Рухов А. В.

АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ

Работа выполнена под руководством д.т.н. Туголукова Е. Н.

ТГТУ, Кафедра «Автоматизированное проектирование технологического оборудования»

В инженерной практике все чаще возникает необходимость использования решений дифференциальных уравнений в частных производных. При этом применение аналитических подходов является предпочтительным. Одним из универсальных аналитических методов является метод конечных интегральных преобразований, подробно рассмотренный в [1,2].

Применение аналитических решений задач в частных производных предполагает нахождение ряда собственных чисел. В общем случае требуется вычисление N последовательных положительных корней трансцендентного характеристического уравнения $f(x) = 0$. Использование ошибочных или полученных со значительными погрешностями значений собственных чисел приводит к недостоверным результатам расчетов в целом. Кроме того, во многих прикладных задачах рассчитывать массивы собственных чисел приходится многократно (иногда – десятки и сотни тысяч раз в ходе одного технологического расчета).

В связи с этим, алгоритм расчета собственных чисел должен удовлетворять следующим требованиям:

- нахождение N последовательных положительных корней характеристического уравнения с заданной степенью точности ε без пропуска корней и без нахождения решений, не являющихся корнями;
- высокая надежность работы для характеристических уравнений различной сложности;
- высокое быстродействие.

Данным требованиям отвечает разработанный численный метод расчета собственных чисел задач в частных производных.

Алгоритм предполагает предварительное преобразование характеристической функции к непрерывному виду.

В основу метода положена следующая концепция: по числовой оси с определенным шагом от отправной точки x_0 (минимальная положительная величина выполняющая условие: на интервале $(0, x_0)$ нет корней уравнения, как правило, $x_0=\varepsilon$) с определенным шагом осуществляется движение в сторону положительного увеличения значения аргумента, пока на очередном шаге не будет найден изолированный корень; после этого осуществляется уточнение решения до заданной точности. Используя в качестве следующей отправной точки правую границу первоначального интервала уточнения (интервал внутри которого существует решение уравнения и выполняется условие: длина интервала больше значения точности), процесс повторяется до тех пор, пока не будут вычислены все N последовательных положительных корней уравнения.

Общую задачу условно можно разбить на три подзадачи:

1) задача расчета значения шага;
2) задача определения интервала уточнения;
3) задача уточнения корня.

Рассмотрим теперь поподробнее каждую из подзадач.

Для расчета шага применяется алгоритм с переменным шагом. Суть алгоритма заключается в следующем: первоначально шаг имеет минимальное значение (ε), впоследствии он определяется как доля отношения значения предыдущего корня к его порядковому номеру, при удалении от найденного корня величина шага кратно увеличивается, а при приближении к вероятному корню – уменьшается (Рис.1). Для этого на каждом шаге вычисляются знаки функции и ее первой производной, и проверяются условия:

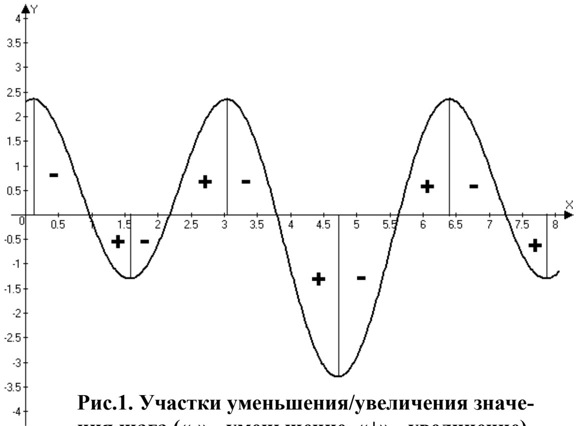

Рис.1. Участки уменьшения/увеличения значения шага («-» - уменьшение, «+» - увеличение)

$(f > 0)\cdot(f' > 0) + (f < 0)\cdot(f' < 0)$ - увеличение шага;

$(f > 0)\cdot(f' < 0) + (f < 0)\cdot(f' > 0)$ - уменьшение шага.

Производная может быть найдена предварительно аналитически или использоваться ее конечноразностный аналог.

Такой подход позволяет, во-первых, увеличить скорость машинного счета, а, во-вторых, исключает возможность пропуска четного количества корней уравнения.

Для определения интервала уточнения применяется следующая теорема [3].

«Если непрерывная функция $f(x)$ принимает значение разных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $f(x) = 0$ т.е. найдется хотя бы одно число $\xi \in [\alpha, \beta]$ такое, что $f(\xi) = 0$.»

Уточнение корня уравнения осуществляется методом дихотомии [4] вследствие его высокой надежности.

Блок-схема алгоритма представлена на рис. 2.

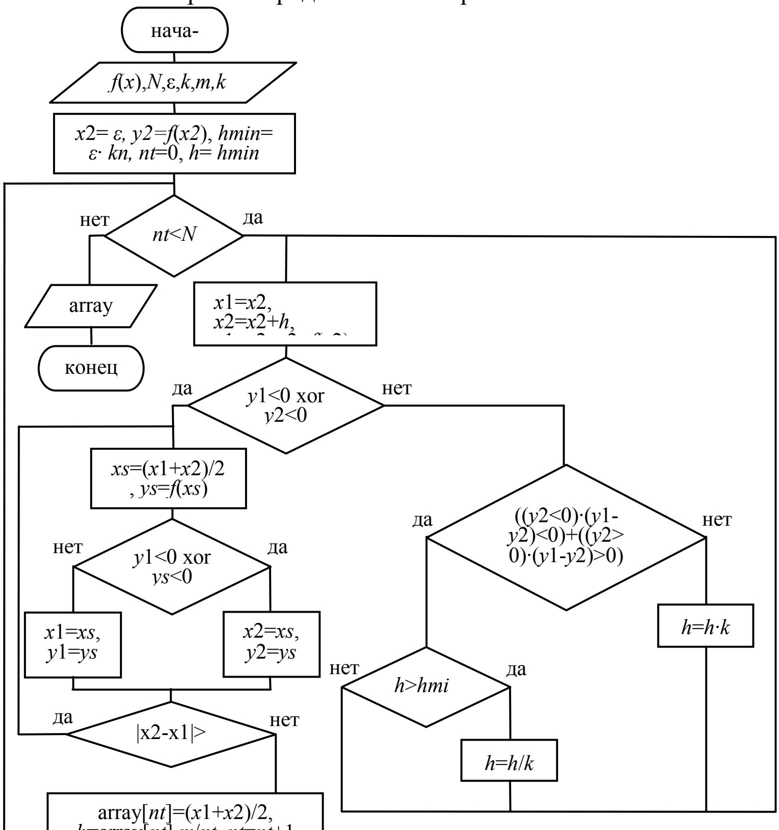

Рис. 2. Блок-схема алгоритма расчета собственных чисел

С целью увеличения скорости машинного счета при определении интервала уточнения, где имеется изолированный корень уравнения, относительно "медленная" операция умножения была заменена на две более "быстрые" логические операции, что позволило получить прирост скорости счета порядка 3,7%.

Условия и результаты испытаний представлены в табл.1-3.

Т а б л и ц а 1

Постоянные условия

Коэффициенты			Точность, ε	Компилятор
k	m	kn		
3	0,1	50	10^{-6}	Borland Pascal v.7.0

Т а б л и ц а 2

Общий вид и коэффициенты характеристического уравнения

Общий вид характеристического уравнения						
$A\cdot\sin(B\cdot x+C)+D\cdot x\cdot\cos(E\cdot x+F)=0$						
№пп	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	21,5	0,73	-0,01	-37,08	1,33	2
2	0,31	10,03	-20,04	-0,95	0,4	8,95
3	1,03	$2\cdot10^{-6}$	0	$8{,}8\cdot10^{-3}$	0,91	0

Т а б л и ц а 3

Результаты испытаний

№пп	Тип ЦП	Тактовая частота ЦП, МГц	Коэф. Уравнения, №	Кол-во корней	Время расчета, сек
1	AMD Am386SX	20.0	1	1000	66,13
				10000	734,74
			2	1000	74,53
				10000	726,22
			3	1000	62,39
				10000	636,32
2	Cyrix M II	333	1	1000	1,04
				10000	11,15
			2	1000	1,32
				10000	11,04
			3	1000	0,87
				10000	8,67
3	Intel Celeron-S	1000	1	1000	0,22
				10000	2,69
			2	1000	0,27
				10000	2,64
			3	1000	0,16
				10000	2,09

Список литературы

1. Туголуков Е. Н. Математическое моделирование технологического оборудования многоассортиментных химических производств: Монография. М.: Машиностроение, 2004. 100 с.
2. Филатова Е. Ю. Применение метода конечных интегральных преобразований для решения задач теплопроводности: Сборник статей магистрантов, Часть 1, Тамбов, 2005. - 144 с.
3. Толстов Г. П. Курс математического анализа:/ Г. П. Толстов. Т. 1 – М.: Гостехиздат, 1954. – 494 с.
4. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики: / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 659 с.