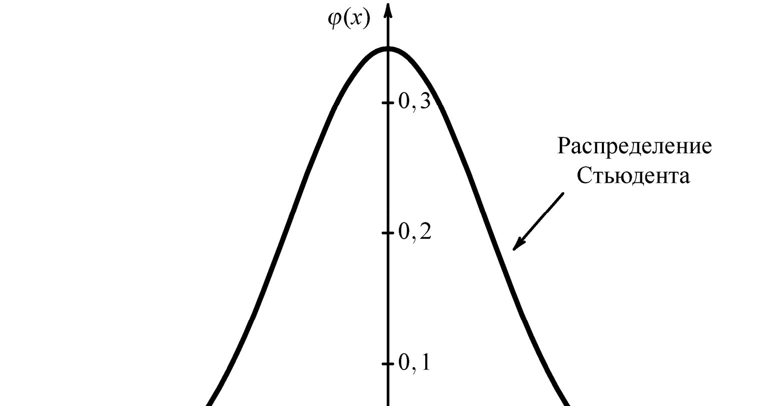
Н. П. ПУЧКОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В СИСТЕМЕ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Н. П. Пучков

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В СИСТЕМЕ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением
в системе высшего образования по укрупнённым группам специальностей
и направлений подготовки 15.00.00 «Машиностроение»
в качестве учебного пособия для реализации основных
профессиональных образовательных программ высшего образования
по направлению подготовки бакалавров
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»*

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2017

УДК 519.2(075.8)
ББК В171я73+В172я73
П90

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Техника и технологии
производства нанопродуктов» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
А. Г. Ткачёв

Доктор педагогических наук, проректор по учебной работе,
профессор кафедры математики и методики её преподавания
ФГБОУ ВО «ЕГУ им. И. А. Бунина»
С. В. Щербатых

Пучков, Н. П.

П90 Теория вероятностей и математическая статистика в системе политехнического образования : учебное пособие / Н. П. Пучков. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2017. – 80 с. – 100 экз.
ISBN 978-5-8265-1736-9

Содержит рекомендации для преподавателей и студентов, самостоятельно изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика», по изучению дополнительного к вузовскому учебному курсу материала, способствующего более глубокому пониманию предмета, а также его гуманитаризации.

Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупнённым группам специальностей и направлений подготовки 15.00.00 «Машиностроение» в качестве учебного пособия для реализации основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки бакалавров 15.03.02 «Технологические машины и оборудование».

УДК 519.2(075.8)
ББК В171я73+В172я73

ISBN 978-5-8265-1736-9

ВВЕДЕНИЕ

«Новое – хорошо забытое старое». Это высказывание французского писателя Жана Пене (1758 – 1830) постоянно находит своё подтверждение. Декларируемый в настоящее время компетентностный подход в образовании направлен на решение важной проблемы, заключающейся в том, что обучающийся, имея какие-то теоретические знания, должен всегда быть способен применять их к решению задач жизнедеятельности. Поэтому на современном этапе развития высшей школы на первый план выходят не предметные разрозненные результаты студента, а универсальные действия и компетенции. В то же время ещё в первой половине XIX века К. Марксом пропагандировались идеи политехнического образования – соединение обучения с практической деятельностью, т.е. проявлением компетентности на практике. Политехнические знания рассматривались как упрощённые модели типичных производственно-технических задач, которые профессионалам надо решать в процессе производственной деятельности. Таким образом, закладывается фундамент последующей профессиональной подготовки. Политехническое образование широко практиковалось в советской высшей школе; его предметом являлось формирование общих трудовых качеств личности, а научно-теоретическую основу составляло допрофессиональное изучение накопленного человечеством знания в области техники и технологии.

Развитие науки и техники объективно требует знания в той или иной мере научных основ производства каждым человеком. Учитывая громадный объём современных знаний, необходим такой подход к их рассмотрению, который даёт возможность уяснить наиболее общие стороны, присущие многообразию современной техники и технологии. Такую возможность и представляет политехническое образование.

Решению задач политехнического образования, а, следовательно, и компетентностного подхода в обучении, способствует реализация идей гуманизации и гуманитаризации математического образования за счёт повышения возможностей использования на практике математических знаний.

Под гуманизацией образования подразумевается система мер, направленных на приоритетное развитие общекультурных компонентов в содержании образования и технологии обучения, ориентированных на совершенствование личности.

Гуманитаризация означает пополнение или дополнение образовательной программы гуманитарным содержанием, т.е. предполагает включение в учебные курсы цикла разделов гуманитарных дисциплин.

В соответствии с такой задачей расширяется участие математических кафедр в формировании общекультурных компетенций, включённых в содержание образовательных стандартов. Гуманитаризацию можно рассматривать как средство гуманизации, используемое для того, чтобы дополнить естественно-техническую культуру гуманитарной. В математических курсах вузов этим может быть использование биографических сведений об учёных-математиках, сведений об их общечеловеческих ценных качествах, внематематической деятельности. Кроме того, это вопросы философии математики, связи с другими культурами, например религией.

Определённые шаги в данном направлении обозначены в предлагаемом учебном пособии, ориентированном на использование как студентами, так и преподавателями в процессе политехнического образования.

Математическое образование – это не только освоение способов, норм математической деятельности и профессиональных ценностей, но и приобщение к математической культуре.

Весьма актуальными являются методологические проблемы математической подготовки современных специалистов, связанные с переходом от концепции строгого классического детерминизма к более широким представлениям детерминизма статистического.

На такой переход настраивает то обстоятельство, что в условиях современной действительности человек вынужденно сталкивается с необходимостью решения весьма нестандартных задач, зачастую проблемного характера. В процессе практической деятельности у него постоянно возникает необходимость реконструкции, мысленного воссоздания прошедших событий по отдельным следам, последствиям.

С этих позиций уникальное положение в системе математического знания занимает учебная дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика», так как способствует формированию наиболее значимых общекультурных компетенций: способность вероятностного стиля восприятия и описания объектов, явлений окружающего мира; способность находить организационно-управленческие решения в нестандартных, неопределённых ситуациях и нести за них ответственность с учётом нравственных аспектов деятельности; способность выстраивать и реализовывать перспективные линии, культурного, нравственного и профессионального саморазвития и самосовершенствования. Данные способности можно трактовать как следствие наличия у будущих специалистов современного стиля мышления – вероятностного.

Вероятностный стиль мышления предполагает разрушение многих стереотипов, например отказ от предпочтительности строго детерминированного поведения, исключающего вариативность; отказ от негативного отношения к случайному: восприятие случайного не только как разрушителя наших планов, но и создателя новых возможностей, предполагая, что порядок может рождаться из хаоса через самоорганизацию.

Вероятностный стиль мышления можно рассматривать как возможность прогноза вариантов развития с учётом случайного характера составляющих элементов и их связей; как восприятие случайного в качестве объекта для понимания неизвестной закономерности.

Теория вероятностей и математическая статистика приобрели сейчас настолько огромное практическое значение в инженерном деле, что в современных ФГОС ВПО подготовки бакалавров по техническим направлениям этой дисциплине отводится весьма значительная роль. Знание вероятностных закономерностей, свободное владение методами построения вероятностных моделей профессиональных задач является необходимым элементом подготовки конкурентоспособных инженеров, востребованных на рынке труда [3].

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПОДГОТОВКЕ ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ

1.1. СОВРЕМЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ О ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ КАК УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА

Технологическое применение фундаментальных наук и, в частности, математики, в реальной сфере производства невозможно без глубокого осмысления философских основ, соответствующих этим наукам учебных предметов, изучаемых студентами в вузах.

Философское постижение окружающей действительности, её общих закономерностей и основных научных концепций невозможно без математики. Курс математики связан с двумя основными философскими концепциями, которые характеризуются словами упорядоченность и хаотичность (закономерное и случайное). Первая концепция является основой для классического анализа, вторая – для теории вероятностей.

Согласно первой философской концепции окружающий нас Мир полностью предсказуем. «Ум, – писал известный французский математик Лаплас, – которому были бы известны для каждого данного момента все силы, одушествляющие природу, и относительное положение всех её составных частей, если бы вдобавок он оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, – он обнял бы в одной формуле движения величайших тел Вселенной наряду с движением лёгких атомов; не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором» [4]. Таким образом, он утверждал, что возможно построение математической модели Мира.

Во времена Пьера Лапласа (1749 – 1827) существовала убеждённость, что всё в Мире предсказуемо и всё предопределено. И только на клочке этого упорядоченного мира находилась «противоположная» область, где царил случай: он утверждал себя в азартных играх, где всё-таки не всё можно предсказать. Известные учёные-математики Паскаль, Ферма, Якоб Бернулли и сам Лаплас описали первые законы случая, заложив тем самым основы теории вероятности.

Эта наука с годами развивалась и крепла. В XX веке (во многом благодаря усилиям российских учёных Чебышева, Ляпунова, Маркова, Бернштейна, Колмогорова) она приобрела оформленные очертания и стала занимать всё большее и большее место в толковании окружающей нас действительности. Ещё в первой половине прошлого века (1900 – 1950) казалось, что упорядоченность и хаотичность соизмеримы по занимаемым ими территориям, но уже во второй половине века эта концепция оказалась подверженной жестокому испытанию: неустойчивость, царящая в Мире, ведёт к непредсказуемому Хаосу. Поэтому в настоящее время обе эти философские концепции в той или иной форме должны сопровождать математическое просвещение.

Математика как предмет преподавания зависит от времени. Если математику рассматривать и как культурный феномен, и как науку, и как язык, то в разное время пропорции между этими составляющими были различны. Изменение этих пропорций определялось той ролью, которую должна была играть математика в деле решения насущных проблем общества и государства.

В России первая общегосударственная образовательная программа была создана во времена императора Петра I (1672 – 1725). Под математикой тогда понималось искусство, с помощью которого можно вести инженерные, навигационные и артиллерийские расчёты. Естественно, что молодых людей учили практической математике, с помощью которой можно было строить корабли, заниматься металлургией, горным делом, картографией.

При императрице Екатерине II (1729 – 1796) была принята другая программа, которая просуществовала с различными изменениями до реформы 1861 г. Образованный человек времён Екатерины II воспринимался как «слуга Отечеству». Это либо государственный чиновник, либо помещик, который живёт в деревне и обладает универсальными знаниями: разбираться в медицине, естественных науках и математике, которая в то время понималась в обществе скорее как универсальный язык, а не наука. В соответствии с такой политикой для работы на очень привлекательных условиях приглашались известные Европейские учёные, в том числе и математики Леонард Эйлер, Бернулли, …

В обществе тех времён считалось позором «непросвещённость» в науках, в том числе и математике.

После реформы 1861 г. императора Александра II (1818 – 1881), когда в России было отменено крепостное право, проведены земская, судебная, военная реформы, наметилось активное развитие промышленности, школьные программы сильно меняются, увеличивается их научная составляющая. Выдающимся памятником этого периода являются школьные учебники Андрея Петровича Киселева (1852 – 1940).

Подобную смену концепций предмета математики нетрудно проследить и в ведущих странах Западной Европы.

В тридцатые годы XX в., после того как наша страна (СССР) начала своё возрождение после мировой и гражданской войн, в значительной мере изменились школьные программы по математике. Они были целенаправленны на воспитание кадров для развития индустрии страны. Реализовать эти программы удалось только после 1945 г., на них основаны многие выдающиеся достижения в математике, физике, технике. На этих программах была воспитана известная во всём мире так называемая московская математическая школа (лузитания), созданная известным русским математиком Н. Н. Лузиным (1883 – 1950).

На рубеже веков XX-го и XXI-го мировая цивилизация вступила в новый очень сложный период. Новые информационные технологии привели к последствиям, равным по значению к революции. Традиционная парадигма развития цивилизации – производить больше, шире использовать природные ресурсы – подошла к своей критической точке, уступая парадигме ограниченного контролируемого развития, в котором участвует и наука математика.

К сожалению, общество оказалось не подготовленным к таким радикальным изменениям, и в настоящее время не существует чёткой концепции математики как предмета преподавания. Намечается тенденция всё более дифференцированного по уровням её преподавания (как и во многих странах мира). В то же время остаётся неизменной задача интеллектуального развития индивидуального человека и здесь роль математики очень важна. В ситуации, когда значение этого предмета в вопросах технического развития для очень многих граждан нашей страны не очевидна, время вспомнить о том, что в кругу самих математиков есть двоякого рода люди: математики-философы, т.е. математики высшей математической мысли, для которых числа и исчисления есть ремесло; для этого рода математиков цифры и исчисления не имеют важного значения, так как их увлекают сами математические идеи; напротив, есть такие математики, которых философия математики, математические идеи не трогают, которые всю суть математики видят в исчислениях, цифрах и формулах. Следует признать, что математики второго типа доминируют. Это привело к засилью аксиоматическо-стохастической математики в преподавании, на которое общество естественно и законно реагирует резко отрицательно [10].

Математики-философы превосходят своих оппонентов в пространственной ориентации, интуиции, во всём необходимом для реальной жизни. Их сила заключается вовсе не в применении какой-либо математики («исчислений»), а в том способе мышления, который называют «математикой-философией», который заставляет человека с математическим образованием думать о всех реалиях окружающего мира с помощью (сознательного или бессознательного) мягкого математического моделирования.

Математически мыслить не будучи математиком по своей профессии свойственно многим известным людям [10]. Ярким примером может служить премьер-министр России С. Ю. Витте (1849 – 1915). Да и в наши годы многие отмечали математический стиль мышления многих известных бизнесменов.

Поэтому, несмотря на современные, радикальные изменения в социально-экономической жизни страны, ориентированные на удовлетворение потребления, основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира, искать их взаимосвязь, закономерности развития.

Подводя итоги обсуждения вопросов современного представления о задачах математики как науки и как учебного предмета, можно выделить следующие положения:

1. В современном мире существует объективная необходимость учёта многочисленных факторов воздействия на изучаемое явление, часть которых может быть вообще неопределённой и проявляться совершенно случайно. Такое положение требует усиления внимания изучению такой учебной дисциплины, как «Теория вероятностей и математическая статистика».

2. Образовательная система (в том числе и в плане преподавания математических дисциплин) должна быть адекватной потребностям текущего исторического периода. В настоящее время, время высокотехнологических процессов, компьютерных технологий сократилась (количественно) потребность в математиках-вычислителях, обеспечивающих технический прогресс. Одновременно ощущается нехватка специалистов, обладающих математическим стилем мышления, математиков-философов. Этот факт хорошо согласуется с требованием современных образовательных стандартов формирования у студентов такой способности, как компетентность, многие из которых сформулированы весьма созвучно с основными характеристиками математического стиля мышления и содержательно напоминают результаты политехнического образования.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ИНЖЕНЕРОВ – СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ ТЕХНИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

Среди множества проблем, связанных с местом математики в учебном процессе технического вуза, можно выделить следующие [14]:

1) приближение содержания математического образования инженера к нуждам современной техники и организации производства;

2) установление тесных связей между курсом математики и инженерными дисциплинами;

3) совершенствование методов изложения и повышения активности студентов в процессе обучения;

4) создание учебников, соответствующих потребностям инженерного дела и состоянию математической науки;

5) повышение математической квалификации преподавателей инженерных кафедр;

6) организация на математических кафедрах научных исследований, связанных со спецификой вуза;

7) проведение консультации по математике для работников промышленности.

Разрешение перечисленных проблем позволило бы создать такие курсы математики, которые максимально приблизили бы их к нуждам техники и технологий, стали бы основой политехнического образования.

В своей деятельности преподавателям втузов следует постоянно акцентировать внимание (подтверждая это конкретными данными) на тот факт, что в последние десятилетия математика превратилась из метода вычислений в метод исследования, нередко предваряющий и дополняющий непосредственно эксперимент, стала производительной силой. Так, например, во многих областях знания – физике, химии, биологии – и основанных на них развитии техники и технологий, человеческий разум обратился к изучению микромира. Механизмом, позволяющим внедряться в происходящие в этом микромире процессы, служат математические методы, на базе которых делаются выводы, уже доступные наблюдениям. Широкое применение математики стало неизбежным в инженерных науках, в технике и технологиях.

Организация производства уже вышла за пределы господства интуиции и качественных соображений: при современных масштабах такой подход слишком дорого обходится обществу. Математический стиль мышления, умение создавать адекватную исследуемому объекту математическую модель и исследовать их хотя бы приближённо совершенно необходимо.

Изменение роли математики в современном мире, утверждение её в качестве основного метода познания и решения задач практики должно найти отражение в системе образования. Математика во втузе должна выйти из состояния вспомогательного предмета, необходимого лишь для понимания технических дисциплин, и должна способствовать воспитанию полноценного логического мышления. И в этом преподавателям математики необходима помощь специальных кафедр: они должны постоянно использовать имеющиеся математические знания студентов в инженерном деле.

С другой стороны, сами математики должны изучать и выявлять нужды современной техники и технологий в математических методах и потенциальные прикладные возможности математической науки, иногда даже нарушая логическую целостность курса математики в интересах специальных дисциплин.

Преподаватель вуза должен соприкоснуться с истинным ходом прогресса математики, тесно связанным с практикой нашего времени, взглянуть на жизнь математической науки со всех сторон и убедиться в том, что решение задач практики, даже частного характера, приводит к новым идеям, к которым трудно прийти, находясь внутри математики. Это ситуация – сознание, что математик всюду может найти интересные и важные проблемы для исследования; математик научится замечать проблемы, мимо которых нельзя пройти.

Чтобы убедить подавляющую часть студентов в необходимости уделять достаточно внимания, времени и сил для изучения математики следует систематически показывать возможности математических методов в выбранной студентами области деятельности. Нельзя забывать, что студенты втузов выбрали своей специальностью другие науки, их истинные интересы лежат далеко от математики, поэтому следует так строить преподавание, чтобы студент постоянно ощущал, что, изучая математику, он приближается к более глубокому пониманию своей специальности. Надо показать математику в действии уже во втузе. Своевременно приведённый практический пример оказывает положительное психологическое воздействие.

Одновременно следует помнить о необходимости ухода от стандартных, инвариантных программ преподавания, надо излагать новые методы (неклассические), созданные под непосредственным воздействием современной практики.

Неправильно стремление отдельных преподавателей специальных кафедр обойтись без математики при решении производственных задач, полагаясь на приблизительные рассуждения, неполноценные логические рассуждения.

Велико значение в вопросе овладения специальностью чтение специальных курсов. Например, трудно указать хотя бы одну область деятельности, в которой был бы несущественен учёт случайных воздействий, случайных факторов и случайных измерений состояний исследуемых объектов. Без знания закономерностей протекания случайных процессов, без умения использовать в практической работе основные понятия и результаты, относящиеся к таким процессам, невозможно принять правильные решения. Постановка испытаний, выбор рациональных планов их проведения, обработка результатов – всё это приводит к необходимости овладения методами математической статистики. Вот почему теория вероятностей и математическая статистика должны иметь достойное место в курсе математики втуза.

Для современной науки и большинства направлений практической деятельности характерен статистический подход. Создалось такое положение, что многие люди, даже далёкие от науки и её исследований, нуждаются в элементах статистических знаний, в статистических взглядах на окружающие нас явления.

Современная практика уже не может ограничиться компетенциями лапласовского детерминизма. Поэтому, если в недавнем прошлом большинство инженеров признавало необходимым применение теории вероятностей и математической статистики только при изучении вопросов, связанных с ошибками измерений, то теперь они приходят к убеждению, что вне этих наук нет возможности формулировать возможные закономерности.

1.3. ДИСЦИПЛИНА «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» В ПРОГРАММЕ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ ТЕХНИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

Реализуемый в настоящее время в вузах компетентностный подход в обучении направлен на формирование у обучающихся особых способностей – компетенции. Их содержательное наполнение является основой для разработки программ учебных курсов. В частности, в рабочей программе дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» по направлению подготовки «Системный анализ и управление» в качестве основной прописана компетенция ПКВ-5 «Способность к построению детерминированных и стохастических моделей процессов на основе обработки экспериментальной информации». Структурными составляющими этой компетенции являются:

- знание основ теории вероятностей для анализа характеристик распределения случайных величин;
- знание основ математической статистики для обработки и анализа экспериментальных данных;
- умение осуществлять проверку статистических гипотез как основы нахождения параметров реальных процессов;
- умение применять методы математической статистики для сбора и обработки больших массивов информации и учёта значимых факторов в профессиональной деятельности.

Исходя из таких установок в содержании рассматриваемой дисциплины, целесообразно выделить следующие разделы и темы:

Раздел 1. ***Теория вероятностей***

Тема 1. Основные понятия теории вероятностей и элементы комбинаторики

Понятие случайного события, классификация и виды событий. Вероятность. Элементарная теория вероятностей. Методы вычисления вероятностей. Основные комбинации. Правила комбинаторики.

Тема 2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Условная вероятность. Зависимые и независимые события. Вероятность произведения и суммы. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Типовые примеры, демонстрирующие применение формул.

Тема 3. Повторные испытания

Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа. Типовые примеры, демонстрирующие применение теорем.

Тема 4. Случайные величины

Дискретные случайные величины. Закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Непрерывные случайные величины. Функция распределения, плотность вероятности случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины. Равномерное и показательное распределения, нормальное распределение, свойства.

Тема 5. Предельные теоремы

Закон больших чисел. Теоремы Бернулли и Чебышева. Центральная предельная теорема Ляпунова.

Тема 6. Система двух случайных величин

Случайные векторы. Закон распределения. Условные распределения случайных величин. Коэффициент корреляции. Типовые задачи, демонстрирующие применение двумерных случайных величин.

Раздел 2. ***Математическая статистика***

Тема 7. Основы математической теории выборочного метода

Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Тема 8. Статистические оценки параметров распределения

Статистические оценки: точечные и интервальные. Погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Оценка параметров нормального распределения.

Тема 9. Проверка статистических гипотез

Статистические гипотезы. Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез о равенстве дисперсий и средних. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения.

Тема 10. Корреляционный анализ

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости. Представление данных в корреляционном анализе. Коэффициент корреляции. Линейная корреляция.

Тема 11. Регрессионный анализ

Функциональная зависимость и регрессия. Линейная парная регрессия. Проверка значимости уравнения регрессии. Определение параметров нелинейных уравнений регрессии методом наименьших квадратов непосредственно и с помощью линеаризующих замен переменных. Типовые примеры, демонстрирующие методику нахождения линии регрессии.

Тема 12. Основы факторного анализа

Дисперсионный анализ. Однофакторный анализ. Многофакторный анализ.

Тема 13. Случайные процессы и поля

Понятие случайного процесса, примеры. Классификация случайных процессов и способы их описания. Случайный процесс с дискретным временем. Случайный процесс с непрерывным временем. Процесс с последствием и без последствия.

Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса, корреляционная функция. Марковский процесс. Пуассоновский процесс. Винеровский процесс. Основные понятия стохастического анализа.

Понятие случайного поля, примеры. Способы задания и статистическое описание случайных полей.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ТЕХНИКИ И ТЕХНОЛОГИЙ

2.1. ПРЕПОДАВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Характерной особенностью многих вузовских математических курсов является дедуктивная организация содержания («от общего к частному»), формальная строгость определений и доказательств, логическая завершённость. К сожалению, эти качества затрудняют понимание предмета и даже делают его невозможным, потому что вступают в неодолимое противоречие с психологическими закономерностями восприятия нового.

Нормальный, естественный процесс человеческого познания всегда идёт «от конкретного к абстрактному», от примеров к постепенным обобщениям, от менее точного понимания к более точному. Академик Н. Н. Лузин (1883 – 1950), прославившийся тем, что воспитал много талантливых учёных, часто подчёркивал, что при обучении обязательно должна быть «ориентировка на понимание».

Абстракции не могут быть поняты, если не наполнены конкретным и образным содержанием. Основная причина непонимания обучаемыми математики – отсутствие или недостаток в их опыте необходимой конкретики, примеров и образов, оживляющих математические абстракции (понятия, теоремы, формально-логические рассуждения). Поэтому изложение учебного материала должно начинаться с примеров и развиваться во взаимодействии конкретного и абстрактного – через анализ примеров и постепенные обобщения к точным формальным определениям и утверждениям.

Второе необходимое условие понимания – активность обучающегося; он сам должен добиваться понимания. С этой целью преподаватель постоянно должен стимулировать познавательную активность обучаемого, насыщая изложение учебного материала посильными элементами проблемности и контрольными упражнениями для обеспечения самопроверки понимания и его коррекции.

В психологии установлено, что главным фактором, определяющим способность человека выполнять умственную работу, является степень его перезагрузки в этой работе, поэтому преподаватель должен стремиться структурировать учебный материал на цельные и не перегруженные порции, а внутри каждой такой порции достаточно подробно строить изложение материала. (Такой же принцип должен соблюдаться и в процессе самообразования) При этом на первый план выступает проблема отбора материала: надо отбирать минимально необходимый материал, который бы составлял, тем не менее, целостную научно-методическую систему и был фундаментом для дальнейшего самостоятельного расширения знаний.

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика», будучи востребованной для приложений в самых различных сферах, имеет специфические трудности для преподавания и усвоения, так как требует нового мышления – не однозначно детерминированного, как в классической математике, а вероятностного.

Чтобы обеспечить в этом курсе переход «от конкретного к абстрактному» имеет смысл не дифференцировать жёстко составные части учебной дисциплины и, в частности, использовать понятия статистики в теории случайных величин. Ведь только от практики, только статистически можно мотивировать введение числовых характеристик, сделать понятными их смысл и практическую ценность. Смысл фундаментального понятия плотности распределения (вероятностей) непрерывной случайной величины также не может быть понят без обращения к статистике, к процессу предельного перехода от статистической плотности к теоретической.

Единство двух составляющих учебного курса должен обеспечивать методологический принцип – теоретические вероятностные расчёты доводить до реальных практических прогнозов, которые могут быть статистически проверены. При этом следует учитывать, что, ориентируясь на достижение понимания реальными студентами за реальное учебное время (не совпадающее зачастую с плановым по реализации абстрактных учебных программ), не удаётся «отработать» этот принцип достаточно часто, но сделать это показательно качественно следует обязательно.

Советский математик, автор учебников по теории вероятностей (например, [11]) Е. С. Вентцель (1907 – 2002) в «Сборнике научно-методических статей по математике» (1978, Вып. 8) настойчиво утверждала дидактические идеи «учиться теории вероятностей непосредственно в ходе её практических приложений», «теория вероятностей и математическая статистика едины, их нельзя разобщить, статистические идеи должны пронизывать курс с самого начала» [11].

Американский педагог Торнтон Фрай, работавший в первой половине XX в., показал огромную педагогическую ценность живого, неформального, ориентированного на реальность изложения математики. В книге «Теория вероятностей для инженеров». М.–Л.: ГТТИ, 1934, на с. 80 он рассматривает такой пассаж:

«Иногда содержание той или иной теоремы становится яснее, если мы, отбросив математическую щепетильность, сформулируем эту теорему на самом обывательском языке: «Если вероятность некоторого события равна p, то при бесконечно большом числе испытаний относительная частота наверно будет равна p».

Такая формулировка может вызвать одобрение у обучающегося и лёгкий шок у преподавателя. Но, может быть, преподаватель после этого задаст себе вопрос: а почему студент, всё-таки, лучше понимает такую формулировку? Почему она ему понятна? Следует заметить, что эта формулировка не отрицает точной, которая тоже приводится Фраем. Она педагогически дополняет точную.

Эмпирическое (а не строго математическое) определение вероятности считал оправданным А. Н. Колмогоров: «Вероятность во втузе лучше всего определять как идеализированную частоту. При этом описывается, что явствуют явления, в которых при большом количестве повторений имеется тяготение к определенной частоте и такая идеализированная частота называется вероятностью» [Проблемы преподавания высшей математики. М.: Высшая школа, 1961. С. 7]. Только такого рода, практически содержательное определение позволит раскрыть обучающимся смыслы теоретических понятий и довести их до реальных приложений – прогнозов.

Понятно, что на таком основании полное строгое изложение невозможно в принципе. Но оно и не первостепенно в учебном курсе, цель которого – понимание и практическая интерпретация научных фактов, а не приведение их в строго логическую систему. В рамках частной вероятностной модели (классической) изложение ведётся вполне строго. При выходе за её пределы допускаются правдоподобные рассуждения, аналогичные тем, которые приводит в своей книге [12] венгерский математик, педагог Дьёрдь Пойа (1887 – 1985).

Неформальное изложение и установка на понимание делают такое преподавание доступным для широкого круга обучающихся и может явиться некоторого рода примером того, как научную систему перевести в педагогическую, как улучшить плохое понимание математики обучающимися. Эту идею можно удачно воплотить, преподавая такой раздел математики, как стохастика. Это раздел математики, который возник и развивался в тесной связи с практической деятельностью человека. Жизнь, в том числе и развлечения ставили и ставят перед человеком различные проблемы. Человеческая жизнь – это постоянный процесс принятия решений, а стратегически случайная игра хорошо отражает и иллюстрирует суть этого процесса. Стохастика показывает модели рационального поведения человека в разных обстоятельствах, описывает, как в некоторых ситуациях оценить, какое из решений оптимально. Решая стохастические задачи, учащийся убеждается в том, что математическая деятельность не сводится к подсчётам, это не только дедукция и расчёты. Это также формулировка выводов с помощью аналогий, это построение рациональных способов поведения, это подбор убедительных средств аргументации (как, например, рисунок), это кодировка и декодировка информации и т.п.

В процессе построения учебных математических курсов необходимо учитывать то обстоятельство, что математическая деятельность – это, в частности, описанное обнаружение фактов и их использование с целью рационализации поведения.

Важной формой математической деятельности является рационализация поведения, основанная на умозаключениях с помощью аналогий. Основой этих аналогий в стохастике может быть, например, факт, что одно случайное испытание можно имитировать другим.

Человеческая деятельность – это непрерывный процесс принятия решений. Математика создаёт свои инструменты для установления критериев оптимальности решения в ситуациях, когда имеем дело с так называемой неуверенностью относительно состояний внешнего мира, если эти состояния являются результатами случайного явления (испытания) с вероятностной моделью, поддающейся определению или оценке. Решение задач – это наиболее характерная сфера человеческой деятельности и основная деятельность обучающегося математике. Образ математики и отношение к ней обучающегося формируют прежде всего задачи, которые он решает.

Говоря об обучении, математика понимается как специфическая интеллектуальная деятельность; обучение математике – как становление и открытие знаний заново под руководством преподавателя, который выступает как организатор процесса познания мира обучающимися.

Философия обучения (предлагаемая здесь) теории вероятностей рассматривает эту теорию не как готовый продукт, а как математику в стадии становления путём решения специфических проблем, как процесс, при котором стохастические понятия и методы служат математическим аппаратом при решении конкретных проблем.

Отличительной чертой современных реформ в области преподавания математики является их направленность на:

– перенос центра тяжести с освоения алгорифмов и формирования навыков вычислений на образование посредством математики;

– отчётливое отделение расчётов от того, что в действительности называется математикой;

– достижение более широкого взгляда на роль математики в формировании человеческого интеллекта.

Перенос центра тяжести с обучения математике на образование с помощью математики на основе активизации математической деятельности обучающихся, на гуманизацию обучения определяет новую роль математических задач: они становятся сырьём для открытия стохастических понятий и методов.

Можно выделить несколько форм активизации математической деятельности, которые рождаются на фоне стохастических задач:

- формулировка математических проблем на фоне реальной, внематематической ситуации, рациональное конструирование вопросов;
- упорядочение математическими средствами некоторых фрагментов действительности, погружение объектов реального мира в мир математических абстракций, построение вероятностной модели заданной конкретной ситуации;
- поиск источников информации о неизвестной модели и поиск способов приобретения этой информации;
- объяснение с помощью математики обнаруженных и неожиданных эмпирических фактов;
- рационализация поведения, в том числе и деятельности, касающейся сбора статистических данных, случайного выбора элементов из определённого множества;
- обнаружение, формирование и определение понятий как новых математических инструментов решения проблем;
- упрощение рассуждений с помощью перехода к другой модели, сведение заданных проблем к уже решённым проблемам;
- открытие методом естественной индукции, формулировка и доказательство теорем как свойств стохастических понятий;
- поиск недостатков или ошибок в рассуждениях;
- интерпретация результатов дедукции и расчётов в реальном мире: последние являются лишь промежуточной стадией в решении конкретной проблемы.

Учитывая то обстоятельство, что одной из целей обучения математике является ознакомление обучающихся с подлинным процессом её применения, ценность стохастических задач определяется не столько тем аппаратом, который используется при их решении, сколько возможностями продемонстрировать процесс применения математики при решении внематематических проблем.

Реальные задачи прикладного характера встречаются редко по той причине, что этап формализации (построения математической модели внематематической ситуации) требует больших знаний и математической культуры, поэтому суть применения математики для решения практических проблем осуществляется на примерах задач, в которых, используя случайные игры, моделируется подлинное применение математики. Участие в игре обычно связано с вопросами принятия решения, выбора оптимальной стратегии, проверки гипотез и т.д.

Понятие вероятности должно формироваться в обучении стохастике (аналогично формированию понятия натурального числа в обучении арифметике) постепенно и многоаспектно. Первые оценки вероятности должны быть качественными, типа: «менее вероятно, чем», «более вероятно, чем», «маловероятно», «очень вероятно», «одинаково вероятно». Количественные оценки (вероятность как число) должны появиться позже.

Формирование понятия вероятности в университетском курсе теории вероятностей опирается, чаще всего, на так называемом «классическом определении вероятности», которое страдает тем, что вероятность определяется с помощью того же понятия «одинаково возможные» – это значит одинаково вероятные. Этот факт надо доходчиво объяснять обучающимся, чтобы это определение не воспринималось ими как универсальное, фундаментальное. В то же время надо признать, что аксиоматическое определение вероятности для обучаемых трудновато. Но они должны знать о его существовании.

Понятие «вероятность события» должно формироваться как синтез различных аспектов и в разных интерпретациях (в классическом, статистическом, геометрическом аспектах; в геометрической интерпретации).

Среди разделов комплексной математической дисциплины теория вероятностей занимает особое положение. Во-первых, она является теоретической базой статистических дисциплин, во-вторых, методы теории вероятностей (и математической статистики) непосредственно используются при изучении массовых совокупностей наблюдаемых явлений, обработке результатов наблюдений и выявлении так называемых статистических закономерностей. Наконец, теория вероятностей имеет важное методологическое значение в познавательном процессе, в построении умозаключений на основе результатов опыта или наблюдений над частью объектов и их воссоединении (синтезе) для получения целостного представления об общей закономерности, т.е. служит логической основой индуктивно-дедуктивного умозаключения.

Экономические, социальные, природные явления сложны и многообразны. Между ними существуют многосторонние связи, которые изменяются под влиянием множества факторов, по-разному действующих в различные моменты времени, и в результате их изменения носят случайный характер. При этом, как правило, отсутствует возможность постановки «чистого» эксперимента, позволяющего выделить главные, решающие факторы и исключить влияние многих второстепенных. Поэтому особенно важным становится определение общих закономерностей на базе наблюдения за частью случайных явлений, отделение основных определяющих связей и зависимостей от случайных воздействий. Полученные таким образом выводы будут характеризовать процесс «в среднем», выражаться в форме так называемых вероятностных, а не однозначно-определённых утверждений.

Своеобразная форма таких утверждений, сопровождаемых обычно словами «вероятно», «практически достоверно», «с данной степенью доверия», «в среднем» – это первая проблема, с которой сталкиваются студенты при изучении дисциплины «Теория вероятностей». Вторая проблема связана с необходимостью «перевода» абстрактных теоретико-вероятностных понятий и положений на конкретный язык исследуемой реальной ситуации. В свою очередь, при решении конкретных задач важно «перевести» содержательное толкование задачи на абстрактный язык теоретико-вероятностной модели. Наконец, немалое затруднение при изучении теории вероятностей вызывает преобладание в ней абстрактно-логических рассуждений в сравнении с аналитическим аппаратом, формулами и алгебраическими выводами, которые доминировали в других математических дисциплинах.

Чтобы преодолеть эти трудности, в процессе усвоения учебного курса нужно решить достаточно много задач: анализ конкретных ситуаций даст возможность глубже понять их специфику. При решении задач следует не только формально выполнять расчёты и использовать соответствующие формулы, но и уделять внимание логическому анализу содержания задачи, обоснованно выполняемых операций, использованию условных обозначений, а также чётко формулировать как промежуточные, так и окончательные результаты решения, используемые понятия и определения. Во многих задачах полезно продумать возможные иные подходы к их решению или проанализировать решение при некоторых вариациях условия задачи. Рассмотрим пример выполнения комплексного задания (получения политехнических знаний) по математической статистике, где учитываются такого рода пожелания.

Цель: формирование навыков решения практических работ, моделирующих реальные производственные условия.

Проблема: фермер организовал сельхозпредприятие и решил заниматься выращиванием зерновых культур, например пшеницы. Внешний осмотр посевных площадей выявил их неоднородность для урожайности, поэтому этот фактор необходимо было проверить. Кроме того, как правило, наблюдается отличие урожайности пшеницы озимых и яровых сортов. В очередном году было засеяно 3750 га озимых и 4250 га яровых сортов (всего 8000 га). С целью поиска путей повышения рентабельности посевных площадей осуществлялся контроль урожайности на 30 га озимых и 34 га яровых посевов. Урожайность на этих площадях составила от 18 до 48 ц/га. В предположении, что более низкой (чем 18 ц/га) и более высокой (чем 48 ц/га) на всех 8000 га урожайности не наблюдается и что уровень доверия результатам при всех расчётах составляет 0,95, проводилась статистическая обработка опытных данных с целью:

– оценить среднюю урожайность как на всех площадях (8000 га), так и отдельно по полям озимых и яровых культур;

– оценить средний разброс по урожайности;

– построить эмпирическую функцию распределения (урожайности); сформировать гипотезу о теоретическом законе распределения и осуществить её проверку;

– провести сравнительную оценку характеристик урожайности (среднее значение, средний разброс) на полях озимой и яровой пшеницы.

Результаты расчётов планируется использовать для выбора оптимальной программы удобрения почвы, способствующей повышению урожайности.

Решение поставленных задач

Выполним предварительную обработку исходных статистических данных.

Исследуемый признак – урожайность, вообще говоря, непрерывная случайная величина. Обозначим её X (ц/га); она изменяется от 18 до 48 ц/га.

Построим интервальный вариационный ряд, используя, например, метод Стёрджесса (г. Стёрджесс (1882 – 1958) – американский статист) для определения числа интервалов k и длины каждого из них Δ.

Имеем: $k = 1 + 1{,}4\ln d$, где d – диапазон изменения признака (размах вариации). В нашем случае $d = 48 - 18 = 30$, а

$$k = 1 + 1{,}4\ln 30 \cong 1 + 1{,}4\cdot 3{,}4 = 5{,}76 \approx 6,$$

$$\Delta = d/k = 30/6 = 5 \text{ (ц/га)}.$$

Если обозначить $x_1 = 18$, то концы $(i - 1)$-го интервала будут иметь координаты $[x_{i-1}, x_i)$, где $x_i = x_{i-1} + 5$, $i = 2, 3, \ldots, 7$, а сам интервальный вариационный ряд примет вид:

$$[18, 23); [23, 28); [28, 33); [33, 38); [38, 43); [43, 48]$$

(первые пять – полуинтервалы, последний – отрезок).

Средние точки интервалов

$$c_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \ i = \overline{1, 6}.$$

Подсчитаем количество участков n_i площадью 1 га, урожайность на которых имела значение, попадающее в соответствующий i-й интервал; отдельно подсчитаем n_{1i} – число участков с урожайностью i-го интервала с площадей озимого посева, а n_{2i} – с площадей весеннего посева ($\sum n_i = 64$; $\sum n_{1i} = 30$; $\sum n_{2i} = 34$).

В результате оказалось возможным составить таблицу статистических распределений:

Интервалы	[18, 23)	[23, 28)	[28, 33)	[33, 38)	[38, 43)	[43, 48]
Значения c_i	20,5	25,5	30,5	35,5	40,5	45,5
Частоты n_i	7	11	16	14	10	6
Частоты n_{1i}	1	4	8	6	6	5
Частоты n_{2i}	6	7	8	8	4	1

Для наглядности представления статистического распределения и проверки гипотезы о виде закона (теоретического) распределения построим полигон частот n_i.

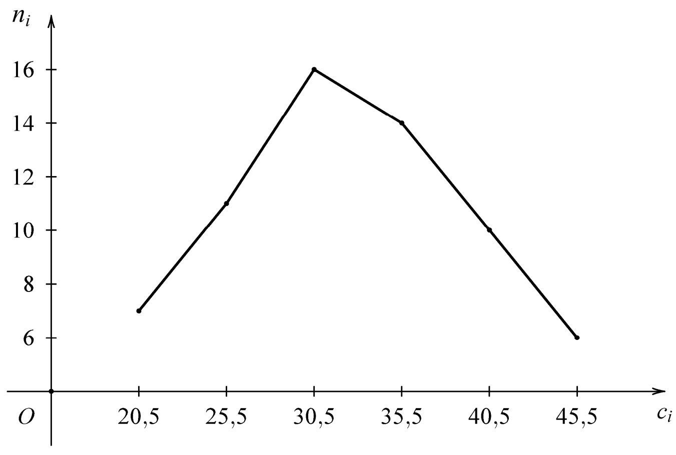


Рис. 1. Полигон частот распределения урожайности

Форма полигона частот позволяет высказать предположение, что генеральная совокупность имеет нормальный закон распределения. Проверим эту гипотезу, используя критерий согласия Пирсона χ^2 (К. Пирсон (1857 – 1936) – английский математик). Для этого, кроме эмпирических частот n_i, рассчитаем так называемые теоретические частоты m_i по формуле

$$m_i = np_i = 64p_i \,,$$

где p_i – вероятность попадания случайной величины X, распределённой по нормальному закону, в интервал $[x_i, x_{i+1})$, $i = \overline{1, 6}$:

$$p_i = p(x_i \le X < x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \,,$$

где функция
$$f(x) = \frac{1}{\overline{S}\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\overline{x})}{2\overline{S}^2}} \qquad (1)$$

плотность распределения вероятностей для нормального закона с числовыми характеристиками $\overline{x}$ – среднее выборочное значение, $\overline{S}^2$ – соответствующее значение исправленной выборочной дисперсии, т.е. точечные оценки генеральной средней a и генеральной дисперсии σ^2.

Используя данные таблицы, найдём эти характеристики:

$$\overline{x} = \frac{1}{64}[20{,}5\cdot 7 + 25{,}5\cdot 11 + 30{,}5\cdot 16 + 35{,}5\cdot 14 + 40{,}5\cdot 10 + 45{,}5\cdot 6] = 32{,}61,$$

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{63}\left[12{,}1^2\cdot 7 + 7{,}1^2\cdot 11 + 2{,}1^2\cdot 16 + 2{,}9^2\cdot 14 + 7{,}9^2\cdot 10 + 12{,}9^2\cdot 6\right] = 53{,}79,$$

тогда $\overline{S} = 7{,}34$.

Чтобы свести нахождение интегралов в формуле (1) к интегралам Лапласа, сделаем замену переменной $Z = \frac{x - \overline{x}}{\overline{S}}$, где $x \in [18, 48]$. Тогда с учётом найденных $\overline{x}$ и $\overline{S}$ $Z \in [-1{,}992;\ 2{,}098]$. Длина каждого из шести новых интервалов будет равна $(2{,}098 - (-1{,}992))\frac{1}{6} = 0{,}682$, а интервальный вариационный ряд примет вид: $[-1{,}992;\ -1{,}310)$; $[-1{,}310;\ -0{,}682)$; $[-0{,}682;\ 0{,}054)$; $[0{,}054;\ 0{,}736)$; $[0{,}736;\ 1{,}418)$; $[1{,}418;\ 2{,}098)$. Это интервалы $[Z_i, Z_{i+1}]$, $i = \overline{1, 6}$.

Пользуясь формулой

$$p_i = p(x_i \le X \le x_{i+1}) = p(Z_i < Z < Z_{i+1}) = \Phi(Z_{i+1}) - \Phi(Z_i),$$

где $\Phi(Z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^Z e^{-t^2/2}\,dt$ – функция Лапласа и используя таблицы этой функции, найдём вероятности p_i, а затем и теоретические частоты $m_i = 64 p_i$.

После такого рода расчётов получим следующую таблицу:

Интервалы	[18, 23)	[23, 28)	[28, 33)	[33, 38)	[38, 43)	[43, 48]
Эмпирические частоты n_i	7	11	16	14	10	6
Теоретические частоты m_i	4,60	10,84	13,70	15,86	9,77	3,85

Выдвигаем гипотезу H_0: функцией распределения случайной величины X является выбранная теоретическая функция распределения $f(x)$. При таком предположении распределение эмпирических частот не противоречит нормальному закону распределения на заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Составим статистику

$$\chi^2_{\text{н}} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i};$$

она имеет χ^2_s-распределение с числом степеней свободы $s = 6 - 2 - 1 = 3$.

Вычисляем

$$\chi^2_{\text{н}} = \frac{2{,}4^2}{4{,}6} + \frac{0{,}16^2}{10{,}84} + \frac{2{,}3^2}{13{,}7} + \frac{1{,}86^2}{15{,}86} + \frac{0{,}23^2}{9{,}77} + \frac{2{,}15^2}{3{,}85} =$$
$$= 1{,}252 + 0{,}0024 + 0{,}386 + 0{,}218 + 0{,}0054 + 1{,}201 = 3{,}064.$$

Чем больше «наблюдаемое» значение $\chi^2_{\text{н}}$, тем хуже согласованы распределения, поэтому выбираем правостороннюю критическую область.

$$p(\chi^2_{\text{кр}} < \chi^2_{\text{н}}) = \alpha.$$

По таблице значений случайной величины χ^2

$$\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2_{0,05;\,3} = 7{,}8.$$

Так как $\chi^2_{\text{н}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 о выбранном теоретическом нормальном законе распределения согласуется с опытными данными.

Теперь представляется возможным построить доверительные интервалы для генерального среднего a и генеральной дисперсии σ^2, зная их точечные оценки $\overline{x}$ и $\overline{S}^2$.

1. Имеем условия генерального среднего:

$$p(\overline{x} - \Delta < a < \overline{x} + \Delta) = \gamma = 1 - \alpha = 0{,}95,$$

где неизвестной является величина Δ.

Её значение можно найти из формулы (для бесповторной выборки)

$$\Delta = t_\gamma \frac{\overline{S}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}},$$

где $t_\gamma = t(\gamma, n) = t_{0,95;\,63} = 2{,}00$ – значение статистики t_γ, имеющей распределение Стьюдента; N = 8000 – объём генеральной совокупности; n – объём выборки.

$$\Delta = 2{,}00 \cdot \frac{7{,}34}{\sqrt{64}} \sqrt{1 - \frac{64}{8000}} = 1{,}8335 \cdot 0{,}996 = 1{,}826.$$

Таким образом: 32,61 – 1,826 < a < 32,61 + 1,826.

С надёжностью γ = 0,95 можно утверждать, что интервал (30,75; 34,44) покрывает значение средней урожайности по всем посевным площадям (8000 га).

2. Условие для генеральной дисперсии:

$$p\left(\frac{(n-1)\overline{S}^2}{z_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\overline{S}^2}{z_1} \right) = \gamma = 0{,}95,$$

где неизвестны z_1 и z_2.

Их можно найти из таблиц распределения χ^2, где

$$p(\chi^2 > z_2) = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}25, \text{ а } \quad z_2 = \chi^2_{0,05;\,63} = 86{,}83;$$

$$p(\chi^2 > z_1) = \frac{1+\gamma}{2} = 0{,}975, \text{ а } z_1 = \chi^2_{0{,}975;\,63} = 42{,}95.$$

Таким образом: $p(39{,}03 < \sigma^2 < 78{,}90) = 0{,}95$.

Доверительный интервал: (39,03; 78,90).

Выясним вопрос: насколько коррелируется урожайность на полях озимого и весеннего посева. Для этого найдём предварительно оценки числовых характеристик соответствующих распределений: выборочное среднее $\bar{x}_1$ урожайности озимой пшеницы и выборочную дисперсию $\bar{S}_1^2$:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{30}\left[20{,}5\cdot 1 + 25{,}5\cdot 4 + 30{,}5\cdot 8 + 35{,}5\cdot 6 + 40{,}5\cdot 6 + 45{,}5\cdot 5\right] = 35;$$

$$\bar{S}_1^2 = \frac{1}{29}\left[210{,}25 + 361 + 162 + 1{,}5 + 181{,}5 + 551{,}25\right] = 50{,}60. \quad \bar{S}_1 = 7{,}11.$$

Аналогично найдём $\bar{x}_2$ – выборочное среднее урожайности на полях весеннего посева и $\bar{S}_2^2$ – соответствующую выборочную дисперсию.

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{34}\left[20{,}5\cdot 6 + 25{,}5\cdot 7 + 30{,}5\cdot 8 + 35{,}5\cdot 8 + 40{,}5\cdot 4 + 45{,}5\cdot 2\right] = 30{,}5;$$

$$\bar{S}_2^2 = \frac{1}{33}\left[600 + 175 + 0 + 200 + 1400 + 225\right] = 48{,}48. \quad \bar{S}_2 = 6{,}96.$$

Оценки характеристик для выборок получились различными. Справедливо ли это для генеральных совокупностей?

Проверим на уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ нулевую гипотезу H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ при конкурирующей гипотезе H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, где σ_1^2 и σ_2^2 соответственно генеральные дисперсии урожайности на полях озимого и весеннего посева.

Их точечные оценки $\bar{S}_1^2 = 50{,}60$ и $\bar{S}_2^2 = 48{,}48$.

Статистика $F_{\text{н}} = \dfrac{\bar{S}_1^2}{\bar{S}_2^2} = \dfrac{50{,}60}{48{,}48} = 1{,}044.$

Область критических значений – двусторонняя и состоит из двух интервалов $(0, F_{\text{лев. кр}}; \alpha/2)$ и $(F_{\text{пр. кр}}, \alpha/2; \infty)$.

$$F_{\text{пр. кр}}, \alpha/2 = F(\alpha/2, n_2 - 1, n_1 - 1) = F(0{,}05, 29, 33) \cong 1{,}87;$$

$$F_{\text{лев. кр}},\ \alpha/2 = F(1 - \alpha/2,\ n_{x2} - 1,\ n_{x1} - 1) = \frac{1}{F_{\text{пр.кр}}\ \alpha/2} = 0{,}535\ .$$

Так как $F_{\text{лев. кр}} < F_{\text{н}} < F_{\text{пр. кр}}$, то гипотеза H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ не отвергается. Таким образом, различие выборочных дисперсий $\overline{S}_1^2$ и $\overline{S}_2^2$ статистически не значимо и за оценку общего значения дисперсии принимаем величину

$$\overline{S}_0^2 = \frac{\overline{S}_1^2(n_1 - 1) + \overline{S}_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} =$$

$$= \frac{50{,}60 \cdot 29 + 48{,}48 \cdot 33}{30 + 34 - 2} = \frac{1467{,}4 + 1599{,}84}{62} = 49{,}47.$$

$$\overline{S}_0 = 7{,}03.$$

Проверим на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ нулевую гипотезу H_0: $a_1 = a_2$ при конкурирующей H_1: $a_1 > a_2$, где a_1 – генеральная средняя урожайности на полях озимого посева, a_2 – соответствующая средняя урожайности весеннего посева.

Статистика $t_{\text{н}} = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\overline{S}_0^2}{n_1} + \dfrac{\overline{S}_0^2}{n_2}}}$ имеет t-распределение (Стьюдента) с $n_1 - 1 + n_2 - 1 = 62$ степенями свободы.

Её значение $t_{\text{н}} = \dfrac{35 - 30{,}5}{\sqrt{\dfrac{49{,}47}{30} + \dfrac{49{,}47}{34}}} = 2{,}56$.

С другой стороны, для двусторонней критической области $t_{\text{кр}} = t_{(0{,}05;\ 62)} = 2{,}02$. Тогда $t_{\text{н}} > t_{\text{кр}}$ и H_0 отвергается: урожайность озимых выше, чем яровых.

Выясним вопрос корреляции частот n_{1i} и n_{2i} в таблице, на с. 23, т.е. вопрос о том, насколько их распределения «похожи» между собой.

Найдём коэффициент корреляции r

$$r = \frac{6\sum x_{1i}x_{2i} - \sum x_{1i}\sum x_{2i}}{\sqrt{6\sum x_{1i}^2 - \left(\sum x_{1i}\right)^2}\sqrt{6\sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{2i}\right)^2}} =$$

$$= \frac{6(6 + 28 + 64 + 48 + 24 + 5) - 30 \cdot 34}{\sqrt{6(1 + 16 + 64 + 36 + 36 + 25) - 30^2}\sqrt{6(36 + 49 + 64 + 64 + 16 + 1) - 34^2}} =$$

$$= \frac{1050 - 1020}{\sqrt{1068 - 900}\sqrt{1380 - 1156}} = 0{,}1516.$$

Корреляция очень слабая. Исследуем значимость этого коэффициента.

Имеем: H_0: $\rho = 0$; H_1: $\rho \neq 0$, ρ – генеральный коэффициент корреляции.

$$t_{\text{н}} = \frac{r\sqrt{k-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0{,}15 \cdot 16 \cdot \sqrt{4}}{\sqrt{0{,}9761}} = 0{,}312\,,$$

здесь $k = 6$ – число исследуемых пар.

$t_{\text{кр}} = t_{(0{,}05;\,4)} = 2{,}78$ (распределение Стьюдента).

$t_{\text{н}} < t_{\text{кр}}$ и нулевая гипотеза не отвергается.

Таким образом, распределения по урожайности озимых и яровых культур различные (не коррелируются).

Мы рассмотрели выполнение одного из комплексных заданий по математической статистике, для его выполнения необходимы умения: структурировать исходные статистические данные, проверять гипотезу о законе их распределения, находить значения параметров, определяющих это распределение, проверять гипотезы о равенстве параметров распределения, исследовать парные корреляции. Выполняя такое задание, студенты развивают способности использования знаний на практике, осознают значимость предмета «Математика».

Это учебное задание с возможной реализацией на калькуляторе (чтобы прочувствовать алгоритм, его слабые места). Однако студенты должны научиться решать и реальные практические задачи. И здесь уже калькулятор не поможет. В настоящее время соединение статистической теории и её компьютерной реализации стало объективной необходимостью. Во всём мире изучение методом математической статистики стало обязательным элементом образования практически по всем специальностям: медики и агрономы, психологи и инженеры, экономисты и биологи и т.п. должны уметь применять современные методы анализа и обработки данных, содержащие случайные, непредсказуемые составляющие, и делать на их основе обоснованные выводы. В связи с расширением применения достижений математической статистики во многих научных областях, оптимизацией научных планов по изучению этой науки, усилением прикладной направленности методов анализа данных существенно актуально применение компьютерных технологий в преподавании математической статистики [5].

2.2. ИТОГОВЫЕ ЗАНЯТИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» В СИСТЕМЕ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Чтобы систематизировать знания по учебному курсу, целесообразно проведение итоговых занятий, на которых обсуждаются основные понятия, принципиальные положения уже в условиях, когда программа этого курса пройдена и не требуется выдерживать логические последовательности содержания. Кроме того, на итоговых занятиях появляется возможность создания положительного образа как дисциплины «Математика», так и науки «Математика». Итоговые занятия по возможности не должны содержать упоминание каких-то формул, выполнения каких-то расчётов. Доминировать должна философия математики, её гуманитарные составляющие, терминология, доступная для понимания практически всеми студентами. В процессе именно такого рода итоговых занятий надо создавать убеждённость в том, что каждый студент вуза может овладеть правильным использованием математических методов на таком уровне, что он будет нужным, полезным и надёжным специалистом своего дела [13].

На наш взгляд, на итоговых занятиях по теории вероятностей и математической статистике целесообразно рассмотреть три темы:

1) «Рассуждения о математической вероятности», где обсудить это понятие на уровне в большей степени правдоподобных рассуждений, понятных для многих студентов;

2) «Математические модели в статистике», где сосредоточиться на особенностях стохастических моделей, их достоинствах, практической ценности;

3) «Гуманитарные составляющие учебного курса «Теория вероятностей и математическая статистика», где рассмотреть исторические факты в возникновении и развитии теории вероятностей и её использования в математической статистике, а также биографические данные о создателях этих наук, многие из которых не были профессиональными математиками, а свои выдающиеся достижения получили в процессе решения практически важных проблем. Далее мы приводим по сути конспекты соответствующих обзорных лекций, которые по своему содержанию должны инициировать интерактивное их обсуждение с принятием какой-либо концепции, закрепившейся в сознании обучающихся на многие годы, принятой ими для личной пропаганды.

Лекция 1. Рассуждения о математической вероятности

На практике очень часто приходится сталкиваться с опытами (испытаниями, наблюдениями, процессами), могущими давать различные результаты в зависимости от обстоятельств, которые мы не знаем или не умеем учесть. Так, например, при бросании игральной кости мы не можем знать заранее, какая из граней окажется сверху, так как это зависит от многих неизвестных нам обстоятельств (деталей движения руки, бросающей кость, положения игральной кости во время броска, поверхности, на которую падает кость и т.д.), нельзя также заранее предсказать, сколько выпускников средней школы подаёт в определённый год в тот или другой институт, сколько дождливых дней будет в будущем году. Число подобных примеров можно приводить неограниченно.

Применение математики к изучению подобного рода явлений опирается на то, что во многих случаях при многократном повторении одного и того же опыта в одних и тех же условиях частота появления рассматриваемого результата остаётся всё время примерно одинаковой, близкой к некоторому постоянному числу.

Это число называют вероятностью рассматриваемого события; к нему и будет близка средняя частота соответствующего результата в длинном ряду опытов.

Вероятность математическая – числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определённого события в тех или иных определённых, могущих повторяться неограниченное число раз условиях, т.е. характеристика объективно существующей связи между этими условиями и событием.

В некоторых случаях численное значение вероятности получается из «классического определения», как отношение числа исходов испытания, благоприятных событию A, к общему числу равновозможных, несовместных исходов, образующих полную группу событий.

В других, более сложных ситуациях определение численного значения вероятности требует статистического подхода (например, вероятность попадания в мишень).

Математическая вероятность является качественно своеобразной связью между случайным и необходимым. Ведь случайность – альтернатива закономерности. Можно ли изучать случайности? Можно, но только тогда, когда в них присутствуют закономерности. Вот здесь и значимо это понятие (вероятности). При изложении теории вероятностей формулируются в виде аксиом те свойства вероятности, которые на данном этапе развития науки необходимы для её развития. Однако, ни эти аксиомы, ни классический подход к вероятности, ни статистический подход не могут дать исчерпывающее определение реального содержания понятия вероятности; они являются лишь известными приближениями ко всё более полному его раскрытию. Далеко не всякое событие, наступление которого при заданных условиях не является однозначно определённым, имеет при этом комплексе условий определённую вероятность. Предположение, что при данных условиях для данного события вероятность, т.е. вполне определённая нормальная доля числа появлений данного события при большом числе повторений данных условий, существует, является гипотезой, которая в каждом отдельном вопросе требует специальной проверки или обновления.

Например, имеет смысл говорить о вероятности попадания в цель заданных размеров, с заданного расстояния из оружия известного образца стрелком, вызванным наудачу из определённого воинского подразделения. Однако было бы бессмысленно говорить о вероятности попадания в цель, если об условиях стрельбы ничего не известно.

Математическая вероятность в тех случаях, когда имеются достаточные условия допускать её существование и имеется возможность с достаточной достоверностью и точностью определить её числовое значение, может служить для оценки вероятности события в обычном, житейском смысле, т.е. для уточнения так называемых проблематических суждений, выражающихся обычными словами «возможно», «вероятно», «очень вероятно», «почти достоверно» и т.п. По поводу этих оценок следует иметь в виду, что в применении к любому определённому суждению, которое на самом деле может быть только истинным или ложным, оценка его вероятности имеет лишь временный, субъективный смысл – выражает наше отношение к делу. Например, если кто-либо, не имея конкретных сведений, захочет представить себе предновогоднюю ночь 2016 г. в г. Тамбове, то он с разумным основанием скажет: «вероятно, она будет морозной». Однако на самом деле с 30.12.2015 г. по 02.01.2016 г. в Тамбове была «плюсовая» температура. Выяснив это обстоятельство, мы должны будем отменить первоначальную оценку, выраженную заключённым в кавычки проблематическим суждением. Тем не менее эта оценка, оказавшаяся в применении в данному индивидуальному случаю ошибочной, основана на верном общем правиле: «во второй половине декабря в г. Тамбове устанавливается морозная погода». Это правило отражает объективные свойства климата в г. Тамбове. Такого рода правила можно выражать, указывая уровень вероятности интересующего нас события, при тех или иных общих, осуществимых неограниченное число раз условиях. Эти оценки уже имеют объективный смысл.

Поэтому употребление расчёта вероятности для подтверждения наших оценок степени надёжности тех или иных утверждений, относящихся к отдельным индивидуальным событиям, не должно давать повода к мнению, что математическая вероятность является только числовым выражением нашей субъективной уверенности в наступлении некоторого события. В действительности, каждое имеющее познавательную ценность вероятностное суждение вида «событие A наступает при условиях S с вероятностью p» в своеобразной форме выражает объективную связь, существующую между A и S.

Теория вероятностей – математическая наука, позволяющая по вероятности одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо способом с первыми. Утверждение о том, что какое-либо событие наступает с вероятностью, равной, например, 0,5, ещё не представляет само по себе окончательной ценности, так как мы стремимся к достоверному знанию. Окончательную познавательную ценность имеют те результаты теории вероятностей, которые позволяют утверждать, что вероятность какого-либо события близка к единице или (что то же самое) вероятность события A весьма мала. В соответствии с принципом «пренебрежения достаточно малыми вероятностями» такое событие считают практически достоверным. Имеющие научный и практический интерес выводы такого рода обычно основаны на допущении, что наступление или ненаступление события A зависит от большого числа случайных, мало связанных друг с другом факторов. Поэтому о теории вероятностей можно сказать, что это наука, выясняющая закономерности, которые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Для описания закономерной связи между некоторыми условиями S и событием A, наступление или ненаступление которого при данных условиях может быть точно установлено, естествознание использует обычно одну из следующих двух схем:

1. При каждом осуществлении условий S наступает событие A. Такой вид, например, имеют все законы классической механики, которые утверждают, что при заданных начальных условиях и силах, действующих на тело или систему тел, движение будет происходить однозначным образом.

2. При условии S событие A имеет определённую вероятность $p(A/S)$, равную p. Так, например, законы радиоактивного излучения утверждают, что для каждого радиоактивного вещества существует определённая вероятность того, что из данного количества вещества за данный промежуток времени распадётся какое-либо число N атомов.

Закономерности, описываемые первой схемой, и называют детерминированными, однозначно определёнными; они привлекательны, однако не всегда адекватны изучаемому процессу.

Статистические закономерности, т.е. закономерности, описываемые схемой типа 2), были впервые обнаружены на примере азартных игр, подобных игре в кости. На рубеже XIX–XX вв. было открыто большое число статистических закономерностей в физике, химии, биологии и т.п., что инициировало их глубокое изучение.

Можно подумать, что для вывода какой-либо статистической закономерности необходим сбор и изучение обширного статистического материала. Однако непосредственной обработкой массовых наблюдений выясняются лишь самые простые из статистических закономерностей, т.е. определяются лишь некоторые вероятности. По найденным вероятностям с помощью законов теории вероятностей можно вычислить вероятности более сложных явлений и на основе этих вычислений сделать выводы о статистических закономерностях, которым подчинены эти сложные явления. В других случаях значения исходных вероятностей являются гипотетическими и может оказаться, что соответствующая статистическая гипотеза не допускает непосредственной проверки. Роль теории вероятности здесь сводится к тому, чтобы чисто математическим путём из данной статистической гипотезы вывести её возможные следствия, которые будучи сопоставлены с результатами опыта, подтвердят или опровергнут сделанную гипотезу.

Лекция 2. Математические модели в статистике

Прежде чем подвергнуть математическому изучению какое-нибудь явление природы или технический, экономический, социальный процесс, необходимо составить его математическую модель. Это означает, что логическому анализу подвергается стоящая перед нами практическая задача, и из всего многообразия свойств, присущих явлению, отбираются лишь те, которые станут учитываться. Модель явления не тождественна самому явлению, она только даёт некоторое представление для его понимания, некоторое приближение к действительности. Но в модели перечислены все предположения, которые кладутся в её основу. Эти предположения могут быть весьма грубыми и тем не менее давать вполне удовлетворительное приближение к реальности.

Для одного и того же явления можно предложить не одну, а много моделей. Вполне может случиться, что несколько моделей, исходящих из разных первичных предположений, могут одинаково хорошо описывать явление. Обычно это наблюдается лишь до известных пределов, начиная с которых одна (или несколько) из них оказывается менее предпочтительной. Это начинается с того момента, как новое явление того же круга не получает достаточно совпадения с предсказаниями моделей, и от некоторых приходится отказываться и заменять их на новые, более полно отражающие природу вещей.

Создание математических моделей – важный этап познания, поскольку он позволяет чётко формулировать наши представления о ходе интересующих нас явлений и действующих в них связях. Мы перечисляем сделанные нами предположения и в ходе опытной проверки или же при сравнении реального течения процесса с предвычисленным согласно теории, базирующейся на сделанной модели, у нас появляется возможность исследовать влияние каждого из сделанных предположений.

Собственно говоря, все естественные науки, использующие математику, можно считать математическими моделями явлений. Например, гидродинамика является моделью движения жидкости, математическая экономика – моделью процессов экономики и т.д. До появления ЭВМ математическое моделирование сводилось к построению аналитической теории явлений. Не всегда математическую теорию явления удавалось довести до возможности вывода формул. Природа оказалась сложнее возможностей аналитических методов математики. Приходилось вносить упрощения в модель явления, а тем самым обеднять выводы. Зачастую, по сути нелинейную модель приходилось заменять линейной, но при этом терялись некоторые важные выводы.

В XX веке математика пополнилась мощным математическим методом исследования: моделированием сложных систем на ЭВМ. По-прежнему составляется логико-математическая модель задачи, а по ней составляется программа работы ЭВМ. Исследователь ставит перед собой не ту цель, которую он выдвигал перед собой раньше, – вывод расчётной формулы. Теперь он стремится вычислять те или иные параметры, характеризующие явление. Таким путём были исследованы сложные вопросы, связанные с термоядерными реакциями, поведением самолётов в критических ситуациях, влиянием различных факторов на экологические системы, распространением эпидемий и пр. Теперь этот метод исследования вошёл в широкую практику в инженерном деле, естествознании, медицине, экономике, социальных проблемах и др.

В настоящее время математическое моделирование используется и тогда, когда о физической структуре явления известно весьма мало. В этом случае строится гипотетическая модель (от слова гипотеза) и на её основе выводятся следствия, уже доступные наблюдению. Возможно, что такие гипотетические модели не подтверждаются опытом.

В этом случае их отвергают и выбирают новые, позволяющие познать природу вещей точнее. Ценность гипотетических моделей в том, что они актуализируют работу мысли, наводят на новые эксперименты, позволяют продвигаться в познании окружающего нас мира. История науки показывает, какую большую роль сыграли научные гипотезы и построенные на их основе математические модели явлений. Это, например, гипотеза о строении Солнечной системы польского астронома и математика Николая Коперника (1473 – 1543), модель строения атома, предложенная английским физиком Эрнестом Резерфордом (1871 – 1937). Последняя модель исходила из предположения, что атом построен примерно так, как Солнечная система: вокруг ядра атома вращаются электроны. Сама модель Э. Резерфорда оказалась недостаточной, развитие науки от неё отказалось, но она вызвала к жизни многие исследования, приведшие к современной атомной физике.

В XVII, XVIII и первой половине XIX вв. математические модели реальных явлений почти всегда строились исходя из принципа полной детерминированности их протекания (т.е. из предположения, что каждое состояние в данный момент времени приводит к одному определённому состоянию в каждый заданный последующий момент). Таковы модели классической механики, оптики, гидродинамики и многих других областей знаний. Однако уже с середины XVII в. в науке стали пробиваться идеи статистических моделей. Сначала были изучены демографические явления, такие как смертность, рождаемость, выздоровление от заболеваний и пр. Здесь уже представление о полной детерминированности явлений не находило подтверждений и для их количественного изучения необходимо было разработать новые математические методы исследования. Это были методы теории вероятностей и зарождавшейся математической статистики. В середине XVIII в. в связи с успехами астрономии возник вопрос о закономерностях, с которыми приходится иметь дело при рассмотрении погрешностей наблюдений. Этой задачей занимались многие крупные математики того времени; решение было найдено почти одновременно французским математиком А. М. Лежандром (1752 – 1833) и немецким учёным К. Ф. Гауссом (1777 – 1855) в 1809 г. (метод вычисления наивероятнейших результатов совокупности наблюдений, известный в науке как метод наименьших квадратов). В середине XIX в. русский математик М. В. Остроградский (1801 – 1862) рассмотрел задачу приёмочного контроля, играющую в настоящее время большую роль в организации приёма больших партий какой-либо продукции по тщательному изучению лишь небольшой их доли. Особенно быстро пошло развитие статистических моделей в естествознании со второй половины XIX в., когда шотландским физиком Дж. К. Максвеллом (1831 – 1879), австрийским физиком Л. Больцманом (1844 – 1906) и другими исследователями была построена кинетическая теория газов, основанная на гипотезе, что любой газ состоит из большого числа молекул, находящихся в постоянном движении. Оказалось, что из очень больших предпосылок о характере движения и связях между молекулами удаётся построить содержательную и богатую результатами теорию, превосходно согласующуюся с экспериментами.

С 1910-х годов началось применение теории вероятностей к телефонии. В физике, геофизике, организации производства теоретико-вероятностные модели нашли широкое применение. Ряд крупных современных физиков даже утверждают, что вне теории вероятностей нельзя получить достаточно чёткое представление о содержании и концепциях современной физики.

С вероятностными (стохастическими) моделями студенты знакомятся при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Эти модели имеют существенное отличие от детерминированных моделей, с которыми они встречались в школьных учебниках и учебниках по высшей математике. Поэтому представляется возможным и весьма желательным на заключительном этапе изучения математики в вузе обобщить взгляды обучающихся на математические модели.

Слово «модель» в латинском языке означает «образец», «аналог» и является абстрактным представлением реальности в какой-либо форме (например, математической, физической, графической, компьютерной) для обеспечения возможности представления отдельных аспектов этой реальности с целью получить ответы на некоторые вопросы. Например, моделируют различные архитектурно-строительные конструкции для поиска наиболее удачных, модулируют летательные аппараты, различные средства движения, устройства.

Математическая модель – математическое представление реальности, один из вариантов модели как системы, исследование которой позволяет получить информацию о некоторой другой системе. Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути, занимаются математическим моделированием: заменяют идеальный объект его математической моделью и затем изучают именно её. Связь математической модели с реальностью осуществляется с помощью цепочки гипотез, идеализаций и упрощений. С помощью математических методов описывается, как правило, идеальный объект, построенный на этапе содержательного моделирования.

Математическая модель – важное, простое понятие, связывающее математику и реальную жизнь. Говоря простым языком, математическая модель – это математическое описание любой ситуации. В любом деле, где надо что-то подсчитать, рассчитать, пользуются математическим моделированием (даже не подозревая об этом). Например, надо описать расходы (P) на покупку двух булок хлеба, одного пакета молока и трёх пачек творога. Если известна цена булки (*ЦБ*), пакета молока (*ЦМ*), пачки творога (*ЦТ*), то легко можно написать:

$$P = 2ЦБ + ЦМ + 3ЦТ\ . \tag{2}$$

Вот это и будет математической моделью расходов на покупки. Модель не учитывает очередь в магазине, вежливость кассиров, срок годности товаров и т.п. На то она и модель, а не реальная покупка. Но расходы, т.е. то, что нам надо, мы узнаем точно (если модель правильная).

Нередко математическая модель смешивается с реальным явлением, для описания которого она пригодна в каком-то смысле.

Математическая модель физического явления не является и не может являться идентичной, адекватной самому явлению. Всякое математическое описание явления означает известную его логическую идеализацию, не говоря уже о том, что это описание осуществляется с определённой степенью точности в результате отбрасывания ряда факторов, которые, не смотря на кажущуюся «незначительность» и «малость», могут в каком-то смысле существенно повлиять на конечный результат.

Поэтому могут возникать ситуации, подобные той, что описана в старом анекдоте: «Физик-теоретик и математик занимаются одной и той же задачей, описываемой некоторым уравнением. Однажды математик с радостью сообщил физику, что изучаемое им уравнение имеет решение.

«Дорогой мой, – ответил ему физик, если бы я хоть минуту сомневался в существовании решения, то я бы давно перестал заниматься этой задачей».

Истинный смысл этого анекдота не в том, что простаки-математики занимаются бесплодными, никому не нужными (кроме них самих) мудрствованиями, а в том, что физик говорит о физическом явлении, а математик – о его математической модели. Поэтому из существования решения физической задачи, которое имел в виду физик, не следует существование решения математической задачи: её существование можно установить или опровергнуть только математическими рассуждениями. Когда исследуется математическая модель, то физические соображения имеют лишь наводящий правдоподобный характер и не имеют доказательной силы. Лишь после того как математически доказано, что существует решение уравнения, моделирующее некоторое реальное явление, можно говорить о том, что рассматриваемая математическая модель достаточно хорошо описывает изучаемое явление и её можно с достаточным успехом использовать для его исследования, прогнозирования дальнейших событий.

Рассмотрим, как изучаются взаимосвязи между величинами методами математической статистики.

Совокупности общественных явлений, изучаемые статистикой, формируются в результате взаимодействия многообразных, имеющих различную природу факторов (факторных признаков – признаков, обуславливающих изменение других, связанных с ними признаков). Выявление этих факторов, установление существующих между ними взаимосвязей и их конкретной формы в виде конечных зависимостей, а также выявление отношений между самими факторами в виде числовых характеристик является важной задачей статистики.

При изучении взаимосвязей первоначально устанавливаются статистические показатели в соответствии с содержанием изучаемого явления.

Далее стараются получить количественное подтверждение наличия или отсутствия связи между факторными признаками и результативными посредством специальных характеристик. Количественную характеристику тесноты связи получают, обобщая результаты статистического наблюдения по всей совокупности объектов. При оценке тесноты связи между качественными показателями этот этап является, как правило, заключительным.

Если гипотеза о наличии связи между количественными признаками подтверждается, то устанавливают вид аналитической зависимости (формулы) между факторными признаками и результативным, который выбирается на основании содержательного анализа явления. Если характер взаимосвязи неизвестен, то проверяются различные гипотезы и проводят численный эксперимент с использованием различных формул с последующим выбором той из них, которая наиболее правдоподобно и в большей степени соответствует опытным (фактическим) данным.

Такая работа выполняется с использованием методов корреляционного и регрессионного анализа. При этом в зависимости от изменения фактического факторного признака определяется значение среднего уровня результативного признака. Такие связи называются парными, а сам способ их исследования – способом парной корреляции. Теснота связи обнаруживается между показателями, не находящимися в функциональной зависимости, когда связь проявляется не в каждом отдельном случае, а в определённой (массовой) зависимости. С помощью парной корреляции решаются две главные задачи: составляется модель действующих факторов (уравнение регрессии); даётся количественная оценка тесноты связи (коэффициент корреляции).

Измерение взаимной связи признаков (её оценка) основывается на сопоставлении уровней показателей, полученных в процессе наблюдения: сравнении средних величин, непосредственном сравнении уровней признаков, сравнении показателей динамики, сопоставлении результатов сводки и группировки, показателей вариации, относительных величин и т.п.

Широко используется графический метод. Визуальное определение тенденции развития явления является наиболее простым. Многие способы оценки взаимосвязи признаков в практической статистике основаны на строгих методах теории вероятностей и математической статистике.

Наиболее важный этап изучения взаимосвязей – оценка достоверности полученных результатов с использованием аппарата математической статистики и теории вероятностей. Результаты оценки достоверности расчётных значений параметров взаимосвязи признаков позволяют уточнить гипотезу о наличии и форме связи и отобрать наиболее существенные признаки.

Характерной особенностью функциональных связей является то, что в каждом отдельном случае известен полный перечень факторов, определяющих значение результативного признака, а также точный механизм их влияния, выраженный определённым уравнением. В реальной же общественной жизни ввиду неполноты информации жёстко недетерминированной системы может возникнуть неопределённость, из-за которой эта система по своей природе должна рассматриваться как вероятностная, при этом связь между признаками становится стохастической, при которой одна из случайных величин Y реагирует на изменение другой величины X изменением своего закона распределения. Поскольку значения зависимой переменной подвержены случайному разбросу, они не могут быть предсказаны с достаточной точностью, а только указаны с определённой вероятностью.

Характерной особенностью стохастических связей является то, что они проявляются во всей совокупности, а не в каждой её единице. Причём не известен ни полный перечень факторов, определяющих значение результативного признака, ни точный механизм их функционирования и взаимодействия с результативным признаком. Всегда имеет место влияние случайного. Появляющиеся различные значения зависимой переменной – реализация случайной величины.

Проявление стохастических связей подвержено действию закона больших чисел; лишь в достаточно большом числе единиц индивидуальные особенности сгладятся, случайности взаимопогасятся и зависимость, если она имеет существенную силу, проявится достаточно отчётливо. Частным случаем стохастической связи является корреляционная связь. Она существует там, где взаимосвязанные явления характеризуются только случайными величинами. При такой связи среднее значение (математическое ожидание) случайной величины результативного признака Y закономерно изменяется в зависимости от другой величины X. Корреляционная связь так же проявляется не в каждом отдельном случае, а во всей совокупности в целом. Только при достаточно большом количестве случаев каждому значению случайного признака X будет соответствовать распределение средних значений случайного признака Y. Корреляционная связь – понятие более узкое, чем стохастическая связь. Стохастическая связь может отражаться не только в изменении средней величины, но и в вариации одного признака в зависимости от другого, т.е. в любой другой характеристике вариации.

Исследование зависимости случайных величин приводит к моделям регрессии (более простым, чем модели реальных явлений) и регрессионному анализу на базе выборочных данных. Характерная особенность регрессионной модели – это функция независящей переменной и характеристик с добавленной случайной переменной.

Теория вероятностей и математическая статистика представляют только инструмент для исследования статистической зависимости, но не ставят собственной целью установление причинной связи. Представления и догадки о причинной связи должны быть привнесены из некой другой теории, которая позволяет содержательно разъяснить изучаемое явление.

Любой закон природы или общественного развития может быть представлен описанием совокупности взаимосвязей. Их анализ – это поиск ответа на вопросы:

- существует ли связь между исследуемыми переменными?
- как измерить тесноту связи?

Основным методом обработки статистических данных в целях изучения связи между переменными является корреляционный анализ.

Цель корреляционного анализа – обеспечить получение некоторой информации об одной переменной с помощью другой переменной. Если такая цель достигается, то считается, что переменные коррелируют. Корреляция отражает лишь линейную зависимость величин, но не отражает их функциональной связанности. Например, если выбрать значения величины X_1, найденные как $\sin x$, и величины X_2, найденные как $\cos x$, и вычислить коэффициент корреляции $K(X_1 X_2)$, то он будет близок к нулю, т.е. можно предполагать, что зависимость между $\sin x$ и $\cos x$ отсутствует, хотя на самом деле она функциональная $X_2^2 = 1 - X_1^2$, поэтому коэффициент корреляции отражает линейную зависимость и совсем не подходит для описания сложных, нелинейных зависимостей.

Рассмотрим несколько подробнее раздел математической статистики, связанный с понятиями «корреляция» и «регрессия».*

Предположим, что в некотором опыте наблюдаются две случайные величины X и Y. То, что X и Y обязаны своим появлением одному и тому же опыту, вообще говоря, создаёт между ними некоторую связь. В некоторых случаях эта связь является настолько тесной, что, зная какое значение приняла величина X, можно однозначно предсказать значение Y. Это означает, что связь между X и Y – функциональная. Примеры такой зависимости можно встретить в физике, технике.

В то же время можно указать и примеры другого рода – когда зависимость между случайными величинами существует, но не носит строго выраженного функционального характера. Подобные примеры особенно характерны для таких областей науки и практики, как агротехника, биология, медицина, экономика и т.д., где развитие явлений, как правило, зависит от многих других, трудно поддающихся учёту факторов. Известно, например, что обилие осадков в период созревания пшеницы приводит к повышению урожайности; однако это ещё не означает, что связь между количеством осадков X и урожайностью Y (скажем, в расчёте на 1 м^2) является функциональной (кроме осадков на урожайность влияют и другие факторы – тип почвы, количество внесённых удобрений, число солнечных дней и т.д.). В подобных случаях, когда изменение одной величины влияет на другую лишь статистически, в среднем принято говорить о вероятностной связи между величинами. Приведём некоторые примеры [8]:

1. Пусть X – рост наугад выбранного взрослого человека (скажем, в сантиметрах), а Y – его вес (в килограммах). Зависимость между ростом и весом является весьма сильной, в первом приближении её можно считать функциональной. Формула, приближённо выражающая эту зависимость, пишется обычно Y (кг) = X (см) – 100.

2. Пусть X – высота наугад выбранного дерева в лесу, Y – диаметр его ствола при основании. Здесь зависимость также можно признать сильной (близкой к функциональной), хотя и не такой, как в первом примере.

---

* Регресс – лат. *regressio* – обратное движение, переход от более сложных форм к менее сложным.

3. Из груды камней неправильной формы наугад выбирают один камень. Пусть X – его вес, Y – наибольшая длина. Зависимость между X и Y носит сугубо вероятностный характер.

4. Пусть X – рост наугад выбранного взрослого (переставшего расти) человека, Y – его возраст. Наблюдения показывают, что эти величины практически независимы.

В общем случае связь между величинами X и Y находит своё выражение в том, что при фиксированном значении X величина Y остаётся случайной, но с законом распределения, зависящем от X. Иначе говоря, каждому значению $X = x$ отвечает свой закон распределения величины Y.

Рассмотренные выше крайние случаи – функциональная зависимость и полная независимость вполне укладываются в эту общую схему; функциональная зависимость $Y = f(X)$ означает, что при фиксированном значении $X = x$ величина Y принимает единственное значение $f(x)$ (с вероятностью 1), а полная независимость означает, что при любом значении X закон распределения величины Y – один и тот же (он не зависит от выбранного нами значения X).

Из теории вероятностей известно, что вероятность того, что случайная величина примет определённое значение, равна нулю.

Вероятность связи между двумя случайными величинами X и Y проявляется обычно тогда, когда имеются общие случайные факторы, влияющие как на X, так и на Y (наряду с другими факторами, неодинаковыми для X и Y). Например, если X представляет собой некоторую функцию от случайных величин U и V: $X = f(U, V)$, а Y есть функция от той же самой величины U и другой случайной величины W: $Y = \varphi(U, W)$, то величины X и Y будут связаны между собой вероятностной связью. Так, если X – высота куста картофеля зависит от качества почвы (удобрений), а Y – урожайность этого куста, то между X и Y существует вероятностная связь.

Хотя функциональные детерминированные связи характерны для многих технологических процессов, далеко не все параметры реальных технических объектов можно характеризовать вполне определёнными значениями. Поэтому математические модели таких технических объектов нельзя отнести к детерминированным. Детерминированная модель допустима лишь в том случае, когда влияние случайных факторов столь незначительно, что пренебрежение ими не приведёт к ощутимым искажениям результатов моделирования. Вообще же можно утверждать, что детерминированная математическая модель отображает реальные процессы лишь в усреднённом смысле.

В тех задачах, где не требуется высокой точности результатов моделирования, предпочтение отдаётся детерминированной модели. Это объясняется тем, что реализация и анализ детерминированной модели много проще, чем стохастической.

Стохастическая математическая модель, устанавливая вероятностное отношение между входом и выходом системы, позволяет сделать статистические выводы о некоторых вероятностных характеристиках исследуемого процесса: математическом ожидании, дисперсии, среднем квадратическом отклонении, корреляционном параметре. Например, если изучаемый технический объект является изделием массового производства и его внутренние параметры могут принимать случайные значения в пределах допусков, установленных относительно номинальных значений, то выходные параметры технических объектов будут случайными величинами. Случайными могут быть и значения внешних параметров при воздействии на технологический объект таких факторов, как порывы ветра, солнечная активность, выпадение осадков, поведение людей и т.п.

Если вернуться к примеру модели расходов на покупки (2) в предположении, что они осуществляются не в магазине с фиксированными ценами, а на рынке, где на цены влияют такие факторы, как имеющееся в настоящее время количество продаваемого товара, субъективные качества продавца, погодные условия, время продажи, общее количество покупателей и т.п., то правильнее говорить о стохастической модели покупки, вероятностном значении величины расходов.

В стохастической модели параметры, условия функционирования и характеристики состояния моделируемого объекта представлены случайными величинами и связаны стохастическими зависимостями.

Примером стохастической связи является зависимость производительности труда от разряда рабочих, их стажа работы; зависимость качества продукции от квалификации работников. Проявление стохастической связи обусловлено действием закона больших чисел, согласно которому в процессе воздействия различных факторов на результативный показатель влияние несущественных из них сглаживается, позволяя проявиться влиянию значимых факторов.

Следует отметить, что стохастическая математическая модель наиболее адекватно (достоверно) отражает физические (экономические) процессы в реальной системе, функционирующей в условиях влияния внешних и внутренних факторов.

Влияние (наличие) случайных факторов приводит к тому, что предположение о детерминированном характере физической системы и описание её детерминированной математической моделью является идеализация реальной системы.

Для анализа стохастических математических моделей используют методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики. Однако основная трудность их применения обычно связана с тем, что вероятностные характеристики случайных величин (математические ожидания, дисперсии, законы распределения) часто не известны или известны с невысокой точностью и соответствующие математические модели не удовлетворяют требованиям продуктивности, т.е. возможности располагать достаточно достоверными исходными данными, точность измерений которых должна быть выше, чем тех параметров, которые получаются при использовании математической модели. В таких случаях эффективнее использовать математическую модель, более грубую по сравнению со стохастической, но более устойчивую по отношению к недостоверности исходных данных, т.е. в большей мере удовлетворяющую требованию робастости*.

В отличие от математической статистики, имеющей дело с результатами наблюдений случайных явлений, теория вероятностей формально-логически изучает закономерности случайных явлений и имеет дело с математическими моделями случайных явлений. Обработав результаты наблюдений, исследователь выдвигает ряд гипотез, предположений о том, что рассматриваемое явление можно описать той или иной вероятностной теоретической моделью. Далее, используя математико-статистические методы, можно дать ответ на вопрос, какую из гипотез или моделей следует принять. Именно эта модель и считается закономерностью изучаемого явления. Правомерен такой вывод или нет, покажет практика использования выбранной модели. Таков типичный путь математико-статистического исследования.

Математическая статистика, опираясь на вероятностные модели, в свою очередь влияет на развитие теории вероятностей. Окружающий нас мир многообразен, и задачи, возникающие при изучении тех или иных случайных явлений, при обработке результатов наблюдений над ними требует разработки новых вероятностных моделей, поэтому теория вероятностей и математическая статистика – две неразрывно связанные науки.

Лекция 3. Гуманитарная составляющая учебного курса «Теория вероятностей и математическая статистика»

Основная цель этой обзорной лекции: показать неразрывную связь математики с реальной жизнью через биографии известных своими математическими результатами людей, которые по жизни бы-

---

* Робастость – свойство устойчивости к помехам.

ли или государственными деятелями, или служителями церкви, или работниками, связанными с реальным производством, но прославились именно в математике.

Насколько это возможно, лектору следует показать, что математика не просто профессия, а образ мыслей, пример использования знаний на практике.

Математическая теория вероятностей появилась достаточно поздно, уже в XVII в. Определение вероятности как отношения числа благоприятных исходов к общему числу исходов, данное Лапласом, было сформулировано лишь в 1814 г. Длительное время господствовала идея о том, что случайные события непредсказуемы, не подчиняются никаким законам и, следовательно, их анализ неподвластен человеку. Кроме того, считалось, что случайность лежит в области божественного и имеет религиозный смысл.

Следует отметить, что на протяжении многих веков имеет место диалог естественно-научного и религиозного мировоззрений. Это естественный процесс, так как подлинный диалог всегда есть свобода мысли, раскованность суждений, интуиция; все собеседники прислушиваются к голосу совести, к правде целого. В результате (диалога) в обществе постоянно меняется отношение как к религии, так и науке.

Так, одной из причин падения религиозности (духовности, нравственности) в XVIII–XIX вв. было бурное развитие науки и техники. Открытие многих фундаментальных законов физики, химии, биологии позволили с их помощью объяснить многие процессы, происходящие в окружающем мире и, более того, прогнозировать последствия их развития. В результате многим, в том числе и учёным, стало казаться, что всё происходящее вокруг нас можно объяснить и без Божественного начала.

Однако после появления квантовой механики, когда оказалось, что события в микромире принципиально невозможно предсказать точно, опять зародились мысли о непредсказуемости будущего и господстве случайности в мире. Таким образом, развитие науки привело в определённой части общества не к отрицанию существования Бога, а, наоборот, к вере в него.

В большинстве своём люди верили, что событие любого рода определено волей Божьей. Случайностей в религиозном мировоззрении нет.

Недаром известному французскому писателю А. Дюма-отцу (1802 – 1870) вспоминают сказанную им фразу «Случайность – запасной фонд Господа Бога».

Лекция начинается с истории становления и развития такой необычной математической науки, как теория вероятностей и математическая статистика.

Между признанием главенства случайности или закономерности постоянно идёт спор. Кто-то считает, что случайность – частный случай закономерности, кто-то, что всем правит случай. По поводу последнего утверждения вспоминают реплику С. Е. Леца (1909 – 1966): «Знать бы ещё, кто правит случаем».

В противовес этому математическая теория говорит о том, что случайное явление можно изучить, предвидеть, предсказать, но для этого необходимо изучить наблюдаемые в нём закономерности.

Законы природы – это статистические истины. Вероятностный характер законов природы обусловлен не нашим незнанием подлинной природы вещей, а присущ природе «самой по себе».

В такой ситуации не кажется необычным, что вопросы теории вероятностей постоянно «союзничали» с вопросами веры; богословский контекст явно присутствует в появлении или развёртывании той или иной ветви в теории вероятностей и труды основоположников теории вероятностей признают существование Духа, творящего мировую гармонию.

Следует отметить, что появление теории вероятности было достаточно необычным. Научные открытия во все времена совершались самоотверженными учёными, которые стремились понять устройство мира и часто жертвовали собой ради блага всего человечества. Поводом же появления теории вероятностей стало желание людей, ведущих праздный образ жизни, определить стратегию выигрыша в азартных играх, которым они посвящали большую часть своего времени. Одним из первых трудов считается работа итальянского учёного Галилео Галилея (1564 – 1642) «Рассуждения об игре в кости», написанная примерно в 1618 г. по заказу некоторого аристократа. Он пытался определить наиболее вероятную сумму очков, выпадающую при броске трёх игральных костей.

Теория вероятности имеет глубокое проникновение в статистику: в результате появился самостоятельный раздел – математическая статистика.

Задачами статистики в прошлом были сбор и описание демографической ситуации и другой информации, представляющей интерес для государства. В XIX веке включение расчёта вероятностей в статистику значительно расширило спектр её возможностей. Страховые компании очень скоро начали использовать статистику смертности и теорию вероятностей, чтобы оценивать ожидаемую продолжительность жизни и точнее определять размеры страховых выплат.

Аналогичным образом при прогнозировании исходов выборов и определении степени уверенности в подобных программах стали использовать результаты предвыборных опросов и теорию вероятностей.

Большинство первых задач теории вероятностей было связано с азартными играми. Сегодня эти задачи не представляют никакой практической значимости, но с методической точки зрения – актуальны и полезны, так как позволяют избежать ошибок при построении вероятностных моделей и изучении вероятностных характеристик.

Дальнейший ход развития теории вероятностей обнаружил существование двух важных обстоятельств:

1. Для одной и той же задачи можно построить различные «вероятностные модели», и в каждой модели будут получены неодинаковые ответы на один и тот же вопрос. При этом необходимо ответить и на другой вопрос: какая из этих моделей справедлива (справедливее) с точки зрения теории вероятностей. Этим обусловлено то, что современные курсы теории вероятностей начинаются с построения «вероятностного пространства» или некоторой вероятностной модели, в рамках которой справедливы результаты исследования данной вероятностной задачи.
2. Случайные события и случайные процессы подчинены неким объективным законам, которые удаётся наблюдать только при достаточно большом количестве опытов. Эти законы такие же объективные, как известные законы физики и техники.

Среди учёных, которые занимались решением задач, связанных с азартными играми, можно отметить итальянцев Луку Пачоли (1454 – 1514), Дж. Кардано (1501 – 1575), Н. Тарталья (1500 – 1557) и французов Б. Паскаля (1623 – 1662) и П. Ферма (1601 – 1665).

Дальнейшее формирование основ теории вероятностей, её основных методов и теоретико-вероятностных понятий осуществлялось при исследовании частных задач и вопросов в практике статистики и страхования в работах англичан Джона Граунта (1620 – 1674), Вильяма Пети (1623 – 1687), Эдмунда Галлея (1656 – 1742), голландца Христиана Гюйгенса (1629 – 1695). При этом ни Граунт, ни Пети не пользовались теорией вероятностей, но понятия и методы, которые они применяли, по существу были тесно связаны с теорией вероятностей, а поставленные ими вопросы стимулировали развитие этой науки.

Новый этап в истории теории вероятностей начался с исследований Якоба Бернулли (1654 – 1705). Его основополагающие открытия были изложены в работе «Искусство предположений» (1713), где он доказывает первую предельную теорему (закон больших чисел), которая в дальнейшем послужит основой всех исследований о закономерностях появления случайных событий в массовых явлениях. Тем самым теория вероятностей получила важное практическое приложение и стала отдельной научной дисциплиной. Название новой науки впервые было предложено французом Блезом Паскалем (1623 – 1662), а в употребление вошло в 1718 г. в связи с изданием книги А. Муавра «Учение о случаях». Непосредственным развитием закона больших чисел Я. Бернулли являются предельные теоремы, доказанные А. Муавром (1667 – 1754). К основным заслугам А. Муавра в области теории вероятностей относят также вывод нормального закона распределения и разработку на основе азартных игр аналитического аппарата – теории возвратных последовательностей, которая была продолжена уроженцем Швейцарии Леонардом Эйлером (1707 – 1783) и французскими учёными Ж. Лагранжем (1736 – 1813) и П. С. Лапласом (1749 – 1827). В середине XVIII в. английский математик Т. Симпсон (1710 – 1761) в теории вероятностей исследовал дискретное треугольное распределение вероятностей, заложив основу теории ошибок.

«Классический» этап в развитии теории вероятностей завершается работами П. С. Лапласа. В 1810 году он доказал биномиальный закон распределения вероятностей; в 1812 г. П. С. Лаплас и в 1827 г. С. Д. Пуассон (1781 – 1840) доказали первые предельные теоремы теории вероятностей. В 1837 году С. Д. Пуассон сформулировал теорему, являющуюся частным случаем закона больших чисел (теорема Пуассона). В это же время получены также важные результаты в теории ошибок наблюдений, которые нашли широкие приложения в обработке результатов экспериментов. Но справедливости ради надо отметить, что в естествознании по-прежнему господствовали теории, порождаемые исследованием функциональных зависимостей, а не вероятностные.

Основные законы классической теории вероятностей были открыты в середине XIX-го в., но оставался главный вопрос, имеет ли эта наука практическое применение. То, что теория вероятностей – математическая наука с огромными приложениями в физике, химии, генетике, биологии, социологии, медицине, экономике стало ясно лишь в конце XIX и начале XX вв. благодаря усилиям русских учёных П. Л. Чебышева (1821 – 1894), А. А. Маркова (1856 – 1922), А. Н. Колмогорова (1903 – 1987).

Чебышев П. Л. ввёл в рассмотрение случайную величину, вывел закон распределения больших чисел (1852), предложил простое и общее доказательство закона больших чисел (1867), доказал центральную предельную теорему теории вероятности (1887).

Колмогоров А. Н. сформулировал необходимые и достаточные условия применимости закона больших чисел (1926), создал аксиоматику теории вероятностей на основе теоретико-множественных представлений (1933). Аксиоматический подход позволил распространить методы равновозможных на произвольные события и в ряде случаев объяснить, каким образом можно получить разные ответы одной и той же задачи.

Начало XX в. ознаменовалось бурным развитием одного из основных объектов теории вероятностей – случайных процессов и их вероятностных характеристик. В результате дальнейшего изучения реальных процессов, но во времени, многие учёные, в том числе физики, биологи, инженеры и другие, подошли к весьма важной проблеме. Теория вероятностей предлагала им в качестве математического аппарата лишь средства, изучавшие стационарные состояния. Необходима же была теория, которая изучала случайные величины, зависящие от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров.

Начало общей теории случайных процессов было положено работами советских математиков: А. Н. Колмогоровым (1903 – 1987), А. Я. Хинчиным (1894 – 1959), Е. Е. Слуцким (1880 – 1948) и американским учёным Н. Винером (1894 – 1964).

Колмогоровым А. Н. было дано систематическое и строгое построение теории стохастических процессов без последствий. В работах А. Я. Хинчина была создана теория стационарных процессов. Винер Н. при изучении броуновского движения ввёл в рассмотрение процесс, названный его именем. Работы Е. Е. Слуцкого посвящены изучению теории случайных функций.

Следует отметить, что некоторые теоремы теории вероятностей весьма необычны по сравнению с утверждениями других математических дисциплин: можно сказать, что теория вероятностей содержит утверждения, справедливые с некоторой вероятностью (от 0 до 1). В то время как другие математические дисциплины содержат утверждения, справедливые с вероятностью или 0, или 1. Поэтому специалисты по теории вероятностей шутят, что математика – это только часть теории вероятностей.

Сегодня теория вероятностей продолжает бурно развиваться, в ней появляются новые направления исследований, которые представляют значительный общетеоретический и прикладной интерес. Вопрос изучения случайностей предстаёт как завещание целой эпохи. Его решение является и исходной точной, и перспективной – задачей для будущих поколений.

Математическая статистика занимается разработкой методов обработки результатов наблюдений и получения из них обоснованных статистических выводов. Рождение математической статистики относится ко второй половине XVIII в., когда начались систематические исследования, относящиеся к проблемам народонаселения. В XVIII веке к задачам демографии присоединились вопросы, связанные с обработкой результатов измерений и с построением теории погрешностей измерений. Затем к ним добавились задачи биологии, задачи обработки результатов стрельбы по определённой цели. В XX веке многочисленные задачи математической статистики начали разрабатываться в связи с проблемами сельского хозяйства, телефонного дела, промышленности, социальных исследований и пр.

В результате появилась обширная область математики, тесно связанная как с естествознанием, так и с техникой, а также со всем спектром социальных дисциплин. В науке же образовались ветви, имеющие приставку «статистическая», например статистическая физика, статистическая гидродинамика, статистическая лингвистика и др. Математическая статистика превратилась за последние десятилетия в одно из самых распространённых и универсальных орудий прикладных исследований. Естественно, что это обстоятельство вызвало бурный рост теоретических исследований в самой математической статистике.

Первые начала математической статистики можно найти уже в сочинениях создателей теории вероятностей: швейцарского математика Я. Бернулли (1654 – 1705), французских математиков П. Лапласа (1749 – 1827) и С. Пуассона (1781 – 1840). В России методы математической статистики в применении к демографии и страховому делу развивал на основе теории вероятностей В. Я. Буняковский (1804 – 1889). Решающее значение для всего дальнейшего развития математической статистики имели работы русской классической школы теории вероятностей второй половины XIX – начала XX вв. (П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, С. Н. Бернштейн). Многие вопросы теории статистических оценок были по существу разработаны на основе теории ошибок и метода наименьших квадратов (немецкий математик К. Гаусс (1777 – 1855) и русский математик А. А. Марков (1856 – 1922)). Работы бельгийского математика А. Кетле (1796 – 1874), английских математиков Френсиса Гальтона (1822 – 1911) и Карла Пирсона (1857 – 1936), направленные на исследования в социальных и биологических науках, также использовали достижения теории вероятностей. В создании теории малых выборок, общей теории статистических оценок и проверки гипотез, последовательного анализа весьма значительна роль более молодых представителей англо-американской школы (Стьюдент (псевдоним У. Госсета), Р. Фишер, Э. Пирсон (Англия), Ю. Нейман, А. Вальд (США)), деятельность которых началась в 1920-е г. В СССР значительные результаты в области математической статистики получены В. И. Романовским (1879 – 1954), Е. Е. Слуцким (1880 – 1948), Н. В. Смирновым (1900 – 1966). Особенно интенсивно разрабатываются статистические методы исследования и контроля массового производства, статистические методы в области гидрологии, климатологии, звёздной астрономии и др.

Используя исторические данные о развитии теории вероятностей и математической статистики, можно включать их в процесс преподавания, раскрывая закономерности развития математики и её философских проблем. Все великие математики не обходили эту тематику. Достаточно вспомнить высказывание о роли истории в науке немецкого математика Готфрида Лейбница (1646 – 1716): «Весьма полезно познать истинное происхождение замечательных открытий, особенно таких, которые были сделаны не случайно, а силою мысли. Это приносит пользу не только тем, что воздаёт каждому своё и пробуждает других добиваться таких же похвал, сколько тем, что познание метода на выдающихся примерах ведёт к развитию искусства открытия» [7].

Среди математиков, занимавшихся историей своей науки, можно выделить П. Лапласа, который написал книгу «Опыт философии теории вероятностей» (М., 1908; пер. под ред. А. К. Власова), Анри Пуанкаре (1854 – 1917), который написал четыре интереснейшие книги, в которых он затрагивает глубокие философские вопросы математики (А. Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1983). Колмогоров А. Н. написал большую статью для Большой Советской Энциклопедии, представляющей собой глубокое историко-математическое и философское произведение (БСЭ. 1954. Т. 26. С. 464 – 483). Ряд талантливых математиков, проявивших, в первую очередь, себя как математики, увлеклись историей математики и превратили историко-математические исследования в дело всей своей жизни. Группа французских математиков, известных под псевдонимом Никола Бурбаки, создала книгу «Очерки по истории математики» (М., 1963. ил.).

Выделяют несколько причин [7], в силу которых история математики заслуживает систематической разработки. А именно, она:

1) даёт нам широкую картину развития самой математики – возникновению её понятий и проблем, связей с практикой, стремление к общности и завершённости научных положений;

2) является частью всеобщей истории и рассказывает о том, как человечество самим ходом событий было вынуждено развивать математику и использовать её выводы;

3) является одним из условий современного развития математики;

4) является одним из важнейших источников процесса мышления;

5) служит совершенствованию преподавания математики;

6) является частью общечеловеческой культуры.

К сожалению, значение истории науки для современного развития самой науки значительно принижается. Более того, существует мнение, что занятия историей науки не полезны, а вредны для прогресса науки, поскольку они отнимают энергию, силу и время на изучение того, что устарело и уже не имеет реального значения в наши дни, что история науки необходима для изучения истории общественного развития, для философии и общего образования, а сама наука самостоятельно и непрерывно движется вперёд. Такое мнение отодвигает на задний план то, что не только общественное развитие обусловливает прогресс точных наук, но и само общественное развитие в значительной мере зависит от состояния точных наук.

Следует отметить, что задача истории математики не сводится к изложению биографий знаменитых математиков, она не сводится и к только старательному описанию пройденного математикой пути. Важнейшее место в ней занимает осмысление этого пути. К тому же история математики (как и любой другой науки) является живым организмом, со временем изменяет своё содержание и по новому подходит к своим задачам.

Если в XVIII в. основное содержание истории математики сводилось к описательной части, то теперь собирание фактов и их описание является лишь первым шагом. Основное же содержание истории математики – в выяснении причин появления тех ли иных руководящих идей, направлений исследований, в формулировке закономерностей развития математики. Естественно, что в таком плане историей математики могут успешно заниматься лишь те лица, которые сами близки к математическому творчеству. Более того, каждому математику-исследователю приходится в какой-то мере приобщаться к историко-математическим изысканиям, поскольку для собственной успешной работы он должен выяснить, а что же было сделано с предшественниками. Как говорил великий английский учёный И. Ньютон: «Если я увидел больше других, то только потому, что стоял на плечах гигантов».

Знание прошлого науки позволяет в концентрированном виде получить сведения об истоках идей и фактов, о формировании научных понятий. Во многих случаях подлинный смысл открытия выясняется лишь на дальнейших этапах развития науки.

Кроме того, методологические проблемы математики не могут быть решены вне связи с её историей. Каковы источники новых направлений математической мысли, как возникали и развивались математические понятия, почему результаты математики находят применение к самым различным областям практической деятельности – такие вопросы возникают постоянно, но ответ на них требует привлечения данных истории науки.

История науки может и должна вводить обучающихся в творческую лабораторию учёного и показывать, как постепенно возникают формулировки результатов и идеи доказательств. На примерах прошлого следует учить молодёжь страсти к поиску нового, к творчеству, научной честности. Такое воспитание может натолкнуть обучающихся на выбор научной карьеры, приучит к упорной работе, непрестанному поиску пути, который максимально соответствовал бы стоящей перед ними проблеме.

Изучившему курс «Теория вероятностей и математическая статистика» на итоговых занятиях необходимо напомнить о трёх основных понятиях теории вероятностей в последовательности их появления.

Бернулли Я. «Искусство предположений» (О законе больших чисел. М.: Наука, 1986) – первое определение вероятности.

Английские исследователи Д. Граунт (1620 – 1675) и В. Пети (1623 – 1687) создали новое направление исследования – элементы демографии и математической статистики, названное политической арифметикой, и ввели понятие частоты – важнейшее понятие математической статистики, которое явилось для Я. Бернулли прообразом его определения классической вероятности.

Понятие случайной величины впервые появилось в 1832 г. как математическое понятие, отвлечённое от физической природы рассматриваемых объектов. Сделал это французский математик С. Пуассон (1781 – 1840) в монографии «О вероятности средних результатов наблюдений». Фактически же понятие случайной величины, но всегда привязанное к конкретным объектам – числу проигранных партий, числу появления событий A в n испытаниях, ошибкам измерений, отклонению снаряда от цели и т.д., – было объектом исследования многих учёных с самого начала XVIII в. Следует отметить, что это скорее правило, чем исключение: необходимость абстрактного понятия вынашивается долгие годы, прежде чем приходит мысль о необходимости его отделения от конкретного случая.

Третье основное понятие теории вероятностей – случайный процесс – было введено в строгой форме в 1930-е гг. А. Н. Колмогоровым (1903 – 1987), А. Я. Хинчиным (1894 – 1959) и французским математиком П. Леви (1886 – 1971). Однако первичные рассмотрения, которые явились не чем иным, как изучением частных задач на случайные процессы, относятся ещё к XVIII в.

При создании теории случайных процессов решающее значение сыграли задачи физики, биологии и инженерного дела. Работы А. Эйнштейна (1879 – 1955) и М. Смолуховского (польский физик и математик (1872 – 1917)) содержат первые идеи случайных процессов – изучение изменения численности броуновских частиц, попадающих в поле зрения в зависимости от времени. Точно так же вопросы динамики популяций являются не чем иным, как изучением численности популяции в зависимости от времени. Наконец, работы датчанина А. К. Эрланга (1878 – 1929) по телефонным сообщениям, приведшие к построению современной теории массового обслуживания, потребовали широкого использования теории случайных процессов. Уже в 1914 г. были рассмотрены простейшие задачи теории диффузии с позиций случайных процессов, несмотря на то что самой теории тогда ещё не существовало.

В работе 1931 г. «Аналитические методы теории вероятностей» А. Н. Колмогоров ввёл понятие Марковского случайного процесса и вывел дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют переходные вероятности этих процессов.

Когда появились ответы на первоначальные вопросы истории теории вероятностей, возникли новые вопросы, вполне естественные, но не возникавшие раньше. Например, кто ввёл в рассмотрение такие фундаментальные понятия теории вероятностей, как независимость и несовместимость; когда и кем были выделены в качестве основных положений теории вероятностей теоремы сложения и умножения, а также формула полной вероятности? Оказалось, что все они являются приобретениями XVIII столетия. В 1718 году А. де Муавр ввёл понятие независимости и сформулировал теорему умножения вероятностей. В 1763 году Т. Байес (1702 – 1763) опубликовал свою единственную работу по теории вероятностей, в которой было введено понятие несовместимости событий и отчётливо сформулирована теорема сложения в качестве принципа теории. В 1795 году П. Лаплас сформулировал в качестве центрального положения теории вероятностей формулу полной вероятности. В то же время следует отметить, что до того, как эти принципы были выделены и на них было обращено внимание как на основные положения, позволяющие оперировать с вероятностями, они фактически уже использовались, и притом с большим искусством в самом начале XVIII в. Я. Бернулли и его племянником Н. Бернулли, а также П. Монмором (настоящая фамилия Ремон) (1678 – 1719).

Подводя итоги развития теории вероятностей, отметим её применение в различных областях.

1. Астрономия.

Именно для использования в астрономии был разработан знаменитый «метод наименьших квадратов» (Лежандр, 1805; Гаусс, 1815). Главной задачей, для решения которой он был первоначально использован, стал расчёт орбит комет, который приходилось производить по малому числу наблюдений. Ясно, что надёжное определение типа орбиты (эллипс или гипербола) и точный расчёт её параметров оказывается трудным, так как орбита наблюдается лишь на небольшом участке. Метод оказался эффективным, универсальным и вызвал бурные споры о приоритете. Его стали использовать в геодезии и картографии. Сейчас, когда искусство ручных расчетов утрачено, трудно представить, что при составлении карт мирового океана в 1880-х гг. в Англии методом наименьших квадратов была численно решена система, состоящая из примерно 6000 уравнений с несколькими сотнями неизвестных.

2. Физика.

Во второй половине XXI в. в работах Максвелла, Больцмана и Гиббса была развита статистическая механика, которая описывала состояние разряженных систем, содержащих огромное число частиц (порядка числа Авогадро). Если раньше понятие распределения случайной величины было преимущественно связано с распределением ошибок измерения, то теперь распределёнными оказались самые разные величины – скорости, энергии, длины свободного пробега.

3. Биометрия.

В 1870 – 1900 годах бельгиец Кетле и англичане Френсис Гальтон и Карл Пирсон основали новое научное направление – биометрию, в которой впервые стала систематически и количественно изучаться неопределённая изменчивость живых организмов и наследование количественных признаков. В научный оборот были введены новые понятия – регрессии и корреляции.

Итак, вплоть до начала XX в. основные приложения теории вероятности были связаны с научными исследованиями. Внедрение в практику – сельское хозяйство, промышленность, медицину произошло в XX в.

4. Сельское хозяйство.

В начале XX в. в Англии была поставлена задача количественного сравнения эффективности различных методов ведения сельского хозяйства. Для решения этой задачи была развита теория планирования экспериментов, дисперсионный анализ. Основная заслуга в развитии этого уже чисто практического использования статистики принадлежит сэру Рональду Фишеру, астроному по образованию, а в дальнейшем фермеру, статистику, генетику, президенту английского Королевского общества. Современная математическая статистика, пригодная для широкого применения в практике, была развита в Англии (Карл Пирсон, Стьюдент, Фишер). Стьюдент впервые решил задачу оценки неизвестного параметра распределения без использования байесовского подхода.

5. Промышленность.

Введение методов статистического контроля на производстве (контрольные карты Шухарта). Сокращение необходимого количества испытаний качества продукции. Математические методы оказываются уже настолько важными, что их стали засекречивать. Так, книга с описанием новой методики, позволявшей сократить количество испытаний («Последовательный анализ» Вальда), была издана только после окончания Второй мировой войны в 1947 г.

6. Медицина.

Широкое применение статистических методов в медицине началось сравнительно недавно (вторая половина XX в.). Развитие эффективных методов лечения (антибиотики, инсулин, эффективная анестезия, искусственное кровообращение) потребовало достоверных методов оценки их эффективности. Возникло новое понятие «Доказательная медицина». Начал развиваться более формальный, количественный подход к терапии многих заболеваний – введение протоколов, guide lines.

С середины 1980-х гг. возник новый и важнейший фактор, революционизировавший все приложения теории вероятностей – возможность широкого использования быстрых и доступных компьютеров. Почувствовать всю громадность произошедшего переворота можно, если учесть, что один современный персональный компьютер превосходит по быстродействию и памяти все компьютеры СССР и США, имевшиеся к 1968 г., времени, когда уже были осуществлены проекты, связанные со строительством атомных электростанций, полётами на Луну, созданием термоядерной бомбы. Сейчас методом прямого экспериментирования можно получать результаты, которые ранее были недоступны – thinking of unthinkable.

7. Биоинформатика.

Начиная с 1980-х гг. количество известных последовательностей белков и нуклеиновых кислот стремительно возрастает. Объём накопленной информации таков, что только компьютерный анализ этих данных может решать задачи по извлечению информации.

8. Экономика и банковское дело.

Широкое применение имеет теория риска. Теория риска есть теория принятия решений в условиях вероятностной неопределённости. С математической точки зрения она является разделом теории вероятностей, а приложения теории риска практически безграничны. Наиболее продвинута финансовая область приложений: банковское дело и страхование, управление рыночными и кредитными рисками, инвестициями, бизнес-рисками, телекоммуникациям. Развиваются и нефинансовые приложения, связанные с угрозами здоровью, окружающей среде, рисками аварий и экологических катастроф, и другими направлениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Образовательная система всегда строилась так, чтобы быть адекватной потребностям данного исторического периода. Учебная дисциплина «Математика» также часто изменяла своё содержательное наполнение, чтобы соответствовать эпохе, выступая и как наука, и универсальный язык, и как культурный феномен. Математика, в широком смысле, математика для всех – это искусство логически правильно мыслить, владеть пространственными формами, делать правдоподобные оценки. Вузовская математика – это дисциплина, позволяющая человеку адекватно ориентироваться в окружающем мире.

Наиболее значимо это качество проявляется в системе политехнического образования.

В настоящее время, время постоянных и быстрых перемен велика роль оценки последствий случайных явлений практически во всех сферах человеческой жизни.

При наличии таких условий существует острая необходимость формирования у студентов вузов вероятностного стиля мышления, способностей анализировать многофакторные явления, выделять наиболее значимые факторы, проектировать соответствующие действия. Учебным курсом, способствующим в наибольшей степени формированию таких качеств, является дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика», преподавание и изучение которой должно перейти на более качественный уровень: обучаемые должны видеть в этом курсе не просто интересные игровые задачки, а механизм решения возникающих проблем. С этой целью необходимо более глубоко взглянуть на сущность основных положений этой дисциплины, историю развития науки «Теория вероятностей» и её использования в математической статистике, изменить методику преподавания, ориентировав её на изучение философии математики, развитие логического мышления, умений и навыков построения и анализа математических моделей стохастических процессов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Применение** математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра. 4.2. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / Н. П. Пучков, Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова и др. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 64 с.
2. **Пучков, Н. П.** Математическая статистика. Применение в профессиональной деятельности : учебное пособие / Н. П. Пучков. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 80 с.
3. **Дворяткина, С. Н.** Развитие вероятностного стиля мышления в процессе обучения математике: теория и практика : монография / С. Н. Дворяткина. – М. : ИНФРА-М, 2013. – 272 с.
4. **Дворяткина, С. Н.** Лекции по классической теории вероятностей / С. Н. Дворяткина, Л. Н. Ляхов. – М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 176 с.
5. **Дворяткина, С. Н.** Лабораторный практикум по математической статистике на базе ТП Microsoft Office / С. Н. Дворяткина. – Елец : ЕГУ им. И. А. Бунина, 2007. – 128 с.
6. **Гиндикин, С. Г.** Рассказы о физиках и математиках / С. Г. Гиндикин. – М. : Наука, 1981. – 192 с.
7. **Гнеденко, Б. В.** Введение в специальность математика / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1991. – 240 с.
8. **Солодовников, А. С.** Теория вероятностей / А. С. Солодовников. – М. : Просвещение, 1978. – 192 с.
9. **Боголюбов, А. Н.** Математики и механики. Биографический справочник / А. Н. Боголюбов. – Киев : Наукова думка, 1983. – 640 с.
10. **Арнольд, В. И.** Математика и математическое образование в современном мире // Математика в образовании и воспитании : сборник ; сост. В. Б. Филиппов. – М. : ФАЗИС, 2000.
11. **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей : учебник для вузов / Е. С. Вентцель. – 6-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 1999. – 576 с.
12. **Пойа, Д.** Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа ; пер. с англ. – 2-е изд. испр. – М. : Глав. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 464 с.
13. **Кудрявцев, Л. Д.** Мысли о современной математике и её изучении / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Наука, 1977. – 112 с.
14. **Гнеденко, Б. В.** Математическое образование в вузах : учебн.-метод. пособие / Б. В. Гнеденко. – М. : Высшая школа, 198. – 174 с.
15. http//slovari.bibliofond.ru/pedagogical_dictionary_word/

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчарова. – М. : Наука, 1988.

2. **Смирнов, Н. В.** Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений / Н. В. Смирнов, И. В. Дунин-Борковский. – М. : Наука, 1969.

3. **Экономико-математические методы** и прикладные модели / под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 1999.

4. **Хальд, А.** Математическая статистика с техническими приложениями / А. Хальд. – 1956.

5. **Леман, Э.** Проверка статистических гипотез / Э. Леман. – М. : Наука, 1964.

6. **Феллер, В.** Введение в теорию вероятностей и её приложения / В. Феллер. – М. : Мир, 1967. – Т. 1.

7. **Сборник** тестов по «Курсу математики для технических высших учебных заведений» / под ред. В. Б. Миноносцева и Е. А. Пушкаря. – М. : МГИУ, 2011. – Ч. II.

ПРИЛОЖЕНИЕ

УЧЁНЫЕ-МАТЕМАТИКИ, УПОМИНАЕМЫЕ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Как отмечалось во введении, при решении задачи гуманитаризации математического образования целесообразно знакомить обучаемых с биографиями учёных-математиков, внесших заметный вклад в теорию и практику изучаемой дисциплины. Далее в алфавитном порядке приводятся сведения о таких учёных, включающие их краткие биографии и заслуги [6, 9].

Байес Томас (1702 – 1761) – английский математик и пресвитерианский священник. В своей жизни опубликовал две работы, одна богословская и одна математическая. Сформулировал и решил одну из основных задач теории вероятностей. Формула Байеса даёт возможность оценить вероятность события эмпирическим путём при условии, что произошло другое статистически взаимозависимое с ним событие. Эта формула позволяет «переставить причину и следствие»: по известному факту события вычислить вероятность того, что оно было вызвано данной причиной. Томас Байес установил зависимость между априорными и апостериорными вероятностями событий.

Формула Байеса сегодня имеет сильнейшее влияние на разработки компаний, создающих программное обеспечение, позволяет более точно пересчитать вероятность, учитывая как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений.

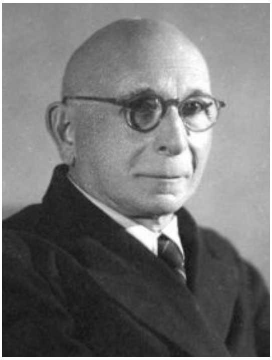
Бернулли – семья швейцарских учёных. Наиболее известны восемь из них. Родоначальник семейства – Якоб Бернулли (умер в 1583 г.) – выходец из Голландии. Последний из известных Бернулли Иоганн III (1744 – 1807).

Бернулли Якоб I (1655 – 1705). Наиболее важны заслуги в развитии анализа бесконечно малых, теории рядов, вариационном исчислении и теории вероятностей. В теории вероятностей доказал так называемую теорему Бернулли – частный случай закона больших чисел, имеющего важное значение в приложениях теории вероятностей к статистике. Благодаря трудам Я. Бернулли теория вероятностей из науки, началом которой были рассуждения об азартных играх, стала важнейшим математическим предметом. В учебном курсе упоминаются формула Бернулли и распределение Бернулли. Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений – сложения и умножения вероятностей при достаточно большом количестве испытаний.

Распределение Бернулли (Якоба I) в теории вероятностей и математической статистике – дискретное распределение вероятностей, моделирующее случайный эксперимент произвольной природы при заранее известной вероятности успеха или неудачи.

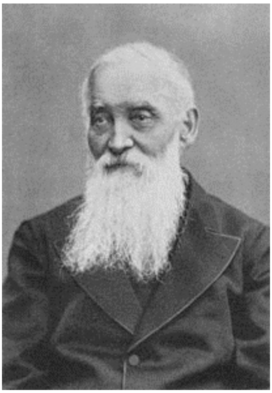
Практически в тридцатилетнем возрасте Я. Бернулли достиг таких успехов, что был утверждён в должности профессора математики в Базельском университете (Швейцария). С этого года семья Бернулли будет занимать эту кафедру в течение 100 лет, а профессорами этого университета будут в течение четверти тысячелетия.

Бернулли Даниил (1700 – 1782) – один из наиболее выдающихся физиков и математиков своего времени. В теории вероятностей впервые применил исчисление бесконечно малых, применил теорию вероятностей к статистике народонаселения; впервые ввёл в теорию ошибок нормальное распределение и разделил погрешности наблюдений на случайные и систематические; опубликовал первую таблицу нормального распределения.



Бернштейн Сергей Натанович (1880 – 1968) – советский математик, разрешивший 19-ю проблему Гильберта (1904). В теории вероятностей С. Н. Бернштейном была предложена первая (1917) аксиоматика, продолжены и завершены исследования Чебышева–Маркова по предельным теоремам; разработана теория слабозависимых случайных величин; исследованы стохастические дифференциальные уравнения и указан ряд применений вероятностных методов в физике, статистике и биологии.

Бернштейн С. Н. в 1907 – 1933 гг. преподавал в Харьковском университете: с 1924 г. – член-корреспондент АН СССР, с 1929 г. – академик. В 1942 году ему присуждена Сталинская премия; имел два Ордена Ленина и один – Трудового Красного Знамени. В 1933 – 1941 годах – профессор Ленинградского университета, позже – сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова. В 1948 году вышел его фундаментальный труд «Теория вероятностей».



Буняковский Виктор Яковлевич (1804 – 1889) – русский математик, педагог, историк математики, вице-президент академии наук в 1864 – 1889 гг.

Родился 3 декабря 1804 г. в г. Баре Подольской губернии, где его отец был армейским подполковником (погиб в 1809 г.). Первоначально получил домашнее образование, затем получил возможность учиться за границей: в Париже, Лозанне, где слушал лекции великих учёных Лапласа, Пуассона, Фурье, Коши, Ампера, Лежандра по математике. Больше всех работал у Коши.

В 1824 году В. Я. Буняковский получил степень бакалавра, в 1825 г. стал доктором физико-математических наук; получив хорошее образование, в 1826 г. переехал в Петербург, где занялся педагогической деятельностью в военных учебных заведениях и Санкт-Петербургском университете.

Учебно-литературная деятельность Буняковского выразилась в более чем 100 научных трудах; больше всего работ по теории чисел и теории вероятностей. Он автор первого курса теории вероятностей на русском языке, создатель современной русской терминологии в теории вероятностей, автор оригинальных исследований в области статистики и демографии. Он воспитал великого русского математика П. Л. Чебышева (1821 – 1894).

В 1846 году появился труд Буняковского, послуживший началом его всемирной известности, – «Основание математической теории вероятностей». Этот обширный трактат кроме теории включал в себя и историю возникновения и развития теории вероятностей, в нём впервые сведено вместе всё то, что было выработано по этой теории трудами известных математиков, начиная с Паскаля и Ферма, даны объяснения относительно новых решений самых трудных и запутанных вопросов, указано много практических приложений теории вероятностей, например, к вопросу о средней продолжительности жизни людей различных возрастов, к определению достоверных свидетельств и преданий, к вспомогательным кассам и страховым учреждениям, к определению погрешностей при наблюдениях, к вопросам судебного дела, к вычислению вероятностей потерь в войске и т.д.

Все работы В. Я. Буняковского помимо ценности в научном отношении – по богатству, новизне и оригинальной разработке научно-математических материалов – отличаются ясностью и изяществом изложения. Многие из них переведены на иностранные языки.

Вентцель Елена Сергеевна (литературный псевдоним И. Грекова, очевидно от слова «игрек») (1907 – 2002) – советский математик, автор учебников по теории вероятностей.

Родилась в г. Ревеле (Таллинн) в семье преподавателя математики, который стал заниматься с дочерью с 7 лет высшей математикой.

В 1923 году поступила на математический факультет Петроградского университета, одним из её любимых преподавателей был известный автор учебников по математическому анализу Г. М. Фихтенгольц. На преподавательской работе с 1935 г. (Военно-воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского), в 1959 г. перешла на работу в МИИТ, доктор технических наук (1954), профессор (1955). Автор 10 фундаментальных учебников по теории вероятностей.

На примере Е. С. Вентцель можно демонстрировать единство математики и литературы. С 1962 года публикует художественные произведения, с 1967 г. – член союза писателей. Литературное творчество: три рассказа, семь повестей и два романа. Известные повести «Кафедра», «Вдовий пароход», «Хозяйка гостиницы» экранизированы.

Её муж – д-р техн. наук, профессор Д. А. Вентцель – заведующий кафедрой в военном институте, двое из троих детей – преподаватели математики в МГУ.

Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855) – немецкий математик. Родился в г. Брауншвейге в бедной семье. В 1798 году окончил Гёттингенский университет. Большую часть своей жизни работал в этом университете заведующим кафедрой математики и астрономии, кроме того заведовал Гёттингенской астрономической обсерваторией. Гаусс К. Ф. остался в памяти, во-первых, как учёный, исследования которого отличались глубокой органической связью между теоретической и прикладной математикой, во-вторых, у него был необычайно широкий охват творчества. Существует «кулуарное» мнение, что он был последним математиком, который знал всю математику. Кроме того, известны его работы (и результаты) по теории притяжения, классической теории электричества и магнетизма, геодезии, целых отраслей теоретической астрономии.

В теории вероятностей известно «распределение Гаусса» или нормальное распределение – закон распределения вероятностей случайной величины.

Нормальное (гауссовское) распределение случайного процесса обладает следующими ценными свойствами:

1. Значительное количество случайных процессов в природе подчиняются нормальному закону распределения.

2. Возможно достаточно строго определить (доказать) нормальный характер случайного процесса.

3. При воздействии на физическую систему совокупности случайных факторов с различными законами распределения их суммарный эффект подчиняется нормальному закону распределения.

4. Гауссовский случайный процесс может быть полностью описан с помощью двух характеристик – математического ожидания и дисперсии.

5. При прохождении через линейную систему нормальный процесс сохраняет свои свойства в отличии от других случайных процессов.

Лаплас Пьер Симон (1749 – 1827) – французский математик, физик и астроном. Учился в школе монашеского ордена бенедиктинцев. В совершенстве изучил древние языки, литературу и искусство, изучал также математику и астрономию.

Научная деятельность была чрезвычайно многообразной. В частности, он развил и систематизировал результаты, полученные Б. Паскалем, П. Ферма, Я. Бернулли и другими математиками в вопросах теории вероятностей, усовершенствовал методы доказательства; доказал важную предельную теорему, которая называется теоремой Лапласа–Муавра. Теория вероятностей в значительной степени сформировалась именно в работах Лапласа и обобщена в его книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812).

Заслуживает внимания и общественная деятельность Лапласа: в период Французской революции он принял самое деятельное участие в реорганизации системы высшего образования во Франции, в создании Нормальной и Политехнической школ. После прихода к власти Наполеона был назначен министром иностранных дел. Однако вскоре отстранён, так как по словам Наполеона Лаплас внёс в работу дух «бесконечно малых», т.е. мелочность. Тем не менее он был членом сената, его вице-председателем, получил титул графа. После реставрации Бурбонов получил пэрство и титул маркиза. Его имя внесено в список величайших учёных Франции, помещённый на первом этаже Эйфелевой башни.

Лаплас был приверженцем абсолютного детерминизма. Он постулировал, что если бы какое-нибудь разумное существо смогло узнать положения и скорости всех частиц в мире в некоторый момент, оно могло бы совершенно точно предсказать все мировые события. Такое гипотетическое существо впоследствии было названо демоном Лапласа.

Ляпунов Александр Михайлович (1857 – 1918) – русский математик и механик, член многих мировых академий.

Ляпунов А. М. родился в семье известного астронома М. В. Ляпунова. Первоначальное воспитание получил в семье. В 1876 году А. М. Ляпунов поступил на отделение естественных наук физико-математического факультета Петербургского университета, затем перешёл на математическое отделение.

Лекции и консультации П. Л. Чебышева, ставшего учителем Ляпунова, во многом определили характер всей его последующей научной и преподавательской деятельности. В 1885 году А. М. Ляпунов успешно защитил магистерскую диссертацию и был утверждён в звании приват-доцента. Позже он переехал в г. Харьков и возглавил кафедру механики. По воспоминаниям студентов, лекции Ляпунова отличались простотой и общностью изложения, безукоризненной строгостью изящных оригинальных доказательств. На лекциях и так называемых совещательных часах он стремился пробудить у студентов интерес к науке, тягу к знаниям, самостоятельность в работе.

Научные заслуги А. М. Ляпунова признаны во всём мире. Важнейшим является создание современной теории устойчивости движения и равновесия механических систем, определяемых конечным числом параметров. В теории вероятностей он развил метод характеристических функций, дал доказательство в весьма широких условиях центральной предельной теоремы.

Имя Ляпунова носят многие математические и физические объекты: центральная предельная теорема Ляпунова, экспонента Ляпунова, фрактал Ляпунова, функция Ляпунова, устойчивость по Ляпунову, время Ляпунова, поверхность Ляпунова, теорема Ляпунова, условие Ляпунова. Его имя носит одна из улиц г. Москвы.

Колмогоров Андрей Николаевич (1903 – 1987) – русский советский математик, один из крупнейших математиков XX в., один из основоположников современной теории вероятностей. Родился в г. Тамбове, где его мать задержалась по пути из Крыма домой в Ярославль.

В 1925 году окончил Московский университет, с 1931 г. – профессор того же университета, с 1935 г. – доктор физико-математических наук. С 1933 по 1939 годы был директором Института математики и механики МГУ.

Колмогоров А. Н. успешно занимался различными проблемами математики. Важные работы относятся к теории вероятностей, где он начал применять методы теории функций действительного переменного, что позволило решить ряд трудных проблем и построить широко известную систему аксиоматического обоснования теории вероятностей.

Имя Колмогорова встречается в различных отраслях математики: так, в теории вероятностей – неравенство и уравнение Колмогорова, в математической статистике – критерий Колмогорова. Учёный создал большую школу в области теории функций и теории вероятностей, являлся членом многих иностранных академий, награждён восьмью орденами и многими медалями, лауреат шести престижных премий.

Среди его учеников – 21 академик и член-корреспондент академии наук, 54 доктора и кандидата физико-математических наук.

Андрей Николаевич до конца своих дней считал теорию вероятностей главной своей специальностью, хотя областей математики, в которых он работал, можно насчитать два десятка.

Марков Андрей Андреевич (старший) (1856 – 1922) – русский математик, внёсший большой вклад в теорию вероятностей, математический анализ и теорию чисел.

Марков А. А. является первооткрывателем обширного класса стохастических процессов с дискретной и непрерывной временной компонентой, названных его именем. В то время, когда теория Марковских процессов была построена, она считалась абстрактной, однако в настоящее время практические применения данной теории чрезвычайно многочисленны. Марков А. А. существенно продвинул классические исследования предшественников, касающихся закона больших чисел и центральной предельной теоремы теории вероятностей.

Марков А. А. был сильным шахматистом. Он много и с успехом играл по переписке, занимался шахматной композицией, был другом и спарринг-партнёром М. И. Чигорина. Друзья оценивали его игру, как игру мастера спорта.

Муавр де Абрахам (1667 – 1754) – английский математик французского происхождения. В теории вероятностей доказал важную теорему, названную его именем. Ещё в годы учёбы познакомился с теорией вероятностей по трудам Гюйгенса. В 1718 году публикует свой главный труд по теории вероятностей: «Доктрина шансов: метод расчёта вероятностей событий в игре». Муавр доказал частный случай теоремы Лапласа. Провёл вероятностное исследование азартных игр и ряда статистических данных по народонаселению.

По легенде Муавр точно предсказал день своей смерти. Обнаружив, что продолжительность сна стала увеличиваться в арифметической прогрессии, он легко вычислил, когда она достигнет 24 часов, и, как всегда, не ошибся.

Паскаль Блез (1623 – 1662). В историю естествознания Б. Паскаль вошёл как великий физик и математик, один из создателей математического анализа, проективной геометрии, теории вероятностей, вычислительной техники, гидростатики. Франция чтит в Паскале одного из самых замечательных писателей: «Тонкие умы удивляются Паскалю как писателю самому совершенному в величайший век французского языка…. Каждая строка, вышедшая из под его пера, почитается как драгоценный камень» (Жозеф Бертран) [6]. Даже через 250 лет после смерти Паскаля великий русский писатель Л. Н. Толстой читая «чу‘дного Паскаля», «человека великого ума и великого сердца» и «не мог умилиться до слёз, читая его и сознавая своё полное единение с этим умершим сотни лет тому назад человеком».

Паскаль – один из самых знаменитых людей в истории человечества. Ему посвящена необъятная литература. Особенно популярен Паскаль во Франции: его портрет был воспроизведён на ассигнациях (до введения евро).

Пирсон Карл (1857 – 1936) – английский математик, статистик, биолог и философ, основатель математической статистики, один из основоположников биометрики.

В 1879 году закончил Кембриджский университет; с 1884 по 1911 гг. – профессор прикладной математики и механики Лондонского университета.

Опубликовал более 400 работ по математической статистике. Разработал теорию корреляций, критерии согласия, алгоритм принятия решений и оценки параметров. В курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» с его именем связаны такие термины и методы, как: распределение Пирсона, которое широко используется в математической статистике для сглаживания распределений эмпирических данных, критерий согласия Пирсона (*х*и-квадрат), употребляемый для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки некоторому теоретическому закону распределения, коэффициент корреляции, используемый для оценки некоторой статистической связи между случайными величинами и многое другое.

Широко известное нормальное распределение является частным случаем распределения Пирсона.

Известным приемником и продолжателем его работ по математической статистике стал Рональд Эйлмер Фишер.

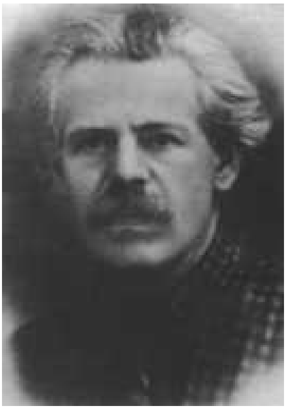
Пуассон Симеон Дени (1781 – 1840) – французский механик, физик и математик.

Основательно улучшил способы применения теории вероятностей вообще и к вопросам статистики в частности; доказал теорему, которая касалась закона больших чисел, впервые воспользовался этим термином.

Пуассон очень любил педагогическую работу, об этом говорит его известное высказывание «Жизнь украшается двумя вещами – занятием математикой и её преподаванием».

В курсе «Теория вероятностей и математическая статистика» изучается распределение Пуассона – вероятностное распределение дискретного типа, моделирует случайную величину, представляющее собой число событий, происшедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимы друг от друга. Это распределение имеет важную роль в теории массового обслуживания. Распределение Пуассона впервые было описано в его работе «Исследования о вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах», опубликованной в 1837 г.

Пуассон почётный во Франции человек: при Наполеоне он возведён в бароны, при Луи Филиппе стал пэром Франции; ему воздвигнут монумент в Потивье.



Слуцкий Евгений Евгеньевич (1880 – 1948) – выдающийся российский и советский математик, статистик, экономист. Родился в 1880 г. в Ярославской губернии в семье педагога, выпускника физико-математического факультета Киевского университета. В 1899 году с золотой медалью окончил гимназию в Житомире, куда переехали его родители, и поступил на математическое отделение физико-математического факультета Киевского университета, где по различным, в первую очередь политическим, причинам ему учиться не удалось. В 1905 году он вновь поступает в Киевский университет, но уже на юридический факультет, который с отличием заканчивает в 1911 г. В 1917 году экстерном сдаёт экзамены на степень магистра политической экономии и статистики в Московском университете.

В 1912 году после публикации книги «Теория корреляций и элементы учения о кривых распределений» приглашён на работу в Киевский коммерческий институт народного хозяйства; в 1926 г. переехал в г. Москву и стал работать в Госплане СССР в центральном статистическом управлении. В 1939 году перешёл на работу в Математический институт им. В. А. Стеклова.

Слуцкий Е. Е. – один из создателей современных случайных функций (распределений в функциональных пространствах). В этой области им предложено условие Слуцкого и выведена теорема Слуцкого. Также он вёл работы по параметрам корреляции. В 1960 году АН СССР издала его избранные труды «Теория вероятностей и математическая статистика».

Смирнов Николай Васильевич (1900 – 1966) – советский математик XX в., член-корреспондент АН СССР (1960), лауреат Сталинской премии.

Родился 17 октября 1900 г. в Москве в семье церковного служителя. Октябрьская революция и Гражданская война заметно отодвинули сроки получения образования; Н. В. Смирнов – боец Красной Армии, интересующийся философией и филологией; его хорошие знакомые – поэт В. В. Хлебников и художник С. П. Исаков. Только в 1921 г. после демобилизации он поступает на физико-математический факультет Московского университета. С 1926 году после окончания университета он занимается преподавательской деятельностью в Тимирязевской сельскохозяйственной академии, Московском городском педагогическом институте и Московском университете. В это время складывается основное направление его научной работы – теория вероятностей и математическая статистика. В 1938 году он защищает докторскую диссертацию «Об аппроксимации законов распределения случайных величин».

Смирнов Н. В. – один из создателей непараметрических методов математической статистики и теории предельных распределений с помощью асимптотического поведения кратных интегралов при неограниченном увеличении кратности. Его учебники и учебные пособия по применению теории вероятностей и математической статистики пользуются известностью не только в нашей стране, но и за рубежом. Он издал большое количество таблиц по математической статистике.

Второй, послевоенный, период научной деятельности Н. В. Смирнова связан с Математическим институтом им. В. А. Стеклова. Здесь им получены новые фундаментальные результаты по непараметрической статистике, по теории вероятностей больших уклонений и предельным распределениям членов вариационного ряда. За этот цикл работ Н. В. Смирнов в 1951 г. удостоен Государственной премии. В 1970 году в издательстве «Наука» вышел его фундаментальный труд «Теория вероятностей и математическая статистика».

«Стьюдент» (Уильям Сили Госсет) (1876 – 1937). Родился в Кентербери в семье Агнес Сили Видал и полковника Фредерика Госсета.

Любой, кто хотя бы немного изучал статистику, непременно сталкивался с распределением Стьюдента, которое используется даже чаще, чем нормальное распределение, или с t-критерием Стьюдента для сравнения средних значений.

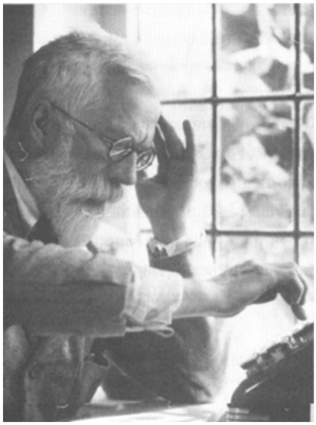
Стьюдент – это псевдоним, которым подписывал свои работы Уильям Сили Госсе. Всю свою жизнь он проработал на пивоваренном заводе Guinness в Дублине. (Артур Гиннес в те времена был пивоваренным королём).

В начале XX в., когда Госсет окончил курсы математики и химии в Университете Оксфорда, компания Guinness перешла в руки юного наследника, который решил отойти от традиционных способов изготовления пива и воспользоваться помощью учёных в разработке новых, более совершенных способов пивоварения. Одним из тех, кто был принят на работу, был Стьюдент. Он быстро понял, как важно использовать методы статистики при сравнении различных рецептов приготовления пива. Было необходимо изучить влияние сырья, характеристики которого существенно варьировались и были подвержены воздействию факторов окружающей среды. Требовалось проводить эксперименты, но их число всегда было недостаточным, и нужно было делать выводы на основе небольшого объёма доступных данных. До того времени считалось, что использованные выборки всегда были достаточно велики, чтобы по ним можно было точно оценить параметры генеральной совокупности. Однако при работе с малыми выборками оценки были неточными, и ими нельзя было руководствоваться. Госсет занялся поисками решения этой задачи и опубликовал свои выводы. В их основе лежала методика исправления выборочного стандартного отклонения. Госсет доказал, что оценка расхождения между средней малой выборки и генеральной средней имеет особый закон распределения, впоследствии названный законом распределения Стьюдента.

Существует несколько версий того, как и почему Госсет выбрал себе такой псевдоним. По одной из версий, в компании Guinness стало известно об увлечении Госсета математикой уже после его смерти, однако другие источники указывают, что в компании знали о том, что он публикует статьи, а псевдоним Стьюдент предложил сам директор.

По-видимому, целью Госсета было не сохранить в секрете разрабатываемые им теории, а скрыть от конкурентов, что Guinness использует статистические методы для улучшения качества продукции.

Госсет показал, каким образом при наличии нескольких измерений одной и той же неизвестной величины можно оценить разницу между средней этих измерений и самой величиной.



Фишер Рональд (1890 – 1962) – английский статистик, биолог-эволюционист и генетик (математик). Он получил очень хорошее математическое образование и внес важный вклад в статистику и генетику. Хотя какого-либо официального рейтинга не существует, Рональд Фишер несомненно входит в число учёных, которые внесли наибольший вклад в развитие статистики в XX в.

Согласно некоторым источникам, он был болезненным ребенком, но отличался большой тягой к знаниям и очень интересовался астрономией. Также у него было очень плохое зрение, и врачи запретили ему читать при искусственном свете (не забывайте, что в те времена лампы отличались от современных). Это мешало ему заниматься, и чтобы Рональд не отставал от остальных, преподаватель обучал его математике, не используя ни бумаги, ни карандаша. Это способствовало развитию у Фишера великолепного геометрического мышления, что впоследствии позволило ему решать сложные задачи оригинальным геометрическим методом.

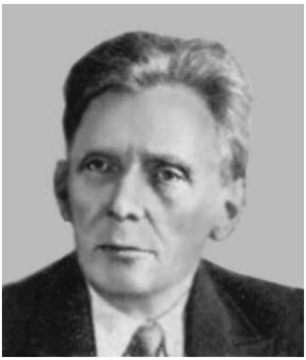
В возрасте 29 лет он вместе с женой, которой в то время было 20 лет и которая родила ему троих детей (обычаи того времени отличались от современных), переехал на старую ферму около опытной сельскохозяйственной станции Ротамстед к северу от Лондона. Владельцы станции, производители удобрений, заключили с ним контракт, желая, чтобы Фишер помог им упорядочить огромный объём данных, накопленный за 90 лет работы станции.

Учёный показал, что при использованном способе сбора данных влияние дождей и погоды в целом нивелировало возможный эффект от применяемых удобрений. Говорить о влиянии отдельных факторов на основе имеющихся данных было нельзя. Однако Фишер не просто указал, что данные собирались неверно, но и объяснил, какие поправки следует внести. Написанная им книга The Design of Experiments полностью изменила представление о способах сбора экспериментальных данных и оказала огромное влияние на исследования в сельском хозяйстве и промышленности.

В 1925 году Р. Фишером был предложен новый статистический метод – дисперсионный анализ. По определению Фишера суть дисперсионного анализа состоит в отделении дисперсии, приписываемой одной группе причин, от дисперсии, приписываемой другими группами. Фишеровская идея состоит в разложении общей дисперсии случайной величины на независимые случайные слагаемые, обусловленные действием независимых факторов и их взаимодействий, и остаточную дисперсию, связанную с неизвестными экспериментатору случайными и неучтёнными в данном исследовании эффектами (ошибкой эксперимента). Чтобы оценить силу влияния некоторого фактора, необходимо оценить значимость составляющей дисперсии, обусловленной этим фактором, в сравнении с дисперсией ошибки экспериментатора.

Первоначально дисперсионный анализ использовался Р. Фишером для обработки результатов агрономических опытов по выявлению условий, при которых испытываемый сорт сельскохозяйственной культуры даёт максимальный урожай.

Одно из его значимых достижений в том, что он показал (доказал), как правильно применять признак *хи*-квадрат Пирсона, доказал правильность теории Госсета. Распределение Фишера–Снедекора играет огромную роль в математической статистике и в первую очередь как распределение отношения двух выборочных дисперсий.



Хинчин Александр Яковлевич (1894 – 1959) – советский математик, один из наиболее значимых учёных в советской школе теории вероятностей. Член-корреспондент АН СССР, профессор МГУ с 1927 г., лауреат Сталинской премии второй степени, полученной совместно с А. Н. Колмогоровым за научные работы по теории вероятностей.

Родился 7 июля 1894 г. в Калужской области в семье инженера-технолога бумажной фабрики, ставшего в Советские времена профессором, заведующим отделом научно-исследовательского института.

На протяжении всей своей жизни, особенно в молодости, увлекался поэзией, издал четыре сборника стихов.

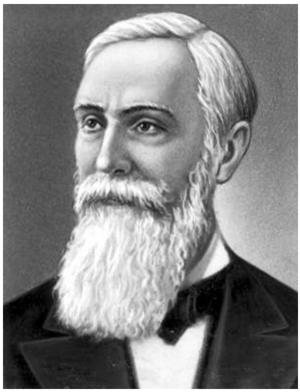
Самостоятельно, имея в доме учебник по математическому анализу, увлёкся математикой.

С 1911 года учился на физико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, один из первых учеников Н. Н. Лузина. После окончания в 1916 г. университета в течение 6-ти лет работал преподавателем Иваново-Вознесенского педагогического института, был первым деканом физмата. С 1922 года в МГУ, в 1926 г. стал заведующим кафедрой математического анализа. В 1927 году стал профессором, в 1935 г. – доктором физико-математических наук, в 1939 г. – членом-корреспондентом АН СССР. Основатель академии педагогических наук РСФСР; опубликовал много научных работ по методике преподавания математики.

Хинчин А. Я. применил методы математической теории функции к задачам теории вероятностей. Одним из значительных результатов, принесших ему мировую известность, является формула Леви–Хинчина в теории стохастических процессов.

Совместно с А. Н. Колмогоровым положил начало общей теории случайных процессов, занимался теорией массового обслуживания.

Награждён орденом Ленина (1953), двумя орденами Трудового Красного Знамени (1944, 1945), орденом Знак почёта (1940).



Чебышев Пафнутий Львович (1821 – 1894) – русский математик и механик, родился в Калужской губернии в семье богатого землевладельца. Начальное образование получил дома, особенно интересовался изучением игрушек и автоматов; сам придумывал и мастерил разные механические игрушки.

С 1837 по 1841 годы изучал математику в Московском университете на физико-математическом отделении. В 1846 году защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей».

Наряду с другими математическими достижениями П. Л. Чебышев считается первым русским математиком мирового уровня в теории вероятностей. В статье «О средних величинах» (1866) было впервые доказано «неравенство Чебышева». Автор не только дал вывод этого неравенства, но и успешно применил его для решения важной проблемы – закона больших чисел. В этой же статье П. Л. Чебышев впервые чётко обосновал общепринятую на сегодня точку зрения на понятие случайной величины.

В 1887 году появилась статья П. Л. Чебышева «О двух теоремах относительно вероятностей», где сформулировал и обосновал центральную предельную теорему и разработал известный метод моментов.

Учениками и продолжателями исследований в области теории вероятностей были известные в мире русские математики А. А. Марков и А. М. Ляпунов.

В течение сорока лет П. Л. Чебышев принимал активное участие в работе военного артиллерийского ведомства, когда, в частности, разрабатывал методы теории вероятностей для обработки результатов опытных стрельб.

Чебышев П. Л. был членом около 30 различных академий, награждён орденами как России, так и Франции. Его именем назван кратер на Луне, улицы во многих российских городах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПУЧКОВ Николай Петрович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В СИСТЕМЕ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

ISBN 978-5-8265-1736-9

Подписано в печать 22.06.2017.
Формат 60 × 84/16. 4,65 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 203

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14.
Тел./факс (4752) 63-81-08, 63-81-33.
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru