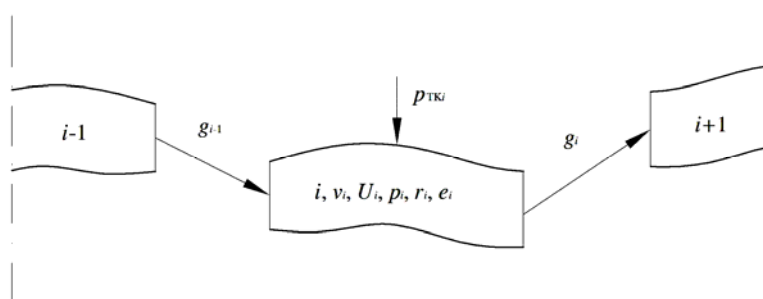


**МОДЕЛЬ сердечно-СОСУДИСТОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>**

Модели сосудистого русла, описанные в частных производных, из-за сложности получения численного решения не нашли практического применения при моделировании сердечно-сосудистой системы в целом. Предлагается модель элементарного сосудистого участка, которая описывается с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта модель является основой математической модели сердечно-сосудистой системы в целом. Как показано в [1], представленная математическая модель сосуда в обыкновенных производных полностью согласуется с теоретическими моделями гемодинамики, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

При построении данной модели использовался метод сосредоточенных параметров. Основными определяющими параметрами и функциями в этом методе служат интегральные характеристики, такие, как объем крови в участке сосуда, среднее давление, расход, эластичность и т.д. Необходимо заметить, что все функции, используемые в методе сосредоточенных параметров, могут быть, в принципе, измерены в эксперименте.

Основное допущение метода сосредоточенных параметров состоит в том, что все функции, связанные с гемодинамикой в участке сосуда (объем, давление, расход), считаются сосредоточенными в точке. При этом распространением волн по участку сосуда пренебрегают. Следует заметить, что если сосуд моделировать большим количеством участков, то распространение волн по сосуду будет отражено, несмотря на пренебрежение этим явлением в каждом из участков.



**Рис. 1. Участок сосудистого ложа и схема его включения в систему кровообращения**

Все дальнейшее изложение будет вестись применительно к  $i$ -му обобщенному участку сосудистого русла (рис. 1). Преимущество такого подхода состоит в том, что участок обобщенного сосуда рассматривается как часть всей системы кровообращения, это позволяет естественным образом перейти от моделирования участка сосуда к модели всего сосудистого русла.

Одним из основных параметров, характеризующих участок сосуда, является его ненапряженный объем, т.е. объем крови, не вызывающий растяжения сосуда и, соответственно, повышения давления в нем. Этот параметр может быть получен экспериментально из зависимости давления в участке сосуда от его объема (рис. 2).

Зависимость между  $p_i$  и  $v_i$  можно аппроксимировать следующим соотношением, связывающим объем и давление в участке сосуда

$$v_i = u_i + C_i (p_i - p_{тк}),$$

где  $u_i$  – ненапряженный объем участка сосуда;  $p_{тк}$  – тканевое давление в участке сосуда;

$C_i = \frac{\partial v_i}{\partial p_i} = \text{ctg}(\alpha_i)$  – эластичность участка сосуда.

В качестве функций, описывающих движение крови в участке сосуда, используется расход (объемный кровоток) на входе в участок сосуда  $g_{i-1}$  и на выходе из него –  $g_i$ . Объем крови в участке сосуда определяется входным и выходными расходами. Уравнение, связывающее объем и расход с учетом проницаемости сосудистой стенки, выглядит следующим образом

$$\dot{v}_i(t) = g_{i-1}(t) - g_i(t) - (p_i(t) - p_{тк})G_i^{-1}. \quad (1)$$

Уравнение вязкого трения связывает силовую характеристику (перепад давлений) с кинематической (расходом). Если инерционные и гравитационные эффекты несущественны, соотношение приобретает простой вид

<sup>1</sup> Работа выполнена под руководством д-ра техн. наук, проф. С.В. Фролова.

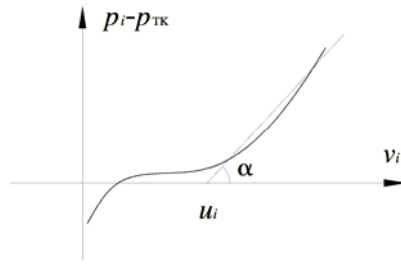


Рис. 2. Типичная зависимость давление–объем для кровеносного сосуда

$$p_i(t) - p_{i+1}(t) = R_i g_i(t), \quad (2)$$

где  $R_i$  – гидравлическое сопротивление участка, характеризующее диссипацию (рассеяние) энергии под действием сил вязкого трения.

При моделировании динамических процессов в крупных сосудах следует учитывать инерционные свойства крови. В этом случае силы давления и силы трения уже не будут уравновешивать друг друга, а их разность будет пропорциональна ускорению крови. Уравнение движения при этом будет выглядеть следующим образом

$$L_i \dot{g}_i(t) + R_i g_i(t) = p_i(t) - p_{i+1}(t), \quad (3)$$

где  $L_i$  – инерционность крови в  $i$ -м обобщенном участке сосуда.

Во многих случаях сила тяжести оказывает существенное влияние на гемодинамику. Для учета таких влияний в уравнение (3) следует добавить член, отражающий гидростатическую добавку к градиенту давлений

$$p_\Gamma = F l_i \cos(\varphi_i),$$

где  $p_\Gamma$  – гидростатическое давление;  $F$  – сила тяжести,  $F = 981\rho$ ;  $\rho$  – плотность крови;  $\varphi_i$  – угол между положительным направлением оси сосуда и вертикалью.

Система уравнений сосудистого участка состоит из уравнений (1), (2) и уравнения движения (3) с учетом инерционности и гравитации:

$$v_i(t) = u_i + C_i(p_i(t) - p_{тк});$$

$$\dot{v}_i(t) = g_{i-1}(t) - g_i(t) - (p_i(t) - p_{тк})G_i^{-1}; \quad (4)$$

$$L_i \dot{g}_i(t) + R_i g_i(t) = p_i(t) - p_{i+1}(t) + F l_i \cos(\varphi_i).$$

Система (4) состоит из трех уравнений и содержит пять неизвестных функций, т.е. она не замкнута. Однако, если задать любые две функции из пяти, система замкнется и ее решение даст три остальные функции. Наличие в системе (4)  $g_{i-1}$  и  $p_{i+1}$  имеет характер граничных условий, что физически означает, что течение в участке зависит от того, что происходит в участках, соседних с ним.

Зная расход крови, можно вычислить линейную скорость  $w_i = g_i S_i^{-1}$ , где  $S_i$  – площадь сечения (просвет сосуда). Тогда кинетическая энергия крови в  $i$ -м обобщенном участке

$$E_i(t) = \frac{m_i w_i^2(t)}{2} = \frac{L_i g_i^2(t)}{2},$$

где  $m_i$  – масса крови, находящейся в рассматриваемом участке.

Потенциальная энергия стенки сосудистого участка

$$U(t) = \int_{u_i}^{v_i(t)} p_i d\tau = \frac{(v_i(t) - u_i)^2}{2C_i} = \frac{C_i p_i^2(t)}{2}.$$

Общая энергия участка

$$\varepsilon_i(t) = E_i(t) + U_i(t).$$

Мощность, затрачиваемая в  $i$ -м участке, равна

$$N_i(t) = R_i g_i^2(t) + \dot{\varepsilon}_i(t). \quad (5)$$

Часть мощности затрачивается на изменение энергии крови и стенки (второй член (5)) и рассеивается (превращается в тепло) под действием сил трения (первый член (5)). В статике  $\dot{\epsilon}_i(t) = 0$ , и вся мощность расходуется на преодоление сил трения.

Если при моделировании обобщенного участка сосуда учитывается центральное управление кровообращением со стороны нервной и/или эндокринной системы, то управление должно соответствующим образом входить в уравнение объекта. Так как управляющие воздействия влияют, главным образом, на гладкую мускулатуру стенки, управляющими параметрами следует считать коэффициенты, зависящие от свойств сосудистой стенки. Такими коэффициентами будут  $u_i$ ,  $C_i$ ,  $R_i$  и отчасти  $L_i$ . Независимое изменение  $u_i$  и  $R_i$  маловероятно, однако, изменение радиуса сосудов с преобладанием резистивных свойств окажет сильное влияние на общее периферическое сопротивление (ОПС), в то время как аналогичные изменения в сосудах с преобладанием емкостных свойств мало влияют на ОПС, но сильно изменяют ненапряженный объем сосудистого ложа.

Основным преимуществом данной модели является то, что участок сосуда рассматривается как часть всей системы кровообращения в целом. Данная модель позволяет получать достоверные сведения диагностического и прогностического характера, что является особо актуальным, так как они предупреждают об опасности возникновения таких сосудистых событий, как инфаркт миокарда и инсульт.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая модель сосуда в частных производных / В.А. Лищук, Г.Г. Амосов, Г.Г. Амосов (мл.), С.В. Фролов // Клиническая физиология кровообращения. – 2006. – Ч. 1, № 1. – С. 1 – 10.

*Кафедра «Биомедицинская техника»*