УДК 517.925.52

Н.И. Теряев, Л.А. Мишина*

ОТЫСКАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка m:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t,\ x_1,\ x_2) + \theta \sin t e^{-2(x_1^2+a)}; \\ \dot{x}_2 = f(x_1,\ x_2,\ x_3) + \theta \sin t e^{-2(x_2^2+a)}; \\ \dots \\ \dot{x}_{m-1} = f(x_{m-2},\ x_{m-1}, x_m) + \theta \sin t e^{-2(x_{m-1}^2+a)}; \\ \dot{x}_m = f_2(x_{m-1},\ x_m) + \theta \sin t e^{-2(x_m^2+a)}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$f(x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}) = n(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1});$$

$$f_1(t,\ x_1,\ x_2) = f(b\cos t,\ x_1,\ x_2);$$

$$f_2(x_{m-1}, .x_m) = f(x_{m-1},\ x_m,\ x_c),$$

где θ, a, n, b, x_c – некоторые константы. Вывод этой системы приведен в [1].

Система (1) может быть записана в векторной форме

$$\dot{X} = AX + F(t,\ X), \tag{2}$$

где матрица A имеет трехдиагональный вид

$$A = \begin{bmatrix} -2n & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ n & -2n & n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n & -2n & n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & -2n \end{bmatrix}.$$

Начальное условие для некоторого момента времени t_0 обозначим через

$$X_0 = X(t_0),$$

как показано в работе [1].

Заметим, что предел

$$\lim_{\|X\|\to\infty} \frac{\| F(t,\ X)\|}{\| X\|} = 0,$$

а собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Отсюда следует, что система (2) имеет ω-периодическое решение, где ω – период правой части системы (2) [2].

Решения системы (2) будем искать методом рядов Тейлора

---

* Работа выполнена под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. ТГТУ С.М. Дзюбы.

$$X(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d^k X(t_0)}{dt^k}(t-t_0)^k,$$

как показано в работе [3].

Отыскание решений производится при помощи разработанного авторами данной работы консольного приложения на языке C/C++, предназначенного для работы в распределенной вычислительной среде под ОС семейства Linux с установленными пакетом MPICH2 (для распараллеливания вычислений и, таким образом, ускорения отыскания решений), пакетом MAXIMA 5.9.3 (для отыскания символьного вида производных и их расчета) и MySQL5.

Программа состоит из трех модулей: главный pdiff.cpp – отвечает за управление процессом вычислений, запускает параллельные процессы mpi (количество процессов соответствует количеству переменных исходной системы) – модуль pcalc.c, каждый процесс mpi запускает модуль вычислений производных и их значений (номер процесса соответствует номеру столбца в таблице) – diff.cpp.

Сначала подготавливается файл с настройками подключения к базе данных, в которой создаются таблицы с начальными значениями, символьными видами производных. Необходимость использования базы данных обусловлена тем, что база данных позволяет обеспечить одновременный доступ процессов к данным (чтение/запись).

В процессе функционирования программы создаются временные файлы с необходимыми командами для работы с Maxima, в которой производится символьное дифференцирование. Работа с Maxima производится так же, как и в работе [1]. Результаты дифференцирования записываются в таблицу с результатами вычислений, откуда затем считываются для расчета и отыскания символьного вида производных более высокого порядка. Для того чтобы запустились новые процессы отыскания символьного вида производных более высокого порядка, необходимо, чтобы все символьные производные более низкого порядка были найдены, т.е. были завершены предыдущие процессы. Для завершения предыдущих процессов в модуле pcalc.c используется барьер MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD) и MPI_Finalize().

Практически все запросы базы данных работают по следующей схеме: формируется строка для mysql-запроса на основе считанных или получаемых в процессе работы данных, затем выполняется этот запрос с помощью функции mysql_query() с последующей обработкой результата (mysql_store_result() извлекает полученные данные из буфера в двумерный массив, mysql_free_result() необходима для освобождения оперативной памяти от результата запроса mysql_query()). Для удобной работы со строками использовалась библиотека STL языка C++ (класс string). Это необходимо для того, чтобы после дифференцирования в полученную строку вставить значения предыдущих производных.

После завершения процессов управление снова передается главному модулю pdiff.cpp, в котором далее рассчитывается остаточный член в форме Лагранжа и производится его оценка.

После завершения работы (т.е. при достижении заданной точности или максимально допустимого порядка дифференцирования в случае расхождения ряда) результаты вычислений записываются в выходной файл. Таблицы с начальными значениями и символьными видами производных удаляются после завершения работы программы.

В качестве результата приведем время выполнения программы. Время расчета на компьютере Intel Pentium IV 1 час, в то время как последовательная программа выполняла вычисления в течение 2 часов. Таким образом, распараллеливание вычислений позволило сократить время отыскания решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в 2 раза. Результаты получены для системы второго порядка, построенной на отрезке времени $[t_0,\ t_1]$. При этом $n=0{,}2$, $b=100$, $x_c=1$, $a=0$, $\theta=1$, $t_0=0$, $t_1=21$ и $X_0=\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$. Точность вычислений 0,1. Фазовая траектория полученного решения системы (2) приведена на рис. 1 [1].

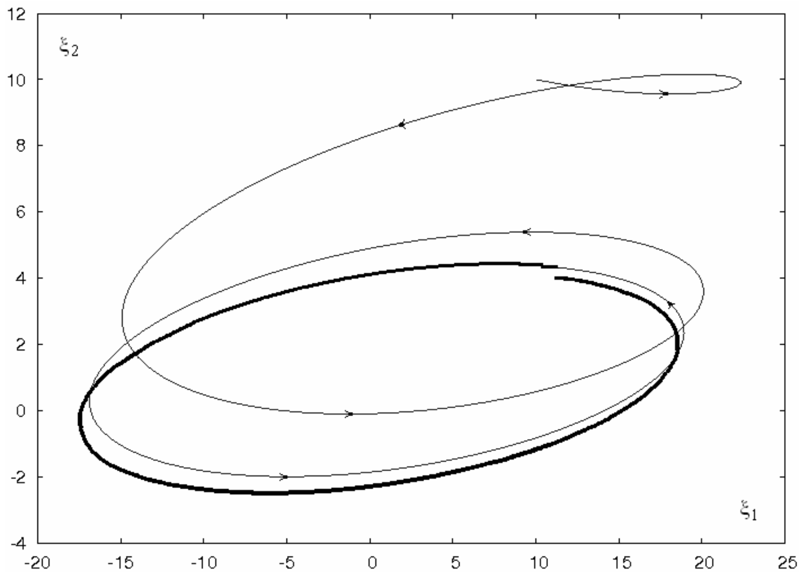

Рис. 1. Фазовая траектория системы второго порядка

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пчелинцев, А.Н. Об отыскании решений системы, описывающей процесс распространения тепла в неограниченной пластине, методом рядов Тейлора / А.Н. Пчелинцев, Л.А. Мишина, Н.И. Теряев // Труды ТГТУ : сб. науч. статей. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – Вып. 21. – С. 150 – 154.

2. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 331 с.

3. Емельянов, С.В. Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях / С.В. Емельянов, А.П. Афанасьев. – М. : РОХОС, 2004. – 176 с.

Кафедра "Распределенные вычислительные системы", ТГТУ