УДК 330.45

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕМА ВЫПУСКА СОПРЯЖЕННЫХ ТОВАРОВ

С.И. Татаренко

Кафедра «Информационные процессы и управление»,
ГОУ ВПО «ТГТУ»

Ключевые слова: взаимозаменяемые и взаимодополняющие товары; нелинейное программирование; оптимизация.

Аннотация: Приведены постановки и решения задач расчета объемов производства множества сопряженных товаров, максимизирующих валовую прибыль. В задачах используются линейные или квадратичные функции затрат и ограничения–равенства.

Управление промышленным предприятием предполагает управление ассортиментом производимых товаров. Большинство предприятий имеет некоторую специализацию и выпускает товары, относящиеся к одной товарной группе, при этом при планировании объемов производства товаров обычно определяют оптимальные объемы выпуска для каждого отдельного товара, либо для каждой группы однородных товаров. Между тем, товары и группы товаров могут быть взаимозаменяемыми или взаимодополняющими [2], и расчет оптимальных объемов выпуска таких продуктов должен учитывать их взаимное влияние. В данной статье приведены постановки и решения задач расчета оптимального объема производства товаров, учитывающие, что изменение спроса на некоторый товар, зависит не только от изменения цены на этот товар, но и от изменения цен на сопряженные товары.

Рассмотрим ситуацию, когда предприятие производит n различных товаров и изменение цены любого из них вызывает изменение объемов спроса на все товары, то есть функция спроса на товар с номером i будет зависеть от цен на все товары

$$v_i = v_i(p_1, p_2, ..., p_n),$$

или в векторной форме

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{P}),$$

где $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1(\mathbf{P}) \\ v_2(\mathbf{P}) \\ \vdots \\ v_n(\mathbf{P}) \end{pmatrix}$ – вектор–столбец функции спроса; $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – вектор–строка цен.

Обычно отношения взаимосвязанности двух товаров выражают с помощью коэффициента перекрестной эластичности спроса по цене, показывающего как сильно изменится объем спроса на один товар, при изменении цены другого товара

$$E_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial p_j}\frac{p_j}{v_i}, \quad i, j \in \overline{1,n}.$$

Для упрощения дальнейших выкладок будем рассматривать функцию цен на товар как функцию, обратную функции спроса

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{V}) = (p_1(\mathbf{V}), p_2(\mathbf{V}), \ldots, p_n(\mathbf{V})).$$

Рассмотрим случай, когда цены линейны относительно объемов выпуска каждого из продуктов

$$\mathbf{P}(\mathbf{V}) = \mathbf{C} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & :: & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов сопряженности;

$\mathrm{C} = (c_1, c_2, ..., c_n)$, вектор строка свободных членов.

Коэффициенты сопряженности $a_{i,j}$, как и коэффициенты перекрестной эластичности $E_{i,j}$, показывают насколько сильно объем спроса на товар i влияет на цену товара j. Коэффициенты $a_{i,j}$ связаны с коэффициентами перекрестной эластичности цены по спросу

$$E_{i,j}^{(p)} = \frac{\partial p_i}{\partial v_j}\frac{v_j}{p_i} = a_{i,j}\frac{v_j}{p_i}, \quad i, j \in \overline{1,n} \; .$$

Матрица коэффициентов сопряженности может быть определена на основании маркетинговых исследований, однако отметим некоторые характерные свойства этой матрицы.

Диагональные элементы матрицы **A** всегда строго отрицательны $a_{i,i} < 0, \quad i, j \in \overline{1,n}$ поскольку цена обратнопропорциональна объему спроса. При положительном значении недиагонального элемента $a_{i,j}$ $(i \neq j)$ товары i и j являются взаимозаменяемыми, при отрицательном – товары i и j взаимодополняющие. Поскольку два товара могут быть либо взаимозаменяемыми, либо взаимодополняющими, то симметричные элементы матрицы коэффициентов сопряженности, то есть элементы $a_{i,j}$ и $a_{j,i}(i, j \in \overline{1,n})$ будут либо отличными от нуля и имеющими одинаковые знаки, либо один из них будет равен нулю, либо оба равны нулю.

В первом случае

$$\operatorname{sign} a_{i,j} = \operatorname{sign} a_{j,i}; \quad a_{i,j} \neq 0; \quad a_{j,i} \neq 0,$$

товары влияют друг на друга и, возможно, с разной силой, то есть $a_{i,j} \neq a_{j,i}$.

Во втором случае

$$a_{i,j} \neq 0; \quad a_{j,i} = 0 .$$

Это значит, что товар i влияет на товар j, а товар j не влияет на товар i. Такое влияние оказывает относительно дорогой товар на относительно дешевый, если этот дорогой товар не может потребляться без другого, относительно дешевого товара (или потребляется менее эффективно). Например, лыжи и лыжная мазь, или компьютер и флеш-карта.

В третьем случае

$$a_{i,j} = a_{j,i} = 0,$$

товары i и j не влияют друг на друга, то есть не являются сопряженными. Такие товары включают в исследуемое множество товаров, только если они являются сопряженными с некоторым третьим товаром из исследуемого множества товаров.

Вектор–строка свободных членов **C** тоже определяется на основании исследования рыночного спроса и соответствует максимально возможным ценам на товары, при которых спрос на эти товары падает до нуля. Все элементы этого вектора строго положительны $c_i > 0; \quad i \in \overline{1,n}$.

Затраты на производство всех товаров – это скалярная функция объемов выпускаемой продукции, которую как и цены тоже будем считать линейной

$$З = b_0 + \mathbf{BV}, \tag{2}$$

где b_0 – постоянные затраты на производство товаров всех видов; $В = (b_1, b_2, ..., b_n)$ – вектор–строка переменных затрат на каждый из производимых товаров, очевидно что $b_i > 0; i \in \overline{1,n}$.

Выручка от продажи всех товаров равна цене умноженной на объем производства **PV**, а прибыль равна выручке за вычетом затрат

$$П = \mathbf{PV} – b_0 – \mathbf{BV}.$$

Используя выражение (1) получим выражение для прибыли как квадратичную скалярную функцию от векторного аргумента **V**

$$П = (\mathbf{C} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\ \mathbf{V} – b_0 – \mathbf{BV}.$$

Прибыль предприятия является целевой функцией задачи планирования объемов производства, то есть получаем задачу оптимизации.

$$П = (\mathbf{C} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\ \mathbf{V} – b_0 – \mathbf{BV} \to \max. \tag{3}$$

Для нахождения максимальной прибыли от продажи всех произведенных товаров приравняем нулю частные производные функции прибыли по объемам товаров

$$\frac{\partial П}{\partial v_i} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

в результате чего получим систему n линейных алгебраических уравнений

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{V} = (\mathbf{B} – \mathbf{C})^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

Решением этой системы будет вектор экономически целесообразных объемов производства товаров

$$\mathbf{V}^* = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\ (\mathbf{B} – \mathbf{C})^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

а рыночные цены на товары установятся на уровне

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{C} + (\mathbf{V}^*)^{\mathrm{T}}\ \mathbf{A}. \tag{6}$$

Заметим, что матрица коэффициентов системы линейных уравнений (4) ($\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$) является симметрической и это позволяет несколько упростить процесс решения системы, путем использования метода Халецкого. Кроме того, свойства матрицы ($\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$) таковы, что

$$(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{i,j} = (\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})_{j,i} = a_{i,j} + a_{j,i}\,.$$

Это позволяет сделать вывод о том, что решение задачи оптимизации (3) зависит от общей силы влияния товаров друг на друга, а не от того как распределено это суммарное влияние между парой сопряженных товаров, влияет ли товар i на товар j сильнее, чем товар j на товар i. Заметим также, что, матрица ($\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$) является матрицей Гессе от функции прибыли и для того, чтобы задача (3) имела решение эта матрица должна быть отрицательно определенной или отрицательно полуопределенной

$$((\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{X})\mathbf{X}^{\mathrm{T}} \le 0\text{, при любом } \mathbf{X}^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ne 0\,,$$

а поскольку матрица ($\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$) зависит только от матрицы **A**, то существование решения задачи оптимизации прибыли определяется только значениями коэффициентов сопряженности $a_{i,j}$ и не зависит от векторов себестоимостей **B** и максимально возможных цен товаров **C**.

Затраты на производство товаров не всегда бывают линейными, в некоторых случаях могут возникать сверхпропорциональные затраты, которые обычно описывают квадратичной функцией

$$З = b_0 + b_1 v + b_2 v^2\,.$$

Для рассматриваемого множества n сопряженных товаров добавим в функцию затрат вида (2) сверхпропорциональные затраты с помощью диагональной матрицы коэффициентов сверхпропорциональных затрат

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & f_{2,2} & .. & 0 \\ :: & :: & :: & :: \\ 0 & 0 & .. & f_{n,n} \end{pmatrix};$$

$$З = b_0 + \mathbf{B}\mathbf{V} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}\mathbf{V}\,. \qquad (7)$$

Требование диагональности матрицы **F** соответствует тому, что затраты на производство товаров не зависят от смешанных объемов выпуска товаров, эти затраты зависят только от объемов и квадратов объемов. Значения диагональных элементов матрицы **F** положительны для товаров со сверхпропорциональными затратами и равны нулю для товаров с линейной функцией затрат, то есть

$$f_{i,i} \geq 0; \quad i \in \overline{1,n}.$$

При таких затратах задача максимизации прибыли примет вид

$$\Pi = (\mathbf{C} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\,\mathbf{V} - b_0 - \mathbf{BV} - \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{FV} \to \max. \tag{8}$$

Дифференцируя прибыль по объемам выпуска товаров и учитывая, что в силу диагональности матрицы коэффициентов сверхпропорциональных затрат

$$\frac{\partial(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{FV})}{\partial\mathbf{V}} = 2\mathbf{FV},$$

получаем систему линейных уравнений

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{F})\mathbf{V} = (\mathbf{B} - \mathbf{C})^{\mathrm{T}}.$$

Решение этой системы запишется в виде

$$\mathbf{V}^* = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{B} - \mathbf{C})^{\mathrm{T}}.$$

Матрица коэффициентов системы уравнений $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{F})$, как и в задаче (3), является симметрической и также не зависит от распределения сил взаимного влияния сопряженных товаров друг на друга. Достаточным условием существования решения задачи (8) является условие отрицательной определенности или отрицательной полуопределенности матрицы Гессе $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{F})$.

В задачах (3) и (8) на значения объемов производства товаров не наложено никаких ограничений, но в реальных случаях всегда имеются ограничения обусловленные ограниченностью различных компонентов: сырья, трудовых ресурсов, производственных мощностей. Пусть эти ограничения имеют вид балансовых равенств

$$\sum_{i=1}^{n} d_i v_i = g,$$

где d_i – коэффициенты ограничений; g – константа ограничения.

При наличии ограничений на m видов ресурсов систему ограничений можно записать в виде системы из m равенств

$$\sum_{i=1}^{n} d_{k,i} v_i = g_k; \quad k = \overline{1,m}.$$

Коэффициенты ограничений образуют матрицу коэффициентов ограничений $\mathbf{D}$ размером m на n, а константы ограничений вектор–столбец $\mathbf{G}$ из m элементов

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & .. & d_{1,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & .. & d_{2,n} \\ \vdots & \vdots & :: & \vdots \\ d_{m,1} & d_{m,2} & .. & d_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}.$$

В векторной форме система ограничений имеет вид

$$\mathbf{DV} = \mathbf{G}. \tag{9}$$

Дополняя задачу (3) ограничением (9) получаем задачу нелинейного программирования с ограничениями равенствами

$$\Pi = (\mathbf{C} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\,\mathbf{V} - b_0 - \mathbf{BV} \rightarrow \max;$$

$$\mathbf{DV} = \mathbf{G}.$$

Пусть число ограничений меньше числа товаров $m < n$, тогда для решения задачи оптимизации можно применить метод множителей Лагранжа [1]. Для этого введем в рассмотрение вектор строку множителей Лагранжа

$$\mathbf{Y} = (y_1, y_2, ... y_m).$$

Функция Лагранжа в векторной форме примет вид

$$L = (\mathbf{C} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\mathbf{V} - b_0 - \mathbf{BV} + \mathbf{Y}(\mathbf{G} - \mathbf{DV}).$$

Дифференцируя Лагранжиан по объемам товаров v_i получим систему n линейных уравнений относительно переменных $\mathbf{V}$ и $\mathbf{Y}$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})\mathbf{V} - (\mathbf{YD})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{B} - \mathbf{C})^{\mathrm{T}}.$$

Производные по множителям Лагранжа дают систему из m линейных уравнений совпадающих с системой ограничений (9).

Объединим последние две системы в одну систему $n + m$ линейных уравнений с $n + m$ неизвестными, в качестве которых использованы векторы объемов **V** и множителей Лагранжа **Y**

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{B}-\mathbf{C})^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^{*} \\ \mathbf{Y}^{*T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{B}-\mathbf{C})^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}.$$

Вектор $\mathbf{V}^{*}$, являющийся частью этого решения, это экономически выгодные объемы производства сопряженных товаров.

В случае сверхпропорциональных затрат и ограничений равенств, используя описанный подход, получим задачу нелинейного программирования:

$$\Pi = (\mathbf{C} + \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})\,\mathbf{V} - b_0 - \mathbf{BV} - \mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{FV} \to \max\ ;$$

$$\mathbf{DV} = \mathbf{G}\ ,$$

которая сводится к системе линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{F}) & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{Y}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{B}-\mathbf{C})^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}.$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}^{*} \\ \mathbf{Y}^{*\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}-2\mathbf{F}) & \mathbf{D}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-\mathbf{1}} \begin{pmatrix} (\mathbf{B}-\mathbf{C})^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, приведенные выше решения позволяют рассчитать экономически обоснованные объемы производства сопряженных товаров, при линейной или квадратичной функции затрат и при наличии или отсутствии ограничений–равенств.

Список литературы

1. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М. : Прогресс, 1975. – 607 с.

2. Колемаев, В.А. Математические методы и модели исследования операций / В.А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ, 2008. – 592 с.

OPTIMIZATION OF VOLUME OF PRODUCTION OF ASSOCIATE GOODS

S.I. Tatarenko

Key words and phrases: nonlinear programming; optimization; substitute and complementary goods.

Abstract: We give productions and meet the challenges of calculating the volume of production involving multiple products, maximize gross profit. In the tasks used linear or quadratic function of costs and restrictions-equality.