УДК 517.977.57

А.В. Петров

К ВОПРОСУ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА*

Для современной промышленности энергосбережение является одной из основных проблем. Большинство аппаратов в химической, металлургической, машиностроительной отраслях промышленности значительную часть времени находятся в динамических режимах. Приобретает актуальность задача синтеза оптимального управления по энергетическому критерию [1]. Для решения задач проектирования алгоритмического обеспечения управляющих устройств широко используется «Экспертная система энергосберегающего управления» [2].

Прежде всего, необходимо определить, существует ли оптимальное управление. Рассмотрим задачу оптимального управления для объекта третьего порядка – реального тройного интегратора. Многие объекты в динамическом режиме описываются моделью вида «реальный тройной интегратор» с достаточной точностью.

Исходными данными для решения задачи являются:

– модель динамики объекта

$$\dot{z} = Az(t) + Bu(t)\,,$$

где

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad t \in [t_0,\, t_k];$$

– ограничение на управление

$$\forall t \in [t_0, t_k] \quad u(t) \in [u_{\text{н}}, u_{\text{в}}], \quad \text{причем} \quad |u_{\text{н}}| = u_{\text{в}}\,;$$

– краевые условия

$$z(t_0) = (z_1^0, z_2^0, z_3^0)^{\text{т}}\,, \qquad z(t_k) = (z_1^k, z_2^k, z_3^k)^{\text{т}}\,.$$

Здесь z – вектор фазовых координат; A и B – параметры модели объекта; u – скалярное управление; t – текущее время; $[t_0,\, t_k]$ – временной интервал управления; $z(t_0)$ и $z(t_k)$ – фазовые координаты в начальный и конечный моменты времени.

Используя программную стратегию, необходимо найти функцию оптимального управления

$$u^*(\cdot) = \left(u^*(t),\, t \in [t_0, t_k]\right),$$

при этом требуется минимизировать затраты энергии

$$I_{\text{э}} = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t)dt \to \min\,.$$

Таким образом, нужно перевести объект из начального состояния в конечное, затратив минимум энергии.

Массив исходных данных для решения задачи выглядит следующим образом

$$R = \left(a_3,\, b,\, u_{\text{н}},\, u_{\text{в}},\, z_1^0,\, z_2^0,\, z_3^0,\, z_1^k,\, z_2^k,\, z_3^k,\, t_0,\, t_k\right).$$

Для решения задачи используем метод синтезирующих переменных [3, 4], который позволяет уменьшить размерность массива исходных данных, и принцип максимума. Элементы массива синтезирующих переменных $L = (L_1,\, L_2,\, L_3,\, \overline{a}_3)$ вычисляются по формулам

$$L_1 = \frac{1}{\overline{b}}\left(z_3^k - \frac{z_3^0}{\overline{a}_3}e^{2\overline{a}_3} - \frac{\overline{b}_0}{\overline{a}_3}(e^{2\overline{a}_3} - 1)\right) - \frac{\overline{a}_3}{\overline{b}\,\overline{a}}\left(\Delta z_2 - \frac{z_3^0\overline{a}}{\overline{a}_3}(e^{2\overline{a}_3} - 1) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{\overline{a}_3}(e^{2\overline{a}_3} - 1) - 2\right)\right);$$

$$L_2 = \frac{1}{\overline{a}_3}\left[\frac{\overline{a}_3}{\overline{a}\overline{b}}\left(\Delta z_2 - z_3^0\frac{\overline{a}}{\overline{a}_3}(e^{2\overline{a}_3} - 1) - \frac{\overline{a}\overline{b}_0}{\overline{a}_3}\left(\frac{1}{\overline{a}_3}(e^{2\overline{a}_3} - 1) - 2\right)\right) - \right.$$
$$- \frac{\overline{a}_3^2}{\overline{a}^2\overline{b}}\left(\Delta z_1 - z_2^0 2\overline{a} - z_3^0\frac{\overline{a}^2}{\overline{a}_3^2}\left(e^{2\overline{a}_3} - 2\overline{a}_3 - 1\right) - \right.$$
$$\left.\left. - b_0\frac{\overline{a}^2}{\overline{a}_3^2}\left(\frac{1}{\overline{a}_3}(e^{2\overline{a}_3} - 1) - 2\overline{a}_3 - 2\right)\right)\right];$$

---

* Работа выполнена под руководством д-ра техн. наук, проф. Ю.Л. Муромцева.

$$L_3 = \frac{1}{\bar{b}}\left(z_3^k - \frac{z_3^0}{\bar{a}_3}(e^{2\bar{a}_3}-1) - \frac{\bar{b}_0}{\bar{a}_3}(e^{2\bar{a}_3}-1)\right);$$

$$\bar{a}_3 = \frac{\Delta t}{2} a_3,$$

где

$$\bar{a} = \frac{1}{2}\Delta t, \quad \bar{a}_3 = \frac{1}{2}\Delta t\, a_3, \quad \Delta t = t_k - t_0, \quad \bar{b} = \frac{1}{4}\Delta t\, \Delta u\, b;$$

$$\Delta u = u_{\text{в}} - u_{\text{н}}, \quad \bar{b}_0 = \frac{1}{4}(u_{\text{н}} + u_{\text{в}})\Delta t b, \quad \Delta z_i = z_i^k - z_i^0, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Оптимальное управление существует, если выполняются два условия:

1) $L_3 \in [\min\{f_1(L_1, L_2, \bar{a}_3), f_2(L_1, L_2, \bar{a}_3)\},\ \max\{f_1(L_1, L_2, \bar{a}_3), f_2(L_1, L_2, \bar{a}_3)\}]$;

2) $L_1 \in [-2; 2], \quad L_2 \in [-2; 2], \quad L_3 \in \left[\frac{1}{\bar{a}_3}\left(1 - e^{2\bar{a}_3}\right); \frac{1}{\bar{a}_3}\left(e^{2\bar{a}_3} - 1\right)\right],$

где

$$f_1(L_1, L_2, \bar{a}_3) = \frac{2}{\bar{a}_3} e^{2\bar{a}_3}\left(\exp\left[-\bar{a}_3\left(2{,}5 - 0{,}25L_1 + \frac{L_2 - 2}{2 - L_1}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-\bar{a}_3\left(1{,}5 + 0{,}25L_1 + \frac{L_2 - 2}{2 - L_1}\right)\right]\right) + \frac{1}{\bar{a}_3}\left(e^{2\bar{a}_3} - 1\right);$$

$$f_1(L_1, L_2, \bar{a}_3) = \frac{1}{\bar{a}_3}\left(1 - e^{2\bar{a}_3}\right) - \frac{2}{\bar{a}_3} e^{2\bar{a}_3}\left(\exp\left[-\bar{a}_3\left(2{,}5 + 0{,}25L_1 + \frac{L_2 - 2}{2 + L_1}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[-\bar{a}_3\left(1{,}5 - 0{,}25L_1 - \frac{L_2 - 2}{2 + L_1}\right)\right]\right).$$

Задача реального тройного интегратора имеет 17 возможных видов функций оптимального управления, определяемых тремя параметрами. Эти виды получаются из анализа нормированной функции

$$\bar{u}\ (T) = D_0 + D_1 T + D_2 e^{\bar{a}_3 T}, \quad T \in [0; 2],$$

где T – нормированное время.

Параметры D_0, D_1, D_2 рассчитываются решением системы уравнений:

$$\int_0^2 \bar{u}(T)dT = L_1; \quad \int_0^2 (2 - T)\bar{u}(T)dT = L_2; \quad \int_0^2 e^{\bar{a}_3(2-T)}\bar{u}(T)dT = L_3.$$

Переход к функции оптимального управления в натуральном масштабе производится по формуле

$$u^*(t) = \frac{u_{\text{н}} + u_{\text{в}}}{2} + \frac{u_{\text{в}} - u_{\text{н}}}{2} u^*(T).$$

Итак, рассмотрена проблема, как по задаваемым исходным данным проверить, существует оптимальное управление или нет, т.е. можно ли перевести объект из начального состояния в конечное при задаваемых ограничениях.

Необходимо отметить, что задача расчета в реальном времени оптимальных управляющих воздействий очень важна для современного состояния развития промышленности. Требуется рассчитать оптимальное управление, затратив как можно меньше времени. Этого можно достигнуть, используя встраиваемые операционные системы реального времени для контроллеров, например Windows CE, или производя вычисления сразу несколькими потоками, т.е. распараллеливая их либо по ядрам многоядерной архитектуры, либо по процессорам кластера в случае использования персонального компьютера или вычислительной сети.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанс, М. Оптимальное управление / М. Атанс, П. Фалб. – М. : Машиностроение, 1968. – 764 с.
2. Муромцев, Ю.Л. Информационные технологии в проектировании энергосберегающих систем управления динамическими режимами : учеб. пособие / Ю.Л. Муромцев, Л.П. Орлова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2000. – 84 с.
3. Муромцев, Д.Ю. Полный анализ задачи тройного интегратора / Д.Ю. Муромцев, А.И. Козлов // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 1. – С. 3 – 12.
4. Муромцев, Д.Ю. Системы энергосберегающего управления : учеб. пособие / Д.Ю. Муромцев, В.А. Погонин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 92 с.

Кафедра «Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем»