УДК 517.925.52

А.Н. Пчелинцев, Л.А. Мишина, Н.И. Теряев

ОБ ОТЫСКАНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПРОЦЕСС РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ, МЕТОДОМ РЯДОВ ТЕЙЛОРА[*]

Рассмотрим систему, описывающую процесс распространения тепла в неограниченной пластине. Изменение температуры u происходит только в одном направлении x – по толщине пластины, в двух других направлениях y и z температура неизменна. Распределение температуры в начальный момент времени $\tau = 0$ задано функцией $\Gamma(x)$:

$$u(0,x) = \Gamma(x).$$

Будем рассматривать действие источника тепла внутри пластины с удельной мощностью

$$w(\tau,u) = \Theta \sin \omega\tau e^{-2\beta\left(u^2+u_a^2\right)},$$

где Θ, ω, β и u_a – константы, являющиеся характеристиками источника.

Материал пластины имеет плотность $\rho = \text{const}$, удельную теплоемкость $c = \text{const}$ и теплопроводность $\lambda = \text{const}$.

Математическая модель теплового процесса имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho c}\left[\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w(\tau,u)\right]$$

при условиях

$$u(0,x) = \Gamma(x); \quad u(\tau,x_1) = u_{am}\cos\omega\tau; \quad u(\tau,x_2) = u_c = \text{const},$$

где x_1 и x_2 – границы пластины; $u_{am} = \text{const}$.

Вычислительный процесс предполагает работу с безразмерными величинами. Поэтому перейдем к безразмерной форме данной модели. Для этого будем использовать методику [1, с. 23 – 28].

Введем масштабы времени τ_s, длины l_s и температуры u_s. Соответствующие симплексы имеют вид

$$\left\{ t = \frac{\tau}{\tau_s},\ \chi = \frac{x}{x_s},\ \xi = \frac{u}{u_s} \right\}.$$

Пусть $\tau_s = \dfrac{1}{\omega}$, $l_s = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\rho c \omega}}$ и $u_s = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}}$. Получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \chi^2} + \theta \sin t e^{-2\left(\xi^2+\xi_a^2\right)}; \\ \xi(0,\chi) = \gamma(\chi); \\ \xi(t,a) = \xi_{am}\cos t; \\ \xi(t,b) = \xi_c, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\theta = \dfrac{\Theta}{\rho c \omega u_s}$; $\xi_a = \dfrac{u_a}{u_s}$; $\gamma(\chi) = \dfrac{\Gamma(l_s\chi)}{u_s}$; $\xi_{am} = \dfrac{u_{am}}{u_s}$; $\xi_c = \dfrac{u_c}{u_s}$; $a = \dfrac{x_1}{l_s}$ и $b = \dfrac{x_2}{l_s}$.

Перейдем от дифференциального уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого по переменной χ введем равномерную сетку с шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$, т.е. рассмотрим множество

$$\mathrm{X}_h = \left\{ \chi_i = a + ih,\ i = \overline{0,\ n} \right\}.$$

Обозначим через $\Xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_m(t) \end{bmatrix}$ приближенное решение задачи (1), где $m = n-1$, причем функция $\xi_i(t)$ соответствует i-му элементу множества X_h, $\xi_0(t) = \xi(t,a)$ и $\xi_n(t) = \xi(t,b)$. Заменим производную по координате ее разностным аналогом

$$\left.\frac{\partial^2 \xi}{\partial \chi^2}\right|_{\chi=\chi_i} \sim \frac{\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}}{h^2}.$$

Получаем систему из m уравнений:

[*] Работа выполнена под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. С.М. Дзюбы.

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = f_1(t,\xi_1,\xi_2) + \theta \sin t e^{-2\left(\xi_1^2+\xi_a^2\right)}; \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = f(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \theta \sin t e^{-2\left(\xi_2^2+\xi_a^2\right)}; \\ \quad \dots \\ \dfrac{d\xi_{m-1}}{dt} = f(\xi_{m-2},\xi_{m-1},\xi_m) + \theta \sin t e^{-2\left(\xi_{m-1}^2+\xi_a^2\right)}; \\ \dfrac{d\xi_m}{dt} = f_2(\xi_{m-1},\xi_m) + \theta \sin t e^{-2\left(\xi_m^2+\xi_a^2\right)}, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$f(\xi_{i-1},\xi_i,\xi_{i+1}) = \eta(\xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}), \eta = \frac{1}{h^2};$$
$$f_1(t,\xi_1,\xi_2) = f(\xi_{am}\cos t,\xi_1,\xi_2);$$
$$f_2(\xi_{m-1},\xi_m) = f(\xi_{m-1},\xi_m,\xi_c).$$

Нам будет удобно систему (2) записывать в векторной форме

$$\frac{d\Xi}{dt} = A\Xi + F(t,\Xi), \tag{3}$$

где матрица A имеет трехдиагональный вид

$$A = \begin{bmatrix} -2\eta & \eta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \eta & -2\eta & \eta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta & -2\eta & \eta & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \eta & -2\eta \end{bmatrix}.$$

Начальное условие для некоторого момента времени t_0 обозначим через

$$\Xi_0 = \Xi(t_0) = \begin{bmatrix} \gamma(\chi_1) \\ \vdots \\ \gamma(\chi_m) \end{bmatrix}.$$

Решения системы (3) могут быть найдены методом рядов Тейлора, т.е. в классе аналитических функций

$$\Xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k \Xi(t_0)}{dt^k} (t - t_0)^k, \tag{4}$$

как показано в работе [2].

Рассмотрим подробнее процесс отыскания решений с помощью пакета символьных вычислений Maxima 5.9.3 [3], развернутого в операционной системе Linux. Русскоязычное описание пакета Maxima приведено в [4].

Сначала подготавливается файл с необходимыми командами пакета Maxima для осуществления в нем последовательного символьного дифференцирования правой части уравнения (3) с помощью консольной программы, разработанной авторами данной работы на языке C++, используя перенаправление ввода/вывода как интерфейс для взаимодействия с пакетом.

Обращаем внимание на то, что перед символьным дифференцированием в Maxima нужно выполнить display2d:false$ (выводить результаты в виде строки) и linel:400000$ (выводить результат в виде строки, длиной 400 000 символов) для того, чтобы можно было читать из файла результат дифференцирования (функция diff();), представленный в виде строки. Для удобной работы со строками использовалась библиотека STL языка C++ (класс string). Это необходимо для того, чтобы после дифференцирования в полученную строку вставить значения предыдущих производных.

Когда эта строка сформирована, она передается в Maxima для вычисления текущего члена ряда (4) (при этом используется функция float(); для вывода результата содержимого в ее скобках в виде числа с плавающей запятой). Заметим, что результат последней операции в Maxima хранит переменная %.

В качестве результата приведем фазовую траекторию (рис. 1), полученную для системы второго порядка, построенную на отрезке времени $[t_0, t_1]$. При этом $\eta = 0{,}2$, $\xi_{am} = 100$, $\xi_c = 1$, $\xi_a = 0$, $\theta = 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 21$ и $\Xi_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$. Точность вычислений (оценка остаточного члена в форме Лагранжа) $\varepsilon_L = 0{,}1$. Жирной линией на рис. 1 выделен почти цикл. Время расчета на компьютере Intel Pentium IV – 2 часа. Однако, эффективность расчета планируется повысить за счет распараллеливания. Заметим, что для заданной точности ε_L получается полином, степень которого равна 60 (из-за его громоздкости он был опущен).

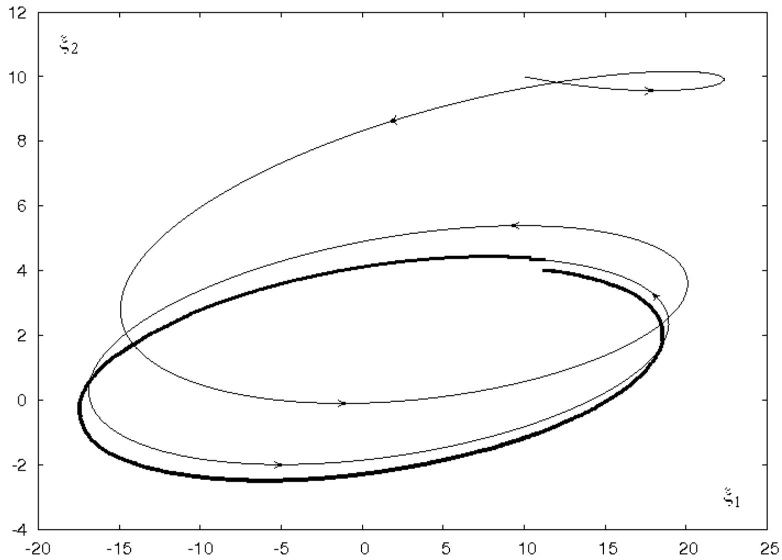

Рис. 1. Фазовая траектория системы второго порядка

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кутателадзе, С.С. Анализ подобия в теплофизике / С.С. Кутателадзе. – Новосибирск : Наука, 1982. – 280 с.
2. Емельянов, С.В. Проблемы вычислений в распределенной среде: организация вычислений в глобальных сетях / С.В. Емельянов, А.П. Афанасьев. – М. : РОХОС, 2004. – 176 с.
3. http://maxima.sourceforge.net.
4. http://old.tltsu.ru/archive/math/maxima/maxhelpb.ps.

Кафедра «Распределенные вычислительные системы»