УДК 517.9

В.А. Яковлев[*]

МЕТОД СУММИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ СУММ

При решении многих прикладных экономических задач часто возникает проблема суммирования большого числа слагаемых. В работе предложен метод вычисления конечных сумм, позволяющий с помощью решения дифференциальных уравнений получать удобные для расчетов формулы.

Рассмотрим элементарные функции $f(x)$ и $S(x)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) функции непрерывно дифференцируемы на интервале $(a; +\infty)$, где $a \in R_-$;

(1)

2) функции удовлетворяют равенству $f(x) = S(x) - S(x-1)$ для $\forall x \in (D(f) \cap D(S))$.

(2)

Например, таким условиям удовлетворяют функции $f(x) = x$ и $S(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $S(x)$ удовлетворяют условиям (1) и (2), тогда справедливо равенство

$S'(n) = S'(0) + \sum_{i=1}^{n} f'(i)$ при $\forall n \in N$.

Доказательство: Продифференцируем функцию $f(x) = S(x) - -S(x-1)$ и получим выражение $f'(x) = S'(x) - S'(x-1)$, с помощью которого находим сумму

---

[*] Работа выполнена под руководством канд. техн. наук, доц. ТГТУ В.А. Попова.

$$\sum_{i=1}^{n} f'(i) = S'(1) - S'(0) + S'(2) - S'(1) + \ldots + S'(n) - S'(n-1) = S'(n) - S'(0)$$

или

$$S'(n) = S'(0) + \sum_{i=1}^{n} f'(n) .$$

Доказанная теорема используется для нахождения значений конечных сумм.

Пусть нам дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (1). Будем искать функцию $S(x)$, удовлетворяющую условиям доказанной теоремы, такую, что $S(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$.

Искомая функция на основании доказанной теоремы удовлетворяет уравнению $S'(n) = S'(0) + \sum_{i=1}^{n} f'(i)$.

Обозначим через $E(n) = \sum_{i=1}^{n} f'(i)$. Тогда при замене натурального аргумента n на действительный аргумент x в силу условия (1) $E(x)$ является непрерывной функцией и $S'(x) = S'(0) + E(x)$. Общее решение этого дифференциального уравнения имеет следующий вид: $S(x, C) = \int E(x)\,dx + S'(0)\cdot x + C$ Для нахождения C и $S'(0)$ воспользуемся равенством $S(n, C) = \sum_{i=0}^{n} f(i)$, рассмотрев его в точках $n = a$ и $n = b$ ($a \neq b$). Из полученной для этих значений системы

$$\begin{cases} \int E(x)dx\big|_{x=a} + S'(0)\cdot a + C = \sum_{i=0}^{a} f(i), \\ \int E(x)dx\big|_{x=b} + S'(0)\cdot b + C = \sum_{i=0}^{b} f(i) \end{cases}$$

определяем C и $S'(0)$.

Пример. Найдем значения суммы $\sum_{i=0}^{n} i^2$. Обозначим $f(n) = n^2$, тогда $f(x) = x^2$. Будем искать функцию $S_2(x)$, удовлетворяющую условиям доказанной теоремы, такую, что $S_2(n) = \sum_{i=0}^{n} i^2$.

$$S_2'(n) = \sum_{i=1}^{n} f'(i) + S_2'(0) = 2\sum_{i=1}^{n} i + S_2'(0) = 2\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + S_2'(0) .$$

Переходя к действительному аргументу x, получаем дифференциальное уравнение $S_2'(x) = x^2 + x + S_2'(0)$, решение которого имеет следующий вид:

$$S_2(x, C) = \int\left(x^2 + x\right)dx + S_2'(0)\cdot x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + S_2'(0)\cdot x + C .$$

Найдем $S_2'(0)$ и C, воспользовавшись равенствами

$$\begin{matrix} S_2(1) = 1^2 = 1 \\ S_2(2) = 1^2 + 2^2 = 5 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+S_2'(0)+C=1, \\ \frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2\cdot S_2'(0)+C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{6}-S_2'(0), \\ S_2'(0)+\frac{1}{6}+\frac{14}{3}=\frac{15}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=0, \\ S_2'(0)=\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Получаем

$$S_2(n)=\sum_{i=0}^{n} i^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

Вычислим сумму $S_k(n)=\sum_{i=0}^{n} i^k$. Случай $k=2$ рассмотрен выше. Пусть нам известна функция $S_{k-1}(n)=\sum_{i=0}^{n} i^{k-1}$, $k>1$. Найдем функцию $S_k(n)$. Из доказанной теоремы следует, что

$$S_k'(n)=k\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+S_k'(0)=kS_{k-1}(n)+S_k'(0)$$

или

$$S_k'(x)=kS_{k-1}(x)+S_k'(0)\,. \tag{3}$$

Решением уравнения (3) будет функция

$$S_k(x,\,C_k)=k\int S_{k-1}(x)\,dx+S_k'(0)\,x+C_k\,. \tag{4}$$

Аналогично для $S_{k-1}(x)$ получаем выражение:

$$S_{k-1}(x,\,C)=(k-1)\int S_{k-2}(x)\,dx+S_{k-1}'(0)\,x+C_{k-1}\,.$$

Используя математическую индукцию и формулы (3) и (4), можно доказать, что для любой функции $S_k(x)$ значение $C_k=0$. Продолжая процесс, получим $S_1'(n)=1\cdot\sum_{i=1}^{n} i^0+S_1'(0)=n+S_1'(0)$; $S_1(x)=x+S_1'(0)$. Обозначим $S_0(x)=x$, тогда $S_0'(x)=1$ и $S_1'(x)=S_0'(0)\,x+S_1'(0)$.

Далее находим:

$$S_1(x)=\frac{x^2}{2}S_0'(0)+xS_1'(0);$$

$$S_2(x)=2\int S_1(x)\,dx+xS_2'(0)=\frac{x^3}{3}S_0'(0)+\frac{x^2}{2}S_1'(0)+xS_2'(0);$$

...

$$S_k(x)=k!\left(\frac{x^{k+1}}{0!\cdot(k+1)!}S_0'(0)+\ldots+\frac{x}{k!\cdot 1!}S_k'(0)\right)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^{i}S_i'(0)\,x^{k-i+1}.$$

Поскольку

$$S_k(1)=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^{i}S_i'(0)=1\,,$$

то

$$S_k'(0)=1-\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1} C_{k+1}^{i}S_i'(0)\,.$$

Возвращаясь к натуральному аргументу в выражении (4), получаем

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{n} i^k=\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} C_{k+1}^{i} S_i'(0) n^{k-i+1}\,. \qquad (5)$$

Формула (5) позволяет находить значения суммы $\sum_{i=0}^{n} i^k$ при больших n с меньшими вычислительными затратами, поскольку содержит меньшее число слагаемых (при $n > k+1$).

Изложенный подход при нахождении конечных сумм, опирающийся на аппарат решения обыкновенных дифференциальных уравнений, в общем случае отличается от методов суммирования функций, изложенных в [1], и, в частности, от методов суммирования степеней чисел, изложенных в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М. : Государственное изд-во физико-математической литературы, 1967. – 375 с.
2. Кудрявцев, В.А. Суммирование степеней чисел натурального ряда и числа Бернулли / В.А. Кудрявцев – М.-Л. : Гл. ред. общетехн. лит. и номографии, 1936. – 72 с.

Кафедра "Высшая математика", ТГТУ