определяем (на основании (5.2.3))

$$\begin{aligned} \text{Выч}[f(z), 4i] &= \text{Выч} \left[\frac{e^{\pi z}}{z + 4i}, 4i \right] = \frac{e^{\pi z}}{(z + 4i)'} \Big|_{z=4i} = \frac{e^{\pi z}}{z + 4i} \Big|_{z=4i} = \\ &= \frac{e^{4\pi i}}{8i} = \frac{1}{8} \cdot \frac{i}{i^2} (\cos 4\pi + i \sin 4\pi) = -\frac{i}{8}; \\ \text{Выч}[f(z), -4i] &= \text{Выч} \left[\frac{e^{\pi z}}{z - 4i}, -4i \right] = \frac{e^{\pi z}}{(z - 4i)'} \Big|_{z=-4i} = -\frac{1}{8i} e^{-4\pi i} = \frac{i}{8}. \end{aligned}$$

Теперь

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 16} dz = 2\pi i (\text{Выч}[f(z), 4i] + \text{Выч}[f(z), -4i]) = 2\pi i \left(-\frac{i}{8} + \frac{i}{8} \right) = 0.$$

4⁰. Рассуждения, использовавшие в п. 1⁰, можно применить и для нахождения вычета функции $f(z)$, аналитичной в окрестности точки z_0 , относительно полюса n -го порядка $z = z_0$. В окрестности этой точки

$$f(z) = \frac{C_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{C_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z - z_0} + \varphi(z),$$

где сумма $\varphi(z)$ правильной части ряда Лорана является аналитической в точке z_0 . Умножив обе части последнего равенства на $(z - z_0)^n$, имеем

$$\begin{aligned} (z - z_0)^n f(z) &= C_{-n} + C_{-(n-1)}(z - z_0) + \dots + C_{-2}(z - z_0)^{n-2} + \\ &\quad + C_{-1}(z - z_0)^{n-1} + \varphi(z) \cdot (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

При $z \neq z_0$ в указанной окрестности точки z_0 равны между собой и производные обеих частей равенства:

$$\begin{aligned} \left((z - z_0)^n f(z) \right)' &= C_{-(n-1)} + \dots + C_{-2}(n-2)(z - z_0)^{n-3} + \\ &\quad + C_{-1}(n-1)(z - z_0)^{n-2} + \left(\varphi(z) (z - z_0)^n \right)'. \end{aligned}$$

Дифференцируя второй, третий, ..., и наконец, $(n-1)$ раз, получаем, что коэффициент перед C_{-1} становится равным $(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1 = (n-1)!$, а остальные члены, содержавшие множители $(z-z_0)^k$, $k=1, 2, \dots, n-2$ в равенстве (5.2.5), обращаются в ноль, так как $k < n-1$. Следовательно,

$$\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)} = 0 + (n-1)!C_{-1} + \left(\varphi(z)(z-z_0)^n\right)^{(n-1)}. \quad (5.2.6)$$

Последнее слагаемое содержит множитель $(z-z_0)^n$, поэтому дифференцирование $(n-1)$ раз члена $\varphi(z)(z-z_0)^n$ превратит его в сумму произведений, каждое из которых содержит множитель $(z-z_0)^k$, $k=1, \dots, n$. Если теперь перейти к пределу при $z \rightarrow z_0$ в (5.2.6), то, согласно последнему рассуждению, имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\varphi(z) \cdot (z-z_0)^n\right)^{(n-1)} = 0,$$

а тогда из равенства (5.2.6) получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)} = (n-1)!C_{-1},$$

откуда

$$\text{Выч}[f(z); z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)}. \quad (5.2.7)$$

Формулу (5.2.7) можно рассматривать как обобщение (5.2.1) на случай полюса n -го порядка, $n=2, 3, \dots$

5⁰. П р и м е р. Найти $\text{Выч}\left[\left(\frac{z-i}{z^2-1}\right)^3; -1\right]$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$f(z) = \frac{(z-i)^3}{(z-1)^3(z+1)^3},$$

поэтому точка $z_0 = -1$ является полюсом 3-го порядка. По формуле (5.2.7) получаем при $n=3$:

$$\begin{aligned} \text{Выч}\left[\left(\frac{z-i}{z^2-1}\right)^3, -1\right] &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z \rightarrow -1} \left((z+1)^3 \cdot \frac{(z-i)^3}{(z-1)^3(z+1)^3}\right)'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z-i)^3}{(z-1)^3}\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\left(\frac{(z-i)^3}{(z-1)^3}\right)'\right)' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{3(z-i)^2(z-1)^3 - 3(z-i)^3(z-1)^2}{(z-1)^6}\right)' = \\ &= \frac{3}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z-i)^2(z-1)^2(z-1-z+i)}{(z-1)^6}\right)' = \\ &= \frac{3(i-1)}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \left(\frac{(z-i)^2}{(z-1)^4}\right)' = \frac{3(i-1)}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2(z-i)(z-1)^4 - 4(z-i)^2(z-1)^3}{(z-1)^8} = \\ &= 3(i-1) \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(z-i)(-z-1+2i)}{(z-1)^5} = 3(i-1) \cdot \frac{-(1+i) \cdot 2i}{-32} = -\frac{3}{8}i. \end{aligned}$$

6⁰. Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в односвязной области D и простой замкнутый контур L , гладкий или кусочно-гладкий, целиком расположенный в D , в каждой точке которого $f(z)$ отлична от нуля. При этих условиях функция $f(z)$ может иметь внутри лишь конечное число нулей (как оказывается, в противном случае предельная точка множества нулей тогда бы оказалась на контуре L , что противоречило бы условию $f(z) \neq 0$ на L). Интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (5.2.8)$$

(направление обхода контура – против часовой стрелки) называется *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ относительно контура L ; название объясняется тем, что подынтегральная функция в (5.2.8) есть производная от $\text{Ln } f(z)$.

Докажем следующее утверждение. Если точка a – нуль кратности k функции $f(z)$, то a – простой полюс функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ и $\text{Выч} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a \right] = k$.

Во-первых, по определению нуля кратности k имеем $f(z)$ в виде $f(z) = (z-a)^k \phi(z)$, $\phi(a) \neq 0$, а поэтому

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1} \phi(z) + (z-a)^k \phi'(z)}{(z-a)^k \phi(z)} = \frac{k + (z-a) \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}}{z-a},$$

при этом значение числителя последней дроби в точке a есть число k . По формуле (5.2.3) вычисления вычета относительно простого полюса имеем значение $\text{Выч} \left[\frac{f'(z)}{f(z)}, a \right]$ равным $\frac{k}{1}$, что и утверждалось.

Если теперь интеграл (5.2.8) представить по основной теореме о вычетах, то он окажется равным сумме (состоящей из n слагаемых) значений всех k_i , где k_i есть кратность соответствующего нуля $z = z_i$ функции $f(z)$; $i = 1, \dots, n$.

Итак, число нулей N функции $f(z)$ внутри контура L (с учетом их кратности) есть логарифмический вычет функции относительно этого контура.

7°. Полученный в предыдущем пункте результат

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L d \text{Ln } f(z) = N$$

может быть записан в виде

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_L d \left(\left| \ln f(z) \right| + i \text{Arg } f(z) \right) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_L d \left| \ln f(z) \right| + i \int_L d \text{Arg } f(z) \right). \quad (5.2.9)$$

Первый из слагаемых интегралов (5.2.9) равен нулю (интеграл от дифференциала однозначной действительнoзначной функции по замкнутому контуру), а второй – есть приращение (полная вариация) аргумента $\text{Arg } f(z)$ при обходе точкой z замкнутого круга L .

Итак, доказан так называемый *принцип аргумента*: число нулей аналитической функции $f(z)$ внутри контура L (с учетом их кратности) равно деленному на 2π приращению $\text{Arg } f(z)$ при обходе точкой z контура L против часовой стрелки.

5.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1°. Рассмотрим функцию $f(z)$, которая однозначна и аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ за исключением конечного числа изолированных особых точек. Пусть также существуют положительные числа M и R_0 , такие что вне круга радиуса R_0 с центром в начале координат, т.е. при $|z| > R_0$, имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^2}. \quad (5.3.1)$$

Обозначим через Γ_R полуокружность $|z| = R$, $\text{Im } z > 0$ в верхней полуплоскости (рис. 5.3.1).

Тогда при сформулированных условиях имеет место равенство

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (5.3.2)$$

Действительно, так как $|f(z)| < \frac{M}{R^2}$ при $|z| = R$, $R > R_0$, в силу соотношения (5.3.1), то

$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \cdot \pi R = \frac{\pi M}{R}, \quad (5.3.3)$$

где πR – длина рассматриваемой полуокружности.

При $R \rightarrow +\infty$ правая часть (5.3.3) стремится к нулю, а тогда стремится к нулю и модуль интеграла, содержащегося в (5.3.2). Соотношение (5.3.2) доказано.

2°. Условию (5.3.1) удовлетворяет всякая функция $f(z)$, имеющая разложение в ряд Лорана вида

$$f(z) = \frac{C_{-2}}{z^2} + \frac{C_{-3}}{z^3} + \dots$$

Действительно, в этом случае

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(C_{-2} + \frac{C_{-3}}{z} + \dots \right) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad (5.3.4)$$

где $\varphi(z)$ – сумма ряда, записанного в скобках.

Заметим (опуская аккуратное доказательство), что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = C_{-2}$$

поэтому $\varphi(z)$ остается ограниченной при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, из соотношения (5.3.4) будет вытекать оценка (5.3.1), а тогда для рассматриваемых в п. 2⁰ функций справедливо утверждение (5.3.2).

3⁰. Утверждение (5.3.2) справедливо также для рациональных функций вида

$$f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

где $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ – многочлены соответствующих степеней, $m \leq n-2$ и $Q_n(z)$ не имеет нулей на действительной оси.

В самом деле, все полюсы функции $f(z)$ – это нули многочлена $Q_n(z)$, и, следовательно, в верхней полуплоскости их конечное число. Далее, многочлен $z^2 P_m(z)$ имеет степень $m+2$, т.е. степень n знаменателя дроби остается большей или равной степени $z^2 P_m(z)$.

Тогда, вычисляя предел (при $z \rightarrow \infty$) дроби $\frac{z^2 P_m(z)}{Q_n(z)}$ (путем деления на старшую степень z^n каждого члена числителя и знаменателя), получаем некоторое число. Следовательно, эта дробь остается ограниченной при $z \rightarrow \infty$:

$$\left| \frac{z^2 P_m(z)}{Q_n(z)} \right| \leq M, \text{ откуда } |f(z)| = \left| \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Условие (5.3.1) выполнено, т.е. соотношение (5.3.2) оказывается справедливым также для рассматриваемых рациональных функций.

4⁰. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ определим в виде предела

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx, \quad (5.3.5)$$

если указанный предел существует (такое определение называется определением в смысле главного значения).

Т е о р е м а. Пусть z_1, z_2, \dots, z_N – изолированные особые точки функции $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости, при этом $f(z)$ удовлетворяет условиям п. 1⁰ и не имеет особых точек на действительной оси. Тогда несобственный интеграл (5.3.5) существует и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим полуокружность Γ_R столь большого радиуса R , что все особые точки z_1, z_2, \dots, z_N расположены внутри Γ_R ; пусть $R > R_0$ (см. рис. 5.3.1). Пусть L_R – контур, состоящий из отрезка $[-R, R]$ оси абсцисс и полуокружности Γ_R ; обход на L_R выбираем в направлении против часовой стрелки. Тогда

$$\int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \oint_{L_R} f(z) dz,$$

при этом на отрезке $[-R, R]$ имеем $z = x + 0 \cdot i$ и $dz = dx$, т.е.

$$\int_{-R}^R f(x) dx = - \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \oint_{L_R} f(z) dz. \quad (5.3.6)$$

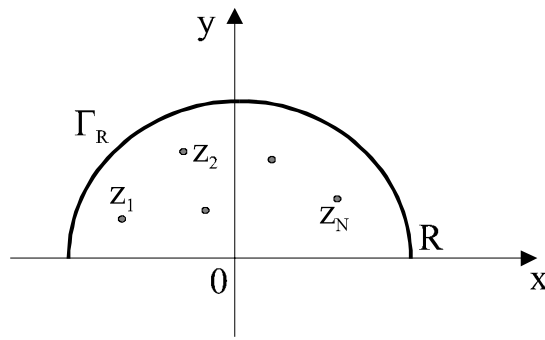


Рис. 5.3.1

Согласно основной теореме о вычетах, применимой к интегралу по L_R , имеем

$$\oint_{L_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k],$$

тогда соотношение (5.3.6) принимает вид

$$\int_{-R}^R f(x) dx = - \int_{\Gamma_R} f(z) dz + 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k].$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $R \rightarrow \infty$. В силу (5.3.2) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 0 + 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k],$$

что и есть утверждение теоремы.

5⁰. Можно доказать также, что для четной $f(x)$ такой, что $f(z)$ удовлетворяет условиям п. 1⁰, имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos \mu x dx = \pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[e^{i\mu z} f(z); z_k], \quad (5.3.7)$$

а для нечетной $f(x)$

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \mu x dx = \pi \sum_{k=1}^N \text{Выч}[e^{i\mu z} f(z); z_k]; \quad (5.3.8)$$

здесь $\mu > 0$ – любое, а особые точки z_k функции $f(z)$ лежат в верхней полуплоскости.

5.4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

1⁰. Докажем формулы ($a = \text{const}$, $\mu = \text{const}$; $a, \mu > 0$):

$$\text{а) } \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2a};$$

$$\text{б) } \int_0^{\infty} \frac{x \sin \mu x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2}.$$

В случае а) используем формулу (5.3.7); здесь $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ – четная. Функция

$$\varphi(z) = e^{i\mu z} \cdot \frac{1}{a^2 + z^2} = \frac{e^{i\mu z}}{(z - ai)(z + ai)}$$

имеет два простых полюса $z_1 = ai$, $z_2 = -ai$; в верхней полуплоскости расположена точка z_1 . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos \mu x}{a^2 + x^2} dx &= \pi i \cdot \text{Выч} \left[\frac{e^{i\mu z}}{(z - ai)(z + ai)}; ai \right] = \pi i \cdot \text{Выч} \left[\frac{(z + ai)^{-1} e^{i\mu z}}{z - ai}; ai \right] = \\ &= \pi i \frac{(z + ai)^{-1} e^{i\mu z}}{(z - ai)'} \Big|_{z = ai} = \pi i \frac{(ai + ai)^{-1} e^{i\mu(ai)}}{1} = \frac{\pi i}{2ai} e^{-\mu a} = \frac{\pi e^{-\mu a}}{2a}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой (5.2.3) при вычислении вычета.

В случае б) применяем равенство (5.3.8) для нечетной $f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}$. Вычисляя, как и выше, вычет функции $e^{iz} f(z)$ относительно $z_1 = ai$, получаем результат б). Читателю рекомендуется сделать выкладки подробнее.

З а м е ч а н и е. Мы не останавливаемся на обосновании применимости формул (5.3.7) и (5.3.8) для рассматриваемых здесь функций $f(z)$.

2⁰. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}; \quad a \neq 0.$$

Имеем рациональную функцию

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^2}.$$

Степень числителя $m = 0$, знаменатель имеет степень $n = 4$, так что $m \leq n - 2$. При этом

$$f(z) = \frac{1}{(z - ia)^2(z + ia)^2};$$

ее полюсы второго порядка $z_1 = ia$ и $z_2 = -ia$ не лежат на оси OX . Значит, $f(z)$ удовлетворяет условиям п. 3⁰ параграфа 5.3, и можно применить теорему пункта 4⁰ того же параграфа. В верхней полуплоскости расположен полюс $z_1 = ia$ (для определенности считаем $a > 0$); тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = 2\pi i \cdot \text{Выч} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^2}; ia \right].$$

Указанный вычет найдем по формуле (5.2.7); $n = 2$. Имеем:

$$\begin{aligned} \text{Выч} \left[\frac{1}{(z - ia)^2(z + ia)^2}; ia \right] &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \rightarrow ia} \left((z - ia)^2 \cdot \frac{1}{(z - ia)^2(z + ia)^2} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} \left(\frac{1}{(z + ia)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{-2}{(z + ia)^3} = -\frac{2}{8i^3 a^3} = -\frac{1}{4a^3} i. \end{aligned}$$

Теперь, в силу четности $f(x)$:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \pi i \cdot \left(-\frac{1}{4a^3} i \right) = \frac{\pi}{4a^3}.$$

3⁰. Получим формулу для вычисления интегралов вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt,$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция действительных переменных u, v , непрерывная как функция (сложная) от t на $[0, 2\pi]$.

Докажем, что

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi \sum_{k=1}^N \text{Выч} [f(z); z_k], \quad (5.4.1)$$

где z_k – все полюсы функции

$$f(z) = \frac{1}{z} R \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right) \quad (5.4.2)$$

внутри окружности $|z| = 1$. Имеем:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right); \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

где $z = e^{it}$ – точки окружности $|z| = 1$, обходимой в направлении против часовой стрелки.

Поскольку $dz = e^{it} \cdot i \cdot dt = iz dt$ на этой окружности, а, значит, $dt = \frac{1}{iz} dz$, то

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right); \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} f(z) dz.$$

По основной теореме о вычетах вычисляемый интеграл равен

$$\frac{1}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z); z_k],$$

а это и есть утверждение (5.4.1).

Заметим, что построение функции $f(z)$ по формуле (5.4.2) весьма неудобно при решении конкретных задач; проще бывает повторить все рассуждения п. 3⁰.

4⁰. П р и м е р. Вычислить $J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}$.

Р е ш е н и е. Имеем $\sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ и $dt = \frac{1}{iz} dz$ на окружности $|z| = 1$. Следовательно,

$$J = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz} dz}{2 + \frac{z^2 - 1}{2iz}} = 2 \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

Поскольку $z^2 + 4iz - 1 = 0$ при $z_{1,2} = -2i \pm \sqrt{-3} = -i(2 \pm \sqrt{3})$, а среди этих двух точек только $z_2 = -i(2 - \sqrt{3})$ лежит внутри окружности $|z| = 1$, то для простого полюса z_2 функции $\frac{1}{z^2 + 4iz - 1}$ имеем

$$\begin{aligned} J &= 2 \cdot 2\pi i \cdot \text{Выч}\left[\frac{1}{z^2 + 4iz - 1}; -i(2 - \sqrt{3})\right] = \\ &= 4\pi i \frac{1}{(z^2 + 4iz - 1)'} \Big|_{z = -i(2 - \sqrt{3})} = \frac{4\pi i}{2z + 4i} \Big|_{z = -2i + i\sqrt{3}} = \frac{4\pi i}{2i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Найти вычеты относительно точки $z = 0$ функций:

а) $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$; б) $\sin \frac{\pi}{z}$.

2. Найти вычеты следующих функций относительно каждого из полюсов:

а) $\frac{z^2 + 3}{i - 2z}$; б) $\frac{e^{\pi z}}{z^2 + \pi^2}$; в) $\frac{\sin z}{(4z^2 - \pi^2)^2}$; г) $\text{tg} \frac{z}{2}$ при $|z| < 2\pi$.

3. С помощью основной теоремы о вычетах вычислить следующие интегралы (на окружностях выбрано направление обхода против часовой стрелки):

а) $\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \text{ctg} z \, dz$; б) $\oint_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z^2 + 1)^3}$; в) $\oint_{|z+1|=3} \frac{(z-i)dz}{(z^2 - 1)z^2}$ г) $\oint_{|z|=1} \frac{e^{-z} dz}{z^4}$.

4. С помощью вычетов вычислить следующие несобственные интегралы:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 4}{x^4 + 9} dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$.

5. С помощью вычетов найти:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos x - 2}.$$

Глава 6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

6.1. ОРИГИНАЛ

1°. Функция $f(t)$ называется *кусочно-непрерывной* на интервале $[0, \infty)$, если она либо непрерывна на $[0, \infty)$, либо имеет точки разрыва только первого рода, причем в каждом конечном интервале число точек разрыва – конечно.

Рассмотрение $f(t)$ именно при $t \geq 0$ связано с тем, что при изучении многих физических процессов роль переменной t играет время, и удобно предполагать, что процесс начинается в момент $t = 0$.

2°. Функция $f(t)$ называется *оригиналом* (начальной функцией), если:

- а) она кусочно непрерывна на $[0, \infty)$;
- б) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- в) существуют действительные числа α и $M > 0$, такие что

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \quad t \in [0, \infty).$$

Как правило, сами значения функции f действительного переменного t мы считаем действительными числами; наименьшее из всех возможных значений α , для которых выполнено условие в), называется *показателем роста* оригинала.

Схематический график оригинала показан на рис. 6.1.1; изображен случай $\alpha > 0$.

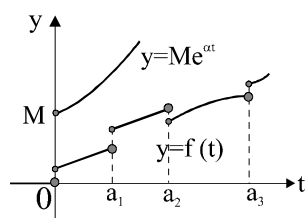


Рис 6.1.1

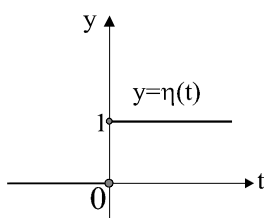


Рис 6.1.2

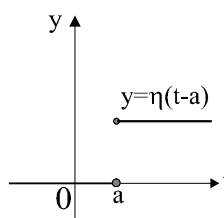


Рис 6.1.3

Обычно, функции, встречающиеся при моделировании физических процессов, удовлетворяют условиям а) – в); при рассмотрении процесса во времени (т.е. когда $t \geq 0$) совершенно не важно, как доопределить $f(t)$ при $t < 0$; всегда можно ее считать в этом случае равной нулю. Условию в) удовлетворяют все ограниченные функции, например, $\sin t$ и $\cos t$ – достаточно выбрать $\alpha = 0$ и $M = 1$. Известно также, что степенная функция $y = t^s (s > 0)$ растет медленнее $y = e^{\alpha t}$, для каждого $\alpha > 0$, а тогда при $\alpha = 1$ (для достаточно большого M) имеет место оценка в).

Существуют, конечно, и функции, не удовлетворяющие условию в), например, $y = e^{t^2}$ и др.

3°. Важным примером оригинала служит так называемая *единичная функция*:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } t \geq 0, \end{cases}$$

график которой изображен на рис. 6.1.2; условие в) выполнено при $\alpha = 0$ и $M = 1$. Более общий случай – это "смещенная" единичная функция (рис. 6.1.3):

$$\eta(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < a, \\ 1, & \text{если } t \geq a; \end{cases} \quad a = \text{const} > 0.$$

4°. Обозначения упомянутых выше функций $y = \sin t$, $y = \cos t$, $y = t^k$ и других здесь и в дальнейшем (в соответствии с условием б)) будут употребляться в случае функций вида, соответственно:

$$\eta(t) \sin t, \quad \eta(t) \cos t, \quad \eta(t) t^k, \dots$$

Единичную функцию удобно употреблять для записи в виде одного аналитического выражения разрывного оригинала. Так, например, если

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } t < a; \\ f_2(t) & \text{при } t \geq a, \end{cases}$$

то в момент времени $t = a$ следует "выключить" функцию $f_1(t)$ и "включить" $f_2(t)$. "Выключение" достигается вычитанием $f_1(t)$ из $f_1(t)$ в момент $t \geq a$, т.е. вычитанием $\eta(t-a)f_1(t)$, а "включение" $f_2(t)$ ее прибавлением к полученному выражению $f_1(t) - \eta(t-a)f_1(t)$ с этого же момента $t = a$, т.е. прибавлением $\eta(t-a)f_2(t)$. Следовательно,

$$f(t) = f_1(t) - \eta(t-a)f_1(t) + \eta(t-a)f_2(t). \quad (6.1.1)$$

Аналогичны рассуждения и в общем случае (см., например, рис. 6.1.1): если

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } t < a_1; \\ f_2(t) & \text{при } a_1 \leq t < a_2; \\ f_3(t) & \text{при } a_2 \leq t < a_3, \\ \dots \end{cases}$$

то

$$f(t) = f_1(t) - \eta(t-a_1)f_1(t) + \eta(t-a_1)f_2(t) - \\ - \eta(t-a_2)f_2(t) + \eta(t-a_2)f_3(t) - \dots$$

5°. Идея так называемого *операционного исчисления*, элементы которого мы рассматриваем в этой и последующей главе, состоит в рассмотрении не самих оригиналов, а их некоторых "образов", получаемых путем "преобразования Лапласа" (определения будут даны ниже). Переход к таким образам облегчает как математическое моделирование некоторых процессов, так и решение математических задач.

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

1°. Каждому оригиналу $f = f(t)$ поставим в соответствие *функцию комплексного переменного* p вида

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (6.2.1)$$

Интеграл (6.2.1) называется *изображением* оригинала $f(t)$ или *интегралом Лапласа*, а само соответствие F вида

$$f(t) \mapsto F(p),$$

определенное на классе всех оригиналов, – *преобразованием Лапласа*. Употребляют также обозначение $\dot{f}(t) \doteq (p)$,

$\dot{f}(t) \doteq L(f(t))$ и др.

2°. Сформулированное определение будет корректным, если мы докажем существование (сходимость) несобственного интеграла (6.2.1) для всякого оригинала $f(t)$ в некоторой области значений p . Для этого установим, что

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-pt}| dt < \infty. \quad (6.2.2)$$

Как и в случае функций с действительными значениями, отсюда будет следовать сходимость несобственного интеграла (6.2.1), которая в этом случае называется *абсолютной сходимостью*. Именно, справедлива.

Т е о р е м а. Пусть $f(t)$ – оригинал. Тогда интеграл Лапласа (6.2.1) абсолютно сходится при всех значениях p , удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} p > \alpha$, где α – показатель роста $f(t)$. В указанной области $F(p)$ аналитична.

В случае $\alpha > 0$ полуплоскость тех p , для которых $\operatorname{Re} p > \alpha$, изображена на рис. 6.2.1.

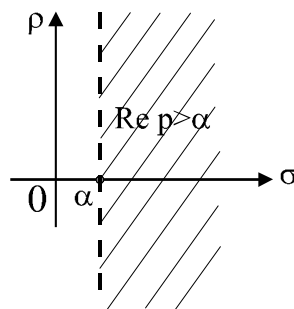


Рис. 6.2.1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сходимость несобственного интеграла (6.2.2). Если $p = \sigma + i\rho$, то

$$e^{-pt} = e^{-\sigma t}(\cos \rho t + i \sin \rho t),$$

тогда

$$|e^{-pt}| = e^{-\sigma t} \sqrt{\cos^2 \rho t + \sin^2 \rho t} = e^{-\sigma t},$$

т.е.

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt. \quad (6.2.3)$$

При этом, согласно условию в) п. 2⁰ параграфа 6.1,

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \text{ где } \alpha - \text{показатель роста.}$$

Подынтегральная функция в (6.2.3) тогда не превосходит

$$M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = M e^{(\alpha-\sigma)t},$$

а интеграл последней функции имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} M e^{(\alpha-\sigma)t} dt &= \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B M e^{(\alpha-\sigma)t} dt = M \cdot \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{e^{(\alpha-\sigma)t}}{\alpha-\sigma} \Big|_0^B = \\ &= \frac{M}{\sigma-\alpha} \lim_{B \rightarrow \infty} (1 - e^{(\alpha-\sigma)B}) = \frac{M}{\sigma-\alpha}, \end{aligned}$$

так как

$$\lim_{B \rightarrow \infty} e^{(\alpha-\sigma)B} = 0 \text{ для } \operatorname{Re} p = \sigma > \alpha.$$

Итак, выражение (6.2.3) мажорируем сходящимся при $\operatorname{Re} p > \alpha$ интегралом

$$\int_0^{\infty} M e^{(\alpha-\sigma)t} dt,$$

и, следовательно, в указанной полуплоскости абсолютно сходится (6.2.1).

Таким образом, для каждого оригинала $f(t)$ в области $\operatorname{Re} p > \alpha$ определено его изображение (6.2.1).

Аналитичность $F(p)$ означает его дифференцируемость при каждом из указанных p . Поскольку, как только что было доказано,

$$\int_0^{\infty} |f(t) e^{-pt}| dt \leq \int_0^{\infty} M e^{(\alpha-\sigma)t} dt < \infty,$$

т.е. интеграл Лапласа "мажорируем" сходящимся интегралом, то возможно дифференцирование под знаком интеграла (это свойство доказывается с помощью тех же идей, которые используются при доказательстве почленной дифференцируемости равномерно сходящихся рядов):

$$F'(p) = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt. \quad (6.2.4)$$

Остается доказать существование $F'(p)$ именно при тех p , для которых $\operatorname{Re} p > \alpha$. А это, в свою очередь, вытекает из оценки

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |t f(t) e^{-pt}| dt &\leq M \int_0^{\infty} t e^{(\alpha-\sigma)t} dt = \\ &= M \lim_{B \rightarrow \infty} \int_0^B t e^{(\alpha-\sigma)t} dt = M \lim_{B \rightarrow \infty} \left(\frac{t e^{(\alpha-\sigma)t}}{\alpha-\sigma} - \frac{e^{(\alpha-\sigma)t}}{(\alpha-\sigma)^2} \right) \Big|_0^B = \frac{M}{(\alpha-\sigma)^2} < \infty, \end{aligned}$$

означающей сходимость интеграла (6.2.4); использованное здесь соотношение $\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{B}{e^{(\sigma-\alpha)B}} = 0$ устанавливается с помощью правила Лопиталя.

3⁰. Итак, преобразование Лапласа ставит в соответствие каждому оригиналу единственное изображение $F(p)$. Справедливо и обратное: при определенных ограничениях на аналитическую $F(p)$ она является изображением некоторого оригинала. При этом оказывается, что два непрерывных оригинала, имеющих одно и то же изображение, тождественно равны.

6.3. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА. ИЗОБРАЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1⁰. *Линейность*. Пусть $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, $g(t) \stackrel{\bullet}{=} G(p)$ и λ, μ – произвольные (действительные или комплексные) числа.

Т е о р е м а. Имеет место соотношение

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \stackrel{\bullet}{=} \lambda F(p) + \mu G(p).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что $F(p)$ и $G(p)$ существуют в полуплоскости $\text{Re } p > \alpha$, где $\alpha = \max \{\alpha_1, \alpha_2\}$, а α_1 и α_2 — соответственно, показатели роста оригиналов $f(t)$ и $g(t)$. В указанной полуплоскости

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} (\lambda f(t) + \mu g(t)) e^{-pt} dt = \lambda \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \mu \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt,$$

а это и есть утверждение теоремы.

2⁰. *Теорема подобия.* Для любого постоянного $\lambda > 0$ справедливо соотношение

$$f(\lambda t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Суть утверждения состоит в том, что умножение аргумента t оригинала на положительное число λ приводит к делению аргумента p изображения и самого $F(p)$ на то же число λ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заменяя в несобственном интеграле по $t \in [0, \infty)$ переменную по формуле $\tau = \lambda t$, так что $\tau \in [0, \infty)$ и $dt = \frac{1}{\lambda} d\tau$, имеем:

$$\begin{aligned} f(\lambda t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f(\lambda t) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p \frac{1}{\lambda} \tau} \frac{1}{\lambda} d\tau = \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda} \tau} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

что и утверждалось.

3⁰. *Теорема смещения (затухания).* Для любого действительного или комплексного числа a имеет место соотношение

$$e^{at} f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p - a).$$

Суть утверждения состоит в том, что умножение оригинала на функцию e^{at} приводит к смещению на величину a аргумента p изображения $F(p)$. Если a — действительное число и $a < 0$, то термин "затухание" означает убывание (с течением времени) множителя e^{at} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$e^{at} f(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a),$$

что и утверждалось.

Из доказательства теоремы следует, что само существование $F(p - a)$ имеет место, если $\text{Re}(p - a) > \alpha$, где α — показатель роста $f(t)$.

4⁰. *Теорема запаздывания.* Для любого постоянного $\tau > 0$ имеет место соотношение

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \stackrel{\bullet}{=} e^{-p\tau} F(p).$$

Суть утверждения состоит в том, что начало процесса в момент τ (в сравнении с процессом, начинающимся в момент $t = 0$ и описываемым оригиналом $f(t)$), т.е. его запаздывание на время τ , влечет за собой умножение изображения на $e^{-p\tau}$.

Левую часть формулы часто записывают также в виде $f(t - \tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} \eta(t - \tau) f(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} \eta(t - \tau) f(t - \tau) e^{-pt} dt,$$

так как при $t < \tau$ значения подынтегральной функции равны нулю. Теперь заменяем переменную по формуле $s = t - \tau$; тогда $t = s + \tau$ и $dt = ds$. Следовательно,

$$\eta(t - \tau) f(t - \tau) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} \eta(s) f(s) e^{-p(s+\tau)} ds = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(s) e^{-ps} ds = e^{-p\tau} F(p);$$

в последней цепочке равенств мы учли, что $\eta(s) = 1$ при $s \geq 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим, далее, изображения основных элементарных функций.

5⁰. *Единичная функция* имеет следующее изображение:

$$\eta(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\bullet p}. \quad (6.3.1)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \eta(t) &\stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{1}{p} e^{-(\sigma+ip)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} e^{-\sigma t} (\cos pt - i \sin pt) \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} (0-1) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Здесь предполагалось (см. п. 3⁰ параграфа 6.1), что $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$ и было использовано очевидное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| e^{-\sigma t} (\cos pt - i \sin pt) \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 pt + \cos^2 pt}{e^{\sigma t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sigma t}} = 0.$$

6⁰. Имеет место соотношение

$$\eta(t-a) \stackrel{\bullet}{=} e^{-ap} \frac{1}{p} \quad (a > 0). \quad (6.3.2)$$

Оно вытекает из (6.3.1) и теоремы запаздывания.

7⁰. Справедливы соотношения

$$e^{at} \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\bullet p - a}; \quad (6.3.3)$$

$$\sin at \stackrel{\bullet}{=} \frac{a}{\bullet p^2 + a^2}; \quad (6.3.4)$$

$$\cos at \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{\bullet p^2 + a^2}; \quad (6.3.5)$$

$$\operatorname{sh} at \stackrel{\bullet}{=} \frac{a}{\bullet p^2 - a^2}; \quad (6.3.6)$$

$$\operatorname{ch} at \stackrel{\bullet}{=} \frac{p}{\bullet p^2 - a^2}. \quad (6.3.7)$$

В этих формулах $a = \operatorname{const}$ — действительное или комплексное число.

Доказательство. Имеем

$$e^{at} \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-a)t} dt = \frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a},$$

если $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$. При этом результат постановки ∞ (вместо t) равен нулю на основании рассуждений типа тех, что приведены в п. 5⁰. Заметим, что при действительном $a > 0$ формула (6.3.3) вытекает также из (6.3.1) и теоремы смещения.

Далее,

$$\sin at = \frac{1}{2i} (e^{iat} - e^{-iat}) \quad \text{и} \quad \cos at = \frac{1}{2} (e^{iat} + e^{-iat}),$$

а поэтому на основании теоремы линейности и соотношения (6.3.3) получаем:

$$\sin at \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia} \right) = \frac{2ai}{2i(p^2 - i^2 a^2)} = \frac{a}{p^2 + a^2};$$

$$\cos at \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia} \right) = \frac{2p}{2(p^2 + a^2)} = \frac{p}{p^2 + a^2}.$$

Соотношения (6.3.6) и (6.3.7) для гиперболических функций

$$\operatorname{sh} at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch} at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

получаются точно так же (в силу теоремы линейности и (6.3.3)), как и (6.3.4), (6.3.5).

8⁰. П р и м е р. Найти изображение единичного импульса, действующего в промежутке времени $[0, \tau]$:

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } 0 \leq t < \tau; \\ 0, & \text{если } t \geq \tau. \end{cases}$$

Решение. Разрывный оригинал $\varphi(t)$ (см. рис. 6.3.1) можно в силу рассуждений, приведенных в п. 4⁰ параграфа 6.1, записать в виде

$$\varphi(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau).$$

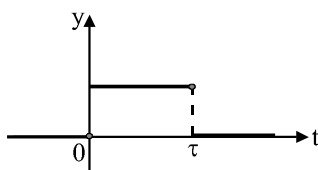


Рис. 6.3.1

Тогда на основании соотношений (6.3.1) и (6.3.2) и теоремы линейности имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\tau p} = \frac{1}{p} (1 - e^{-\tau p}).$$

6.4. ГАММА-ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА И ИЗОБРАЖЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1⁰. Гамма-функцией Эйлера называется функция вида

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0. \quad (6.4.1)$$

Докажем сходимость интеграла (6.4.1). Положим сначала $x \geq 1$, тогда функция $f(t) = t^{x-1} e^{-t}$ непрерывна на $[0, \infty)$ и $t^{x-1} \leq M e^{\alpha t}$ при каждом $\alpha > 0$ с некоторой постоянной $M > 0$ (см. п. 2⁰ параграфа 6.1). Взяв $\alpha = \frac{1}{2}$, имеем мажорантным для (6.4.1) несобственный интеграл:

$$\int_0^{\infty} M e^{\frac{1}{2}t} e^{-t} dt = M (-2) e^{-\frac{t}{2}} \Big|_0^{\infty} = 2M.$$

Следовательно, по известной теореме о сравнении несобственных интегралов (применимой здесь, так как $f(t) \geq 0$) сходящимся является интеграл (6.4.1), $x \geq 1$.

Если $0 < x < 1$, то $t^{x-1} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +0$, т.е. $f(t)$ имеет разрыв второго рода в точке $t = 0$. Записав

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (6.4.2)$$

имеем второй интеграл сходящимся, если применить только что приведенные рассуждения ($f(t)$ является непрерывной при $t \in [1, +\infty)$).

В первом интеграле в (6.4.2) $e^{-t} \leq e^0 = 1$, тогда

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{t^x}{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{x} < \infty \quad (0 < x < 1).$$

Итак, оба слагаемых интеграла в (6.4.2) являются сходящимися, чем и доказано существование $\Gamma(x)$ при $0 < x < 1$. Окончательно имеем: интеграл (6.4.1) – сходящийся при всех $x > 0$.

2⁰. Докажем следующее важное свойство гамма-функций:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0. \quad (6.4.3)$$

Заметим, прежде всего, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = 0; \quad (6.4.4)$$

это свойство (рост степенной функции – менее быстрый, чем рост показательный) упоминалось в п. 2⁰ параграфа 6.1; его аккуратное доказательство состоит в последовательном применении правила Лопиталья n раз, где n – целая часть числа $x+1$. Поэтому, на основании формулы интегрирования по частям, имеем

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = 0 + x\Gamma(x),$$

что и утверждалось.

3⁰. Вычислим отдельные значения гамма-функции:

$$\text{а) } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1; \quad \text{б) } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi},$$

где использована постановка $\tau = \sqrt{t}$ (так что $t = \tau^2$ и $dt = 2\tau d\tau$) и хорошо известное значение интеграла Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4⁰. Последовательно применяя формулу (6.4.3) при целом $x = n-1$ ($n = 2, 3, \dots$), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-3) = \\ &= (n-1)(n-2)\dots 2 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \end{aligned}$$

поскольку $\Gamma(1) = 1$ (см. п. 3⁰, а)). Итак,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (6.4.5)$$

в случае $n = 1$ формула остается верной, так как $0! = 1 = \Gamma(1)$.

Если (6.4.3) и свойство б) п. 3⁰ применить в случае $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, то получаем

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

аналогично

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \text{ и т.д.}$$

5⁰. Докажем, что

$$t^s \stackrel{\bullet}{=} \frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}}, \quad s > 0. \quad (6.4.6)$$

Ограничимся рассмотрением частного случая: p – действительное положительное число; однако соотношение (6.4.6) остается справедливым и при комплексных p , для которых $\operatorname{Re} p > 0$. Имеем

$$t^s \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} t^s e^{-pt} dt.$$

Положим $pt = \tau$, тогда $\tau \in [0, \infty)$, $t = \frac{1}{p}\tau$ и $dt = \frac{1}{p}d\tau$. Следовательно,

$$t^s \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{p}\tau\right)^s e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{p^{s+1}} \int_0^{\infty} \tau^s e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{p^{s+1}} \Gamma(s+1),$$

что и утверждалось.

При $s = n = 1, 2, \dots$ имеем, согласно соотношениям (6.4.5) и (6.4.6)

$$t^n \stackrel{\bullet}{=} \frac{n!}{p^{n+1}}$$

З а м е ч а н и е. Функция $f(t) = t^s$ при $-1 < s < 0$ перестает быть оригиналом, так как имеет бесконечный разрыв в точке $t = 0$. Однако рассуждения, использованные только что, показывают, что преобразование Лапласа выполнимо и в этом случае и приводит к результату $\frac{\Gamma(s+1)}{p^{s+1}}$ (поскольку $s+1 > 0$, то $\Gamma(s+1)$ существует). Следовательно, соотношение (6.4.6) в только что указанном смысле, справедливо для всех $s > -1$. В частности (см. п. 3⁰, б)),

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \stackrel{\bullet}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \stackrel{\bullet}{=} \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

6⁰. Найдем, например, изображение функции $f(t) = e^{at} t^s$. Применяя (6.4.6) и теорему смещения, имеем

$$e^{at} t^s \stackrel{\bullet}{=} \frac{\Gamma(s+1)}{(p-a)^{s+1}},$$

причем, согласно замечанию в п. 5⁰, результат справедлив при всех $s > -1$. В частности,

$$e^{at} t^n \stackrel{\bullet}{=} \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

7⁰. П р и м е р. Найти изображение оригинала

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t < 2; \\ 3e^t, & \text{если } 2 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Запишем выражение для оригинала в виде (6.1.1):

$$\begin{aligned} f(t) &= t - \eta(t-2)t + \eta(t-2) \cdot 3e^t = \\ &= t - \eta(t-2)[(t-2)+2] + 3\eta(t-2)e^{(t-2)+2} = \\ &= t - \eta(t-2)(t-2) - 2\eta(t-2) + 3e^2\eta(t-2)e^{t-2}; \end{aligned}$$

используя теорему запаздывания и соотношения (6.4.6), (6.3.3), получим

$$f(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2} - e^{-2p} \frac{1}{p^2} - 2e^{-2p} \frac{1}{p} + 3e^2 e^{-2p} \frac{1}{p-1}.$$

6.5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРИГИНАЛОВ

1⁰. Пусть $f(t)$ – оригинал и $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$

Т е о р е м а дифференцирования оригинала. Имеет место соотношение

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{=} pF(p) - f(0). \quad (6.5.1)$$

В частности, если $f(0) = 0$, то

$$f'(t) \stackrel{\bullet}{=} pF(p),$$

т.е. дифференцирование оригинала приводит к умножению его изображения на параметр p .

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью интегрирования по частям получаем:

$$\begin{aligned} f'(t) \stackrel{\bullet}{=} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= -f(0) + \left(\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} \right) + pF(p). \end{aligned} \quad (6.5.2)$$

Осталось доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-pt} = 0. \quad (6.5.3)$$

Если α – показатель роста $f(t)$ и, как обычно, $\sigma = \operatorname{Re} p > \alpha$, то (см. рассуждения в п. 2⁰ параграфа 6.2)

$$\left| f(t) e^{-pt} \right| \leq M e^{\alpha t} e^{-\sigma t} = M e^{-(\sigma-\alpha)t} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

чем установлено равенство (6.5.3), а значит (в силу (6.5.2)) и утверждение (6.5.1).

2⁰. Найдем изображение второй производной оригинала, используя уже найденное соотношение (6.5.1):

$$\begin{aligned} f''(t) &= (f'(t))' \stackrel{\bullet}{=} p(L(f'(t))) - f'(0) = \\ &= p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

Итак, если $f'(t)$ является оригиналом (удовлетворяет условиям а) – в) п. 2⁰ параграфа 6.1), то

$$f''(t) \stackrel{\bullet}{=} p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (6.5.4)$$

Аналогичны рассуждения для получения изображений третьей и последующих производных; так, если $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$ – оригиналы, то

$$\dot{f}'''(t) \doteq pL(\dot{f}''(t)) - f''(0) = p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0).$$

Для n -ой производной получаем соотношение:

$$\dot{f}^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

В случае, если начальные значения $f(t)$ и ее производных равны нулю, т.е.

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad (6.5.5)$$

то

$$\dot{f}^{(n)}(t) \doteq p^{(n)} F(p);$$

т.е. n – кратное дифференцирование оригинала при условии (6.5.5) приводит к умножению на p^n его изображения.

3°. Рассмотрим вопрос о преобразовании Лапласа первообразной

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (6.5.6)$$

оригинала $f(t)$. Прежде всего отметим, что $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям существования оригинала. Действительно, $\varphi(t) = 0$ при $t < 0$ (первообразная от нулевой функции равно нулю), $\varphi(t)$ – кусочно непрерывна вместе с $f(\tau)$ и, наконец,

$$|\varphi(t)| \leq \int_0^t M e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{M}{\alpha} (e^{\alpha t} - 1) \leq \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t},$$

если считать $\alpha > 0$ (а это можно предполагать без ограничения общности, увеличив, если требуется, показатель роста).

Т е о р е м а. Если $\dot{f}(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p). \quad (6.5.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(p)$ – изображение оригинала $\varphi(t)$. Тогда $\dot{\varphi}(t) \doteq p \Phi(p) - \varphi(0)$, при этом (см. (6.5.6))

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(\tau) d\tau = 0,$$

т.е. $\dot{\varphi}(t) \doteq p \Phi(p)$. Но $\dot{\varphi}(t) = f(t)$, т.е. $\dot{f}(t) \doteq p \Phi(p)$, и, одновременно с этим, $\dot{f}(t) \doteq F(p)$. Следовательно, $F(p) = p \Phi(p)$,

т.е. $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$ или, что то же самое $\dot{\varphi}(t) \doteq \frac{F(p)}{p}$, что и утверждалось.

6.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

1°. Пусть $\dot{f}(t) \doteq F(p)$. Выше уже отмечалась аналитичность $F(p)$ в полуплоскости $\text{Re } p > \alpha$.

Т е о р е м а 1. Имеет место соотношение

$$\dot{F}'(p) \doteq -t f(t).$$

Таким образом, дифференцирование изображения влечет за собой умножение оригинала на $(-t)$.

Следует отметить, что $(-t)f(t)$ – это оригинал.

Условия а), б) п. 2° параграфа 6.1, очевидно, выполнены. В силу того, что степенная функция растет медленнее показательной (именно, $t < e^{\beta t}$ при любом $\beta > 0$), получаем $|(-t)f(t)| \leq M e^{(\alpha+\beta)t}$, где β – сколь угодно близко к нулю; таким образом, и условие в) выполнено.

Доказательство теоремы содержится в соотношении (6.2.4).

С л е д с т в и е. Имеет место соотношение

$$\dot{F}^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t).$$

Действительно, после второго дифференцирования оригинал $(-t)f(t)$ умножится (согласно теореме 1) на $(-t)$, т.е.

$$\dot{F}''(p) \doteq t^2 f(t).$$

Рассуждая подобным образом и далее, приходим к утверждению следствия.

2⁰. Рассмотрим вопрос о том, что произойдет с оригиналом $f(t)$ если изображение $F(p)$ проинтегрировать. При этом будем предполагать, что $\frac{f(t)}{t}$ удовлетворяет условиям а) – в) п. 2⁰ параграфа 6.1 и что интеграл $\int_p^\infty F(q) dq$ – сходящийся.

Следующее утверждение приведем без доказательства.

Т е о р е м а 2. Имеет место соотношение

$$\int_p^\infty F(q) dq \stackrel{\bullet}{=} \frac{f(t)}{t}.$$

3⁰. **П р и м е р.** Найти изображение оригинала $\frac{\sin t}{t}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $\sin t \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p^2 + 1}$, то деление оригинала на t приводит к интегрированию изображения (теорема 2):

$$\frac{\sin t}{t} \stackrel{\bullet}{=} \int_p^\infty \frac{1}{p^2 + 1} dp, \text{ т.е. } \frac{\sin t}{t} \stackrel{\bullet}{=} \arctg p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p,$$

но последнее выражение равно $\operatorname{arccctg} p$. Итак,

$$\frac{\sin t}{t} \stackrel{\bullet}{=} \operatorname{arccctg} p.$$

З а м е ч а н и е. Данная функция имеет разрыв при $t = 0$. Чтобы убедиться в ее ограниченности в любой окрестности этой точки, достаточно найти соответствующий предел:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

В свою очередь, ограниченность данной функции в окрестности $t = 0$ означает выполнимость для нее требования в) п. 2⁰ параграфа 6.1, которое использовалось в теореме 2.

6.7. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

1. Найти изображения оригиналов:

а) $\frac{\sin 3t}{e^t}$; б) $\frac{5t^3}{4}$; в) $\sqrt{t} - t^2$; г) $(t-2)^4$.

2. Найти изображение оригиналов:

а) $\operatorname{cht} \cdot \sin 2t$; б) $t \operatorname{sh} 7t$.

Указание: выразить (на основании определения) гиперболические функции через показательные.

3. Найти изображение оригиналов:

а) $\cos^2 \frac{t}{8}$; б) $e^{-t} \sin^2 3t$; в) $\frac{\cos^4 t}{e^{5t}}$.

Указание: понизить степени тригонометрических функций.

4. Найти изображение оригиналов:

а) $4 \sin 8t \cos t$; б) $\cos \frac{t}{2} \cos \frac{5t}{2}$; в) $\operatorname{cht} \cdot \sin 3t \cdot \sin 4t$.

Указание: преобразовать в сумму (разность) произведение тригонометрических функций.

5. Найти изображение оригиналов:

а) $f(t) = \begin{cases} \eta(t-2) & \text{при } t < 4; \\ t^2 - 1 & \text{при } 4 \leq t < 5; \\ e^{4t} & \text{при } t \geq 5. \end{cases}$ б) $f(t) = \begin{cases} t - t^2, & 0 \leq t < 1; \\ t^2 - t, & 1 \leq t < 3; \\ \operatorname{sh} t, & t \geq 3. \end{cases}$

ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

7.1. ТЕОРЕМА ОБРАЩЕНИЯ

1°. Рассмотрим задачу, *обратную* нахождению интеграла Лапласа: по заданному изображению $F(p)$ восстановить оригинал $f(t)$. Пусть α – показатель роста оригинала (см. параграфа 6.1).

Т е о р е м а. Если в области $\operatorname{Re} p > \alpha$ функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (7.1.1)$$

во всех точках t , где $f(t)$ – непрерывна. При этом интегрирование в (7.1.1) производится по произвольной вертикальной прямой $\operatorname{Re} p = x$, где $x > \alpha$.

Представление (7.1.1) называют *формулой Меллина*.

2°. В пункте 1° мы предполагали, что заданная $F(p)$ – уже является изображением некоторого оригинала. Укажем (без доказательства) те достаточные условия, при которых заданная функция комплексного переменного действительно является изображением:

- а) $F(p)$ – аналитична в области $\operatorname{Re} p > \alpha$ при некотором α ;
- б) в указанной области $F(p) \rightarrow 0$ (равномерно относительно $\arg p$), если $|p| \rightarrow \infty$;
- в) для всех p , таких, что $\operatorname{Re} p = x > \alpha$ имеет место соотношение

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(p)| dy < \infty \quad (\text{где } y = \operatorname{Im} p).$$

При сформулированных условиях $f(t)$ восстанавливается по формуле Меллина.

3°. Рассмотрим вопрос о *вычислении интеграла* (7.1.1), если выполнено условие $F(p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$ (см. условие б) в п. 2°). Пусть $F(p)$ имеет лишь конечное число особых точек (скажем, n штук). Тогда вертикальную прямую $\operatorname{Re} p = x$ можно выбрать так, что все особые точки z_k расположены левее ее: следует выбрать x достаточно большим. Как оказывается, из основной теоремы о вычетах будет тогда следовать, что

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(p) e^{pt} dp = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч} [F(p) e^{pt}, z_k],$$

где $t \geq 0$ – произвольно. Поэтому, согласно формуле Меллина,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Выч} [F(p) e^{pt}, z_k]. \quad (7.1.3)$$

7.2. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ ДЛЯ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1°. Применение формулы Меллина (ее следствия (7.1.3)) даже для табличных изображений часто приводит к довольно сложным выкладкам. Однако, для дробно-рациональных $F(p)$ можно воспользоваться приемами достаточно элементарного характера.

2°. *Простейшая дробь* $F(p) = \frac{1}{p^2 + ap + b}$.

В результате выделения полного квадрата приходим к представлению

$$F(p) = \frac{1}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2}, \quad \text{где } \pm \omega^2 = b - \frac{a^2}{4}.$$

Имеем

$$F(p) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\left(p + \frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2},$$

и применим теперь формулы (6.3.4), (6.3.6) параграфа 6.3. Согласно теореме смещения, аргумент $p + \frac{a}{2}$ мог возникнуть за счет умножения соответствующего аргумента на $e^{-\frac{a}{2}t}$, т.е.

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\omega} e^{-\frac{a}{2}t} \sin \omega t \text{ или } F(p) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{\omega} e^{-\frac{a}{2}t} \operatorname{sh} \omega t$$

соответственно знаку "+" или "-" перед ω^2 .

3°. Простейшая дробь $F(p) = \frac{cp+d}{p^2+ap+b}$ ($c \neq 0$) может быть преобразована к виду

$$F(p) = \frac{cp+d}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2} = \frac{c\left(p+\frac{a}{2}\right) - \frac{ac}{2} + d}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2}.$$

Обозначив $h = d - \frac{ac}{2}$, получим

$$F(p) = c \frac{p+\frac{a}{2}}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2} + \frac{h}{\omega} \cdot \frac{\omega}{\left(p+\frac{a}{2}\right)^2 \pm \omega^2}.$$

В случае знака "+" перед ω^2 , согласно теореме смещения, получим

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} ce^{-\frac{a}{2}t} \cos \omega t + \frac{h}{\omega} e^{-\frac{a}{2}t} \sin \omega t.$$

В случае же знака "-" тригонометрические функции заменяются на соответствующие гиперболические.

4°. П р и м е р. $F(p) = \frac{2+3p}{3+8p-2p^2}$. Найти оригинал $f(t)$.

Р е ш е н и е. Приведем дробь к виду, рассмотренному выше:

$$\begin{aligned} F(p) &= -\frac{1}{2} \frac{3p+2}{p^2-4p-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{3p+2}{(p-2)^2 - \frac{11}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{3(p-2)+6+2}{(p-2)^2 - \sqrt{\frac{11}{2}}^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{p-2}{(p-2)^2 - \sqrt{\frac{11}{2}}^2} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{11}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{(p-2)^2 - \sqrt{\frac{11}{2}}^2}. \end{aligned}$$

С учетом формул (6.3.7), (6.3.6) параграфа 6.3. и теоремы смещения получаем:

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} -\frac{3}{2} e^{2t} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{11}{2}} t - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}} e^{2t} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{11}{2}} t.$$

5°. Если $F(p)$ – правильная рациональная дробь, то путем ее разложения в сумму простейших дробей задачу о восстановлении оригинала можно свести к задачам типа рассмотренных в пп. 2°, 3°.

7.3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1°. Операционный метод (преобразование Лапласа) может быть применен к нахождению частного решения *линейного* обыкновенного *дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами* и начальными условиями в точке "0". Идея состоит в том, что считая искомое решение оригиналом $y = y(t)$, мы применяем преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. В результате этого уравнения становится алгебраическим относительно изображения $Y = Y(p)$. Найдя Y , остается вернуться к соответствующему оригиналу $y = y(t)$.

2°. Начнем рассмотрение с уравнения *первого порядка*

$$y' + ay = f(t), \quad a = \text{const}, \quad (7.3.1)$$

в случае $y(0) = y_0$, где y_0 – заданное число. Пусть $f(t)$ – оригинал, имеющий изображение $F(p)$. Применяя к обеим частям уравнения (7.3.1) преобразование Лапласа и пользуясь формулой для изображения производной (см. (6.5.1)) $y'(t) \stackrel{\cdot}{=} pY(p) - y(0)$, имеем

$$pY(p) - y(0) + aY(p) = F(p),$$

откуда $(p+a)Y(p) - y_0 = F(p)$, а значит

$$Y(p) = \frac{y_0 + F(p)}{a + p}.$$

Остается восстановить по $Y(p)$ оригинал $y = y(t)$, который и будет решением указанной задачи Коши; приемы обращения $Y(p)$ рассмотрены выше (см. параграфы 7.1, 7.2).

3°. Тот же способ применим для решения задачи Коши для уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0 \end{cases}$$

и в более общем случае произвольного (n -го) порядка:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(t); \\ y(0) = y_0; \\ y'(0) = y'_0; \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \quad (7.3.2)$$

В простейшей ситуации $y_0 = y'_0 = \dots = y_0^{(n-1)} = 0$ результат применения преобразования Лапласа к обеим частям уравнения (7.3.2) приводит к алгебраическому уравнению

$$p^n Y + a_{n-1} p^{n-1} Y + \dots + a_1 p Y + a_0 Y = F(p),$$

откуда

$$Y = Y(p) = \frac{F(p)}{T_n(p)},$$

где

$$T_n(p) = p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

– так называемый характеристический многочлен для уравнения (7.3.2). Задача свелась к обращению преобразования Лапласа.

4°. Если числа $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ считать произвольными постоянными (в этом случае их удобно переобозначить через C_1, C_2, \dots, C_n , соответственно), то применение к уравнению (7.3.2) с начальными условиями

$$y(0) = C_1, y'(0) = C_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_n$$

операционного метода приводит к получению общего решения. Найденные оригиналы $y = y(t; C_1, \dots, C_n)$ обращаются в ноль при $t < 0$.

С точки зрения задач физики, мы получаем информацию о течении процесса с момента $t = 0$. Если же начальные условия задаются в точке $t_0 \neq 0$, то выделение соответствующего частного решения из полученного общего происходит обычным способом (написание и решение системы алгебраических линейных уравнений относительно C_1, C_2, \dots, C_n).

5°. П р и м е р 1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{4t}; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Пусть $y(t) \stackrel{\cdot}{=} Y(p)$. Тогда (см. п. 2°)

$$y' \stackrel{\cdot}{=} pY - y(0) = pY - 1 \text{ и } pY - 1 - 3Y = \frac{1}{p-4},$$

откуда

$$(p-3)Y = \frac{1}{p-4} + 1 \text{ или } Y = \frac{p-3}{p-4} : (p-3) = \frac{1}{p-4}.$$

Следовательно, $y(t) = e^{4t}$ – искомое решение.

Пример 2. Решить задачу Коши

$$y'' - y' = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1, \\ t-1, & 1 \leq t < \infty, \end{cases} \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Прежде всего, запишем (см. параграф 6.1) правую часть уравнения в виде

$$f(t) = 2 - 2 \cdot \eta(t-1) + \eta(t-1) \cdot (t-1);$$

ее изображение имеет вид (см. теорему запаздывания)

$$F(p) = 2 \left(\frac{1}{p} - e^{-p} \frac{1}{p} + e^{-p} \cdot \frac{1}{p^2} \right).$$

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения, получаем при нулевых начальных условиях

$$p^2 Y - pY = \frac{2}{p} - 2e^{-p} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right)$$

или

$$(p^2 - p)Y = \frac{2}{p} - 2e^{-p} \frac{p^2 - p}{p^3},$$

т.е.

$$Y = \frac{2}{p^2(p-1)} - \frac{2e^{-p}}{p^3}.$$

Запишем

$$\frac{1}{p^2(p-1)} = \frac{1-p^2+p^2}{p^2(p-1)} = -\frac{(p-1)(p+1)}{p^2(p-1)} + \frac{1}{p-1} = -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно,

$$Y = -\frac{2}{p} - \frac{2}{p^2} + \frac{2}{p-1} - e^{-p} \frac{2!}{p^3} = -2 - 2t + 2e^t + (t-1)^2 \eta(t-1),$$

если воспользоваться теоремой запаздывания применительно к последнему слагаемому. Итак, решение задачи Коши имеет вид

$$y(t) = -2 - 2t + 2e^t + (t-1)^2 \eta(t-1).$$

7.4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

¹⁰. Преобразование Лапласа может быть использовано и для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, если начальные условия заданы в точке $t = 0$. Продемонстрируем метод на случае системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + f_1(t); \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + f_2(t); \\ \dot{z} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + f_3(t) \end{cases} \quad \text{с начальными условиями} \quad \begin{cases} x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0; \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Здесь a_i, b_j, c_k ($i, j, k \in \{1, 2, 3\}$) – постоянные числа; $f_j = f_j(t)$ – заданные оригиналы, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ – искомые решения; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – их производные.

Положим $\dot{f}_j(t) \doteq F_j(p)$, $\dot{x}(t) \doteq X(p)$, $\dot{y}(t) \doteq Y(p)$, $\dot{z}(t) \doteq Z(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям каждого уравнения, получим:

$$\begin{cases} pX - x_0 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + F_1; \\ pY - y_0 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + F_2; \\ pZ - z_0 = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + F_3. \end{cases}$$

Имеем теперь систему алгебраических линейных уравнений относительно X, Y, Z :

$$\begin{cases} (a_1 - p)X + b_1Y + c_1Z = -(x_0 + F_1); \\ a_2X + (b_2 - p)Y + c_2Z = -(y_0 + F_2); \\ a_3X + b_3Y + (c_3 - p)Z = -(z_0 + F_3). \end{cases}$$

Найдя $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$, восстановим соответствующие оригиналы.

2°. Операционный метод можно применить и для систем уравнений, содержащих производные высших порядков. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \ddot{x} + y = 0; \\ \ddot{y} + x = 1, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0.$$

Решение. Применим преобразование Лапласа к каждому уравнению (при этом $0 \cdot \dot{} = 0$, так как интеграл Лапласа есть интеграл от нулевой функции). Получаем:

$$\begin{cases} p^2 X + Y = 0; \\ X + p^2 Y = \frac{1}{p}, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} Y = -p^2 X; \\ (1 - p^4)X = \frac{1}{p}, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} X = \frac{1}{p(1-p^2)(1+p^2)}; \\ Y = -\frac{p}{(1-p^2)(1+p^2)}. \end{cases}$$

Раскладывая дроби на простейшие, получим:

$$X = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1} \quad \text{и} \quad Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{p^2+1}.$$

Возвращаясь к оригиналам, получаем:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \cos t; \\ y(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t). \end{cases}$$

7.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 7

1. Найти оригинал, соответствующий заданному изображению:

а) $\frac{14}{p^2-10p+1}$; б) $\frac{1}{3-2p-p^2}$; в) $\frac{2}{4p-3p^2}$; г) $\frac{1}{(p+6)^2}$;

д) $\frac{p-1}{p^2-3p}$; е) $\frac{3p+4}{p^2+8p+15}$; ж) $\frac{7-3p}{2p^2-4p+5}$.

2. Найти оригинал, изображением которого служит заданная рациональная дробь:

а) $\frac{1}{(p-1)^2 p}$; б) $\frac{p+2}{p^3-3p^2+3p-1}$; в) $\frac{1-p}{p^2(p^2+1)}$; г) $\frac{2p-1}{p^3+4p^2+5p}$;

д) $\frac{1}{p^3(p-3)}$; е) $\frac{p^2-p-1}{(p^2+3p+2)p^2}$; ж) $\frac{p-4p^2}{(p^2+9)(p^2-7p+12)}$.

3. Пользуясь теоремой запаздывания, найти оригинал, соответствующий заданному изображению:

а) $\frac{e^{-4p}(p+1)}{p^2-5}$; б) $\frac{e^p+e^{-p}}{p^2+6}$; в) $\frac{e^{2p}}{p^2-8p}$; г) $\frac{e^{-8p}+2p}{p^2-6p+10}$;

д) $\frac{1+2e^{3p}}{p^2(2p^2-1)}$; е) $\frac{e^{-2p}}{3p^7} + \frac{3e^{4p}}{(p^2+1)^2}$.

4. Решить задачу Коши для следующего дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} y' + 4y = 2e^t; \\ y(0) = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2y' - y = 3t - 1; \\ y(0) = -2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y' + y = \frac{3t^2}{2} + \sin t; \\ y(0) = 0; \end{cases} \\ \text{г) } & y' - 2y = \begin{cases} e^{2t}, & 0 \leq t < 1; \\ 1, & t \geq 1; \end{cases} \quad \text{д) } y' + 3y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1; \\ \operatorname{ch} t, & t \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Решить следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} y'' - y = \operatorname{sh} t; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 2 - e^{-2t}; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y'' + y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1; \\ 0, & t \geq 1; \end{cases} \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{д) } & \begin{cases} y'' - 5y' + 6y = -3; \\ y(0) = 1; \\ y'(0) = -1; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} y''' + y'' = 3e^{-t}; \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \\ y''(0) = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

6. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \dot{x} + x - y = 1; \\ \dot{y} + 3x - 2y = e^t, \end{cases} \quad x(0) = -1; \quad y(0) = 1;$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dot{x} + y = \operatorname{sh} t; \\ \dot{y} + x + y = 2, \end{cases} \quad x(0) = 0; \quad y(0) = 2;$$

$$\text{в) } \begin{cases} \dot{x} + 2x - y = 2; \\ \dot{y} - 3x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1; \quad y(0) = 0;$$

$$\text{г) } \begin{cases} \ddot{x} - 3x + 4y = -5; \\ \ddot{y} + x + y = 5, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 0; & \dot{x}(0) = 0; \\ y(0) = 0; & \dot{y}(0) = 0; \end{matrix}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \dot{x} - y - z = 0; \\ \dot{y} - z - x = 0; \\ \dot{z} - x - y = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0) = 1; & y(0) = -1; & z(0) = 0. \end{matrix}$$

8.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

Изложим подробнее основные понятия и факты теории числовых рядов, на которые мы в значительной степени опирались в главе 2.

1⁰. Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, \dots$. Формально составленная бесконечная сумма вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + \dots$$

или, коротко,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \quad (8.1.1)$$

называется числовым рядом; общий член последовательности $\{w_n\}$ называется общим членом ряда (8.1.1).

Обозначим через

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$$

n -ю частичную сумму ряда (8.1.1); при этом, по определению, $S_1 = w_1$.

Если существует предел вида

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

то числовой ряд (8.1.1) называется сходящимся, а в противном случае – расходящимся.

Число S назовем суммой сходящегося ряда; говорят также, что ряд (8.1.1) сходится к сумме S и применяют запись

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

Главная задача, которая решается в теории числовых рядов – сходится или расходится данный ряд; вопрос о его сумме можно ставить лишь тогда, когда доказана сходимость. Сумму же сходящегося ряда всегда можно вычислить приближенно, взяв достаточно большое количество n членов в составе его частичной суммы S_n ; при этом точность вычисления увеличивается с ростом n .

Пример 1. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n(n+1)}$$

и найти его сумму.

Решение. Воспользуемся определением сходимости ряда и его суммы, для чего вычислим частичную сумму произвольного (n -го) порядка. Преобразуем общий член ряда к виду

$$\frac{i}{n(n+1)} = i \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = i \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

и сложим первые n членов. При этом мы обнаруживаем, что члены, начиная со второго и кончая предпоследним, будут взаимно уничтожаться:

$$S_n = i \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) = i \left(1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

Теперь вычисляем следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} i \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = i.$$

Таким образом, ряд оказался сходящимся и его сумма $S = i$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Решение. Данный ряд состоит из действительных чисел; исследование разобьем на несколько этапов.

1. Поведение частичных сумм ряда определится следующей оценкой его общего члена:

$$\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

2. Доказательство этой оценки основано на неравенстве

$$\ln(1+x) < x, \quad x > 0, \quad (8.1.2)$$

которое мы сейчас установим (читателю рекомендуется изобразить графики левой и правой части неравенства). Разность левой и правой частей (8.1.2)

$$y(x) = \ln(1+x) - x$$

– убывающая функция, поскольку $y'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 < 0$ при $x > 0$.

Кроме того очевидно, что $y(0) = 0$; значит разность $y(x)$ остается отрицательной: $\ln(1+x) - x < 0$ при всех $x > 0$. Это и утверждалось в соотношении (8.1.2).

3. Выбирая $x = \frac{1}{n}$ в (8.1.2), имеем неравенство

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n,$$

для общего члена ряда, которое мы и хотели установить.

4. Теперь частичная сумма n -го порядка

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

имеет оценку снизу

$$S_n > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + (\ln n - \ln(n-1)) + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1),$$

откуда вытекает, что $S_n \rightarrow \infty$ вместе с $\ln(n+1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Итак, исследуемый ряд расходится.

З а м е ч а н и е. Указанный ряд называется гармоническим. Ниже будет рассмотрен более общий случай так называемого ряда Дирихле (иначе называемого обобщенным гармоническим рядом).

2⁰. Установим некоторые свойства сходящихся рядов. Пусть даны произвольные комплексные числа τ, ρ и сходящиеся числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (8.1.3)$$

суммы которых равны U и V соответственно.

Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tau u_n + \rho v_n) \quad (8.1.4)$$

сходится и его сумма равна $\tau U + \rho V$.

Доказательство легко следует из определений сходимости и суммы ряда. Исключим из рассмотрения случай $\tau = \rho = 0$, в котором

утверждение становится очевидным (сумма ряда, состоящего из нулей, равна нулю) и запишем n -ю частичную сумму исследуемого ряда (8.1.4):

$$\begin{aligned} S_n &= (\tau u_1 + \rho v_1) + (\tau u_2 + \rho v_2) + \dots + (\tau u_n + \rho v_n) = \\ &= \tau(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + \rho(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \tau U_n + \rho V_n, \end{aligned}$$

где U_n, V_n – частичные суммы соответствующих рядов (8.1.3). В силу их сходимости имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau U_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \rho V_n = \tau U + \rho V.$$

Итак, ряд (8.1.4) оказался (на основании определения) сходящимся к сумме $\tau U + \rho V$.

В частности, при $\rho = 0$, $\tau \neq 0$ получаем что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau u_n$$

имеет то же поведение, что и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если исходный ряд был сходящимся, то его сумма умножится на τ .

3°. Пусть $w_n = u_n + iv_n$, $n = 1, 2, \dots$, так что u_n – действительная, а v_n – мнимая части w_n . Ряд (8.1.1) тогда можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n).$$

Применяя доказанное в п. 2° свойство, получаем следующее утверждение.
Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (8.1.5)$$

составленные из действительных и мнимых частей последовательности w_n , то сходится и ряд (8.1.1).

Верно и обратное: если сходится ряд (8.1.1), то имеет место сходимость обоих рядов (8.1.5); утверждение (как, впрочем, и предыдущее) вытекает из свойств пп. 2 и 3 параграфа 2.2, поскольку последовательности частичных сумм (n -го порядка) рядов (8.1.5) представляют собою, соответственно, действительную и мнимую часть сходящейся последовательности S_n .

4°. По заданной бесконечной последовательности $\{w_n\}$ построим теперь ряд вида

$$w_{N+1} + w_{N+2} + \dots, \quad (8.1.6)$$

где $N = 1, 2, \dots$ и назовем его N -м остатком ряда (8.1.1); иными словами, N -й остаток (8.1.1) есть ряд, полученный отбрасыванием первых N членов.

Обозначим при $n > N$ через $S_{N,n}$ n -ю частичную сумму ряда-остатка (8.1.6)

$$S_{N,n} = w_{N+1} + \dots + w_n$$

и, в случае его сходимости, через $R = R_N$ – сумму этого ряда, т.е.

$$R_N = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{N,n}.$$

Докажем, что ряд (8.1.1) сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый его ряд-остаток (8.1.6). Другими словами, установим, что отбрасывание или добавление конечного числа (первых) членов не влияет на сходимость данного ряда.

Действительно, при $n > N$ частичная сумма ряда (8.1.1) есть

$$S_n = w_1 + \dots + w_N + w_{N+1} + \dots + w_n = S_N + S_{N,n},$$

откуда следует, что S_n и $S_{N,n}$ отличаются на фиксированную величину S_N , а значит одновременно имеют или не имеют предел при $n \rightarrow \infty$. Итак, ряды (8.1.1) и (8.1.6) сходятся или расходятся одновременно.

Установим также следующее свойство остатка: если (8.1.1) является сходящимся, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} R_N = 0.$$

Действительно, если перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в только что установленном равенстве $S_n = S_N + S_{N,n}$, то получим $S - S_N = R_N$, где R_N – сумма N -го остатка. Теперь, устремляя $N \rightarrow \infty$ в последнем соотношении и пользуясь сходимостью (к сумме S) ряда (8.1.1), имеем стремление к нулю последовательности R_N , что и утверждалось.

5°. В целях полноты изложения приведем здесь еще раз формулировки необходимого признака сходимости ряда и достаточного признака расходимости, доказанных в параграфе 2.3.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд (8.1.1) сходится, то существует предел (при $n \rightarrow \infty$) его общего члена w_n , причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0.$$

Обратное утверждение неверно.

Достаточный признак расходимости. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| \neq 0 \quad (8.1.7)$$

(или если этот предел не существует), то ряд (8.1.1) расходится.

6°. Сумма геометрической прогрессии.

Пусть a и q – ненулевые комплексные числа. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots,$$

ряд, составленный из ее членов

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \quad (8.1.8)$$

и исследуем его сходимость.

С л у ч а й 1: $|q| \geq 1$; в этом случае $|aq^n| = |a| \cdot |q|^n \geq |a|$. Могут представиться две возможности: либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |aq^n|$$

не существует, либо он существует и согласно неравенству $|q| \geq 1$ его значение не меньше числа $|a| > 0$. В обоих случаях, по достаточному признаку расходимости ряда, получаем, что (8.1.8) расходится.

С л у ч а й 2: $|q| < 1$; в этом случае n -я частичная сумма ряда (8.1.8) имеет вид

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

(формула суммы первых членов геометрической прогрессии известна из школьного курса, причем ее доказательство сохраняется и для прогрессий с комплексными членами).

Вычислим теперь предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n \right).$$

Последний предел существует, так как очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$. Теперь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд оказался сходящимся к сумме

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, мы установили, что ряд (8.1.8) с $a \neq 0$ является сходящимся тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ и нашли в этом случае его сумму.

8.2. СХОДИМОСТЬ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1°. Рассмотрим случай, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (8.2.1)$$

составлен из действительных положительных чисел, т.е. порожден последовательностью $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $a_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$; такой ряд называют знакоположительным. Обозначим через S_n частичную сумму ряда n -го порядка.

В вопросах исследования знакоположительных рядов потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Л е м м а. Если последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, то ряд (8.2.1) сходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С ростом n последовательность $\{S_n\}$ возрастает, так как в частичной сумме будут добавляться положительные члены. Кроме того, по условию, эта последовательность ограничена. Но, как известно из анализа, всякая возрастающая ограниченная последовательность имеет предел; в нашем случае существует (конечный) предел вида $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Это и означает сходимость ряда (8.2.1).

2°. Одним из способов исследования сходимости знакоположительного ряда является сравнение его общего члена с общим членом некоторого ряда с известным поведением ("эталонного ряда"). Примером эталонного является ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии (п. 6 параграфа 8.1). Другие примеры смотрите в конце настоящего параграфа.

Теорема 1 (сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (8.2.2)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (8.2.3)$$

и при всех $n = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$a_n \leq b_n. \quad (8.2.4)$$

Тогда: 1) если сходится ряд (8.2.3) (к некоторой сумме B), то сходится и ряд (8.2.2) (к некоторой сумме A); при этом для их сумм имеет место соотношение $A \leq B$;

2) если ряд (8.2.2) расходится, то расходится и ряд (8.2.3).

З а м е ч а н и е. Согласно свойству п. 4 параграфа 8.1 (отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость ряда) утверждение теоремы имеет место, если соотношение (8.2.4) выполняется не при всех n , а лишь начиная с некоторого номера N .

Доказательство. 1) Если ряд (8.2.3) сходится, то последовательность $\{B_n\}$ его частичных сумм (как сходящаяся последовательность) ограничена сверху некоторой постоянной C : $B_n \leq C$. Если также $\{A_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда (8.2.2), то из неравенства (8.2.4) вытекает, что

$$A_n \leq B_n \leq C \quad (8.2.5)$$

при всех n . Следовательно, последовательность $\{A_n\}$ ограничена сверху, а тогда по лемме п. 1 ряд (8.2.2) сходится. Переходя к пределу в неравенстве (8.2.5), получаем также $A \leq B$. Утверждение 1) установлено.

2) Если ряд (8.2.2) расходится, то (8.2.3) не может быть сходящимся по доказанному утверждению 1): тогда, согласно (8.2.4), обязан был бы сходиться и ряд (8.2.2). Теорема 1 полностью доказана.

3°. Теорема 2 (сравнения в предельной форме). Пусть даны два знакоположительных ряда (8.2.2) и (8.2.3), причем существует предел вида

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}, \quad L > 0. \quad (8.2.6)$$

Тогда ряды (8.2.2) и (8.2.3) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Согласно (8.2.6) и определению предела, для каждого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < L$ существует номер N , такой что неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

имеет место при всех $n > N$. Из последнего соотношения (при указанных n) вытекает, что

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon,$$

или, одновременно,

$$a_n < (L + \varepsilon)b_n, \quad b_n < \frac{1}{L - \varepsilon}a_n. \quad (8.2.7)$$

Согласно выбору ε имеет место оценки $L + \varepsilon > 0$ и $L - \varepsilon > 0$. Тогда по свойству п. 2 параграфа 8.1 ряд с общим членом $(L - \varepsilon)a_n$ ведет себя так же, как (8.2.2), а ряд с членами $(L + \varepsilon)b_n$ – как (8.2.3). Теперь, в силу теоремы 1, первое неравенство в (8.2.7) будет означать, что из сходимости (8.2.3) вытекает сходимость (8.2.2), а из расходимости (8.2.2) – расходимость (8.2.3). Аналогичные утверждения следуют из второго неравенства в (8.2.7), если "поменять ролями" (8.2.2) и (8.2.3). Таким образом, поведение рядов (8.2.2) и (8.2.3) – одинаково, что и утверждалось.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(2^n+1)n}.$$

Решение. Оценим сверху общий член ряда:

$$a_n < \frac{2n+1}{2^n n} = \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^n \leq 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

составлен из членов геометрической прогрессии с первым членом $a = 3$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$, меньшим единицы; следовательно этот ряд сходится. По теореме 1 сравнения тогда сходится и данный ряд.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1}.$$

Решение. При больших значениях n поведение общего члена ряда

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 3n + 1}$$

определяется поведением старших степеней параметра n , что наводит на мысль рассмотреть последовательность $\{b_n\}$ с общим членом

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

и сравнить (на основании признака в предельной форме) данный ряд с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

последний (гармонический) ряд, как установлено выше, является расходящимся. Имеем

$$\begin{aligned} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1} : \frac{1}{n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 (1 + 3/n + 1/n^2)} = 1, \end{aligned}$$

т.е. $L \neq 0$, откуда заключаем, что поведение сравниваемых рядов одинаково, а значит данный ряд расходится.

4°. Использование признаков сравнения знакоположительных рядов предполагает наличие некоторого эталона для сравнения. Было бы полезно дополнить список признаков такими, которые позволяли бы исследовать поведение ряда, исходя лишь из вида его общего члена. Такие признаки предлагаются в настоящем и следующем пунктах параграфа.

Пусть дан знакоположительный ряд (8.2.1).

Теорема 3 (радикальный признак Коши). Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}. \quad (8.2.8)$$

Если $K < 1$, то ряд (8.2.1) сходится; если же $K > 1$, то ряд расходится.

Замечание. В случае $K = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда: существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов, для которых $K = 1$.

Доказательство. Согласно (8.2.8) и определению предела, для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N , такой что неравенство

$$|\sqrt[n]{a_n} - K| < \varepsilon$$

имеет место при всех $n > N$. Из последнего соотношения (при указанных n) вытекает, что

$$K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon. \quad (8.2.9)$$

Случай 1: $K < 1$. Ввиду произвольности выбора ε положим $0 < \varepsilon < 1 - K$ и обозначим $q = K + \varepsilon$, так что $0 < q < 1$. Из (8.2.9) выте-

кает тогда, что $a_n < (K + \varepsilon)^n$ или $a_n < q^n$ при всех $n > N$. Поскольку сумма членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$$

является сходящимся рядом, то по первой теореме сравнения (см. также замечание к ней) сходится и ряд (8.2.1).

Случай 2: $K > 1$. В этом случае выберем ε так, что $0 < \varepsilon < K - 1$ и обозначим $Q = K - \varepsilon$, так что $Q > 1$. Из (8.2.9) вытекает тогда, что $a_n > (K - \varepsilon)^n$ или $a_n > Q^n$ при всех $n > N$. Но в этом случае члены ряда (8.2.1) не могут стремиться к нулю

и ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Теорема полностью доказана.

Теорема 4 (признак Даламбера). Пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \quad (8.2.10)$$

Если $D < 1$, то ряд (8.2.1) сходится; если же $D > 1$, то ряд расходится.

Замечание. В случае $D = 1$ (подобно признаку Коши) теорема 2 не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Доказательство мы не приводим, но его идея та же, что и в случае теоремы 1. Отметим только (это потребуется в дальнейшем), что при $D > 1$ расходимость ряда имеет место ввиду нарушения необходимого признака сходимости – достаточного признака расходимости (см. доказательство признака Коши).

Пример 3. Исследовать сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

Решение. Имеем знакоположительный ряд с общим членом

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2},$$

вид которого наводит на мысль использовать признак Коши. Имеем

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e.$$

Поскольку $K = e = 2,71... > 1$, то данный ряд расходится.

5°. Следующий признак позволяет свести вопрос об исследовании сходимости знакоположительного ряда к более знакомой задаче об исследовании сходимости несобственного интеграла.

Рассмотрим аналитическое выражение общего члена a_n (формулу, которой он задан) ряда (8.2.1) и заменим в ней n на x . В результате получим некоторую функцию $a(x)$. Пусть эта функция непрерывна и убывает на промежутке $[1, +\infty)$.

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Если несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} a(x) dx \quad (8.2.11)$$

сходится, то сходится и ряд (8.2.1); если же интеграл (8.2.11) расходится, то расходится и ряд.

Доказательство основано на следующем неравенстве:

$$S_n - a_1 < \int_1^n a(x) dx < S_{n-1}.$$

Чтобы его доказать, используем следующие рассуждения геометрического характера (см. рис. 8.2.1).

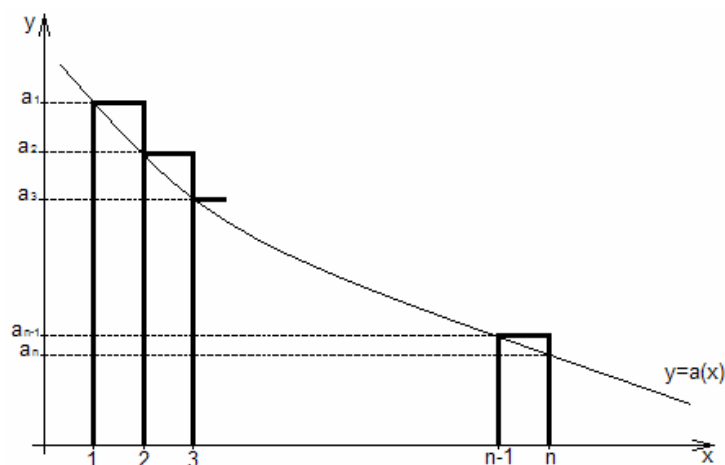


Рис. 8.2.1

Значение $\int_1^n a(x) dx$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком $y = a(x)$, основанием которой является отрезок $[1, n]$. Точки с координатами (n, a_n) расположены на графике $y = a(x)$, а

$$S_n - a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Первое слагаемое $a_2 = 1 \cdot a_2$ численно равно площади прямоугольника, основание которого есть отрезок $[1, 2]$ оси абсцисс, а высота h равна a_2 ; второй член – площади прямоугольника с основанием $[2, 3]$ и высотой $h = a_3; \dots$; последний член суммы a_n численно совпадает с площадью прямоугольника, имеющего основанием отрезок $[n-1, n]$ и высоту, равную a_n . Полученная ступенчатая фигура (см. рис. 8.2.1), состоящая из указанных прямоугольников, является вписанной по отношению к криволинейной трапеции, а значит имеет площадь, меньшую, чем криволинейная трапеция, так что неравенство

$$S_n - a_1 < \int_1^n a(x) dx$$

доказано.

Аналогичны рассуждения в случае второго неравенства: сумма $S_{n-1} = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_{n-1}$ численно равна площади описанной ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников, основания которых – отрезки $[1, 2], [2, 3], \dots, [n-1, n]$, а высоты равны, соответственно a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , так что площадь этой фигуры больше, чем площадь криволинейной трапеции.

В случае сходимости несобственного интеграла из неравенства

$$S_n < a_1 + \int_1^n a(x) dx < a_1 + \int_1^\infty a(x) dx$$

получаем ограниченность последовательности частичных сумм и, следовательно (на основании леммы п. 1) ее сходимость. В случае же расходимости несобственного интеграла и оценки

$$S_{n-1} > \int_1^n a(x) dx$$

имеем неограниченность S_{n-1} , а значит, расходимость ряда.

Итак, ряд ведет себя так же, как несобственный интеграл (8.2.11), что и требовалось доказать.

Пр и м е р 4. Рассмотрим ряд (называемый рядом Дирихле)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbf{R}. \quad (8.2.12)$$

Докажем, что ряд (8.2.12) сходится при $p > 1$ и расходится при остальных действительных значениях p .

Начнем со случая $p > 0$, $p \neq 1$ и применим интегральный признак Коши. Заменяя в записи общего члена ряда n на x , получим функцию $a(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in [1, +\infty)$. Ясно, что на указанном промежутке функция $a(x)$ непрерывна и убывает. Исследуем теперь несобственный интеграл (8.2.11).

Если $p > 1$, то

$$\begin{aligned} \int_1^\infty a(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T x^{-p} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^T = \frac{1}{1-p} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{T^{1-p}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}. \end{aligned}$$

Итак, исследуемый интеграл оказался сходящимся, откуда и следует сходимость ряда (8.2.12).

Если $0 < p < 1$, то тот же интеграл вычисляется в виде

$$\int_1^\infty a(x) dx = \frac{1}{1-p} \lim_{T \rightarrow +\infty} (T^{1-p} - 1) = +\infty,$$

откуда следует расходимость ряда.

В случае $p = 1$ снова применяем интегральный признак Коши с $a(x) = \frac{1}{x}$:

$$\int_1^\infty a(x) dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} (\ln x) \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \ln T = +\infty,$$

так что ряд (8.2.12) расходится; тем самым еще раз установлена расходимость гармонического ряда.

Наконец, при $p \leq 0$ имеем $a_n = n^{-p} \geq 1$, так что общий член ряда не стремится к нулю, а тогда ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

З а м е ч а н и е. Если к гармоническому ряду применить признаки Коши и Даламбера, то, как нетрудно проверить, получится соответственно $K = 1$ и $D = 1$. В то же время условия $K = 1$ и $D = 1$ выполняются и для членов сходящегося ($p > 1$) ряда Дирихле. Приведенные примеры подтверждают ранее сделанный вывод, что по одной только информации вида $K = 1$ и $D = 1$ о поведении ряда судить нельзя; следует провести дополнительное исследование: например, применить другие признаки.

8.3. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ

1⁰. Рассмотрим знакоположительную последовательность

$$\{a_n\}, a_n \in \mathbf{R}, a_n > 0, n = 1, 2, \dots \quad (8.3.1)$$

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (8.3.2)$$

называется знакочередующимся. Достаточным признаком его сходимости является следующий признак Лейбница, который мы приводим без доказательства.

Т е о р е м а 1. Если последовательность (8.3.1) является убывающей и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то знакочередующийся ряд (8.3.2) сходится.

П р и м е р 1. Ряд вида

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots \quad (8.3.3)$$

является сходящимся, поскольку выполнены оба условия признака Лейбница: последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ является, очевидно, убывающей и имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2⁰. Рассмотрим ряд из действительных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (8.3.4)$$

среди членов которого имеются как положительные, так и отрицательные числа; такой ряд называется знакопеременным. Рассмотрим также ряд, составленный из абсолютных величин членов (8.3.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \quad (8.3.5)$$

Будем считать, что количество как положительных, так и отрицательных членов в (8.3.4) является бесконечным, так как в противном случае вопрос о сходимости сводится к случаю знакоположительных рядов. В самом деле, если, например, количество положительных членов в (8.3.4) оказывается конечным, то, начиная с некоторого номера, все члены ряда будут отрицательными. Тогда поведение ряда определяется поведением этого остатка (свойство п. 4 параграфа 8.1), состоящего только из отрицательных членов. Если же изменить знаки всех членов ряда – остатка на противоположные, т.е. умножить все члены на (-1) , то его поведение не изменится (свойство п. 2 параграфа 8.1). Таким образом, вопрос сведен к исследованию сходимости полученного знакоположительного ряда.

Т е о р е м а 2. Если сходится ряд (8.3.5), то сходится и ряд (8.3.4).

Сходимость ряда (8.3.4) в этом случае называется абсолютной.

Обратное утверждение неверно: знакопеременный ряд может быть сходящимся, тогда как (8.3.5) – расходящийся. Примером служит (8.3.3), для которого ряд из абсолютных величин – это расходящийся (параграф 8.1, п. 1) гармонический ряд.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad (8.3.6)$$

– n -я частичная сумма ряда (8.3.4), а

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \quad (8.3.7)$$

– n -я частичная сумма ряда из абсолютных величин (8.3.5).

Выделим в (8.3.6) сумму всех положительных членов, и обозначим ее через S_n^+ , а сумму абсолютных величин всех отрицательных членов (в составе S_n) обозначим через S_n^- . Суммы S_n^+ и S_n^- , составленные из положительных чисел, возрастают с ростом n . Тогда, очевидно,

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \quad \sigma_n = S_n^+ + S_n^-.$$

Последовательность (8.3.7) имеет предел (ввиду сходимости ряда (8.3.5)), а значит является ограниченной, т.е. существует постоянная $C > 0$, такая что $\sigma_n \leq C$ при всех n . Ясно, что тогда $S_n^+ \leq S_n^+ + S_n^- = \sigma_n \leq C$, и, точно так же, $S_n^- \leq \sigma_n \leq C$. Значит, последовательности S_n^+ и S_n^- , будучи возрастающими и ограниченными, имеют конечные пределы. Тогда имеет предел их разность S_n , что и означает сходимость ряда (8.3.4).

3°. Вернемся к рассмотрению ряда с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n, \quad (8.3.8)$$

одновременно рассматривая соответствующий ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|. \quad (8.3.9)$$

Рассмотрим также два ряда, составленные из действительных частей и мнимых частей последовательности $\{w_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad (8.3.10)$$

где $u_n = \operatorname{Re} w_n$, $v_n = \operatorname{Im} w_n$, $n = 1, 2, \dots$.

В параграфе 2.3 (теорема п. 4) доказано, что *если сходится ряд из модулей (8.3.9), то сходится и ряд (8.3.8)*.

В этом случае говорят, что (8.3.8) сходится абсолютно.

Выше показано (на примере ряда из действительных чисел), что числовой ряд может сходиться, тогда как ряд из модулей расходится. В этом случае сходимость ряда (8.3.8) называют условной.

Т е о р е м а 3. Ряд (8.3.8) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся оба ряда (8.3.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве теоремы п. 4 параграфа 2.3 уже установлено, что из сходимости (8.3.9) вытекает абсолютная сходимость обоих рядов (8.3.10). Остается установить обратное утверждение. Заметим, что при каждом n наибольшее из двух чисел $|u_n|$ и $|v_n|$ не превосходит их суммы $|u_n| + |v_n|$, а тогда

$$\begin{aligned} |w_n| &= \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \leq \sqrt{(\max\{|u_n|, |v_n|\})^2 + (\max\{|u_n|, |v_n|\})^2} = \\ &= (\max\{|u_n|, |v_n|\})\sqrt{2} \leq (|u_n| + |v_n|)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Если теперь абсолютно сходятся оба ряда (8.3.10), то будет сходящимся и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)\sqrt{2}$$

(см. простейшие свойства сходящихся рядов, п. 2 параграфа 8.1). Согласно теореме 1 сравнения будем иметь тогда сходимость (8.3.9), чем и завершается доказательство теоремы 3.

4°. Как следует из результатов пп. 2, 3, достаточные условия сходимости ряда из модулей (8.3.9) являются одновременно и достаточными условиями сходимости ряда комплексных чисел (8.3.8). Поэтому признаки сходимости знакоположительных рядов, которым мы выше уделили столь значительное внимание, выступают здесь признаками сходимости (абсолютной) рядов с комплексными членами. Уточним последнюю мысль.

Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|}$$

(будем называть его числом Коши). Если $K < 1$, то ряд (8.3.8) сходится абсолютно. Если же $K > 1$, то ряд (8.3.8) расходится.

Стоит отметить, что при $K > 1$ ряд из модулей (8.3.9) расходится ввиду того, что не выполнен необходимый признак сходимости (см. доказательство теоремы 3 параграфа 8.2), но тогда не могут стремиться к нулю и члены w_n ; таким образом и ряд (8.3.8) оказывается расходящимся.

Аналогично обстоит дело и с "числом Даламбера"

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}:$$

если $D < 1$, то ряд (8.3.8) сходится абсолютно; если же $D > 1$, то (8.3.8) расходится.

П р и м е р 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (i-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

Решение. Имеем общий член ряда в виде

$$w_n = (i-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$$

и

$$|i-1| = \sqrt{2}, \sin \frac{\pi}{2^n} > 0;$$

последнее неравенство имеет место, так как при $n = 1, 2, \dots$ значения аргумента $\frac{\pi}{2^n}$ принадлежат первой четверти тригонометрической окружности. Значит,

$$|w_n| = (\sqrt{2})^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n},$$

а тогда число Даламбера

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2})^{n+1} \cdot \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{(\sqrt{2})^n \cdot \sin \frac{\pi}{2^n}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} = \\ &= \sqrt{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

вычисляя последний предел, мы воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin t$ и t при $t \rightarrow 0$ в случаях, когда значения t выбраны равными $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ и $\frac{\pi}{2^n}$.

Итак, $D = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, откуда следует, что данный ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1-ni}.$$

Решение. Имеем

$$|w_n| = \frac{n}{|1-ni|} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{n}{n\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}},$$

и теперь легко заметить, что $|w_n|$ не стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = 1.$$

Согласно достаточному признаку расходимости, данный ряд будет расходящимся.

8.4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В настоящем параграфе мы докажем утверждения, на которые делались ссылки в параграфе 2.4.

¹⁰. Пусть $S(z)$ есть сумма функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \tag{8.4.1}$$

на замкнутой ограниченной области G и при каждом n существует наибольшее значение модуля уклонения $S_n(z)$ от $S(z)$

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(z) - S(z)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Напомним, что ряд (8.4.1) называется равномерно сходящимся на G к сумме $S_n(z)$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

и докажем сформулированный в параграфе 2.4 достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

Т е о р е м а . Если существует числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, такая что для всех $z \in G$, $n = 1, 2, \dots$ имеют место оценки

$$|u_n(z)| \leq \alpha_n \quad (8.4.2)$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad (8.4.3)$$

– сходящийся, то ряд (8.4.1) равномерно сходится на G .

При выполнении условий теоремы 1 говорят, что ряд (8.4.1) *мажорируем* на G , а знакоположительный ряд (8.4.3) называется *мажорантным*. В этих терминах теорема может быть сформулирована так: *мажорируемый на G функциональный ряд сходится равномерно на G* .

Отметим также (не приводя здесь соответствующих примеров), что условие мажорируемости является лишь достаточным для равномерной сходимости, но не является необходимым.

Доказательство. Ввиду соотношения (8.4.2), выполненного на G , имеем абсолютную сходимость (на G) ряда (8.4.1) к некоторой сумме $S(z)$; при этом

$$S(z) - S_n(z) = r_n(z), \quad (8.4.4)$$

где $r_n(z)$ – сумма ряда-остатка (см. п. 4 параграфа 8.1).

По определению суммы ряда и ввиду сохранения для функций комплексного переменного привычных свойств пределов (предельный переход под знаком модуля и предельный переход в неравенстве) имеем

$$\begin{aligned} |r_n(z)| &= \left| \lim_{m \rightarrow \infty} (u_{n+1}(z) + \dots + u_m(z)) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |u_{n+1}(z) + \dots + u_m(z)| \leq \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} (|u_{n+1}(z)| + \dots + |u_m(z)|) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_m). \end{aligned}$$

Сумма под знаком последнего написанного предела представляет собою m -ю частичную сумму n -го остатка числового ряда (8.4.3), а значение предела – сумма его n -го остатка, которую мы обозначим через r_n^* :

$$|r_n(z)| \leq r_n^*.$$

Ввиду сходимости ряда (8.4.3) имеем (п. 4 параграфа 8.1) $r_n^* \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно (8.4.4), в определении равномерной сходимости функционального ряда при выполнении условия теоремы тогда имеем

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(z) - S(z)| = \max_{z \in G} |S(z) - S_n(z)| = \max_{z \in G} |r_n(z)| \leq r_n^*$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0,$$

что и означает равномерную (на G) сходимость ряда (8.4.1).

2⁰. Т е о р е м а 2. Если ряд (8.4.1), составленный из функций $u_n(z)$, непрерывных на замкнутой ограниченной области G , равномерно сходится на этой области, то его сумма $S(z)$ непрерывна в каждой точке $z_0 \in G$, т.е.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} S(z) = S(z_0). \quad (8.4.5)$$

Доказательство. Оценим $|S(z) - S(z_0)|$. Имеем, в силу (8.4.4),

$$\begin{aligned} |S(z) - S(z_0)| &= |(S_n(z) + r_n(z)) - (S_n(z_0) + r_n(z_0))| \leq \\ &\leq (|S_n(z) - S_n(z_0)| + |r_n(z)| + |r_n(z_0)|) \leq |S_n(z) - S_n(z_0)| + 2 \max_{z \in G} |r_n(z)| = \\ &= |S_n(z) - S_n(z_0)| + 2\rho_n, \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

где, по определению равномерной сходимости ряда, $\rho_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку конечная сумма $S_n(z)$ непрерывных (на G) функций является непрерывной, имеем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} S_n(z) = S_n(z_0) \quad \text{или} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} |S_n(z) - S_n(z_0)| = 0,$$

а тогда в силу (8.4.6),

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |S(z) - S(z_0)| \leq \lim_{z \rightarrow z_0} |S_n(z) - S_n(z_0)| + 2\rho_n = 2\rho_n. \quad (8.4.7)$$

Левая часть (8.4.7) не зависит от n и, следовательно, сохраняет свой вид при предельном переходе (по n), тогда как правая стремится к нулю. Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в обеих частях (8.4.7), получаем

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |S(z) - S(z_0)| = 0,$$

откуда и следует (8.4.5).

8.5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ: СЛУЧАЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1^0 . Рассмотрение начнем с общих свойств равномерно сходящихся рядов функций $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ действительного переменного x . Применительно к этому случаю формулировки выглядят следующим образом.

1) Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (8.5.1)$$

называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a, b]$ к сумме $S(x)$, если имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |S(x) - S_n(x)| = 0.$$

2) Если ряд (8.5.1) *мажорируем* на отрезке $[a, b]$, то он обладает *равномерной сходимостью* на этом отрезке.

3) Ряд (8.5.1), составленный из функций, *непрерывных* на отрезке $[a, b]$ и *равномерно сходящийся* на $[a, b]$, *обладает непрерывной на этом отрезке суммой и допускает возможность почленного интегрирования* по всякому $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

4) Если ряды (8.5.1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad (8.5.2)$$

обладают *равномерной сходимостью* на отрезке $[a, b]$, и суммы их равны, соответственно, функциям $S(x)$ и $\phi(x)$, то сумма $S(x)$ ряда (8.5.1) *дифференцируема* при всех $x \in (a, b)$; при этом $S'(x) = \phi(x)$, $x \in (a, b)$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = S'(x).$$

Утверждения 2) и 3) являются частными случаями теорем, установленных выше: см. признак Вейерштрасса, доказанный в п. 1 параграфа 8.4, свойство непрерывности суммы ряда и возможность почленного интегрирования, установленные в п. 2 параграфа 8.4 и п. 3 параграфа 4.1.

Остается доказать утверждение 4). Ввиду равномерной сходимости ряда (8.5.2) можно произвести его почленное интегрирование по некоторому отрезку $[\alpha, x] \subset [a, b]$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x f'_n(x) dx = \int_{\alpha}^x \phi(x) dx. \quad (8.5.3)$$

Поскольку

$$\int_{\alpha}^x f'_n(x) dx = f_n(x) - f_n(\alpha), \quad n = 1, 2, \dots,$$

то левая часть последнего соотношения есть разность значений суммы $S(x)$, вычисленных в точках x и α :

$$S(x) - S(\alpha) = \int_{\alpha}^x \phi(x) dx.$$

Продифференцируем теперь обе части последнего соотношения и воспользуемся существованием производной интеграла с переменным верхним пределом; в нашем случае

$$\left(\int_{\alpha}^x \phi(x) dx \right)' = \phi(x), \quad x \in (a, b).$$

В результате получаем дифференцируемость $S(x)$ и соотношение

$$S'(x) - (S(\alpha))' = \phi(x), \quad x \in (a, b);$$

при этом $(S(\alpha))' = 0$, так как α – постоянная величина. Утверждение доказано.

2⁰. Рассмотрим ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad x \in \mathbf{R} \quad (8.5.4)$$

с действительными коэффициентами a_n , $n = 1, 2, \dots$; будем употреблять также запись

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Пересечением круга сходимости $\{z : |z| < R\}$ степенного ряда (2.4.2) комплексной переменной с осью абсцисс является интервал $(-R, R)$, поэтому для ряда (8.5.4) следует вести речь об интервале сходимости, внутри которого он сходится абсолютно, а вне которого расходится. Радиус интервала (радиус сходимости) может быть, очевидно, и здесь найден по одной из формул (2.4.5) $R = \frac{1}{K}$ или $R = \frac{1}{D}$, где, соответственно случаю (8.5.4),

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \quad (8.5.5)$$

Стоит отметить, что общая теория не позволяет судить о поведении такого ряда в концевых точках интервала, и для каждого конкретного степенного ряда исследование в обеих концевых точках проводят дополнительно.

3⁰. Из результатов п. 1 параграфа 4.1 вытекает, что степенной ряд (8.5.4) мажорируем на всяком отрезке вида $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит, равномерно сходится на этом отрезке. Отсюда вытекает возможность почленного интегрирования ряда по всякому отрезку, расположенному внутри интервала сходимости (см. п. 1 настоящего параграфа).

Возможность же почленного дифференцирования будет обеспечена равномерной сходимостью ряда составленного из производных; см. утверждение 4) настоящего параграфа. Достаточно поэтому установить мажорируемость ряда

$$(a_0)' + (a_1x)' + (a_2x^2)' + \dots + (a_nx^n)' + \dots,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (8.5.6)$$

на любом отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$. Доказательство мажорируемости проведем в предположении, что существует предел, обозначенный через D в (8.5.5); следовательно $R = \frac{1}{D}$.

Определим радиус сходимости \tilde{R} ряда (8.5.6). Соответствующее число Даламбера имеет вид

$$\tilde{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|a_{n+1}|}{n|a_n|} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \cdot D,$$

следовательно, $\tilde{R} = \frac{1}{D}$. Таким образом, $\tilde{R} = R$, и интервалы сходимости рядов (8.5.4), (8.5.6) совпадают. Окончательно, имеем мажорируемость ряда (8.5.6) на всяком отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит и возможность почленного дифференцирования исходного степенного ряда (8.5.4).

4⁰. Если рассуждения п. 3 применить к ряду из производных (8.5.6), то получаем возможность и его почленного дифференцирования в интервале $(-R, R)$. Повторяя и далее указанные рассуждения, приходим к следующему важному выводу: *степенной ряд, обладающий суммой $S(x)$ в некотором интервале сходимости, можно почленно дифференцировать сколько угодно много раз в этом интервале; при этом сумма ряда из n -х производных совпадает с $S^{(n)}(x)$.*

5⁰. П р и м е р ы .

1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}.$$

Решение. Имеем функциональный ряд, который становится степенным после замены переменной $y = e^{-x}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n.$$

Получена сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем y . Ряд сходится тогда и только тогда (п. 6 параграфа 8.1), когда $|y| < 1$. Значит, область сходимости определяется неравенством $e^{-x} < 1$, откуда $-x < 0$, так что $x > 0$. Окончательно получили, что область сходимости ряда есть полупрямая $x > 0$.

2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{nx^n}.$$

Решение. Если положить $X = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, то получим степенной ряд действительной переменной X

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} X^n$$

с коэффициентами вида $a_n = \frac{5^n}{n}$. Число Даламбера находим в виде

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n5^{n+1}}{(n+1)5^n} = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 5,$$

откуда $R = \frac{1}{5}$, и интервал абсолютной сходимости ряда определяется соотношением

$$-\frac{1}{5} < X < \frac{1}{5};$$

вне этого интервала степенной ряд расходится. Исследуем концы интервала.

а) $X = \frac{1}{5}$. В этой точке значение общего члена ряда

$$f_n(X) = \frac{5^n}{n} X^n \text{ есть величина } f_n\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5^n}{n} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{n},$$

так что приходим к числовому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(гармонический ряд), который расходится.

б) $X = -\frac{1}{5}$. Имеем

$$f_n\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5^n}{n} \frac{(-1)^n}{5^n} = \frac{(-1)^n}{n};$$

получаемый знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

является условно сходящимся (параграф 8.3, пп. 1, 2).

Итак, область сходимости степенного ряда определяется соотношением $-\frac{1}{5} \leq X < \frac{1}{5}$. Поскольку $X = \frac{1}{x}$, то остается решить двойное неравенство $-\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} < \frac{1}{5}$. Можно записать, что $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{5}$ либо $\frac{1}{x} = -\frac{1}{5}$. В первом случае имеем $|x| > 5$, что равносильно совокупности двух неравенств: $x > 5$, $x < -5$; во втором — $x = -5$. Окончательно имеем область сходимости в виде

$$x \in (-\infty, -5] \cup (5, +\infty).$$

8.6. РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ e^x , $\sin x$, $\cos x$ В СТЕПЕННОЙ РЯД

1°. Одной из задач, рассмотренных выше, была задача о представлении данной функции суммой соответствующего степенного ряда. В случае функции действительного переменного $y = f(x)$, такой ряд имеет вид

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots; \quad a_n \in \mathbf{R}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.6.1)$$

Как отмечалось выше, в интервале сходимости $(-R, R)$ записанный ряд можно почленно дифференцировать сколько угодно много раз. Поскольку $f(x)$ – его сумма, то она необходимо должна быть дифференцируема сколько угодно много раз. Докажем, что в этом случае разложение (8.6.1) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (8.6.2)$$

Действительно,

а) полагая $x = 0$ в (8.6.1), получаем $a_0 = f(0)$;

б) почленно дифференцируя (8.6.1) и снова полагая $x = 0$, имеем $a_1 = f'(0)$;

в) в результате второго почленного дифференцирования (8.6.1) при $x = 0$ получаем $f''(0) = 2!a_2$, откуда $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$;

г) на $(n+1)$ шаге приходим к равенству $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, откуда

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Учитывая вид полученных коэффициентов a_n , мы и получаем (8.6.2); говорят также, что функция $f(x)$ разложена в ряд по степеням x , или, коротко, в ряд Маклорена.

Поскольку в настоящем пункте мы проводим лишь обзорное рассмотрение, то ограничимся формулировкой следующего достаточного условия разложимости в ряд Маклорена функций действительного переменного: *если для всех значений $n = 1, 2, \dots$ существует постоянная $C > 0$ такая, что в некоторой окрестности точки $x_0 = 0$ выполняется неравенство*

$$|f(x)| + |f^{(n)}(x)| \leq C,$$

то функция $f(x)$ в этой окрестности есть сумма соответствующего ряда Маклорена (8.6.2).

Нетрудно поверить, что это утверждение применимо к функциям $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ во всякой окрестности точки $x_0 = 0$. Если вычислить коэффициенты ряда Маклорена для каждой из них, то получим, что при всех значениях действительного аргумента имеют место разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (8.6.3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

Именно эти разложения служили в параграфе 2.5 основой для определения функций комплексного переменного $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$.

Остановимся на обосновании, например, соотношения (8.6.3). Имеем

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а тогда

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1.$$

Подставляя полученные значения в (8.6.2), мы приходим к (8.6.3). Для доказательства сходимости ряда (8.6.3) при каждом x к сумме $f(x) = e^x$, заметим, что в каждом интервале $(-R_0, R_0)$ имеет место соотношение

$$|f(x)| + |f^{(n)}(x)| \leq C_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где постоянная $C_0 = e^{R_0}$.

На основании сформулированного выше достаточного условия разложимости функции в ряд Маклорена тогда во всяком фиксированном интервале ряд (8.6.3) имеет своей суммой именно $f(x) = e^x$. Ввиду произвольности выбранного интервала разложение (8.6.3) имеет место при всех действительных x , что и утверждалось.

8.7. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 8

1⁰. Исследовать сходимость знакоположительного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2\sqrt{n}}{2+n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2n}{n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+3^n}{4^n} \right)^{2n}$.

2⁰. Исследовать сходимость знакопеременного ряда и в случае сходимости установить ее характер (абсолютная или условная):

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^3+n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^{1-2n} 4^{n+3}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{e} \right)^n$.

3⁰. Найти интервал сходимости степенного ряда (x – действительная переменная):

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n-1}}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)! x^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^{2n}}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-10)^{n+1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x+7)^n}{n+7}$.

4⁰. Найти область сходимости функционального ряда

а) $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m \sin^m \frac{x}{6}$; б) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \ln^m \frac{1}{x-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.А. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.
2. Маркушевич, А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.
3. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 640 с.
4. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1985. – Ч. 1. – 336 с.
5. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 478 с.

