УДК 517.925.52

М.А. Кириченко

О ПОСТРОЕНИИ ОПЕРАТОРА СДВИГА ВДОЛЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$ – векторная функция действительного переменного t; $f = (f_1, ..., f_n)$ – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными $\partial f_i / \partial x_j$ $(\overline{i, j = 1, n})$ в некотором открытом подмножестве евклидова векторного пространства R^n.

В частности, считается, что каждое начальное условие $x(s) = x_0$ однозначно определяет решение $x(t) = p(t, s, x_0)$ уравнения (1), причем это решение определено при всех $t \in (-\infty, +\infty)$.

Точка $x_0 \in E^m$, двигаясь по траекториям системы (1), за время от s до t перейдет в новую точку x_1. Оператор g_s^t перехода от x_0 к x_1 называется оператором сдвига по траекториям системы [1]. Этот оператор очевидно определяется равенством

$$g_s^t x_0 = p(t, s, x_0),$$

где p – решение системы (1).

Если задать некоторое T такое что $t >> T$, то время можно представить в виде $t = kT + \tau$. Решение системы запишется в следующим виде

$$x(t) = p(t, x_0) = g^\tau \underbrace{g^T ... g^T}_{k} x_0 .$$

Таким образом построив оператор сдвига возможно определить решение системы дифференциальных уравнений для любого времени при заданных начальных условиях.

Использование современных методов решения дифференциальных уравнения на больших участках времени приводит к неизбежному накоплению систематической ошибки. Построение оператора сдвига в символьном виде поможет уменьшить накопление систематической ошибки.

Для построения оператора сдвига воспользуемся разложением решения системы (1) в ряд Тейлора. Будем искать вектор-функцию $x(t)$ в виде ряда Тейлора, а именно:

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{s} \frac{x^{(i)}(x_0)}{i!}(t - t_0)^i + H(x_0, t_0, T, s),$$

где $x^{(i)}(t_0)$ – i-я производная функции $x(t)$, взятая в точке t_0, а $H(x_0, t_0, \tau, s)$ – остаточный член, s – количество членов разложения в ряд Тейлора. От коэффициента s зависит точность вычисления значения оператора сдвига. Для оценки точности возьмем $s+1$ член разложения в ряд Тейлора:

$$\left| \frac{x^{(i+1)}(x_k)}{(i+1)!} T^{i+1} \right| < \varepsilon.$$

Такое представление оператора сдвига в виде разложения в ряд Тейлора будет иметь малый радиус сходимости. Для вычисления траектории системы по данной схеме разобьем искомую траекторию на малые участки длиной T. Задав начальное условие вида $x(0) = x_0$, получим

$$x_{k+1} = g^T x_k = x_k + \sum_{i=1}^{s} \frac{\varphi^i(x_k)}{i!} T^i .$$

Для расчета производных системы применим процедуру символьного дифференцирования, для этого используем пакет Maxima, установленный в операционной системе Linux. Также используем пакет Maxima для упрощения выражений и построения траектории системы уравнений.

Описанный алгоритм был применен для построения оператора сдвига системы Лоренца:

$$x = \sigma(y - x), \quad y = rx - y - xz, \quad z = xy - bz,$$

при классических значениях ее параметров: $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$.

Из анализа дуги траектории K, проекция которой показана на рис. 1, следует, что она раскручивается по спиралям вокруг двух положений равновесия, описывая в проекции фигуру, похожую на восьмерку. При этом обнаружить циклы в данный системе не удалось.

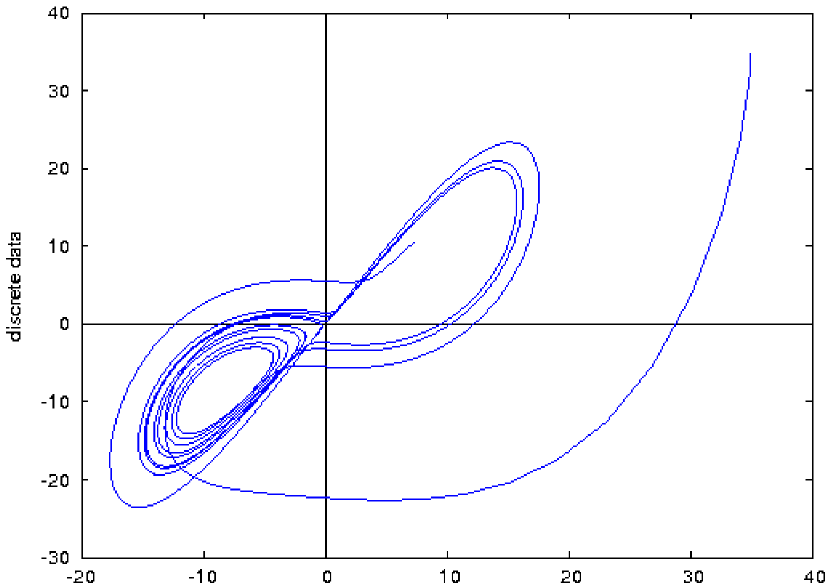

Рис. 1. Проекция на плоскость *XOY* дуги траектории, построенной на отрезке времени [0, 90] для x_0 = 35, y_0 = 35, z_0 = 30

Также заметим, что не удалось обнаружить устойчивого разбегания фазовых траекторий для двух близких точек, определяющих начальные условия решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский. – М. : Наука, 1966. – 331 с.

Кафеда "Распределенные вычислительные системы", ТГТУ