УДК 519.6

А.П. Пьянов

СПОСОБ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ЛИНЕЙНОЙ ПО УПРАВЛЯЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЯМ, НА БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТЕ

Задача оптимального управления со смешанными ограничениями на фазовые координаты и управления, линейная по последним, с начальным значением в точке на левом конце и со свободным правым концом, с фиксированным временем всегда может быть представлена в виде

$$J(x)=\int_{t_0}^{T}\left\langle G(x(t)),\dot{x}(t)\right\rangle dt\to\min\ ; \qquad (1)$$

$$A(x(t))\dot{x}(t)=B(x(t))\ ; \qquad (2)$$

$$C(x(t))\dot{x}(t)\ge D(x(t))\ ; \qquad (3)$$

$$x(t_0)=x_0\ , \qquad (4)$$

где $x\in R^n$, A и C – матрицы размерностей $p\times n$ и $q\times n$ соответственно; G, B и D – вектора размерностей n, p и q соответственно; верно также и обратное (см., например, [1, с. 5]).

Прямое использование необходимых условий оптимальности не позволяет в большинстве случаев непосредственно подойти к вопросу о построении оптимальных траекторий, а лишь обеспечивает постановку достаточно сложной краевой задачи для возникающей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При качественном исследовании или при численном решении этой краевой задачи возникают значительные трудности. Поэтому для решения задачи (1) – (4) в книгах [1, 2] предложен принцип продолжения решений, заключающийся в следующем: решение исходной задачи сводится к построению некоторой специальным образом генерируемой последовательности простейших задач, решение которых можно полностью установить с помощью соответствующих необходимых условий. Целью настоящей работы является распространение принципа продолжения решений на случай задачи

$$J(x)=\int_{t_0}^{\infty}\left\langle G(x(t)),\dot{x}(t)\right\rangle dt\to\min\ ,$$

при ограничениях (2) – (4) на бесконечном горизонте и изучение способа приближенного решения этой задачи.

Предположим, что:

а) Все функции A, B, C, D и G удовлетворяют условиям Липшица.

Назовем режимом $r_i[t_i,t_{i+1}]$ совокупность ограничений (2) и те ограничения из (3), которые являются активными на некотором промежутке $[t_i,t_{i+1})\subset[t_0,T]$ и вместе определяют некоторое решение $x_{r_i}(t)$ на указанном промежутке. Будем называть режим оптимальным, если промежуток $[t_i, t_{i+1})$ определяет такой набор ограничений, что соответствующая траектория $x^*_{r_i}(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$ является частью оптимальной траектории $x^*(t)$. Совокупность уравнений (2) и активных ограничений из (3), определяющих режим, будем обозначать

$$R(x)\dot{x} = P(x).$$

Совокупность же неактивных при этом ограничений из (3) будем обозначать

$$K(x)\dot{x} > L(x).$$

Назовем задачу (1) – (4) локальной, если величина промежутка $[t_0, T)$ такова, что режим или последовательность режимов на этом промежутке можно установить в результате решения задачи или последовательности задач линейного программирования (ЛП).

Свяжем с задачей (1) – (4) следующую задачу ЛП:

$$\langle G(x_0), y\rangle \to \min; \tag{5}$$

$$A(x_0)y = B(x_0); \tag{6}$$

$$C(x_0)y \geq D(x_0). \tag{7}$$

Предположим, что:

б) Многогранник

$$Y(x_0) = \{y \in R^n : A(x_0)y = B(x_0), C(x_0)y \geq D(x_0)\}$$

ограничен и имеет непустую внутренность (в этом случае решение задачи (5) – (7) существует).

в) Пусть при этом

$$\mathrm{rank}(R(x_0)) = \dim(P(x_0)) \leq n.$$

Оказывается, что при выполнении условий а) – в) найдется такой конечный промежуток $[t_0, T)$, $T > t_0$, что существует абсолютно непрерывное решение $x^*(t)$ задачи (1) – (4), с необходимостью удовлетворяющее равенству

$$R(x^*(t))\dot{x}^*(t) = P(x^*(t))$$

почти для всех значений $t \in [t_0, T)$ (см. [2, с. 215]). При этом если

$$\mathrm{rank}(R(x_0)) = n,$$

то решение $\dot{x}^*(t)$ определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^*(t) = R^{-1}(x^*(t))P(x^*(t))$$

с начальным условием

$$x^*(t_0) = x_0.$$

В случае, когда матрица $R(x)$ невырождена, для простоты обозначений положим

$$f(x) = R^{-1}(x)P(x).$$

Пусть $\Sigma \subset R^n$ – некоторое непустое компактное множество и пусть для всех $x_0 \in \Sigma$ выполнены условия а) – в), причем

$$\mathrm{rank}(R(x_0)) = \dim(P(x_0)) = n.$$

Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in \Sigma$ и предположим, что решение $x(t)$ локальной задачи (1) – (4), удовлетворяющее системе

$$\dot{x} = f(x)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0,$$

может быть продолжено на всю полуось $[t_0, \infty)$ и целиком содержится при этом продолжении в множестве Σ. Тогда для каждого положительного числа T из каждой (не зависящей от выбора T и обратно) последовательности

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \lim_{k\to\infty} N_k = \infty$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k1}, N_{k2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \lim_{k\to\infty} N_{k_l} = \infty,$$

что

$$\lim_{l\to\infty} x(t+(N_{k_l}-1)T)=\varphi(t)$$

равномерно на каждом из отрезков $[a,b]$ полуоси $[t_0,\infty)$, где $\varphi(t)$ – абсолютно непрерывное решение задачи:

$$J(\varphi)=\int_{t_0}^{T}\langle G(\varphi(t)),\dot\varphi(t)\rangle dt\to\min ;$$

$$A(\varphi(t))\dot\varphi(t)=B(\varphi(t)) ;$$

$$C(\varphi(t))\dot\varphi(t)\ge D(\varphi(t)) ;$$

$$\varphi(t_0)=\lim_{l\to\infty} x(t_0+(N_{k_l}-1)T) ,$$

содержащееся в Σ и удовлетворяющее условию

$$\lim_{l\to\infty}\varphi(t+(N_{k_{l+1}}-N_{k_l})T)=\varphi(t) ,$$

в котором сходимость равномерна на всей полуоси $[t_0,\infty)$.

В результате применения метода продолжения оптимальных траекторий поиск решения задачи оптимального управления сводится к решению следующих вычислительных задач:

1) задачи математического программирования – для получения новых режимов в процессе наращивания длины оптимальной траектории;

2) задачи Коши для системы ОДУ – для получения траектории вдоль каждого режима;

3) поиск корней нелинейных уравнений – для определения моментов нарушения условий, определяющих сохранение режима.

Для проверки условий сохранения режимов важно иметь зависимость решения на каждом отрезке от начальных данных $x^*(t)=\varphi_i(x^*(t_i),t-t_i),t\in[t_i,t_{i+1}]$. Для установления зависимости решения от начальных данных в [3] предлагается воспользоваться методом разложения решения в ряд.

В задаче Коши для системы ОДУ, в которой правая часть не зависит явно от времени:

$$\dot x=f(x),t\in[t_0,T],$$

$$x(t_0)=x_0 ,$$

точное значение решения в момент времени t может быть представлено в виде ряда Тейлора:

$$x(t)=x_0+\dot x_0(t-t_0)+\frac{\ddot x_0}{2!}(t-t_0)^2+\ldots+\frac{x_0^{(s)}}{s!}(t-t_0)^s+\frac{x^{(s+1)}(\varepsilon)}{(s+1)!}(t-t_0)^{(s+1)} , \quad (8)$$

где

$$x_0^{(k)}=x^{(k)}(t_0),\ \varepsilon\in(t_0,t).$$

Вычисление производных, входящих в формулу (8), осуществляется в символьной форме, и полученные символьные выражения хранятся для последующего использования, тем самым хранится информация о целом пучке траекторий. Эти символьные выражения используются при решении следующих задач, которые могут быть оформлены как отдельные вычислительные процедуры:

- получение траектории, исходящей из точки (t_0,x_0);
- оценка близости двух различных траекторий;
- оценка точности полученного приближенного решения;
- оценка радиуса сходимости ряда.

В [3] отмечается, что вычисления могут быть эффективно распараллелены на двух уровнях:

1) для каждого $j=\overline{1,n}$ производные компоненты x_i могут вычисляться независимо от других $x_j, j\ne i$:

$$x_i^{(s)}=\varphi_i^s=\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta\varphi_i^{s-1}}{\delta x_j}f_i,\ \ s=2,\ \ldots;$$

2) вычисление $\dfrac{\delta\varphi_i^s}{\delta x_j}$ может вестись независимо для всех $j=\overline{1,n}$.

Таким образом, с использованием аппарата компьютерной алгебры в параллельных вычислениях приближенное решение задачи (1) – (4) на бесконечном горизонте может находиться достаточно эффективно.

Список литературы

1 Афанасьев, А.П. Линейные по управляющим воздействиям задачи оптимального управления / А.П. Афанасьев. М. : ВНИИСИ, 1980.

2 Афанасьев, А.П. Необходимое условие в оптимальном управлении / А.П. Афанасьев, В.В. Дикусар, А.А. Милютин и др. М. : Наука, 1990.

3 Афанасьев, А.П. Решение задачи синтеза оптимального управления в распределенной среде / А.П. Афанасьев, Д.А. Хуторной // Проблемы вычислений в распределенной среде : прикладные задачи : тр. ИСА РАН. М. : РОХОС, 2004. 160 с.

4 Афанасьев, А.П. К вопросам управления в периодических процессах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 4.

5 Дзюба, С.М. Об условно-периодических решениях дифференциальных уравнений / С.М. Дзюба // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 8.

6 Афанасьев, А.П. Квазипериодические процессы в задачах управления / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Известия РАН. Теория и системы управления. 2001. № 2.

7 Афанасьев, А.П. Квазипериодический оператор сдвига и квазипериодические кривые / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 10

Кафедра «Распределенные вычислительные системы»