УДК – 517.518.45 (75)

Е.Н. Туголуков, Е.Ю. Филатова

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ **СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

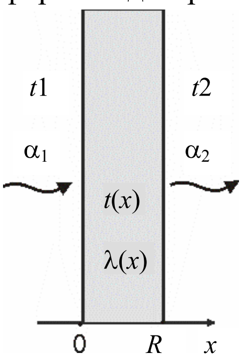
Решение ряда прикладных инженерных задач в области процессов и аппаратов химических технологий может быть основано на математическом моделировании температурных полей в рабочих объемах и конструкционных элементах промышленного оборудования.

Методология, реализующая представление температурных полей как совокупность полей элементарных областей, моделируемых аналитическими решениями систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных, описана в [1, 2].

Использование аналитических решений нелинейных задач теплопроводности существенно расширяет возможности данного подхода и повышает качественные характеристики результатов математического моделирования.

При математическом моделировании температурного поля элементарной области, температурное поле в начале текущего интервала времени известно, поэтому теплопроводность среды, в которой протекает тепловой процесс, формально может быть представлена, как функция пространственных координат, а не температуры. Это дает возможность получить аналитические решения ряда нелинейных задач теплопроводности.

Рассмотрим решение нелинейных задач стационарной теплопроводности для тел канонической формы в декартовых и цилиндрических координатах.



Температурное поле неограниченной пластины (рис. 1) описывается решением следующей задачи теплопроводности:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda(x)\frac{d\,t(x)}{dx}\right)=0, \quad 0\le x\le R, \qquad (1)$$

$$\lambda(0)\frac{d\,t(0)}{dx}-\alpha_1\left(t(0)-t1\right)=0, \qquad (2)$$

$$\lambda(R)\frac{d\,t(R)}{d\,x}+\alpha_2\left(t(R)-t2\right)=0. \qquad (3)$$

Рис. 1 Однослойная неограниченная пластина

Здесь $t(x)$ – температурное поле пластины; x – пространственная координата; R – толщина пластины; $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности пластины как функция координаты; α_1, α_2 – коэффициенты конвективной теплоотдачи; $t1$, $t2$ – температуры окружающей среды.

Решение задачи (1) – (3) осуществляется путем интегрирования (1)

$$\lambda(x)\frac{d\,t(x)}{d\,x}=A. \qquad (4)$$

Это уравнение, в свою очередь, также может быть проинтегрировано

$$\int_0^x t'(x)dx = A\int_0^x \frac{d\,x}{\lambda(x)}. \qquad (5)$$

Отсюда получаем общее решение уравнения (1)

$$t(x)=t(0)+A\int_0^x \frac{d\,x}{\lambda(x)}. \qquad 6)$$

Используя граничные условия (2) – (3), находим значения $t(0)$ и A.

В результате

$$t(x)=t1+\frac{t2-t1}{\frac{1}{\alpha_1}+\int_0^R \frac{d\,x}{\lambda(x)}+\frac{1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\int_0^x \frac{d\,x}{\lambda(x)}\right), \qquad (7)$$

где $t(x)$ – искомое распределение температуры по толщине пластины.

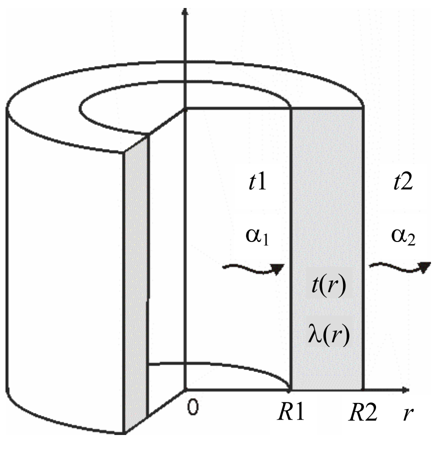
Аналогично моделируется поле температур в полом неограниченном цилиндре (рис. 2):

$$\frac{d}{d\,r}\left(\lambda(r)r\frac{d\,t(r)}{d\,r}\right)=0, \qquad (8)$$

$$R1\le r\le R2,$$

$$\lambda(R1)\frac{d\,t(R1)}{d\,r}-\alpha_1\left(t(R1)-t1\right)=0, \qquad (9)$$

$$\lambda(R2)\frac{dt(R2)}{dr}+\alpha_2\left(t(R2)-t2\right)=0. \qquad (10)$$



Здесь $t(r)$ – температурное поле цилиндра; r – пространственная координата; $R1$, $R2$ – соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра; $\lambda(r)$ – коэффициент теплопроводности цилиндра как функция координаты; α_1, α_2 – коэффициенты конвективной теплоотдачи; $t1$, $t2$ – температуры окружающей среды.

Решение задачи (8) – (10) осуществляется путем интегрирования (8)

$$\lambda(r)r\frac{d\,t(r)}{d\,r}=A. \qquad (11)$$

Это уравнение, в свою очередь, также может быть проинтегрировано

$$\int_{R1}^{r} t'(r)\,dr = A\int_{R1}^{r} \frac{dr}{r\,\lambda(r)}. \qquad (12)$$

Отсюда получаем общее решение уравнения (8):

$$t(r) = t(R1) + A\int_{R1}^{r} \frac{dr}{r\,\lambda(r)}. \qquad (13)$$

Используя граничные условия (9) – (10), находим значения $t(R1)$ и A.
В результате

$$t(r) \;=\; t1 + \frac{t2 - t1}{\dfrac{1}{\alpha_1 R1} + \displaystyle\int_{R1}^{R1} \frac{dr}{r\,\lambda(r)} + \dfrac{1}{\alpha_2 R2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R1} + \int_{R1}^{r} \frac{dr}{r\,\lambda(r)} \right). \qquad (14)$$

Полученные аналитические решения нелинейных задач стационарной теплопроводности не только имеют самостоятельную прикладную ценность, но и входят в качестве составных частей в аналитические решения соответствующих нелинейных задач нестационарной теплопроводности, работы по получению которых осуществляются авторами в настоящее время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Туголуков Е.Н. Математическое моделирование термонагруженных процессов и аппаратов многоассортиментных химических производств: Дис. … д-ра техн. наук. Тамбов, 2004. 400 с.

2 Туголуков Е.Н. Математическое моделирование технологического оборудования многоассортиментных химических производств: Монография. М.: Машиностроение, 2004. 100 с.

Кафедра "Автоматизированное проектирование
технологического оборудования"