

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ
В. В. ЛЕДЕНЕВ, П. В. МОНАСТЫРЁВ, Г. М. КУЛИКОВ, С. В. ПЛОТНИКОВА

**В. В. ЛЕДЕНЁВ, П. В. МОНАСТЫРЁВ,
Г. М. КУЛИКОВ, С. В. ПЛОТНИКОВА**

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ

**Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2016**

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

**В. В. ЛЕДЕНЁВ, П. В. МОНАСТЫРЁВ,
Г. М. КУЛИКОВ, С. В. ПЛОТНИКОВА**

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ

*Рекомендовано Научно-техническим советом университета
в качестве монографии для научных
и инженерно-технических работников, аспирантов,
магистрантов и студентов строительных специальностей*



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2016

УДК 624.04
ББК Н5-2с51
Р24

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, академик РААСН
Е. М. Чернышев

Доктор технических наук,
профессор кафедры «ГСиАД» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
В. И. Леденёв

Р24 **Расчетные** модели для проектирования конструкций и зданий : монография для научных и инженерно-технических работников, аспирантов, магистрантов и студентов строительных специальностей / В. В. Леденёв, П. В. Монастырёв, Г. М. Куликов, С. В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2016. – 296 с. – 400 экз.

ISBN 978-5-8265-1660-7

Рассмотрены основные модели, используемые при разработке расчета основания, фундаментов, строительных конструкций и зданий. Изложены принципы и требования к проектированию зданий. Описаны современные технологии проектирования, методы расчета плитных и свайных фундаментов, перемещений оснований фундаментов, определений контактных напряжений.

Книга предназначена для научных и инженерно-технических работников, аспирантов, магистрантов и студентов строительных специальностей.

УДК 624.04
ББК Н5-2с51

ISBN 978-5-8265-1660-7 © Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2016

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы произошли существенные изменения в практике проектирования, строительства и эксплуатации объектов. Возросли требования к зданиям и конструкциям, темпы строительства, размеры зданий и подземных частей, доля временных и случайных нагрузок и воздействий, влияние нагрузок строительного периода геологических процессов, риски аварий и прогрессирующих разрушений, требования к надежности и долговечности. Все чаще возводятся объекты в условиях тесной городской застройки.

На всех этапах строительного процесса требуются модели: физические, механические, коррозионные, математические, технологические и др. Особенно много моделей разработано для грунтовых оснований. В зависимости от используемых моделей результаты проектирования могут значительно отличаться. Так, применяя модель линейно деформируемого полупространства к расчету жестких фундаментов, мы получаем бесконечные напряжения у краев. В действительности этого не может быть. Применяя модель Фусса–Винклера, мы получим более близкие к опытам величины контактных напряжений. Однако при этой модели не учитываем взаимное влияние фундаментов и зданий. Это отмечал Б. Н. Жемочкин (1962). Существует множество комбинированных моделей, учитывающих в большей степени реальные свойства грунтов.

Выбор расчетных моделей и схем является одним из наиболее ответственных этапов проектирования, на что иногда не обращают должного внимания.

Математическое моделирование является очень эффективным, а иногда и единственным способом изучения явлений или управления их параметрами (В. Н. Сидоров, В. К. Ахметов). Компьютерное моделирование значительно расширяет возможности построения и исследования математических объектов и явлений. Построение математической модели предполагает знание основополагающих закономерностей. Одной из центральных задач исследования, управления, проектирования является получение оптимального решения при обеспечении требований надежности, долговечности и эксплуатационных.

Математическое моделирование поведения материалов и сложных структур при взрывных и ударных нагрузениях рассмотрено в работе Н. Н. Белова, Д. Г. Копаницы, Н. Т. Югова (2013). Предложены модели, позволяющие рассчитывать напряженно-деформированное состояние и разрушение конструктивных материалов.

Интенсивно разрабатывается теория сложных высотных и уникальных зданий (Н. Н. Никонов (2000); П. Г. Еремеев (2006); Жень

Фей, Сунь Цзянсу (2008); В. И. Колчунов, К. П. Пятикрестовский, Н. В. Ключева (2008); Н. В. Канчели (2008); Чжан Вэйбинь (2010); И. И. Ведяков, Д. В. Конин, П. Д. Одесский (2014) и др.). К таким объектам предъявляются более жесткие требования к контролируемым параметрам, особенно к воздействиям и нагрузкам. Здесь используются последние научные и конструкторские разработки, достижения зарубежных ученых. Некоторые принципы проектирования и требования приведены в данной книге.

Появился ряд фундаментальных работ по теории надежности: А. Р. Ржаницын (1978); В. В. Болотин (1982); Ф. Аугусти, А. Баратта, Ф. Кашиати (1988); Г. Шпете (1994); В. Д. Райзер (2010); С. Ф. Пичугин (2011) и др. Разработки выполнены на вероятностных моделях и методах. Это обосновывается тем, что физико-механические и геометрические характеристики, нагрузки и воздействия являются случайными величинами или процессами.

Модели живучести систем и конструкций разрабатывали: Б. Н. Черкесов (1987); В. И. Колчунов, Н. В. Ключева (2010); В. С. Сафронов (2010); С. И. Меркулов (2012) и др.

Большой вклад в разработку моделей силового сопротивления железобетона внесли академики РААСН В. М. Бондаренко и Н. И. Корпенко. Это способствовало серьезному прогрессу в разработке теории железобетона.

Модели грунтовых оснований систематизированы в работах Г. Г. Болдырева (2008); А. П. Пшеничкина (2010); Г. Г. Болдырева, М. В. Малышева (2015); А. С. Александрова (2015); З. Г. Тер-Мартirosян (2000 – 2015).

Расчетные модели зданий обобщены и усовершенствованы в двух томах Б. А. Гарагаша (2012) с учетом совместной работы с основанием.

Революционный прорыв произошел в бетонедении. Бетон в больших объемах изготавливают самоуплотняющимся, а прочность на осевое сжатие достигает 200 МПа, т.е. приближается к прочности стали. Это потребует совершенствования норм проектирования и расчетных моделей бетона, железобетона, фибробетона (Е. М. Чернышев, 2016).

В последние годы все чаще обращаются к учету дефектов и повреждений, технологии строительства. В ряде работ показано, что нагрузки строительного периода могут достигать, а иногда и превышать эксплуатационные. Возникают значительные градиенты напряжений и перемещений. Отсюда необходимы технологические модели и модели мониторинга.

В связи с ростом нагрузок на основание и увеличением роли динамических возрастают требования к инженерно-геологическим, гидрологическим и климатическим изысканиям, а также к прогнозированию изменений в период эксплуатации (Ю. Т. Чернов, 2011 и др.).

1. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ

1.1. НАГРУЗКИ И ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ОСНОВАНИЕ, КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ

Подробную информацию можно найти в многочисленной литературе, например, в [9, 12, 14, 15, 19, 20, 22, 33, 40].

На фундаменты и основания действуют нагрузки: постоянные (от собственного веса, всплытия, давления грунтов, предварительного напряжения), временные (длительные, кратковременные, особые); основные сочетания нагрузок (постоянные, длительные, кратковременные и одна из особых нагрузок).

Кроме того, учитывают нагрузки полезные во времени; технологические от веса материалов, галерей, транспортеров, аппаратов, пыли и др.; атмосферные (снег, ветер, перепад температуры); от неравномерных деформаций в конструкциях; аварийные (случайные удары машин, грузов, трубопроводов, взрывы, обрушение элементов; температурные (от пожаров, излучателей тепла и холода); неравномерного перемещения фундаментов или их частей при просадках, набухании, дополнительные при уменьшении площади подошвы фундаментов, например, при разрушении бетона коррозией; нагрузки при изготовлении, перевозке, складировании и др.; от колебаний, систем основание–фундамент–здания, вызванных движением машин, механизмов, ударов молота, прорывами воды, землетрясениями, обвалами и др.; аэродинамические нагрузки на сооружения в потоке воздуха (наиболее опасными видами колебаний мостов являются крутильные и изгибно-крутильные флаттеры). Расчет сооружений башенного типа выполняют на вынужденные колебания вдоль потока, вызванные порывистостью, турбулентными пульсациями ветра, и поперек на ветровой резонанс и голопирование.

К другим определениям нагрузки относят: действительную, нормативную, расчетную, полезную, допускаемую, предельную, моментную, объемную, опасную, периодическую, поверхностную, сосредоточенную, случайную, регулярную, особую, фиктивную, одно- и двухпараметрическую, подвижную, оледенения, ступенчато-возрастающую, знакпеременную; по интенсивности: постоянную и переменную, квазистатическую.

К примеру, на пролетные строения мостов действуют нагрузки [35]:

– постоянные при проектировании мостов (собственный вес пролетных строений и опор, силы предварительного натяжения, давление от веса грунта);

- временные при проектировании устойчивости мостов: вертикальные подвижные, горизонтальные поперечные от центробежной силы и боковых ударов подвижной нагрузки, горизонтальные продольные от торможения подвижной нагрузки, давления грунта, от подвижного состава;

- прочие (ветровые, снеговые, от навала сосудов, строительные, систематические от воздействия температуры среды, морозного пучения грунтов.

Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. (1998) привели следующую классификацию нагрузок:

- статические;
- динамические;
- постоянного воздействия;
- кратковременного воздействия;
- длительного воздействия;
- особого воздействия;
- фиксированного воздействия;
- свободного воздействия.

Выделены четыре варианта проектных расчетов в оценках надежности и безопасности:

А – проверка прочности, устойчивости и т.п. при однократном нагружении в экстремальных условиях эксплуатации;

Б – проверка жесткости и трещиностойкости в режиме нормальной эксплуатации;

В – проверка выносливости при действии повторных погружений;

Г – учет ползучести при длительном действии нагрузки.

Связь между проведенной классификацией расчетных нагрузок и возможными вариантами расчетных проверок приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Расчетные значения	Нагрузки, используемые в расчетах			
	постоянные	переменные		
		длительные	повторные	эпизодические
Эксплуатационное	Б, Г	Б	Б	
Предельное	А	А, Б	А, Б	А
Квазипостоянное		Г	Г	
Циклическое			В	

1.2. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Сафронов В. С., Степанов С. Д. (2004) исследовали НДС составной плитно-балочной системы, состоящей из плиты, подкрепленной продольными и поперечными балками.

Рассмотрена расчетная модель плитно-балочной системы на основе смешанного метода и теории составного стержня А. Р. Ржаницына (рис. 1.1) полуаналитического варианта метода конечных элементов (МКЭ).

Для образования основной системы первой модели и разрешающих уравнений использован смешанный метод Ананьина–Хмырова, усовершенствованный с помощью теории составного стержня А. Р. Ржаницына.

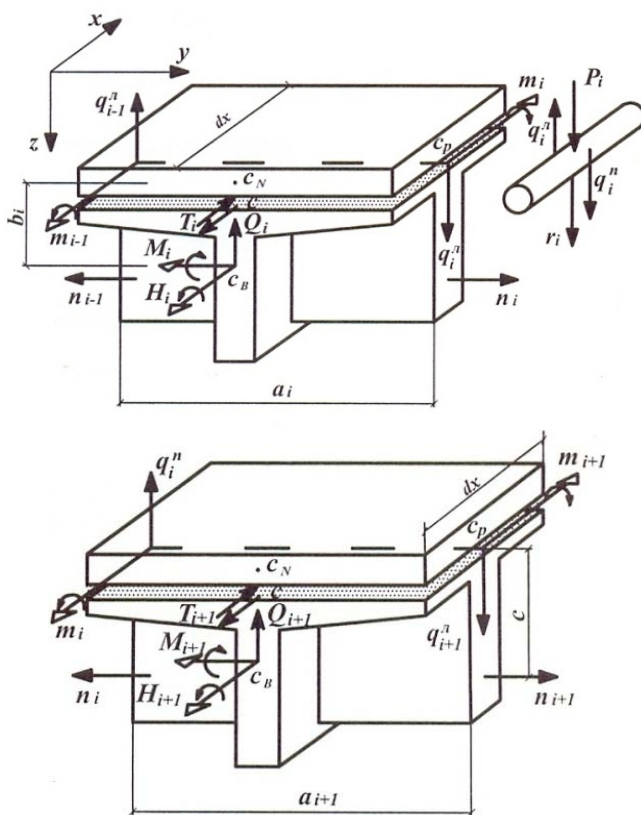


Рис. 1.1. Элементы i -й и $(i+1)$ -й балок с накладной плитой

Первая модель и основанная на ней методика расчета не обеспечивают совместности продольных деформаций полок соседних балок.

Вторая модель включает дискретизацию плитно-балочной системы в поперечном направлении традиционным МКЭ и разложением решения в тригонометрические ряды в продольном. Для нахождения матрицы жесткости использован вариационный подход, основанный на минимизации упругого потенциала ортотропных плит. В них учтена степень свободы, соответствующая сдвигу накладной плиты в направлении продольной координаты. Сечение каждой балки составляется из плитно-пластинчатых (полки балки и накладная плита) и стержневого (ребро балки) конечных элементов.

Расчетные модели дополнены данными о дефектах, представленными коэффициентами ослабления отдельных элементов.

В работе [23] рассмотрены вопросы расчета тонких и секториальных пластин радиально-переменной толщины, прямоугольных пластин с толщиной, изменяющейся вдоль одной или двух осей координат. Пластина считается ортотропной, имеет различную жесткость как при растяжении, так и при изгибе в направлениях Z и O . Пластины подвержены действиям сил, нормальных к срединной плоскости, и сил, действующих в срединной плоскости. Разрешающие уравнения позволяют учесть действие неравномерного нагрева и реакций упругого основания.

Использовали следующие виды жесткости:

– приведенная цилиндрическая жесткость при растяжении пластины

$$D_N = \frac{Eh}{n^2 - \delta^2};$$

– приведенная цилиндрическая жесткость при изгибе пластины

$$D_M = \frac{Eh^3}{12(n^2 - \sigma^2)};$$

– жесткость при кручении пластины

$$D_K = \frac{E_{r0}h^3}{12},$$

где E , σ – приведенные модуль упругости и коэффициент Пуассона; $n^2 = n_1 n_2$ – параметры, определяемые из уравнений:

$$E_r = \frac{E}{n_1}; \quad E_\theta = E n_2; \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{n^2}; \quad \sigma_\theta = \sigma.$$

Рассмотрим осесимметричный изгиб изотропных и ортотропных пластин с толщиной

$$h = h_0(1 - x), \quad x = \pm z / z_0,$$

где z и z_0 – наружный и внутренний радиусы кольцевой пластины. Распределенная нагрузка q_z , действующая на пластину, может быть представлена в виде

$$q_z = q_{\text{акт}} - c\omega + c_1 \nabla^2 w, \quad \nabla^2 = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz},$$

где $q_{\text{акт}}$ – активная нагрузка, а два последних слагаемых представляют реактивное давление; c – первая упругая характеристика, совпадающая с коэффициентом постели; c_1 – вторая упругая характеристика.

Эта модель основания рассмотрена В. З. Власовым и Н. Н. Леонтьевым (1960).

Основные этапы расчета конструкций методом перемещений:

- идеализация конструкции либо расчетной схемы;
- вычисление матриц жесткости отдельных элементов в любой удобной местной системе координат, связывающей узловые силы с узловыми перемещениями;
- преобразование матрицы жесткости в общую для всех конструкций систему координат;
- формирование с использованием матриц жесткости элементов системы уравнений движения или равновесия конструкций:

$$L(u_i, v_i, w_i, F) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где L – некоторый оператор, в общем случае дифференциальный; u_i, v_i, w_i – перемещения узловых точек в направлении координатных осей; n – число узлов; F – параметры нагрузки;

- решение ранее записанного уравнения относительно узловых перемещений;
- вычисление деформаций элементов по известным узловым перемещениям и направлений в элементах по известным деформациям.

В качестве конечных элементов могут использоваться стержни, элементы пластин, оболочек и массивных сред.

Так, для стержневой системы матрицы жесткости

$$\{f_i\} = [K_{i,j}] \{\delta_i\} + [K_{i,j}] \{\delta_j\},$$

где f_i, δ_i, δ_j – векторы произвольных сил и перемещений стержня $i-j$, состоящего из шести компонентов каждый; $K_{i,i}, K_{i,j}$ – блоки матрицы жесткости стержня $i-j$.

Матрица уровней равновесия

$$\sum_{i=1}^L \left\{ \overline{f_i^{(l)}} \right\} + \{F_i\} = 0,$$

где суммирование производится по всем стержням, сходящимся в узле i . Номера стержней от 1 до L ; $\overline{f_i^{(l)}}$ – вектор, содержащий проекции сил, действующих со стороны стержня $i-j$, по координатным осям XYZ ($-f_i = \bar{f}_i$); F_i – силы и моменты, действующие в узле.

Окончательная система уравнений

$$[K]\{\Delta\} = \{F\},$$

где $[K]$ – матрицы жесткости конструкций; $\{\Delta\}$ – объединенный вектор узловых нагрузок:

$$\{\Delta\} = \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_N \end{array} \right\}; \quad \{F\} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_N \end{array} \right\};$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,N} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N,1} & K_{N,2} & \vdots & K_{N,N} \end{bmatrix}.$$

Подробные сведения по этому вопросу можно найти в книгах Н. Н. Леонтьева, Д. Н. Соболева, А. А. Аносова (1996), а также А. Ф. Смирнова, А. В. Александрова, Б. Я. Лашеникова, Н. Н. Шапошников (1981), В. И. Коробко, А. В. Коробко (2008).

Основные матричные уравнения для нелинейных расчетов конструкций получены из уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j,$$

где T – кинетическая энергия системы; q_j – j -я обобщенная координата; Q_j – j -я обобщенная сила.

Компьютерное моделирование строительного объекта как единой конструкции (А. Н. Супрун, 2009). Работа, затрачиваемая на формирование упругопластического тела, превращается в потенциальную упругую энергию, в скрытую энергию остаточных микронапряжений, рассеивается в виде тепла, тратится на структурные и химические изменения.

Супрун А. Н. разработал теорию реономной пластичности, в основу которой положен единый феноменологический подход к учету внутренних переходных процессов в неупруго деформируемых материалах.

В рассматриваемых реологических моделях пластичности учитывается деформационное старение, релаксационное упрочнение, изменение внутренней структуры материала и др.

1.3. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЗДАНИЙ

Требования к безопасности зданий.

Согласно статье 16 Федерального закона № 384 (от 30.12.2009) «Требования к обеспечению механической безопасности здания или сооружения» расчетные модели (в том числе расчетные схемы, основные предпосылки расчета) строительных конструкций и основания должны отражать действительные условия работы здания или сооружения, отвечающие рассматриваемой расчетной ситуации, учитывая:

- факторы, определяющие напряженно-деформированное состояние;
- особенности взаимодействия элементов строительных конструкций между собой и с основанием;
- пространственную работу строительных конструкций;
- геометрическую и физическую нелинейность;
- пластические и реологические свойства материалов и грунтов;
- возможность образования трещин;
- возможность отклонения геометрических параметров от их номинальных значений.

Принципиальная технологическая схема проектирования многоэтажных железобетонных зданий (Р. В. Кабанцев, 2013):

- общая компоновка здания, назначение основных несущих конструкций, их размеров и сечений;
- определение и расчетная проверка основных конструктивных решений типового этажа;

- определение основных конструктивных решений здания в целом;
- определение и расчетная проверка основных конструктивных решений фундаментов и несущих конструкций нижней зоны здания (с учетом истории нагружения и возведения здания);
- расчетная проверка принятых конструктивных решений здания в целом на действие нагрузок основного сочетания (в том числе ветровые воздействия с учетом пульсационной составляющей);
- расчетная проверка основных конструктивных решений здания в целом на устойчивость против прогрессирующего обрушения;
- расчет несущих конструкций на особые воздействия (сейсмические, карстовые воронки и т.п.);
- расчет огнестойкости несущих конструкций.

Целью расчетов многоэтажных и высотных железобетонных зданий является:

- определение усилий в элементах конструктивной системы (колоннах, плитах перекрытий и покрытий, фундаментах, стенах, ядрах жесткости, напряжениях в основаниях);
- расчет устойчивости конструктивной системы прогрессирующему обрушению;
- оценка несущей способности и деформаций основания.
- К числу рекомендуемых расчетов относятся:
- учет взаимодействия всех конструктивных элементов здания;
- расчет на динамические воздействия;
- учет пространственного характера здания в процессе взаимодействия с внешними нагрузками.

Основным методом расчета строительных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ). Основная концепция метода – дискретизация (разбивка) рассчитываемой системы на отдельные конечные элементы, объединенные общими узлами. Для дискретной модели основой является система кусочно-непрерывных функций, определенных на области узлов рассчитываемой системы.

Расчетный метод включает учет:

- совместного деформирования сложных систем, состоящих, например, из колонн, балок, плит и т.п.;
- сложной структуры конструктивных элементов (различные физико-механические характеристики, наличие отверстий, изменение сечений, закрепления (опоры) различного типа);
- вида и схемы загрузки;
- особенностей узлов соединения конструктивных элементов (наличие абсолютно жестких участков КЭ, выравнивание КЭ по плоскости, по грани, по положению КЭ в общей системе).

При расчете пластин (плиты, оболочки) решают следующие типы задач теории упругости:

- анализ плоского напряженного состояния;
- анализ плоской деформации;
- изгиб тонких пластин;
- изгиб пластин по теории Рейсснера–Миндлина;
- расчет пологих оболочек.

Основными этапами расчета являются:

- выбор расчетного метода (программного комплекса);
- разработка модели несущих конструкций;
- проверка модели;
- расчет и анализ результатов.

При разработке модели осуществляют: геометрическое моделирование, идеализацию материала конструкций, внешних и внутренних связей, моделирование деформационных свойств оснований.

Рассмотрены общие (глобальные) и частные расчетные модели. Первые позволяют проанализировать взаимодействие всех конструктивных элементов, выполнить расчет на динамические воздействия, учесть пространственный характер здания в процессе взаимодействия с внешними (силовыми, деформационными и др.).

Особенностями общих (глобальных) расчетных моделей при традиционной расчетной технологии являются:

- исходные фиксированные размеры элементов;
- общие условия закрепления моделей;
- постоянные жесткостные параметры элементов модели;
- общие условия нагружения модели нагрузками, образующими независимые загрузки;
- поэтапное отслеживание напряженно-деформированного состояния здания;
- сопоставление разных методик расчета.

Модели проектирования зданий [46].

Моделирование процессов проектирования (ПП) подробно рассмотрено в работе [46]. ПП – это последовательная смена состояний задачи проектирования, результаты которого отображаются моделями объекта. В основе проектирования лежит совокупность моделей объекта, над которыми совершаются действия по преобразованию.

Наиболее характерными особенностями моделей объектов проектирования являются:

- изначальная ненаблюдаемость объекта;
- многоэтажность построения от начального состояния до конечного результата – комплекта технической документации;

- многоаспектность описания объекта;
- коллективный характер работы над проектом и, как следствие, потребность в выделении собственной модели для каждого субъекта проектирования с возможностью доступа к смежным моделям для согласования решения.

Любой объект проектирования может быть представлен совокупностью моделей:

- функциональной;
- функционально-структурной;
- структурно-функциональной;
- субстанциональной;
- продуктивной.

Под моделью объекта проектирования $M_{o.n}$ принимают требуемый объект (или его желаемое состояние W^*), представленный в виде множества W с заданными отношениями R , многосвязанность элементов которого отображается некоторым графом α , совокупностью свойств различной природы F с допустимым уровнем погрешности ε .

Модель объекта представлена шестикомпонентным кортежем вида

$$M_{o.n} = (W, R, \alpha, F, \varepsilon, W^*).$$

Под W понимается некоторое базовое множество моделей, для которых заданы наборы названий отношений и указана местность соответствующего отношения, т.е. модели задаются в сигнатуре, что подчеркивает их изоморфизм.

Одним из наиболее эффективных способов поиска лучших вариантов проектных решений является построение последовательности уточняющих моделей.

Фрагмент идеальной модели объекта проектирования представлен на рис. 1.2.

Целесообразно устанавливать соответствие между различными моделями и их частями. Модель задачи в проектировании формулируется так: из существующего набора объекта W выбрать такой W^* , различия которого в функции ΔF , структуре ΔS и свойствах ΔG находились бы в допустимых пределах характеристик проектируемого объекта.

Рассмотрены модели поиска принятия решений. Поиск осуществляется с помощью комбинаторных алгоритмов, в которых реализуются различные сочетания элементов из некоторого множества W , содержащего V различных элементов, и построения целевых функций переменных, минимизация значений которых соответствует лучшей проектной ситуации. Целевые функции в задачах линейного, квадратично-

го и выпуклого программирования относятся к классу выпуклых, обладающих единственным безусловным глобальным экстремумом.

Модель управления процессом принятия решений формируется исходя из принятой структуры взаимодействия человека и вычислительной машины. Для реализации процесса проектирования в САПР необходима многоуровневая система критериальных показателей для оценки проектных решений и их координации между различными этапами. Интересные идеи высказал С. Круглик (Высот. стр-во, № 5, 2007).

Для оценки сложных объектов в качестве системы классификации используется иерархическая многоуровневая структура в виде «дерева свойств», отображающего на структуру объекта с целью согласования решения по всем уровням декомпозиции.

Модель объекта проектирования (ОП)



Рис. 1.2. Представление идеальной модели объекта проектирования (фрагмент)

Введено понятие устойчивости и жизненного цикла показателей. Ряд показателей вычисляется непосредственно по исходным данным.

В монографии Д. М. Шапиро [49, 50] выделены три этапа технических расчетов (рис. 1.3): инженерная схематизация и формирование расчетной схемы; математическая обработка РС и реализация расчетных алгоритмов; анализ результатов расчетов.

Алмазов В. О. анализировал [2] перспективы развития технического нормирования в области строительства. Отмечены недостатки закона № 184-ФЗ «О техническом регулировании». По этому закону документы, утвержденные исполнительной властью, не содержат требований, а дают только рекомендации. Показано, что каждое новое поколение норм (рис. 1.4) усложняет работу проектировщиков и строителей.

Алмазов В. О. [2] подчеркивает, что требования технического нормирования не должны противоречить международным стандартам. При этом должны соблюдаться требования качества.



Рис. 1.3. Составные части технических расчетов

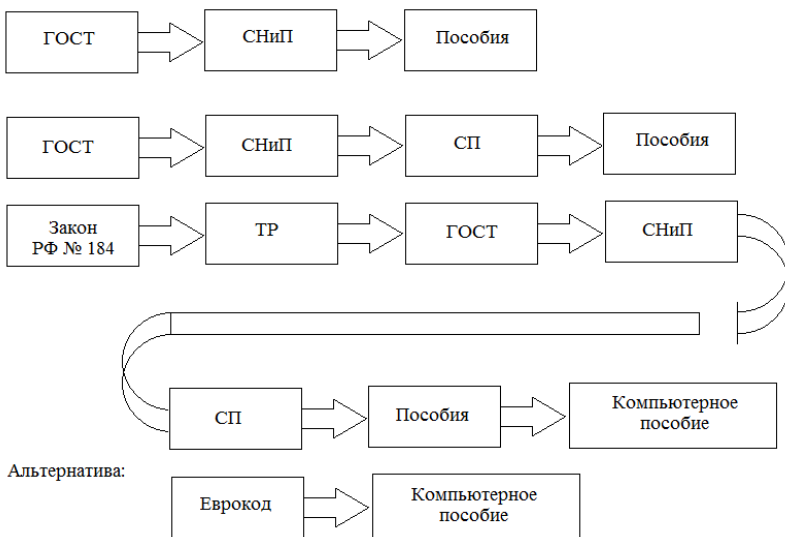


Рис. 1.4. Развитие систем строительного нормирования в России

Задачи гармонизации должны быть сформулированы по следующим критериям:

- близость научных основ;
- идентичность расчетных методов;
- совпадение требований к конструкциям;
- соответствие результатов расчетов отечественным и международным нормам при проектировании и строительстве.

Едличка С. Ю. и Обухова Л. В. описали [13] схемы автоматизации организации и управления строительством для жизненного цикла объекта – от идеи до передачи в эксплуатацию. На всех этапах используются справочные нормативные и правовые системы.

Так, разработаны специализированные информационно-справочные системы:

- автоматизированное рабочее место заказчика-застройщика и генподрядчика (применительно к этапам от подготовки к проектированию до сдачи объекта в эксплуатацию);
- блок-схема проектирования календарного плана;
- блок-схема проектирования строительного генерального плана.

Дальнейшее развитие автоматизации может состоять в создании единой информационной среды для участков строительного процесса, занимающихся:

- проектированием организационно-технологической документации;
- материально-техническим снабжением и эксплуатацией строительных объектов.

При возведении высотных зданий к ним предъявляются повышенные требования. Некоторые из них распространяются и на обычные здания. Это требования к архитектурно-планировочным решениям, материалам, конструкциям, отделке, световым решениям, системам для устройства фасадов, несущим системам, пожарной безопасности, методикам испытаний материалов и конструкций, светопрозрачным конструкциям, энергосбережению, тепло- и звукозащите, площади остекления, энергосберегающим мероприятиям, влажностному режиму, защите от солнечной радиации, кондиционированию воздуха, защите от температурных деформаций, отводу атмосферных осадков, лифтам и лифтовым холлам, системам мониторинга, долговечности, демпферам или амортизаторам для гашения колебаний, узлам опирания и соединения элементов, диафрагмам жесткости, предварительно натяжению, ограждениям котлованов, технологии выполнения работ и др. (из журналов «Проектирование высотных зданий»).

В настоящее время все чаще обращаются к необходимости учета дефектов. Так, в стальных одноэтажных рамах на деформируемом основании отличались следующие дефекты: разница в свойствах грунтов под фундаментами, длине стоек, в жесткостях элементов и узлов соединения, наличие случайных эксцентриситетов, изгибы элементов, смещение от проектных осей, разворот элементов относительно продольной оси, дефекты в сварных и болтовых соединениях, несоответствие физико-механических свойств материалов требуемым по проекту.

Обратимся к фундаментальной работе Б. А. Гарагаша [6, 7], в которой развита теория сооружений для неоднородных оснований.

При расчете системы «основание–сооружение» используются следующие жесткостные характеристики здания для соответствующего вида его деформаций:

EA – жесткость здания (или его элемента) на сжатие/растяжение, учитываемая при осевых видах деформаций, имеющая размерность [Н], где A – площадь поперечного сечения элемента, [м²], E – модуль деформаций первого рода, [Н/м²];

GA – сдвиговая жесткость здания (или его элемента), учитываемая при расчете конструкций на перерезывающие силы либо при их перекосе, имеющая размерность [Н], где G – модуль деформации второго рода, [Н/м²]. Различается сдвиговая жесткость здания по вертикальному сечению при учете действия поперечных сил и по горизон-

тальному сечению, как правило, по простенкам этажа при учете действия горизонтальных сил в элементах здания, например, при модели здания как горизонтального составного стержня либо при расчете здания на горизонтальные деформации, возникающие при подработке территории;

EJ – изгибная жесткость здания или его конструктивного элемента, учитываемая при изгибе здания или его конструктивного элемента при изгибе (прогибе, выгибе) и имеющая размерность $[Н \cdot м^2]$, где J – момент инерции соответствующего сечения, $[м^4]$;

EJ_d – полярная крутильная жесткость здания, учитываемая при его кручении при оценке касательных напряжений в закручиваемом сечении и имеющая размерность $[Н \cdot м^2]$, где J_d – момент инерции соответствующего сечения, $[м^4]$;

EJ_ω – секториальная жесткость поперечного сечения здания, учитываемая при его кручении при оценке нормальных секториальных напряжений и имеющая размерность $[Н \cdot м^4]$, где J_ω – секториальный момент инерции сечения, $[м^4]$.

На рисунках 1.5 – 1.9 приведены расчетные модели зданий на деформируемом основании и схемы, поясняющие механизм взаимодействия здания с основанием.

При расчете исходят из следующих предпосылок:

1. Плоские элементы здания работают только в своей плоскости.
2. Кручение здания учитывается через взаимодействие системы поперечных стен и перекрытий.
3. Кручение плоских элементов относительно собственных продольных осей не учитывается.
4. Влиянием грунта под поперечными стенами пренебрегают.

Книга Х. Энгеля [51] является уникальным справочным пособием, в котором представлены все типы несущих конструкций. Созданы основы нового и оригинального пути к использованию формообразующих возможностей несущих конструкций. Это упорядоченная система независимых от времени принципиальных знаний, необходимых архитектору и инженеру. Особое внимание уделено систематизации, представляющей собой идентификацию, структуризацию и раскрытие содержания по определенному организационному принципу.

Несущие системы подразделены на активные по форме, вектору, сечению. Рассмотрен механизм сопротивления и деформирования конструкций и фрагментов зданий и сооружений различным видам нагрузок.

Структурная модель деформирования и разрушения горных пород и бетонов разработана М. Г. Зерцаловым (1992).

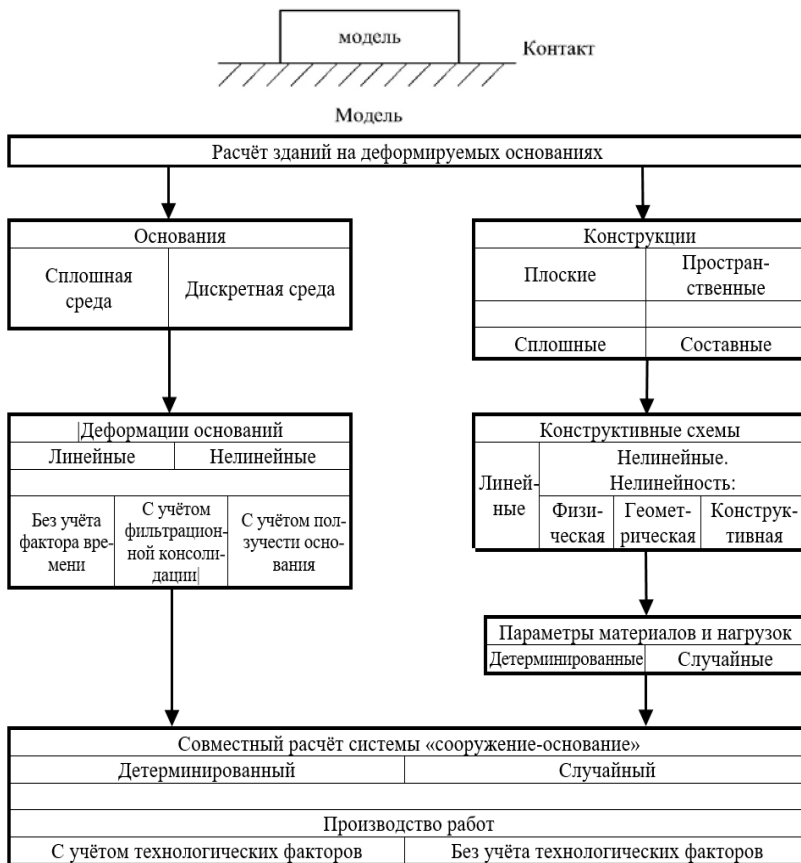


Рис. 1.5. Вопросы, учитываемые при оценке надежности здания на грунтовых основаниях [7]

Пухонто Л. М. исследовал [30] долговечность железобетонных конструкций инженерных сооружений, основываясь на моделях постоянных и временных нагрузок на конструкции, деградиционных (коррозионных) и абразивных процессов.

По определению авторов работы [44] долговечность – предельный уровень напряженного состояния в структурных элементах. При повышении критических размеров и количества дефектов в виде капилляров, пор, микротрещин вследствие физико-химических процессов происходит возрастание внутренних сил и напряжений. Оно проявляется в локальных зонах развитием микротрещин.

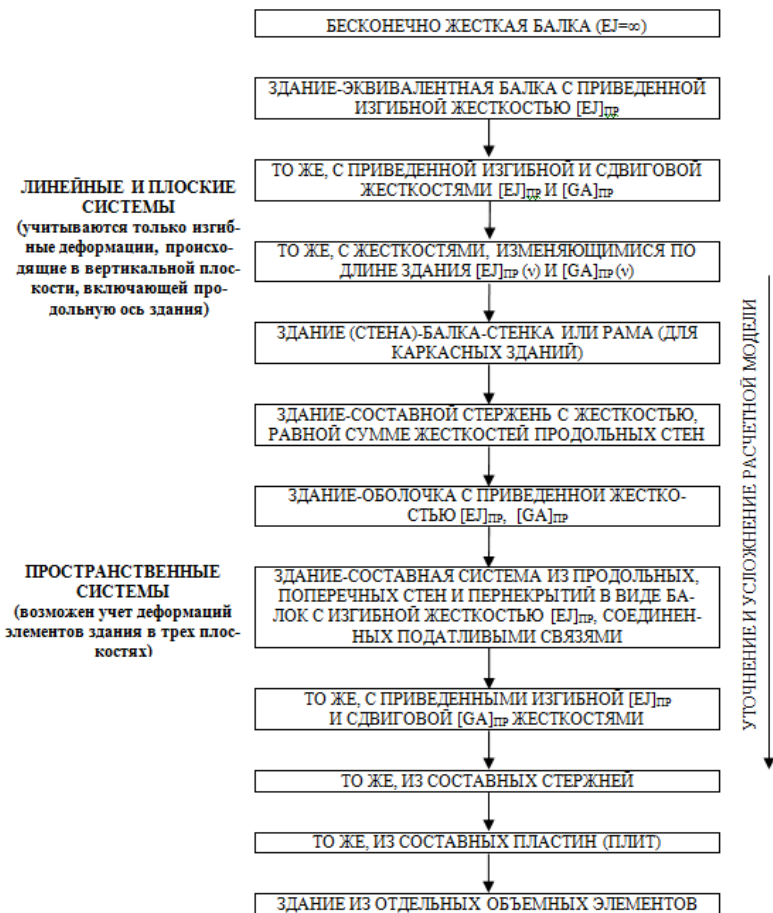


Рис. 1.6. Типы расчетных моделей зданий [6]

Трещины в структуре бетона развиваются по механизмам нормального отрыва и поперечного сдвига. Это оказывает доминирующее влияние на несущую способность конструкций. Нарастание прочности бетона во времени практически не влияет на долговечность. В вершинах пустот интенсивность напряжений достигает критических значений.

Введено понятие вязкости цементного камня $\eta = \eta(V/c)$ от действия статической и циклической нагрузок. Долговечность определяется временем (или числом циклов), за которое трещина от начальной длины l_{crc}^0 вырастает до критической l_{crc}^{c2} .

Параметрами модели в характерных точках диаграммы состояния будут: l_c, u_c – начальные размеры пустоты (капилляра); W – влажность, t – температура цементного камня.

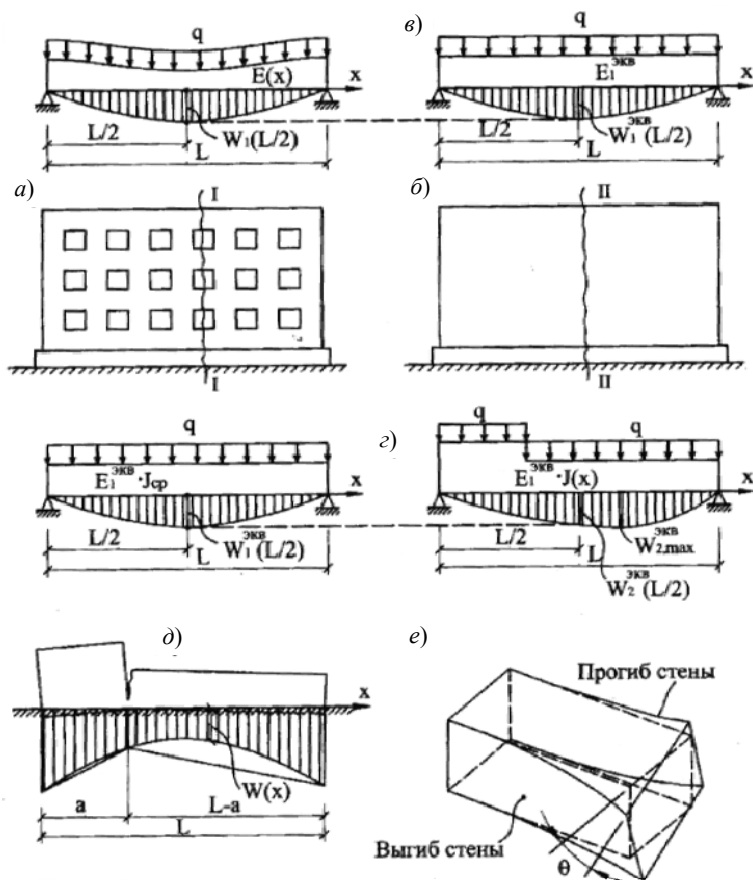


Рис. 1.7. К итерационной оценке модуля осевых горизонтальных деформаций материала продольных стен здания [7]:

- a* – при оценке жесткости стены по сечению с проемами, не приведенной к сплошной; *б* – то же, по приведенной сплошной стене;
- в* – оценка эквивалентного модуля горизонтальных деформаций для регулярных зданий; *г* – то же, для нерегулярных;
- д* – разлом нерегулярного здания при выгибе;
- е* – деформации наружных стен здания при его кручении



Рис. 1.8. Динамика соотношений жесткостей здания и основания [6]:

- a – изгибная жесткость здания; b – жесткость основания;
- v – характеристика частоты отказов в конструкциях за время эксплуатации здания

Получены формулы для определения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН):

- при нормальном отрыве для плоского напряженного состояния;
- от действия капиллярных сил;
- от температурного расширения воды в вершинах капилляров;
- от вязкости цементного камня.

В работе [33] приведены рекомендации по проектированию взрывоустойчивых зданий и сооружений. Взрывные воздействия характеризуются большой интенсивностью, временем действия, сопоставимым с периодом собственных колебаний элементов здания, способом приложения. Проектирование взрывоопасных зданий включает комплекс мероприятий, предотвращающих и локализацию взрывов, и снижение ущерба.

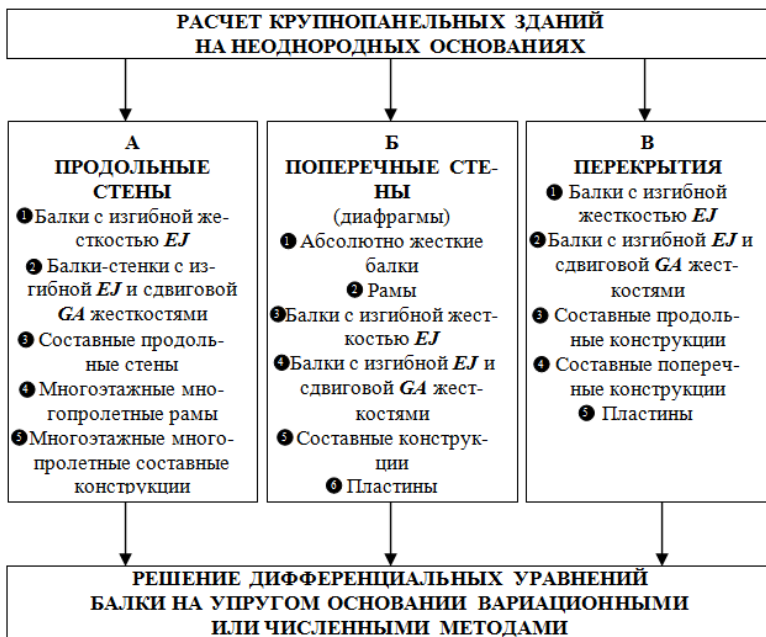


Рис. 1.9. Детерминированная часть расчета крупнопанельного здания [6]

Рассмотрены параметры взрывных волн, динамических нагрузок, основные положения расчета конструкций, зданий и сооружений на особые сочетания нагрузок от внутренних и внешних взрывов.

Рассмотрены следующие модели каркасного здания с системой сейсмоизоляции:

- расчетная статическая модель (PCM);
- расчетная динамическая модель.

Первая модель – безинерционная упругая система, сформированная из набора конечных элементов и моделирующая жесткость несущих конструкций. Служит для построения матриц жесткости (податливости).

Вторая модель здания – упругая линейная система, содержащая инерционные элементы. Служит для решения задач динамики здания при определении сейсмической нагрузки (сил и моментов), перемещений и углов поворота.

Расчетная модель воздействия базируется на акселерограммах реальных землетрясений. Считается, что основание перемещается как жесткое тело.

Авторы работы [1] изложили основы моделирования взрывных и инерционных нагрузок. Установлены зависимости параметров ударной волны от расстояния до эпицентра, высоты взрыва, мощности в зоне регулярного и нерегулярного отражения. Выполнено моделирование сейсмических воздействий на здания и сооружения.

В качестве основных параметров приняты:

h_z, φ_i – координаты центра тяжести объекта и углы его ориентации;

l – размеры объектов;

v, ρ, μ_x – кинематические условия обтекания (скорость потока, плотность, коэффициент вязкости);

T^*, R_Γ – температура, универсальная газовая постоянная;

Re, M – число Рейнольдса и Маха (инварианты подобия).

Прогнозирование поведения здания при появлении под ним неравномерных деформаций грунтовых оснований представляет собой комплексную задачу, элементами которой являются:

- выбор механической модели основания;
- определение статистических характеристик основания;
- выбор модели сооружения;
- определение (или задание) статистических характеристик строительных материалов сооружения и разброса данных деформируемости стыковых соединений элементов здания;
- определение (или задание) статистических характеристик постоянных и временных нагрузок, действующих на конструкции здания и передающихся на основание;
- выбор системы уравнений совместности деформирования зданий и оснований и способов их решения.

В работе [51] описано математическое моделирование случайных свойств конструкций и нагрузок на них. Изложены основы теории надежности строительных конструкций. Рассмотрено предельное состояние как функция базисных переменных. Показано, что предельное состояние может быть отнесено как к конструкции в целом, так и к отдельным сечениям и элементам. Представлена механическая модель для описания предельного состояния с помощью уравнений или алгоритма в зависимости от величин, позволяющих их прямое измерение или наблюдение:

$$q(x) = q(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0.$$

Если

$$q(x_1, x_2, \dots, x_m) < 0,$$

то это отказ нерассматриваемому предельному состоянию.

При

$$q(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq 0$$

отсутствует отказ.

Рассмотрен отказ систем с многими предельными состояниями с последовательным и параллельным соединением элементов. В первом случае система отказывает, когда превзойдено какое-либо из n предельных состояний, во втором – все n предельных состояний.

Антисейсмическое проектирование высотных зданий (Чжан Вэйбинь, 2010). Наиболее подробно рассмотрены вопросы конструирования железобетонных колонн. Колонна работает как сжатый элемент с большим эксцентриситетом и испытывает значительные деформации. Для повышения сейсмостойкости ограничивают осевые напряжения для типов конструкций: каркасной рамной, каркасной со стенами жесткости, ствольной, стен жесткости с частичными опорами. Кроме того, определены конструктивные требования в качестве антисейсмической защиты. Приведен минимальный процент армирования продольной рабочей арматуры для центральной, крайней и угловой колонны. Возникающие проблемы с выбором колонн можно ограничить семью типами:

- простые до 30 этажей, бетон класса С50...С60;
- высокопрочные железобетонные колонны, бетон С60...С80;
- железобетонные колонны, насыщенные спиральными хомутами;
- бетонные колонны со стальными профилями;
- железобетонные колонны с добавлением штабика (насыщение арматурой ядра сечения);
- железобетонные колонны с отдельным армированием;
- бетонные колонны со стальными трубами.

Конструктивные требования к узлам сопряжения балок и колонн направлены на обеспечение конструктивной монолитности здания. Ядровая зона каркасных узлов воспринимает большие сдвигающиеся усилия при действии горизонтальной нагрузки. В них могут легко возникнуть хрупкие повреждения.

Требуется, чтобы ядровая зона находилась в упругом состоянии без возникновения сдвигающих трещин. Определены требования к созданию сильных узлов.

Большое внимание уделяется надежной анкеровке продольной рабочей арматуры в ядровой зоне узлов.

Рассмотрены конструкции диафрагмы. Выделены основные типы стен диафрагм, в том числе с частичными опорами неправильной формы:

- усиление нижней области стен – диафрагм; усиленная область включает все каркасные опорные колонны и переключенные элементы;

- включение этажа – переключение слабого этажа; необходимо учесть разность переключения на верхнем и нижнем участках этажа;

- регулирование внутренних сил, нормальных напряжений исходя из того, что «сильная колонна – слабая колонна», «сильный сдвиг – слабый изгиб»;

- соблюдение рекомендаций по минимальному армированию продольной рабочей арматурой, содержанию хомутов в зоне массивных каркасных балок, в объеме опорных зон колонн, насыщению распределительной арматурой в стене;

- увеличение армирования хомутами в узлах растянутых балок и колонн, армирование крайних элементов стен – диафрагм;

- при применении ферм в конструкции переключения их ставят на целый этаж, оптимально центрируют, обеспечивают достаточную жесткость для совместного восприятия «стрессовых» воздействий.

Особое внимание уделяется жесткости. Так, вводится коэффициент боковой жесткости верхней и нижней конструкций, межэтажной боковой жесткости.

Используют и анализируют разные варианты систем компоновок.

В практике проектирования используют следующие конструктивные схемы:

- каркасная;

- монолитная стена (с контурным или дискретным опиранием, с короткими вставками);

- рама с диафрагмами жесткости;

- ствольные конструкции: каркасная рамная конструкция в центре плана этажа; ствольная, состоящая из внутреннего и внешнего стволов; составленные из многих стволов.

Особенности проектирования зданий и сооружений в эпоху компьютеризации рассмотрены в работе [20]. Компьютер дает возможность:

- рассчитать и запроектировать конструкции;

- выполнить расчеты с учетом порядка монтажа;

- проверить устойчивость конструкции в целом и ее элементов;

- оптимизировать форму поверхностей оболочек;

- провести компьютерное моделирование.

Так, в процессе поиска оптимальной формы могут быть приняты следующие условия:

- опорный узел жестко закреплен в пространстве;

- все узлы сети шарнирные;

- узловые нагрузки определены по основному сечению;
- кольцевые стержни сети идеально пластичные;
- квазимеридианальные стержни бесконечно жесткие.

В книге приведены поучительные примеры разработки и использования геометрических, физических и силовых моделей.

– В работе (Н. В. Канчели, П. А. Батов, Д. Ю. Дробот, 2009) представлена информация о двух построенных мембранных покрытиях. Рассмотрено компьютерное моделирование процесса возведения сооружений, включающее монтаж и демонтаж элементов, изменение условий их закрепления или сопряжения между собой на разных стадиях возведения. К примеру, состояния после: раскладки и заварки листов мембраны; натяжения тросов; добавления веса кровли (летнее состояние); приложения снеговой нагрузки.

Изложен метод жесткостей при анализе НДС конструкций, который позволяет учесть реальные условия работы конструкции, максимально приблизить расчетную схему к реальной конструкции, нелинейный характер работы в процессе нагружения.

Описаны стандартные алгоритмы расчета на прочность оболочечных конструкций с многосвязными узлами. Приведены результаты исследования НДС осесимметричной оболочки при произвольном виде нагружения и тепловом воздействии.

Физико-математическую модель ударного взаимодействия нелинейно-упругой оболочки с телами конечных размеров разработали М. В. Шитикова и Мохаммед Салих Халид Д. М. Салех (2013).

Список литературы к главе 1

1. **Аварии** и катастрофы. Предупреждение и ликвидация последствий : учебное пособие. В 3 кн. Кн. 1 / В. А. Котляровский, К. Е. Кочетков, А. А. Носач, А. В. Забегаев и др. ; под ред. К. Е. Кочеткова, В. А. Котляровского и А. В. Забегаева. – М. : АСВ, 1995. – 320 с.

2. **Алмазов, В. О.** Проектирование железобетонных конструкций по ЕВРОНОРМАМ : монография / В. О. Алмазов. – М. : АСВ, 2007. – 316 с.

3. **Сейсмостойкие** многоэтажные здания с железобетонным каркасом / Я. М. Айзенберг, Э. Н. Кодыш, Н. К. Никитин и др. – М. : АСВ, 2012. – 264 с.

4. **Белов, Н. Н.** Математическое моделирование динамической прочности конструкционных материалов : учебное пособие / Н. Н. Белов, Д. Г. Копаница, Н. Т. Югов. – М. : АСВ, 2013. – 562 с.

5. **Ведяков, И. И.** Стальные конструкции высотных зданий : монография / И. И. Ведяков, Д. В. Конин, П. Д. Одесский. – М. : АСВ, 2014. – 272 с.

6. **Гарагаш, Б. А.** Надежность пространственных регулируемых систем «основание сооружений» при неравномерных деформациях оснований : монография. В 2 т. / Б. А. Гарагаш. – М. : АСВ, 2012. – Т. I. – 416 с.

7. **Гарагаш, Б. А.** Надежность пространственных регулируемых систем «основание сооружений» при неравномерных деформациях оснований : монография. В 2 т. / Б. А. Гарагаш. – М. : АСВ, 2012. – Т. II. – 472 с.

8. **Горбунов-Посадов, М. И.** Расчет конструкций на упругом основании / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 680 с.

9. **Нагрузки** и воздействия на здания и сооружения : справочное пособие / В. М. Гордеев, А. И. Лантух-Лященко, В. А. Паншинский и др. ; под общ. ред. А. В. Перельмутераю – М. : АСВ, 2009. – 528 с.

10. **ГОСТ Р 54257–2010.** Надежность строительных конструкций и оснований.

11. **Григорьев, И. В.** Деформирование, устойчивость и колебания оболочных конструкций: монография / И. В. Григорьев, В. Н. Прокопьев, Ю. В. Твердый. – М. : АСВ, 2001. – 208 с.

12. **Дубровский, В. Б.** Строительство атомных электростанций : учебник / В. Б. Дубровский, П. А. Лавданский, И. А. Енговатов. – М. : АСВ, 2010. – 368 с.

13. **Едличка, С. Ю.** Автоматизация организации и управления строительством объекта / С. Ю. Едличка, Л. В. Обухова // Промышленное гражданское строительство. – 2007. – № 2. – С. 59 – 61.

14. **Еремеев, П. Г.** Пространственные тонколистовые конструкции покрытий : монография / П. Г. Еремеев. – М. : АСВ, 2006. – 560 с.

15. **Жилые** и общественные здания: краткий справочник инженера-конструктора. В 3 т. / под ред. Ю. А. Духовичкого и В. И. Колчунова. – М. : АСВ, 2011. – Т. 1. – 360 с.; Т. 2. – 400 с.; Т. 3. – 520 с.

16. **Зерцалов, М. Г.** Геомеханика. Введение в механику скальных грунтов : учебник / М. Г. Зерцалов. – М. : АСВ, 2014. – 352 с.

17. **Игнатов, В. А.** Основы строительной механики : учебник / В. А. Игнатов, В. В. Голишникова. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2007. – 640 с.

18. **Ильин, В. Н.** Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – М. : АСВ, СПб. : СПбГСН1, 2005. – 425 с.

19. **Кабанцев, О. В.** Расчет и конструирование многоэтажных и высотных монолитных железобетонных зданий. Спецкурс. Комплект лекций : учебное пособие / О. В. Кабанцев. – М. : АСВ, 2013. – 419 с.

20. **Канчели, Н. В.** Строительные пространственные конструкции : учебное пособие / Н. В. Канчели. – М. : АСВ, 2008. – 128 с.

21. **Колмогоров, А. Г.** Расчет железобетонных конструкций по российским и зарубежным нормам : учебное пособие / А. Г. Колмогоров, В. С. Плевков. – Томск : Изд-во «Печатная мануфактура», 2009. – 496 с.

22. **Колчунов, В. И.** Пространственные конструкции покрытий : учебное пособие / В. И. Колчунов, К. П. Пятикрестовский, Н. В. Ключева. – М. : АСВ, 2008. – 352 с.

23. **Корнеева, Е. Б.** Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения : монография / Е. Б. Корнеева. – М. : АСВ, 2009. – 240 с.

24. **Леденёв, В. В.** теоретические основы механики деформирования и разрушений : монография / В. В. Леденёв, В. Г. Однолько, З. Х. Нгуен. – Тамбов : ТГТУ, 2013. – 312 с.

25. **Маилян, Л. Р.** Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм дифференцирования материалов / Л. Р. Маилян, Е. И. Иващенко. – Ростов н/Д : РГСУ, 2006. – 223 с.

26. **МГСН 4.19–2005.** Временные нормы и правила проектирования многофункциональных высотных зданий и зданий-комплексов в городе Москве.

27. **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа : учебное пособие / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Киев : Сталь, 2002. – 597 с.

28. **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа : монография / А. В. Перельмутер, В. Н. Сливкер. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, АСВ, ДМК, Пресс Москвы, 2011. – 736 с.

29. **Пухонто, Л. М.** Долговечность железобетонных конструкций и железобетонных сооружений : монография / Л. М. Пухонто. – М. : АСВ, 2004. – 424 с.

30. **Работнов, Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела : монография / Ю. Н. Работнов. – М. : Физмат, 1979. – 744 с.

31. **Райзер, В. Д.** Теория надежности сооружений : монография / В. Д. Райзер. – М. : АСВ, 2010. – 384 с.

32. **Расторгуев, Б. С.** Проектирование зданий и сооружений при аварийных взрывных воздействиях : учебное пособие / Б. С. Расторгуев, А. И. Плотников, Д. З. Хуснутдинов. – М. : АСВ, 2007. – 152 с.

33. **Руководство** по комплексному освоению подземного пространства крупных городов. – М. : РААСН, 2004. – 208 с.

34. **Саламахин, П. М.** Проектирование мостовых и строительных конструкций : учебное пособие / П. М. Саламахин. – М. : КНОРУС, 2011. – 408 с.

35. **Свод правил по проектированию и строительству: Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного направления арматуры: СП62-101-2008/ФГУП УПП.** – М., 2004. – 53 с.
36. **Сидоров, В. Н.** Математическое моделирование в строительстве : учебное пособие / В. Н. Сидоров, В. К. Ахметов. – М. : АСВ, 2007. – 336 с.
37. **Сливкер, В. И.** Строительная механика. Вариационные основы : учебное пособие / В. И. Сливкер. – М. : АСВ, 2005. – 736 с.
38. **СП 11-105-17.** Инженерно-геологические изыскания для строительства. 4.1 Общие производства. – М., 1998.
39. **СП 20.13330–2011.** Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07. – 85 с.
40. **СП 22.13330–2011.** Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция. СНиП 2.02.01. – 83 с.
41. **СП 52-103–2007.** Железобетонные монолитные конструкции зданий.
42. **СП 63.13330–2012.** Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01–2003.
43. **Тамразян, А. Г.** Влияние реологических свойств структуры на долговечность бетона / А. Г. Тамразян, А. Т. Хетагуров // Бетон и железобетон. – 2001. – № 2. – С. 4 – 6.
44. **Тимошук, В. С.** Современные методы проектирования промышленных зданий / В. С. Тимошук: Стройиздат, Ленинград. отд., 1990. – 231 с.
45. **Управление** программами строительства подземных объектов : монография / В. И. Теличенко, Е. А. Король, П. Б. Качан, Д. С. Коныхов. – М. : АСВ, 2010. – 296 с.
46. **Чернов, Ю. Т.** Вибрации строительных конструкций: научное издание / Ю. Т. Чернов. – М. : АСВ, 2011. – 384 с.
47. **Ильин, В. П.** Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В. П. Ильин, В. В. Карлов, А. М. Маслянников. – М. : АСВ, СПб: СПбГАСУ, 2005. – 425 с.
48. **Шапиро, Д. М.** Метод конечных элементов в строительном проектировании : монография / Д. М. Шапиро. – Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2013. – 181 с.
49. **Шапиро, Д. М.** Теория и расчетные модели оснований и объектов геотехники : учебное пособие / Д. М. Шапиро. – Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2012. – 164 с.
50. **Шпете, Г.** Надежность несущих строительных конструкций / Г. Шпете. – М. : Стройиздат, 1994. – 288 с.
51. **Энгель, Х.** Несущие системы / Х. Энгель. – М. : АСТАстрель, 2007. – 344 с.

2. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛОВ, ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ, ЖЕЛЕЗОБЕТОНА И ФУНДАМЕНТОВ

2.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ И РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

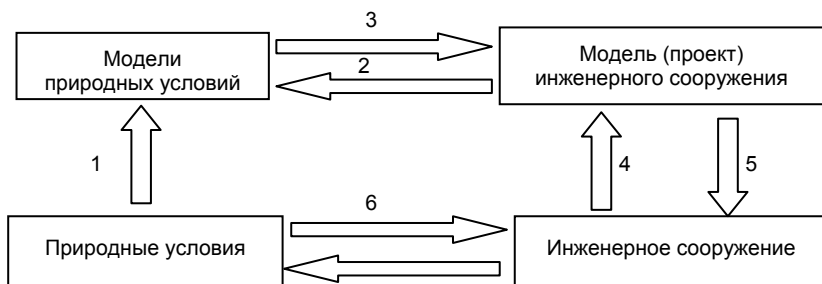
МОДЕЛИ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ. СТРУКТУРНЫЕ МОДЕЛИ В ГЕОЛОГИИ

Расчетной схемой инженерной задачи учитывается лишь ограниченное число показателей свойств горных пород [39]. Те или иные формы и особенности залегания горных пород могут быть учтены в расчете сооружения лишь постольку, поскольку они отражаются на пространственном распределении тех свойств пород основания, которые учитываются расчетной схемой.

В природе наряду с закономерными изменениями свойств пород в пространстве, имеющими четкую геологическую интерпретацию, обычно наблюдаются хаотические колебания результатов испытаний вокруг некоторых средних значений. При этом возникает очень сложная картина нерегулярной изменчивости свойств пород основания. Чтобы ввести в расчет информацию, содержащуюся в многочисленных результатах испытаний свойств пород, приходится прибегать к различным упрощающим предположениям о пространственном распределении свойств.

Таким образом, приходят к выводу, что в проектно-строительном деле, как и в любой целенаправленной деятельности человека, полезно различать два уровня: уровень объектов и уровень моделей. Объектами могут быть инженерное сооружение и тот участок земли, где оно должно быть возведено. Соответственно моделями являются проект сооружения и совокупность сведений о природных условиях строительства, служащих обоснованием проекта. Эту совокупность сведений о природных (и в том числе инженерно-геологических) условиях строительства называют моделью природных условий (и в том числе моделью естественного основания сооружения).

Соотношения между указанными реальными объектами и их моделями могут быть представлены в виде схемы:



В качестве исходных используют три понятия:

- 1) «земная кора»;
- 2) «неоднородность»;
- 3) «определяющая область».

Под однородностью объекта по признаку L понимают независимость L в пределах объектов от координат пространства. Наоборот, неоднородным по признаку L считают объект, в пределах которого L зависит от координат.

Определяющей областью в задаче называют часть земной коры, свойства которой находят в результате решения этой задачи. Единственным свойством определяющей области является ее характерный размер в трех-, двух- или одномерном евклидовом пространстве в зависимости от характера решаемой задачи. При этом понятие «характерный размер» определяющей области будет совпадать, очевидно, с понятием характерного размера в решаемой задаче, широко используемым в механике.

Таким образом, по величине отношения размеров элементов неоднородности к размерам определяющей области эксперимента в каждой конкретной задаче выделяются:

1. Ультранеоднородность (неоднородность высшего порядка), выступающая в форме свойств эквивалентной однородной среды.

2. Микронеоднородность (эффективная неоднородность), обуславливающая разброс значений результатов испытаний. Размер элементов этой неоднородности на порядок-два меньше размера области воздействия.

3. Макронеоднородность (неоднородность низшего порядка), размер элементов которой больше размеров области воздействия или примерно равен ему.

Рассмотрены четыре классификации неоднородности горных пород:

1) по абсолютному размеру элементов неоднородности (В. Д. Ломтадзе, 1970, 1978);

2) по отношению размера элемента неоднородности к размеру определяющей области эксперимента (макро-, микро- и ультранеоднородность);

3) по отношению размеров элементов макронеоднородности к величине шага опробования («хаотическая» «пространственно коррелированная» неоднородность);

4) по относительному размеру элементов макронеоднородности (низкочастотная и высокочастотная составляющие спектра неоднородности).

Среди моделей, используемых в инженерных расчетах, необходимо различать два класса моделей: физические (механические) и структурные (геометрические).

Назначение физической модели состоит в описании свойств горных пород (главным образом механических) в физической точке. Примерами физических моделей могут служить винклеровская модель, линейно-упругое тело, среда с линейным законом сопротивления фильтрации и т.д. Приняв ту или иную физическую модель горной породы, мы должны характеризовать ее свойства соответствующими выборной модели параметрами. В приведенных примерах это будут коэффициент постели, модуль упругости и т.д.

Назначение структурной модели состоит в схематизированном описании естественной изменчивости параметров физических моделей между точками массива горных пород. Примерами структурных моделей могут служить слоистые модели, в которых каждый слой горных пород наделяется свойствами, отличными от свойств смежных слоев, или градиентные модели, в которых параметры непрерывно меняются, например, с глубиной по тому или иному закону.

Физические и структурные модели могут быть однородными или многомерными. Структурные модели полезно различать по их мерности в физическом пространстве, выделяя объемные, плоские и линейные модели.

Задачи научного управления и оптимизации проектно-исследовательских работ делают необходимым широкое применение в технической геологии структурных моделей. С ними теснейшим образом связаны три основные задачи:

- 1) исследование неоднородности горных пород;
- 2) учет неоднородности в ходе разведки и опробования;
- 3) учет неоднородности в расчете инженерных сооружений.

Наиболее целесообразно использовать статистические структурные модели. Это обусловлено «статической природой» свойств горных пород, определяемых в относительно мелкомасштабных экспериментах, нерегулярной изменчивостью усредненных в малом характеристик и дискретным характером геологических наблюдений.

Структурные модели микронеоднородности горных пород и масштабные эффекты. Простейшим эффективным способом изучения микронеоднородности и локальных распределений является анализ влияния размера определяющей области экспериментов (размера проб) на распределение результатов опробования.

Структурные модели макронеоднородности. На стадии формирования осадков неоднородность является их характерной чертой. Отчетливо проявляется неоднородность разных уровней. В силу осадочной дифференциации вещества, фациальной изменчивости условий осадконакопления и изменения режима осадконакопления во времени формируется неоднородность уровней 0 и 1. Относительно высокочастотная смена времени режима осадконакопления наряду с влиянием силы тяжести приводит к формированию слоистости, часто к чередованию слоев разного состава и мощности.

Временные закономерности. В ходе геологической истории на разных этапах петрогенеза меняется геологическая природа неоднородности. Примером могут служить различия в природе фильтрационной неоднородности чередующихся песков и глин, с одной стороны, и трещиноватых песчаников и сланцев, с другой.

Пространственные закономерности. Процессы петрогенеза разделяют на три группы: 1) процессы образования и преобразования пород, связанные с действием геофизических полей и, в первую очередь, силы тяжести, приводящие к вертикальной зональности свойств пород; 2) процессы, формирующие неоднородность свойств пород в горизонтальном направлении и связанные с осадочной дифференциацией и фациальной изменчивостью; 3) наложенные процессы, связанные в большинстве случаев с действием более или менее четко локализованных в пространстве «источников возмущений» (дневная поверхность, контакты интрузий с вмещающими породами и т.п.).

Уплотнение горных пород с глубиной. Закономерные изменения физических свойств горных пород в вертикальном направлении в большинстве случаев определяются двумя факторами: действием геофизических полей (главным образом гравитационного, в меньшей степени теплового) и изменением литологического состава пород по разрезу. Важную роль играет и возраст пород тех или иных агентов. Возникает сложная картина изменчивости свойств пород по глубине, отражающая конкретную геологическую историю исследуемого массива. Изменчивость, связанная с литологическим составом пород, полностью определяется особенностями исследуемых разрезов.

Градиентная модель полностью характеризуется видом и параметрами функций $L(x, y, z)$. Однако ясно, что в действительности по

относительно простому закону может меняться в плане или в разрезе лишь среднее значение свойства L . Таким образом, в качестве расчетной функции $L(x, y, z)$ практически приходится использовать уравнение тренда. Следовательно, как и для кусочно-однородных моделей, не удастся полностью избежать осреднения. Избегают его лишь частично, вводя в расчет информацию о низкочастотной составляющей неоднородности.

МОДЕЛЬ МЕСТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ (ФУССА–ВИНКЛЕРА)

Фусс Н. И., русский академик, в 1798 г. исследовал процесс движения колеса конной повозки с образованием колен, т.е. рассматривал локальное развитие деформаций под нагруженной площадкой. Деформации были полностью необратимыми. По такой схеме ведут себя рыхлые и слабо уплотненные насыпные грунты [11].

Винклер Э. предложил модель грунта в виде системы ничем не связанных между собой упругих пружин. При нагружении локальной нагрузкой будут сжиматься пружины, непосредственно расположенные под площадкой нагружения. После снятия нагрузки пружины полностью распрямляются. При такой модели упругая среда не обладает распределительной способностью. Ее рассматривают как гидростатическое упругое основание [40]. Под влиянием нагрузки балка прогибается и опускается в воду на величину прогиба y . При этом по закону Архимеда создается направленная вверх погонная сила

$$p = -\gamma by,$$

где γ – удельный вес жидкости; b – ширина балки.

Реакция со стороны жидкости пропорциональна прогибу. Эту схему используют для расчета фундаментов. Вместо γ вводится коэффициент жесткости или постели c или k (Н/см³):

$$p = cby.$$

Дифференциальное уравнение упругой балки, к примеру, имеет вид

$$EIy^4 = q = q^0 - p = q^0 - cby$$

или

$$EIy^4 + cby = q^0,$$

где q^0 – внешняя нагрузка.

В ряде случаев принимают переменную величину коэффициента постели в одном $c(x)$ или в двух $c(x, y)$ направлениях. При расчете свай

свайных фундаментов на действие вертикальной и горизонтальной нагрузок, момента (метод К. С. Завриева) принимают переменное по глубине значение коэффициента постели

$$c_z = k_z = \sigma_z / y_z,$$

где k – коэффициент пропорциональности, кН/м⁴.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси сваи

$$EI d^4 y_z / dz^4 - y_z b_p k_z = 0,$$

где b_p – расчетная ширина сваи:

$$\begin{aligned} b_p &= K_\phi (1,5d + 0,5 \text{ м}) & \text{при } d \leq 1,0 \text{ м;} \\ b_p &= K_\phi (d + 1 \text{ м}) & \text{при } d \geq 1,0 \text{ м,} \end{aligned}$$

здесь K_ϕ – коэффициент формы сечения сваи.

При расчете свайного фундамента между боковой поверхностью сваи и грунтом вводят горизонтальные связи, их устанавливают и под торцом сваи.

Жесткость горизонтальных упругоподатливых связей

$$B_z = b_p t k z.$$

При $z = 0$ $B_{z=0} = b_p k t^2 / 8$; при $z = h$ $B_{z=h} = b_p k h t / 2$, где h – глубина подошвы сваи; t – расстояние между связями.

Филоненко-Бородич М. М. (1940) усовершенствовал модель, наделив ее распределительной способностью. Он дополнительно ввел мембрану, перекрывающую с поверхности упругие элементы. При этом включаются в деформирование зоны под площадкой нагружения и прилегающие области полупространства. Ниже рассмотрены и другие предложения по усовершенствованию модели Винклера.

МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

Линейно-деформируемая среда [11, 12, 15, 38]. В этой модели используют уравнения линейной теории упругости. Вводятся допущения о сплошности (гипотеза сплошной среды); однородности; изотропности; идеальной упругости; линейной деформируемости с малыми деформациями и перемещениями, подчиняющимися обобщенному закону Гука, вне зависимости от объема, об отсутствии начальных напряжений; допустимости принципа Сен-Венана (в точках твердого тела, достаточно удаленных от мест приложения внешних нагрузок на малой поверхности тела, напряжения почти не зависят от их распределения по этой малой поверхности тела, а зависят только от главного вектора и главного момента заданных сил).

Рассматривают три основных направления задач теории упругости:

1. Неизвестными являются перемещения точек

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z).$$

Для решения необходимо в физические уравнения подставить геометрические соотношения, а полученные данные – в три уравнения равновесия:

$$\psi_1(u, v, w) = 0, \quad \psi_2(u, v, w) = 0, \quad \psi_3(u, v, w) = 0.$$

Эти операции называют методом перемещений. Основная система уравнений метода перемещений (уравнения Ляме) является синтезом статического, геометрического и физического соотношений.

2. Неизвестными являются напряжения

$$\sigma_x = \varphi_1(x, y, z), \quad \sigma_y = \varphi_2(x, y, z), \quad \sigma_z = \varphi_3(x, y, z);$$

$$\tau_{xy} = \varphi_4(x, y, z), \quad \tau_{yz} = \varphi_5(x, y, z), \quad \tau_{zx} = \varphi_6(x, y, z).$$

Для решения применяют уравнения деформаций, например, неразрывности деформаций, физические и статические уравнения. В результате приходят к соотношениям:

$$F_1(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}) = 0, \dots, F_6(\sigma_x, \dots, \tau_{yz}) = 0.$$

Этот метод называется методом сил.

3. За основные неизвестные приняты некоторые перемещения и напряжения.

Закон Гука. При линейном растяжении

$$\varepsilon_x = \sigma_x / E,$$

где ε_x – относительное удлинение в направлении оси x ; E – модуль упругости при растяжении.

Используя принцип наложения (суперпозиции), получим обобщенный закон Гука при одновременном действии трех нормальных напряжений [41, 46, 48]:

$$\varepsilon_x = 1/E[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = 1/E[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \varepsilon_z = 1/E[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)];$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}; \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}; \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx};$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\nu}{E} (\delta_x + \delta_y + \delta_z); \quad \sigma_{ср} = \frac{1}{3} (\delta_x + \delta_y + \delta_z);$$

$$\varepsilon_{ср} = \frac{1}{3} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Приведем зависимости между деформациями сдвига и касательными напряжениями. При чистом сдвиге (нормальные напряжения на всех гранях равны нулю):

$$\begin{aligned}\tau &= 1/2\sigma \quad (\sigma_z = \sigma, \sigma_y = -\sigma, \sigma_x = 0); \\ \gamma &= 2(1 + \nu)\tau/E, \quad G = E/[2(1 + \nu)]; \quad \gamma = \tau/G; \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G, \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz}/G, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G,\end{aligned}$$

где G – модуль упругости при сдвиге или модуль сдвига.

Зависимость между объемным расширением и суммой нормальных напряжений θ имеет вид

$$e = (1 - 2\nu)\theta / E.$$

Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + F_z &= 0.\end{aligned}$$

В тензорной символике имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0.$$

При движении среды

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(t)}{\partial x_j} + F_i(t) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Закон парности касательных напряжений имеет вид

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

При условии сплошности среды перемещения как функции координат будут непрерывными:

$$u = u(x, y, z); \quad v = v(x, y, z); \quad w = w(x, y, z).$$

Относительные перемещения по направлению координатных осей:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Выполняется тождество

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

где индексы 1, 2, 3 относятся к главным осям. Кроме того:

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

где θ – объемная сжимаемость.

По соотношению Коши:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{zx}.$$

Фундаментальные уравнения теории упругости

Среди пространственных задач теории упругости наибольшее значение имеют задачи Буссинеска (Boussinesq, 1885), Р. Миндлина (Mindlin, 1950) и К. Кельвина (Kelvin). Область, занятая упругой средой, – полупространство $0 \leq z < \infty$.

Задача Буссинеска [12, 46]. Граница области – горизонтальная плоскость $z = 0$ – везде свободна от напряжений, кроме начала координат, в котором приложена сосредоточенная вертикальная сила P (рис. 2.1).

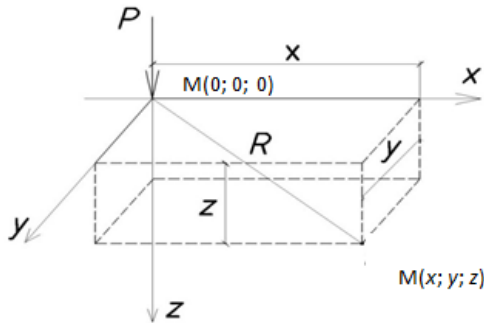


Рис. 2.1. Схема к задаче Буссинеска

Решение задачи дается формулами:

$$\sigma_x = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{x^2 z}{R^5} + \frac{(1-2\nu)}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)x^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right];$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{y^2 z}{R^5} + \frac{(1-2\nu)}{3} \left(\frac{1}{R(R+z)} - \frac{(2R+z)y^2}{(R+z)^2 R^3} - \frac{z}{R^3} \right) \right];$$

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{R^5} = K \frac{P}{z^2} = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2\right)^{5/2}} \frac{P}{z^2};$$

$$\sigma_z = \frac{1}{z^2} \sum_{i=1}^n K_i P_i, \quad \tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{xz^2}{R^5};$$

$$\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{R^5}, \quad K = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{z}\right)^2\right)^{5/2}};$$

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{2\pi} \left[\frac{xyz}{R^5} - \frac{(1-2\nu)}{3} \frac{(2R+z)xy}{(R+z)^2 R^3} \right],$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Перемещения, параллельные осям координат:

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{xz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{x}{R(R+z)} \right];$$

$$v = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{yz}{R^3} - (1-2\nu) \frac{y}{R(R+z)} \right];$$

$$w = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{R^3} + 2(1-\nu) \frac{1}{R} \right].$$

На основе решения задачи Буссинеска путем интегрирования могут быть получены решения задач для полупространства при действии

произвольной вертикальной нагрузки, распределенной по некоторой площади на поверхности полупространства. Некоторые решения этой задачи приводятся в работе [12].

Аналогом задачи Буссинеска является задача о сосредоточенной касательной силе, приложенной к поверхности полупространства. Некоторые формулы этой задачи приводятся в работе [12]. Посредством суперпозиции решений данной задачи и задачи Буссинеска можно получить решение для произвольной наклонной нагрузки на поверхность полупространства.

Возможность применения рассмотренных выше решений для определения напряжений в грунтовых основаниях основывается на приближенной аппроксимации связи между напряжениями и деформациями линейными соотношениями закона Гука, что справедливо для некоторого диапазона допредельных напряженных состояний. Отсюда следует, что данные решения тем лучше будут соответствовать реальному распределению напряжений в грунте, чем меньшее развитие получили в основании области предельного равновесия и тем более течения.

Так как законы деформирования грунта для нагрузки и разгрузки неодинаковы, то следует избегать применения решений теории упругости без учета последовательности изменения силовых факторов, т.е. без учета истории нагружения основания.

Наконец, следует отказаться от формального использования решений теории упругости в случаях, когда решением предсказываются значительные растягивающие напряжения в грунте, поскольку в действительности грунт практически не способен сопротивляться растяжению.

Задача Р. Миндлина [12, 46]. Сила P приложена внутри упругого полупространства на расстоянии c от поверхности основания (рис. 2.2).

Решение задачи дается следующими формулами.

Перемещение в радиальном направлении

$$u = \frac{\text{Pr}}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right],$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига;

$$R_1 = \sqrt{(z-c)^2 + r^2}; \quad R_2 = \sqrt{(z+c)^2 + r^2}.$$

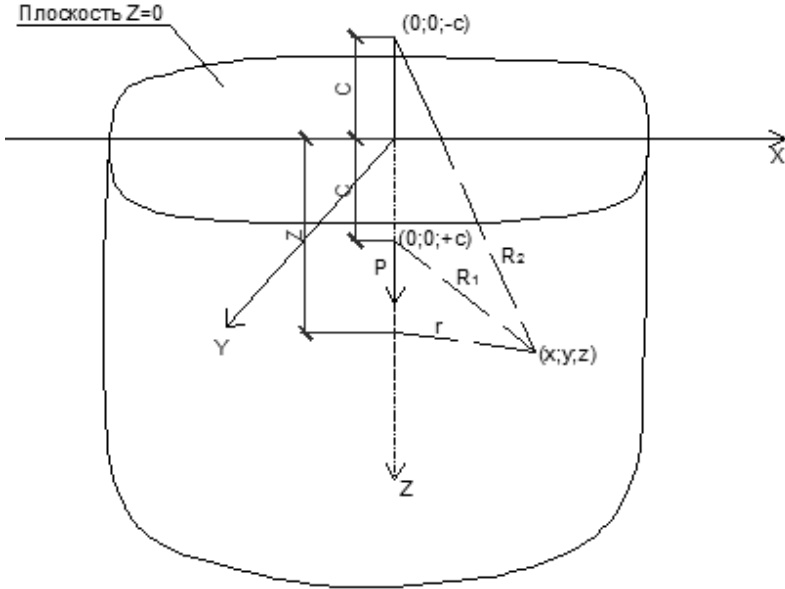


Рис. 2.2. Схема к задаче Р. Миндлина для вертикальной силы, приложенной внутри упругого полупространства

Перемещение в вертикальном направлении

$$w = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right];$$

$$\sigma_x = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} + \frac{(1-2\nu)[3(z-c) - 4\nu(z+c)]}{R_2^3} - \frac{3(3-4\nu)x^2(z-c) - 6c(z+c)[(1-2\nu)z - 2\nu c]}{R_2^5} - \frac{30cx^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{x^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\sigma_y = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{3y^2(z-c)}{R_1^5} + \frac{(1-2\nu)[3(z-c)-4\nu(z+c)]}{R_2^3} - \frac{3(3-4\nu)y^2(z-c)-6c(z+c)[(1-2\nu)z-2\nu c]}{R_2^5} - \frac{30cy^2z(z+c)}{R_2^7} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \left(1 - \frac{y^2}{R_2(R_2+z+c)} - \frac{y^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\sigma_z = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} - \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^3}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)z(z+c)^2-3c(5z-c)}{R_2^5} - \frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7} \right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{Py}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)z(z+c)-3c(3z+c)}{R_2^5} - \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right];$$

$$\tau_{zx} = \frac{Px}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)}{R_2^3} - \frac{3(z-c)^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)z(z+c)-3c(3z+c)}{R_2^5} - \frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7} \right].$$

Решение задачи дается формулами:

$$u = \frac{P}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} \right) \right];$$

$$v = \frac{Pxy}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right];$$

$$w = \frac{Px}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \right];$$

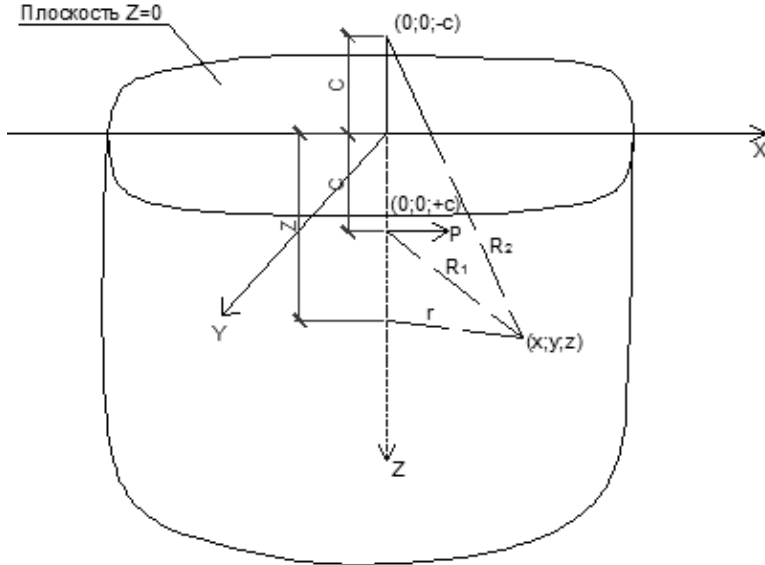


Рис. 2.3. Схема к задаче Р. Миндлина для горизонтальной силы, приложенной внутри упругого полупространства

$$\sigma_x = \frac{Px}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R_2^3} - \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left(3 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} \right) \frac{6c}{R_2^5} \left\{ 3c - (3-2\nu)(z+c) + \frac{5x^2z}{R_2^2} \right\} \right];$$

$$\sigma_y = \frac{Py}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)(5-4\nu)}{R_2^3} - \frac{3y^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)y^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \left\{ -\frac{y^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)} + \frac{6c}{R_2^5} \left(c - (1-2\nu)(z+c) + \frac{5y^2z}{R_2^2} \right) \right\} \right];$$

$$\sigma_z = \frac{Pz}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{R_1^3} - \frac{1-2\nu}{R_2^3} - \frac{3(z-c^2)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)(z+c)^2}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^5} \left(c + (1-2\nu)(z+c) + \frac{5z(z+c)^2}{R_2^2} \right) \right];$$

$$\tau_{yz} = \frac{Pxy}{8\pi(1-\nu)} \left[\frac{3(z-c)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)(z+c)}{R_2^5} + \frac{6c}{R_2^5} \left\{ 1 - 2\nu + \frac{5z(z+c)}{R_2^2} \right\} \right];$$

$$\tau_{zx} = \frac{P}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3} + \frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{3x^2(z-c)}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x^2(z+c)}{R_2^5} - \frac{6c}{R_2^5} \left\{ z(z+c) - (1-2\nu)x^2 - \frac{5x^2z(z+c)}{R_2^2} \right\} \right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{Py}{8\pi(1-\nu)} \left[-\frac{1-2\nu}{R_1^3} + \frac{1-2\nu}{R_2^3} - \frac{3x^2}{R_1^5} - \frac{3(3-4\nu)x^2}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)x^2}{R_2(R_2+z+c)^2} \left\{ 1 - \frac{x^2(3R_2+z+c)}{R_2^2(R_2+z+c)^2} \right\} - \frac{6cz}{R_2^5} \left(1 - \frac{5x^2}{R_2^5} \right) \right].$$

Задача Л. Кельвина [46]. Сила приложена на значительной глубине ($z \rightarrow \infty$), когда ее влияние на деформацию граничной плоскости ($z = 0$) незначительно.

Решение задачи дается следующими формулами.

Перемещения в направлении оси x

$$u_x = \frac{P(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{xz}{r^3}.$$

Перемещения в направлении оси y

$$u_y = \frac{P(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{yz}{r^3}.$$

Вертикальные перемещения

$$w = \frac{P(\lambda + \mu)}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[\frac{z^2}{r^3} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{r} \right].$$

В горизонтальной плоскости приложения нагрузки осадки определяются формулой

$$w = \frac{(3-4\nu)(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)r}.$$

Напряжения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= P/8\pi(1-\nu)\left[(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2}-3r^2z(r^2+z^2)^{-5/2}\right]; \\ \sigma_\theta &= P/8\pi(1-\nu)(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2}; \\ \sigma_z &= P/8\pi(1-\nu)\left[(1-2\nu)z(r^2+z^2)^{-3/2}-3z(r^2+z^2)^{-5/2}\right]; \\ \sigma_{rz} &= P/8\pi(1-\nu)\left[(1-2\nu)r(r^2+z^2)^{-3/2}-3rz^2(r^2+z^2)^{-5/2}\right].\end{aligned}$$

В формулах λ и μ – постоянные Ляме;

$$\begin{aligned}\lambda &= E\nu/(1+\nu)(1-2\nu); \\ \mu &= E/2(1+\nu).\end{aligned}$$

Решение задачи Р. Миндлина применяют для расчета свай (Н. М. Дорошкевич, А. А. Бартоломей и др.), фундаментов мелкого заложения (М. И. Горбунов-Посадов, Р. С. Шеляпин, В. В. Леденёв и др.). Однако по фундаментальному решению упругая среда одинаково сопротивляется сжатию и растяжению. Грунт на растяжение практически не работает. Вследствие этого за силой должны возникать разрывы сплошности (для реальных грунтовых оснований).

Предлагаются [11, 12] приближенные методы снижения растягивающих напряжений, например, введением двойных сил [11, 12] или принятием их равным нулю.

Плоские задачи теории упругости. Задача Фламана [12, 46]. Относится к числу статических задач теории упругости. Областью, занятой упругой средой, в данной задаче является полупространство $0 \leq z < \infty$ (рис. 2.4). Граница области $z = 0$ свободна от напряжений везде, за исключением оси y , вдоль которой приложена линейная нагрузка равномерной интенсивности P .

Рассматриваемая задача принадлежит к классу задач плоской деформации. Это обусловлено структурой области и граничных условий: очевидно, что все плоскости, перпендикулярные оси y , являются в данной задаче равноправными, поэтому все искомые функции не зависят от координаты y .

Следовательно, достаточно рассмотреть только одну из таких плоскостей, например плоскость XOZ . Также очевидно, что компонента v вектора смещения вдоль оси y тождественно равна нулю, однако нормальное напряжение σ_y отлично от нуля. Из сказанного следует, что вектор смещения в задачах этого класса равен

$$\bar{S} = u\bar{i} + w\bar{k},$$

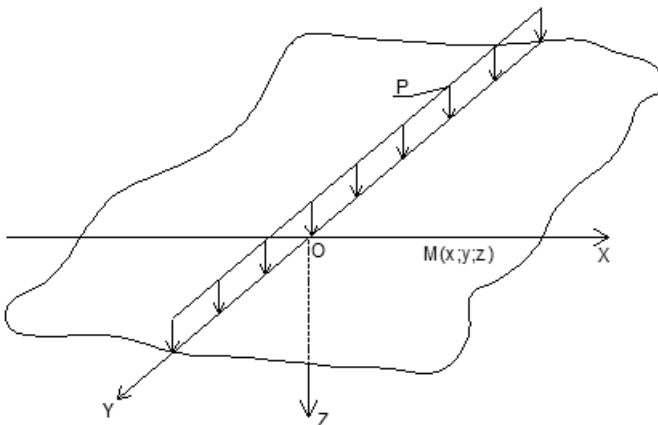


Рис. 2.4. Схема к задаче Фламана

а из соотношений Коши – что тензор деформации имеет вид

$$\Theta = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Из формул закона Гука в этом случае вытекает, что только одно касательное напряжение не равно нулю:

$$\pi = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Решение задачи:

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi} \frac{x^2 z}{(x^2 + z^2)^2}; \quad \sigma_z = \frac{2P}{\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^2}; \quad \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z);$$

$$\tau_{xz} = \frac{2P}{\pi} \frac{xz^2}{(x^2 + z^2)^2}.$$

В реальных ситуациях грунтовое основание нередко вполне обоснованно может рассматриваться как полупространство, однако внеш-

ние нагрузки, как правило, только в немногих случаях и с большой степенью условности могут быть сведены к линейной.

Из этого не следует, однако, практическая бесполезность задачи Фламана. Решения задачи Фламана могут быть легко обобщены на случай полосовой нагрузки, для которого приводится ряд важных инженерных задач.

Перемещения и деформации

Перемещение точки – изменение ее положения:

$$u = x' - x, \quad v = y' - y, \quad w = z' - z.$$

Соотношения между перемещениями и деформациями при пренебрежении поворотами имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Линейные деформации часто вычисляют по формуле:

$$\varepsilon = \frac{(l_f - l_i)}{l_i},$$

где l_i и l_f – длина линейного элемента до и после деформации.

Используют и другие представления деформации (табл. 2.1).

Деформациями сдвига называется степень изменения прямого угла при деформировании:

$$\begin{cases} \gamma^L = \pi/2 - \xi_f; \\ \gamma^E = \xi_i - \pi/2, \end{cases}$$

где ξ_f – конечное значение угла, который до деформации был прямым; ξ_i – начальное значение угла, который после деформации становится прямым.

В теории упругости принимают малыми величины такие, когда производимые перемещения малы, так что ими можно пренебречь по сравнению с единицей, а их произведениями и отношениями по сравнению с самими производными.

Рассматривают случаи, когда малы только деформации или только повороты и деформации, или повороты.

2.1. Различные определения линейной деформации

Деформация	Определение	Деформация	Определение
1. Деформация Лагранжа (техническая)	$\varepsilon^L = \frac{l_f - l_i}{l_i}$	6. Гибридное определение	$\frac{l_f^2 - l_i^2}{2l_f l_i}$
2. Деформация Лагранжа (тензорная)	$\varepsilon^L = \frac{l_f^2 - l_i^2}{2l_i^2}$	7. Деформация Эйлера (техническая)	$\varepsilon^E = \frac{l_f - l_i}{l_f}$
3. Деформация Грина–Сен-Венана	l_f^2 / l_i^2	8. Деформация Эйлера (тензорная)	$\varepsilon^E = \frac{l_f^2 - l_i^2}{2l_f^2}$
4. Степень удлинения	l_f / l_i	9. Деформация Альманзи–Коши (тензорная)	l_i^2 / l_f^2
5. Натуральная деформация	$l_n l_f / l_i$	10. Величина, обратная степени удлинения	l_i / l_f

В случае больших деформаций и поворотов имеют место соотношения:

$$l_f = \sqrt{(1 + \partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2};$$

$$l_i = \sqrt{(1 - \partial u / \partial x)^2 + (\partial v / \partial x)^2 + (\partial w / \partial x)^2};$$

$$\varepsilon_x^L = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1;$$

$$\varepsilon_y^L = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} - 1;$$

$$\varepsilon_z^L = \sqrt{1 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} - 1.$$

Расчет деформаций основания

Совместная деформация основания и сооружения может характеризоваться:

- абсолютной осадкой отдельного фундамента S_i ;
- средней осадкой основания сооружения S_m ;
- относительной неравномерностью осадок фундаментов

$$\overline{\Delta S} = |S_i - S_{i-1}| / L_0;$$

- креном фундамента или сооружения в целом;
- относительным углом закручивания здания или сооружения θ ;
- горизонтальным перемещением фундамента или сооружения в целом U .

При этом

$$S_i \leq [S], \quad I \leq [I], \quad U_i \leq [U], \quad \overline{\Delta S} \leq [\overline{\Delta S}].$$

В скобках приведены предельно допустимые значения.

Конечные величины осадок вычисляют различными способами.

Приведем основные зависимости по определению вертикальных перемещений для однородного линейно-деформируемого основания (Н. А. Цытович, 1963).

Вертикальные перемещения точек на плоскости $z = 0$

$$w(x, y, 0) = \frac{P(1 - \nu^2)}{\pi ER} = \frac{P}{\pi CR},$$

где $C = E/(1 - \nu^2)$.

Вертикальные перемещения нагруженной прямоугольной площади от действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью:

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi C} \iint_F \frac{p(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta.$$

Средняя осадка всей нагруженной площади

$$w_m = \frac{\int_0^{l_1} \int_0^{b_1} w_{x,y} dy}{l_1 b_1},$$

где l_1, b_1 – полудлина и полуширина площадки соответственно.

Осадки в центре круга радиусом r :

$$w(0) = \frac{p2r}{C};$$

то же по периметру круга:

$$w(r) = \frac{4 rp}{\pi C};$$

средняя осадка всей загруженной площадки

$$w_m = \frac{16rp}{3\pi C};$$

средняя осадка абсолютно жесткого штампа

$$w = \frac{\pi pD}{4 C};$$

в общем виде

$$S_y = \frac{pb\omega(1-\nu^2)}{E},$$

где $w(0)$ – максимальная осадка над центром площадки; w_m – величина средней осадки; ω – коэффициент формы фундамента.

Метод послойного суммирования применяют при $b < 10$ м и $E_i \leq 10$ МПа. Он заключается в определении осадок элементарных слоев основания в пределах сжимаемой толщи от дополнительных напряжений σ_{zp} . Среднее давление (под центром, серединой стороны и краем фундамента) ограничивают пределом (R или $1,2R$; $1,5R$), при котором области возникающих пластических деформаций незначительно нарушают линейную деформируемость основания. Толщину сжимаемой толщи H_c определяют из соотношения напряжений и собственного веса грунта σ_{zp} и дополнительных нагрузок от внешней нагрузки σ_{zp} . Часто принимают $z = H_c$ из условия

$$\sigma_{zp} = 0,2\sigma_{zg}.$$

При наличии слабых слоев грунта ($E \leq 5$ МПа)

$$\sigma_{zp} = 0,1\sigma_{zg}.$$

Однородные слои грунта ниже подошвы мысленно разделяют на слои толщиной $h_i \approx 0,4b$.

Используют следующие зависимости:

$$\sigma_{zg} = \gamma' d_n + \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i;$$

$$\sigma_{zp} = \alpha(p - \sigma_{zg, i}) = \alpha p_0;$$

$$\alpha = f(\xi = 2z/b, \eta = l/b);$$

$$S = \beta \sum_{i=1}^n (\sigma_{zpi} h_i) / E_i .$$

В основу метода послойного суммирования положены следующие допущения:

- грунт в основании представляет собой сплошное, изотропное, линейно-деформированное тело;
- осадка обусловлена действием только напряжения σ_{zp} , остальные пять компонентов напряжений не учитываются;
- боковое расширение грунта в основании невозможно;
- напряжение σ_{zp} определяется под центром подошвы фундамента;
- при определении напряжения σ_{zp} различием в сжимаемости грунтов отдельных слоев пренебрегают;
- фундаменты не обладают жесткостью;
- деформации рассматриваются только в пределах сжимаемой толщи мощностью H_c ;
- значение коэффициента β принимается равным 0,8 независимо от характера грунта.

Модель линейно-деформируемого слоя. Применение модели линейно-деформируемого пространства приводит к неограниченному по глубине распределению напряжений. Фактически напряжение под фундаментом распространяется на глубину 1,5...2,0 м, что подтверждено экспериментами авторов. В связи с этим, К. Е. Егоровым основана модель в виде линейно-деформируемого слоя [12, 15].

Расчет осадка по этой модели допускается (СНиП) в следующих случаях:

- а) $b(d) \geq 10$ м и $E \geq 10$ МПа;

б) в пределах сжимаемой толщины H_c , определенной как для линейно-деформируемого пространства, залегает слой с $E \geq 100$ МПа и толщиной h_1

$$h_1 \geq H_c(1 - \sqrt[3]{E_2/E_1}),$$

где E_2 – модуль деформации грунта подстилающего слоя с E_1 .

Расчетная толщина линейно-деформируемого слоя H_c применяется до кровли малосжимаемых грунтов с $E \geq 100$ МПа. При $E \geq 10$ МПа и $b(d) \geq 10$ м

$$H_c = (H_0 + \psi_b)K_p,$$

где H_0, ψ_b применяются для оснований, сложенных глинистыми грунтами – 9 и 0,15 м, песчаными – 6 и 0,1 м; K_p – коэффициент; $K_p = 0,8$ при $p = 100$ кПа и $K_p = 1,2$ при $p = 500$ кПа.

При промежуточных значениях давления используют интерполяцию.

Если основание сложено глинистыми и песчаными грунтами, то

$$H_c = H_s + h_{cl},$$

где H_c – толщина слоя, вычисляемая по предыдущей формуле, в предположении, что основание сложено только песчаными грунтами; h_{cl} – суммарная толщина слоя глинистых грунтов от подошвы до глубины, равной $h_{cl} = H_c$, вычисленной в предположении, что основание сложено только глинистыми грунтами.

Осадки основания вычисляются по формуле

$$S = \frac{pbK_c}{K_m} \sum_1^n \frac{k_i - k_{i-1}}{E_i},$$

где p – среднее давление под подошвой фундамента; K_c – коэффициент, $K_c = \frac{2H_c}{b}$; $K_m = f(E, b(d))$; k_i, k_{i-1} – коэффициенты определяют по таблицам в зависимости от формы подошвы фундамента и глубины, на которой расположены подошва и кровля i -го слоя.

При этом вводят следующие допущения:

– грунт рассматриваемого слоя представляет собой линейно-деформируемое тело;

- деформации в слое грунта развиваются под действием всех компонентов напряжений;
- осадка фундамента равна средней осадке поверхности слоя грунта, развивающейся под действием местной равномерно распределенной нагрузки;
- фундамент не обладает жесткостью;
- распределение напряжений в слое грунта соответствует задаче однородного полупространства, а жесткость подстилающего слоя учитывается поправочным коэффициентом K_c .

Метод эквивалентного слоя Н. А. Цытовича. Эквивалентным слоем называют толщу грунта h_3 , которая в условиях невозможности бокового расширения (при загрузке всей поверхности сплошной нагрузкой) дает осадку, равную по величине осадке фундамента, имеющего ограниченные размеры в плане при нагрузке той же интенсивности, т.е. пространственная задача заменяется одномерной. Мощность эквивалентного слоя зависит от коэффициента Пуассона ν , коэффициента формы площади, жесткости фундамента ω и его ширины b :

$$h_3 = A \omega b,$$

где $A = (1 - \nu)^2 / (1 - 2\nu)$.

Осадка фундамента однородного основания

$$S = p_0 h_3 m_\nu,$$

где p_0 – дополнительное давление по подошве фундамента; m_ν – коэффициент относительной сжимаемости грунта.

Криволинейная эпюра давления в основании с достаточной для практики точностью заменяется эквивалентной по площади треугольной эпюрой с высотой

$$H_c = 2h_3.$$

Основные допущения:

- грунт однороден в пределах полупространства;
- грунт представляет собой линейно-деформируемое тело, т.е. деформации его пропорциональны напряжениям;
- деформации грунта в пределах полупространства принимаются по теории упругости (по формуле Шлейхера [12]):

$$S = \omega b (1 - \nu^2) p_0 / E_0.$$

КОМБИНИРОВАННЫЕ МОДЕЛИ

Упругое основание с двумя коэффициентами постели. Уравнение изгиба балки представлено в виде

$$EJ_y^4 - k_2 y'' + k_1 y = q.$$

Пастернак П. Л. [31] получил это уравнение исходя из представления об упругом сопротивлении основания поворотам оси балки. Реакция основания предполагается в виде поперечной нагрузки $p = -k_1 y$ и в виде распределенных моментов $m = k_2 y'$. Изгибающие моменты

$$M = -\iint (q - p) dx^2 - \int m dx = -EJ_y''.$$

После двойного дифференцирования приходят к уравнению изгиба балки.

Власов В. З. учитывал деформацию сдвига основания. Основание создает вертикальные реакции $p_1 = -y k_1$ и поперечные силы $Q = -y' k_2$, вызывающие $p_2 = -Q' = y'' k_2$.

Тогда

$$p = p_1 + p_2 = -k_1 y + k_2 y''.$$

Филоненко-Бородич М. М. в развитие модели Фусса–Винклера ввел мембрану, перекрывающую с поверхности упругие элементы. При этом включаются в работу не только область под площадкой нагружения, но и прилегающие к ней области полупространства. В зависимости от соотношения жесткостей мембраны и основания поверхность деформирования принимает ту или иную форму. Реакция основания пропорциональна кривизне оси балки. При этом

$$p_1 = k_1 y'; \quad p_2 = k_2 y''.$$

МОДЕЛЬ ЗЕРНИСТОЙ СРЕДЫ

Покровский Г. И. (1923) и Кандауров И. И. (1959) показали, что характер развития напряжений в зернистом основании подчиняется статистическим закономерностям. Эпюры вертикальных напряжений на различных горизонтах описываются законом нормального распределения.

Предложены модели безраспорные (блочные) и распорные зернистые среды (И. И. Кандауров). Анализ моделей приведен в работе [15].

В безраспорных средах не возникает распора (клинового эффекта) при распределении внешней нагрузки между частицами внутри массива. Примерами могут служить сухие кирпичные и бутовые кладки.

Для распорных зернистых сред характерны образование распора при передаче внешних нагрузок и невозможность воспринимать растягивающие напряжения. К ним относят песчаные и крупнообломочные грунты.

Пусть на блочную среду действует единичная сосредоточенная сила F . На два блока нижерасположенного ряда передается одинаковая нагрузка, равная $1/2F$ и т.д. В результате происходит распределение вертикальных усилий F_z по блокам подобно системе чисел треугольника Паскаля, с помощью которого вычисляются биномиальные коэффициенты.

В теории вероятности доказывается, что кривая биномиального распределения может быть аппроксимирована кривой нормального распределения. Тогда функция распределения усилий по блокам принимает вид

$$F_{mn} = F = \sqrt{\frac{2 \exp\left(\frac{-2m^2}{n}\right)}{\pi n}},$$

где n , m – порядковый номер слоя и блока в слое в начале координат в точке приложения силы F .

Вертикальные напряжения σ_z от сосредоточенной линейной нагрузки F_0 равны

$$\sigma_z = F_0 = \sqrt{\frac{a \exp\left(\frac{-ax^2}{2z}\right)}{2\pi n}},$$

где a – коэффициент структуры, зависящий от геометрических параметров блока и коэффициента неравномерности передачи усилий между ними.

В распорных средах передача вертикальных усилий F_z от частицы к частице осуществляется через систему взаимных контактов. Величина контактных напряжений зависит от модуля упругости обломочного материала, размера частиц и количества точек взаимного контакта. Если контактные напряжения превышают предел прочности материала, то контактные грани разрушаются, сглаживаются и происходит измельчение частиц. Кроме того, происходит взаимное скольжение и поворот частиц.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В работе [25] модель Винклера представлена в виде

$$p(x) = c\omega(x),$$

где $x\{x_1, x_2\}$ – координатный вектор на поверхности контакта; c – коэффициент пропорциональности (постели); $b = 1/c$ – податливость грунтового массива; c, b – случайные функции.

Болотин В. В. и Соболев Д. Н. рассматривали $c(x)$ как случайную однородную (стационарную) функцию гауссовского типа. При значительном разбросе упругих свойств основания гауссовская модель может стать неприемлемой.

Для расчета реологических свойств винклеровской модели предложено уравнение

$$p(x, t) = c(x)\left[\omega(x, t) - \int_0^t \omega(x, t)R(t, r)dr\right],$$

где $p(x, t)$ – реакция основания; $R(t, r)$ – ядро релаксации, представляющее собой резольвенту ядра ползучести $K(t, r)$.

В этом уравнении упругие свойства c не зависят от времени.

Для упругого полупространства как случайно неоднородной среды линейные соотношения имеют вид

$$\sigma_{jk} = \lambda_{jk}l_m \varepsilon_{lm},$$

где σ_{jk} и ε_{lm} – компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно; $\lambda_{jk}l_m$ – тензор коэффициентов упругости;

$$\lambda_{jk}l_m = \lambda \sigma_{jk} \sigma_{lm} + \mu (\delta_{jl} \sigma_{km} + \sigma_{jm} \sigma_{kl}),$$

здесь δ_{jk} – символ Кронекера.

Стохастические соотношения с учетом реологических свойств имеют вид

$$E(t)\varepsilon_x(t) = \sigma_x(t) - v(t)[\sigma_y(t) + \sigma_k(t)] + \\ + \int_0^t \left\{ \sigma_x(r) - v(\tau)[\sigma_y(\tau) + \sigma_z(\tau)] \right\} K(t, \tau) d\tau.$$

Пшеничкин А. П. обосновал [37] обобщенную расчетную модель стохастического грунтового основания. Физико-механические характеристики основания $\Pi(r)$ с учетом микро- и макронеоднородности представлены в виде тренда и случайной флуктуационной составляющей случайных полей:

$$\Pi(r) = \bar{\Pi}(r) + \tilde{\Pi}(r).$$

Например, модуль деформации рассматривают в виде случайной функции геометрических координат

$$E_0(x, y, z) = \bar{E}_0(x, y, z) + \tilde{E}_0(x, y, z).$$

Описание таких случайных полей возможно методами теории случайных функций. Они являются статистически неоднородными случайными полями. Неоднородность поля связана с переменностью в пространстве геометрических координат математического ожидания.

Модель с переменным по глубине модулем деформации. В большинстве работ [12] рекомендуется степенная зависимость от глубины

$$E(z) = E_0 z^n,$$

где E_0 , n – параметры; z – расстояние от данной поверхности.

Модели слоистых оснований. При числе упругих слоев не больше трех материал каждого из них принимают как случайно-неоднородный со своими статистическими характеристиками. При большем числе слоев, имеющих преимущественно горизонтальное направление, основание рассматривают как случайно-неоднородную ортотропную среду.

Пусть толщина деформируемого массива H , число слоев n . Средневзвешенный модуль деформации

$$E = (1/H) \sum h_j E_j$$

или

$$E = \sum h_j \sigma_j / \sum (h_j \sigma_j / E_j),$$

где σ_j – среднее нормальное напряжение в j -м слое.

Уравнения ползучести для балок и плит на неоднородном основании с постоянными во времени свойствами. В основу принята простейшая модель ползучести

$$\sigma(t) = E(t)\left[\varepsilon(t) - \int_0^t \varepsilon(r)R(t, \tau)d\tau\right];$$

$$\varepsilon(t) = \left[\sigma(t) + \int_0^t \sigma(r)K(t, \tau)d\tau\right] 1/E(t),$$

где $E(t)$ – мгновенный модуль упругости; $K(t, r)$ – ядро ползучести; $R(t, r)$ – ядро релаксации.

Реакция основания для прогиба балки $\omega(x, t)$ при коэффициенте упругости основания (коэффициента постели) $c(x)$ по аналогии с вышенаписанными уравнениями можно представить в виде

$$p(x, t) = c(x)\left[\omega(x, t) - \int_0^t \omega(x, \tau) R(t - \tau)d\tau\right].$$

Уравнение изгиба балки представлено в виде

$$EJ(d^4\omega/dx^4) + c(x)\omega(x, t) - c(x)\int_0^t \omega(x, \tau)R(t - \tau)d\tau = q(x, t),$$

где EJ – изгибная жесткость балки; $q(x)$ – интенсивность нормальной нагрузки.

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ (ФИЛЬТРАЦИОННАЯ КОНСОЛИДАЦИЯ СЛОЯ ГРУНТА)

В работах [49, 52] приведены модели для описания механических процессов, происходящих в земной коре и возникающих в результате крупномасштабной строительной деятельности людей, под действием массовых, гравитационных, сейсмических и других процессов.

Изложены модели и теории консолидации и ползучести многофазных грунтов; лессовых и набухающих вечно-мерзлых грунтов. В работе [49] используются решения В. А. Флорина (1961), Ю. К. Зарецкого (1967), Н. У. Арутюняна (1952), К. Терцаги (1925, 1961), Л. С. Лейбензона (1947), С. С. Вялова (1959, 1978) и др.

В основу теории консолидации в многофазных грунтах положена модель, состоящая из упруговязкого скелета и сжимаемой газосодержащей жидкости.

Для описания НДС многосвязной среды в пространстве и времени использованы уравнения равновесия, геометрические уравнения, физические уравнения для скелета грунта и газосодержащей поровой жидкости.

Так, одно из уравнений равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = x - \frac{\partial p_w}{\partial x},$$

где p_w – поровое давление.

Физические уравнения для скелета грунта базируются на деформационной теории пластичности (Л. М. Качанов, 1969).

Зависимости между напряжениями и деформациями при изменении объема имеют вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(t) &= 2\psi_i^0 \sigma_i(t) + 2\tilde{\phi}_i[\psi_i \sigma_i(t)], \\ \varepsilon_v(t) &= \psi_v^0 \sigma_v(t) + \tilde{\phi}_v[\psi_v \sigma_v(t)];\end{aligned}$$

где $\tilde{\phi}_i[y(t)]$, $\tilde{\phi}_v[y(t)]$ – интегральные операторы Вольтера с ядрами $k_i(t, \tau)$ и $k_v(t, \tau)$, характеризующие скорость ползучести скелета грунта при изменении формы и объема.

Пусть слой грунта находится под действием сплошной равномерно распределенной нагрузки, безгранично распространенной во все стороны по горизонтальной поверхности слоя. Необходимо сделать прогноз развития одномерной консолидации грунта.

Принимаются следующие допущения:

- поровая вода и минеральные частицы грунта не сжимаемы;
- характеристики сжимаемости и фильтрации грунта в рассматриваемом диапазоне изменения давлений являются величинами постоянными;
- фильтрация поровой жидкости подчиняется закону Дарси;
- ползучесть скелета грунта учитывается;
- все поры грунта полностью заполнены водой;
- в момент приложения нагрузки вся она передается на поровую воду;
- когда отсутствует нагрузка, поровое давление равно нулю;
- часть давления от нагрузки передается на скелет грунта p_z , а другая – на поровую воду, создавая в ней напор p_w , т.е. $p_0 = p_z + p_w$;
- с течением времени давление на воду будет уменьшаться, а на скелет возрастать.

Для полностью водонасыщенного грунта соблюдаются условия неразрывности – увеличение расхода воды равно уменьшению пористости:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial n}{\partial t}.$$

По закону ламинарной фильтрации

$$q = -K_{\phi} \frac{\partial H}{\partial z}$$

и

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -K_{\phi} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}.$$

Учитывая, что напор воды H равен давлению в воде p_w (порovому давлению), деленному на удельный вес воды γ_w , то

$$p_w = p_0 - p_z; \quad H = p_w / \gamma_w; \quad H = (p_0 - p_z) / \gamma_w;$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{K_{\phi}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2}.$$

Вводится коэффициент консолидации

$$C_v = \frac{K_{\phi}}{m_v \gamma_w},$$

где m_v – коэффициент относительной сжимаемости грунта.

Тогда

$$C_v \frac{\partial^2 p_z}{\partial z^2} = \frac{\partial p_z}{\partial t}.$$

Это дифференциальное уравнение одномерной задачи теории фильтрационной консолидации водонасыщенного грунта.

Давление в скелете грунта на глубине z

$$p_z = p_0 \left[1 - \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2h} e^{-N} - \frac{4}{3\pi} \sin \frac{3\pi z}{2h} e^{-9N} - \dots \right],$$

где e – основание натуральных логарифмов;

$$N = \frac{\pi^2 C_v t}{4h_{\phi}^2},$$

здесь h_{ϕ} – максимальная длина пути фильтрации, $h_{\phi} = h_{\text{сл}}/2$.

ДИНАМИКА СЫПУЧИХ СРЕД

В условиях плоской деформации движущейся сыпучей среды следует ввести в рассмотрение пять неизвестных функций: $X_x(x, y, t)$; $Y_y(x, y, t)$; $X_y(x, y, t)$; $v_x(x, y, t)$; $v_y(x, y, t)$ – три компонента тензора напряжений и две проекции вектора скорости на оси x и y .

Исходя из следующей системы уравнений, описывающей состояние движущейся сыпучей среды [10]:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}; \\ Y - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right) &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}; \\ (X_x - Y_y)^2 + 4X_y^2 &= \sin^2 \varphi (X_x + Y_y + 2kctg\varphi)^2; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{2X_y}{X_x - Y_y} &= \frac{\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \pm \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) tg\varphi}{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \pm \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) tg\varphi}. \end{aligned}$$

Уравнения движения среды являются условием предельного равновесия, заключающимся в том, что в каждой точке среды максимальная разность касательного напряжения и соответствующего нормального напряжения, умноженного на тангенс угла внутреннего трения φ , равна предельному напряжению сцепления k . Условие

$$|\tau_n| - \sigma_n tg\varphi = k$$

выполняется в каждой точке на двух площадках, составляющих с направлением максимального главного нормального напряжения σ_1 острые углы $\pm\gamma$, где $\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

Два семейства линий, совпадающих в каждой точке с направлениями этих площадок, принято называть линиями скольжения. Уравнение представляет собой условие сплошности для несжимаемой среды и выражает условие совпадения направления максимальной скорости деформаций сдвига с одним из семейств линий скольжения, которое будем называть в дальнейшем активным семейством.

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Реология – наука, устанавливающая общие законы образования и развития во времени деформаций любого вещества от различных причин в различных термодинамических и физико-химических условиях.

Для прогноза деформации неустановившейся затухающей ползучести применяют линейную (в отношении напряжений) теорию наследственной ползучести Больцмана–Вольтера [7, 30, 48, 49, 5].

Уравнение состояния при однократном нагружении имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + k(t - t_0)\sigma(t_0)t_0,$$

где $\varepsilon(t)$ – изменение относительной деформации во времени; $\sigma(t)/E$ – мгновенная деформация в момент времени t при модуле E ; $k(t - t_0)\sigma(t_0)t_0$ – ядро ползучести.

При непрерывном нагружении

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} \int_0^t k(t - t_0)\sigma(t_0)\Delta t_0.$$

Ядро ползучести – скорость ползучести при постоянном напряжении, отнесенная к единице действующего давления.

Для глинистых грунтов

$$k(t - t_0) = \delta e^{-\delta(t-t_0)},$$

где δ и δ' – параметры ползучести, определяемые опытным путем.

Уравнение Бингама–Шведова имеет вид

$$\frac{1}{r}\varepsilon_{yz} = \tau - \tau_0,$$

откуда

$$\tau = \tau_0 + v \frac{d\varepsilon}{dt},$$

где $v = 1/\eta$ – коэффициент вязкости; τ_0 – начальное ($\varepsilon_{yz} = 0$) двиговое напряжение.

Месчан С. Р. предложил модели формоизменения глинистых грунтов при сдвиге под действием уплотняющего давления. Эксперименты подтвердили положения Маслова–Арутюняна, теории наследственной ползучести стареющих материалов.

Уравнение ползучести принято в виде

$$\gamma_t = \omega(t, \sigma_z) f(\tau, \sigma_z, t),$$

где $\omega(\sigma_z, t)$ – мера сдвиговой ползучести; $f(\tau, \sigma_z, t)$ – функция касательного напряжения, зависящая от σ_z ; $f(\tau, \sigma_z, t) = \alpha(\sigma_z, t)\tau + \beta(\sigma_z, t)\tau n(\sigma_z)$; n – показатель нелинейности деформации сдвиговой ползучести.

Уравнение ползучести при простом сдвиге для любого его состояния получено в виде (закон ползучести при простом сдвиге)

$$\gamma_t = \omega(t - \nu) f(\tau / \tau_{f.st}) = \omega(t - \nu) f\left(\frac{\tau}{\sigma_z \operatorname{tg} \phi + c}\right),$$

где ν – момент приложения касательного напряжения; $\tau_{f.st}$ – стандартное сопротивление сдвигу.

Для описания процессов термо- и виброползучести предложено уравнение

$$\gamma_t = \omega(t - \nu) f[\tau / \tau_{f.st}(\sigma_{z,t} - \nu, T_0, a_0, \omega_0, \omega)],$$

где T_0 – температура; ω_0 – частота колебаний; a_0 – амплитуда колебаний.

Ползучесть может происходить с постоянной или уменьшающейся скоростью, но может возникать (при больших уровнях напряжений) и незатухающая с увеличивающейся скоростью (прогрессирующая ползучесть), приводящая к разрушению.

При приложении или снятии нагрузок происходят процессы уплотнения или разбухания водонасыщенного грунта, т.е. возникают процессы отжижения или притока. Продолжительность консолидации определяется водопроницаемостью грунта, структурной прочностью, ползучестью скелета, характером напластований.

Для прогноза развития осадок во времени используют теорию фильтрационной консолидации. При этом рассматривают полностью водонасыщенные грунты. Вода из пор отжимается только в вертикальном направлении. В начальный момент времени (приложения нагрузок) давление передается на воду, а затем постепенно на скелет грунта.

Осадка в любой момент времени

$$S_t = US,$$

где U – степень уплотнения во времени; S – конечная осадка, например, вычисленная по СНиП.

Величина $U = f(N_R)$, где $N_R = \pi^2 C_v t / 4h_s$, t – время от начала приложения нагрузки, h_s – толщина уплотняемого слоя, C_v – коэффициент консолидации,

$$C_v = K_\phi E / \gamma_\omega \beta,$$

здесь K_ϕ – коэффициент фильтрации, $\beta = f(v)$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Упругость – свойство тел восстанавливать свои размеры и форму после удаления внешних сил, вызвавших деформацию. Наибольшее применение получила линейная теория упругости, когда деформация пропорциональна нагрузкам.

Пластичность – свойство твердых тел приобретать необратимые (остаточные) деформации, называемые пластическими.

Модель идеально пластического тела является классической моделью тела, способного деформироваться необратимо и приобретать остаточные деформации. Простейшим видом идеально пластического тела является модель изотропного несжимаемого жесткопластического тела. Эта модель не учитывает упругую деформацию. Это имеет место, когда работа внутренних сил на пластических деформациях существенно превосходит работу внутренних сил на упругих деформациях. Такие тела не деформируются, пока напряжения не достигнут предела текучести.

Для сложного напряженного состояния условие пластичности или текучести имеет вид

$$f(\sigma_{ij}) = 0; \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений.

При $f(\sigma_{ij}) < 0$ имеет место жесткое состояние, при $f(\sigma_{ij}) = 0$ – пластическое.

В пространстве компонент тензора напряжений условия пластичности изображаются в виде некоторой поверхности текучести. В течение процесса деформирования жесткопластическое тело сохраняет начальную изотропию или анизотропию.

Модель жесткопластического тела включает также свойство несжимаемости материала.

Если в теории упругости рассматривается связь между напряжениями и деформациями, то в теории идеальной пластичности – связь между напряжениями и скоростями пластической деформации.

Мощность диссипации механической энергии при пластическом деформировании определяется равенством

$$D = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij},$$

где $\dot{\epsilon}_{ij}$ – компоненты скорости пластической деформации.

Согласно принципу Р. Мизеса

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq \sigma_{ij}^0 \dot{\epsilon}_{ij}$$

или

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0,$$

где σ_{ij} – значения компоненты напряжения, соответствующие заданным значениям $\dot{\epsilon}_{ij}$; σ_{ij}^0 – возможные значения компонент напряжений, удовлетворяющие условию пластичности.

Следствием принципа максимума Р. Мизеса является зависимость

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}};$$

$$\lambda > 0 \text{ при } f(\sigma_{ij}) = 0,$$

$$\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0;$$

$$\lambda = 0 \text{ при } f(\sigma_{ij}) < 0,$$

$$\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0.$$

Приведенная зависимость является ассоциированным законом пластического течения, а функция $f(\sigma_{ij})$ является пластическим потенциалом.

Важным понятием в теории идеальной пластичности является диссипативная функция (потенциал напряжения)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}}.$$

В пространстве компонент скоростей пластической деформации диссипативная функция имеет геометрический образ в виде поверхности равного уровня мощности диссипации внутренних сил.

Для решения статических задач привлекаются (М. И. Ерхов, 1978):

а) уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

б) граничные условия для напряжений

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } S_p;$$

в) условия пластичности

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0;$$

г) условия несжимаемости и граничные условия для скоростей и перемещений

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^s \text{ на } S_u;$$

д) соотношения ассоциированного закона течения

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

где x_i – компоненты вектора объемных сил; p_i – компоненты вектора поверхностной нагрузки; S_p и S_u – части поверхности тела S , на которых заданы поверхностные нагрузки и скорости перемещений; n_j – компоненты к нормали поверхности S .

При малых деформациях

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}).$$

При действии динамических нагрузок на конструкции из жестко-пластического материала вводят следующие условия:

а) уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} - X_i - \gamma \dot{u}_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

б) граничные условия для напряжений

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = p_i \text{ на } S_u;$$

в) условия пластичности

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0;$$

г) условия несжимаемости и граничные условия для скоростей и перемещений

$$\dot{u}_i = \dot{u}_i^s \text{ на } \dot{S}_u; \quad u_i = u_i^s \text{ на } S_u;$$

д) соотношения ассоциированного закона течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}};$$

е) связи компонентов ускорения с компонентами скорости

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t};$$

ж) начальные условия для скоростей и перемещений

$$\dot{u}_i|_{t=0} = \dot{u}_i(t_0); \quad u_i|_{t=0} = u_i(t_0),$$

где \dot{S}_u и S_u – части поверхности S , на которых заданы значения скоростей и перемещений.

Диаграмма Прандтля соответствует модели упругоидеальнопластического тела. Горизонтальный участок описывает идеальную пластичность.

Если $\sigma < \sigma_T$, то
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Исключение упругих деформаций приводит к жестко-пластическому телу. При $\sigma < \sigma_T$ тело абсолютно жесткое; $\sigma = \sigma_T$ возможны только пластические деформации. Концепция жестко-пластического тела реализована в теории предельного равновесия.

Условия пластичности Треска: течение происходит при достижении максимального касательного напряжения определенного уровня. По предложению Сен-Венана

$$\max(|\sigma_i|, |\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_T \leq 0,$$

где σ_i ($i = 1, 2, 3$) – главные напряжения; σ_T – предел текучести при одноосном напряженном состоянии.

Главные касательные напряжения

$$\tau_k = \frac{1}{2}(\sigma_i - \sigma_j), \quad k \neq i, \quad i \neq j, \quad k \neq j.$$

При чистом сдвиге

$$|\tau_k| = \frac{1}{2} \sigma_T.$$

Условие пластичности Мизеса имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_T^2 \leq 0.$$

Поверхность пластичности Мизеса регулярная – эллипсоид вращения. Условие Мизеса–Сен-Венана описывает нерегулярную поверхность с ребрами.

Важное значение для описания процесса образования пластических деформаций играет постулат Друккера (1951).

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^* \geq 0,$$

где σ_{ij}^* – действительное напряжение; σ_{ij} – любое возможное напряжение; при этом должно выполняться условие пластичности $\varphi(\sigma^*) \leq 0$, $\varphi(\sigma) \leq 0$, ε_{ij}^* – приращение пластической деформации, соответствующее напряжению σ^* .

Знак равенства возможен при $\sigma \varepsilon_{ij} = 0$, а напряжение σ^* – строго внутри области, ограниченной условием пластичности. Поверхность пластичности – выпуклая область, вектор приращения пластических деформаций направлен по нормали к поверхности пластичности в точке σ^* , а $\varphi(\sigma^*) = 0$.

Приведем уравнения текучести (предельного напряженного состояния) для жесткопластичных сред для пространственного напряженного состояния.

Условие Губера–Мизеса ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$)

$$\sqrt{I_2} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \quad \text{или} \quad \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T.$$

Для плоского напряженного состояния ($\sigma_3 = 0$)

$$\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_T.$$

Условие прочности Мизеса–Шлейхера–Боткина ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$)

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 ;$$

$$I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] ;$$

$$a = \frac{\sin \varphi}{[3(3 - \sin^2 \varphi)]^{\frac{1}{2}}} \approx \sin \frac{\varphi}{3} ;$$

$$k = c(1 - 12a^2)^{\frac{1}{2}} \approx c \cos \varphi .$$

Условие прочности по Морю–Кулону (плоская деформация $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$)

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \varphi - c \cos \varphi \leq 0.$$

В нелинейной механике используют такие понятия, как интенсивность напряжений

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

и интенсивность деформаций

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}.$$

Часто принимают $\varepsilon_i = \beta \sigma_i^m$; $\sigma_i = E' \varepsilon_i$.

Для каждой точки нелинейно деформируемого упругого тела интенсивность напряжений σ_i пропорциональна интенсивности относительных деформаций ε_i . Коэффициент пропорциональности $E' = f(\varepsilon_i)$ – переменная величина.

Если $\mu \approx 0,5$, то материал в процессе деформирования меняет лишь форму без изменения объема.

Для одноосного напряженного состояния

$$\tau_{\text{окт}} = G' \varepsilon_{\text{окт}} ; \quad \sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) ;$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1 ; \quad G = \frac{\tau_{\text{окт}}}{\gamma_{\text{окт}}} ; \quad \sigma_i = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \tau_{\text{окт}} ; \quad \gamma_{\text{окт}} \approx \sqrt{2} \varepsilon_1 ;$$

$$\gamma_{\text{окт}} \approx \frac{\sqrt{2}}{3} [3\varepsilon_1 - \sigma_1 / 3k]; \quad \gamma_{\text{окт}} \approx \sqrt{2}\varepsilon_i,$$

где $\tau_{\text{окт}}$, $\varepsilon_{\text{окт}}$ – октаэдрическое сдвигающее напряжение и сдвигающая деформация соответственно; $G_i = G' \cdot 3\varepsilon_i$ – секущий модуль сдвига;

га; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ – модуль объемного сжатия.

Для сложного напряженного состояния

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = F(\sigma_{\text{окт}});$$

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1;$$

$$I_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2].$$

Параметр Надаи–Лоде

$$\lambda_{\sigma} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}.$$

Он изменяется от -1 до $+1$. Здесь $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Зависимость между напряжениями и упругопластическими деформациями описывается уравнениями Г. Генки [30]:

$$\sigma_x - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2\sigma_i}{2\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon_{\text{ср}}); \quad \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2\sigma_i}{2\varepsilon_i} (\varepsilon_y - \varepsilon_{\text{ср}});$$

$$\sigma_z - \sigma_{\text{ср}} = \frac{2\sigma_i}{2\varepsilon_i} (\varepsilon_z - \varepsilon_{\text{ср}}); \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{xy};$$

$$\tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{yz}; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \varepsilon_{zx}.$$

Предельное сопротивление грунтов сдвигу:

– для плоскостного сдвига (уравнение Кулона)

$$\tau_{\text{пр}} = f(\sigma);$$

– для связных грунтов

$$\tau_{\text{пр}} = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi;$$

– для прямолинейной огибающей кругов Мора (сложное напряженное состояние)

$$\tau_{\text{пр}} = f\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{3}\right);$$

– по кривым Мора

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \operatorname{ctg}\varphi} = \sin \varphi;$$

– в составляющих напряжений

$$\frac{(\sigma_z - \sigma_y) + 4\tau_{yz}^2}{(\sigma_z + \sigma_y + 2c \operatorname{ctg}\varphi)^2} = \sin^2 \varphi.$$

Более общий критерий разрушения

$$F(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad \text{или} \quad F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

где $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; $I_2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1$; $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

Применение уравнений нелинейной механики грунтов (механики, разрешающая система уравнений которой не линейна). В качестве объекта исследования является среда с двумя основными особенностями: с внутренним трением и многокомпонентностью (обычно трехкомпонентная среда – частицы грунта + вода + воздух).

Нелинейность разрешающей системы проявляется в трех случаях [17]:

- 1) при зависимости консолидационных параметров от изменяющейся пористости – нелинейные консолидационные свойства;
- 2) при нелинейной связи между напряжениями, деформациями и их производными во времени – физическая нелинейность;
- 3) при нелинейной связи между компонентами деформаций и градиентами перемещений – геометрическая нелинейность.

Для решений задач используются уравнения состояния, вытекающие из теории пластичности. В основе теории пластического течения лежит принцип максимума Мизеса: скорость диссипации механической энергии в единице объема во время пластического деформирования имеет максимальное значение для действительного напряженного состояния из всех возможных, допускаемых данным критерием пластичности.

В качестве допущений принимают следующие:

- поверхность нагружения не должна быть вогнута;
- направление вектора приращений пластических деформаций должно совпадать с нормалью к поверхности нагружения в точке нагружения (ассоциированный закон пластического течения).

При учете вязкопластичности вводится понятие мгновенной поверхности нагружения. Циклические нагружения вызывают дополнительные вязкопластические деформации (вторичные пластические деформации).

К числу основных факторов, определяющих процесс деформирования, относят:

- физическое состояние грунта;
- деформация грунтов при активном нагружении;
- пластические деформации, зависящие нелинейно от напряжения, а также от пути нагружения и вида напряженного состояния;
- дилатансия (дополнительное уплотнение или разуплотнение), зависящая от плотности грунта, его физического состояния, степени приближения к предельному состоянию, траектории нагружения, характера воздействия;
- многофазность грунтов;
- запаздывание пластических деформаций во времени, особенно для связных грунтов;
- характер воздействия (статические, циклические, динамические нагружения).

Для анализа нелинейного поведения грунтов используют различные методы вычислительной математики: конечно-разностные, вариационно-разностные, конечных и граничных элементов и др.

Кроме того, используют и другие нелинейные методы расчета: нелинейная деформационная теория пластичности; ассоциированный закон пластического течения Друккера–Прагера; неассоциированный закон пластического течения, критического состояния, пластического течения с упрочнением; обобщенный ассоциированный закон течения упрочняющихся пластических сред Койтера.

Величина пластических деформаций зависит от пути нагружения и вида напряженного состояния. При сдвиге грунт либо доуплотняется (контракция), либо разуплотняется. Знак и величина дилатационной части объектной деформации зависит от плотности грунта, степени приближения к предельному состоянию, траектории нагружения. Пластические деформации запаздывают во времени по отношению к нагружаемому состоянию от нагрузки. Время запаздывания зависит от свойств грунта, величины и характера воздействия.

Феноменологическое описание реологических процессов в грунтах проводятся на основе теории наследственной ползучести, теории течения и упрочнения.

Математическая модель вязкопластического деформирования грунтов. В основу положена теория пластического течения упрочняющихся сред [17].

Приращение полных деформаций принимают в виде суммы

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p,$$

где $d\varepsilon_{ij}^e = c_{ij,kl}^e d\sigma_{kl}$ – приращение компонент упругих деформаций, $c_{ij,kl}^e$ – матрица упругих характеристик, определяемых по разгрузке; приращение пластических деформаций по всем регулярным участкам поверхности нагружения $f_r = 0$:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum d\lambda_r \frac{df_r}{d\sigma_{ij}},$$

где $d\lambda_r$ – пластические множители.

Принят обобщенный ассоциированный закон пластического течения Койтера. Граница области упругого деформирования совпадает с поверхностью нагружения $f_r = 0$, имеющей регулярные участки и особые (сингулярные) точки.

В пределах поверхности нагружения грунт ведет себя упруго. При нагружениях, выходящих за предел этой области, развиваются необратимые пластические деформации сдвига и объема, характеризующиеся интервалами ε_i^p и ε_v^p . Положение поверхности изменяется в процессе деформирования по мере накопления пластических деформаций.

Функция нагружения имеет вид

$$f_r = f_r(\sigma_i; \sigma; \omega_i; \omega_v; k_r),$$

где k_r – характерные константы регулярных участков; ω_i и ω_v – параметры упрочнения.

Предельные сдвиговые деформации разрушения e_i^* и объемные ε_{vd} связаны линейной зависимостью

$$\varepsilon_{vd}^* = -n^* e_i^*.$$

Закономерности изменения поверхности нагружения определяют функциями упрочнения, зависящими от накопления пластических деформаций, параметров упрочнения.

Функциями упрочнения являются: $p(\omega_i; \omega_v)$; $q(\omega_i; \omega_v)$; $q_d(\omega_i; \omega_v)$; $\Psi(\omega_i)$. Функция упрочнения $p(\omega_i; \omega_v)$ является описанием диаграммы объемного деформирования по данным трехосных испытаний; функция упрочнения $q(\omega_i; \omega_v)$ является описанием деформации грунта.

$$q = \sigma_i^*(\sigma) \Phi \left(\frac{\omega_i}{\omega_i^*} \right),$$

$$\sigma_i^*(\sigma) = c_{\text{oct}}^* - \sigma \text{tg} \varphi_{\text{oct}},$$

$$\Phi \left(\frac{\omega_i}{\omega_i^*} \right) = \frac{\omega_i}{[(1-B)\omega_i^* + B\omega_i]},$$

где $\sigma_i^*(\sigma)$ – условие предельного состояния грунта, определяемое в зависимости от принятого критерия прочности.

Модели основания буронабивной сваи. Математическая модель грунта принята [17] на основе теории пластического течения. Деформация грунта и их приращения складываются из упругой и пластической частей. Приращения упругих деформаций связаны с приращением напряжений законом Гука. Приращение пластических деформаций определяются на основании обобщенного ассоциированного закона течения. Функции нагружения приняты в виде соотношений

$$f_r = \sigma_i + k_r(\omega_i; \omega_v)\sigma - c_r(\omega_i; \omega_v),$$

где k_r и c_r – функции нагружения для каждого участка поверхности нагружения.

Решение задачи выполнено методом конечных элементов при совместном рассмотрении вышеприведенного уравнения и математического уравнения

$$[k]\{u\} = \{F_\gamma\} + \{F_q\} + \{F_p\},$$

где $k = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D] [B] R ds$ – глобальная матрица жесткости;

$\{u\} \begin{Bmatrix} U_R \\ U_Z \end{Bmatrix}$ – вектор узловых перемещений; $\{F_\gamma\}$ и $\{F_q\}$ – векторы массовых и внешних сил; $\{F_p\}$ – вектор сил, определенный соотношением

$$\{F_p\} = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D_{\text{cb}}] \{\varepsilon^p\} R ds,$$

где $[B]$ – матрица, характеризующая геометрическую форму элемента; $[D]$ – матрица упругих характеристик; R – расстояние от оси симметрии; $\{F_p\}$ – вектор пластических деформаций.

Расчетная область аппроксимировалась асимметричными треугольными элементами второго порядка.

В области, занятой сваей, вводится дополнительная фиктивная сила

$$\{F_\phi\} = \sum_s 2\pi \int [B]^T [D_{св}] [B] \{u\} R ds ,$$

где $[D_{св}]$ – матрица упругих характеристик ствола сваи.

В теории предельного равновесия [28] в основном рассматриваются две группы задач – для условий плоской деформации и для условий осевой симметрии. Наибольшие успехи были достигнуты в области решения прикладных задач для условий плоской деформации. Здесь решены основные задачи о вдавливании штампа в жесткопластическую среду, об устойчивости консолидирующихся оснований, о влиянии эксцентриситета и наклона равнодействующей на величину предельной нагрузки, о взаимовлиянии близкорасположенных фундаментов, об устойчивости слабых оснований дорожных насыпей и ряд других. Большинство из названных решений успешно применяются в практических расчетах оснований инженерных сооружений.

Для условий осевой симметрии получение подобных результатов встречает значительные трудности. Это объясняется тем, что задачи для условий осевой симметрии являются статически неопределимыми. Применение для раскрытия статической неопределимости условия полной пластичности грунтов существенно ограничивает как область определения предельной нагрузки, так и разнообразие расчетных схем. До сих пор не были получены статические решения задачи о предельном давлении круглого фундамента на основании для общего случая произвольных боковых пригрузок, а также задачи о предельном давлении кольцевого фундамента при развитии области предельного равновесия как с наружной, так и с внутренней стороны кольца.

Основной вопрос анализа упругопластического деформирования грунтов заключается в разработке модели, адекватно отражающей их свойства. Определение параметров грунта для большинства моделей упругопластической среды с упрочнением требует наличия нестандартных приборов и методик испытания. Оценка устойчивости в рамках упругопластического решения предполагает качественное описание заключительного этапа деформирования, когда преобладает пластическое течение грунта, что представляет значительные трудности.

Современная практика расчетного обоснования конструкций проектируемых зданий, их фундаментов и оснований предполагает проведение исследований напряженно-деформированного состояния (НДС) полной системы «здание–фундамент–грунтовое основание» по вычислительным программам, реализующим метод конечных элементов. Ввиду сложности корректного совместного расчета всей системы, учет взаимодействия здания с грунтовым основанием осуществляется с помощью коэффициентов постели основания, вычисляемых по упрощенным нормативным методикам. Расчет грунтового основания при взаимодействии с фундаментом осуществляется без учета реальной жесткости самого здания.

Перечисленные расчеты выполняются с использованием специализированных для решения различных задач вычислительных программ и никак не связаны между собой.

В то же время в реальных условиях распределение вертикальных перемещений и коэффициентов постели основания по площади фундамента весьма неоднородно и зависит от жесткости здания; характера распределения нагрузки, передаваемой на фундамент; инженерно-геологического строения основания; свойств грунтов и многих других факторов.

Учет реального распределения нагрузок от здания на фундаментную плиту для данной конструкции приводит к значительному увеличению прогиба фундаментной плиты и максимальной осадки здания. При этом учет реальной жесткости здания позволяет существенно уменьшить прогиб фундаментной плиты и снизить максимальную прогнозируемую осадку здания.

Однако учет реальной жесткости здания позволяет получить наиболее высокие значения коэффициентов постели основания, которые (вместо приближенных) могут быть использованы при уточненном расчете прочности самого здания по его конечно-элементной модели, построенной для создания суперэлемента.

Кроме того, для получения более достоверного прогноза НДС здания и грунтового основания целесообразно проводить итерационные расчеты, моделирующие поэтапное возведение здания с пересчетом коэффициентов постели основания и распределения нагрузки, передаваемой на фундамент.

Условия предельного равновесия Мора–Кулона и Мизеса–Боткина наиболее применимы в механике сыпучих сред. Условие Мора–Кулона лучше соответствует экспериментальным данным, но крайне затруднительно в использовании из-за наличия на предельной поверхности сингулярных точек, а условие Мизеса–Боткина удобно в применении,

но приводит к повышению по сравнению с опытом влияния промежуточного главного напряжения σ_2 на прочность.

В последнее время получили распространение различные обобщения условия предельного равновесия Мора–Кулона, имеющие регулярную поверхность и основанные на учете вида напряженного состояния, например предложенное Г. А. Гениевым [10]. Вопрос о физическом объяснении влияния вида напряженного состояния на прочность сыпучих сред остается открытым.

Наиболее приемлемым с физической точки зрения является обобщение условия Мора–Кулона, предложенное Накай и Мацуоки [28]:

$$\tau_v = \sigma_v \operatorname{tg} \varphi, \quad (2.1)$$

где $\sigma_v = \frac{3I_3}{I_2}$; $\tau_v = \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3 - 9I_3^2}{I_2^2}}$ – соответственно нормальное и касательное напряжения на пространственной площадке предельного равновесия; φ – эффективный угол внутреннего трения;

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3;$$

$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ – инварианты тензора напряжений.

Нормаль площадки предельного равновесия v определяется направляющими косинусами

$$l = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_1}}; \quad m = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_2}}; \quad n = \sqrt{\frac{I_3}{I_2 \sigma_3}},$$

где $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ – главные напряжения (сжатию соответствует $\sigma_i > 0$, нумерация напряжений принята исходя из условия $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Предельная поверхность, соответствующая условию (2.1), в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ имеет вид некруговой конической поверхности, описывающей пирамиду Мора–Кулона, с вершиной в начале координат. Условие (2.1) предсказывает одинаковую прочность при напряженных состояниях обобщенного сжатия $\sigma_2 = \sigma_3$ и растяжения $\sigma_1 = \sigma_2$ и несколько повышенную прочность при промежуточных значениях σ_2 .

Для различных состояний грунта по плотности дилатансия может быть как отрицательной (разрыхление), так и положительной (уплотнение). Деформация разрыхления наблюдается при сдвиге грунта плотного сложения при низких напряжениях или при напряжениях,

меньших тех, которые привели ее к данной степени уплотнения. Сдвиг рыхлых грунтов характеризуется деформацией уплотнения, т.е. для грунтов ассоциированный закон течения Мизеса не выполняется, а вектор приращения пластической деформации в общем случае не ортогонален предельной поверхности.

Пластическое деформирование сыпучих сплошных сред в микроточке происходит в результате возникновения сдвигов на площадках с некоторым критическим значением касательных сил, которое зависит от нормальных. Площадки предельного равновесия не самые опасные, так как скольжение по ним требует пересечения значительного числа частиц.

Пусть сила сопротивления среды t отклоняется от площадки предельного равновесия и лежит в плоскости истинного проскальзывания частиц, уравновешивая напряжения σ_v и τ_v , действующие на площадках предельного равновесия.

Уравнение предельного течения имеет вид

$$t = \operatorname{tg}\varphi_0 s, \quad (2.2)$$

где

$$s = \sigma_1 l l' + \sigma_2 m m' + \sigma_3 n n';$$

$$t = \sqrt{(\sigma_1 l m' - \sigma_2 m l')^2 + (\sigma_2 m n' - \sigma_3 n m')^2 + (\sigma_3 n l' - \sigma_1 n' l)^2} -$$

нормальная и касательная силы, действующие на площадке скольжения и численно равные проекциям напряжений σ_v и τ_v на нормаль к площадке скольжения v' и на нее саму; φ_0 – истинный угол внутреннего трения; l, m', n' – направляющие косинусы нормали площадки скольжения.

С математической точки зрения под площадкой скольжения подразумевается поверхность, на которой имеется или предполагается разрыв скорости при условии, что нормальная компонента разрыва равна нулю.

Если к критически напряженной точке приложить приращения напряжений $d\sigma_i$, вследствие малости этого приращения направления главных напряжений и связанных с ними площадок предельного равновесия не изменятся, а тензоры напряжений и скоростей пластических деформаций будут коаксиальными. Применяя к уравнению предельного равновесия (2.2) ассоциированный закон течения Мизеса с учетом указанного допущения, получаем выражения для направляющих косинусов нормали площадки скольжения:

$$\left\{ \begin{array}{l} I' = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_3^p - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}}{(\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_2^p)(\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_3^p)}}; \\ m' = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_3^p - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}}{(\dot{\varepsilon}_2^p - \dot{\varepsilon}_1^p)(\dot{\varepsilon}_2^p - \dot{\varepsilon}_3^p)}}; \\ n' = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_2^p - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}}{(\dot{\varepsilon}_3^p - \dot{\varepsilon}_1^p)(\dot{\varepsilon}_3^p - \dot{\varepsilon}_2^p)}} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

где $J_1 = \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p$, $J_2 = \dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_3^p + \dot{\varepsilon}_3^p \dot{\varepsilon}_1^p$, $J_3 = \dot{\varepsilon}_1^p \dot{\varepsilon}_2^p \dot{\varepsilon}_3^p$ – инварианты тензора скоростей пластической деформации; $\dot{\varepsilon}_i^p = \frac{d\varepsilon_i^p}{dt}$ ($i = 1, 2, 3$) – главные скорости пластической деформации.

Если среда обладает хотя бы некоторой регулярной упаковкой, ориентация площадки скольжения является функцией ориентации площадки предельного равновесия и дилатансии. Тогда формулы (2.3) будут справедливы и при произвольной дилатансии, так как направляющие косинусы выражены через скорости пластической деформации. Здесь стоит отметить, что лучшее согласие теории и эксперимента будет наблюдаться для грунтов, состоящих из твердых частиц округлой формы.

Если среда практически не сжимаема, то $J_1 = 0$, и из выражений (2.3) следует, что площадка скольжения совпадает с октаэдрической с направляющими косинусами нормали. Площадка скольжения в общем случае не совпадает с площадками предельного равновесия, а ее ориентация определяется деформированным состоянием среды.

На площадке скольжения (рис. 2.5) тангенциальная компонента скорости пластической деформации

$$\dot{\gamma}_{v'}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1 J_3}},$$

нормальная компонента $\dot{\varepsilon}_{v'}^p = 0$.

Условия дилатансии запишем в виде уравнения

$$\dot{\varepsilon}^p + \Lambda \dot{\gamma}_{v'}^p = 0,$$

где $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p$ – скорость объемной пластической деформации; Λ – скорость дилатансии; $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$; $I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3$; $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ – инварианты напряженного состояния.

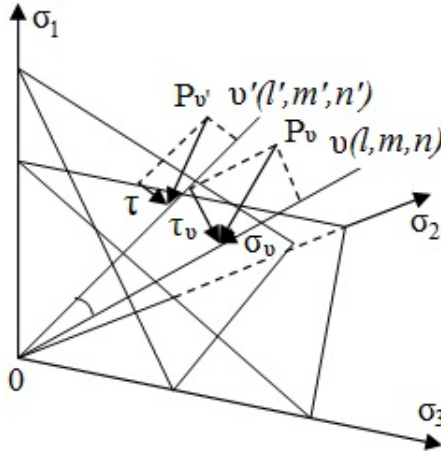


Рис. 2.5. Площадки предельного равновесия и скольжения

Оказывается, что ассоциированный с условием (2.1) закон течения соответствует $\Lambda = -(3/2)\text{tg}\varphi$.

Предельная поверхность, построенная по уравнению (2.2), также в общем случае не совпадает с поверхностью, соответствующей (2.1). Такое совпадение теоретически возможно в случае значительного дилатансионного уплотнения или разрыхления среды при $\Lambda = \pm(3/2)\text{tg}\varphi$.

При $\Lambda = -(3/2)\text{tg}\varphi$ площадка предельного равновесия одновременно является площадкой скольжения, т.е. $l' = l$; $m' = m$; $n' = n$. Если $\Lambda = -(3/2)\text{tg}\varphi$, в соответствии с излагаемой моделью $\varphi_0 = 0$, что возможно только для нереальной среды с отсутствием трения между частицами. Экспериментальные исследования (В. И. Николаевский, 1972) подтверждают, что «ассоциированная» дилатансия в опыте не наблюдается.

В работе [45] отмечают, что закон сухого трения Кулона связывает проекцию напряжений, действующих на пространственной площадке предельного равновесия физической точки грунта, на нормаль к площадке скольжения и на саму площадку. Оси главных напряжений и скоростей пластической деформации совпадают.

Определяющие связи получены в виде

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\varepsilon}_1^p l'^2 + \dot{\varepsilon}_2^p m'^2 + \dot{\varepsilon}_3^p n'^2,$$

$$\dot{\gamma}_v^p = 2\sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}^p\right)^2 l'^2 m'^2 + \left(\dot{\varepsilon}_2^p - \dot{\varepsilon}_3^p\right)^2 m'^2 n'^2 + \left(\dot{\varepsilon}_3^p - \dot{\varepsilon}_1^p\right)^2 l'^2},$$

где $\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_1 l}{l'} - s \right)$; $\dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_2 m}{m'} - s \right)$; $\dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\sigma_3 n}{n'} - s \right)$; $\dot{\lambda} = d\lambda/dt$ –

бесконечно малый скалярный множитель ($\lambda > 0$); l' , m' , n' – направляющие косинусы, определяющие площадки скольжения в пространстве главных скоростей пластической деформации $\dot{\varepsilon}_1^p \geq \dot{\varepsilon}_2^p \geq \dot{\varepsilon}_3^p$.

Из вышеприведенных соотношений следует, что тензоры скоростей пластических деформаций и напряжений не пропорциональны. Это затрудняет их использование. За скорости пластической деформации приняты разности между полными скоростями пластической деформации и их гидростатической части.

В общем случае тензоры напряжений и скоростей пластической деформации не подобны. Зависимость параметра вида напряженного состояния

$$\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$$

от параметра вида для скоростей пластической деформации устанавливается при решении системы уравнений относительно l , m , n при известных l' , m' , n' .

Допущение о подобии напряженного и деформированного состояния подтверждено экспериментами других ученых (МИСИ) и может быть использовано для описания процессов деформирования дилатансионно-уплотняющегося грунта.

Осесимметричное предельное напряженное состояние определяется в цилиндрической системе координат ORZ (ось симметрии OZ вертикальна) при условии прочности Кулона–Мора [22]

$$\sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2} = (\sigma_r + \sigma_z + 2c \operatorname{ctg} \varphi) \sin \varphi,$$

где c , φ – удельное сцепление и угол внутреннего трения грунта.

Промежуточное главное напряжение $\sigma_2 = \sigma_\theta$, действующее в тангенсальной плоскости, выражается при условии неполной пластичности формулой

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) + \frac{\mu_\sigma}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2},$$

где $\mu_\sigma = (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ – параметр Лоде, $-1 < \mu_\sigma < 1$.

Доказано, что система дифференциальных уравнений осесимметричной теории предельного равновесия имеет два семейства действительных характеристик (линий скольжения) и принадлежит к гиперболическому типу.

Каноническая система уравнений с использованием условия неполной пластичности получена в виде

$$dr = dz \operatorname{tg}(\alpha \pm \mu), \quad \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2},$$

$$d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg}\varphi da = \frac{\sigma}{r} \operatorname{tg}\varphi [\mu\sigma(dr \cos \varphi \pm dz \sin \varphi) \pm dz] + \gamma(dz \mp dr \operatorname{tg}\varphi),$$

где $\sigma = (\sigma_r + \sigma_z)/2 + c \operatorname{ctg}\varphi$ – среднее приведенное напряжение; α – угол между направлением σ_1 и осью OZ .

Верхние знаки в уравнениях относятся к линиям скольжения первого семейства, нижние – ко второму семейству.

Система уравнений будет статически определимой, если конкретизировать значение параметра μ_σ . При условии полной пластичности это достигается равенствами $\mu_\sigma = -1 = \operatorname{const}$ (при деформациях, направленных от оси) или $\mu_\sigma = 1 = \operatorname{const}$ (при деформациях к оси). Для условия неполной пластичности ($-1 < \mu_\sigma < 1$) определение параметра Лоде является специальной задачей.

Для идеальновязкой среды ($\varphi = 0$) с помощью замены переменной: $s = \sigma + \gamma z$, $\sigma = (\sigma_r + \sigma_z)/2$ дифференциальные уравнения принимают вид:

$$dr = dz \operatorname{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right); \quad ds \pm 2cda = \frac{c}{r}(d\mu_\sigma dr \pm z),$$

которому отвечает следующее решение в малой окрестности оси симметрии:

$$dr = dz \operatorname{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right); \quad ds \pm 4cda = 0.$$

Необходимость перехода к условию неполной пластичности возникла при решении задачи о предельном давлении круглого штампа на основание при больших боковых пригрузках.

Установлено, что статическое решение существует для целого диапазона значений параметра Лоде: $\mu_{\sigma 0} < \mu_\sigma < 1$, причем с увеличением значения μ_σ предельная нагрузка уменьшалась.

Поскольку на оси симметрии необходимо иметь $\mu_\sigma = -1$ (иначе напряжения у оси бесконечно возрастают), интегрирование в зонах радиального веера и под штампом осуществлялось при переменном значении μ_σ . Изменение μ_σ было задано кусочно-линейной зависимостью от угла α :

$$\mu_\sigma = \mu_{\sigma 0} \text{ при } \alpha > \frac{\pi}{2}; \mu_\sigma = -1 \text{ при } \alpha < 0;$$

$$\mu_\sigma = (1 + \mu_{\sigma 0}) \frac{2\alpha}{\pi} - 1 \text{ при } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Согласно первой теореме теории пластичности, при статическом решении следует находить максимальную величину предельной нагрузки. Этой величине будет соответствовать минимально возможное значение параметра $\mu_{\sigma 0}$, при котором статическое решение существует.

Леденёвым В. В. и Икониним С. В. проведено большое число полевых и лабораторных опытов с моделями и натурными фундаментами на песчаных и глинистых грунтах естественной и нарушенной структуры. Особое внимание уделялось исследованию характера деформирования и разрушения основания незаглубленных и заглубленных фундаментов при разных схемах нагружения, оценке взаимного влияния подземных конструкций.

Установлено, что область деформирования грунта находится в пределах $(1,5 \dots 4,0)d$ фундаментов. Напряженное состояние песчаного основания естественного сложения, определенное по осыпанию песка с боковых стенок шурфов и траншей, распространялось до $5,5d$ от боковой поверхности буронабивных фундаментов. Эти данные могут служить проверкой достоверности грунтовых моделей.

Леденёв В. В. и Иконин С. В. и позднее совместно с А. В. Худяковым экспериментально определяли форму и размеры областей выпора грунта из-под подошвы и перед смещающейся боковой поверхностью буронабивных фундаментов при разных схемах нагружения, формах и размерах фундамента, плотности и видах грунта. Длина зон выпора достигала $(1 \dots 4)d$ от тела фундамента.

МОДЕЛИ БЕТОНА, ЖЕЛЕЗОБЕТОНА, ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

В последние годы появились выдающиеся монографии [5, 21] по моделям силового сопротивления железобетона. Они отличаются глубиной и обоснованностью положений, учетом большого числа влияю-

щих факторов: трещин и схем армирования (Н. И. Карпенко), реологических свойств (В. М. Бондаренко, В. И. Колчунов). Работы [5, 19] являются надежной базой для совершенствования теории расчета и проектирования конструкций.

ДЕФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

Анализ модели сделали А. С. Залесов и Т. А. Мухамедков [18]. К железобетонным конструкциям представляются требования прочности, устойчивости, эксплуатационной пригодности, долговечности и надежности. Особенности железобетона как композитного материала являются: образование и развитие трещин в бетоне, нелинейные свойства бетона и арматуры, реологические свойства бетона, изменяющиеся во времени. Указанные особенности могут быть реализованы через физические свойства, связывающие напряжения и деформации бетона и арматуры. Они определяются на основе обобщенного закона Гука для анизотропного тела.

Деформационные модели разработаны для линейных и плоских элементов при одноосном и двухосном напряженно-деформированном состоянии при действии изгибающих, крутящих моментов и продольных сил.

Согласно евростандартам, деформационная модель основывается на четырех гипотезах:

- 1) плоских сечений;
- 2) считают известными зависимости напряжения–деформации для бетона и арматуры;
- 3) диаграммы напряжения–деформации при неоднородном напряженном (вследствие изгиба) состоянии получают из опытов по однородному напряженному состоянию простого сжатия или растяжения;
- 4) считают совпадающими нейтральные оси напряжений и деформаций при длительном нагружении.

Первая гипотеза является условием совместности деформаций бетона и стали железобетонного элемента. Основное условие применимости этой модели – малость сдвигов по сравнению с углами поворота.

Вторая гипотеза позволяет по известным относительным деформациям рассчитать напряжения бетона и арматуры в различных точках сечения. Для бетона используется криволинейная диаграмма с ниспадающей ветвью.

Из анализа деформационной модели следует частный предельный случай пластического шарнира. Зоны пластического растяжения–сжатия снижаются. Эпюра напряжений в сжатой зоне бетона достигает

прямоугольного очертания. Кривизна изогнутой оси элемента в этом сечении равна бесконечности.

Для линейных железобетонных элементов. Модель включает уравнения равновесия внешних и внутренних сил, условия деформирования в виде гипотезы плоских сечений и полные диаграммы, связывающие напряжения и деформации в бетоне и арматуре.

В результате решения получают систему уравнений, связывающих изгибающие моменты в двух направлениях, продольные силы с кривизнами в двух направлениях и продольными деформациями через жесткостные характеристики.

Для плоских элементов рассматривается выделенный элемент с изгибающими и крутящими моментами, сдвигающими и нормальными силами, действующими по боковым сторонам.

Деформационная модель определяется из уравнений равновесия внешних усилий, действующих по боковым сторонам, внутренних усилий в диагональном нормальном сечении в виде гипотезы плоских сечений и полных диаграмм напряжения–деформации в бетоне и арматуре.

Как и для линейных элементов, в плоских получают систему уравнений, связывающих изгибающие и крутящие моменты, продольные и сдвигающие силы в двух взаимно перпендикулярных направлениях с кривизнами, усилиями закручивания и сдвига, продольными деформациями через жесткостные характеристики элементов.

В деформационной модели используются диаграммы криволинейные, упрощенные трехлинейные, включающие условно упругий, неупругий и условно пластический участки, двухлинейные по типу диаграммы Прандтля.

В качестве условия деформирования сечения принята гипотеза плоских сечений. Критериями прочности допускается принимать деформации бетона и арматуры некоторых предельных значений.

В деформационной модели допускается сжатая зона над трещиной и растянутая с трещиной. Учитывается работа растянутого бетона между трещинами. Имеется возможность выполнять расчеты с учетом физической и геометрической нелинейности по прочности, устойчивости, деформативности и трещиностойкости; расчет систем и элементов различной конструкции и состава.

В новых нормативных документах допускаются упрощенные расчеты на прочность (основанные на методе предельного равновесия), деформации (основанные на учете первых условно линейных участков двухлинейных диаграмм бетона и арматуры), трещиностойкость (в условии упругой постановки с понижающим модулем упругости сжатого бетона и повышающим за счет влияния растянутого бетона между трещинами).

Рекомендуется разработка таких расчетных моделей и методов расчета, которые позволяли бы инженеру понимать и оценивать характер работы конструкций в целом.

Предусматриваются разработки общего метода расчета долговечности железобетонных конструкций с прямым учетом фактора времени; методов расчета железобетона, основанных на общих принципах строительной механики и единых расчетных моделях. Конкретные особенности элементов следует учитывать введением дополнительных коэффициентов запаса.

Расчет высотных зданий производится как пространственной системы с учетом податливости основания, а несущей системы и отдельных элементов – с учетом физической и геометрической нелинейности. Рекомендуется стремиться к более простым конструктивным системам регулярных в плане и по высоте, с совмещенными центрами тяжести и жесткости, с разрезкой деформационными швами распознающих блоков здания, уделять внимание повышению сопротивления внешних специальных воздействий, например при выходе из строя одного конструктивного элемента или его части.

Расчет прочности по нормальным сечениям железобетонных конструкций при действии изгибающих моментов и продольных сил проводят на основе деформационной модели.

Модель для расчета прочности включает:

– уравнения равновесия внешних и внутренних сил в нормальном сечении:

$$M_x = \sum_i \sigma_{bi} A_{bi} Z_{bxi} + \sum_i \sigma_{sj} A_{sj} Z_{sxj} ;$$

$$M_y = \sum_j \sigma_{bi} A_{bi} Z_{byi} + \sum_j \sigma_{sj} A_{sj} Z_{syj} ;$$

$$N = \sum_i \sigma_{bi} A_{bi} + \sum_j \sigma_{sj} A_{sj} ;$$

– уравнения, устанавливающие распределение деформаций в бетоне и арматуре по нормальному сечению исходя из условия плоского поворота и плоского смещения сечения (гипотезы плоских сечений):

$$\varepsilon_{bi} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} Z_{bxi} + \frac{1}{r_y} Z_{byi} ;$$

$$\varepsilon_{bj} = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_x} Z_{sxj} + \frac{1}{r_y} Z_{syj} ;$$

– уравнения, определяющие связь между напряжениями и относительными деформациями бетона и арматуры:

$$\sigma_{bi} = f(\varepsilon_{bi});$$

$$\sigma_{bj} = f(\varepsilon_{sj}).$$

В уравнениях (2.1) – (2.3) M_x, M_y, N – изгибающие моменты в плоскостях XOZ и YOZ и продольная сила от внешней нагрузки; $A_{bi}, Z_{bxi}, Z_{byi}, \sigma_{bi}, \varepsilon_{bi}$ – площадь, координаты центра тяжести i -го элементарного участка сжатой зоны бетона, напряжение и деформация на уровне его центра тяжести; $A_{sj}, Z_{sxj}, Z_{syj}, \sigma_{sj}, \varepsilon_{sj}$ – площадь, координаты центра тяжести j -го стержня арматуры, напряжение и деформация в нем; ε_0 – относительная деформация волокна, расположенного на пересечении выбранных осей X и Y ; $\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}$ – кривизны в плоскости дей-

ствия моментов M_x, M_y .

За расчетные диаграммы состояния сжатого бетона принимают криволинейную диаграмму с ниспадающей ветвью или более простые диаграммы трехлинейную и двухлинейную – типа диаграммы Прандтля.

Для высокопрочных арматурных сталей принимают криволинейную, трехлинейную или двухлинейную диаграммы.

Расчет прочности по нормальным сечениям железобетонных конструкций производят путем решения приведенной выше системы уравнений (рис. 2.6). При этом прочность сечения проверяют из условий:

$$|\varepsilon_{b \max}| \leq \varepsilon_{b, ult};$$

$$|\varepsilon_{s \max}| \leq \varepsilon_{s, ult},$$

где $\varepsilon_{b \max}, \varepsilon_{s \max}$ – максимальные относительные деформации в сжатом бетоне и растянутой арматуре от действия внешней нагрузки; $\varepsilon_{b, ult}, \varepsilon_{s, ult}$ – предельные относительные деформации сжатого бетона и растянутой арматуры.

Предельные относительные деформации сжатого бетона при двухзначной эпюре деформаций в нормальном сечении принимают равными $\varepsilon_{b, ult} = \varepsilon_{b2}$ – при однозначной равномерной эпюре деформаций, $\varepsilon_{b, ult} = \varepsilon_{b0}$ – при однозначной неравномерной эпюре – по линейной интерполяции.

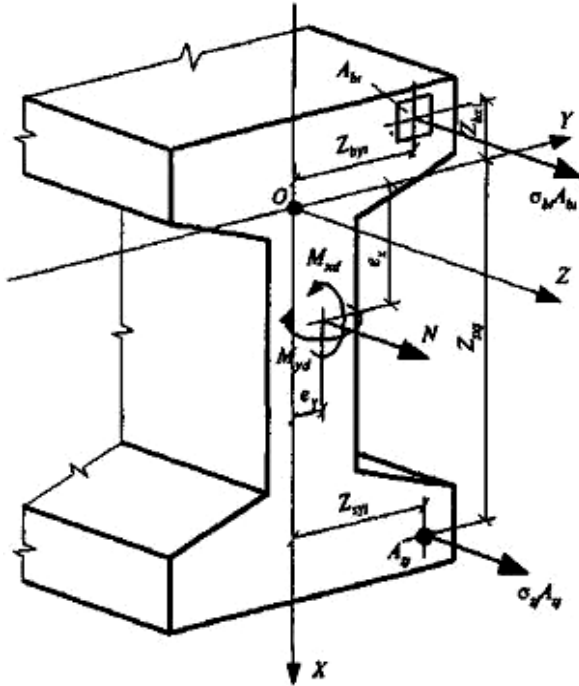


Рис. 2.6. Расчетная схема нормального сечения железобетонного элемента

Предельные относительные деформации растянутой арматуры принимают равными $\varepsilon_{s,ult} = \varepsilon_{s2}$.

Для общего случая система уравнений для расчета прочности по деформационной модели имеет вид:

$$M_x = D_{11} \frac{1}{r_x} + D_{12} \frac{1}{r_y} + D_{13} \varepsilon_0;$$

$$M_y = D_{12} \frac{1}{r_x} + D_{22} \frac{1}{r_y} + D_{23} \varepsilon_0;$$

$$N = D_{13} \frac{1}{r_x} + D_{23} \frac{1}{r_y} + D_{33} \varepsilon_0,$$

где D_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – жесткостные характеристики.

Коэффициенты упругости i -го участка бетона ν_{bi} и j -го стержня арматуры ν_{sj} определяют по формулам:

$$\nu_{bi} = \frac{\sigma_{bi}}{E_b \varepsilon_{bi}};$$

$$\nu_{sj} = \frac{\sigma_{sj}}{E_s \varepsilon_{sj}},$$

а напряжения и относительные деформации сжатого бетона и арматуры $\sigma_{bi}, \varepsilon_{bi}, \sigma_{sj}, \varepsilon_{sj}$ определяют из приведенных выше зависимостей для диаграмм состояния бетона и арматуры.

Мурзенко А. Ю. предложен метод расчета фундаментов по шести критериальным состояниям. Введено понятие о критериальных нагрузках, соответствующих определенному количественному состоянию конструкции и имеющих количественные нормативные ограничения по СНиП.

Состояния 1 и 2 относятся к условиям работы по второй группе предельных состояний; 1 – соответствует стадии работы до образования трещин; 2 – в условиях образования раскрытия трещин.

Состояния 3 и 4 относятся к расчетам по предельным состояниям первой группы и соответствуют условиям статического метода предельного равновесия. Критериальная нагрузка для состояния 3 определяется из условия $N \leq N_3$, где N_3 – определяется из расчета по несущей способности статическим методом предельного равновесия. Состояние 4 относится к расчету фундамента на продавливание плитной части. При этом должно выполняться условие $N \leq N_4$, где N_4 определяется из условия расчета на продавливание. Фактически при $N = N_4$ еще не происходит исчерпание несущей способности на продавливание, так как в расчете не учитываются упрочнение бетона в сжатой зоне сечения, действительная форма призмы продавливания и реактивные эпюры давления с учетом перераспределения напряжений в основании, а также концентрация реактивных давлений в основании призмы продавливания. Вследствие этого общее сопротивление продавливанию повышается и в рассматриваемых состояниях система имеет значительные внутренние резервы несущей способности.

За счет образования трещин в фундаменте формируются упруго-пластические шарниры, которые разделяют плитную часть на жесткие звенья и превращают фундамент в кинематическую систему. Это позволяет перейти от расчета в одном, наиболее нагруженном сечении,

к расчету плитной части в целом как статически неопределимой системы.

Состояние 5 соответствует исчерпанию несущей способности по кинематической схеме работы на изгиб, а 6 – на продавливание с учетом перераспределения усилий в материале фундамента и грунте основания, упрочнения бетона сжатой зоны.

Нижний предел несущей способности определяется из условия статического равновесия и предельных условий, верхний – из рассмотрения кинематически возможных состояний конструкции. Эти пределы образуют зону, в пределах которой может быть назначена расчетная нагрузка с учетом надежности и риска.

Основной целью расчета и проектирования является обеспечение нормальной эксплуатации объектов в течение заданного периода времени, прогноз возможных изменений контролируемых параметров.

МОДЕЛИ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ

Разработке методов расчета фундаментных плит и балок посвящены труды: Винклера, Б. Г. Коренева, В. З. Власова, М. М. Филоненко-Бородича, П. Л. Пастернака, Б. Н. Жемочкина, А. П. Сеницына, Н. Н. Леонтьева, М. И. Горбунова-Посадова, И. А. Симвулиди, А. А. Мустафаева, А. П. Пшеничкина, В. И. Травуша, А. Г. Юрьева и др. Анализ моделей грунтовых оснований и фундаментных конструкций дан в работах [6, 7, 9, 11, 15, 20, 23, 24, 26, 28 – 31, 34, 36, 37, 39, 40].

Рассмотрим исходные данные о технической теории работы плит [22]. Она применяется для плит, толщина которых мала по сравнению с размерами в плане, а прогибы малы – с толщиной. Предполагается, что все точки плиты, которые до деформации находились на одной вертикали, получают одинаковые перемещения в направлении оси Z . Горизонтальные перемещения точек средней плоскости принимаются равными нулю, а других точек определяются исходя из так называемой гипотезы прямых нормалей. При расчете плит определяется не только прогиб $\omega(x, y)$, но и реактивное давление $\sigma(x, y)$. Соотношение между ними представлено моделью Винклера $p(x, y) = k_0\omega(x, y)$.

Для модели основания с двумя упругими характеристиками

$$p(x, y) = k_1\omega(x, y) - k_2\Delta\omega(x, y),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; k_1 и k_2 – соответственно первая и вторая упругие характеристики; k_1 имеет размерность кг/см², а k_2 – кг/см.

Для модели упругого полупространства

$$\omega(x, y) = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}.$$

В отдельных случаях реактивное давление на некоторой части плиты может быть отрицательным (растягивающим).

В процессе расчета определяются перемещения, усилия и размеры зоны контакта. В пределах зоны контакта остаются справедливыми уравнения, учитывающие реакцию упругого основания, а в зоне отрыва балка или плита работает как свободная, т.е. на нее действуют только те активные нагрузки, которые приложены к этой части конструкции.

Юрьев А. Г. предложил методику оценки НДС полов промышленных зданий. Механические характеристики основания зависят от геометрических и физических параметров конструкции. Физической моделью пола принята многослойная плита на упругом основании. Разработана математическая модель для многослойной плиты на двухпараметрическом основании с характеристиками, полученными на вариационной основе.

При

$$U = V = 0 \quad W = (x, y, z) = \omega_1(x, y) \Phi(z),$$

где $\omega_1(x, y)$ – вертикальные перемещения верхней поверхности основания; $\Phi(z)$ – функция вертикального распределения перемещений.

По методу Ритца–Тимошенко

$$\omega_1(x, y) = BX(x)Y(y),$$

где $X(x)$, $Y(y)$ – функции, отражающие прогиб плиты.

Работа внешних сил

$$T = \iint p(x, y) \omega_1 dx dy.$$

Условия стационарности функционала энергии

$$\Delta = (U - T) = 0,$$

где U – потенциальная энергия деформирования основания плиты.

Усовершенствованная двухпараметрическая модель В. З. Власова обладает распределительным свойством по трем направлениям.

Для многослойной плиты нейтральный слой смещается на величину e .

Цилиндрическая жесткость определяется из уравнения

$$\bar{D} = \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-t/2-e}^{t/2+e} E(z) \bar{z}^2 d\bar{z},$$

где t – толщина многослойной плиты.

В процессе эксплуатации зданий происходит накопление разного рода повреждений за счет усталости, коррозионного износа, неблагоприятных внешних воздействий.

Критерии поврежденности бетона представляют в виде

$$D = \varepsilon(t) / \varepsilon_u,$$

где ε_u – предельные деформации.

Уравнение поврежденности модели (определено из фундаментального реологического уравнения) имеет вид

$$En\dot{\varepsilon}(t) + H\varepsilon(t) = n\dot{\sigma}(t) + \sigma(t)$$

и выражается в виде

$$EndD / dt + HD = [nV_\sigma + E\sigma(t)] / \varepsilon_u,$$

где H – длительный модуль упругости, соответствующий предельным деформациям; E – мгновенный модуль упругости; $n = \eta/E$ – время релаксации; η – параметр вязкости.

Решение последнего уравнения имеет вид

$$D = [nV_\sigma + E\sigma(t)] (1 - e^{-Ebt/n}) / H\varepsilon.$$

Расчетные модели оснований для балок, плит и зданий подробно рассмотрены в работе [34]. Особое внимание уделено неоднородным в плане основаниям. Так, зависимость между реакцией основания и его осадкой имеет вид

$$p(x, y) = c(x, y)\omega(x, y).$$

Дифференциальное уравнение изгиба плиты с переменным коэффициентом $c(x, y)$ представляют в виде

$$D\nabla^4\omega(x, y) + c(x, y)\omega(x, y) = q(x, y),$$

а изгиба балки

$$EI_y^4(x) + c(x)y(x) = q(x).$$

Рассмотрим предложения В. В. Болотина, Д. Н. Соболева, Б. П. Макарова.

Для статически неоднородного упругого полупространства

$$p(x, y) = \bar{p}(x, y) + \tilde{p}(x, y) = -\bar{c}_3 \bar{\omega}(x, y) + \bar{q}_3(x, y) - \bar{c}_3 \tilde{\omega}(x, y) + \tilde{q}_3(x, y),$$

где $\bar{p}(x, y)$ – математическое ожидание реактивного давления на полупространство; $\tilde{p}(x, y)$ – собственно случайное реактивное давление.

Здесь учтен метод эквивалентного слоя Н. А. Цытовича. Для плиты дифференциальное уравнение представлено в виде системы

$$D\nabla^4 \bar{\omega}(x, y) + \bar{c}_3 \bar{\omega}(x, y) = \bar{q}(x, y) + \bar{q}_3(x, y);$$

$$D\nabla^4 \tilde{\omega}(x, y) + \tilde{c}_3 \tilde{\omega}(x, y) = \tilde{q}(x, y) + \tilde{q}_3(x, y).$$

В работе [29] дан анализ расчетных моделей системы «сооружение–основание» как монолитных балок с проемами, сопротивляющихся изгибным и сдвиговым деформациям (Б. Д. Васильев, Б. И. Далматов, Д. Д. Сергеев и др.); в виде призматических оболочек (Б. А. Косицын, Б. С. Васильков, В. И. Лишак, А. П. Пшеничкин).

Дифференциальные уравнения изгиба и кручения оболочки имеют вид:

$$EI_y^4(x) + \frac{EI}{GF} q_u''(x) - q_u(x) = 0;$$

$$EI_\omega \theta^4(x) + \frac{EI_\omega}{GF_a} q_k''(x) - q_k(x) = 0,$$

EI , GF – изгибная и сдвиговая жесткости здания; $q_u(x)$, $q_k(x)$ – нагрузки, вызывающие изгиб и кручение коробки здания; EI_ω , GF_a – секториальная и крутильная жесткости здания; $\theta(x)$ – угол искажения контура поперечного сечения коробки.

Осадка здания рассматривается как аддитивная случайная функция координат

$$S_{ik}(x, y) = \bar{S}_{ik}(x, y) + \tilde{S}_{ik}(x, y),$$

где $\bar{S}_{ik}(x, y)$ – математическое ожидание осадки, вызываемой деформированными составляющими деформации основания; $\tilde{S}_{ik}(x, y)$ – флуктуационная составляющая осадки, которая центрирована относительно переменного математического ожидания.

ПРИЗМАТИЧЕСКИЕ И ПИРАМИДАЛЬНЫЕ СВАИ

Сопrotивляемость просадочных грунтов оснований поперечным воздействиям, очевидно, так же как и фундаментов неглубокого заложения, будет изменяться в соответствии с закономерностями продвижения влаги при случайном увлажнении оснований. Поэтому в расчетной схеме коэффициент жесткости каждого прорезаемого конструкцией просадочного грунта становится переменным по глубине. Функция жесткости $EJ(x)$ в зависимости от особенности изгибаемой конструкции может быть непрерывной по всей глубине опоры или же кусочно-непрерывной в пределах каждого прорезаемого ею слоя грунта. Характер функции $k(x)$, отображающей взаимодействие грунта с конструкцией, будет зависеть от многих факторов (от свойства и степени просадочности грунтов, особенности конструкции, ее загрузки и др.). Представить эту функцию в общем виде для всех встречающихся в практике случаев пока еще не представляется возможным. В первом приближении для назначения вида функции $k(x)$ можно исходить из применяемых в расчетах свай на горизонтальную нагрузку законов нарастания сопротивляемости грунта по глубине. В литературе встречаются различные предположения по данному вопросу. Так, например, в рекомендациях по расчету фундаментов глубокого заложения опор мостов грунт рассматривается как упругая линейно деформируемая среда, характеризуемая коэффициентом постели

$$k(x) = mbx,$$

где m – коэффициент, зависящий от свойств грунта, т/м⁴; x – глубина расположения точки от поверхности грунта.

В работе И. В. Урбана коэффициент постели с учетом перехода грунта в состояние предельного равновесия на поверхности грунта принимается нарастающим с глубиной по линейному закону

$$k(x) = \bar{k}(x)b = \frac{k_h}{h}x,$$

где k_h – коэффициент постели грунта в горизонтальном направлении на глубине h .

На основании экспериментальных данных Риффата рекомендуют принимать

$$k(x) = \bar{k}(x)b = k_h(1 - e^{-\beta x}),$$

где k_h – предельное значение коэффициента на глубине h ; β – экспериментально определяемый параметр, учитывающий нелинейность изменения сопротивляемости грунта по глубине. По данным опыта Риффата $\beta = 0,02$.

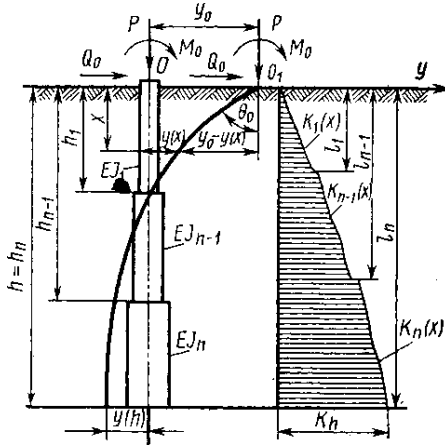


Рис. 2.7. Расчетная схема гибких фундаментов глубокого заложения при продольно-поперечном изгибе

Воспринимаемое конструкцией внешнее воздействие в общем случае может быть сведено на уровне поверхности грунта к комбинации вертикальной P и поперечной Q_0 нагрузок, а также момента M_0 . Расчет заглубленной в грунте опоры статически тождествен расчету балки, свободно лежащей на сплошном упругом основании переменной сопротивляемости, находящейся под действием приложенных на одном из концов поперечной нагрузки Q_0 и момента M_0 , а также продольной силы P . В случае гибкого фундамента с уширенной подошвой добавляются реакции упругого защемления подошвы в виде момента и поперечной силы (трение).

Аналитическое решение задачи сводится к интегрированию известного дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба балки на упругом основании (рис. 2.7)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] + P \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k(x)y = 0.$$

Краевые условия в зависимости от особенности конструкции опоры и инженерно-геологических условий могут быть приняты в следующем виде.

1. Опора со свободными концами (рис. 2.8, а):

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = \theta_0;$$

$$[EJ(x)y''(x)]|_{x=0} = M_0; \quad [EJ(x)y''(x)]'|_{x=0} = Q_0 - P\theta_0;$$

$$[EJ(x)y''']|_{x=h} = [EJ(x)y''(x)]'|_{x=h} = 0.$$

2. Опора с жестко закрепленным подвижным верхним и свободным нижним концами (рис. 2.8, б):

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = \theta_0;$$

$$[EJ(x)y''(x)]|_{x=0} = -M_3; \quad [EJ(x)y'(x)]|_{x=0} = Q_0;$$

$$[EJ(x)y''(x)y'(x)]|_{x=h} = [EJ(x)y''(x)y'(x)]'|_{x=h}.$$

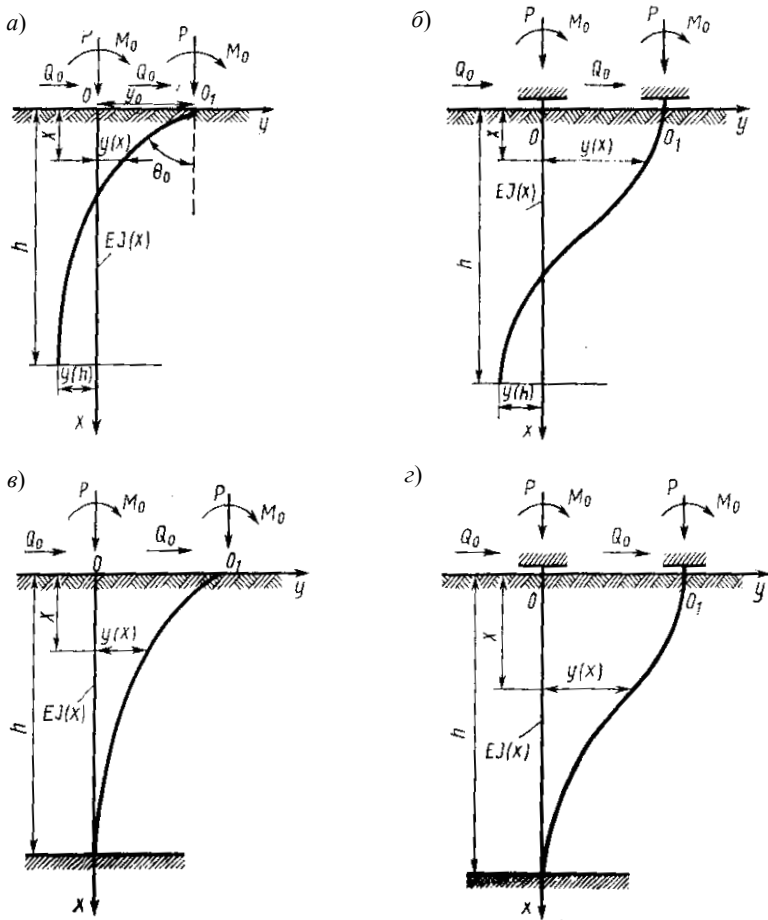


Рис. 2.8. Расчетные схемы опор с различными краевыми условиями

3. Опора со свободным верхним и жестко закрепленным нижним концом (свая–стойка) (рис. 2.8, в):

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0; \quad y'(0) = \theta_0; \\ [EJ(x)y''(x)]|_{x=0} &= M_0; \quad [EJ(x)y''(x)]'|_{x=0} = Q_0 - P\theta_0; \\ y(h) &= y'(h) = 0. \end{aligned}$$

4. Опора с жестко закрепленным подвижным верхним и жестко закрепленным неподвижным нижним концами (свая–стойка) (рис. 2.8, г):

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0; \quad y'(0) = \theta_0 = 0; \\ [EJ(x)y''(x)]|_{x=0} &= M_3; \quad [EJ(x)y''(x)]'|_{x=0} = Q_0; \\ y(h) &= y'(h) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение однородного уравнения, построенного методом последовательного приближения, согласно формуле имеет вид

$$y_n(x) - y_0A(x) + \theta_0B(x) + M_0C(x) + M_0D(x) + Q_0D(x),$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $D(x)$ – функции.

В расчете сваи переменного сечения на совместные действия вертикальной и горизонтальных нагрузок методом конечных элементов свая рассматривается как гибкий стержень, заглубленный в многослойное основание, характеризуемый коэффициентом постели $C(x)$. Свая по длине мысленно разбивается на n конечных элементов.

Выделенный конечный элемент имеет четыре степени свободы – перемещения U_1 и U_2 , углы поворота φ_1 и φ_2 концов элемента в узлах. Функция прогибов элемента принята в виде кубического полинома. Коэффициенты при переменных определяются с учетом граничных условий на концах элемента.

Уравнения для перемещений записаны в матричной форме

$$U(x) = \{r\}^T \{U\},$$

где $\{r\}^T = \{r_1 r_2 r_3 r_4\}$; $r_1, r_2, r_3, r_4 = f(\ell, x)$; $\{U\} = \{U_1 \varphi_1 U_2 \varphi_2\}^T$.

Для определения матрицы жесткости сваи, заглубленной в линейно деформируемое грунтовое основание, характеризуемое коэффициентом постели, использован принцип Лагранжа о минимуме потенциальной энергии системы «свай–грунт» в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2(x)}{EI(x)} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell bC(x) dx - (P_1 + N_1 \varphi_1) U_1 - (M_1 + N_1 U_1) \varphi_1 = \min,$$

где $M(x)$ – изгибающий момент в сечении x ; N_1 , P_1 и M_1 – вертикальная, горизонтальная нагрузки и изгибающий момент, приложенные к голове сваи; U_1 и φ_1 – перемещения и угол поворота головы сваи; $C(x)$ – коэффициент постели в сечении x ; $b(x)$ – ширина элемента в сечении.

Матрица жесткости элемента $\|K_3\|$ состоит из матрицы жесткости изгиба сваи $\|K_c\|$ и матрицы жесткости отпора грунта $\|K_r\|$:

$$\|K_3\| = \|K_c\| + \|K_r\|,$$

где

$$\|K_c\| = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} EI(x) \frac{d^2\{r\}}{dx^2} \frac{d^2\{r\}^T}{dx^2} dx;$$

$$\|K_r\| = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} bC(x)\{r\}\{r\}dx.$$

Коэффициент постели принят постоянным в пределах каждого конечного элемента.

Обобщенное матричное уравнение имеет вид

$$\{F\} = \|K_{об}\| \{U_{об}\},$$

где $\{F\} = \{P_1 M_1 P_2 M_2 \dots P_{n+1} M_{n+1}\}^T$ – матрица обобщенных сил;

$\|K_{об}\|$ – обобщенная матрица жесткости системы;

$\{U_{об}\} = \{U_1 \varphi_1 U_2 \varphi_2 \dots U_{n+1} \varphi_{n+1}\}^T$ – матрица обобщенных перемещений.

В НИИ оснований под руководством В. Г. Федоровского исследована НДС комбинированных плитно-свайных фундаментов (КПСФ). В таком фундаменте нагрузку воспринимает плита и сваи. Решена осесимметричная задача теории упругости МКЭ. Конечные элементы для свай, грунта и плиты – прямоугольные, составленные из двух треугольных. Жесткости контактных КЭ для контакта свай и плиты с грунтом, а также внутри грунта принимали по модулю деформации грунта, а на контакте плиты со свайей и внутри плиты – по модулю Юнга железобетона.

При разработке метода расчета принимали жесткость одиночной сваи на вдавливание K_p , одиночной плиты как фундамента K_z , плитно-свайного фундамента $K_{pz} = K_p + K_z$.

Идеальное сложение жесткостей происходит при $K_p / K_z = 0$, т.е. для чисто плитного фундамента. С ростом отношения K_p / K_z эффективность использования плиты падает, а свай – возрастает.

Для расчета свай используют модель коэффициента постели, касательные напряжения по боковой поверхности свай определяют по формуле

$$\tau(z) = K(z)(\omega_p(z) - \omega_z(z, 0)),$$

где $\omega_z(z, 0)$ – смещения грунта под плитой (без свай) по оси сваи; $\omega_p(z)$ принимается из расчета КПСФ, а $\omega_z(z, 0)$ – из расчета одиночной плиты.

Подобно этому изменение контактного давления рассмотрено с использованием модели коэффициента постели:

$$\sigma_z(z) = K_0(\omega_z(z) - \omega_p(0, z)),$$

где ω_z – осадка плиты в составе КПСФ; $\omega_p(0, z)$ – осадка поверхности основания вокруг одиночной сваи.

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ БЕТОНА

Реология – наука, устанавливающая общие законы образования и развития во времени деформации любого вещества от различных причин в различных термодинамических и физико-химических условиях.

Для прогноза деформации неустановившейся затухающей ползучести применяют линейную (в отношении напряжений) теорию наследственной ползучести Больцмана–Вольтера.

Уравнение состояния при однократном нагружении имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + k(t - t_0)\sigma(t_0)t_0,$$

где $\varepsilon(t)$ – изменение относительной деформации во времени; $\frac{\sigma(t)}{E}$ – мгновенная деформация в момент времени t при модуле E ; $k(t - t_0)\sigma(t_0)t_0$ – ядро ползучести.

При непрерывном нагружении

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t k(t - t_0)\sigma(t_0)\Delta t_0.$$

Ядро ползучести – скорость ползучести при постоянном напряжении, отнесенная к единице действующего давления.

Для глинистых грунтов

$$k(t-t_0) = \delta e^{-\delta'(t-t_0)},$$

где δ и δ' – параметры ползучести, определяемые опытным путем.

Уравнение Бингама–Шведова имеет вид

$$\frac{1}{r} \varepsilon_{yz} = \tau - \tau_0,$$

откуда

$$\tau = \tau_0 + v \frac{d\varepsilon}{dt},$$

где $v = 1/\eta$ – коэффициент вязкости; τ_0 – начальное ($\varepsilon_{yz} = 0$) сдвиговое напряжение.

Основными элементами механических реологических моделей являются упругий (пружина) и вязкий (цилиндр, заполненный жидкостью, с расположенным внутри поршнем).

При последовательном соединении упругого и вязкого элементов получают уравнение Максвелла

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta},$$

где η – коэффициент вязкости.

В случае параллельного соединения упругого и вязкого элементов получают модель тела Фойгта

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right].$$

Более сложная модель представляет собой систему из упругого элемента, последовательно соединенного с двумя параллельно соединенными упругим и вязким элементами (модель тела Кельвина):

$$\frac{d\sigma}{dt} + \alpha\sigma = E \left(\frac{ds}{dt} + \beta\varepsilon \right),$$

где $\alpha = \frac{E_1 + E_2}{\eta}$; $\beta = \frac{E_2}{\eta}$; $E = E_1$.

Если при нагружении тело получило упругую деформацию $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, а затем в течение времени t_1 происходит процесс ползучести, а далее напряжение мгновенно уменьшается до нуля, то упругая составляющая деформации уменьшается на $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, а далее происходит процесс обратной ползучести (обратное последствие). При $t \rightarrow \infty$ $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е. вся деформация ползучести является обратимой и последствие в теле Кельвина упругое.

Рассмотрим предложения В. М. Бондаренко. Для бетона как стареющего материала обработка экспериментальных данных осуществляется в рамках инварианта С. В. Александровского–В. Д. Харлаба

$$\frac{1}{E_0^M(t_0)} - \frac{1}{E_0^M(t)} = \frac{C_0^*(t, t_0) - C_0(t, t_0)}{C_0^*(t, t_0) - C_0(t, t_0)} = 1,$$

где E_0^M – модуль мгновенной деформации; C_0 – мера простой ползучести без учета старения бетона; C_0^* – мера простой ползучести стареющего бетона; t, t_0 – начало нагружения, время.

Мера простой ползучести – относительная деформация ползучести бетона при $\sigma_b \leq 0,3b_n$, накопившаяся к моменту времени t при нагружении образцов ($t_0 < 1$) и приходящаяся на 1 МПа действующего постоянного напряжения:

$$C_0(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cr}(t, t_0)}{\sigma_b}.$$

Она равна тангенсу угла наклона к оси напряжений σ секущей хорды, проходящей через начало координат и рассматриваемую точку.

Так как $\varepsilon_{cr} = \lambda \varepsilon_B$, $\sigma_B = E_B' \varepsilon_B = \nu E_B \varepsilon_B$, то

$$C_B = \frac{\varphi}{E_B},$$

где $\varphi = \frac{\lambda}{\nu} = \frac{(1-\nu)}{\nu} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ – характеристика нелинейности деформирования бетона.

В современных теориях силового сопротивления бетона в качестве эталонного режима принимают неизменные во времени напряже-

ния. Деформации ползучести, соответствующие эталонному режиму, называются деформациями простой ползучести.

Реологическое уравнение силового сопротивления бетона имеет вид

$$E(t, t_0) = \frac{S_H[\sigma(t_0)]}{E_0^H} + S_H \left[\sigma(t) \Omega(t_0) C_0^*(t, t_0) \int_{t_0}^t S_0[\sigma(t)] \Omega(t_0) C_0^*(t, \tau) \right],$$

где E – полная относительная деформация; σ – напряжение; S_H – функция напряжения для деформации ползучести; t, t_0, τ – время начала нагружения, текущее время, время окончания отсчета нагружения; E_0^H – начальный модуль мгновенных деформаций; $C_0^*(t, \tau)$ – начальная мера деформаций простой ползучести; $\Omega(t_0)$ – функция старения для ползучести, введенная с целью разделения временных влияний возраста и нагружения.

При $\sigma = \text{const}$

$$\varepsilon(t, t_0) = \frac{S_H[\sigma(t_0)]}{S_0^M} + S_0(t_0) \Omega(t_0) C_0^*(t, t_0).$$

В формулах первый член – относительные мгновенные деформации; второй член – относительная кратковременная ползучесть быстронатекающая ползучесть; третий – относительные режимные деформации ползучести.

РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА ПРОСАДОЧНЫХ ГРУНТАХ

Для структурно-неустойчивых просадочных грунтов, которые в увлажненном состоянии теряют свои распределительные свойства и превращаются под подошвой фундамента как бы в систему не связанных между собой отдельных частиц, подходит модель местных деформаций, не учитывающая естественную неоднородность в плане сооружения, т.е. модель местных деформаций с переменным коэффициентом жесткости [28].

Другие представления переменного коэффициента жесткости

$$k(x) = p(x) / s(x),$$

где $s(x)$ – возможная осадка поверхности грунта в пределах плана здания от действия удельного давления.

По Мустафаеву А. А.

$$k(x) = k(1 - \beta) - \frac{2k\beta}{l} (1 - e^{-a})x + \frac{k\beta}{l^2} (1 - e^{-a})x^2,$$

где k – расчетный параметр, измеряемый так же как и коэффициент постели, характеризующий сопротивление грунта осадке без учета краевого эффекта; α и β – безразмерные параметры, характеризующие влияние краевого эффекта на величину и распределение реактивных давлений по подошве балки.

Применение метода местных упругих деформаций в теории расчета фундаментов на упругом основании обосновывается еще и следующим обстоятельством. В случае использования фундаментального решения Фламана для действия равномерно распределенной полосовой нагрузки на поверхности упругого полупространства наблюдается следующий эффект. При значительном отходе от нагрузки граница полуплоскости не только оседает, но и деформируется вверх, возрастая до бесконечности. Это противоречит реальному поведению грунта, где осадка быстро затухает по мере удаления от фундамента.

Приведем дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба ленточных фундаментов. Пусть на фундаменте действует внешняя нагрузка (сосредоточенные силы и моменты, распределенная нагрузка, сжимающие горизонтальные центрально приложенные силы), а также отпор грунта $p = k(x)q$.

Изгибная жесткость конструкции характеризуется цилиндрической жесткостью

$$D(x) = \frac{EI_n(x)}{1 - \mu_0^2},$$

где $I_n(x)$ – переменный момент инерции поперечного сечения; μ_0 – Пуассоновское отношение материала полосы.

Изгибающий момент в любом сечении фундамента на расстоянии x от левого конца равен

$$M(x) = M + \int k(\xi) \eta(x - \xi) d\xi + P(y - y_0),$$

где M – изгибающий момент от внешних поперечных нагрузок; поперечная сила

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \bar{Q} + \int_0^x k(\xi) \eta d\xi + P \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) + k(x)y + P \frac{d^2y}{dx^2},$$

где \bar{Q} – перерезывающая сила от внешней поперечной нагрузки $q(x)$.

Травуш В. И. рассмотрел применение функциональных прерывателей для описания прерывных законов изменения жесткости фундаментов, грунтового основания и внешних нагрузок (принимаются кусочно-непрерывные законы). Приводятся законы изменения $EI(x)$, $k(x)$, $q(x)$. Используется теория функциональных прерывателей Н. М. Герсеванова (1933, 1948).

Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI(x)}; \quad \psi(x) = \frac{1}{GF(x)} -$$

законы изменения изгибной и сдвиговой жесткости фундамента с использованием односторонних прерывателей;

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 = \varphi_1 + \Gamma_{b1} \varphi_{2,1} + \Gamma_{b2} \varphi_{3,2} + \dots + \Gamma_{bi} \varphi_{i+1,i} = \\ &= \varphi_1 + \sum \Gamma_{bi} \varphi \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \end{aligned}$$

где $\Gamma_{b1}, \Gamma_{b2}, \dots, \Gamma_{bi}$ – односторонние протяженные прерыватели; l_1, l_2, l_i – расстояние от левого конца до конца рассматриваемой ступени фундамента;

$$\varphi_1 = \frac{1}{EI_1}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{EI_2}; \quad \varphi_i = \frac{1}{EI_i};$$

$$\varphi_{2,1} = \varphi_2 - \varphi_1; \quad \varphi_{3,2} = \varphi_3 - \varphi_2; \quad \varphi_{i+1,i} = \varphi_{i+1} - \varphi_i.$$

Для сдвиговой жесткости

$$\psi(x) = \frac{1}{GF(x)} = \psi_1 + \sum_{i=1}^m \Gamma_{ai} \varphi_{i+1,i} = \varphi_{i+1} - \varphi_i.$$

Пусть фундамент опирается на различные по своим свойствам грунты в пределах $0 \leq x \leq l_1$ и $l - l_1 \leq x \leq l$. Коэффициенты жесткости основания будут $k_1(x)$ и $k_2(x)$.

Тогда

$$k(x) = k_1(x) + \Gamma_{L1} k_{2,1}(x), \quad k_{2,1}(x) = k_2(x) - k_1(x).$$

При

$$x < l_1 \quad \Gamma_{L1} = 0 \quad \text{и} \quad k(x) = k_1(x) + k_{2,1}(x) = k_2(x).$$

Для многослойного основания, когда имеются $k_1(x), k_2(x), \dots, k_i(x)$:

$$k(x) = k_1(x) + \sum_{i=1}^m \Gamma_{Li} k_{i+1,i}.$$

При действии сосредоточенных сил N_i , распределенных нагрузок $q_i(x)$, моментов M_i функция нагрузки равна

$$q(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \Gamma_{a_i} N_i + \sum_{i=1}^{m_2} \Gamma_{b_i} M_i + \sum_{i=1}^{m_3} \Gamma_{c_{hi}} q_i(x),$$

где m_1, m_2, m_3 – количество сосредоточенных сил, моментов, распределенных нагрузок; a_i, b_i, c_{hi} – расстояния от левого конца фундамента, где приложены сосредоточенные силы, моменты, а также начало и конец участка с $q_i(x)$; Γ_{a_i} – мгновенный прерыватель первого рода; Γ_{b_i} – мгновенный прерыватель второго рода; $\Gamma_{c_{hi}}$ – двухсторонний прерыватель.

Многочисленные примеры расчета приводятся в работах И. А. Симвулиди (1978).

2.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ

В работе «Моделирование оснований сооружений» (А. С. Строганов, И. С. Иванов, 1995) описана теория физического моделирования оснований как нелинейно деформируемой среды, позволяющая описать весь процесс деформирования оснований. Показана целесообразность использования теории пластической неоднородности для математического моделирования глинистых водонасыщенных оснований в неконсолидированном состоянии при больших нагрузках.

Обобщенное представление о механических свойствах грунтов в инвариантной форме при активной деформации и стабилизированном состоянии

$$\sigma_i = \frac{\bar{G} \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi + \bar{G} \varepsilon_i} (H + \sigma) \varepsilon_i,$$

где σ_i и ε_i – интенсивность касательных напряжений и деформаций сдвига; \bar{G} – приведенный начальный модуль сдвига; $\operatorname{tg} \psi$ – коэффициент трения по октаэдрической площадке; $H = c/\operatorname{tg} \psi$ – гидростатическое давление, эквивалентное сцеплению c ; σ – среднее нормальное напряжение.

Объемное изотропное сжатие ε зависит от напряжений σ . Закон дилатации примет вид

$$\varepsilon_d = -\nu \varepsilon_i,$$

где ε_d – дилатация; ν – коэффициент дилатации.

При жесткопластичном состоянии грунта ($\bar{G} \rightarrow \infty$) представленная выше зависимость переходит в условия пластичности Губера–Шлейхера.

Девиаторное соотношение между компонентами напряжения и деформации представлено в виде

$$\sigma_x = \left[1 + \frac{\bar{G} \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi + \bar{G} \varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon/3) \right] (H + \sigma) - H;$$

$$\tau_{xy} = \frac{\bar{G} \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg} \psi + \bar{G} \varepsilon_i} (H + \sigma) \gamma_{xy}.$$

Приняты масштабные множители для: длин – a_b , напряжений – a_σ , связности – a_n , удельного веса грунта – a_γ , перемещений – a_s .

Условия подобия модели и прототипа:

$$a_n = a_s; \quad a_\sigma = a_\gamma; \quad a_s = a_b.$$

Для пластического состояния среды

$$\sigma_n / \gamma_n e_n = \sigma_m / \gamma_m e_m.$$

По экспериментальной зависимости

$$s_m b_m = f(q_m / \gamma b_m)$$

получают

$$s_n = \frac{s_m}{b_m} b_n; \quad \frac{q_n}{\gamma b_n} = \frac{q_m}{\gamma b_m}; \quad q_n = \frac{q_m}{b_m} b_n,$$

где s_n, q_n, b_n – осадка, среднее давление под подошвой натурального фундамента (прототипа) и его ширина.

Линейный участок зависимости

$$s_m b_m = f(q_m / \gamma b_m)$$

характеризуется безразмерным коэффициентом жесткости

$$s = q_m / \gamma s_m = \text{const}.$$

Моделирование песчаных оснований под круглым штампом при вертикальной нагрузке выполнено под руководством В. Г. Березанцева (1958).

При проектировании многоэтажных и высотных монолитных железобетонных зданий применяют следующие модели основания (О. В. Кабанцев, 2013):

- модель основания Винклера (коэффициент постели C);
- модель основания Пастернака (коэффициент постели $C1$ и $C2$);
- модель В. Г. Федоровского (переменный коэффициент постели C).

Болдырев Г. Г. отличает [4] следующие модели грунта:

- общих упругих деформаций;
- Фусса–Винклера;
- Филоненко–Бородича;
- Пастернака–Власова;
- Kaliszky–Galasko;
- с учетом вертикальных сдвигов;
- пирамидальная;
- Кэм–Кеси;
- полностью водонасыщенного грунта и просто водонасыщенного.

Кушнер С. Г. описывает следующие модели:

- несущего слоя;
- упругого полупространства;
- упругого слоя;
- Иванова–Гриффитса–Фрелиха;
- Вестергаарда;
- двухслойного основания;
- комплексные;
- нелинейно-упругую и упругопластическую (Фрелиха, Соколовского, Грубане, Малышева, Зорецкого, Вялова, Слепака, Широкова, Бугрова);
- смешанные упругой и пластической среды (Бугрова, Бугрова–Зархи, Николаевского, Шапиро, Проскуракова, Пилягина и Казанцева, Друккера–Прагера, Вялова).

Шапиро Д. М. подробно рассматривает [51] модели теории линейного деформирования и жесткопластических сред (рис. 2.9).

Сферические волны в сыпучей среде с малым трением рассматривали: Г. Т. Тарабрин, Ю. С. Тынянкин (2007); динамические задачи в грунтах – Х. А. Рахматулин (1945), О. Я. Шехтер (1948), Н. В. Зволинский (1960), С. С. Григорян (1964), Г. М. Ляхов (1968), Г. А. Гениев (1972), В. А. Ильичев (1976, 1981), Д. А. Савинов, В. А. Ильичев (1984) и др.

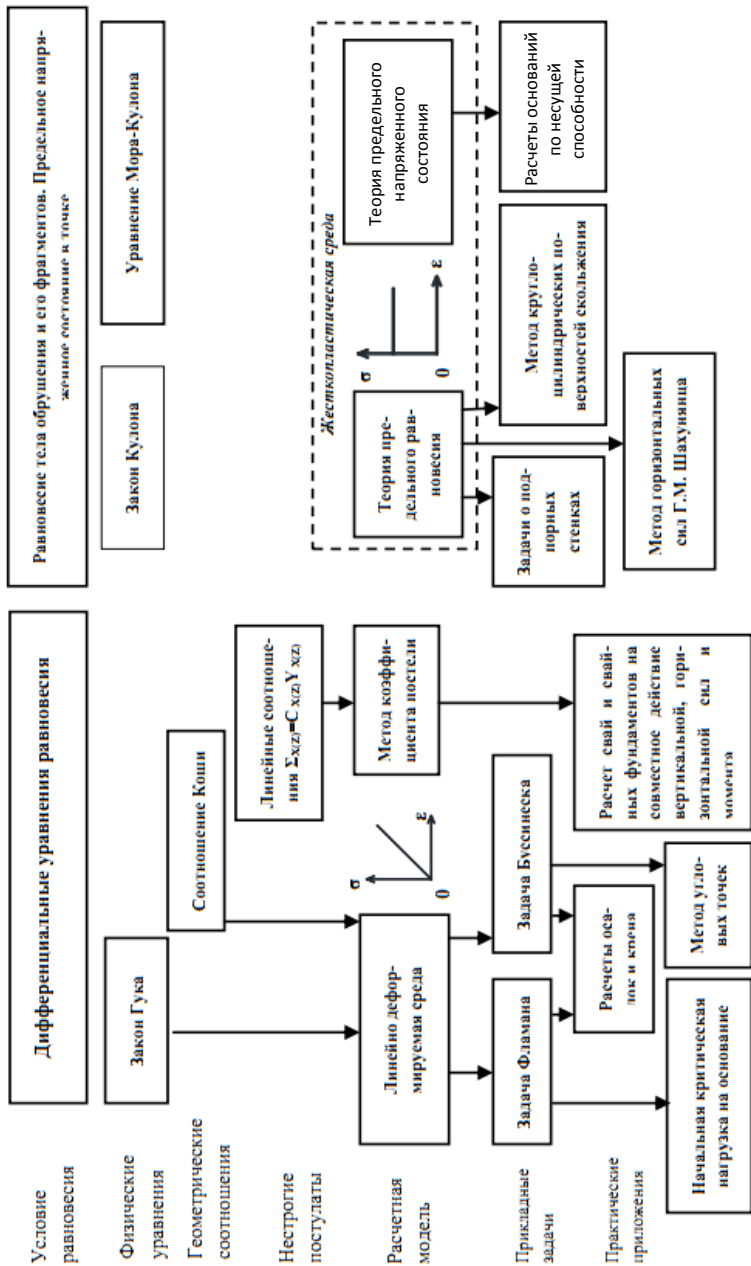


Рис. 2.9. Линейная и жесткопластическая модели механики грунтов (структурная схема)

При малых внутренних трениях ($\varphi < 7^\circ$) касательными напряжениями можно пренебречь, а среднее нормальное давление принимают равными гидравлическому p . Зависимости плотности $\rho(p)$ при росте и падении давления не совпадают. Когда давление падает до нуля, плотность выше начальной ρ_0 . Следствием этого являются необратимые потери энергии движения среды. Требуется получить законы изменения давления в среде в области вокруг сферической полости. Давление в полости растет в интервале $[0, t_0]$ и падает при $t \in (t_0, T)$. Причем скорость распространения волны сжатия при росте давления меньше, чем при уменьшении. Это порождает волну разгрузки (Х. А. Рахматулин, 1945).

Степень уплотнения среды оценивается величиной ε , называемой конденсацией:

$$\varepsilon = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}.$$

Принимается

$$p = C\varepsilon \text{ при } \frac{\partial p}{\partial t} > 0, \quad p_* - p = \beta C(\varepsilon_* - \varepsilon) \text{ при } \frac{\partial p}{\partial t} < 0,$$

где $C = \text{const} > 0$ – модуль компрессии; $\beta = \text{const} \geq 1$ – коэффициент декомпрессии; $p_* = C\varepsilon_*$ – максимальное давление и соответствующая ему конденсация в данной точке среды, достигнутые в процессе роста давления, т.е. при $\frac{\partial p}{\partial t} > 0$.

Получают

$$\rho = \rho_0 + \frac{p}{a^2} \text{ при } \frac{\partial p}{\partial t} > 0, \quad \rho = \rho_0 + \frac{[p + (k^2 - 1)p_*]}{k^2 a^2} \text{ при } \frac{\partial p}{\partial t} < 0,$$

где $a = \sqrt{c/\rho_0}$ – скорость распространения волны компрессии, конденсации; $k = \sqrt{\beta}$ – коэффициент ускорения волны компрессии – волн конденсации при падении давления.

Уравнения движения сжимаемой среды и неразрывности имеют вид:

$$\text{grad}p + \frac{\rho dV}{dt} = 0; \quad \text{div}(\rho V) = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

где V – вектор скорости смещения среды.

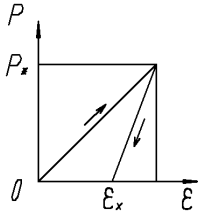


Рис. 2.10. Графики σ – ϵ для нагрузки и разгрузки

При малых смещениях среды

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad \operatorname{div}(\rho V) = \rho \operatorname{div} V.$$

Разрезающая система уравнений

$$\operatorname{grad} p \neq \frac{\rho_0 dV}{dt} = 0; \quad \rho_0 k^2 a^2 \operatorname{div}(\rho V) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Движения, описываемые этой системой, являются потенциальными. Если F – скалярный потенциал движения, то

$$V = -\frac{\operatorname{grad} F}{\rho_0}; \quad p = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Внутри сферической полости при $r = R$ давление

$$p = (R, t) = p_{\max} \psi(t) \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_*;$$

$$p = (R, t) = p_{\max} \varphi(t - T) \quad \text{при } t_* \leq t \leq T,$$

где p_{\max} – наибольшее давление внутри полости, угол ψ непрерывно возрастает от $\psi(0) = 0$ до $\psi(t) = 1$, а φ непрерывно убывает от $\varphi(t_* - T) = 1$ до $\varphi(0) = 0$ (рис. 2.10).

Геологические разломы в земной коре (А. Г. Гликман, 1997; А. Г. Гликман, А. А. Стародубцев, 1999; Е. К. Мельников и др., 1993). Разлом или геопатогенная зона (от греческого «гео» – Земля, «патос» – болезнь) образуется вследствие непрерывного и неравномерного перемещения тектонических плит. В них образуются трещины, тектонические швы или смещения блоков.

Геопатогенная зона – протяженная геофизическая аномалия (реактивная зона), в которой ощущаются всевозможные геофизические воздействия на живые организмы, технику, сооружения. Наиболее частые геопатогенные зоны наблюдаются в области трещин, разрывов или разломов земной коры.

В зонах активных разломов происходят разрушения зданий и сооружений, разрывы коммуникаций, образования трещин в зданиях и сооружениях. По мнению А. Г. Гликмана (2011), в геопатогенных разломах горные породы находятся в разрушенном состоянии из-за планетарной пульсации – движения отдельных участков земной коры относительно друг друга.

При строительстве жилого дома в Санкт-Петербурге. Применить свайный вариант фундаментов не удалось из-за проваливания свай. Разработали вариант монолитного дома на плите. Во время проведения работ нулевого цикла плита лопнула. Вследствие взаимных перемещений отколовшихся кусков плиты появились трещины в стенах. Приостановить трещинообразование не удалось (А. Г. Гликман, 2011).

В Санкт-Петербурге выявлены четыре тектонических разлома в пределах области сочленения Балтийского щита с Русской плитой.

При анализе причин аварий Трансконского элеватора в Канаде определено влияние тектонического разлома, расположенного под краем, опустившимся на 8 м.

Взрыв четвертого энергоблока на Чернобыльской АЭС, по мнению А. Г. Гликмана, также вызван влиянием зоны тектонического разрушения. Планетарная пульсация имеет определенную частоту. Когда она попадает в резонанс сильно вибрирующими установками над титаническим разломом происходит взрыв (горный удар). На АЭС было зафиксировано два взрыва с интервалом 20...27 с.

Комплексная оценка силового сопротивления железобетонных конструкций при интенсивных коррозионных воздействиях (Б. А. Ягунов, 2008).

Предложенный метод основан на теории силового сопротивления эксплуатируемых железобетонных элементов (В. М. Бондаренко, 2007), уравнениях кинетики повреждений

$$\frac{d\Delta\delta(t)}{dt} = -a[\Delta\delta(t)]^m,$$

где $\Delta\delta(t) = \frac{\delta_{cr}(t_0) - \delta(t - t_0)}{\delta_{cr}(t_0)} = 1 - \frac{\delta(t, t_0)}{\delta_{cr}(t_0)}$; $\delta_{cr}(t_0) = 1 - \frac{\delta(t_0)}{\delta_{cr}(t_0)}$ – текущий относительный дефицит повреждений, соотносимый к критическому значению; $\delta_{cr}(t)$ – текущая глубина повреждений; $\delta_{cr}(t_0)$ – критическое значение повреждений (при кольматационном типе кинетики равно $\delta_{cr}(\infty, t_0)$, зависит от уровня напряженного состояния); t_0, t – время начала наблюдений и время текущего наблюдения; δ_{cr}, a, m – параметры кинетики повреждений, зависящие от уровня и знака напряженного состояния.

После разделения переменных получено

$$\delta(t) = f(a, m, t)\delta_{cr}(t_0).$$

При $m > 0$, $a < 0$

$$f_m(t) = 1 - \left\{ [\Delta\delta(t_0, t)]^{(-m)+1} + a[(-m)+1](t-t_0) \right\}^{\frac{1}{[(-m)+1]}}.$$

При $m = 1$, $a < 0$

$$f_{m=1} = \left[1 - \Delta\delta_{cr}(t_0) e^{-a(t-t_0)} \right].$$

Функция коррозионных повреждений

$$k = \sum_{i=0}^{i=2} a_i z^i,$$

где $a_0 = k_1$; $a_1 = 2(1-k_1)/\delta$; $a_2 = (1-k_1)/\delta^2$.

Тогда снижение сопротивления F_{Π} и остаточное сопротивление $F_{\text{н}}$:

$$F_{\Pi} = \int_{\sigma}^{\delta} k_b R_b d_z \frac{2+k_1}{3} = \delta b R_b;$$

$$F_{\text{н}} = b_p p R_p = b R_b (x - z - \delta).$$

Приведенное решение позволяет вычислять остаточный ресурс $F_{\text{н}}$ силового сопротивления железобетонных элементов (см. Б. А. Ягупов, Р. Е. Мигель, 2007, 2010).

Расчет живучести коррозионно повреждаемых железобетонных конструкций (Н. В. Клюева, 2008). Рассмотрен вопрос о живучести железобетонных конструкций с внезапно выключающимися от коррозионных повреждений элементами.

Исходное уравнение принято в виде (В. М. Бондаренко, 2007)

$$\frac{d[\Delta L(t, t_0)]}{dt} = -a[\Delta L(t, t_0)]^m,$$

где

$$\Delta L(t, t_0) = \left[L_{\text{кр}} - \frac{L(t, t_0)}{L_{\text{кр}}} \right].$$

Пусть $\Delta L(t, t_0) = f(t)$, тогда

$$\frac{df}{dt} = -af^m.$$

Функция $L(t, t_0)$ получена в виде

$$L(t, t_0) = L_{кр} \left\{ 1 - \left[a(m_0 - 1)(t - t_0) + \left(1 - \frac{L(t_0)}{L_{кр}} \right) \right]^{1-m_0} \right\}^{\frac{1}{1-m_0}},$$

$$t_0 \leq t < t_1;$$

$$L(t, t_0) = L_{кр} \left\{ 1 - \left[a(m_1 - 1)(t - t_0) + \left(1 - \frac{L(t_0)}{L_{кр}} \right) \right]^{1-m_1} \right\}^{\frac{1}{1-m_1}},$$

$$t \geq t_1.$$

НДС в области трещины при хрупком разрушении бетона (Л. М. Абрамов, И. А. Потехин, 2012). Авторы считают, что теория Дж. Ирвина о механизме развития трещин более подходит к металлам, чем к бетону. Напомним, что по Дж. Ирвину скорость развития трещин связана с двумя основными характеристиками: K_c – коэффициент интенсивности напряжений и K_{Ic} – критическая величина коэффициента интенсивности, позволяющими вычислить критическую длину трещин, при достижении которой развитие трещин становятся нестабильными.

Для более полной оценки срока службы элемента авторы для бетонов вводят теоретически определенный коэффициент концентрации напряжений. Задача решена МКЭ с использованием линейной теории упругости. Для произвольного элемента z записаны уравнения относительно перемещения узлов:

$$\bar{F}^z = [k]^z \bar{q}^z,$$

где $\bar{F}^z = \{F_{11}^z, F_{21}^z, F_{12}^z, F_{22}^z, F_{13}^z, F_{23}^z\}$ – вектор обобщенных узловых усилий элемента z по направлению осей x_1 и x_2 ; $[k]^z$ – матрица жесткости линейного треугольного конечного элемента; $\bar{q}^z = \{u_{11}^z, u_{21}^z, u_{12}^z, u_{22}^z, u_{13}^z, u_{23}^z\}$ – вектор перемещений в узлах.

Уравнение равновесия для всего тела имеет вид

$$\bar{E} = [k] \bar{q}.$$

Расчет железобетонных конструкций методами механики разрушения (К. А. Пирадов, Т. Л. Мамаев, 2001). Основной нормируемой характеристикой бетона и стали становится энергия, затрачи-

ваемая на разрушение их структуры. Вводятся критические коэффициенты интенсивности бетона (k_c^b) и железобетона (k_c^z) (ГОСТ 29167–91):

$$K_{Ic}^r = K_{Ic} + K_{Ic}^3;$$

$$K_{IIc}^r = K_{IIc} + K_{IIc}^3,$$

где индекс I присвоен отрывным трещинам, II – сдвиговым; $K_{I(II)c}^3$ – критический коэффициент интенсивности напряжений (КИН), характеризующий сдерживающее влияние арматуры на развитие трещин; K_c^3 – коэффициент, учитывающий сдерживающее влияние арматуры на развитие трещин, зависящий от количества арматуры (A_s), напряжений в ней (σ_s), сцепления арматуры с бетоном и длины трещины.

Процесс разрушения изгибаемого элемента на предельной стадии деформирования происходит с образованием трещин: нормального отрыва (v) в растянутой части сечения; сдвига (h), параллельные продольной оси элемента в сжатой части сечения; сдвигово-отрывные (i), наклонные к продольной оси элемента.

Компьютерное моделирование строительного объекта как единой конструкции (А. Н. Супрун, 2009). Работа, затрачиваемая на формирование упругопластического тела, превращается в потенциальную упругую энергию, в скрытую энергию остаточных микронапряжений, рассеивается в виде тепла, тратится на структурные и химические изменения.

Супрун А. Н. разработал теорию реономной пластичности, в основу которой положен единый феноменологический подход к учету внутренних переходных процессов в неупруго деформируемых материалах.

В рассматриваемых реологических моделях пластичности введены элементы одностороннего перемещения, деформационного старения, релаксационного упрочнения, изменения внутренней структуры материала и др.

О силовом сопротивлении железобетона (В. М. Бондаренко, 2000). Бондаренко В. М. отмечает, что бетону свойственна анизотропия силового сопротивления, которое определяется свойствами его компонентов и спецификой их совместной работы. Силовое сопротивление бетона, арматуры, сцепление между ними отличает нелинейностью связи напряжений и деформаций, ползучести, необратимости деформаций, возрастного износа. Бетон реагирует на изменение гидрометрических и физико-химических характеристик среды, на предысторию и временные режимы нагружения. Силовое сопротивление бетона зависит от режима трансформации напряженно-деформированного

состояния; длительной прочности, выносливости и жесткости; потерь преднапряженной арматуры; трещиностойкости; адаптации и приспособляемости конструкций; деформирования; эволюции граничных условий; устойчивости, колебаний и оптимизации сооружений; от повреждений, накопленных за время эксплуатации.

Силовое сопротивление железобетона, поврежденного химической коррозией (Б. Ягунов, А. Иванов, 2010). Уравнение состояния теплового сопротивления (В. М. Бондаренко, 2008)

$$\frac{d\Delta\delta(t)}{dt} = a(\eta)[\Delta\delta(t)]^{m(\eta)},$$

где $\Delta\delta(t) = \frac{\delta_{cr} - \delta(t)}{\delta_{cr}}$; $m(\eta) = \sum_{i=0}^{\eta} a_{mi}\eta^i$; $a(\eta) = \sum_{i=0}^{\eta} a_{0i}\eta^i$; $\eta = \frac{\delta}{R_{g1}}$.

Решением уравнения является

$$\delta(t) = f_m(a, m, \delta_{cr}, t) \delta_{cr}.$$

При $m(\eta) = 0$

$$f_0(t) = \left[\frac{\delta(t, t_0)}{\delta_{cr}} + a(t - t_0) \right],$$

при $m(\eta) = 1$

$$f_1(t) = 1 - \Delta\delta(t, t_0) e^{-a(t-t_0)},$$

при $m(\eta) \neq 1$

$$f_m(t) = 1 - \{[\Delta\delta(t, t_0)]^{(-m)+1} + a[(-m)+1](t - t_0)\}^{\frac{1}{[(-m)+1]}}$$

где $\delta(t)$ – текущая глубина коррозионных повреждений ко времени t , отсчитываемая от поверхности контакта с агрессивной средой; t_0, t – начальное и текущее время наблюдений; δ_{cr} – фиксированное значение глубины повреждений; $\Delta\delta(t)$ – относительный дефицит текущей глубины повреждений в сравнении с δ_{cr} ; δ – напряжения сжатия, перпендикулярные направлению продвижения повреждений; R_{g1} – предел длительной прочности; a и m – эмпирические параметры, отражающие способность развития повреждений в зависимости от уровня напряжений $\eta = \sigma / \sigma_n$, где σ_n – разрушающее значение.

В случае $m \geq 1$ – происходит устойчивое затухающее продвижение повреждений к некоторому асимптотическому пределу δ_{cr} ; $0 \leq m \leq 1$ – устойчивое незатухающее продвижение повреждений; $0 \geq m$ – неустойчивое лавинное продвижение повреждений.

Лурье А. И. рассмотрел модели нелинейной теории упругости: тела Сетха, Синьорине, Мурнагана, Блейтца и Ко. Приведены уравнения состояния нелинейного упругого материала, задачи для несжимаемой и сжимаемой упругой среды. Обоснованы основные принципы в задачах нелинейной теории упругости: стационарности потенциальной энергии систем, стационарности дополнительной работы, стационарности Рейсснера и Ху–Вашицу, Гамильтона–Остроградского.

Изложены закономерности реологического поведения растворов и расплавов полимеров. Описаны модели ньютоновских и аномально-вязких неньютоновских жидкостей.

Так, согласно гипотезе Ньютона касательное напряжение сдвига пропорционально скорости деформации сдвига:

$$\sigma_{12} = \eta \dot{\gamma}_{12},$$

где η – коэффициент динамической вязкости; $\dot{\gamma}$ – сдвиговая компонента скорости сдвига.

Для несжимаемой жидкости

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad \eta = 0, \quad \eta' = 0,$$

где η' – коэффициент объемной вязкости.

Кроме сдвиговых течений, возможно и растяжение жидкости. Для нее

$$\eta_e = \delta_{11} / \dot{\epsilon}_{11},$$

где η_e – продольная вязкость.

Описаны механические модели Сен-Венина и Шведова–Бингама, гистерезисные явления при течении тиксотропных систем.

Долговечность бетона определяется предельным уровнем напряженного состояния структурных элементов, при котором повышение критических размеров и количества дефектов в виде капилляров, пор, микротрещин вызывает возрастание внутренних сил и напряжений и проявляется в локальных зонах в развитии микротрещин. При определении долговечности используется понятие скорости понижения параметра вязкости от действия статических и циклических нагрузок, от тепловлажностных воздействий. Трещины в структуре бетона развиваются по механизму нормального отрыва и поперечного сдвига.

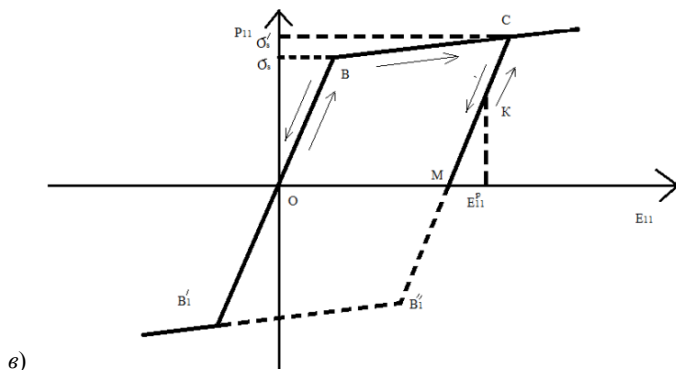
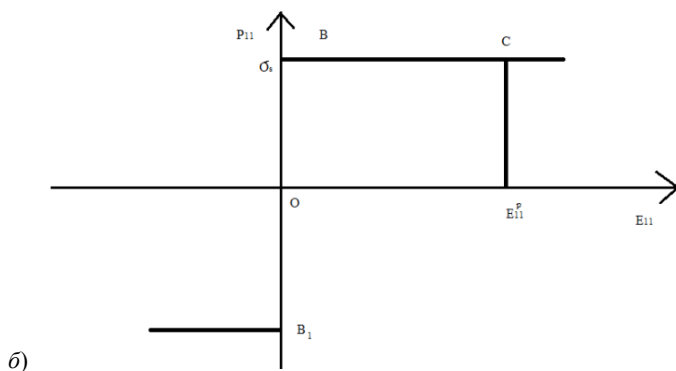
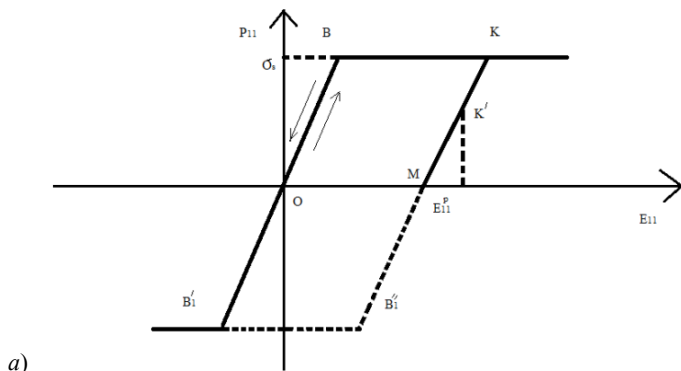


Рис. 2.11. Диаграммы для одноосного растяжения–сжатия материала идеального упругопластического (а) и жесткопластического (б), упругопластического с линейным упрочнением (в) и с криволинейным (г)

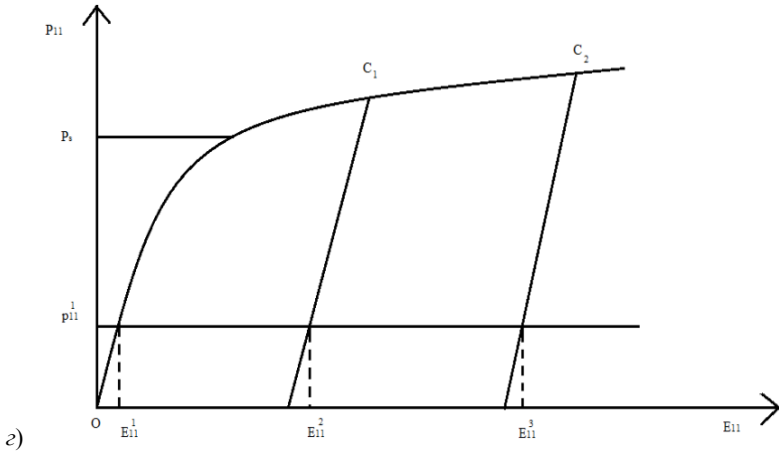


Рис. 2.11. Окончание

Рассмотрены идеализированные модели упругопластического тела. Отмечается, что в классической теории пластичности считают процесс изотермическим, пренебрегают влиянием скорости на диаграмму напряжения-деформация, не учитываются ползучесть и релаксация. В моделях идеального упругопластического и жесткопластического тела не учитывается упрочнение и эффект Баушингера (рис. 2.11, а и б).

При обсуждении модели с линейным упрочнением (рис. 2.11, в) показано проявление эффекта Баумингера (изменение предела упругости на сжатие после предварительного растяжения за предел упругости). Как показано на рис. 2.11, г одному и тому же значению напряжения P'_{11} может соответствовать бесчисленное множество значений $E_{11}^1, E_{11}^2, E_{11}^3$ и т.д.

Рассмотрены модели поведения пористой упругопластической среды в условиях динамического нагружения. Среда испытывает полиморфные фазовые превращения, связанные со сдвиговыми деформациями вещества. Внутренняя структура пористого материала определяется относительным объемом пор и их характерным размером.

Математические модели разработаны для сред сложной структуры в условиях кратковременных импульсных нагрузок с учетом больших деформаций, неупругих эффектов, фазовых превращений, пористости и разрушения.

Уравнение состояния пористого материала

$$\beta = \int (\alpha p, e_m) / \alpha ,$$

где ρ_m – плотность материала матрицы; ρ – плотность пористого материала; e_m – внутренняя энергия материала матрицы; $\alpha = v/v_m$ – отношение удельного объема пористого материала к удельному объему матричного материала.

Предполагается равенство внутренних энергий компактного и пористого материала, т.е. внутренняя энергия пористого материала определяется деформацией матричного каркаса. Рассматривается система уравнений, описывающих движение пористой упругопластичной среды, матрица которой при импульсном нагружении испытывает полиморфные фазовые превращения.

Выполнено математическое моделирование поведения хрупких материалов в условиях ударно-волнового нагружения. Неоднородная пористая среда является двухкомпонентным материалом, состоящим из твердой фазы (матрицы) и включений (пор, трещин). Принимается, что форма пор близка к сферической.

Система уравнений, описывающих движения пористой упругопластической среды, включает законы сохранения массы, импульса, энергии, уравнение состояния, уравнение Прандтля–Рейсса, условия текучести Мизеса (Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, 1966). Модели неоднородных тел рассмотрены в работе [47] и В. И. Андреевым (2002).

Список литературы к главе 2

1. **Александров, А. С.** Совершенствование расчета дорожных конструкций сопротивления сдвигу. Ч. 2. Предложения : монография / А. С. Александров. – Омск : СибАДИ, 2015. – 292 с.
2. **Александров, А. С.** Совершенствование расчета дорожных конструкций сопротивления сдвигу. Ч. 1. Состояние вопроса : монография / А. С. Александров. – Омск : СибАДИ, 2015. – 262 с.
3. **Белов, Н. Н.** Математическое моделирование динамической прочности конструкционных материалов : учебное пособие / Н. Н. Белов, Д. Г. Копаница, Н. Т. Югов. – М. : АСВ, 2013. – 562 с.
4. **Болдырев, Г. Г.** Методы определения механических свойств грунтов. Состояние вопроса : монография / Г. Г. Болдырев. – Пенза : ПГУАС, 2008. – 696 с.
5. **Бондаренко, В. М.** Расчетные модели силового сопротивления железобетона : монография. / В. М. Бондаренко, В. И. Колчунов. – М. : АСВ, 2004. – 472 с.
6. **Воробьева, Е. Ю.** Универсальная расчетная модель грунтового основания и ее практическое применение / Е. Ю. Воробьева, И. И. Черкасов // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1980. – № 10. – С. 3 – 15.
7. **Вялов, С. С.** Реологические основы механики грунтов : монография / С. С. Вялов. – М. : Высшая школа, 1978. – 447 с.

8. **Галин, Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкопластичности : монография / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
9. **Гарагаш, Б. А.** Надежность стохастических пространственных систем сооружений и оснований при неоднородных деформациях оснований : дис. ... д-ра техн. наук / Б. А. Гарагаш. – Волгоград, 2001. – 519 с.
10. **Гениев, Г. А.** Динамика пластической и сыпучей среды : монография / Г. А. Гениев, М. Н. Эстрин. – М. : Стройиздат, 1972. – 216 с.
11. **Горбунов-Посадов, М. И.** Давление грунта на жесткий закругленный фундамент и свободные деформации котлована / М. И. Горбунов-Посадов, О. Я. Шехтер, В. А. Кофман // Тр. НИИ оснований, 1954. – Вып. 24. – С. 39 – 80.
12. **Горбунов-Посадов, М. И.** Расчет конструкций на упругом основании : монография / М. И. Горбунов-Посадов, Т. А. Маликова, В. И. Соломин. – М. : Стройиздат, 1984. – 679 с.
13. **Григолюк, Э. И.** Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин : монография / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М. : Машиностроение, 1988. – 288 с.
14. **Григорьев, И. В.** Деформирование, устойчивость и колебания оболочных конструкций : монография / И. В. Григорьев, В. Н. Прокопьев, Ю. В. Твердый. – М. : АСВ, 2001. – 208 с.
15. **Добров, Э. М.** Механика грунтов : учебник / Э. М. Добров. – М. : Изд. центр «Академия», 2008. – 272 с.
16. **Ерхов, М. Н.** Теория идеально пластических тел и конструкций : монография / М. Н. Ерхов. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
17. **Зарецкий, Ю. К.** Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений : монография / Ю. К. Зарецкий. – М. : Стройиздат, 1988. – 352 с.
18. **Звездов, А. И.** Расчет прочности железобетонных конструкций при действии изгибающих моментов и продольных сил по новым нормативным документам / А. И. Звездов, А. С. Залесов, Т. А. Мухамедов, Е. А. Чистяков // Бетон и железобетон. – 2002. – № 2. – С. 21 – 25.
19. **Ильичев, В. А.** Метод расчета деформаций оснований зданий вблизи глубоких котлованов / В. А. Ильичев, Н. С. Никифорова, Е. Б. Корнеева // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2006. – № 6.
20. **Карпенко, Н. И.** Теория деформирования железобетона с трещинами : монография / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 208 с.
21. **Карпенко, Н. И.** Общие модели механики железобетона : монография / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 416 с.
22. **Караулов, А. М.** Несущая способность оснований осесимметричных фундаментов зданий и сооружений : автореф. дис. ... д-ра техн. наук / А. М. Караулов. – СПб., 2009. – 46 с.
23. **Коренев, Б. Г.** Расчет плит на упругом основании : монография / Б. Г. Коренев, Е. И. Черниговская. – М. : Госстройиздат, 1954. – 350 с.

24. **Леденёв, В. В.** Механические и реологические модели оснований и фундаментов : учебное пособие / В. В. Леденёв, А. В. Худяков. – Тамбов : ТГТУ, 2012. – 80 с.

25. **Леденёв, В. В.** Проектирование плитных фундаментов : метод. указания / В. В. Леденёв, А. В. Худяков. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2010. – 45 с.

26. **Макаров, Б. П.** Расчет фундаментов сооружений на случай-но-неоднородном основании при ползучести : монография / Б. П. Макаров, Б. Е. Кочетков. – М. : Стройиздат, 1987. – 256 с.

27. **Методика** районирования территории Москвы для строительства объектов с заглубленными основаниями / В. И. Осипов, В. И. Кутенов, Н. Г. Анисимова, И. А. Кожевникова, И. В. Козлякова // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2010. – № 4. – С. 8 – 14.

28. **Миронов, В. А.** Прочность и деформируемость грунтов при сложном напряженном состоянии / В. А. Миронов, О. Е. Софьин, А. Н. Гудий // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2007. – № 4. – С. 5 – 9.

29. **Мустафаев, А. А.** Расчет оснований и фундаментов на просадочных грунтах : учебное пособие / А. А. Мустафаев. – М. : Высшая школа, 1979. – 368 с.

30. **Надаи, А.** Пластичность и разрушение твердых тел : монография / А. Надаи. – М. : Мир, 1968. – Т. 2. – 863 с.

31. **Пастернак, П. Л.** Основы нового метода расчета жестких и гибких фундаментов на упругом основании / П. Л. Пастернак // Материалы совещания по теории расчета балок и плит на сжимаемость основания : сб. ст. / МИСИ. – М. : Госстройиздат, 1956. – № 14. – С. 116 – 144.

32. **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа : учебное пособие / А. В. Перельмутер, В. И. Слевнер. – Киев : Сталь, 2002. – 597 с.

33. **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа : монография / А. В. Перельмутер, В. Н. Сливкер. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, АСВ, ДМК, Пресс Москвы, 2011. – 736 с.

34. **Пилягин, А. В.** Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений : учебное пособие / А. В. Пилягин. – М. : АСВ, 2005. – 248 с.

35. **Пухонто, Л. М.** Долговечность железобетонных конструкций и железобетонных сооружений : монография / Л. М. Пухонто. – М. : АСВ, 2004. – 424 с.

36. **Пушилин, А. Н.** Метод расчета усилий в конструкциях зданий при деформировании оснований из-за проходки подземной выработки / А. Н. Пушилин, А. В. Фаворов, В. И. Шейнин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2007. – № 3. – С. 2 – 6.

37. **Пшеничкин, А. П.** Основы вероятностно-статистической теории взаимодействия сооружений с неоднородными грунтовыми основаниями : монография / А. П. Пшеничкин. – Волгоград : ВолГАСУ, 2010. – 336 с.
38. **Работнов, Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М. : Физмат, 1979. – 744 с.
39. **Рац, М. В.** Структурные модели в инженерной геологии : монография / М. В. Рац. – М. : Недра, 1973. – 216 с.
40. **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика : учебник / А. Р. Ржаницын. – М. : Высшая школа, 1982. – 400 с.
41. **Седов, Л. И.** Механика сплошной среды : монография / Л. И. Седов. – М. : Наука, 1973. – 584 с.
42. **Симвулиди, И. А.** Расчет инженерных конструкций на упругом основании : учебное пособие / И. А. Симвулиди. – М. : Высшая школа, 1978. – 480 с.
43. **Сливкер, В. М.** Строительная механика : учебное пособие / В. М. Сливкер. – М. : АСВ, 2005. – 736 с.
44. **Смородинов, М. И.** Устройство фундаментов и конструкций способом «Стена в грунте» : учебное пособие / М. И. Смородинов, Б. С. Федоров. – М. : Стройиздат, 1986. – 216 с.
45. **Софьин, О. Е.** Результаты теоретико-экспериментального анализа моделей прочности грунта / О. Е. Софьин // Академические чтения памяти Н. А. Цытовича. – М. : МГАСУ, 2003. – С. 84 – 88.
46. **Тимошенко, С. П.** Теория упругости : учебник для вузов / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
47. **Трещев, А. А.** Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния : монография / А. А. Трещев. – Тула : ТулГУ, 2016. – 326 с.
48. **Филин, А. П.** Прикладная механика твердого деформируемого тела : монография / А. П. Филин. – М. : Наука, 1975. – Т. 1. – 832 с.
49. **Цытович, Н. А.** Основы прикладной геомеханики в строительстве : монография / Н. А. Цытович, З. Г. Тер-Мартirosян. – М. : Высшая школа, 1981. – 317 с.
50. **Шапиро, Д. М.** Метод конечных элементов в строительном проектировании : монография / Д. М. Шапиро. – Воронеж : Изд-во «Научная книга», 2013. – 181 с.
51. **Шапиро, Д. М.** Теория и расчетные модели оснований и объектов геотехники : учебное пособие / Д. М. Шапиро. – Воронеж : Научная книга, 2012. – 164 с.
52. **Шукле, Л.** Реологические проблемы механики грунтов : монография / Л. Шукле ; пер. с англ. – М. : Мир, 1978. – 485 с.

3. РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛИТНЫХ И СВАЙНЫХ ФУНДАМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНЫХ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

3.1. ПЛИТЫ И ПЛИТНЫЕ ФУНДАМЕНТЫ

МЕТОДЫ РАСЧЕТА, ОСНОВАННЫЕ НА ГИПОТЕЗЕ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

Решение Б. Н. Жемочкина [16]. Высота балки мала по сравнению с ее длиной. Тогда можно применить гипотезу плоских сечений и формулы сопротивления материалов для расчета прогибов. Силы трения и сцепления между балкой и основанием не учитывают.

Зависимость между нагрузкой на балку и ее прогибами, равными осадкам упругого основания, определяется следующим дифференциальным уравнением изогнутой оси балки:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{p}{EI},$$

где p – давление на упругое основание в какой-либо точке, равное его реакции; y – осадка в той же точке, находящейся на расстоянии x от единичной сосредоточенной силы ($y = f(x)$).

Эпюра осадок имеет вид (рис. 3.1). Ее можно использовать и как линию влияния (рис. 3.2).

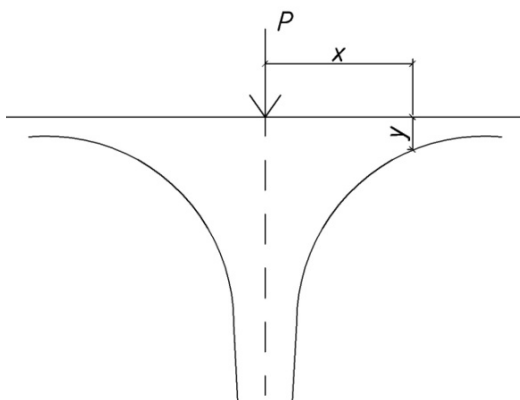


Рис. 3.1. Эпюра осадок при действии на основание сосредоточенной силы

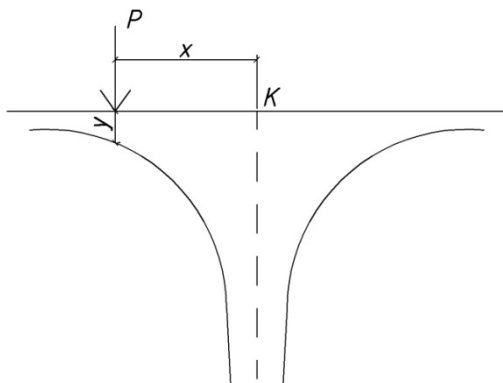


Рис. 3.2. Линия влияния осадки

Осадка в т. K от силы P равна произведению величины силы на ординату y под силой.

Приведем уравнения при действии нагрузки по кривой (рис. 3.3).

Нагрузка P в каждой точке является неизвестной функцией F расстояния от начала координат. Определяется осадка в т. K . Для этого строится эпюра осадок от единичной силы, приложенной в этой точке. Эпюра является линией влияния осадки в т. K .

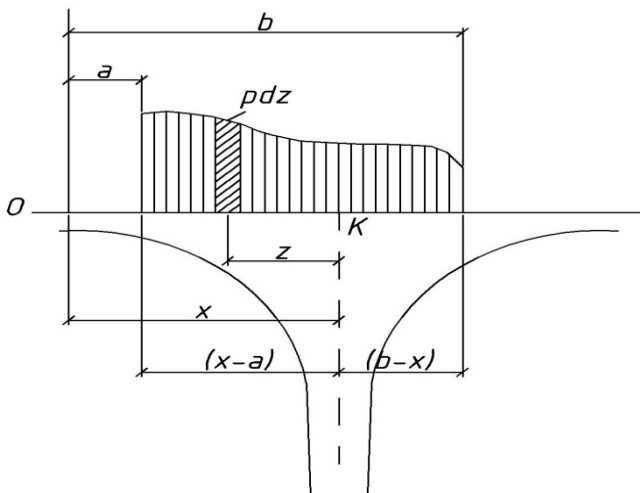


Рис. 3.3. Схема к определению осадки в т. K от распределенной нагрузки

Осадка от нагрузки $p dz$ равна

$$p dz \cdot y = p dz \cdot f(z) dz.$$

Так как P является функцией расстояния от начала координат, то вместо P будут выражения $F(x-z)$ и $F(x+z)$.

Полная осадка в т. K равна

$$y = \int_0^{x-a} F(x-z) f(z) dz + \int_0^{b-x} F(x+z) f(z) dz.$$

Подставляя это уравнение и величину нагрузки в т. K $p = F(x)$, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4}{dx^4} \left\{ \int F(x-z) f(x) dz + \int F(x+z) f(x) dz \right\} = -\frac{F(x)}{EI}.$$

Решение его представляет большие математические трудности. Кроме того, функция $F(x)$ неизвестна. Предложен следующий метод решения задачи. Основной целью является определение эпюры реакций основания. Предлагается эпюру реакций ограничить ступенчатой линией (рис. 3.4).

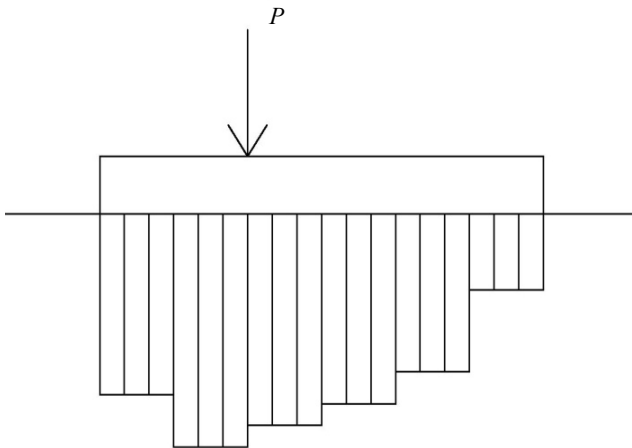


Рис. 3.4. Ступенчатая эпюра реактивных давлений основания

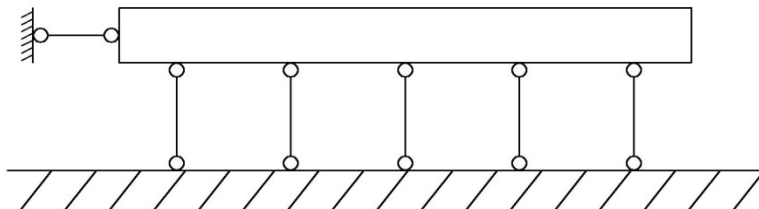


Рис. 3.5. Расчетная схема (статически неопределимая система)

Осадки определяются для отдельных прямолинейных участков. Интенсивность давления на каждом участке заменяется равнодействующей, приходящейся на этот участок.

Связь между балкой и основанием осуществляется только в отдельных точках, находящихся в пределах прямолинейных участков опоры (рис. 3.5).

Таким путем осуществляется переход от расчета балки на упругом основании к расчету балки на упругих опорах. Число их определяется желательной точностью расчета. Условные опоры представлены в виде абсолютно твердых стержней-связей, шарнирно присоединенных к балке и основанию. Такую статически неопределимую систему можно решать методом сил, перемещений или смешанным методом. Горизонтальный стержень поставлен для предотвращения перемещений в горизонтальном направлении.

Наиболее выгодным является смешанный способ решения задачи. Основную статически определимую систему выберем, введя условную заделку на одном конце балки и удалив все вертикальные стержни (рис. 3.6).

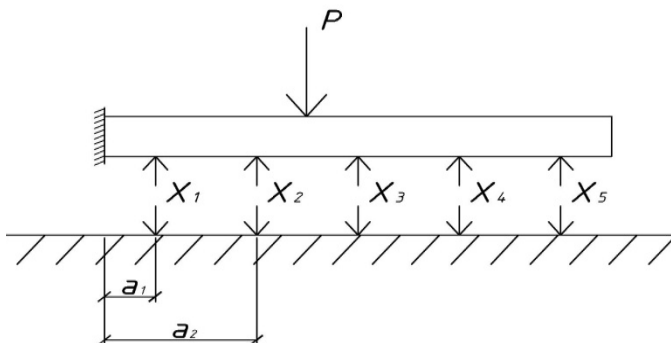


Рис. 3.6. Основная статически определимая система

Неизвестными являются X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 , осадка балки в месте заделки и угол поворота у заделки. Для их нахождения составляются канонические уравнения. Каждое из них выражает условие, что суммарные перемещения по направлению каждой из сил равны нулю. Оно зависит от всех сил, осадки условной заделки y_0 , угла ее поворота φ_0 и нагрузки.

Так, первое уравнение имеет вид

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + X_5\delta_{15} + y_0 + a_1\varphi_0 + \Delta_{1p} = 0.$$

Равенство уравнения нулю обозначает, что концы разрезанного стержня не сближаются и не расходятся. Перемещения δ состоят из перемещений от прогиба балки и осадки основания. Положительное направление перемещения y_0 принято вверх, а угла поворота – против часовой стрелки. Система состоит из пяти уравнений указанного вида и двух уравнений равновесия: сумма всех сил X равна нагрузке, момент в заделке равен нулю.

Перемещения от прогиба балки вычисляются без особых осложнений. Перемещения от осадки основания вычисляются с учетом ряда допущений. Считается, что в пределах каждого участка упругого основания приложена не сосредоточенная сила, а равномерно распределенная нагрузка. Задача о расчете балки на упругом основании может быть плоской (плоское напряженное основание и плоская деформация) или пространственной.

При плоском напряженном состоянии основание представляет собой бесконечную в стороны и вниз полуплоскость в виде пластинки. В направлении, перпендикулярном боковым граням основания, напряжения равны нулю, а деформации возможны. То же имеет место при расчете балки, лежащей на стене в ее плоскости.

В случае плоской деформации основание является безграничным в стороны и вниз полупространством, на котором расположена балка ограниченной длины, но бесконечной ширины. Нагрузка приложена к балке по линии, перпендикулярной длине. Двумя параллельными плоскостями вырезают слой толщиной, равной единице. По плоскости разреза деформации нет, но могут быть напряжения. Пространственная задача имеет место при расчете балки ограниченной длины и очень малой ширины, лежащей на упругом полупространстве.

Расчет осадки для полуплоскости. Пусть полуплоскость имеет толщину, равную единице. Сосредоточенную силу считают распределенной по линии, перпендикулярной полуплоскости на длине, равной единице (рис. 3.7, а).

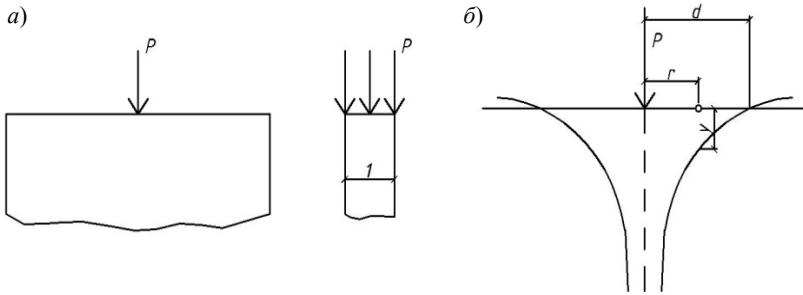


Рис. 3.7. Действие сосредоточенной силы к полуплоскости (а), эпюра осадок верхней грани полуплоскости (б)

Упругая осадка верхней грани происходит по кривой (рис. 3.7, б). Решение задачи дано Фламаном. Из него вытекает, что осадки для всех точек верхней грани бесконечно велики. В реальных условиях это не наблюдается, так как полуплоскость в чистом виде не встречается. Определяется не абсолютная величина осадки какой-либо точки на верхней границе полуплоскости, а разность осадок этой точки и некоторой, удаленной на расстоянии d от места приложения нагрузки. Расстояние d принимается произвольным, но достаточно большим по сравнению с размерами сооружения, для которого осадка y определяется по решению Фламана:

$$y = \frac{2P}{\pi E_0} \ln \frac{d}{r}.$$

Если единичная нагрузка равномерно распределена на длине c (рис. 3.8), то осадку в т. K можно определить по формуле

$$y = \frac{1}{c} \int_{x-c/2}^{x+c/2} \frac{2}{\pi E_0} \ln \frac{d}{\zeta} d\zeta.$$

После интегрирования имеем

$$y = \frac{1}{\pi E_0} (F + C),$$

где $F = f(x/c)$, $C = f(d/c)$ – табличные функции; d – расстояние до произвольной достаточно удаленной точки.

Если т. K находится в середине загруженного участка, то $x = 0$ и

$$y = \frac{1}{\pi E_0} C.$$

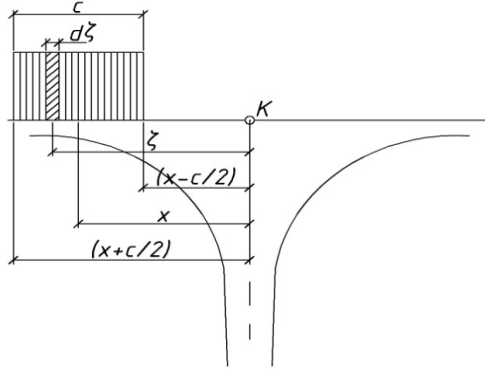


Рис. 3.8. Схема к определению осадки в т. *K* от равномерно распределенной нагрузки

Осадка для полупространства. Используется решение Буссинеску:

$$y = \frac{P(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 r},$$

где r – расстояние от точки приложения силы; μ_0 – коэффициент Пуассона материала основания.

Здесь получают абсолютные величины осадок. Нагрузка распределяется равномерно по площадке размерами $b \times c$ (рис. 3.9).

Нагрузка на элемент $d\zeta d\eta$ равна

$$pd\zeta d\eta = \frac{d\zeta d\eta}{bc}; \quad p = \frac{1}{bc}.$$

Осадка в т. *K* от этой силы

$$y = \frac{d\zeta d\eta}{bc} \frac{(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 r}.$$

Осадка в т. *K* от нагрузки на весь прямоугольник

$$y = \int_{\zeta=x-c/2}^{\zeta=x+c/2} \int_{\eta=0}^{\eta=b/2} \frac{(1-\mu_0^2)}{bc\pi E_0 r} d\zeta d\eta = \frac{2(1-\mu_0^2)}{bc\pi E_0} \int_{\zeta=x-c/2}^{\zeta=x+c/2} \int_{\eta=0}^{\eta=b/2} \frac{d\zeta d\eta}{\sqrt{\zeta^2 + \eta^2}}.$$

После интегрирования

$$y = \frac{(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 c} \bar{F},$$

где $\bar{F} = f(b/c, x/c)$ – функция, определяемая по таблицам [16].

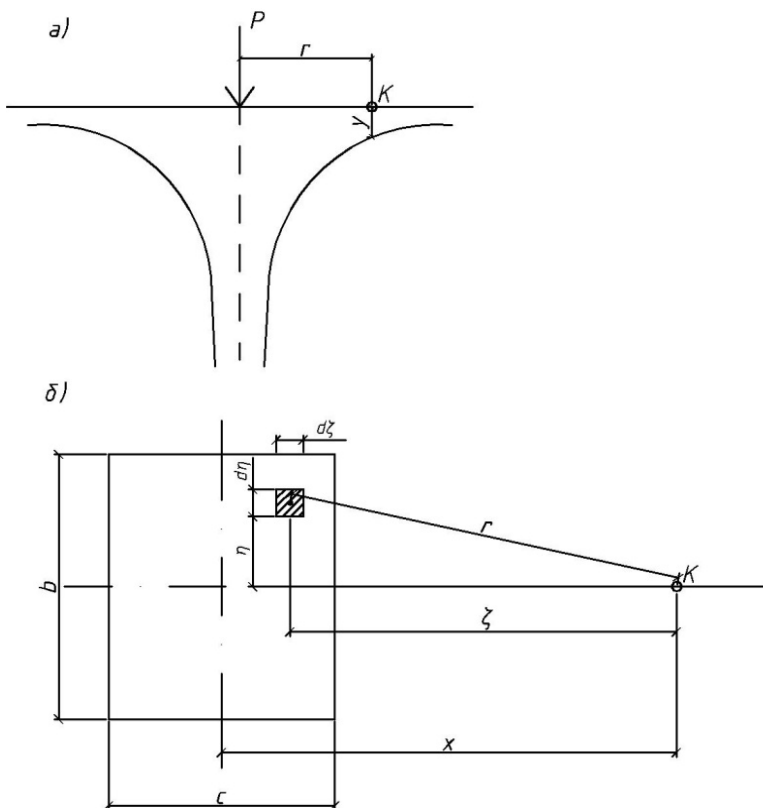


Рис. 3.9. Эпюра осадок от сосредоточенной силы на поверхности полупространства (а), схема к определению осадки в т. К от равномерно распределенной нагрузки, действующей на прямоугольник (б)

Расчет балок на упругом полупространстве. Балку по длине мысленно разбивают на участки равной длины (рис. 3.10). Их количество принимают произвольным исходя из желательной точности расчета.

Мысленно поставим абсолютно жесткие стержни. Горизонтальные стержни поставлены для обеспечения неизменности системы. В местах установки вертикальных стержней вводится допущение о равенстве перемещений балки и основания. Нагрузку на основание от каждого стержня считают равномерно распределенной по площади $b \times c$ (b – ширина балки). Фактически нагрузка неравномерная как в продольном, так и в поперечном направлении. Чем шире балка, тем больше неточность. Широкие балки рассчитывают как плиты.

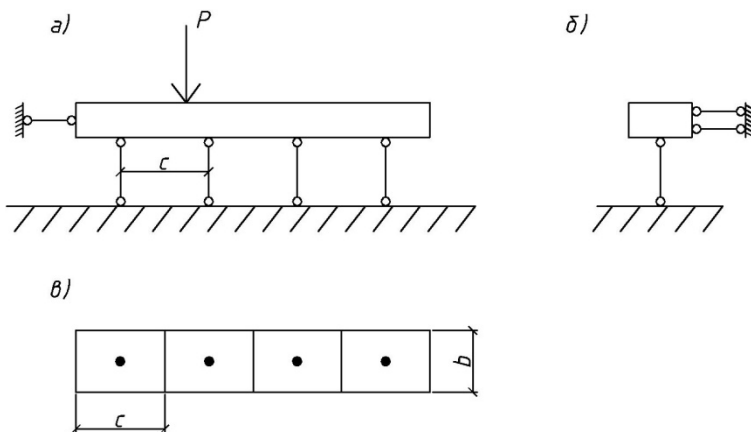


Рис. 3.10. Расчетная схема балки в продольном (а) и поперечном сечении (б), расположение фиктивных стержней в плане (в)

В середине каждого участка между балкой и основанием расчет ведется смешанным методом. Вводятся заделки в каком-либо сечении, чаще на конце балки или в ее середине. Мысленно удаляют опорные стержни, а их действие заменяют действием неизвестных сил $X_1, X_2 \dots$. Неизвестными являются: сила X_i , осадка y_0 и угол поворота φ_0 в месте условной заделки. Канонические уравнения составляют из условий, что суммарные перемещения по направлению каждого разрезанного стержня равны нулю. Для системы с четырьмя опорными стержнями они имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + X_4\delta_{14} + y_0 + \varphi_0 a_1 + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_4\delta_{24} + y_0 + \varphi_0 a_2 + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_4\delta_{34} + y_0 + \varphi_0 a_3 + \Delta_{3p} &= 0; \\ X_1\delta_{41} + X_2\delta_{42} + X_3\delta_{43} + X_4\delta_{44} + y_0 + \varphi_0 a_4 + \Delta_{4p} &= 0; \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - \sum P &= 0; \\ X_1 a_1 + X_2 a_2 + X_3 a_3 + X_4 a_4 - \sum M_p &= 0. \end{aligned}$$

Здесь a_k – расстояние от силы X_k до условной заделки (рис. 3.11); $a_k \varphi_0$ – перемещение, вызванное углом поворота; $\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3}, \dots$ – перемещения по направлению силы X_k от единичных сил, приложенных в точках 1, 2, 3, ...; Δ_{kp} – перемещение по направлению силы X_k от внешней нагрузки.

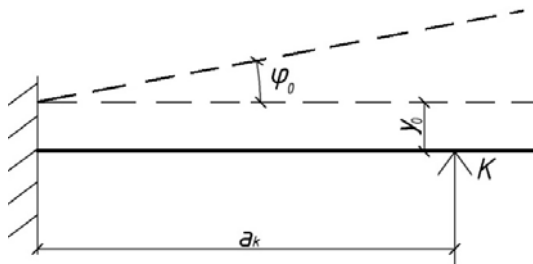


Рис. 3.11. Схема к определению перемещений балки

Перемещение в т. K от действия единичной силы, приложенной в т. $J(\delta_{ki})$ состоит из осадки основания y_{ki} и прогиба балки v_{ki} (рис. 3.12), т.е.

$$\delta_{ki} = y_{ki} + v_{ki}.$$

Величина осадки основания

$$y_{ki} = \frac{(1 - \mu_0^2)}{\pi E_0 c} F_{ki}.$$

Функция $F_{ki} = f(b/a)$ определяется расстоянием между точкой приложения силы и точкой, где определяется перемещение.

Прогиб балки определяется по формуле Максвелла–Мора, т.е.

$$v_{ki} = \int \frac{M_k M_i}{EI} dx.$$

Решение сводится к перемножению эпюр M_k и M_i от единичных сил.

Если $a_i > a_k$, то площадь эпюры M_k умножим на ординату против ее центра тяжести, взятую из эпюры M_i , равную $(a_i - a_k/3)$.

Тогда

$$v_{ki} = \frac{a_k^2}{2} (a_i - a_k/3) \frac{1}{EI} = \frac{a_k^2 (3a_i - a_k)}{6EI}.$$

При $a_i < a_k$ необходимо a_i и a_k поменять местами.

Формулу можно переписать в виде

$$v_{ki} = \frac{c^3}{6EI} \omega_{ki},$$

$$\omega_{ki} = \left(\frac{a_k}{c} \right)^2 (3a_i / c - a_k / c).$$

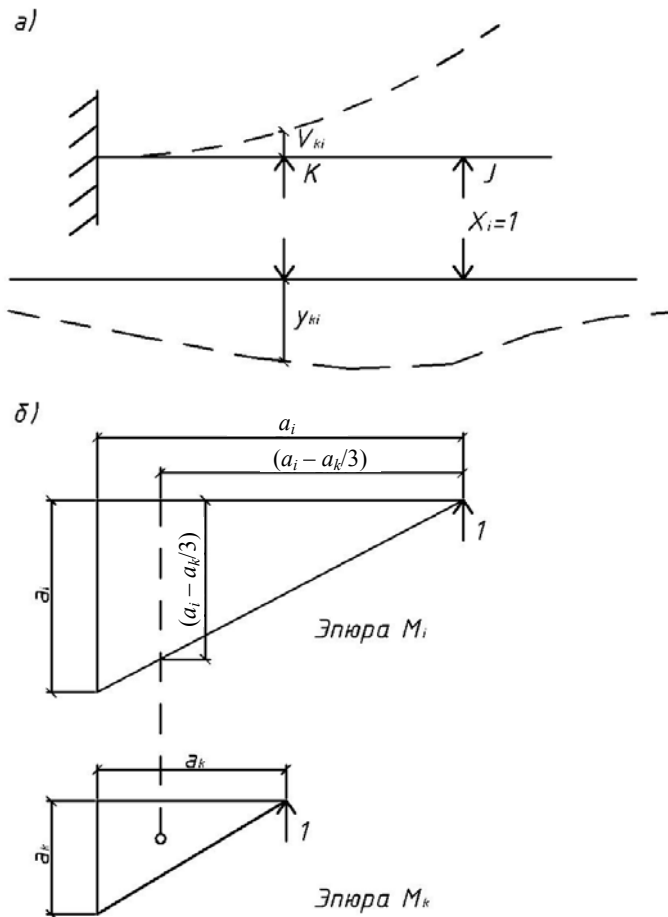


Рис. 3.12. Перемещение балки основания в т. K от силы, приложенной в т. J (a), схемы к определению прогиба балки (b)

Полное перемещение

$$\delta_{ki} = \frac{(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 c} F_{ki} + \frac{c^3}{6EI} \omega_{ki}$$

или

$$\delta_{ki} = F_{ki} + \alpha \omega_{ki},$$

где α – некоторый постоянный для данной балки коэффициент:

$$\alpha = \frac{\pi E_0 c^4}{6EI(1-\mu_0^2)}.$$

Напомним, что EI – жесткость балки, а E_0 и μ_0 – модуль деформации и коэффициент Пуассона для грунта. В случае постоянного сечения балки $\alpha = \text{const}$. Когда найдены все неизвестные, интенсивность реакции основания определяется делением X на c . При построении эпюры осадок сначала находят осадки от каждой силы, а затем результаты складываются.

Осадка в месте условной заделки

$$Y_0 = \frac{y_0(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 c}.$$

Выбор расчетных схем. Число неизвестных можно значительно сократить, если принять симметричную систему нагружения (рис. 3.13).

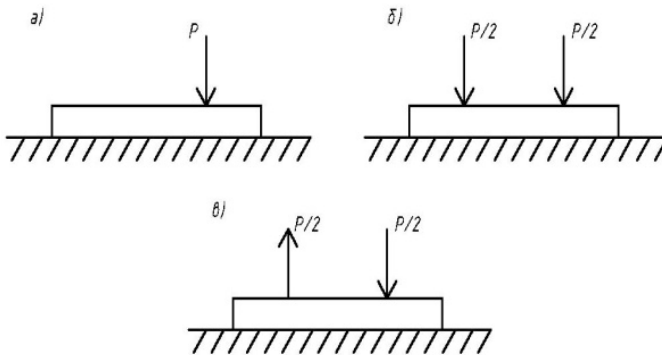


Рис. 3.13. Приведение несимметричной нагрузки (а) к симметричной (б) и обратно симметричной (в)

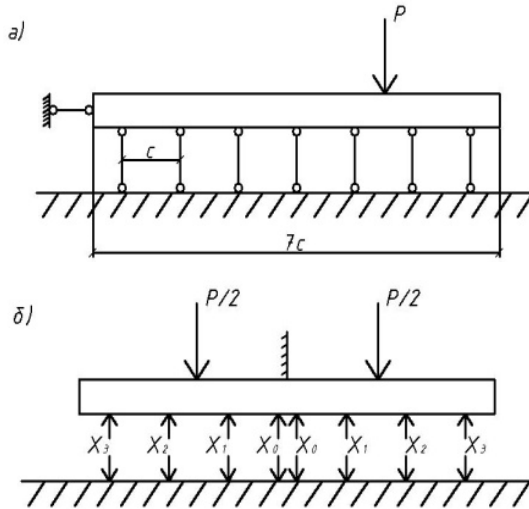


Рис. 3.14. Основная система (а) и расчетная схема для симметричной нагрузки (б)

Жесткий стержень и заделку следует разместить в середине балки и принять нечетное число участков (к примеру 7, рис. 3.14).

Нагрузку разбивают на симметричную и обратно симметричную. Основная система также будет симметричной. Силы X с одной стороны будут попарно равны силам с другой. Угла поворота в заделке не будет. Осадка y_0 останется неизвестной.

Для принятого примера уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} X_0\delta_{00} + X_1\delta_{01} + X_2\delta_{02} + X_3\delta_{03} + y_0 &= 0; \\ X_0\delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + y_0 + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_0\delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + y_0 + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_0\delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + y_0 + \Delta_{3p} &= 0; \\ X_0 + X_1 + X_2 + X_3 - P/2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

При вычислении перемещений осадок учитывают силы справа и слева, а прогибов – только с одной стороны. Для обратно симметричного направления силы, расположенные на одинаковом расстоянии слева и справа от заделки, попарно взаимно равны, но противоположно направлены (рис. 3.15). Сила X_0 и осадка исчезает, но появляется угол поворота.

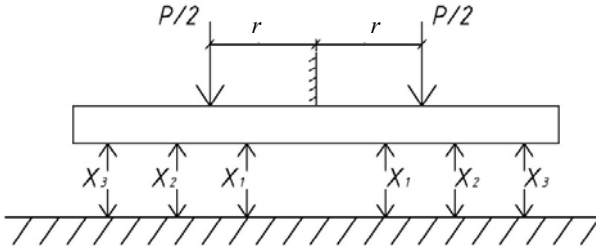


Рис. 3.15. Основная система при расчете балки на действие симметричной нагрузки

Уравнения равновесия составляют из условия, что сумма моментов относительно сечения, где введена заделка, равна нулю:

$$\left. \begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \varphi_0 a_1 + \Delta_{1p} &= 0; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \varphi_0 a_2 + \Delta_{2p} &= 0; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \varphi_0 a_3 + \Delta_{3p} &= 0; \\ X_1 a_1 + X_2 a_2 + X_3 a_3 - \frac{P}{2} r &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Расчет прямоугольных плит. Плиту условно разбивают на равновеликие квадраты или прямоугольники. В их серединах помещены опорные стержни (рис. 3.16).

При выборе основной системы разрезают стержни и вместо них прикладывают неизвестные силы. Заделку целесообразно поместить в центре, используя симметрию системы.

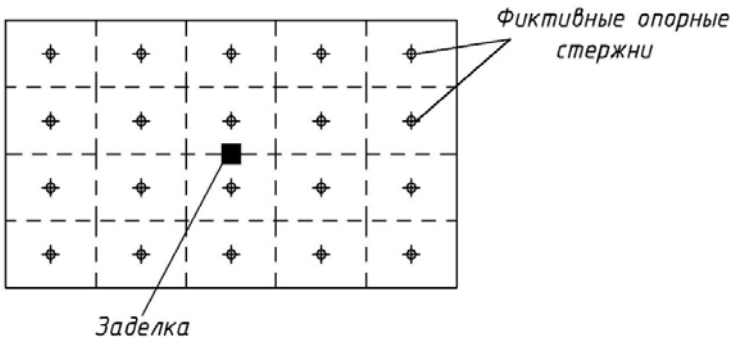


Рис. 3.16. Схема размещения опорных стержней и заделки

Уравнения составляют обычным порядком. Перемещения зависят от осадки основания и прогиба плиты. Осадки основания определяются по таблице, заменяя квадраты или прямоугольники равновеликими кругами.

Значительные затруднения возникают при определении прогибов плиты. Общего решения в замкнутой форме для плиты, имеющей заделку в какой-либо точке, не существует.

Предложен приближенный прием расчета, заключающийся в замене плиты рядом перекрывающихся балок. Крутящие моменты в плите при этом не учитывают.

В целях упрощения заменяют плиту балками, идущими в поперечном и в продольном (рис. 3.17) направлениях.

Связь между балками будет только в местах пересечения их осей, обе системы балок имеют свои опорные стержни; в середине каждого квадрата (или прямоугольника) будет два опорных стержня (рис. 3.18).

Заделка расположена в серединах балок в точках 1, 4 – 6. За неизвестные приняты силы X и осадки точек 1, 4 – 6.

Число неизвестных всегда достаточно велико. В данном примере будет шесть неизвестных сил, приложенных к системе продольных балок (обозначим их X_1, X_2, \dots, X_6), и шесть приложенных к системе поперечных балок (обозначим их $X_I, X_{II}, \dots, X_{VI}$), кроме того, четыре неизвестные осадки. При обратно симметричной нагрузке вместо осадок неизвестными будут углы поворота.

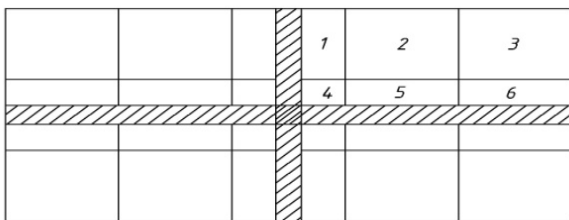


Рис. 3.17. Схема замены плиты на пересекающиеся балки

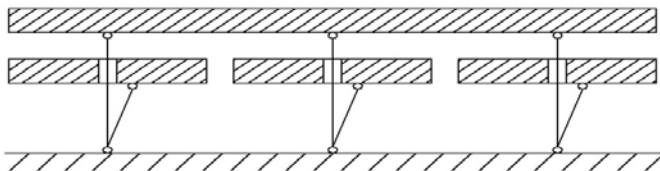


Рис. 3.18. Схема расположения балок и опорных стержней

Для примера, уравнение, выражающее условие, что суммарное перемещение по направлению силы X_2 (т.е. по направлению усилия в стержне, помещенном в точке 2 и соединенном с продольной балкой 1 – 3) равно нулю:

$$X_I \delta_{2I} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + X_4 \delta_{24} + X_5 \delta_{25} + X_6 \delta_{26} + X_1 \delta_{21} + \\ + X_{II} \delta_{2II} + X_{III} \delta_{2III} + X_{IV} \delta_{2IV} + X_V \delta_{2V} + X_{VI} \delta_{2VI} + y_1 = 0.$$

Если внешняя нагрузка приложена к балке 1 – 3, то в уравнение войдет еще Δ_{2p} . Нагрузку можно с одинаковым правом прилагать как к той, так и к другой системе балок.

Перемещения δ_{22}, δ_{23} зависят от деформации основания и от прогиба продольной балки 1 – 3. Все же остальные перемещения зависят только от деформации основания, так как прочие силы X в балке 1 – 3 непосредственно не приложены. При определении деформаций основания нужно учитывать единичные силы, действующие на основание во всех четвертях плиты.

Решение А. П. Сеницына [47]

Расчет балок и плит на упругом основании за пределом упругости. Рассматривается система балка–основание. Реакция основания будет поддерживать балку после образования пластического шарнира. Система при этом будет геометрически неизменяемая, реакция основания невелика, а основание будет работать в упругой стадии. Для превращения системы в изменяемую необходим переход бесконечно большого числа связей в пластическое состояние.

Задача формулируется следующим образом: для данной системы A , которая находится под действием нагрузки P , определяется наибольший параметр, на который необходимо умножить силу P , чтобы несущая способность системы была полностью исчерпана. Под пластическим шарниром понимается идеализированный шарнир, передающий момент меньше пластического.

В предельном состоянии внутренние силы должны находиться в равновесии с внешней нагрузкой nP и ни в одном сечении моменты не должны превышать пластических. Работа, совершаемая силами nP на возможных перемещениях ω , положительна. Коэффициент надежности является множителем, на который надо умножить нагрузку, чтобы получить наибольшую статически допустимую нагрузку или нелинейную работу на любых возможных перемещениях.

Пусть M – момент в любом сечении в любой момент времени, $M_e(x)$ – упругий момент, $M_r(x) = M(x) - M_e(x)$ – остаточный момент, $\overline{M}(x)$ – остаточный момент, при котором происходит разрушение, $M_0(x)$ – наибольший пластический момент. Для каждого сечения необходимо максимальное и минимальное значения момента в упругой стадии $M_+(x)$ и $M_-(x)$.

Справедливо следующее неравенство:

$$-M_0(x) \leq \overline{M}(x) + M_-(x) \leq \overline{M}(x) + M_+(x) \leq M_0x$$

или

$$M_+(x) - M_-(x) = 2M_0(x) / \alpha(x).$$

Далее определяется наибольшая величина нагрузки P для упругой стадии работы балки линейно-деформируемого основания. При действии на балку сосредоточенной силы P изгибающий момент в середине пролета

$$M_0 = P_0 c_0 / 2 = \sigma_{\text{пр}} W,$$

где P_0 – величина силы, при которой напряжения в крайнем волокне опасного сечения балки напряжения достигают предельной величины $\sigma'_{\text{пр}}$; W – обычный момент сопротивления балки, отсюда

$$P_0 = 2\sigma_{\text{пр}} W / c_0; \quad P = nP_0,$$

$n > 1$, c_0 – расстояние от центра пролета до центра тяжести эпюры реакций (использован метод Б. Н. Жемочкина).

С образованием пластического шарнира балка разбивается на два участка, которые находятся в упругой стадии. Расчет выполняется по способу Б. Н. Жемочкина. Определяют реакцию упругого полупространства, изгибающие моменты и поперечные силы. Если $n > 1$ и $M_{\text{пр}} = 2S_0 M_0 / W$, т.е. балка будет работать за пределом упругости, жесткость балки изменится и произойдет перераспределение реакций.

Равнодействующие реакции упругого основания будут найдены с помощью чисел влияния:

$$X_0 = X'_0 \frac{n}{2} P_0 + X''_0 \frac{S_0}{W} c_0 \frac{1}{c} P_0,$$

$$X_n = X'_n \frac{n}{2} P_0 + X''_n \frac{S_0}{W} c_0 \frac{1}{c} P_0.$$

Числа влияния $(X'_0 \dots X'_n, y_0, c\varphi'_0)$, $(X''_0 \dots X''_n, y_0, c\varphi''_0) = f(\alpha, b/c)$.

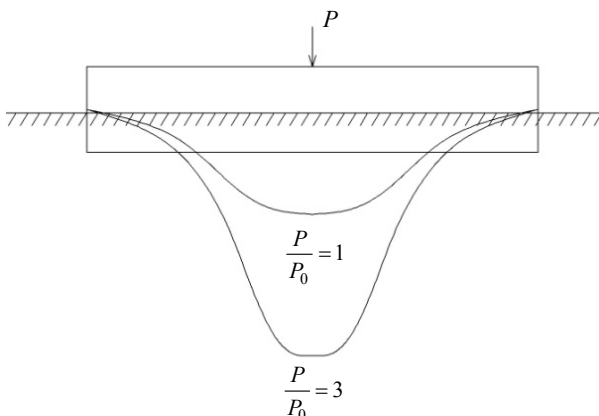


Рис. 3.19. Эпюры реакций при работе балки за пределом упругости

Интенсивность реакции определяется делением X_i на соответствующие площади F_i . С ростом нагрузки наблюдается более интенсивное увеличение ординат реакций под грузом (рис. 3.19).

Для балки на упругом основании предельное состояние лимитируется наибольшим прогибом, который определяется из условий эксплуатации. Величина прогиба определяется с помощью чисел влияния. Предельная нагрузка зависит от соотношения жесткостей балки и упругого основания. Уменьшение жесткости балки или увеличение модуля деформации основания может вызвать увеличение предельной нагрузки, определенной из условия заданного наибольшего прогиба. Более жесткие балки имеют меньшую грузоподъемность при одинаковом предельном прогибе.

Решение С. В. Босакова [8]. Рассматривается плита постоянной жесткости на упругом основании. Задача сводится к решению дифференциального уравнения изгиба

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q(x, y) - p(x, y)}{D},$$

где $\omega(x, y)$ – осадка плиты; D – цилиндрическая жесткость плиты; $q(x, y)$ – распределенная внешняя нагрузка; $p(x, y)$ – реактивные давления в контактной зоне плиты при однородных граничных условиях

на свободных краях плиты для изгибающих моментов и приведенных поперечных сил.

В основу решения положен способ Б. Н. Жемочкина. Поверхность плиты, контактирующую с упругим основанием, разбиваем на участки подходящей формы. В центре каждого участка ставится абсолютно жесткая связь, через которую осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Считают, что усилие в каждой связи вызывает равномерную эпюру реактивных давлений в пределах каждого участка на упругом основании. Образованная многократно статически неопределимая система рассчитывается смешанным методом строительной механики. За неизвестные принимаются усилия в связях, линейное и угловое перемещения, введенные в месте защемления.

Система уравнений способа Б. Н. Жемочкина для решения поставленной задачи имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n (\delta_{ik} X_k + \varphi_{0x} y_i + \varphi_{0y} x_i + u_0) + \Delta_{ip} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n X_k y_k + M_{px} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n X_k x_k + M_{py} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n X_k + Q, \end{array} \right.$$

где n – число участков на плите; δ_{ik} – взаимное перемещение концов разрезанной связи с номером i от действия единичных усилий, приложенных к разрезанной связи с номером k ; Δ_{ip} – прогиб центра участка с номером i для плиты с защемленной нормалью от действия внешней нагрузки; X_k – усилие в связи с номером k ; $\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, u_0$ – углы поворота введенного на плите защемления относительно осей координат O_x, O_y и его линейное перемещение; M_{px}, M_{py} – моменты равнодействующей внешней нагрузки Q относительно осей координат.

Величина δ_{ik} зависит от усадок упругого основания и прогибов рассчитываемой плиты с защемленной нормалью и определяется формулой

$$\delta_{ik} = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 b} (F_{ik} + \beta \omega_{ik}),$$

где F_{ik} – безразмерная функция для определения осадки центра участка на поверхности упругого основания с номером i от действия единичной силы, равномерно распределенной по участку с номером k поверхности упругого основания; ω_{ik} – прогиб центра участка с номером i плиты с защемленной нормалью от действия единичной силы, приложенной к центру участка с номером k ; β – показатель гибкости; b – некоторый характерный размер плиты; E_0, ν_0 – модуль деформации и коэффициент Пуассона упругого основания.

Значительные затруднения вызывает определение прогибов плиты с защемленной нормалью от действия единичной сосредоточенной силы ω_{ik} . Применен метод Ритца для определения искомым прогибов. В качестве координатных функций принято решение для бесконечной плиты с защемленной нормалью и только те частные решения Клебша, которые удовлетворяют геометрическим граничным условиям в защемлении:

$$W(x, y) = W_0(x, y) + A_{22} \frac{2xy}{b^2} + B_{22} \frac{x^2 - y^2}{b^2} + A_{31} \frac{x(x^2 - y^2)}{b^3} + B_{31} \frac{y(x^2 - y^2)}{b^3} + \Lambda;$$

$$W_0(x, y) = \frac{b^2}{16\pi D} \left\{ - \left[\left(\frac{x - \xi}{b} - \frac{\xi}{b} \right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{b} - \frac{\eta}{b} \right)^2 \right] \times \right. \\ \times \ln \left[\left(\frac{x - \xi}{b} - \frac{\xi}{b^2} \right) + \left(\frac{y - \eta}{b} - \frac{\eta}{b} \right) \right] - 2 \left(\frac{x\xi}{b^2} + \frac{y\eta}{b^2} \right) \times \left[1 + \ln \left(\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right) \right] + \\ \left. + \left(\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right) \ln \left(\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{b^2} \right) + \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \ln \left(\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right\},$$

где $W_0(x, y)$ – функция прогибов бесконечной плиты с защемленной нормалью от действия единичной сосредоточенной силы, приложенной к точке плиты с защемленной нормалью с координатами ξ, η ; A_{ik}, B_{ik} – неопределенные коэффициенты при координатных

функциях, зависящие от положения единичной силы на плите, размеров и жесткости плиты.

Каждое из частных решений Клебша удовлетворяет бигармоническому уравнению, т.е. уравнению равновесия для изгибаемой плиты с защемленной нормалью при действии на нее сосредоточенной силы. Можно показать, что выбранная система координатных функций позволяет описать прогибы плиты с защемленной нормалью с любой степенью точности. Так как геометрические граничные условия в защемлении находятся соответствующим подбором координатных функций Клебша, то остается выполнить статические граничные условия на краях плиты из требования минимума функционала полной энергии плиты и действующей на нее силы. Функционал полной энергии с защемленной нормалью и действующей на нее сосредоточенной единичной силы вычисляются по формуле

$$E = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1 - \nu_p) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{\partial^2 W \partial^2 W}{\partial x^2 \partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - W(\xi, \eta),$$

где ν_p – коэффициент Пуассона материала плиты; Ω – площадь плиты.

Дифференцируя квадратичный функционал по каждому из неизвестных коэффициентов A_{ik} , B_{ik} , получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial A_{22}} = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial B_{22}} = 0; \\ \frac{\partial E}{\partial A_{31}} = 0, \end{cases}$$

из решения которых находят искомые коэффициенты. После этого определяют прогибы плиты с защемленной нормалью и коэффициенты канонических уравнений способа. Это позволяет решить систему и найти усилия в связях.

Осадки точек плиты определяем по формуле

$$W_i = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0 b} \sum_{k=1}^n F_{ik} X_k.$$

После этого численным дифференцированием осадок по методу конечных разностей находят усилия в плите. При этом используют законтурные узлы, значения осадок в которых определяют из статических граничных условий по краям плиты на упругом основании для изгибающих моментов и поперечных сил.

Решение И. А. Симвулиди [46]. Использованы уравнения плоской задачи теории упругости (плоская деформация). Основание рассматривается как сплошная однородная упругая среда бесконечной мощности, а балка как тонкий упругий брус, деформирующийся только по длине. Упругая линия прогнувшейся балки и просевшая под ней поверхность грунта приблизительно совпадают. Реактивное давление грунта представлено четырехчленным степенным рядом с четырьмя неизвестными параметрами:

$$P_x = a_0 + \frac{2a_1}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) + \frac{4a_2}{L^2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 + \frac{8a_3}{L^3} \left(x - \frac{L}{2} \right),$$

где L – длина балки; a_0, a_1, a_2, a_3 – неизвестные параметры, величины которых зависят от жесткости балки, ее длины, модуля деформации, характера нагрузки и от ее расположения.

Силы трения между грунтом и балкой не учитываются, что идет в запас прочности. Для определения неизвестных параметров введены четыре условия контакта балки с основанием:

- равенство прогибов балки и грунта на левом конце балки;
- равенство ординат обеих кривых в середине балки;
- равенство площадей, образованных ординатами обеих линий деформации;
- равенство третьих производных обеих функций прогибов в середине балки.

Дополнительно вводятся два условия равновесия балки и два граничных условия.

При решении восьми уравнений, составленных на основе восьми условий, получены общие расчетные формулы в простой замкнутой форме.

Для определения перемещений грунта использованы формулы обобщенного закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{x_1} - \mu_0 (\sigma_{x_1} + \sigma_{z_1})] = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{y_1} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{y_1} - \mu_0 (\sigma_{z_1} + \sigma_{x_1})] = \frac{\partial v_1}{\partial y_1}; \\ \varepsilon_{z_1} &= \frac{1}{E_0} [\sigma_{z_1} - \mu_0 (\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1})] = \frac{\partial w_1}{\partial z_1}; \\ \gamma_{x_1 y_1} &= \frac{2(1+\mu_0)}{E_0} \tau_{x_1 y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1}, \end{aligned} \right\}$$

где $\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{z_1}$ – составляющие относительных деформаций по направлениям соответствующих осей; $\gamma_{x_1 y_1}$ – относительный сдвиг; u_1, v_1, w_1 – соответственно горизонтальное по оси x , вертикальное по оси y и горизонтальное перемещения по оси z .

Для плоской деформации

$$\varepsilon_{z_1} = \frac{1}{E_0} [\sigma_{z_1} - \mu_0 (\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1})] = 0$$

и

$$\sigma_{z_1} = \mu_0 (\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1})$$

Общее представление действующей на балку нагрузки принято в соответствии с уравнением

$$\Psi_x = \sum \Gamma_{l_{hi}}^{l_{ki}} f(z) + \sum \Gamma_{l_{2i}}'' M_i + \sum \Gamma_{l_{3i}}' P_i,$$

где Ψ_x – полная нагрузка; $f(z)$ – произвольная нагрузка; M_i, P_i – изгибающий момент и сосредоточенная сила; $\Gamma_{l_{3i}}'$ – мгновенный прерыватель первого порядка; $\Gamma_{l_{2i}}''$ – то же второго порядка; $\Gamma_{l_{hi}}^{l_{ki}}$ – двусторонний прерыватель; l_{hi} – расстояние от левого конца балки до начала распределенной нагрузки; l_{ki} – то же до конца распределенной нагрузки; l_{2i} – расстояние от левого конца балки до точки приложения сосредоточенного момента M_i ; l_{3i} – то же до точки приложения сосредоточенной силы P_i .

Дифференциальное уравнение упругой линии балки имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = - \left[a_0 - \frac{2a_1}{L} \left(x - \frac{L}{2} \right) - \frac{4a_2}{L^2} \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 - \frac{8a_3}{L^3} \left(x - \frac{L}{2} \right)^3 \right] + \\ + \sum \Gamma_{l_{1i}}^{l_{ki}} f(z) + \sum \Gamma_{l_{2i}}'' M_i + \sum \Gamma_{l_{3i}}' P_i.$$

После интегрирования этого уравнения 4 раза получают общее уравнение упругой линии балки. В него входят восемь неизвестных $a_0, a_1, a_2, a_3, D_0, D_1, D_2, D_3$. Последние четыре – произвольные постоянные интегрирования. Требуется восемь дополнительных уравнений:

$$\sum y = 0; \quad \sum M_c = 0; \quad \text{при } x = 0 \quad y'' = 0; \quad \text{при } x = L \quad y'' = 0; \quad y_{x=0} = v_{x=0};$$

$$y_{x=0,5L} = v_{x=0,5L}; \quad F_0 = F_{л}; \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_{x=0,5L} = \left(\frac{d^3 v}{dx^3} \right)_{x=0,5L}.$$

В результате решения получают формулы для определения поперечных сил и изгибающих моментов для любых нагрузок и схем их расположения.

Решение М. И. Горбунова-Посадова [12].

Расчет полос. Полосы выделены в поперечном направлении из длинных плит при соблюдении условий плоской деформации и балок, лежащих на вертикальном тонком слое в условиях плоского напряженного состояния. Расчет полос и балок подобен и выполняется с помощью таблиц безразмерных величин на следующем нагружении (рис. 3.20).

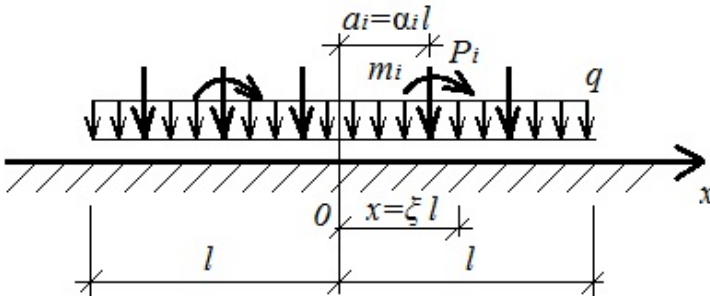


Рис. 3.20. Схема нагрузок и приведенных расстояний

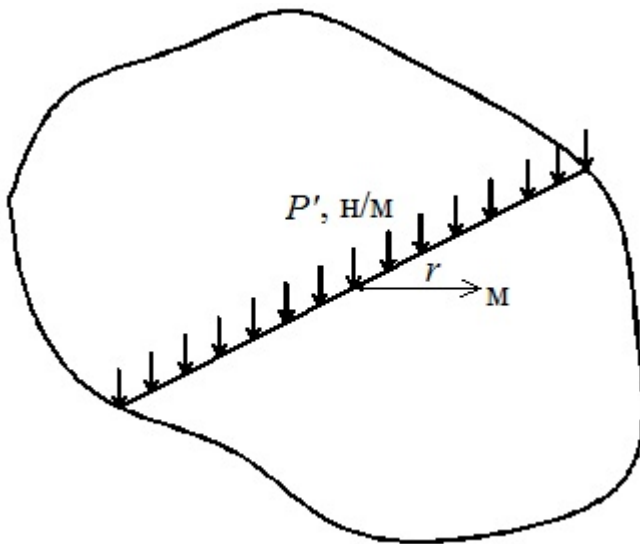


Рис. 3.21. Распределение поверхностной нагрузки

Рассматриваются конструкции, работающие в условиях плоской деформации (ленточные фундаменты или длинные плиты, из которых выделена в поперечном направлении полоса шириной $b' = 1$ м), и пространственные.

В случае плоской задачи используется фундаментальное решение Фламана о действии равномерно распределенной вдоль бесконечной линии силы на поверхности упругого полупространства (рис. 3.21).

Формула Фламана имеет вид

$$W(r) = -\frac{2}{\pi} P' \frac{(1-\nu_0^2)}{E_0} \ln r/d,$$

где W – осадка основания; r – расстояние от нагруженной прямой до т. M , в которой определяется перемещение; d – произвольная постоянная.

Реактивные давления грунта основания представлены степенным рядом

$$p(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n + \dots,$$

где a_i – неизвестные коэффициенты, определяемые из условия равенства осадок грунта $s(\xi)$ и прогибов конструкции $y(\xi)$, т.е. $s(\xi) = y(\xi)$

и из условий равновесия; $\xi = x/l$ – приведенное расстояние; x – расстояние от середины полосы до рассматриваемой точки; l – полудлина полосы; $\xi = -1 \dots 1$.

Каждую полудлину разбивают на 10 частей от середины. Начало координат принимают в середине полосы, а x и ξ направлены вправо.

Уравнение упругой линии балки в безразмерных координатах имеет вид

$$\frac{E_1 I}{(1 - \nu_1^2) b l^4} \frac{d^4 y(\xi)}{d\xi^4} = q(\xi) - p(\xi).$$

Исходные данные: полудлина полосы l , м; модуль деформации грунта E_0 , МПа; коэффициент Пуассона материала полосы ν_1 и для грунта ν_0 .

Для песков и супесей $\nu_0 = 0,30$, суглинков – $0,35$, глин – $0,42$. Модуль деформации грунтов определяют в лабораторных условиях на компрессионных приборах (E_c) и в полевых штампами (E_{st}). Более достоверные данные получают по результатам испытания штампами. Агишев И. А. и Игнатова О. И. получили коэффициенты перехода $m = E_{st} / E_c$ (табл. 3.1).

Если толщина плиты не задана, то ее определяют из предположения о прямолинейном распределении реактивных давлений. Ординаты трапециевидной эпюры:

$$p_{\min} = p_0 - (3/2l^2) M_0, \quad p_{\max} = p_0 + (3/2l^2) M_0,$$

где $p_0 = q + \sum P_i / 2l$; M_0 – сумма моментов сосредоточенных сил P_i относительно середины полосы плюс сумма внешних моментов.

3.1. Значения коэффициентов m

Грунт	Коэффициент пористости e						
	0,41... 0,50	0,54... 0,60	0,61... 0,70	0,71... 0,80	0,81... 0,90	0,91... 1,00	1,01... 1,10
Супеси	4,2	4,2	3,7	3,0	2,2	–	–
Суглинки	5,0	4,8	4,5	3,9	3,2	2,6	2,1
Глины	–	–	6,0	6,0	5,8	5,4	4,8

Гибкость полосы определяют по показателю t :

$$t = \frac{(1 - \nu_1^2) \pi E_0 b' l^3}{(1 - \nu_0^2) 4 E_1 I} \approx 10 \frac{E_0}{E_1} \frac{l^3}{h^3},$$

где $I = b'h^3/12$ – момент инерции сечения полосы.

При $t < 1$ полоса относится к категории жестких; $1 \leq t \leq 10$ – имеет конечную длину и конечную жесткость и относится к категории коротких полос; при $t > 10$ полоса относится к категории длинных.

Рассматриваются полосы шириной $b' = 1$ м, выделенные из длинных плит (рис. 3.22).

Расчет жестких полос. Полосу мысленно разделяют на участки $\Delta x = 0,1l$. Приведенные абсциссы приложения сосредоточенных сил P_i и момента m_i .

Действие равномерно распределенной нагрузки. При расчете по теории упругости реактивные давления равномерны только для бесконечно гибкой полосы ($t \rightarrow \infty$). С уменьшением показателя гибкости растет неравномерность эпюры с увеличением давлений к краям.

При $t = 0$, т.е. для абсолютно жесткой полосы, реактивные давления распределяются в соответствии с формулой Садовского:

$$p = 2q / \pi \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Интегрируя это уравнение при свободных краях полосы, получают формулы для поперечных сил и моментов:

$$Q = qb'l(2/\pi) \arcsin \xi - \xi;$$

$$M = qb'l^2 \left[2/\pi \left(\xi \arcsin \xi + \sqrt{1 - \xi^2} \right) - (\xi^2 + 1)/2 \right].$$

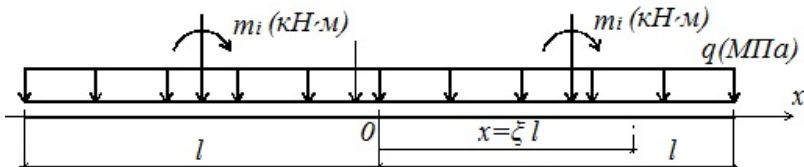


Рис. 3.22. Схема нагрузок, действующих на полосу

По приведенным в работе [6] таблицам определяют безразмерные величины \bar{p} , \bar{Q} , $\bar{M} = f(t, \xi)$. Истинные величины определяют по формулам:

$$p = \bar{p}q; \quad Q = \bar{Q}b'lq; \quad M = \bar{M}b'l^2q.$$

Принято следующее правило знаков: реактивные давления p считаются положительными, если они действуют на полосу снизу вверх; поперечная сила Q считается положительной, если она направлена вверх (стремится поднять сверху часть полосы слева от рассматриваемого сечения); изгибающие моменты M положительны, если они стремятся изогнуть балку выпуклой стороной вниз. Примерные эпюры показаны на рис. 3.23.

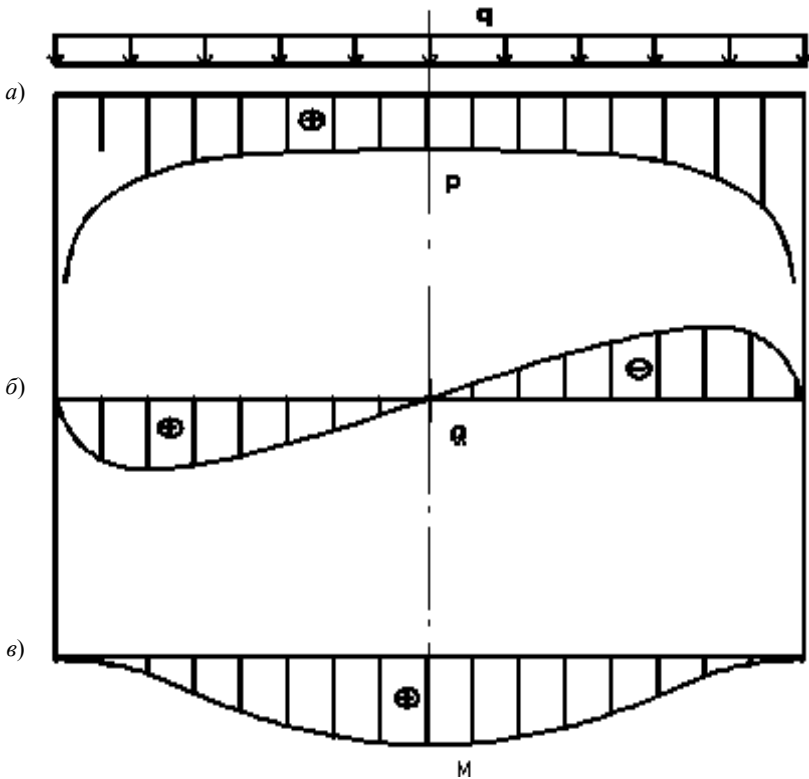


Рис. 3.23. Безразмерные эпюры p (а), Q (б), M (в) для жесткой полосы шириной $b' = 1$ м, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

Сосредоточенная внецентренная сила. Безразмерные величины $\bar{p}, \bar{Q}, \bar{M} = f(a, \xi)$. Истинные эпюры (рис. 3.24) определяются из равенств:

$$p = \bar{p}P/(b'l); \quad Q = \pm\bar{Q}P; \quad M = \bar{M}P.$$

Сосредоточенный момент. Переходные формулы от безразмерных эпюр $\bar{p}, \bar{Q}, \bar{M}$ к действительным p, Q и M имеют вид:

$$p = \pm\bar{p}m/(b'l^2); \quad Q = \bar{Q}(m/l); \quad M = \pm\bar{M}m.$$

Внешние моменты m положительны, если они направлены по часовой стрелке. Величины $\bar{p}, \bar{Q}, \bar{M} = f(\xi)$.

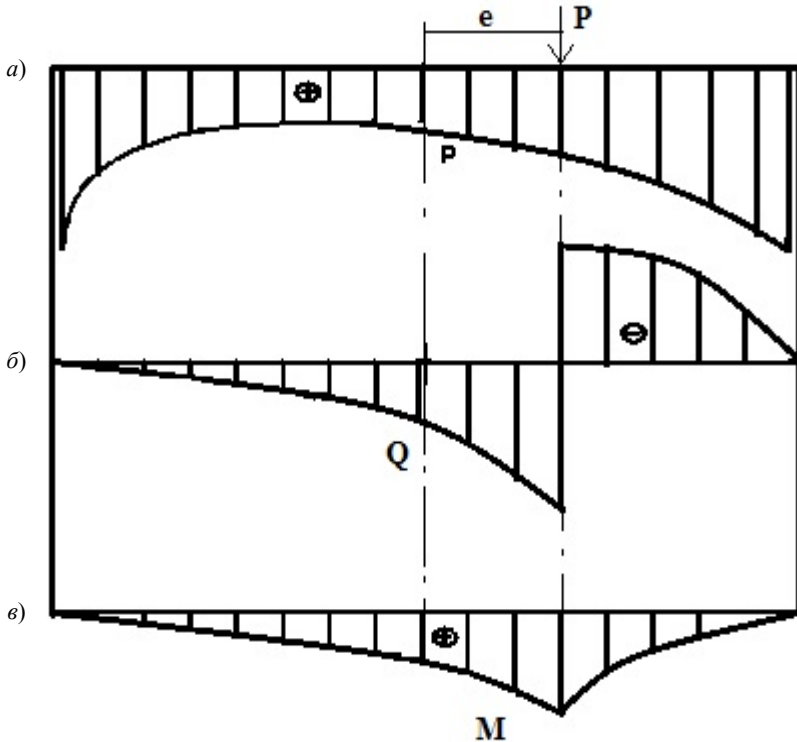


Рис. 3.24. Безразмерные эпюры для жесткой полосы шириной $b' = 1$ м, нагруженной сосредоточенной внецентренной силой P

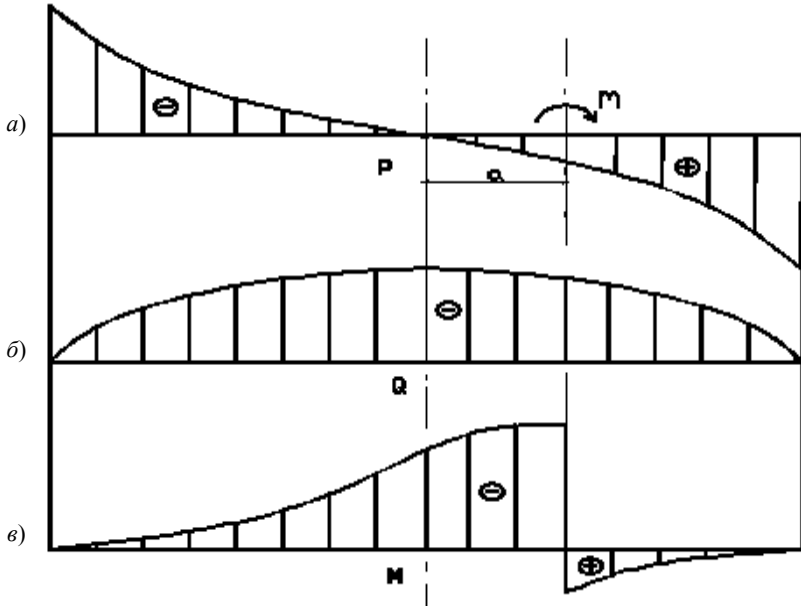


Рис. 3.25. Безразмерные эпюры p (а), Q (б), M (в) для жесткой полосы шириной $b = 1$ м, нагруженной изгибающим моментом

Общий вид эпюр показан на рис. 3.25.

Далее производится суммирование эпюр от воздействия всех нагрузок.

Особенности расчета длинных полос ($t > 10$). В этом случае пользуются таблицами для длинных (бесконечных) полос.

Для длинной полосы упругая характеристика L (м):

$$L = \sqrt[3]{\frac{2E_1 J (1 - \nu_0^2)}{b' E_0 (1 - \nu_1^2)}} \approx h \cdot \sqrt[3]{\frac{E_1}{6E_0}}.$$

Она играет такую же роль, как и полудлина l для расчета коротких полос.

Действие сосредоточенной силы. Расчеты производят по схеме однородного основания при повышенном расчетном модуле деформации или с использованием условной схемы сжимающего слоя.

Формулы перехода от безразмерных эпюр имеют вид:

$$p = \bar{p}P / (b'L); \quad Q = \pm \bar{Q}P; \quad M = \bar{M}LP; \quad \bar{p}, \bar{Q}, \bar{M} = f(H/L, \xi).$$

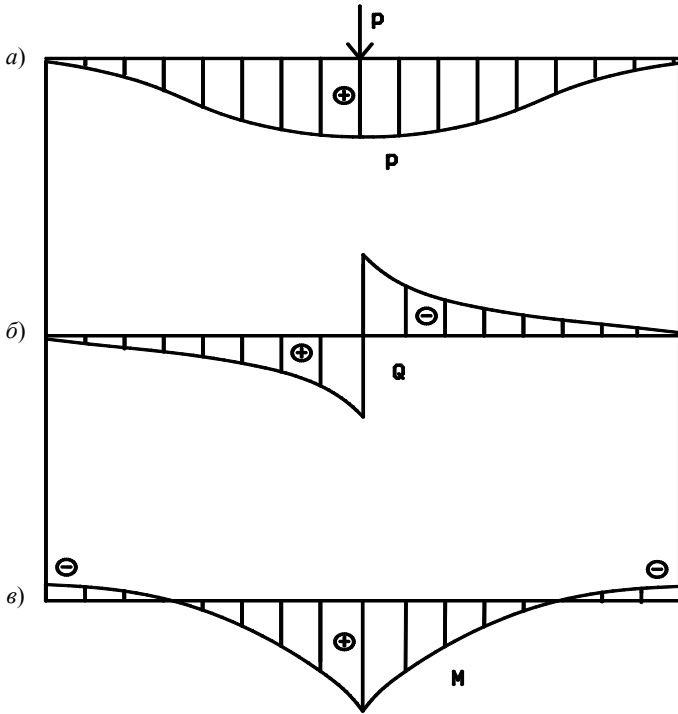


Рис. 3.26. Безразмерные эпюры для бесконечно длинных полос шириной $b' = 1$ м, нагруженных сосредоточенной силой и лежащих на сжимаемом слое толщиной H

Очертания эпюр показаны на рис. 3.26.

Действие равномерно распределенной нагрузки ($t > 50$). При $\xi < 3$ расчет ведется по схеме полубесконечной полосы. За начало отсчета принимается левый конец полосы. Переход от безразмерных величин \bar{p} , \bar{Q} , $\bar{M} = f(\xi)$ к действительным выполняется по формулам:

$$p = \bar{p}q; \quad Q = \pm \bar{Q}b'Lq; \quad M = \bar{M}b'L^2q.$$

Для сечений в левой половине полосы принимается знак (+). Сечения вблизи правого конца рассчитывают аналогично, но с переносом начала координат в правый конец. Для сечений, отстоящих от обоих концов на расстоянии $|\xi > 3|$, принимают (рис. 3.27):

$$p = q; \quad Q = 0; \quad M = 0,21b'L^2q.$$

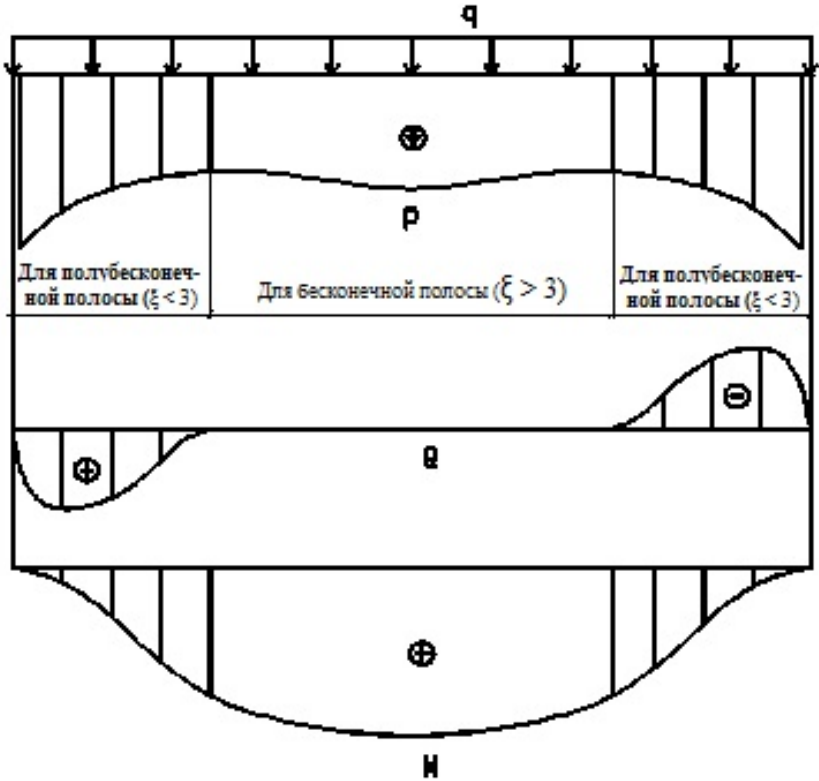


Рис. 3.27. Безразмерные эпюры \bar{p} (а), \bar{Q} (б), \bar{M} (в) для полубесконечных полос шириной $b' = 1$ м при равномерно распределенной нагрузке

Расчет круглых плит

Нагрузка принимается симметричной относительно центра: равномерная нагрузка V по кругу или кольцу; равномерная силовая нагрузка p' (Н/м) по окружности; равномерная моментная нагрузка m' (Н) по окружности; сосредоточенная сила P в центре плиты.

Показатель гибкости круглой плиты

$$s = 3 \left[\frac{1 - \nu_1^2}{1 - \nu_0^2} \right] E_0 / E_1 R^3 / h^3 .$$

Если $s \leq 1/2$ – плита абсолютно жесткая; $1/2 \leq s \leq 10$ – плита конечной жесткости, $s \leq 10$ – плита абсолютно гибкая.

1. Расчет абсолютно жестких плит. Реактивное давление по формуле Буссинеска

$$p = P / \left(2\pi R^2 \sqrt{1 - \rho^2} \right),$$

где P – суммарная нагрузка на плиту.

Для абсолютно жесткой эллиптической плиты

$$p(x, y) = P / \left[2\pi ab \sqrt{1 - (x^2/a^2) - (y^2/b^2)} \right].$$

При эксцентричной нагрузке

$$p = P / (2\pi R^2) \left((3\lambda x + 1) / \sqrt{1 - \rho^2} \right),$$

где P – результирующая нагрузка; λ – приведенное к радиусу плиты расстояние от центра плиты до результирующей нагрузки; x – приведенная к радиусу абсцисса рассматриваемой точки подошвы плиты при условии, что точка декартовых координат помещена в центре подошвы плиты.

Осадка плиты при симметричной нагрузке

$$\omega = P(1 - \nu_0^2) / 2RE_0.$$

При эксцентричной нагрузке

$$\omega = P(1 - \nu_0^2)(2 + 3\lambda x) / 4RE_0.$$

Крен при эксцентричной нагрузке

$$\text{tg}\varphi = [3P\lambda(1 - \nu_0^2)] / 4E_0R^2.$$

По таблице 31 работы [12] определяют радиальные моменты M_r , стремящиеся изогнуть плиту в направлении радиуса; тангенциальные (кольцевые) моменты M_t , стремящиеся изогнуть плиту в направлении, перпендикулярном радиусу. M_z и M_t имеют размерность в Н.

Формулы перехода от табличных данных при равномерно распределенной по кругу нагрузке имеют вид:

$$M_r = \bar{M}_r R^2 q, \text{ Н}; \quad M_t = \bar{M}_t R^2 q, \text{ Н}; \quad N_r = \bar{N}_r R q, \text{ Н/м},$$

где $\bar{M}_r, \bar{M}_t, \bar{N}_r = f(\alpha = a/R, \rho = r/R)$, a – радиус нагрузки, r – расстояние от оси до рассматриваемой точки.

В случае распределенной по окружности нагрузки приведенным радиусом $a = \alpha / R$

$$M_r = -\bar{M}_r RP', \text{ Н}; \quad M_t = -\bar{M}_t RP', \text{ Н}; \quad N_r = \bar{N}_r P', \text{ Н/м.}$$

Если сосредоточенная сила приложена в центре жесткой круглой плиты, то

$$M_r = \bar{M}_r P, \text{ Н}; \quad M_t = \bar{M}_t P, \text{ Н}; \quad N_r = -\bar{N}_r P / R, \text{ Н/м.}$$

2. Расчет плиты конечного радиуса и жесткости $1/2 \leq s \leq 10$.

Нагрузка p' (Н/м) приложена равномерно по окружности радиусом $a = \alpha R$:

$$p = \bar{p} P' / R; \quad \omega = \bar{\omega} R^3 P' / D; \quad M_r = -\bar{M}_r RP'; \quad M_t = -\bar{M}_t RP'; \\ N_r = \bar{N}_r P'; \quad \text{tg}\varphi_k = \bar{\text{tg}}\varphi_k R^2 P' / D.$$

Величины \bar{P} , \bar{M}_r , \bar{M}_t , \bar{N}_r , $\bar{\omega}$, $\bar{\text{tg}}\varphi_k = f(\alpha, s, \rho)$.

3. Моментная нагрузка m' (Н), равномерно распределенная по окружности радиусом $a = \alpha R$.

Формулы перехода имеют вид:

$$p = \bar{p} \frac{m'}{R^2}; \quad M_r = \bar{M}_r m'; \quad M_t = \bar{M}_t m'; \quad N_r = \bar{N}_r \frac{m'}{R}; \quad \omega = \bar{\omega} \frac{R^2}{D} m'; \\ \text{tg}\varphi_k = \bar{\text{tg}}\varphi_k \frac{R}{D} m'.$$

4. Равномерно распределенная нагрузка по всей площади плиты.

Формулы перехода от табличных данных к действительным:

$$p = \bar{p} q; \quad \omega = \bar{\omega} \frac{R^4}{D} q; \quad M_r = \bar{M}_r R^2 q; \quad M_t = \bar{M}_t R^2 q; \quad N_r = -\bar{N}_r R v; \\ \text{tg}\varphi_k = \bar{\text{tg}}\varphi_k \frac{R^3}{D} v.$$

Расчет круглой плиты, принимаемой за абсолютно гибкую или имеющую неограниченные размеры.

Осадки определяют по формуле Буссинеска при равномерно распределенной по площади нагрузке.

Осадка центра ($\rho = 0$)

$$\omega_{\text{ц}} = \frac{2(1 - \nu_0^2) q R}{E_0};$$

осадка края ($\rho = 1$)

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{4(1-\nu_0^2) qR}{nE_0};$$

средняя осадка

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{16(1-\nu_0^2) qR}{3\pi E_0}.$$

Изгибающие моменты имеет смысл определять, если

$$(\omega_{\text{ц}} - \omega_{\text{кр}}) \leq \left(\frac{1}{5} \dots \frac{1}{3}\right) h.$$

Если это условие не выполняется, то пластина работает так же на растяжение, как мембрана.

Когда $(\omega_{\text{ц}} - \omega_{\text{кр}}) \leq \frac{1}{3}$, то $M_z = M_t = 0,05\nu h^2 \sqrt[3]{E_1^2/E_0^2}$.

Теоретические основы метода расчета симметрично нагруженных плит, лежащих на упругом полупространстве. Пусть нагрузка равномерно распределена по площади круга радиусом a при реактивном давлении грунта $p(\rho)$ (рис. 3.28).

В области I под нагрузкой дифференциальное уравнение изгиба

$$d^4\omega/d\rho^4 + 2/\rho d^3\omega/d\rho^3 - 1/\rho^2 d^2\omega/d\rho^2 + 1/\rho^3 d\omega/d\rho = R^4/D[q - p(\rho)],$$

где $D = (E_0 h^3)/12(1-\nu_0^2)$ – цилиндрическая жесткость плиты; $\rho = \frac{r}{R}$.

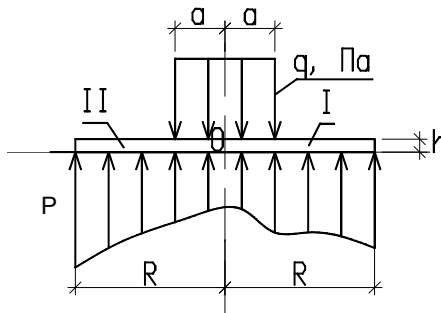


Рис. 3.28. Данные для расчета плиты

Для нагруженной области II это действительно при $q = 0$.

Осадки поверхности упругого полупространства $v(\rho)$ при нагрузке его поверхности давлением $p(\rho)$, передаваемой плитой, определяются выражением

$$v(\rho) = \frac{4(1-\nu_0^2)R}{nE_0} \left\{ \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \left[p(\bar{\rho}) \bar{\rho} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right) \sin^2 x}} \right] d\bar{\rho} + \right. \\ \left. + \int_{\rho}^1 \left[p(\bar{\rho}) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho}\right) \sin^2 x}} \right] d\bar{\rho} \right\},$$

где $\bar{\rho}$ – приведенное расстояние от центра круга до элемента нагрузки; x – произвольный параметр интегрирования.

Решение получают на основе двух предыдущих уравнений при прогибах плиты, равных осадкам грунта:

$$\omega(\rho) = v(\rho),$$

а также из условия равновесия и условий на краю плиты.

Распределение реактивного давления ищут в виде бесконечного степенного ряда с четными степенями

$$p(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \rho^{2n}.$$

Подставив это уравнение в формулу осадок поверхности, проведя интегрирование, получают выражение осадок в виде полного ряда

$$v(\rho) = \frac{2(1-\nu_0^2)R}{E_0} \sum_{m=0}^{\infty} \rho^{2m} \left[\frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{2 \cdot 4 \dots 2m} \right]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{2n}}{2n - 2m + 1}.$$

После определения неизвестных коэффициентов a_{2i} , реактивных давлений, прогибов вычисляют:

радиальный момент

$$M_r = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{d^2 \omega}{d\rho^2} + \frac{\nu_1}{\rho} \frac{d\omega}{d\rho} \right);$$

тангенциальный (кольцевой) момент

$$M_t = -\frac{D}{R^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\omega}{d\rho} + \nu_1 \frac{d^2 \omega}{d\rho^2} \right);$$

радиальную поперечную силу

$$N_r = -\frac{D}{R^3} \left(\frac{d^3 \omega}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 \omega}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{d\omega}{d\rho} \right).$$

Расчет балок на упругом основании в условиях пространственной задачи. К балкам относят конструкции с $a/b \geq 7$. Они должны быть настолько узкими, что их изгибом в поперечном направлении можно пренебречь.

Конструкцию можно считать абсолютно жесткой в поперечном направлении, если

$$t_n = \frac{3\pi(1-\nu_1^2) E_0 b^3}{(1-\nu_0^2) E_1 h^3} < 1.$$

Если конструкция не удовлетворяет этому условию, но $a/b \geq 7$ и действия нагрузки требуют применения условий пространственной задачи, то это полосы на упругом основании, работающие в условиях пространственной задачи.

Пусть ширина балки b , длина $2a$ (рис. 3.29).

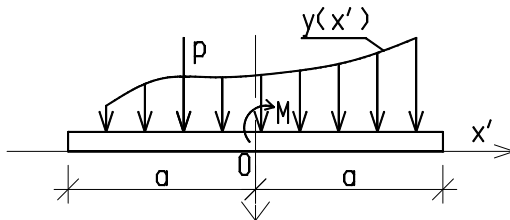


Рис. 3.29. Схема обозначений к расчету

Если размеры балки не заданы, то они могут быть определены приближенным расчетом исходя из допущения о трапециевидном распределении реактивных давлений. Ординаты эпюры

$$p = p_0 \pm (3/2a^2) M_0,$$

где a – полудлина балки; $p_0 = \sum P_i/2a$ – среднее давление на 1 м длины балки; M_0 – сумма моментов P_i относительно середины балки плюс сумма внешних моментов m_i ; верхний знак относится к левому кольцу.

Величина максимальных моментов при расчете плитных фундаментов

$$M = p_{\text{л}}(x^2/2) + M_0/4 \cdot x^3/a^3 - \sum P_i(x - d_i),$$

где $p_{\text{л}}$ – реактивное давление левого конца; x – расстояние от рассматриваемого сечения до левого конца; d_i – расстояние от левого конца балки до i -й колонны с нагрузкой P_i .

По способу расчета балки разделяют на три категории: абсолютно жесткие (жесткие), конечной жесткости и длины (короткие), бесконечные и полубесконечные (длинные).

Для определения принадлежности балок к категории жестких определяют отвлеченную величину – показатель жесткости ($t \leq 0,5$)

$$t = \pi E_0 a^3 b / \left[2(1 - \nu_0^2) E_1 I \right].$$

Балку считают жесткой при $a/b < 20$ и $0,5 \leq t \leq 1$.

Для выяснения принадлежности балок к категории длинных определяют упругую характеристику

$$L = \sqrt[3]{\frac{2E_1 I (1 - \nu_0^2)}{b' E_0}}$$

и приведении к той же величине $\lambda = a/L$, $\beta = b/L = b'/2L$.

Балку считают длинной, если

$$\beta < 0,15, \quad \lambda > 1; \quad \beta \leq 0,3, \quad \lambda > 2; \quad \beta \leq 0,5, \quad \lambda > 3,5.$$

1. Расчет жестких балок ведут по таблицам безразмерных величин. При действии силы в середине балки

$$p = \bar{p}_0(P_0/b'a); \quad Q = \pm \bar{Q}_0 P_0; \quad M = \bar{M}_0 P_0 a;$$

$$y = \bar{y}_0 \frac{(1-v_0^2) P_0}{E_0 a}; \quad \text{tg} \varphi = 0,$$

где \bar{y}_0 и $\text{tg} \varphi$ – осадка и угол поворота при различных отношениях сторон опорной площади балки.

При действии сосредоточенного момента в середине балки

$$p = \pm p_1 \frac{m_0}{b'a}; \quad Q = \bar{Q}_1 \frac{m_0}{a}; \quad M = \pm \bar{M}_1 m_0;$$

$$y = \pm \text{tg} \varphi_1 \frac{1-v_0^2}{E_0} x \frac{m_0}{a^2}; \quad \text{tg} \varphi = \pm \text{tg} \varphi_1 \frac{1-v_0^2}{E_0} x \frac{m_0}{a^2},$$

где $x = x'/a$, x' – действительное расстояние. Верхний знак относится к правой половине, нижний – к левой.

Для удобства использования таблиц при любой нагрузке необходимо заменить действительную нагрузку эквивалентной, состоящей из совокупности нагрузки P_0 и момента m_0 , приложенного в середине балки. Эквивалентной считается нагрузка, вызывающая идентичные реактивные давления, а также осадку балки.

2. Расчет балок конечной жесткости и длины. Соотношение размеров балки: $7 \leq a/b \leq 15$.

Действие сосредоточенной силы. Формулы перехода от безразмерных эпюр к действительным.

$$M = \bar{M} P a, \text{ кН/м}; \quad p = \bar{p} \frac{P}{b'a}, \text{ кПа}; \quad Q = \bar{Q} P; \quad \omega = \bar{\omega} \frac{(1-v_0^2) P}{E_0 a},$$

где $2a$ – длина балки; b' – ширина; $\delta = \alpha/a$ – приведенное расстояние от середины балки до рассматриваемого сечения; x' – действительное расстояние.

Действие сосредоточенного момента.

$$M = \bar{M} m; \quad Q = \bar{Q} m/a; \quad p = \bar{p} \frac{m}{b'a^2}; \quad \omega = \bar{\omega} \frac{(1-v_0^2) m}{E_0 a^2}, \text{ м},$$

где $z = d/a$ – приведенное расстояние от середины балки до нагрузки; d – действительное расстояние; a – полудлина балки; $x = x'/a$ – приве-

денное расстояние от середины балки до рассматриваемого сечения; x' – действительное расстояние.

Действие равномерно распределенной нагрузки:

$$M = \bar{M}a^2q, \text{ МН}\cdot\text{м}; \quad Q = \bar{Q}q, \text{ МН}; \quad p = \bar{p}q, \text{ МПа}\cdot\text{м}; \quad y = \bar{y} \frac{1-q_0^2}{E_0}, \text{ м}.$$

3. Расчет длинных балок [8].

Действие сосредоточенной силы. Формулы перехода от безразмерных эпюр к действительным:

– изгибающих моментов $M = \bar{M}PL$;

– поперечных сил $Q = \bar{Q}P$;

– реактивных давлений $p = \bar{p} \frac{P}{L}$;

– осадок (прогибов) $y = \bar{y} \frac{(1-\nu_0^2) P}{E_0 L}$.

Рассмотрим теоретические основы расчета *балок конечной длины*. Балка располагается на поверхностном упругом полупространстве. Реактивные давления изменяются в продольном x' и поперечном y' направлениях ($x = x'/a$, $y = y'/b$ – координаты, приведенные к полусторонам a и b прямоугольной площади).

Распределение реактивных давлений выражено через двойной степенной ряд

$$p_{(x,y)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j.$$

Трением между грунтом и балкой пренебрегают.

Уравнение осадок, распределенных по прямоугольной площади, также представлено двойным степенным рядом

$$\omega_{(x,y)} = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} A_{uv} x^u y^v.$$

Расчет прямоугольных плит на упругом основании

Осадки и давления на грунт жестких прямоугольных плит.

В расчетах используются не действительные координаты x' и y' , а приведенные к полусторонам $x = x'/a$ и $y = y'/b$. Уравнения реак-

тивных давлений выражаются через многочлены пятой, шестой и седьмой степени. Даны таблицы для вычисления коэффициентов в этих многочленах при $a/b = 1 \dots 10$.

Уравнения реактивных давлений определяют отдельно для действия сосредоточенной центральной силы; момента m_x , действующего в вертикальной плоскости, параллельной большей стороне прямоугольника, и т.д., действующей в вертикальной плоскости, параллельной меньшей стороне прямоугольника.

Любую нагрузку, действующую на абсолютно жесткую ленту, можно заменить эквивалентной из совокупности P_0 , m_x , m_y .

Уравнения реактивных давлений при нагрузках P_0 , m_x и m_y имеют вид:

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= (a_{00} + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{40}x^4 + a_{22}x^2y^2 + \\
 &\quad + a_{04}y^4 + a_{60}x^6 + a_{42}x^4y^2 + a_{24}x^2y^4 + a_{06}y^6)P_0A; \\
 p(x, y) &= (a_{10}x + a_{30}x^3 + a_{12}xy^2 + a_{50}x^5 + a_{32}x^3y^2 + a_{14}xy^4 + \\
 &\quad + a_{70}x^7 + a_{52}x^5y^2 + a_{34}x^3y^4 + a_{16}xy^6)m_x / a^2b; \\
 p(x, y) &= (a_{01}y + a_{03}y^3 + a_{21}x^2y + a_{05}y^5 + a_{23}x^2y^3 + \\
 &\quad + a_{41}x^4y + a_{07}y^7 + a_{25}x^2y^5 + a_{42}x^4y^2 + a_{61}x^6y)m_y / ab^2.
 \end{aligned}$$

Переходные формулы от безразмерных давлений \bar{p} к действительным p при моментных нагрузках m_x и m_y :

$$p = \bar{p}(m_x / a^2b); \quad p = \bar{p}(m_y / ab^2).$$

Осадки и углы поворота жестких прямоугольных плит для центральной сосредоточенной силы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
 w &= [(1 - \nu_0^2) / E_0] K_0 (P / \sqrt{A}); \\
 \operatorname{tg} \varphi_x &= [(1 - \nu_0^2) / E_0] K_1 m_x / a^3; \\
 \operatorname{tg} \varphi_y &= [(1 - \nu_0^2) / E_0] K_2 m_y / b^3,
 \end{aligned}$$

где A – площадь подошвы фундамента; K_0 , K_1 , K_2 – табличные коэффициенты.

Пусть $m_x = p\varepsilon_x = p\varepsilon_x a$. Для квадратных плит $a/b = 1$ давление в середине больше удаленного от нагрузки края ($x = -1$, $y = 0$):

$$p = (1,63 - 3,84\varepsilon)(p/A).$$

Приравняв $p = 0$, получим уравнение для определения предельного эксцентриситета, при превышении которого плита начнет отставать от грунта, $\varepsilon_{\text{lim}} = 0,425$. Для угловой точки $\varepsilon_{\text{lim}} = 0,527$.

При расчетах по гипотезе коэффициента постели: $\varepsilon_{x\text{lim}} = \varepsilon_{y\text{lim}} = 1/3$.

Расчет на прочность гибких и жестких прямоугольных плит

Прочность гибких плит при сплошной нагрузке по всей плите вычисляются с использованием дифференциального уравнения изгиба тонкой плиты

$$\frac{D}{a^2 b^2} \left(\beta^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 y}{\partial y^4} \right) = q(x, y) - p(x, y),$$

где $\alpha = a/b$; $\beta = 1/\alpha$; $D = E_1 h^3 / [12 \cdot (1 - \nu_2^2)]$ – цилиндрическая жесткость плиты; $q(x, y)$ – интенсивность влияния нагрузки; $p(x, y)$ – реактивное давление грунта.

Изгибающие моменты в продольном $x(M_x)$ и в поперечном $y(M_y)$ направлениях определяют по формулам:

$$M_x = -\frac{D}{a^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \nu_1 \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} \right);$$

$$M_y = -\frac{D}{b^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \nu_1 \beta^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right).$$

Поперечные силы определяют по формулам:

$$N_x = -\frac{D}{a^3} \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \alpha^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial y} \right);$$

$$N_y = -\frac{D}{b^3} \left(\frac{\partial^3 y}{\partial y^3} + \beta^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

Крутящие моменты

$$H_x = -H_y = -\frac{D(1-\nu_1)}{ab} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}.$$

К категории жестких плит относят плиты, показатель гибкости которых

$$r = \frac{\pi a^2 b E_0}{D(1-\nu_0^2)} = \frac{3\pi A a E_0 (1-\nu_1^2)}{E_1 h^3 (1-\nu_0^2)} \leq 4/\alpha.$$

Действительные величины реактивных давлений, изгибающих моментов, поперечных сил и крутящих моментов определяют по значениям безразмерных (табличных):

$$P = \bar{P}q; \quad M_x = \bar{M}_x a^2 q; \quad N_x = \bar{N}_x a q; \quad H_x = \bar{H} a b q,$$

здесь $q = \text{const}$, $P = 0$, $a/b = 1$.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА, ОСНОВАННЫЕ НА РЕШЕНИИ ФУССА–ВИНКЛЕРА

Метод Н. К. Снитко [49]. Использована гипотеза Винклера с линейной зависимостью между интенсивностью реакции основания и осадкой:

$$p = -Cy,$$

где C – коэффициент постели, или коэффициент упругого сжатия основания, равный интенсивности давления на единицу площади в рассматриваемой точке, выражают в кН/м^3 или мН/м^3 .

Знак минус принят потому, что положительной осадке вниз соответствует реакция основания, направленная вверх. Коэффициент C зависит от вида и состояния грунта, определяется опытным путем. Для песка C принимают равным (30...60) мН/м^3 . Точнее эти величины определяются исходя из решения для грунтовой среды как упругого полупространства по формуле:

$$C = E_0 / \left[(1 - \mu_0^2) \sqrt{F} \omega \right],$$

где E_0 – модуль деформации грунта основания (для песка от 11 до 50 мН/м^2); μ_0 – коэффициент Пуассона для основания; F – площадь передачи давления (до 10 м^2); ω – поправочный коэффициент, зависящий от отношения длины балки l к ее ширине b (примерно 0,8).

При постоянной интенсивности p нагрузки по ширине b балки переходят от поверхностной реакции основания к погонной, распределенной по оси:

$$t_x = pb = Cby = -ky,$$

где $k = Cb$ – погонный коэффициент постели.

Решена задача об определении уравнения изогнутой оси балки, ордината которой y зависит и от интенсивности реакции основания. Полагают, что балка неразрывно связана с основанием и со стороны последнего может возникать как реакция, направленная вверх (сжатие основания), так и реакция, направленная вниз.

В качестве начальных параметров приняты y_0, φ_0, M_0 и Q_0 (рис. 3.30), т.е. начальный прогиб, начальный угол наклона касательной к изогнутой оси, начальный изгибающий момент и начальная поперечная сила.

Балка изгибается от действия внешней активной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q и сосредоточенных воздействий по концам Q_0, M_0 и P_1, M_1 . Со стороны основания возникает неравномерно распределенная реакция интенсивностью t_x .

Зависимость между поперечной силой и интенсивностью нагрузки имеет вид

$$\frac{dQ}{dx} = q + t_x = q - ky.$$

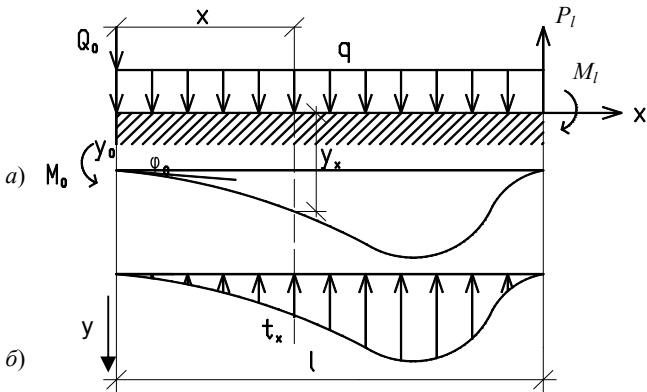


Рис. 3.30. Нагрузки, действующие на балку (а) и эпюра реакций отпора грунта (б)

Использовано дифференциальное уравнение изгиба балки

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

Дифференцируя это уравнение дважды и принимая $EI = \text{const}$, получим

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{Q_x}{EI}, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q - ky}{EI}.$$

Введены обозначения:

$$M_0 / (EI) = \overline{M}_0; \quad Q_0 / (EI) = \overline{Q}_0; \quad q / (EI) = \overline{q}; \quad \alpha = \sqrt[4]{k / (4EI)},$$

где α – коэффициент жесткости.

Основной функцией решения принято

$$A_x = \cos \alpha x \cdot \operatorname{ch} \alpha x.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение по методу начальных параметров, после преобразований получено уравнение изогнутой оси балки на упругом основании в виде

$$y = y_0 A_x + \varphi_0 B_x / \alpha + \overline{M}_0 C_x / \alpha^2 + \overline{Q}_0 D_x / \alpha^3 + \overline{q}(1 - A_x) / (4\alpha^4).$$

Последовательно дифференцируя это выражение, получены уравнения угла наклона касательной к изогнутой оси, изгибающего момента и поперечной силы.

Так, уравнение для изгибающего момента имеет вид

$$M_x = -y_0 4\alpha^2 EIC_x - \varphi_0 4\alpha EID_x + M_0 A_x + Q_0 B_x / \alpha + qC_x / \alpha^2.$$

Для балки со свободными концами начальными неизвестными являются y_0 и φ_0 . Условия на правом конце:

$$M_{x=l} = M_l; \quad Q_{x=l} = P_l.$$

Для балок переменной жесткости расчет основания выполняют численными методами, например методом конечных разностей. За неизвестную функцию принята функция прогиба $f_i = y_i$, но можно и изгибающего момента. Получают выражения для производных, например:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_i}{dx} &= \frac{1}{2a}(-f_{i-1} + f_{i+1}); \\ \frac{d^2 f_i}{dx^2} &= \frac{1}{a^2}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}). \end{aligned} \right\}$$

Для разностей второго порядка

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = [a^2 / (EI_i)] M_i.$$

Метод А. Р. Ржаницына [39]. Рассмотрим жидкость – жесткое основание. Балка плавает в спокойной воде. По закону Архимеда при этом создается направляющая вверх погонная сила

$$p = -\gamma by,$$

где γ – удельный вес жидкости; b – ширина балки; y – прогиб балки.

Дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$EJy^{IV} = q,$$

где $q = q_0 - p$, q_0 – внешняя нагрузка, $p = cby$ – реакция основания, c – коэффициент постели, y – осадка основания.

Тогда:

$$EJy^{IV} + cby = q_0.$$

В случае балки постоянного сечения общий интеграл уравнения без правой части можно искать в виде

$$y = e^{-\lambda x} (C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x) + e^{\lambda x} (C_3 \sin \lambda x + C_4 \cos \lambda x).$$

Проведем последовательное дифференцирование:

$$y' = \lambda e^{-\lambda x} [C_1 (-\sin \lambda x + \cos \lambda x) + C_2 (-\cos \lambda x - \sin \lambda x)] + \\ + \lambda e^{\lambda x} [C_3 (\sin \lambda x + \cos \lambda x) + C_4 (\cos \lambda x - \sin \lambda x)];$$

$$y'' = 2\lambda^2 e^{-\lambda x} (-C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x) + \\ + 2\lambda^2 e^{\lambda x} (C_3 \cos \lambda x - C_4 \sin \lambda x);$$

$$y''' = 2\lambda^3 e^{-\lambda x} [C_1 (\cos \lambda x + \sin \lambda x) + C_2 (-\sin \lambda x + \cos \lambda x)] + \\ + 2\lambda^3 e^{\lambda x} [C_3 (\cos \lambda x - \sin \lambda x) + C_4 (-\sin \lambda x - \cos \lambda x)];$$

$$y^{IV} = 4\lambda^4 e^{-\lambda x} (-C_1 \sin \lambda x - C_2 \cos \lambda x) + \\ + 4\lambda^4 e^{\lambda x} (-C_3 \sin \lambda x - C_4 \cos \lambda x) = -4\lambda^4 y.$$

После постановки последнего уравнения в

$$EJy^{IV} + cby = 0$$

получим

$$-4\lambda^4 EJy + cby = 0$$

или

$$\lambda = \sqrt[4]{cb/(4EJ)}.$$

Искомое уравнение можно представить в виде

$$y = A_1 e^{-\lambda x} \sin(\lambda x + \varphi_1) + A_2 e^{\lambda x} \sin(\lambda x + \varphi_2),$$

где

$$A_1 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad A_2 = \sqrt{C_3^2 + C_4^2}; \\ \varphi_1 = \text{arctg}(C_2/C_1); \quad \varphi_2 = \text{arctg}(C_4/C_3).$$

Пусть на балку действует распределенная по линейному закону нагрузка

$$q_0 = a_1 x + a_0.$$

Частное решение уравнения так же представляет линейную функцию

$$y = (a_1 x + a_0) / cb.$$

Балки изгибаться не будут и внутренние силы по всей длине равны нулю.

Бесконечно длинная балка. Принимают $C_3 = C_4 = 0$.

Общее уравнение имеет вид

$$y = e^{-\lambda x} (C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x).$$

Балку длиной

$$L = 3\pi/\lambda$$

можно рассматривать как бесконечно длинную, так как влияние концевых граничных условий незначительно.

Пусть балка загружена в середине сосредоточенной силой. На конце балки

$$M = -EJy'' = 0; \quad Q = -Ejy''',$$

тогда

$$\begin{aligned}
 Y''(0) &= 2\lambda^2(-C_1 + C_3) = 0; \\
 y'''(0) &= 2\lambda^3(C_1 + C_2 + C_3 - C_4) = 0; \\
 C_3 &= C_1; \quad C_4 = 2C_1 + C_2.
 \end{aligned}$$

В середине балки угол поворота равен 0, а поперечная сила равна половине действующей сосредоточенной. Из этих условий определяются постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 . Подставив их в общее уравнение на С. 170, получим формулы для определения y, M и Q (рис. 3.31).

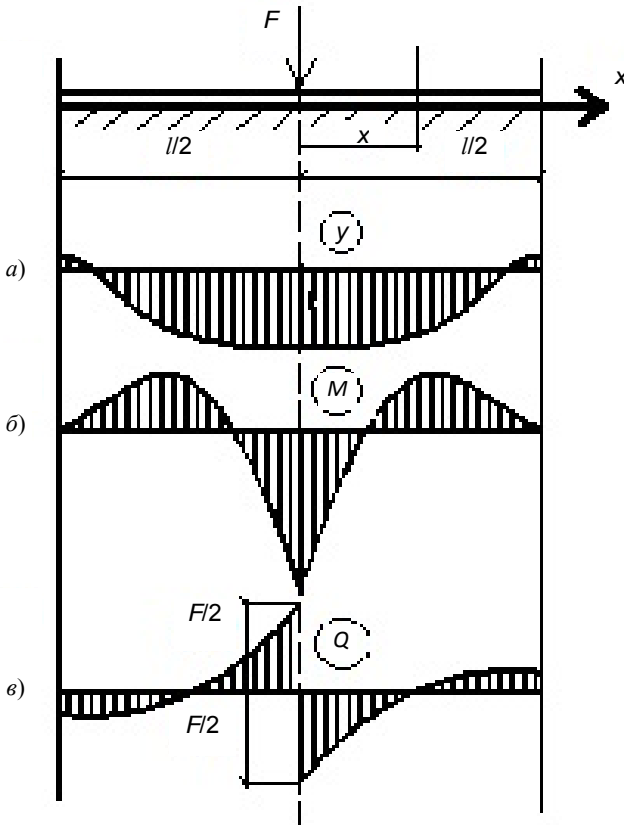


Рис. 3.31. Эпюры прогиба балки (а), изгибающих моментов (б), поперечных сил (в)

При очень большой длине

$$M(l/2) = F/(4\lambda), \quad y = F/(8Ej\lambda^3);$$

при малой длине

$$M(l/2) = Fl/8, \quad y = F/(lbc).$$

Основание с двумя коэффициентами постели.

Уравнение изгиба

$$EJy^{IV} - K_2y'' + K_1y = q_0.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{-\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + e^{\alpha x}(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) + y^*,$$

где $\pm\alpha, \pm\beta_i$ – корни характеристического уравнения

$$EJ\lambda^4 - K_2\lambda^2 + K_1 = 0;$$

y^* – частное решение, зависящее от нагрузки.

Для бесконечно длинной балки

$$y = e^{-\lambda x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + y^*.$$

Основание с двумя коэффициентами постели может иметь осадки за пределами балки.

Метод В. И. Шейнина [52]. В работе [29] приведена последовательность расчета плиты методом конечных элементов. Плита разбита на элементы с числом узлов N_q с координатами x_i, y_i .

Обобщенные характеристики системы нагружения в уровне подошвы плит представлены в виде:

$$G = \sum_{i=1}^q Q_i; \quad M_y = \sum_{i=1}^{N_q} M_{yi};$$
$$M_x = \sum_{i=1}^q M_{xi}; \quad X_q^c = M_y G^{-1};$$
$$y_q^c = M_x G^{-1},$$

где $M_{xi} = Q_i y_i$; $M_{yi} = Q_i x_i$ – статические моменты нагрузки Q_i относительно осей x и y ; G – равнодействующая вертикальных сил;

M_y, M_x – моменты относительно осей y и x системы вертикальных нагрузок; X_q^c, Y_q^c – координаты центра приложения нагрузки; p_m – среднее давление под подошвой фундамента; e_x, e_y – составляющие эксцентриситета.

Реактивное давление под подошвой плиты принимается распределенным по линейной зависимости

$$p(x, y) = A_1 + A_2x + A_3y .$$

Коэффициенты уравнения определяются из условия, чтобы равнодействующие и статические моменты от $p(x, y)$ были равны соответствующим величинам, определяемым системой нагрузок:

$$\int_{\Omega} p(x, y) dx dy = G ;$$

$$\int_{\Omega} yp(x, y) dx dy = M_x ;$$

$$\int_{\Omega} xp(x, y) dx dy = M_y .$$

Из системы линейных уравнений определяются A_1, A_2, A_3 .

Для расчета осадки $S(x, y)$ определяются напряжения: от нагрузки $\sigma_x(x, y, z)$ при $z > d$, природного давления $\sigma_g(x, y, z)$ при $z > d$, от веса выбранного при отрывке котлована грунта $\sigma_\gamma(x, y, z)$ при $z > d$.

Осадка поверхности основания вычисляется по формуле

$$S_0(x, y) = \beta \int_d^{z_c(x, y)} \frac{\sigma_v(x, y, z)}{E_e(x, y, z)} dz + \\ + \beta B [p(x, y) - \sigma_\gamma(d)] \int_d^{z_c(x, y)} \frac{\sigma(x, y, z) - \sigma_\gamma(x, y, z)}{E(x, y, z)} dz ,$$

где $E(x, y, z)$ – изменение по глубине z значения модуля деформации на вертикали в точке (x, y) ; $E_e(x, y, z)$ – изменение по глубине z значения модуля деформации, определяемого по ветви вторичного нагружения на той же вертикали.

Принимают:

$$E_e(x, y, z) = 5E(x, y, z);$$

$$B[p(x, y) - \sigma_\gamma(d)] = 1, \text{ когда } p(x, y) \geq \sigma_\gamma(d);$$

$$B[p(x, y) - \sigma_\gamma(d)] = 0 \text{ в обратном случае;}$$

$z_c(x, y)$ – глубина сжимаемой толщи, определяемая из уравнения

$$\sigma(x, y, z) = k_c \sigma_g(x, y, z_c),$$

где $k_c = 0,5$ для фундаментов больших размеров.

Величины $\sigma(x, y, z)$ и $\sigma_\gamma(x, y, z)$ вычисляются по методу угловых точек как сумма вкладов каждого элементарного квадрата внутри расчетной области (прямоугольника). Тогда напряжение в центре x_m, y_m элементарного квадрата с номерами m (ось x) и n (ось y) определяется через сумму по всем квадратам ($i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$) прямоугольника:

$$\sigma(m, n, z) = \sum_i p(i, j) A(z, |m-i|, |n-j|),$$

где $p(i, j)$ – давление в центре квадрата i, j ;

$$A(z, i, j) = a_c(z, (i+0,5)s, (j+0,5)s) - a_c(z, (i-0,5)s, (j+0,5)s) - \\ - a_c(z, (i+0,5)s, (j-0,5)s) + a_c(z, (i-0,5)s, (j-0,5)s).$$

В пределах элементарного квадрата функции $p(x, y)$ и $\sigma_\gamma(d)$ считаются постоянными и равными их значениям в центре.

Напряжения $\sigma(x_m, y_m, z)$ в центре x_m, y_m элементарного квадрата с номером m по оси x и n по оси y определяются через сумму по всем элементарным квадратам ($i = 1 \dots m, j = 1 \dots n$):

$$\sigma(m, n, z) = \sum p(i, j) A(z, |m-i|, |n-j|),$$

где $p(i, j)$ – давление в центре квадрата; $A(z, i, j)$ – функция влияния, описывающая алгоритм вычислений по методу угловых точек.

Рассмотрим функцию

$$\sigma_\gamma(m, n, z, k) = \sum_I V(K, J) \sum_{i,j} A(z, |m-i|, |n-j|) W(i, j, J),$$

где $V(K, J)$ – давление от веса вынутого грунта на уровне подошвы плиты с номером J ; $W(i, j, J) = 1$, если точка (x_i, y_i) находится внутри области Ω_i , $W(i, j, J) = 0$ – вне области.

Эта функция определяется с использованием метода угловых точек. Она учитывает форму и взаимное расположение фундаментов, глубину котлована, зависит от номера скважины.

Метод Б. П. Макарова, Б. Е. Кочеткова [31]. Расчет балок и плит на случайно-неоднородном основании при статических нагрузках. Параметры основания и внешних воздействий, не зависящих от времени, могут быть представлены в виде системы случайных величин или случайных функций координат. К этим параметрам относятся модуль деформации материала основания или коэффициент постели, интенсивность распределенной нагрузки от стеновых панелей, давление несущих колонн, положение и величина крановой нагрузки и т.д. С учетом случайной природы указанных факторов задачи расчета фундаментов должны формулироваться как вероятностные.

Нормальный прогиб фундаментной балки w представляет собой случайную функцию кордтиты x , зависящую от случайных нагрузок и коэффициента упругости основания, а также от условий закрепления концов.

Критерием безотказной работы конструкции по максимальному прогибу является неравенство

$$w(x) \leq w_*,$$

где w_* – предельное значение осадки.

Функция надежности равна вероятности выполнения неравенства при всех значениях x :

$$P = \bar{P} \left\{ \begin{array}{l} w(x) \leq w_*; \\ 0 \leq x \leq 1, \end{array} \right.$$

где $\bar{P}(A)$ – вероятность события A .

Для определения показателя надежности используются методы теории выбросов случайных функций.

Аналогично выполняется расчет по критерию прочности. Условие безотказной работы и функции надежности выражаются через изгибающий момент

$$M = \bar{P} \left\{ \begin{array}{l} |M(x)| \leq M_*; \\ 0 \leq x \leq 1. \end{array} \right.$$

Если ввести набор параметров качества как вектор v , а допустимую область обозначить буквой Ω , то функцию надежности можно определить следующим образом:

$$P = \bar{P} \left\{ \begin{array}{l} v(x) \in \Omega; \\ 0 \leq x \leq l. \end{array} \right.$$

Затем вычисляют вероятность безотказной работы системы. Параметры напряженно-деформированного состояния и качества системы зависят от времени, функция надежности будет зависеть от срока эксплуатации сооружения t :

$$P(t) = \overline{P} \begin{cases} v(x, \tau) \in \Omega; \\ 0 \leq x \leq l, 0 \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Деформации балок и плит большой протяженности на стохастическом основании винклеровского типа. Для решения задач такого типа эффективен метод интегральных спектральных представлений, позволяющий сравнительно просто выявить влияние флуктуаций упругих характеристик основания на средние деформации и напряжения балок и плит.

Рассмотрим уравнение изгиба балки, расположенной на упругом основании винклеровского типа:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cw = q(x),$$

где EI – изгибная жесткость; w – функция прогиба; c – коэффициент упругости основания; $q(x)$ – интенсивность нормальной распределенной нагрузки.

Допустим, что коэффициент упругости представляет собой случайную функцию

$$c = c_0 + \bar{c}(x)$$

с математическим ожиданием $\langle c \rangle = c_0$ и флуктуациями $\bar{c}(x)$. Для однородной (стационарной) случайной функции $\bar{c}(x)$ справедливо интегральное представление

$$\bar{c}(x) = \int C(k) e^{ikx} dk.$$

Случайный спектр C в пространстве волнового числа k удовлетворяет соотношениям Винера–Хинчина:

$$\langle C(k) \rangle = 0; \langle C(k) C^*(k') \rangle = S_c(k) \delta(k - k'),$$

где $S_c(k)$ – спектральная плотность функции $\bar{c}(x)$; $\delta(k - k')$ – дельта-функция Дирака; звездочкой отмечена комплексно-сопряженная величина.

Принято, что интенсивность распределенной нагрузки $q(x)$, так же как и коэффициент c , имеет постоянную и случайную составляющие:

$$q(x) = q_0 + \bar{q}(x) = q_0 + \int Q(k) e^{ikx} dx,$$

где $Q(k)$ – случайный спектр, для которого выполняются соотношения:

$$\langle Q(k) \rangle = 0; \quad \langle Q(k) Q^*(k') \rangle = S_q(k) \delta(k - k').$$

В такой же форме функция прогиба

$$w(x) = w_0 + \bar{w}(x) = w_0 + \int W(k) e^{ikx} dk.$$

Решение А. П. Пшеничкина [37]. Дифференциальное уравнение изотропной плиты на упругом основании с постоянным коэффициентом жесткости:

$$\nabla^2 \nabla^2 W = \frac{\bar{q} - r}{D},$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad r = C_3 W; \quad D = \frac{Eh^3}{2(1-\nu^2)}.$$

Аналитические методы расчета строятся, как правило, на основе вариационного принципа Лагранжа. Равновесному состоянию системы соответствует стационарное значение ее полной энергии, а признаком стационарности является равенство нулю вариации δ_3 , соответствующее произвольным бесконечно малым возможным перемещениям системы.

Потенциальная энергия дифференцирования

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^B \left\{ \left[\nabla^2 E(x, y) \right]^2 + C_3 D W^2(x, y) + 2 \cdot (1 - \nu) \times \right. \\ \left. \times \left[\left(\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right] \right\}.$$

Потенциал воздействий

$$V = \int_0^L \int_0^B \left\{ p(x, y)W(x, y) dx dy + \oint \left[M(s) \frac{\partial W(x, y)}{\partial n} - Q(s)W(x, y) \right] \right\} ds.$$

Граничные условия для плиты со свободными краями при $x = 0$ и $x = L$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + V \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

В основу расчета железобетонных плит во всех стадиях деформирования до исчерпания несущей способности положена теория деформирования железобетона с трещинами, разработанная Н. И. Карпенко (1976). Расчет плит с трещинами сводится к расчету физически нелинейных анизотропных пластин в общем случае анизотропии.

Система физических уравнений, описывающих поведение железобетонных плит с трещинами, имеет вид

$$K_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = B_{11}M_x + B_{12}M_y + B_{13}M_{xy};$$

$$K_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = B_{12}M_x + B_{22}M_y + B_{23}M_{xy};$$

$$K_{xy} = -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = B_{13}M_x + B_{23}M_y + B_{33}M_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q,$$

где K_x, K_y, K_{xy} – кривизны; M_x, M_y, M_{xy} – изгибающие и крутящие моменты; B_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) – жесткостные коэффициенты, значения которых зависят от схемы трещин, армирования, напряженно-деформированного состояния и других физических и геометрических характеристик; $B_{13} > 0$, $B_{23} > 0$ при $M_{xy} > 0$; $B_{13} < 0$, $B_{23} < 0$ при $M_{xy} < 0$.

Разрешающее уравнение анизотропной плиты применительно к методу «стандартной области» имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{B}_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (2\overline{B}_{12} + 4\overline{B}_{33}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 \left(\overline{B}_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B}_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \\ + \overline{B}_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \overline{C}_3 W = q_3(x, y). \end{aligned}$$

Этому уравнению соответствует функционал

$$\begin{aligned} \Xi(W) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \overline{B}_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2\overline{B}_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \overline{B}_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 4\overline{B}_{33} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left[\overline{B}_{13} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \overline{B}_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right\} dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{C}_3 W^2 dx dy - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_3(x, y) W dx dy, \end{aligned}$$

где $\overline{B}_{ik} = \theta B_{ik}$, θ – характеристическая функция, определяющая конфигурацию области плиты.

$$\theta_{(x,y)} = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega; \quad y \in \Omega \\ 0 & \text{при } x, y \notin \Omega \end{cases} \quad \text{или} \quad \theta_{(x,y)} = \begin{cases} 1 & \text{при } P(x, y) > 0; \\ 0 & \text{при } P(x, y) < 0, \end{cases}$$

$P(x, y) = 0$ – уравнение линии границы плиты.

Моменты и поперечные силы в плите определяются формулами:

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(\overline{B}_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B}_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\overline{B}_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right); \\ M_y &= - \left(\overline{B}_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B}_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\overline{B}_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right); \\ M_{xy} &= - \left(\overline{B}_{13} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \overline{B}_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2\overline{B}_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right); \\ Q_x &= - \left[\overline{B}_{11} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3\overline{B}_{13} \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + (\overline{B}_{12} + 2\overline{B}_{33}) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + \overline{B}_{23} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right]; \end{aligned}$$

$$Q_y = - \left[\bar{B}_{13} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3\bar{B}_{23} \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} + (\bar{B}_{12} + 2\bar{B}_{33}) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} + \bar{B}_{22} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} \right],$$

где $\bar{B}_{11} = \bar{B}_{22} = D$, $\bar{B}_{12} = \bar{B}_{21} = \nu D$, $\bar{B}_{23} = \frac{D(1-\nu)}{2}$, $\bar{B}_{13} = \bar{B}_{23} = \bar{B}_{32} = \bar{B}_{31} = 0$, D – цилиндрическая жесткость.

Для плит со свободными краями вариация функционала $\bar{\Delta} = U + V$ удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению и граничным условиям.

Решение численными методами. Функции, входящие в вышеприведенные уравнения, заменяют сеточными, производные – конечными разностями. Составляется процедура вычисления общего разностного выражения от произвольно заданной функции для любого узла сетки. Вычисляются коэффициенты разрушающей системы линейных уравнений при подстановке единичных функций. Составляется стандартная процедура формирования и решения линейных уравнений. Задают характеристическую функцию оператора $\chi(i_1, i_2)$ по принципу

$$\chi(i_1, i_2) = \begin{cases} 0, & \text{если пригиб в узле сетки } (i_1, i_2) \text{ задан,} \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где i_1, i_2 – координаты угла разностной сетки.

При решении применяется шагово-итерационный метод, шаги назначают по осадке $\bar{S}_0(t)$ и по нагрузке. На первом шаге принимают нагрузку $q_3(x, y)$ при работе плиты без трещин. Расчет производят для различных моментов времени t_i (шаги по осадке).

Для кривой итерации следующего шага нагрузки по упругому полю жесткостей вычисляют поле моментов (\bar{M}_n) и поле прогибов. Анализируются условия трещинообразования в точках и вычисляется новое поле жесткостных коэффициентов в зависимости от установленной стадии работы плиты. По первому полю жесткостей вновь определяют поле прогибов и моментов на следующей итерации (\bar{M}_{n+1}). Если \bar{M}_{n+1} отличается от \bar{M}_n на величину, превышающую заданную точность, то переходят к следующей итерации. При этом матрицу жесткостей \bar{B}_{n+1} вычисляют по полусумме решений \bar{M}_n и \bar{M}_{n+1} . Процесс считают сошедшимся, если прогибы на очередных итерациях отличаются во всех точках не более чем на 3%.

Полное перемещение плиты

$$W_{(x,y,t)} = \bar{q}/C_3(t) + \bar{W}_{(x,y,t)} + \tilde{W}_{(x,y,t)},$$

где $C_3(t)$ – эквивалент коэффициента жесткости; $\tilde{W}_{(x,y,t)}$ – случайное перемещение.

Метод П. К. Семенова [46]. Предложен расчет нелинейно-упругих плит, взаимодействующих с нелинейным неоднородным основанием. Функция осадки принята в соответствии с работой [11] в виде

$$\omega(x, y, z) = W(x, y)\psi(z).$$

Введена функция $B(x, y, z)$ распределения влажности в основании. Полагают, что прогибы плиты малы по сравнению с ее толщиной, а материал плиты несжимаем и является нелинейно-упругим. Совокупность компонентных геометрических и статических уравнений порождает вместе с граничными условиями нелинейное уравнение.

Для линеаризации использован метод последовательных нагружений, который сводится к построению дифференциала Фреше.

Линеаризованное дифференциальное уравнение в частных производных относительно приращения функции прогиба срединной плоскости плиты $\Delta W_{(x,y)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla_A^4 \Delta W_{(x,y)} = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[A_1 \left(\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} A_3 \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x \partial y} + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[A_2 \left(\frac{\partial^2 \Delta W}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Delta W}{\partial x^2} \right) \right] = \Delta q(x, y). \end{aligned}$$

Закон деформирования принят в виде

$$\sigma_i(\varepsilon_i) = E\varepsilon_i - m\varepsilon_i^3.$$

Уравнение прогиба нелинейно-упругой плиты на нелинейном неоднородном основании имеет вид

$$\nabla_A^4 \Delta W = \Delta p - \Delta q$$

или

$$\nabla_A^4 \Delta W_{(x,y)} - a_{(x,y)} \nabla^2 \Delta W + c_{(x,y)} \Delta W = A_{p(x,y)} + \left[\frac{\partial a}{\partial B} \nabla^2 W - \frac{\partial c}{\partial B} W \right] \Delta B = 0.$$

Это уравнение может быть использовано для различных схем нагружения.

Метод А. А. Мустафаева [32]. Фундаменты на просадочных грунтах I типа. Решение базируется на гипотезе Фусс–Винклера

$$p(x) = bk_s y(x),$$

где b – ширина соприкасающейся с грунтом конструкции; k_s – коэффициент пропорциональности (постели).

В решении используется переменный коэффициент жесткости

$$k(x) = p(x)/s(x),$$

где $s(x)$ – возможная осадка поверхности грунта в пределах плана здания от действия удельного давления.

Обобщенной моделью Фусса–Винклера является модель С. А. Ривкина

$$k(x) = k \{ 1 + \beta \exp[-a(1 - |x/l|)] \},$$

где k – расчетный параметр, измеряемый так же как и коэффициент постели, характеризующий сопротивление грунта осадке без учета краевого эффекта; β и a – безразмерные параметры, учитывающие влияние краевого эффекта на величину и распределение реактивных давлений по подошве балки.

По предложению А. А. Мустафаева и М. А. Абдуллаева (1974)

$$k(x) = k(1 + \beta) - \frac{2k\beta}{l}(1 - e^{-a})x + \frac{k\beta}{l^2}(1 - e^{-a})x^2.$$

Закономерности изменения жесткости увлажняемых просадочных грунтов. На рисунке 3.32 приведена условная расчетная схема влияния замачивания.

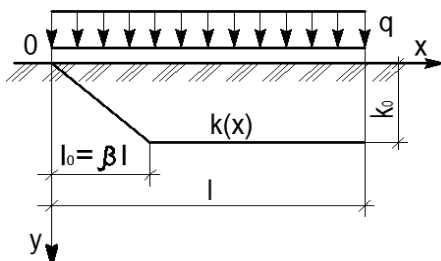


Рис. 3.32. Изменения жесткости основания

Формулы изменения коэффициента жесткости основания имеют вид:
при $0 \leq x \leq \beta l$

$$k(x) = k_0 x / (\beta l) ;$$

при $\beta l \leq x \leq l$

$$k(x) = k_0 .$$

По предложению Б. А. Косицина

$$k_0 = P(\sum -A_i) / (\sum s_i A_i) ,$$

где P – приведенная нагрузка на основание на 1 м длины; A_i – площадь фундамента i -й стены; s_i – осадка i -го фундамента от приходящейся на него нагрузки.

Соболев Д. Н. принимает изменения жесткости основания по кососимметричному относительно середины здания закону (рис. 3.33)

$$k(\eta) = \frac{k_0(1+\alpha)}{2} + \frac{k_0(\alpha-1)}{4}(\eta^3 - 3\eta) ,$$

где k_0 – расчетный коэффициент пропорциональности:

$$k_0 = k_1 b_{\Phi}^{\text{пр}} ,$$

(k_1 – коэффициент пропорциональности; $b_{\Phi}^{\text{пр}}$ – приведенная ширина фундамента); α – коэффициент, характеризующий неоднородность основания по длине здания, определяемый по результатам статистической обработки данных натурных замеров изменчивости модулей деформации грунта и наблюдений за осадками построенных зданий; $\eta = x/l$.

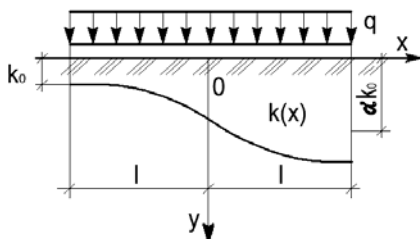


Рис. 3.33. Изменение жесткости основания по Д. Н. Соболеву

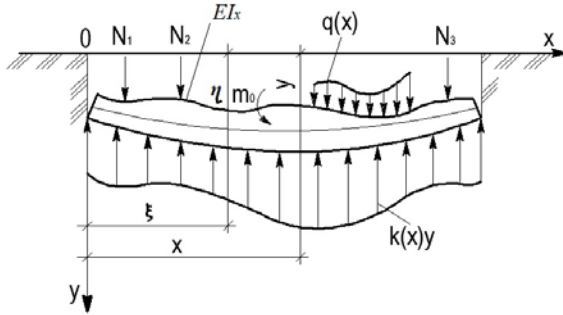


Рис. 3.34. Расчетная схема по методу упругих деформаций

Дифференциальное уравнение поперечного изгиба ленточных фундаментов. Рассматриваются ленточный фундамент переменного по длине поперечного сечения (рис. 3.34).

Фундамент по длине поперечного сечения несет поперечную нагрузку $q(x)$, сосредоточенные силы N_i , пары сил с моментом m_i , действующие в вертикальной плоскости симметрии конструкции. Изгибная жесткость EI_x может быть как непрерывной по всей длине фундамента, так и кусочно-непрерывной. Фундамент может быть и полосой, выделенной из балочной плиты, работающей в условиях плоской деформации с цилиндрической жесткостью

$$D(x) = EI_n(x) / (1 - \mu_0^2).$$

Коэффициент жесткости принят переменным по длине фундамента. Изгибающий момент в любом сечении фундамента на расстоянии x от левого конца балки

$$M(x) = \bar{M} + \int_0^x k(\xi) \eta (x - \xi) d\xi,$$

где \bar{M} – изгибающий момент от внешних поперечных нагрузок.

Поперечная сила и интенсивность нагрузки равны:

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \bar{Q} + \int_0^x k(\xi) \eta d\xi;$$

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) + k(x)y,$$

где \bar{Q} – перерезывающая сила от внешней поперечной нагрузки $q(x)$.

Уравнение изогнутой оси фундамента

$$EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x),$$

отсюда

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + k(x)y = q(x). \quad (3.1)$$

Построение общего решения задачи. Используют метод последовательных приближений. Краевые условия:

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = \theta_0; \\ [EI(x)y''(x)]_{x=0} = -M_0; \quad [EI(x)y'''(x)]_{x=0} = -Q_0.$$

Уравнение (3.1) представлено в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] = -k(x)y(x) + q(x).$$

После интегрирования этого уравнения в пределах от 0 до x получено следующее выражение для перерезывающих сил:

$$\frac{d}{dx} \left[EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] = -Q(x) = \int_0^x q^A(x_1) dx_1 - \int_0^x k(x_1)y(x_1) dx_1 - Q_0.$$

Проинтегрировав это уравнение в тех же пределах, получено

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)} = -\frac{1}{EI(x)} \int_0^x Q(x_1) dx_1 = \\ = \frac{1}{EI(x)} \int_0^x \int_0^{x_1} q(x_2) dx_2 dx_1 - \frac{1}{EI(x)} \int_0^x \int_0^{x_1} k(x_2)y(x_2) dx_2 dx_1 - Q_0 \frac{x}{EI(x)} - \frac{M_0}{EI(x)}.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до x , получено выражение для угла поворота фундамента.

Уравнение деформированной оси фундамента представлено в виде

$$y(x) = \overline{y_0(x)} - \int_0^x \int_0^{x_1} \frac{dx_2 dx_1}{EI(x_2)} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} k(x_4)y(x_4) dx_4 dx_3.$$

Функция $\bar{y}_0(x)$ – кривая, содержащая четыре начальных параметра y_0, θ_0, M_0, Q_0 . Два из них всегда равны нулю. Так, для фундамента со свободным левым концом $M_0 = Q_0 = 0$, для закрепленных $y_0 = \theta_0 = 0$, для опертых $y_0 = M_0 = 0$.

Фундаменты на набухающих грунтах [32]. Набухание происходит при уменьшении давления на глинистый грунт или увеличении влажности. Оно носит сложный физико-механический характер. Величина объемной деформации зависит от свойств грунта, исходной влажности и от приложенного давления.

По СНиП подъем основания фундаментов от набухания грунта

$$h_{sw} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{sw,i} h_i k_{sw,i}$$

где h_i – толщина i -го слоя грунта; $k_{sw,i}$ – коэффициент условий работы; $\varepsilon_{sw,i}$ – относительное набухание i -го слоя грунта.

Задача проектирования сводится к прогнозированию деформирования поверхности основания. При неравномерном подъеме грунта возникают дополнительные усилия в гибких фундаментах и в надфундаментных конструкциях. Наибольшую опасность представляет куполообразный подъем грунта (рис. 3.35).

При разработке методов расчета исходят (Р. Литтон) из двухпараметрической модели П. Л. Пастернака, В. З. Власова, Н. Н. Леонтьева (рис. 3.36).

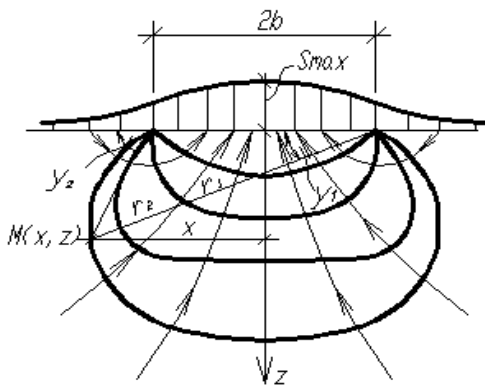


Рис. 3.35. Подъем поверхности набухающего массива вследствие экранирования и местного увлажнения

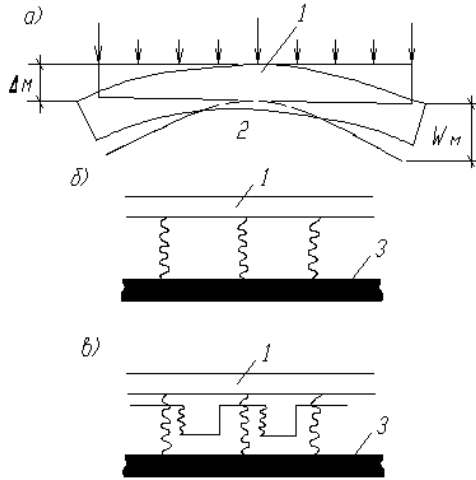


Рис. 3.36. Расчетные модели набухающего грунта:

a – балка на бугре; *б* – модель Винклера;
в – двухпараметрическая модель основания;
 1 – балка; 2 – бугор; 3 – жесткое основание

Литтон Р. принял допущение о линейной деформируемости грунтов основания. Коэффициент жесткости основания K , конструкций фундамента EI и D , нагрузка q постоянны по длине фундамента. Коэффициент c определяется по формуле работы [32]. Рассмотрим два характерных случая набухания (рис. 3.37).

Схема деформирования основания показана на рис. 3.38.

Поверхность деформирования основания при набухании принята по данным экспериментов:

$$S = c(x - a)^m. \quad (3.2)$$

Реактивное давление

$$p(x) = k[y(x) - S(x)] = ky(x) = kc(x - a)^m,$$

где $S(x)$ – ордината траектории набухания в данной точке основания; $y(x)$ – прогиб фундамента в этой точке.

При $a = 0$ очаг набухания расположен под левым сечением фундамента; при $a = l$ – под правым; при $a = 0,5l$ – под серединой. Последний член уравнения представляет собой эквивалентную нагрузку, учитывающую воздействие на фундамент неравномерной деформации набухания (рис. 3.39).

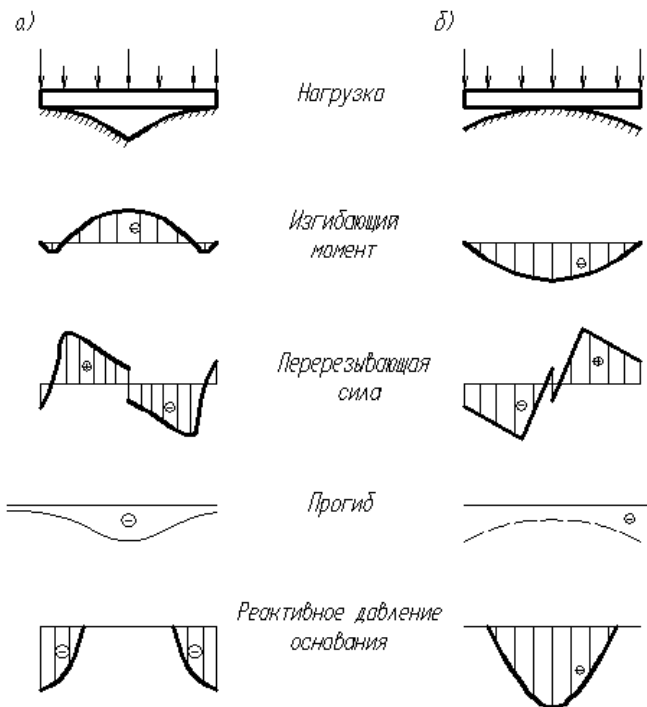


Рис. 3.37. Эпюры изгибающих моментов, перерезывающих сил, прогиба и реактивного давления основания для двух характерных случаев набухания грунта: a – вспучивание по краям; b – то же в центре

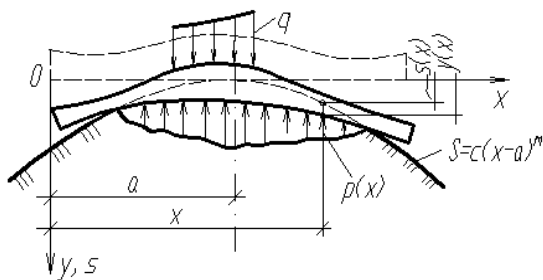


Рис. 3.38. Характер поведения ленточного фундамента, расположенного на бугре набухания грунтов основания

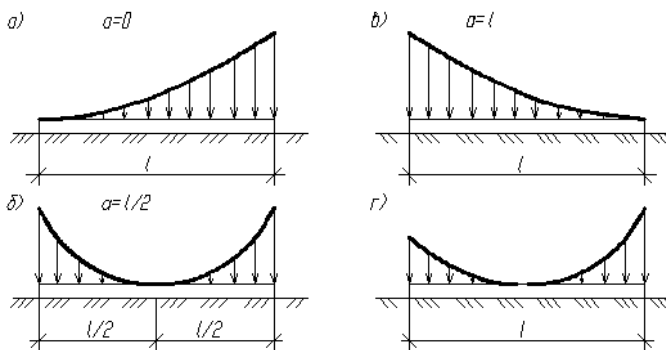


Рис. 3.39. Эпюры эквивалентного давления для различных случаев расположения «бугра» набухания под подошвой фундамента

Ленточный фундамент рассматривается как гибкая балка с переменной по длине изгибной жесткостью $EI(x)$ – непрерывной или кусочно-непрерывной.

Цилиндрическая жесткость фундамента

$$D(x) = \frac{EI(x)}{1 - \nu_0^2},$$

где $I(x)$ – переменный момент инерции поперечного сечения.

Расчет балочных фундаментов с переменной жесткостью на набухающих грунтах сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right] + k(x)b(y - S) = q(x), \quad (3.3)$$

где $EI(x)$ – переменная по длине изгибная жесткость фундамента; y – прогиб фундамента; $k(x)$ – коэффициент упругости основания (коэффициент постели); b – ширина фундамента; S – ордината траектории деформирования поверхности основания; $q(x)$ – внешняя нагрузка на фундамент.

Это уравнение с учетом (*) можно записать в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right] + k(x)by(x) = q(x) + k(x)bc(x - a)^m.$$

Неравномерную деформацию глинистых грунтов основания в процессе набухания заменяют действием на фундамент эквивалентной нагрузки $p(x) = k(x)bc(x - a)^m$.

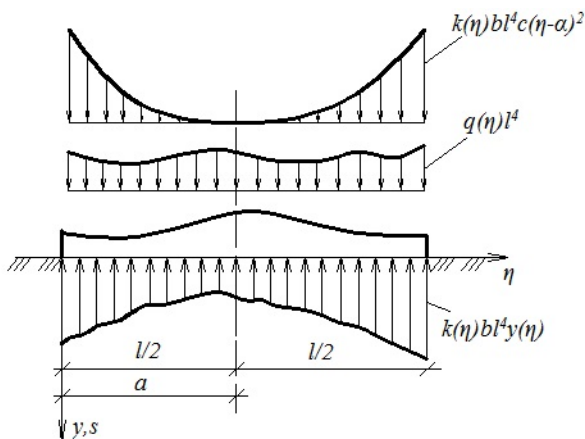


Рис. 3.40. Эквивалентная расчетная схема балочного фундамента на набухающих грунтах

При $\eta = x/l$

$$p(\eta) = k(\eta)bc l^{4+m}(\eta - \alpha)^m,$$

где $\alpha = a/l$.

Рассматривают задачу об изгибе балочного фундамента, нагруженного эквивалентной нагрузкой, изменяющейся в соответствии с формой поверхности грунта при набухании на недеформируемом основании (рис. 3.40).

Наибольшие усилия возникают при деформировании основания по траектории квадратной параболы ($m = 2$). Эквивалентная нагрузка принимает вид $p(\eta) = k(\eta)bc l^6(\eta - \alpha)^2$.

Метод В. И. Соломина и С. Б. Шматкова [51]. Расчет фундаментных балок. Физические уравнения. До образования трещин конструкции рассматриваются как линейно-упругие. После образования трещин (нарушение сплошности) расчет производится методом, основанным на приведении железобетонного элемента с трещинами эквивалентному ему по жесткости сплошному сечению.

Физические уравнения балки записываются в виде

$$\chi = M/B,$$

где M – изгибающий момент; B – жесткость при изгибе $\text{tg}\beta = M/\chi = B$, β – угол наклона секущей к оси кривизны, $\chi = -d^2w/dx^2$ – кривизна.

При $M < M_{cre}$ эту зависимость принимают линейной. Для $M = M_{cre}$ кривизна элемента возрастет скачком, т.е. есть разрывная функция изгибающего момента.

В предельной стадии

$$\chi = M_u / B.$$

Метод упругих решений. Для физически линейных задач применяют методы упругих решений: переменных параметров упругости, дополнительных нагрузок и дополнительных деформаций.

Авторы работы [52] использовали метод конечных разностей и вариационно-разностный метод.

Систему уравнений метода перемещений параметров упругости представляют в виде

$$[k^{(k-1)}] \{w^{(k)}\} = \{f\},$$

где $\{w^{(k)}\}$ – вектор неизвестных перемещений; $\{f\}$ – вектор, компоненты которого характеризуют внешние воздействия; $[k^{(k-1)}][R^{(k-1)}] + [H]$ – матрица жесткости системы фундаментные конструкции – основания; $[R^{(k-1)}]$ и $[H]$ – матрицы жесткости конструкции и основания;

$$H_{ij} = C_{ij} \Delta_i,$$

C_{ij} – компоненты матрицы единичных реакций $[C]$;

$$f_i = q_i \Delta_i.$$

Оссимметричная деформация фундаментных конструкций. Физические уравнения плиты. Параметры уравнения Н. И. Карпенко [19]:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D_r \chi_r + D_{r\varphi} \chi_\varphi, \\ M_\varphi &= D_{r\varphi} \chi_r + D_\varphi \chi_\varphi, \end{aligned} \right\}$$

где M_r, M_φ – радиальный и окружной изгибающие моменты; χ_r, χ_φ – радиальная и окружная кривизны; $D_r, D_\varphi, D_{r\varphi}$ – жесткости.

Учтено влияние ползучести бетона. В основу положена линейная наследственная теория старения Г. Н. Маслова, Н. Х. Арутюняна в виде

$$\delta(t, \tau) = 1 / E(\tau) + C(t, \tau),$$

где $\delta(t, \tau)$ – полная относительная деформация в момент t , вызванная напряжением $\delta = 1$, действующим в момент времени τ .

Интегральное уравнение определяется выражением

$$\varepsilon(t) = \delta(t) / E(t) - \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \partial \delta(t, \tau) / \partial \tau d\tau.$$

Расчет круглых и кольцевых плит. Задачу решают методом переменных параметров упругости. Геометрические уравнения приняты для тонких плитин:

$$\chi_r = -d^2 w / dz^2; \quad \chi_z = -(1/z) dw / dz,$$

где w – вертикальное перемещение срединной плоскости плиты (положительных направлений вниз).

Потенциальная энергия деформации плиты

$$V = 0,5 \int_{A_p} (M_r \chi_r + M_\varphi \chi_\varphi) dA_p,$$

где A_p – площадь срединной плоскости плиты.

Работа внешних сил

$$U = \int q w dA_p,$$

где q – интенсивность вертикальной нагрузки.

Для стадии без трещин физические уравнения приняты линейными:

$$M_r = D_M (\chi_r + \nu_B \chi_\varphi);$$

$$M_\varphi = D_M (\nu_B \chi_r + \chi_\varphi);$$

$$N_r = D_N (\varepsilon_r + \nu_B \varepsilon_\varphi);$$

$$N_\varphi = D_N (\nu_B \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi),$$

где $M_r, M_\varphi, N_r, N_\varphi$ – изгибающие моменты и нормальные силы в меридиональном и окружном направлении; $\chi_r, \chi_\varphi, \varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$ – приращения кривизны и деформации срединной поверхности; D_M, D_N – жесткости при растяжении и растяжении-сжатии.

Прямоугольные плиты. Уравнение кривизны при малых прогибах.

$$\chi_x = -\partial^2 w / \partial x^2; \quad \chi_y = -\partial^2 w / \partial y^2;$$

$$\chi_{xy} = -\partial^2 w / \partial x \partial y,$$

где w – вертикальные перемещения срединной плоскости.

Задачу решают шагово-итерационным методом. Потенциальную энергию деформации плиты V , работу реакций основания V_q и работу внешних сил записывают в виде

$$V = 0,5 \int_{A_p} (M_x \chi_x + M_y \chi_y + 2M_{xy} \chi_{xy}) dA_p;$$

$$V_q = 0,5 \int_{A_p} p w dA_p; \quad U = - \int_{A_p} q w dA_p,$$

где A_p – площадь плиты; p – интенсивность реактивных давлений; q – интенсивность нагрузки.

Влияние жесткости верхнего строения на работу фундаментных плит. Рассматривают расчет силосных корпусов для абсолютно жесткого и податливого верхнего строения.

Полная потенциальная энергия системы фундаментальная плита–основание–верхнее строение включает

$$\Pi = V + V_q + V_{col} + U + U_{sup},$$

где V – потенциальная энергия деформации фундаментной плиты; V_q – работа реакции основания; V_{col} – потенциальная энергия деформации колонн; U – работа внешних сил.

При податливом верхнем строении производят замену верхнего строения линейно-упругой плитой, толщина которой определяется из условий эквивалентной жесткости верхнего строения и плиты.

Расчет плиты с учетом нелинейных деформаций грунта. Использована деформационная теория пластичности изотропного тела. Физические уравнения являются соотношениями между инвариантами тензоров напряжений и деформаций.

Для аппроксимации закона формоизменения песка (А. И. Боткин) принята дробно-линейная зависимость

$$\tau_i / \sigma_m = A \gamma_i / (B + \gamma_i),$$

где τ_i – интенсивность касательных напряжений; γ_i – интенсивность деформаций сдвига; A, B – постоянные параметры; $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ – среднее напряжение.

Для связанных грунтов

$$\tau_i / \sigma_m + \sigma_0 = A \gamma_i / (B + \gamma_i); \quad \tau_{iu} = A(\sigma_m + \sigma_0),$$

где σ_0 – всестороннее давление, эквивалентное сцеплению грунта.

**Дополнительные сведения по расчету,
конструированию и мониторингу зданий башенного типа.
Конструктивные требования к армированию
плитных фундаментов [40]**

При проектировании фундаментов принимают, как правило, бетон класса В15 – В25, рабочую арматуру периодического профиля класса А400, в случае необходимости ограничения раскрытия трещин – периодическую класса А300. Монтажную, распределительную, а также конструктивную арматуру принимают гладкую класса А240.

Для армирования следует применять унифицированные арматурные изделия. Отдельные стержни рекомендуется применять только в качестве дополнительного армирования или при невозможности или нерациональности применения сварных сеток и каркасов.

Сечения железобетонных плитных фундаментов следует назначать из расчета по действующим усилиям и соответствующим группам предельных состояний с учетом экономических требований, необходимости унификации опалубки, арматурных изделий и принятой технологии производства работ.

Принятые сечения должны обеспечивать правильность расположения арматуры в сечении, защитные слои и анкеровку арматуры.

Способ армирования следует выбирать на основе технико-экономического сравнения в зависимости от величины и характера распределения усилий в плитном фундаменте, его размеров, способа транспортирования и монтажа арматурных изделий и условий производства работ.

Армирование фундаментных плит следует производить в двух зонах: нижней и верхней. Каждая зона должна иметь рабочую арматуру в двух направлениях.

Шаг арматуры верхней зоны следует принимать не менее 200 мм, нижней – допускается уменьшать до 100 мм.

Минимальные проценты коэффициента армирования для бетона В15–0,1; В25–0,15.

Минимальная толщина плиты назначается исходя из прочности наклонных сечений (без постановки поперечной арматуры).

Расположение арматуры в плане фундамента должно назначаться в соответствии с огибающими эпюрами изгибающих моментов, построенными в направлении длины и ширины плитного фундамента.

Армирование обеих направлений верхней и нижней зон рекомендуется расчленять на основное непрерывное и дополнительное локальное.

Стык сеток в рабочем направлении должен осуществляться внахлестку. Площадь рабочей арматуры, стыкуемой в одном сечении, не должна превышать для арматуры периодического профиля – 50%.

Обеспечение проектного положения арматуры верхней зоны рекомендуется осуществлять:

– при толщине фундамента до 100 мм – с помощью специальных поддерживающих конструкций, выполненных из прокатных профилей.

При обычных монтажных нагрузках шаг поддерживающих каркасов принимают:

при диаметре рабочих стержней до 16 мм – 1000 мм;

при $\varnothing 18 \dots 25$ мм – 2000 мм;

при $\varnothing > 25$ мм – 3000 мм.

При значительных динамических нагрузках (аэродромные и дорожные покрытия) все чаще применяют фибробетон. Для изготовления фибр используют сталь, углерод, полиолефин, полиэтиловый полипропилен, вомастонит, базальт, ПВА, стекло.

Плиты для сложных условий строительства и эксплуатации

Здания на слабых водонасыщенных глинистых грунтах. Башенные здания все чаще возводят в разных инженерно-геологических условиях на свайных или (более предпочтительно) плитных фундаментах. В работе [56] отмечается, что большим осадкам плитных фундаментов сопутствует большая их неравномерность. Причинами этого являются: невыдержанное залегание грунтов, промораживание основания плиты, эксцентричность нагрузки, разброс показателей сжимаемости в пределах одного инженерно-геологического элемента.

По результатам наблюдений за двумя зданиями предлагают:

– в качестве предельного крена принимают минимальную из двух величин $i_u = 0,003$ или $i_u = 0,15/H$ (0,15 – предельное отклонение шахты лифта от вертикали, м; H – высота шахты лифта, м);

– предельную среднюю осадку – $s_u = 2Bi_u$ (B – минимальный размер плиты в плане, м).

Здания вблизи откосов и склонов. В ряде случаев здания возводят вблизи склонов, откосов, выемок, засыпанных оврагов, ручьев и др. В работе [8] приведен метод расчета фундаментных балок с использованием решения Б. Н. Жемочкина и модели грунтового основания в виде упругого пространственного клина со свободными гранями. Сцепление балки с основанием не учитывается. Контактная поверхность разбивается по длине на n и по ширине на m равных участков. В середине каждого участка помещаются абсолютно жесткие стержни. Через них нагрузка передается на основание. Неизвестными являются

усилия в стержнях X_k ($k = 1, 2, \dots, \text{min}$), осадка V_0 и условные перемещения θ_{ox} и θ_{oy} .

Их определяют из решения системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \delta_{1.1}X_1 + \delta_{1.2}X_2 + \dots + \delta_{1.mn}X_{mn} - y_1\theta_{ox} - x_1\theta_{oy} - V_0 + \Delta_{1.R} &= 0; \\ \delta_{2.1}X_1 + \delta_{2.2}X_2 + \dots + \delta_{2.mn}X_{mn} - y_2\theta_{ox} - x_2\theta_{oy} - V_0 + \Delta_{2.R} &= 0; \\ \delta_{mn.1}X_1 + \delta_{mn.2}X_2 + \dots + \delta_{mn.mn}X_{mn} - y_{mn}\theta_{ox} - x_{mn}\theta_{oy} - V_0 + \Delta_{mn.R} &= 0; \\ x_1X_1 + x_2X_2 + \dots + x_{mn}X_{mn} - M_x &= 0; \\ y_1X_1 + y_2X_2 + \dots + y_{mn}X_{mn} - M_y &= 0, \end{aligned}$$

где R – равнодействующая внешней нагрузки; M_x, M_y – моменты равнодействующей внешней нагрузки относительно осей $O'X$ и $O'Y$; x_R – координаты k -й точки в системе $XO'Y$;

$$\delta_{k,i} = \omega_{k,i} + v_{k,i};$$

$\omega_{k,i}$ – перемещение в основной системе точки приложения $k = 1$ от действия $X_i = 1$; $v_{k,i}$ – перемещение точки к грани упругого клина от действия равномерно распределенной по прямоугольнику с центром в точке i единичной нагрузки;

$$\omega_{k,i} = \int \frac{M_k^y M_i^y}{EJ} dx + \int \frac{M_k^x M_i^x}{EJ_{кр}} dx,$$

M_k^x, M_k^y – уравнения эпюр изгибающих моментов относительно осей координат $O'X$ и $O'Y$ от действия единичной сосредоточенной силы в точке k ; M_i^x, M_i^y – то же в точке i ; $J, J_{кр}$ – моменты инерции сечения балки на изгиб и кручение.

Приведите результаты расчета для абсолютно жесткой балки и балки конечной жесткости.

Барвашов В. А. проанализировал [5] метод расчета осадок фундаментов с использованием модели сжимаемой толщи линейно-деформируемого полупространства. Рассмотрено влияние уровня подземных вод на осадку фундаментов, изменение этого уровня, например, вследствие откачек. Он считает, что нагрузка от фундамента и изменение УГВ это независимые силовые воздействия на основание.

Проблема расчета бесконечных и полубесконечных плит на основании с карстовыми полостями рассмотрена Е. Б. Кореновой [24], с учетом высокого уровня грунтовых вод В. А. Барвашовым [5], в случае провала грунта Г. Л. Постоевым [36], на упрочненных искусственных основаниях В. А. Сабуренковой [42].

Совершенствование метода расчета балок на упругом основании

Приведен метод расчета длинных балок, нагруженных сосредоточенными моментами. Автором работы [14] вычислены безразмерные моменты и поперечные силы для длинной балки. В основу положены таблицы М. И. Горбунова-Посадова для балок, нагруженных сосредоточенной силой.

Сосредоточенный момент $m = Pd\Delta$ при $d\Delta \rightarrow 0$ (рис. 3.41). Расчетные формулы имеют вид:

$$\bar{p}_m(\xi) = -\frac{d\bar{p}_p}{d\xi}; \quad \bar{Q}_m(\xi) = \frac{d\bar{Q}_p}{d\xi} = -\bar{p}_p; \quad \bar{M}_m(\xi) = -\frac{d\bar{M}_p}{d\xi} = -\bar{Q}_p,$$

где p – индексы для сосредоточенных сил; m – сосредоточенного момента; \bar{p} – безразмерные величины реактивных давлений; \bar{Q} – то же поперечных сил; \bar{M} – то же изгибающих моментов.

Получены решения и для полубесконечных балок, в том числе для упругого слоя.

Рассмотрим случай, когда жесткость балки и основания симметричны относительно середины балки. Нагрузку предполагается разложить на симметричную и кососимметричную, а задачу решать методом сил. При этом число неизвестных на два меньше, чем при решении Б. Н. Жемочкина смешанным методом. Автор предлагает в пределах каждого участка принимать не прямоугольную, как у Б. Н. Жемочкина, а трапециевидальную эпюру реактивных давлений.

Шматков С. Б. и Крейлис В. предложили [60] для расчетов плит с трещинами использовать расчетную модель, в которой основания деформируются линейно, а плита – нелинейно. Нелинейные деформации грунта могут не учитываться при $p_m \leq R$.

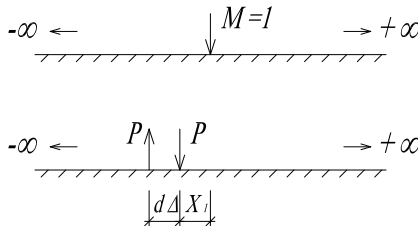


Рис. 3.41. К расчету бесконечно длинной балки

Заключение сделано на основе полевых испытаний трех круглых фундаментных железобетонных плит диаметром 1,6 м толщиной 12, 15 и 13 см. Арматура класса А-600 с шагом 100 мм. Нагрузку прикладывали через площадку диаметром 16 см. Измеряли реактивные давления, деформации арматуры, вертикальные перемещения отдельных точек плиты. Для описания нелинейного поведения железобетона использовали теорию Н. Н. Карпенко.

Шашкин А. Г. [58] предлагает вязко-упругопластическую модель расчета деформаций основания, сложенных пылевато-глинистыми грунтами. Такая модель отвечает основным представлениям физико-химической механики.

Предлагают раздельное описание деформаций уплотнения в зависимости от объемных напряжений и деформаций формоизменения в зависимости от девиатора напряжений. Обе составляющие деформаций рассматриваются в развитии во времени. Общая вертикальная деформация складывается из упругой и пластической составляющих.

Лушников В. В. предлагает [30] определять деформационные характеристики элювиальных грунтов по результатам измерений деформаций зданий. Исследовано взаимное влияние фундаментов.

Рассмотрены проблемы расчета балок и плит на упругом основании. Обоснована необходимость научно-технического сопровождения возведения объекта на стадии проекта. В проектное решение закладывают некоторый риск, например, понижая коэффициенты надежности и, наоборот, повышая их по условиям работы.

Карпенко Н. И. и Карпенко С. Н. разработали [18] общую методику расчета железобетонных плит на продавливание. Рассмотрены случаи, когда действует продавливающая сила и моменты в одном или двух направлениях. Расчет по прочности производят по условию, представляющему некоторую модификацию условия Кулона–Мора.

Вопросы нелинейного расчета плит и балок изложены в работах [6, 13, 17, 19, 20, 31, 37, 43, 45, 56...58].

Учет совместной работы надземной и подземной частей зданий

Расчет несущей системы здания производили методом конечных элементов в пространственной постановке с использованием пространственного комплекса «Ind+2006» и входящей в него программы «Micro 2006» (Т. А. Мухамедиев, А. С. Махю, Б.Ж.Б., 2007. – № 6. – С. 2–3).

Исследовано влияние способа моделирования основания на усилия несущих конструкций. Рассмотрим две расчетные схемы основа-

ния: в виде массива под всем зданием и за его пределом и в виде упругого основания Пастернака с учетом работы законтурных элементов основания. Толщину массива грунта под зданием принимаем по результатам оценки сжимаемой толщи на основании расчетных моделей линейно-деформируемого полупространства и линейно-деформируемого слоя. Рассмотрен вариант и абсолютно-жесткого основания. Приняты объемные конечные элементы массива грунта. Величину коэффициента постели основания как упругой модели Пастернака определяли с использованием данных по мониторингу осадки здания.

Показано, что учет податливости основания приводит к появлению значительных усилий в отдельных несущих конструкциях. Наибольшие осадки и усилия получены при учете массива с большей глубиной сжимаемой толщи, определенной по модели линейно деформируемого полупространства. Неравномерное деформирование фундаментной плиты вызывает появление значительных изгибающих моментов в узлах сопряжения колонн с фундаментной плитой.

Мониторинг строительства и эксплуатации

Мониторинг – систематическое и(или) периодическое наблюдение за процессом строительства, деформациями конструкций, частей здания или здания в целом, а также за состоянием грунтов, оснований и окружающей застройки в зоне строительства, своевременная фиксация и оценка отступлений от проекта, нормативных документов, прогнозирование взаимного влияния объекта и окружающей среды.

Мониторинг эксплуатируемых зданий представляет собой комплексную систему, предназначенную для обеспечения надежности зданий и сооружений, находящихся в зоне влияния вновь строящихся объектов, и сохранения окружающей среды.

Он является составной частью научно-технического сопровождения нового строительства или реконструкции объекта. По функциональному назначению мониторинг состоит из следующих подразделов: объектного, включающего все виды наблюдений за состоянием объекта; геолого-гидрологического, включающего все виды наблюдений за состоянием объекта; геолого-гидрологического, включающего системы наблюдений за уровнем и составом подземных вод, за развитием деструктивных процессов; эколого-биологического, изучающего возможные изменения природной среды; аналитического, включающего анализ и оценку результатов наблюдений, выполнения расчетных прогнозов, оценку критериев эксплуатационных требований.

Эта проблема рассматривалась в работах [11, 37, 46].

Пример расчета и конструирования железобетонных плитных фундаментов (расчеты выполнил А. В. Худяков)

Требуется рассчитать днище прямоугольного заглубленного монолитного резервуара размером в плане 18×48 м, высотой 8 м. Резервуар разделен стеной толщиной 0,5 м на два отсека. Толщина наружных стен 0,6 м, днища – 0,8 м. На рисунке 3.41 приведена схема приложения усилий, действующих в стене от бокового давления грунта и жидкости. Усилия определялись для консольной балки высотой 8 м и шириной 1 м и здесь приведен итоговый результат (рис. 3.41).

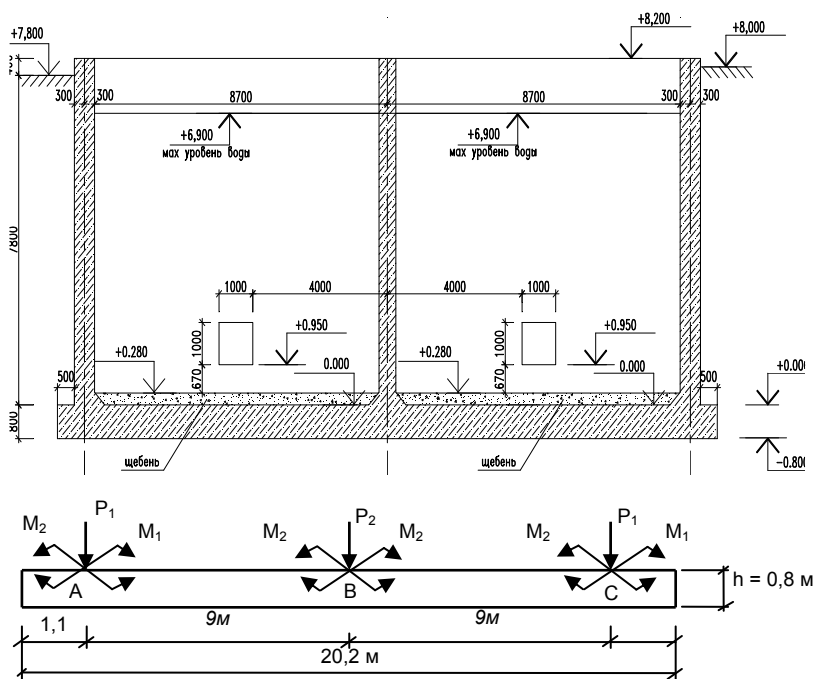


Рис. 3.41. Поперечный разрез и схема приложения нагрузок на днище резервуара

Расчет днища производится в поперечном направлении полосы шириной 1 м.

Сосредоточенные силы от веса стены

$$P_1 = 0,6 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1,1 \cdot 25 = 132 \text{ кН},$$

$$P_2 = 0,5 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 1,1 \cdot 25 = 110 \text{ кН}.$$

Момент от давления грунта $M_1 = 842 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

То же от давления воды $M_2 = 547,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Расчет ведется по работе [23], используя вспомогательные таблицы. Дополнительные данные

$$B = I^{пл} E_B = \frac{1 \cdot 0,8^3}{12} \cdot 30\,000 = 1280 \text{ МПа}\cdot\text{м}^4 \text{ – жесткость полосы,}$$

$E_0 = 22 \text{ МПа}$ – для грунта основания,

$E_B = 30\,000 \text{ МПа}$ – для бетона В25.

Показатель гибкости

$$\alpha = \frac{\pi E_0 L^3 b}{B} = \frac{3,14 \cdot 22 \cdot 20,2^3 \cdot 1}{1280} = 445.$$

Относительные параметры:

$$\beta_1 = \frac{1,1}{20,2} = 0,05; \quad \beta_2 = \frac{1,1+9}{20,2} = 0,5; \quad \beta_3 = \frac{1,1+9+9}{20,2} = 0,9.$$

1. Расчет незаглубленного резервуара на действие сосредоточенных сил (вес стен).

Определение поперечных сил и изгибающих моментов приведено в табл. 3.2, 3.3 и рис. 3.42.

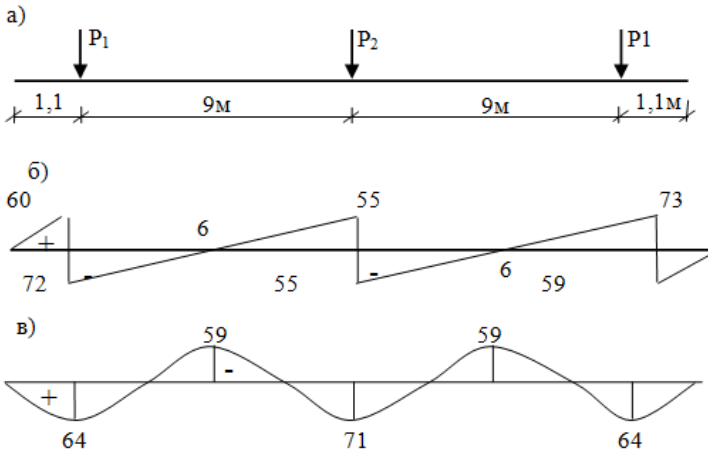


Рис. 3.42. К расчету дна резервуара на действие сосредоточенных сил:

а – схема приложения нагрузок; б – эпюра поперечных сил Q , кН;

в – эпюра изгибающих моментов M , кН·м

Таблица 3.2

$\xi = \frac{x}{l}$	$Q_1 = \overline{QP}_1$	$Q_2 = \overline{QP}_2$	$Q_3 = \overline{QP}_3$	ΣQ_i
0	0	0	0	0
$\frac{1,1}{20,2} = 0,05$	$\frac{62}{-70}$	3	-5	$\frac{62}{-70}$
$\frac{1,1+4,5}{20,2} = 0,28$	-9	23	-8	6
$\frac{1,1+9}{20,2} = 0,50$	7	$\frac{55}{-55}$	-7	$\frac{55}{-55}$
$\frac{1,1+9+4,5}{20,2} = 0,72$	8	-23	9	-6
$\frac{1,1+9+9}{20,2} = 0,94$	5	-2	$\frac{70}{-62}$	$\frac{73}{-59}$
1	0	0	0	0

Таблица 3.3

ξ	$M_1 = \overline{MP}_1L$	$M_2 = \overline{MP}_2L$	$M_3 = \overline{MP}_3L$	ΣM_i
0	0	0	0	0
0,05	68	1	-5	64
0,28	-72	48	-35	-59
0,50	-67	205	-67	71
0,72	-35	48	-72	-59
0,94	-5	1	68	64
1	0	0	0	0

2. а) Гидравлические испытания (заполнен левый отсек).

Определение поперечных сил и изгибающих моментов приведено в табл. 3.4 и 3.5.

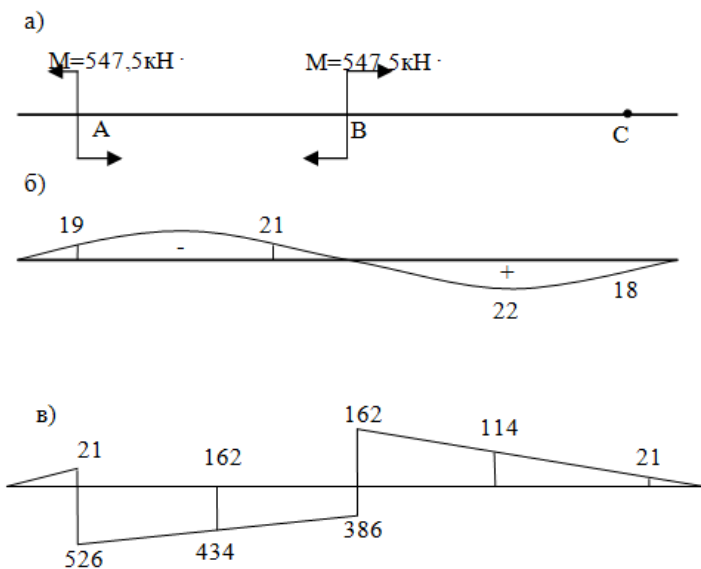


Рис. 3.43. К расчету днища резервуара на действие сосредоточенных изгибающих моментов (заполнен левый отсек):

a – схема приложения моментов;

б – эпюра поперечных сил Q , кН;

в – эпюра изгибающих моментов M , кН·м

Таблица 3.4

ξ	$Q_1 = \bar{Q} \frac{M_1}{L}$	$Q_2 = \bar{Q} \frac{M_2}{L}$	ΣQ_i
0	0	0	0
0,05	41	-22	19
0,28	54	-33	21
0,50	31	-31	0
0,72	11	-33	-22
0,94	4	-22	-18
1	0	0	0

Таблица 3.5

ξ	$M_1 = \overline{MM}_A$	$M_2 = \overline{MM}_B$	ΣM_i
0	0	0	0
0,05	$\frac{46}{-501}$	-25	$\frac{21}{-526}$
0,28	-289	-145	-434
0,50	-112	$\frac{-274}{274}$	$\frac{-386}{162}$
0,72	-31	145	114
0,94	-4	25	21
1	0	0	0

б) Гидравлические испытания (заполнен правый отсек). Определение поперечных сил и изгибающих моментов приведено в табл. 3.6, 3.7 и рис. 3.44.

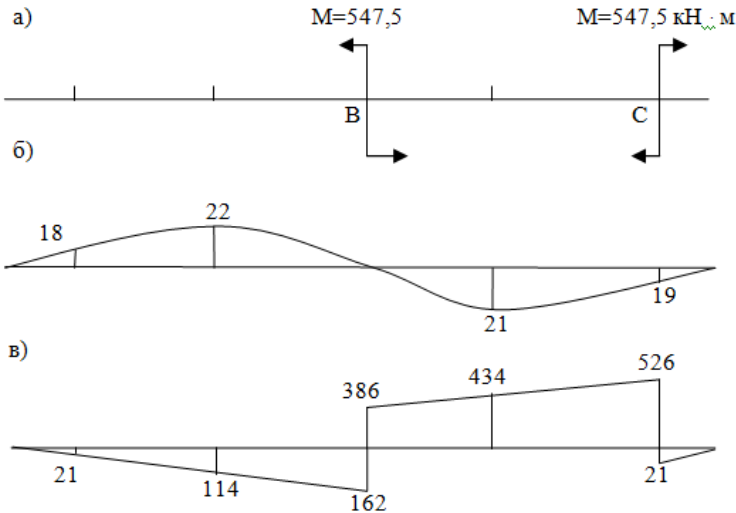


Рис. 3.44. К расчету днища резервуара на действие сосредоточенных изгибающих моментов (заполнен правый отсек):

а – схема приложения моментов; б – эпюра поперечных сил Q , кН;

в – эпюра изгибающих моментов M , $\text{кН}\cdot\text{м}$

Таблица 3.6

ξ	$Q_1 = \bar{Q} \frac{M_B}{L}$	$Q_2 = \bar{Q} \frac{M_C}{L}$	ΣQ_i
0	0	0	0
0,05	22	-4	18
0,28	33	-11	22
0,50	31	-31	0
0,72	33	-54	-21
0,94	22	-41	-19
1	0	0	0

Таблица 3.7

ξ	$M_1 = \bar{M} M_B$	$M_2 = \bar{M} M_C$	ΣM_i
0	0	0	0
0,05	25	-4	21
0,28	145	-31	114
0,50	$\frac{-274}{274}$	-112	$\frac{162}{-386}$
0,72	-145	-289	-434
0,94	-25	$\frac{-501}{46}$	$\frac{-526}{21}$
1	0	0	0

в) Гидравлические испытания (заполнены оба отсека).

Определение поперечных сил и изгибающих моментов приведено в табл. 3.8, 3.9 и рис. 3.45.

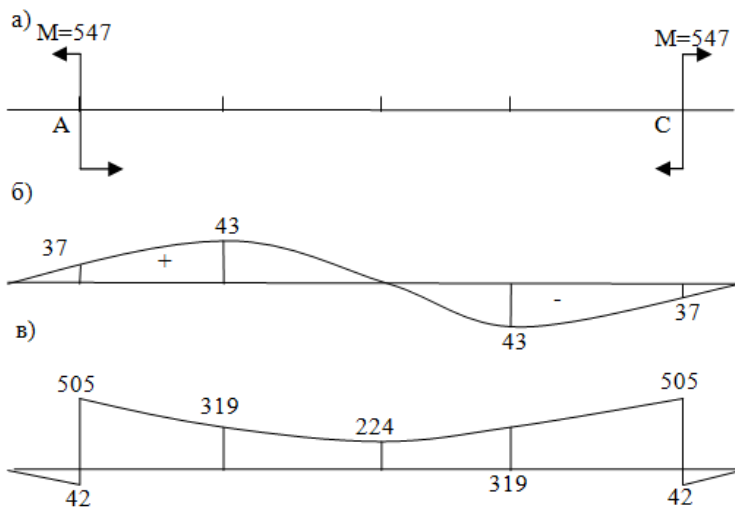


Рис. 3.45. К расчету днища резервуара на действие сосредоточенных изгибающих моментов (заполнены оба отсека):

а – схема приложения моментов;

б – эпюра поперечных сил Q , кН;

в – эпюра изгибающих моментов M , кН·м

Таблица 3.8

ξ	$Q_1 = \bar{Q} \frac{M_A}{L}$	$Q_2 = \bar{Q} \frac{M_C}{L}$	ΣQ_i
0	0	0	0
0,05	41	-4	37
0,28	54	-11	43
0,50	31	-31	0
0,72	11	-54	43
0,94	4	-41	-37
1	0	0	0

Таблица 3.9

ξ	$M_1 = \overline{MM}_A$	$M_2 = \overline{MM}_C$	ΣM_i
0	0	0	0
0,05	$\frac{46}{-501}$	-4	$\frac{42}{-505}$
0,28	-288	-31	-319
0,50	-112	-112	-224
0,72	-31	-288	-319
0,94	-4	$\frac{-501}{46}$	$\frac{-505}{42}$
1	0	0	0

3. Заглубленный незаполненный резервуар (боковое давление грунта).

Определение поперечных сил и изгибающих моментов приведено в табл. 3.10, 3.11 и рис. 3.46.

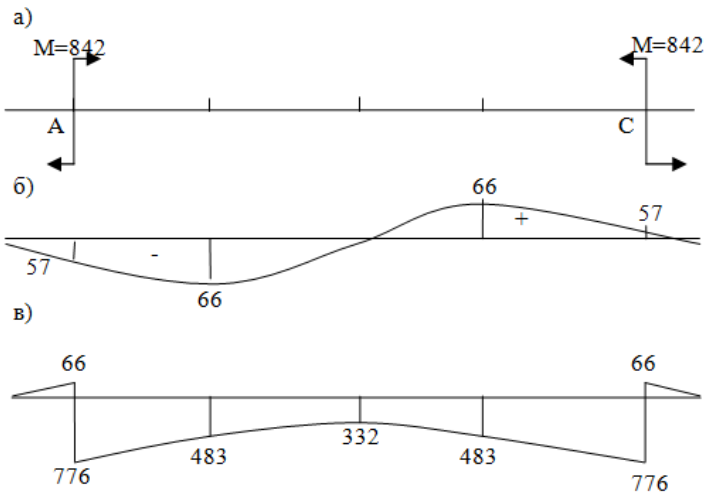


Рис. 3.46. К расчету дна резервуара на действие изгибающих моментов от бокового давления грунта:

а – схема приложения моментов; б – эпюра поперечных сил Q , кН;

в – эпюра изгибающих моментов M , кН·м

Таблица 3.10

ξ	$Q_1 = \bar{Q} \frac{M_A}{L}$	$Q_2 = \bar{Q} \frac{M_B}{L}$	ΣQ_i
0	0	0	0
0,05	-62	5	-57
0,28	-82	16	-66
0,50	-46	46	0
0,72	-16	82	66
0,94	-5	62	57
1	0	0	0

Таблица 3.11

ξ	$M_1 = \bar{M} M_A$	$M_2 = \bar{M} M_B$	ΣM_i
0	0	0	0
0,05	$\frac{-72}{770}$	6	$\frac{66}{776}$
0,28	438	45	483
0,50	166	166	332
0,72	45	438	483
0,94	6	$\frac{770}{-67}$	$\frac{776}{-60}$
1	0	0	0

4. Расчет днища по материалу.

Расчетные усилия в характерных сечениях плиты:

Консольный вылет сверху: $M_1 = 505 - 64 = 441$ кН·м.То же снизу: $M_2 = 64 + 776 = 840$ кН·м.Низ средней стены: $M_3 = 386 + 71 = 441$ кН·м.

Середина между крайней и средней стенами:

 $M_4 = 483 - 59 = 424$ кН·м, $M'_4 = 319 - 59 = 378$ кН·м.

Максимальная поперечная сила: $Q_{\max} = 73 + 37 = 110$ кН.

а) *Расчет по наклонным сечениям:*

Минимальная поперечная сила, воспринимаемая бетоном:

$$Q_{B_{\min}} = 0,5R_{Bt}bh_0 = 0,5 \cdot 1,05 \cdot 100 \cdot 75 \cdot 0,1 = 394 \text{ кН} > Q_{\max},$$

где $h_0 = 80 - 5 = 75$ см.

Толщина плиты достаточна.

б) *Расчет по прочности нормальных сечений:*

Консоль сверху:

$$\alpha_m = \frac{M}{R_B b h_0} = \frac{441 \cdot 10^3}{14,5 \cdot 100 \cdot 75^2} = 0,05;$$

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha_m} = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,05} = 0,055 < \xi_R;$$

$$A_s^{TR} = \frac{R_B b h_0 \xi}{R_s} = \frac{14,5 \cdot 100 \cdot 75 \cdot 0,055}{355} = 17 \text{ см}^2.$$

Можно принять 5 \varnothing 22 А400 с $A_s^{TR} = 191$ см². Шаг $s = 200$ мм.

Консоль снизу:

$$\alpha_m = \frac{840 \cdot 10^3}{14,5 \cdot 100 \cdot 75^2} = 0,103;$$

$$\xi = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0,103} = 0,109;$$

$$A_s^{TR} = \frac{14,5 \cdot 100 \cdot 75 \cdot 0,109}{355} = 33,4 \text{ см}^2.$$

Для армирования принять 9 \varnothing 20 А400 с $A_s^{\text{табл}} = 34,21$ см².

Шаг стержней $s = 125$ мм.

Низ средней опоры $M = 457$ кН·м $\approx M = 441$ кН·м (консольный момент).

Моменты между стенами резервуара также незначительно отличаются от консольного момента $M_4 = 424$ кН·м; $M'_4 = 378$ кН·м, поэтому армирование аналогично армированию сверху.

3.2. КАРКАСНО-СТЕРЖНЕВЫЕ МОДЕЛИ РОСТВЕРКОВ

В работе [3] изложена теория сопротивления ростверков свайных фундаментов на основе пространственных аналоговых каркасно-стержневых моделей. Базой послужили экспериментальные исследо-

вания, проведенные Т. И. Барановой и А. С. Залесовым в 1970 г. Изучали НДС коротких балки и консоли с пролетом, срезы $a/n_0 = 0,2 \dots 1,0$ в зависимости от процента армирования продольной арматурой, высоты элементов, схем нагружения сосредоточенными силами и равномерно распределенной нагрузки при симметричном и несимметричном расположениях грузовых площадок по длине элемента, схем армирования и др.

Параллельно проводили и численные эксперименты, сопровождающиеся расчетами на основе теории плоских одноосных напряженных состояний (теория Г. А. Гениева). Установлено, что основную роль в сопротивлении коротких элементов играют главные сжимающие и растягивающие напряжения. Траектория их концентрируется в пределах горизонтальных и наклонных участков между грузовыми и наклонными площадками (рис. 3.47).

Установлены функциональные зависимости:

$$\frac{F}{R_b b h_0} - a/h_0; \quad \frac{Q}{R_{bt} b h_0} - H/F, \mu_w; \quad F - a/h_0,$$

где F, H – внешняя вертикальная и горизонтальная силы.

Представлена пространственная каркасно-стержневая модель (ПКСМ) толстых плит – свайных ростверков (рис. 3.47 – 3.50).

Метод расчета отражает два вида разрушения: по сжатым наклонным полосам и растянутым арматурным поясам. Пространственный угол наклона сжатой полосы определяется схемой нагружения, а ширина расчетной полосы – размерами грузовых опорных площадок.

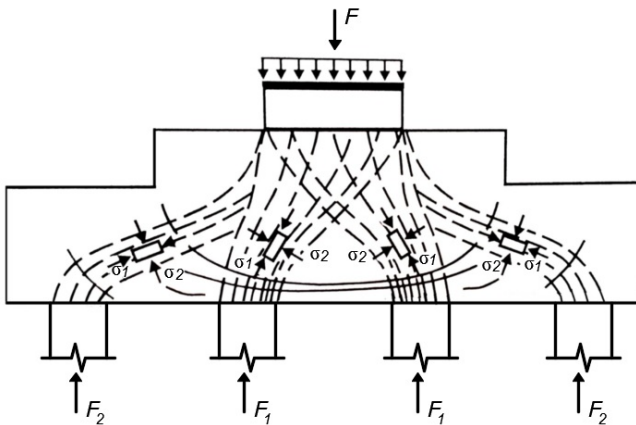


Рис. 3.47. Схема траекторий главных напряжений σ_1 и σ_2

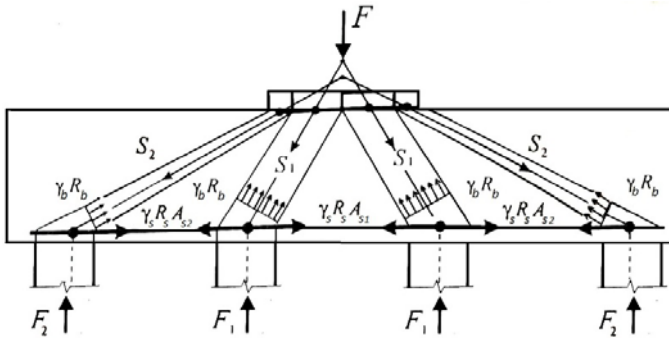


Рис. 3.48. Схема предельных усилий в расчетных сжатых бетонных полосах и растянутом арматурном поясе (модель ПКСП-А)

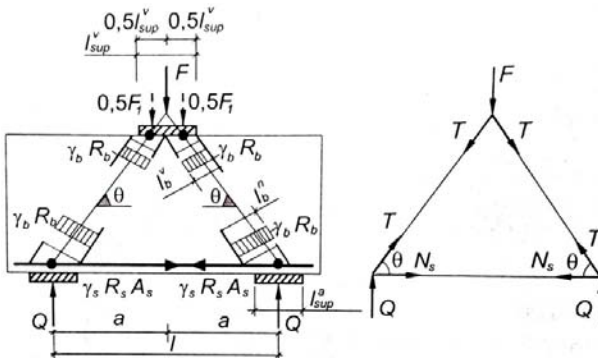


Рис. 3.49. Расчетная модель и схема усилий в коротких элементах (на примере короткой балки)

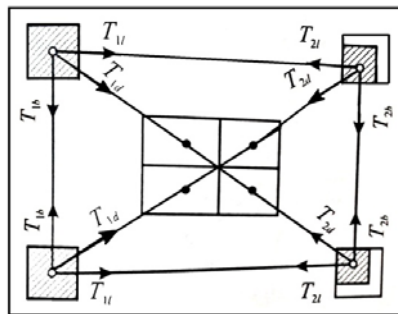
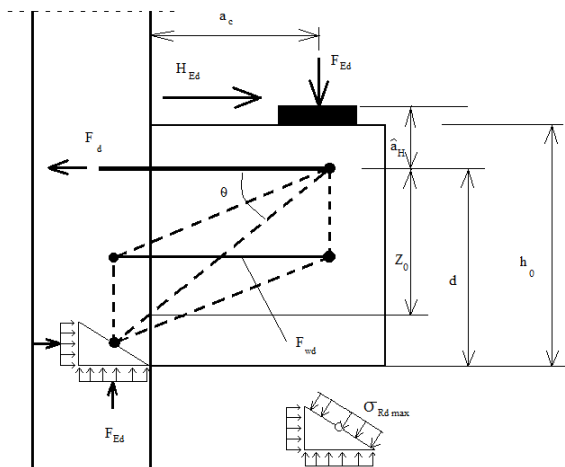
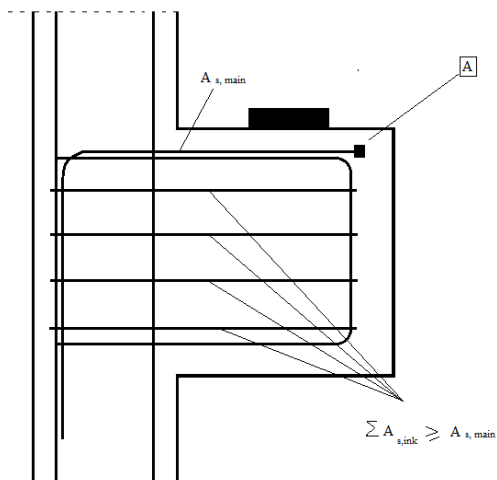


Рис. 3.50. Расчетная модель ПКСМ четырехсвайного ростверка при равномерной осадке двух свай-опор

Рассмотрена модель «тяжей и распорок» при проектировании углов рам и ферм, консолей колонн (рис. 3.51), вблизи сосредоточенных нагрузок. Она может быть использована при нелинейном изменении напряжений.

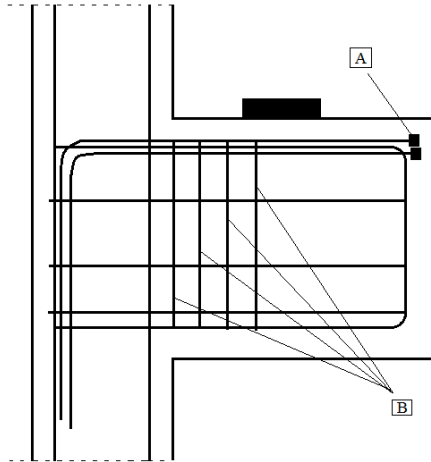


a)



б)

Рис. 3.51. Модель тяжей и распорок (а), армирование консоли (б, в) при $a_c \leq 0,5h_c$ (б) и $a_c \geq 0,5h_c$ (в)



в)

Рис. 3.51. Окончание

Список литературы к главе 3

1. **Алексеев, В. М.** Фундаменты зданий и подземных сооружений : учебное пособие / В. М. Алексеев, П. И. Калугин. – Воронеж : ВГАСУ, 2000. – 278 с.

2. **Бабанов, В. В.** Расчетный анализ работы свайных фундаментов с низким и высоким ростверками с учетом нелинейной работы оснований / В. В. Бабанов, В. А. Шашкин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2012. – № 2. – С. 2 – 6.

3. **Баранова, Т. И.** Каркасно-стержневые расчетные модели и инженерные методы расчета железобетонных конструкций : учебное пособие / Т. И. Баранова, А. С. Зелесов. – М. : АСВ, 2003. – 238 с.

4. **Бородин, М. А.** Исследования осадков основания кольцевых фундаментов / М. А. Бородин, В. Г. Шаповалов, Б. Б. Швец // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2012. – № 2. – С. 2 – 6.

5. **Барвашов, В. А.** Об учете уровня подземных вод при расчете осадок оснований фундаментов / В. А. Барвашов // Основания фундамента и механика грунтов. – 2011. – № 1. – С. 30–31.

6. **Бондаренко, В. М.** Расчетные модели силового сопротивления железобетона : монография / В. М. Бондаренко, В. И. Колчунов. – М. : АСВ, 2004. – 472 с.

7. **Боровских, А. В.** Силовое сопротивление пространственных железобетонных конструкций в условиях эксплуатации : монография / А. В. Боровских. – М. : АСВ, 2011. – 280 с.

8. **Босаков, С. В.** Изгиб балок вблизи откоса / С. В. Босаков // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1988. – № 2. – С. 26 – 28.
9. **Босаков, С. В.** Применение способа Б. Н. Жемочкина к расчету изгибаемых плит на упругом основании / С. В. Босаков // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2003. – № 2. – С. 11 – 13.
10. **Власов, В. З.** Балки, плиты и оболочки на упругом основании : монография / В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев. – М. : Физматиз, 1960. – 341 с.
11. **Гарагаш, Б. А.** Аварии и повреждение системы «здание–основание» и регулирование надежности ее элементов : монография / Б. А. Гарагаш. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2000. – 378 с.
12. **Нагрузки** и воздействия на здания и сооружения / В. Н. Гордеев и др. – М. : АСВ, 2007. – 476 с.
13. **Зарецкий, Ю. К.** Вязкопластичность грунтов и расчеты сооружений : монография / Ю. К. Зарецкий. – М. : Стройиздат, 1988. – 352 с.
14. **Динь, Дауэюнь.** Усовершенствования методов расчета балок на упругом основании / Дауэюнь Динь // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1989. – № 3. – С. 24 – 26.
15. **Железобетонные** и каменные конструкции : учебник для вузов / В. М. Бондаренко, Р. О. Бакиров, В. Г. Назаренко, В. И. Римшин ; под ред. В. М. Бондаренко. – М. : Высшая школа, 2007. – 887 с.
16. **Жемочкин, Б. Н.** Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании : учебное пособие / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М. : Госстройиздат, 1962. – 293 с.
17. **Карпенко, Н. И.** Общие модели механики железобетона : монография / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат, 1996. – 208 с.
18. **Карпенко, Н. И.** Практическая методика расчета железобетонных плит на продавливание по различным схемам / Н. И. Карпенко, С. Н. Карпенко // Бетон и железобетон. – 2012. – № 5. – С. 10 – 16.
19. **Карпенко, Н. И.** Теория деформирования железобетона с трещинами : монография / Н. И. Карпенко. – М. : Стройиздат. 1976. – 208 с.
20. **Клепиков, С. Н.** Взаимодействие балки с нелинейно-неупругим неоднородным основанием во всем диапазоне нагружения / С. Н. Клепиков, Я. Е. Слободян // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1989. – № 4. – С. 22 – 24.
21. **Кодыш, Э. Н.** Расчет железобетонных конструкций из тяжелого бетона по прочности, трещиностойкости и деформациям : монография / Э. Н. Кодыш, И. К. Никитин, Н. Н. Трекин. – М. : АСВ, 2011. – 352 с.

22. **Корнев, Б. Г.** Вопросы расчета балок и плит на упругом основании : монография / Б. Г. Корнев. – М. : Госстройиздат, 1954. – 231 с.

23. **Корнев, Б. Г.** Расчет плит на упругом основании : учебное пособие / Б. Г. Корнев. – М. : Госстройиздат, 1962. – 350 с.

24. **Корнева, Е. Б.** Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практическое приложение : научное издание / Е. Б. Корнева. – М. : АСВ, 2009. – 240 с.

25. **Корнеева, Е. Б.** Проблемы расчета бесконечных и полубесконечных плит, лежащих на основании, в котором имеются карстовые полости / Е. Б. Корнеева // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 3. – С. 17 – 22.

26. **Крашенинникова, Г. В.** Расчет балок на упругом основании конечной глубины / Г. В. Крашенинникова. – М.-Л. : Энергия, 1964. – 100 с.

27. **Леденёв, В. В.** Расчет буронабивных фундаментов : монография / В. В. Леденёв, Тью Тхи Хоанг Ань. – Тамбов : ТГТУ, 2015. – 284 с.

28. **Леденёв, В. В.** Расчет плитных фундаментов : метод. указания / В. В. Леденёв, А. В. Худяков. – Тамбов : ТГТУ, 2011. – 55 с.

29. **Леденёв, В. В.** Механические и реологические модели оснований и фундаментов : учебное пособие / В. В. Леденёв, А. В. Худяков. – Тамбов : ТГТУ, 2012. – 80 с.

30. **Лушников, В. В.** Оценка характеристик деформируемости элювиальных грунтов по результатам измерения деформаций зданий / В. В. Лушников // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2011. – № 3. – С. 16 – 22.

31. **Макаров, Б. Н.** Расчет фундаментов сооружений на случайно неоднородном основании при ползучести : монография / Б. Н. Макаров, Б. Е. Кочетков. – М. : Стройиздат, 1987. – 256 с.

32. **Мустафаев, А. А.** Фундаменты на просадочных и набухающих грунтах : учебное пособие / А. А. Мустафаев. – М. : Высшая школа, 1989. – 560 с.

33. **Районирование** геологической среды Москвы для целей строительства объектов с заглубленными основаниями / В. И. Осипов, В. И. Кутепов, Н. Г. Анисимова и др. // Геоэкология. – 2011. – № 3. – С. 227 – 237.

34. **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели и возможность их анализа : монография / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – Киев : Сталь, 2002. – 600 с.

35. **Расчет основания** и фундаментов башни на участке № 3-3 ММДЦ «Москва = Сити» / В. А. Петрухин, О. Шулятьев, С. Безволев, Н. Боков // Высотные здания. – 2011. – № 1. – С. 104 – 113.

36. **Постоев, Г. Л.** Предельное напряжение состояния в грунтовом массиве при формировании провала / Г. Л. Постоев // Инженерная геология. – 2011. – № 1. – С. 28 – 33.

37. **Пшеничкин, А. П.** Основы вероятностно-статической теории взаимодействия сооружений с неоднородными грунтовыми основаниями : монография / А. П. Пшеничкин. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2010. – 336 с.

38. **Рекомендации** по учету ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций / НИИЖБ Госстрой СССР. – М. : Стройиздат, 1988. – 120 с.

39. **Ржаницын, А. Р.** Строительная механика : учебное пособие / А. Р. Ржаницын. – М. : Высшая школа, 1982. – 400 с.

40. **Руководство** по проектированию плитных фундаментов каркасных зданий и сооружений башенного типа. – М. : Стройиздат, 1989. – 269 с.

41. **Рыбин, В. С.** Определение оптимальной формы и размеров подошвы фундаментов мелкого заложения / В. С. Рыбин. Л. В. Рыбина // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2012. – № 1. – С. 6 – 9.

42. **Сабуренкова, В. А.** Автоматизированный расчет железобетонных аэродромных покрытий на упрочненных искусственных основаниях / В. А. Сабуренкова // Транспортное строительство. – 2011. – № 4. – С. 8 – 11.

43. **Свод правил** СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01–81. – М. : ОАО ЦПП, 2011. – 160 с.

44. **Свод правил** СП 24 13330.2011. Свайные фундаменты. Актуализированная редакция СНиП 2.02.03–85. – М. : ОАО ЦПП, 2011. – 85 с.

45. **Сапожников, А. И.** Особенности работы балок на упругом основании. / А. И. Сапожников, С. М. Григорьев, Н. В. Купчикова // Изв. вузов. Строительство. – 2011. – № 10. – С. 99 – 107.

46. **Семенов, П. К.** К расчету нелинейно-упругих плит, взаимодействующих с нелинейным неоднородным основанием / П. К. Семенов, Ф. С. Селиванов, А. А. Петрушенков // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии : сб. материалов XII Междунар. науч.-практ. конф. (30 июня – 2 июля 2011). – Тула : ТГУ, 2011. – С. 69–70.

47. **Симвулиди, И. А.** Расчет инженерных конструкций на упругом основании : учебное пособие / И. А. Симвулиди. – М. : Высшая школа, 1987. – 576 с.
48. **Синицын, А. П.** Расчет балок и плит на упругом основании за пределом упругости : учебное пособие / А. П. Синицын. – М. : Стройиздат, 1974. – 176 с.
49. **Смирнов, В. А.** Расчет плит сложного очертания : учебное пособие / В. А. Смирнов. – М. : Стройиздат, 1978.
50. **Снитко, Н. К.** Строительная механика : учебник / Н. К. Снитко. – М. : Высшая школа, 1980. – 431 с.
51. **СНиП 2.02.01–2010.** Основания зданий и сооружений (В развитие СНиП 2.02.01–83 и СП.50-101–2004).
52. **Соломин, В. И.** Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций : учебное пособие / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. – М. : Стройиздат, 1986. – 208 с.
53. **СП 22.13330.2011.** Основания зданий и сооружений.
54. **СП 50-101–2004.** Проектирование и устройство оснований и фундаментов зданий и сооружений.
55. **Механика грунтов, основания и фундаменты** : учебник / С. Б. Ухов, В. В. Семенов и др. – М. : АСВ, 2007. – 569 с.
56. **Фадеев, А. Б.** О допустимых деформациях основания плитных фундаментов / А. Б. Фадеев, В. К. Иноземцев, В. А. Лукин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2004. – № 2. – С. 14 – 16.
57. **Шапиро, Д. М.** Теория и расчетные модели оснований и объектов геотехники : монография / Д. М. Шапиро. – Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2012. – 164 с.
58. **Шашкин, А. Г.** Описание деформационного поведения глинистого грунта с помощью вязко-упругопластической модели / А. Г. Шашкин // Инженерная геология. – 2010. – № 4. – С. 22 – 32.
59. **Алгоритм и программа** инженерного расчета осадок фундаментных плит с учетом неравномерности нагрузки на основание и неоднородности массива / В. М. Шейнин, Е. П. Сирина, С. А. Артемов, А. В. Фаваров // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2006. – № 5. – С. 2 – 7.
60. **Шматков, С. Б.** О нелинейной расчетной модели системы «Фундаментная плита – основания» / С. Б. Шматков, И. В. Крейлис // Основания, фундаменты и механика грунтов. – С. 27–28.
61. **Эстрин, М. И.** Расчет балок на упругом основании со случайным коэффициентом постели / М. И. Эстрин, С. Н. Раскатов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – № 1.

4. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ

Расчет перемещений фундаментов на упругой среде основан на решениях линейной теории упругости [1, 2, 6 – 10, 13, 19, 23]. Для заглубленных фундаментов использованы решения Р. Миндлина [4, 10, 13, 23] для силы, расположенной вблизи поверхности [15]. Как известно, грунтовая среда почти не сопротивляется растяжению, в то время как для линейно-деформированного полупространства среда одинаково сопротивляется и сжатию, и растяжению. Это отмечал М. И. Горбунов-Посадов [9] и предложил использовать двойные силы. Реализовал это предложение А. Б. Огранович [17].

Комбинированные модели основания [3] позволяют получить близкие к опытным величины.

Определение контактных напряжений является чрезвычайно сложной задачей. Отдельные решения рассмотрены в работах [1, 2, 5, 8, 12, 19, 20]. Обширные экспериментальные исследования контактных напряжений описаны в работах [11, 13, 16, 22].

4.1. РЕШЕНИЕ В. В. ЛЕДЕНЁВА

Использование уравнений Р. Миндлина для определения перемещений заглубленных площадок.

Приведенные ниже решения были выполнены более сорока лет назад. В то время ЭВМ применялось не так широко, как сейчас. Используемые приемы решения и полученные результаты могут быть полезны специалистам и в настоящее время.

Вертикальные и горизонтальные перемещения в линейно-деформируемом полупространстве могут быть вычислены по формулам:

а) От действия вертикальной сосредоточенной силы – P :

$$W = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} P \frac{1}{8\pi(1 - \mu_0)} \left[\frac{3 - 4\mu}{R_1} + \frac{8(1 - \mu_0)^2 - (3 - 4\mu_0)}{R_2} + \frac{(z - h)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\mu_0)(z + h)^2 - 2zh}{R_2^5} + \frac{6zh(z + h)^2}{R_2^5} \right]^2;$$

$$U = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} P \frac{\tau}{8\pi(1-\mu_0^2)} \left[\frac{z-h}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu_0)(z-h)}{R_2^3} + \frac{6zh(z+h)}{R_2^5} - \frac{4(1-\mu_0)(1-2\mu_0)^2}{R_2(R_2+z+h)} \right].$$

б) От действия горизонтальной сосредоточенной силы $-T$:

$$W = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} T \frac{x}{8\pi(1-\mu_0^2)} \left[\frac{z-h}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu_0)(z-h)}{R_2^3} + \frac{4(1-\mu_0)(1-2\mu_0)}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{6zh(z+h)}{R_2^5} \right]^2;$$

$$U = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} T \frac{1}{8\pi(1-\mu_0^2)} \left[\frac{(3-4\mu_0)}{R_1^3} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^2} + \frac{(3-4\mu_0)x^2 + 2zh}{R_2^3} - \frac{6zhx^2}{R_2^5} + \frac{4(1-\mu_0)(1-2\mu_0)}{R_2(R_2+z+h)} - \frac{4(1-\mu_0)(1-2\mu_0)x^2}{R_2(R_2+z+h)^2} \right].$$

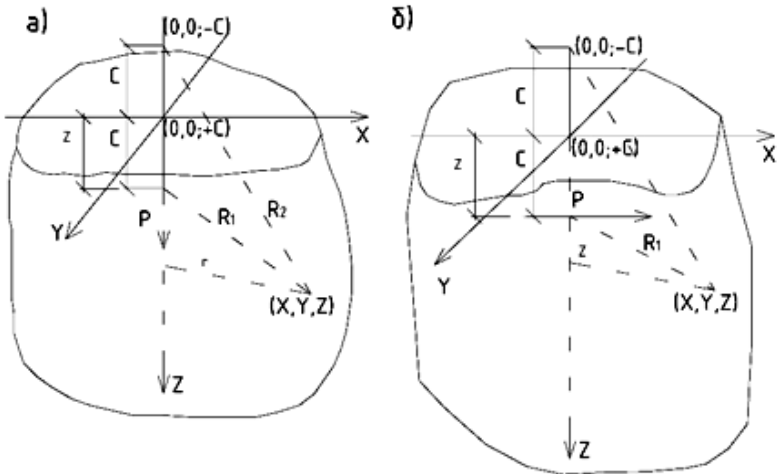


Рис. 4.1. Схема обозначений в формулах Р. Миндлина для вертикальной (а) и горизонтальной (б) сил, приложенных внутри упругого полупространства

Известно, что выражения, полученные Р. Миндлиным, при $h \rightarrow 0$ переходят в формулы Ж. Буссинеска и при $h \rightarrow \infty$ – в формулы У. Кельвина.

При применении к грунтам решений теории линейно-деформируемой среды (теории упругости) перемещения точек окружающей среды оказываются более значительными, чем полученные экспериментально. Отсюда делается вывод о том, что модель линейно-деформируемой среды обладает повышенной распределенной способностью по сравнению с реальными грунтами.

Решение Р. Миндлина обладает недостатком, заключающимся в том, что любое направление действия нагрузки предполагает растяжение части среды, находящейся за силой.

Так как грунты, даже связные, обладают ограниченной способностью к растяжению, то этот эффект почти вдвое снижает перемещения.

В известной мере этот недостаток компенсируется начальным напряженным состоянием грунта от его собственного веса – природным напряженным состоянием грунта.

Природные напряжения уменьшают области растягивающих напряжений и тем самым снижают погрешность решений, основанных на формулах Р. Миндлина.

Учитывая все особенности этого решения, следует все же признать возможность его применения для определения перемещений жестких заглубленных площадок.

В дальнейшем определим перемещения различных по форме площадок от действия как горизонтальных, так и вертикальных нагрузок.

Для разработки приближенной методики расчета заглубленных фундаментов необходимо иметь хотя бы приближенные приемы учета жесткости конструкции. Таким приемом может служить замеченное еще Ф. Шлейхером (1933) близкое совпадение средней осадки равномерно загруженной площадки осадке жесткого фундамента, использованное в 1934 г. проф. Н. А. Цытовичем при разработке метода эквивалентного слоя для определения осадки фундаментов. Объясняется это по-видимому равенством работ упругих сил в грунтовом массиве независимо от характера распределения эпюры осадок в контактной области.

Обозначим через N_0 общую нагрузку, действующую на основание, и через S_0 осадку жесткого фундамента, тогда работа, осуществляемая нагрузкой, будет равна

$$W_{\text{жк}} = N_0 S_0.$$

Если мы имеем абсолютно гибкий фундамент, нагруженный равномерно распределенным давлением $\sigma_m = \frac{N_0}{F}$, то в этом случае работа будет равна

$$W_\tau = \int_F \sigma_m S(x, y) dF = \frac{N_0}{F} \int_F S(x, y) dF,$$

где $\int_F S(x, y) dF$ – объем эпюры осадки.

Приравнивая $W_{ж}$ и W_τ , получим

$$N_0 S_0 = \frac{N_0}{F} \int_F \frac{S(x, y) dF}{F}.$$

Осюда

$$S_0 = S_m = \frac{\int_F S(x, y) dF}{F}.$$

Покажем, что это соотношение применено соблюдается и в случае распределения осадок по площади фундамента в виде кругового и эллиптического параболоида. Для эллиптического параболоида

$$S(x, y) = -\frac{S_0 - S_{yz}}{l + b} \left(\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{b} \right),$$

где S_0 и S_{yz} – соответственно осадка центра площадки и ее угла; l и b – соответственно наибольшая длина площадки и ее ширина по осям x и y координаты углов площадки, если $F = 2l \cdot 2b$

Для кругового параболоида ($l = b = a$) уравнение распределения осадки по площади будет равно

$$S(x, y) = \frac{S_0 - S_y}{2b^2} (x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad S(r) = S_0 - (S_0 - S_y) \left(\frac{r}{a} \right)^2,$$

где $x^2 + y^2 + r^2$; r – координата точек, лежащих на окружности радиусом r .

После подстановки выражений и интегрирования получим:

а) для круговой площадки

$$S_0 \approx S_m \approx \frac{S_0 + S_k}{2};$$

б) для прямоугольной площадки

$$S_0 \approx S_m \approx \frac{2S_0 + S_{yz}}{3}.$$

Сравним вычисленные осадки круглого фундамента с известным решением для осадок по Ж. Буссинеску, а для прямоугольного с данными по зависимостям, установленным М. И. Горбуновым-Посадовым.

а) *Круглый фундамент*

$$S = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m 2a\bar{S},$$

$\bar{S}_0 = 0,785$ – по точному решению Ж. Буссинеска; $\bar{S}_m = 0,849$ – среднее значение осадки по круговой площадке, нагруженной равномерным давлением σ_m ; $\bar{S}_m = 0,818$ – среднее значение осадки как кругового параболоида.

Как видно, отклонение S_m от S_0 составляет от 3,6 до 6,9%, что может быть допустимо.

б) *Прямоугольный фундамент.*

Учитывая, что формулы для определения осадки могут быть приведены к виду

$$S = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b\bar{S},$$

сравним значение \bar{S}_m , вычисленное как для средней осадки, полученной при ее распределении по эллиптическому параболоиду и через \bar{S}_0 по данным М. И. Горбунова-Посадова.

Как видно из таблицы, отклонения составляют не более 6,3%, а для остальных соотношений сторон $l/b > 2$ не менее 5%, что, очевидно, позволяет принять такой метод учета жесткости фундаментной конструкции за основу для расчетов.

$n = l/b$	\bar{S}_0	\bar{S}_m	\bar{S}_m / \bar{S}_0
1,0	0,88	0,935	1,063
1,5	1,07	1,131	1,057
2,0	1,22	1,271	1,046
10,0	2,18	2,120	0,943

Определение перемещений круглого в плане фундамента. Как показывали полевые и лабораторные опыты, в пределах подошвы сделанного в грунт фундамента возникают следующие виды деформаций – осадка, вызываемая вертикальной составляющей опорного реактивного сопротивления грунта основания; горизонтальное смещение площадки, вызываемое горизонтальной составляющей этого реактивного сопротивления, и поворот площадки на некоторый угол, вызываемый моментной реакцией основания.

Действие на площадку осевой вертикальной силы. Решение получено в 1965 г. Р. С. Шеляпиным. Были определены осадки центра круглой площадки – S_0 и ее края S_k :

$$S(\lambda) = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{P}{\pi a} \bar{S}(\lambda),$$

где $\bar{S}(\lambda)$ – коэффициент, зависящий от относительной глубины площадки – $\lambda = h/a$ и положения точки в пределах этой площадки.

Для центра круглой площадки коэффициент $S_0(\lambda)$ имеет выражение

$$\begin{aligned} \bar{S}_0(\lambda) = & \frac{3 - 4\mu_0}{4(1 - \mu_0)^2} - \lambda + \frac{5 - 12\mu_0 + 8\mu_0^2}{4(1 - \mu_0)^2} \sqrt{1 + 4\lambda^2} - \\ & - \frac{(5 - 8\mu_0)}{2(1 - \mu_0)^2 \sqrt{1 + 4\lambda^2}} - \frac{1}{2(1 - \mu_0)^2} \frac{\lambda^4}{\sqrt{(1 + 4\lambda^2)^3}}. \end{aligned}$$

Для края круглой площадки $S_k(\lambda)$ получено

$$\begin{aligned} \bar{S}_{k(\lambda)} = & \frac{1}{2\pi(1 - \mu_0)^2} \left[(3 - 4\mu_0) - (1 - 2\mu_0)^2 \pi \lambda - \frac{5 - 8\mu_0}{2} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} K_{(k)} + \right. \\ & \left. + \left\{ (5 - 12\mu_0 + 8\mu_0^2) \sqrt{1 + \lambda^2} - 0,5 \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \right\} E_{(k)} \right], \end{aligned}$$

где $K_{(k)}$ и $E_{(k)}$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода модуля $K = 1/\sqrt{1 + \lambda^2}$.

Вычисленные значения $\bar{S}(\lambda)$ по формулам и с учетом для $\mu_0 = 0,35$ представлены в табл. 4.1.

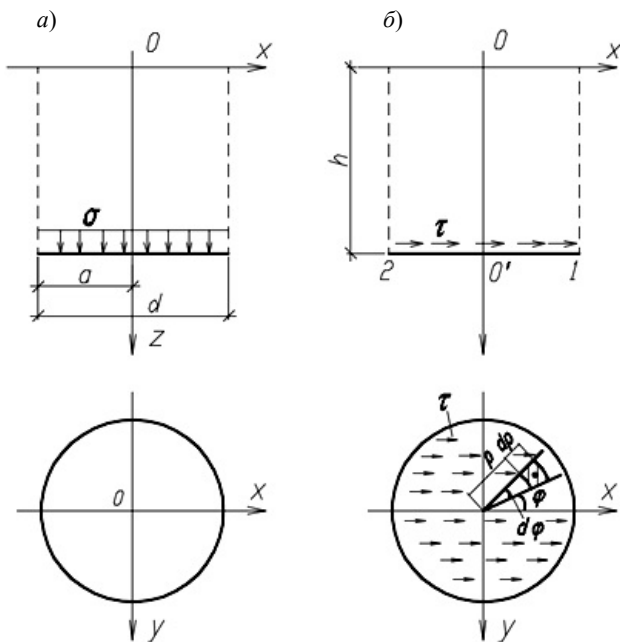


Рис. 4.2. Схемы нагружения круглой площадки равномерно распределенной вертикальной (а) и горизонтальной (б) нагрузками

Таблица 4.1

λ	$\bar{S}_0(\lambda)$	$\bar{S}_k(\lambda)$	$\bar{S}_m(\lambda)$	λ	$\bar{S}_0(\lambda)$	$\bar{S}_k(\lambda)$	$\bar{S}_m(\lambda)$
0	2,0000	1,2732	1,6366	5,0	1,0654	0,7296	0,9026
0,5	1,7650	1,1742	1,4696	7,0	1,0460	0,6942	0,8670
1,0	1,5012	1,0532	1,2772	10,0	1,0112	0,6672	0,8392
1,5	1,3476	0,9582	1,1530	15,0	0,9900	0,6458	0,8179
2,0	1,2570	0,8904	1,0738	20,0	0,9792	0,6350	0,8007
3,0	1,1586	0,8068	0,9826	25,0	0,9726	0,6286	0,8006
4,0	1,1070	0,7596	0,9334	30,0	0,9684	0,6244	0,7964
5,0	1,0754	0,7296	0,9026	50,0	0,9598	0,6156	0,7878

Действие на площадке горизонтальной нагрузки. Для представления о пространственном распределении горизонтального смещения в пределах круглой площадки радиуса a , нагруженной равномерным горизонтальным напряжением τ , найдем горизонтальные смещения точек 0, 1 и 2 – соответственно U_0, U_1 и U_2 . Вследствие симметрии диаметрально противоположные точки будут иметь одинаковую величину горизонтального смещения.

Используем для решения задачи формулу Р. Миндлина о горизонтальном смещении точки с координатами ρ и φ .

Для точек 0, 1 и 2 значения $z = h$ нагрузка на бесконечно малый элемент площадки $\rho d\rho d\varphi$ образует элементарную сосредоточенную силу

$$dT = \frac{T_0}{\pi a^2} \rho d\rho d\varphi = \tau \rho d\rho d\varphi .$$

Если ввести безразмерные величины $z = h = \lambda a$ и $\rho = at$,

$$dT = \tau a^2 t dt d\varphi ,$$

$$R_1 = \rho = at \text{ и } R_2 = \sqrt{\rho^2 + 4h^2} = a \sqrt{t^2 + 4\lambda^2} .$$

Значения x для различных схем нагружения будут различны:

для точки 0 $x = \rho \cos \varphi = at \cos \varphi$,

для точки 1 $x = \rho \cos \varphi = at \cos \varphi$,

для точки 2 $x = \rho \sin \varphi = at \sin \varphi$.

После подстановки этих значений и интегрируя для различных точек круга – 0, 1 и 2, будем иметь:

– для точки 0

$$dU_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \tau a d\bar{U}_0 ,$$

$$d\bar{U}_0 = A \left[\frac{\alpha_1}{t} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2}} + \frac{\alpha_1 t^2 \cos^2 \varphi + 2\lambda^2}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} + \frac{t^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} - \right. \\ \left. - \frac{6\lambda^2 t^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^5}} + \frac{\lambda_2}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda} - \frac{\lambda_2 t^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} \left(\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda \right)^2} \right] t dt d\varphi$$

или

$$U_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \tau a \bar{U}_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{T}{\pi a} \bar{U}_0,$$

где

$$\bar{U}_0 = 2A \int_0^1 t dt \int_0^\pi \left[\frac{\lambda_1}{t} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + \lambda^2}} + \frac{\lambda_1 t^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} + \frac{\cos^2 \varphi}{t} - \frac{2\lambda_2}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} - \frac{6\lambda^2 t^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^5}} + \frac{\lambda^2}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda} - \frac{\lambda_2 t^2 \cos^2 \varphi}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2 (\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda)^2}} \right] d\varphi;$$

$$A = \frac{1}{8\pi(1-\mu_0)^2}, \quad \alpha_1 = 3 - 4\mu_0, \quad \alpha_2 = 4(1-\mu_0)(1-2\mu_0).$$

После интегрирования получаем

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{8\pi(1-\mu_0)^2} \left[(2\lambda_1 + 1) + 2(2\lambda_1 + \lambda_2 + 2)\lambda + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2)\sqrt{1 + 4\lambda^2} + \left(2\alpha + 1 - \frac{4\lambda^2}{\sqrt{1 + 4\lambda^2}} \right) \right];$$

– для точки 1 $\bar{U}_1 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \tau a \bar{U}_1 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{T}{\pi a} \bar{U}_1,$

где

$$\bar{U}_0 = 2A \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_a^{2\cos\varphi} \left[\alpha_1 dt + \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2}} + \frac{\alpha_1 \cos^2 \varphi t^3 dt}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} + \frac{\cos^2 \varphi dt}{t} + \frac{2\lambda^2 t dt}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} - \frac{6\lambda^2 \cos^2 \varphi t^3 dt}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} + \frac{\alpha_2 t dt}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda} - \frac{\alpha_2 \cos^2 \varphi t^3 dt}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2 (\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda)^2}} \right].$$

После интегрирования имеем

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{4\pi(1-\mu_0)^2} \left[\left(2\alpha_1 + \frac{4}{3} \right) - (\alpha_1 + 1)\pi\lambda - \right. \\ \left. - \left\{ \left(\frac{2\alpha_1}{3} + 1 \right) (1 + 4\lambda^2) + \frac{4\alpha_2}{3} (1 + \lambda^2) \right\} \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} K_{(k)} + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{2}{3} (2\alpha_1 + \alpha_2) (1 + 2\lambda^2) + (2 + 3\lambda^2) + \frac{\lambda^4}{1 + \lambda^4} \right\} \sqrt{1 + \lambda^2} E_{(k)} \right],$$

где $K_{(k)}$ и $E_{(k)}$ – полные эллиптические интегралы первого и второго родов модуля K , определяемого значением $K^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2}$;

– для точки 2

$$\bar{U}_2 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \tau a \bar{U}_2 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{T}{\pi a} \bar{U}_2,$$

где

$$\bar{U}_2 = 2A \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_a^{2\cos\varphi} \left[\alpha_1 dt + \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2}} + \sin^2 \varphi dt + \frac{2\lambda^2 t dt}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_1 \sin^2 \varphi t^3 dt}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} - \frac{6\lambda_2 \cos^2 \varphi t^3 dt}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^5}} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_2 t dt}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda} - \frac{\alpha_2 \sin^2 \varphi t^3 dt}{\sqrt{1 + 4\lambda^2 (\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda)^2}} \right].$$

После интегрирования имеем

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 = & \frac{1}{4\pi(1-\mu_0)^2} \left[\left(2\alpha_1 + \frac{2}{3} \right) - (\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\pi\lambda + \right. \\ & + \left. \left\{ \frac{4}{3}(2\alpha_1 + \alpha_2 + 9)(1 + \lambda^2) - (1 - \lambda^2) \right\} \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 + \lambda^2}} K_{(k)} - \right. \\ & \left. + \left\{ \left(\frac{2\alpha_1}{3} - 1 \right) (4\lambda^2 - 1) - \frac{4}{3}\alpha_2(1 - \lambda^2) - 1 \right\} \sqrt{1 + \lambda^2} E_{(k)} \right]. \end{aligned}$$

Эпюра U в пределах круглой загруженной площадки не осесимметрична. Она может быть представлена эллиптическим параболоидом с уравнением поверхности

$$U = U_0 - \frac{\rho^2}{a^2} (U_0 - U_1 \cos^2 \varphi - U_2 \sin^2 \varphi),$$

где ρ и φ – полярные координаты точки с перемещением u ; a – радиус круга; U_0 , U_1 и U_2 – значения горизонтальных смещений точек 0, 1 и 2.

Нетрудно убедиться, что при $\rho = 0$ $U = U_0$, а при $\rho = a$ $U = U_1 \cos^2 \varphi + U_2 \sin^2 \varphi$ и, следовательно, при $\varphi = 0$ $U = U_1$ и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $U = U_2$.

Смещение жесткой круглой площадки определим как среднее перемещение гибкой площадки, нагруженной горизонтальным равномерным напряжением τ :

$$U_m = \iint_F \frac{U \rho d\rho d\varphi}{\pi a^2} = \frac{2U_0 + U_1 + U_2}{4},$$

откуда

$$U_m = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \tau a \bar{U}_m = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{T}{\pi a} \bar{U}_m.$$

Осадка и крен круглой площадки, нагруженной моментной нагрузкой.

Примем, что при действии моментной нагрузки $M = Nl$ распределение давления кососимметрично к оси, перпендикулярной плоскости действия момента.

Предположим также, что распределение напряжений для всех линий плоскости нагруженной круглой площадки, параллельных плоскости действия момента, изменяется по тому же закону, как и для осевой линии, т.е.

$$\sigma_{(\rho, \varphi)} = \frac{4M}{\pi a^3} \left(1 - \frac{\rho}{a} \cos \varphi \right) = \sigma_k \left(1 - \frac{\rho}{a} \cos \varphi \right),$$

где $\sigma_k = \frac{4M}{\pi a^3}$.

В такой постановке задача была решена совместно с Р. С. Шляпиным. В 1970 году было принято, что осадка и крен такого фундамента определяется выражением

$$S_{(\rho, \varphi)} = S_c - \rho \cos \varphi i,$$

где

$$S_c = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{M}{\pi a^2} \overline{W}_{\theta(\lambda)},$$

$$i = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{M}{\pi a^2} \overline{W}'_{\theta(\lambda)}.$$

Откуда

$$S_{(\rho, \varphi)} = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{M}{\pi a^2} \left(1 - \frac{\rho}{\Phi} \cos \varphi \right) \overline{W}_{\theta(\lambda)}.$$

Значения $\overline{W}_{\theta(\lambda)}$ находятся также на основе формул Р. Миндлина и получены в следующем виде:

$$\overline{W}_{\theta(\lambda)} = \frac{1}{2\pi(1 - \mu_0)^2} \left[\frac{2}{3} + \beta\pi\lambda - \left\{ \lambda^2 - \frac{2}{3}(5\alpha - 4\beta) \right\} (1 + \lambda^2) \right] x \frac{\lambda^2}{\sqrt{1 - \lambda^2}} K_{(k)} +$$

$$+ \left\{ \frac{3 + 2\lambda^2}{2} \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \left[1 - \frac{4}{3}(2\alpha - \beta) \right] 2\lambda^2 - \frac{\lambda_1 - 2\beta}{3} \right\} \sqrt{1 + \lambda^2} E_{(k)},$$

где $K_{(k)}$ и $E_{(k)}$ – полные эллиптические интегралы первого и второго модуля K при $K^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2}$; $\alpha = (3 - 4\mu_0)$ и $\beta = 4(1 - \mu_0)^2$. Значение $\overline{W}_{\theta(\lambda)}$ для $\mu_0 = 0,35$ приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

λ	$\bar{W}_{\theta(\lambda)}$	λ	$\bar{W}_{\theta(\lambda)}$
0,0	1,6976	7,0	0,8949
0,5	1,2706	10,0	0,8046
1,0	0,9961	15,0	0,8038
1,5	0,8908	20,0	0,8037
2,0	0,8480	25,0	0,8037
3,0	0,8187	30,0	0,8036
4,0	0,8104	50,0	0,8036
5,0	0,8072		

Перемещения жестких горизонтальных прямоугольных площадок

Осадки от вертикальной нагрузки. Формулы для вычисления осадок прямоугольных площадок с использованием метода угловой точки были получены В. В. Леденёвым и Р. С. Шеляпиным.

Согласно решения, основанного также на формулах Р. Миндлина, осадка угловой точки и средняя осадка жесткого фундамента имеют следующие выражения:

$$\bar{W}_{\text{уг}} = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{P}{b} \bar{W}_{\text{уг}(n, \lambda)},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{W}_{\text{уг}(n, \lambda)} = & \frac{1}{8\pi n(1 - \mu_0)^2} \left\{ \frac{2\pi\lambda^2}{\sqrt{1 + n^2 + 4\lambda^2}} \left[\frac{1}{n^2 + 4\lambda^2} + \frac{1}{1 + 4\lambda^2} \right] + \right. \\ & + \frac{8(1 - \mu_0)^2 - (3 - 4\mu_0)}{2} \left[\ln \frac{\sqrt{1 + n^2 + 4\lambda^2} + n}{\sqrt{1 + n^2 + 4\lambda^2} - n} + n \ln \frac{\sqrt{1 + n^2 + 4\lambda^2} + 1}{\sqrt{1 + n^2 + 4\lambda^2} - 1} \right] \\ & + \frac{(3 - 4\mu_0)}{2} \left[\ln \frac{\sqrt{1 + n^2} + n}{\sqrt{1 + n^2} - n} + n \ln \frac{\sqrt{1 + n^2} + 1}{\sqrt{1 + n^2} - 1} \right] - \\ & \left. - 4\lambda(1 - \mu_0)^2 \operatorname{arctg} \frac{n}{2\lambda\sqrt{1 + n^2 + 4\lambda^2}} \right\}, \end{aligned}$$

b – меньшая сторона прямоугольного фундамента; $n = a/b$ – отношение сторон прямоугольного фундамента.

Величина средней осадки фундамента вычисляется по формуле

$$S_{0(\lambda)} \approx S_{\omega} = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{P}{b} \bar{S}_{m(n, \lambda)},$$

где

$$\bar{S}_{m(n, \lambda)} = \frac{4W_{yT(n, 2\lambda)} + W_{y(n, \lambda)}}{3}.$$

Значения $\bar{W}_{yT(n, \lambda)}$ и $\bar{S}_{m(n, \lambda)}$ – вычисленные по формулам и представлены в табл. 4.3.

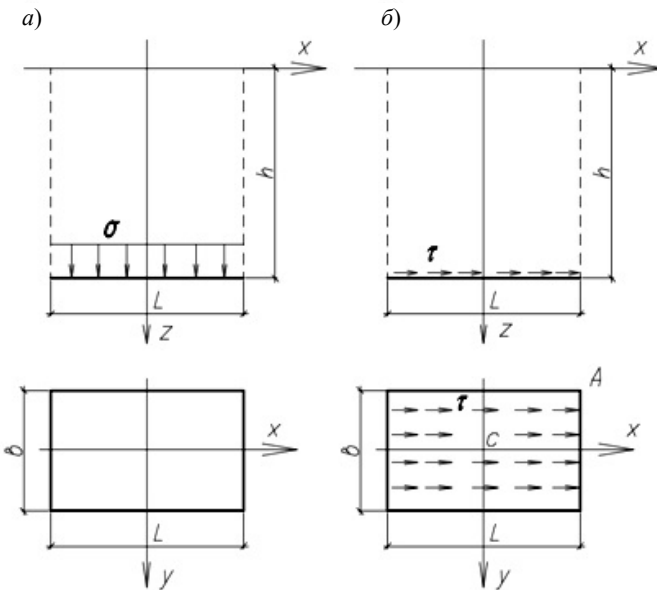


Рис. 4.3. Схемы нагружения прямоугольной площадки равномерно-распределенной вертикальной (а) и горизонтальной (б) нагрузками

Таблица 4.3

λ	Значения $\bar{W}_{уг(n,\lambda)}$ при n			Значения $\bar{S}_{m(n,\lambda)}$ при n		
	1,0	1,5	2,0	1,0	1,5	2,0
0,0	0,5611	0,4525	0,3829	0,935	0,754	0,638
0,5	0,4942	0,4100	0,3518	0,835	0,690	0,592
1,0	0,4229	0,3594	0,3140	0,729	0,616	0,536
2,0	0,3523	0,2995	0,2641	0,611	0,519	0,457
3,0	0,3226	0,2718	0,2386	0,559	0,472	0,415
4,0	0,3069	0,2566	0,2241	0,527	0,442	0,387
5,0	0,2972	0,2472	0,2149	0,509	0,485	0,370
7,0	0,2861	0,2361	0,2040	0,486	0,403	0,346
10,0	0,2776	0,2277	0,1957	0,469	0,386	0,333

Горизонтальное смещение заглубленной прямоугольной площадки под действием горизонтальной силы

Используем метод «угловой точки» для определения среднего горизонтального перемещения прямоугольной площадки, полагая, что ее можно приближенно считать равной горизонтальному смещению жесткого штампа. Тогда

$$W_0 \approx W_m \approx \frac{2U_C + U_A}{3},$$

где U_C – горизонтальное перемещение центра прямоугольника; U_A – горизонтальное перемещение его угла.

Для осадки центра площадки интегрирование от элементарной сосредоточенной силы необходимо выполнить для четырех прямоугольников 1 и четырех прямоугольников 2.

$$dT = \tau \rho d\rho d\varphi = \frac{T}{4nb^2} \rho d\rho d\varphi.$$

Для получения смещения угла площадки оказывается необходимым осуществить интегрирование для прямоугольников 3 и 4.

Рассматривая формулу Р. Миндлина для горизонтального смещения заданной точки от горизонтальной силы как функцию влияния

(функцию Грина) и переходя к безразмерным величинам $-z = h = \lambda b$,
 $\rho = tb$; $R_1 = bt$; $R_2 = b\sqrt{t^2 + 4\lambda^2}$, получим

$$U = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{dT}{b} \frac{1}{b\pi(1 - \mu_0)^2} \Phi_{(t,\lambda)},$$

где

$$\Phi_{(t,\lambda)} = \left[\frac{3 - 4\mu}{t} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2}} + \frac{x^2}{t^3} + \frac{2\lambda^2 + (3 - 4\mu_0)x^2}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^3}} - \frac{6\lambda^2 x^2}{\sqrt{(t^2 + 4\lambda^2)^5}} + \frac{4(1 - \mu_0)(1 - 2\mu_0)}{\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda} - \frac{4(1 - \mu_0)(1 - 2\mu_0)x^2}{\sqrt{x^2 + 4\lambda^2} \left(\sqrt{t^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda \right)^2} \right].$$

Тогда значения $U_0 = U_m$ можно выразить в виде

$$U_0 = U_m = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{T}{b} \bar{U}_m,$$

где \bar{U}_m может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \bar{U}_m &= \frac{8(\bar{U}_1 + \bar{U}_2) + (\bar{U}_3 + \bar{U}_4)}{3} = \\ &= \frac{1}{96\pi n(1 - \mu_0)^2} \left[8 \sum_{i=1}^8 \int_0^{\varphi_i} d\varphi \int_0^{t_i} \Phi_{(t,\lambda)} t dt + \sum_{i=3}^4 \int_0^{\varphi_i} d\varphi \int_0^{t_i} \Phi_{(t,2)} t dt \right]. \end{aligned}$$

В соответствии с условиями разбиения прямоугольника значения X_i и пределы интегрирования φ_i и t_i будут иметь следующие значения:

треугольник 1

$$x_1 = t \cos \varphi; 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + n^2}}; 0 \leq t \leq t_1 = \frac{\pi}{\cos \varphi};$$

треугольник 2

$$x_2 = t \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \varphi_2 = \arcsin \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}}; 0 \leq t \leq t_2 = \frac{1}{\cos \varphi};$$

треугольник 3

$$x_3 = t \cos \varphi; 0 \leq \varphi \leq \varphi_3 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}; 0 \leq t \leq t_3 = \frac{2\pi}{\cos \varphi};$$

треугольник 4

$$x_4 = t \sin \varphi; 0 \leq \varphi \leq \varphi_4 = \arcsin \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}; 0 \leq t \leq t_4 = \frac{2}{\cos \varphi}.$$

После интегрирования и некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \bar{W}_m = & \frac{1}{96\pi(1-\mu_0)^2} \left\{ 4(1-\mu_0) \left[5 \left(\ln \frac{\sqrt{1+n^2}+n}{\sqrt{1+n^2}-n} + \pi \ln \frac{\sqrt{1+n^2}+1}{\sqrt{1+n^2}-1} + \right. \right. \right. \\ & + 4 \ln \frac{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2}+n}{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2}-n} + \left. \left. \ln \frac{\sqrt{1+n^2+\lambda^2}+n}{\sqrt{1+n^2+\lambda^2}-n} \right) \right] + \\ & + (7-8\mu_0)\lambda \left[8 \operatorname{arctg} \left(\frac{2\lambda}{n} \sqrt{1+n^2+4\lambda^2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{n} \sqrt{1+n^2+\lambda^2} \right) \right) \right] + \\ & + 16(1-\mu_0)(1-2\mu_0) \left[\ln \frac{\sqrt{1+n^2+16\lambda^2}+n}{\sqrt{1+n^2+16\lambda^2}-n} + n \ln \frac{\sqrt{1+n^2+16\lambda^2}+1}{\sqrt{1+n^2+16\lambda^2}-1} \right] + \\ & + 144(1-\mu_0)(1-2\mu_0)\lambda \operatorname{arctg} \left(\frac{4\lambda}{n} \sqrt{1+n^2+\lambda^2} \right) - \\ & - 9 \left[\frac{7-8\mu}{2} \pi \lambda + \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Вычисленные по этой формуле значения \bar{U}_m при $\mu_0 = 0,35$ приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

λ	$n = 0,5$	$n = 0,5$	$n = 0,5$	λ	$n = 0,5$	$n = 0,5$	$n = 0,5$
0	1,174	1,290	0,902	2,0	1,093	0,909	0,663
0,5	1,296	1,034	0,755	3,0	1,084	0,838	0,618
1,0	1,188	0,982	0,708	5,0	1,013	0,809	0,606

**Приближенное определение крена
заглубленной жесткой прямоугольной площадки
от действия момента M**

Задача решена совместно с А. И. Ананьиным. Положим распределение контактных напряжений по площадке в виде кососимметричной эпюры. Тогда напряжения в некоторой произвольной точке K с координатами $S = \xi a$ и $t = \eta b$ могут быть определены в виде

$$\sigma_k = \frac{3M}{4a^2b} \frac{S}{a} = a\xi,$$

где $a = \frac{3M}{4a^2b}$ – краевое напряжение (M/W) на площадке при $\xi = 1$.

Осадку произвольной точки M с координатами $x_0 = xa$ и $y_0 = yb$ от действия вертикальной силы в точке $K(s, t)$ при $P = 1$ можно рассматривать как функцию влияния (функцию Грина). Эту функцию можно определить из формулы Р. Миндлина. Если принять $n = a/b$, тогда радиусы-векторы R_1 и R_2 в формуле для осадки необходимо принять равными:

$$R_1^2 = (x_0 - s)^2 + (y_0 - t)^2 = a^2(x - \xi)^2 + b^2(y - \eta)^2 = b^2 R_1^{12};$$

$$\bar{R}_1^2 = n^2(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2;$$

$$R_2^2 = R_1^2 + 4h^2 = b^2(R_1^2 + 4\lambda^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{W}_{(x,y,\xi,n)} &= \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{1}{8n(1 - \mu_0)^2} \times \\ &\times \left[\frac{3 - 4\mu_0}{R_1} + \frac{8(1 - \mu_0)^2 - (3 - 4\mu_0)}{R_2} + \frac{2(5 - 8\mu_0)h^2}{R_2^3} + \frac{24h^2}{R_2^3} \right] \end{aligned}$$

или, переходя к безразмерным величинам и принимая $h = \lambda b$, получим

$$\bar{W}_{(x,y,\xi,n)} = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{1}{b} \Phi_{(x,y,\xi,\eta)},$$

где

$$\Phi_{(x,y,\xi,\eta)} = \frac{1}{8n(1-\mu_0)^2} \times \left[\frac{3-4\mu_0}{\bar{R}_1} + \frac{B(1-\mu_0)^2 - (3-4\mu_0)}{\bar{R}_2} + \frac{2(5-8\mu_0)\lambda^2}{\bar{R}_2^3} + \frac{24\lambda^2}{\bar{R}_2^5} \right].$$

Функцию нагрузки для точки K можно записать в следующем виде:

$$P = \sigma_k ds dt = \alpha \xi a d\xi b d\eta = \alpha ab \xi d\xi d\eta$$

или

$$P = P_{(\xi,\eta)} d\xi d\eta,$$

где $P_{(\xi,\eta)} = \alpha ab \xi$.

Тогда осадка точки M получается в результате произведения функции Грина на функцию нагрузки.

$$W_{(x_0,y_0)} = \int_{-1}^{+1} 2d\xi \int_0^1 \bar{W}_{(x,y,\xi,\eta)} P_{(\xi,\eta)} d\eta.$$

После подстановки в эту формулу функции Грина и нагрузки получим

$$W_{(x_0,y_0)} = \int_{-1}^{+1} 2d\xi \int_0^1 \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{1}{b} \Phi_{(x,y,\xi,\eta)} \alpha ab \xi d\eta,$$

откуда

$$W_{(x_0,y_0)} = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{3M}{4a^2} W_{(x,y)},$$

где

$$W_{(x,y)} = \frac{n}{4n(1-\mu_0)^2} \times \int_{-1}^{+1} \xi d\xi \int_0^1 \left[\frac{3-4\mu}{\bar{R}_1} + \frac{8(1-\mu_0)^2 - (3-4\mu)}{\bar{R}_2} + \frac{2(5-8\mu_0)\lambda^2}{\bar{R}_2^3} + \frac{24\lambda^4}{\bar{R}_2^5} \right] d\eta.$$

После интегрирования значения $W_{(x,y)}$ получим в таком виде

$$\begin{aligned}
 W_{(x,y)} = & \frac{n}{8n(1-\mu_0)^2} \left\{ x(1-2\mu_0)^2 4\lambda \sum_{i=1}^{\xi} \left[2\lambda x_i \frac{y_i z_{i+2} + y_2 z_i}{4\lambda^2 - x_i^2 y_1 y_2} \right] + \right. \\
 & + (3-4\mu_0) \left[\sum_{i=1}^2 y_i \ln \frac{\rho_{z_{i-1}} + x_1}{\rho_{z_i} - x_2} + \sum_{i=1}^2 x_i \ln \frac{\rho_i + y_1}{\rho_{i+2} - y_2} \right] + \\
 & + (5-12\mu_0 + 8\mu_0^2) \left[\sum_{i=1}^2 y_i \ln \frac{z_{z_{i-1}} + x_1}{z_{z_i} - x_2} + \sum_{i=1}^2 x_i \ln \frac{z_i + y_1}{z_{i+2} - y_2} \right] + \\
 & + \frac{2\lambda^2 y_1}{y_1^2 + 4\lambda^2} \sum_{i=1}^2 \frac{x_i^3 + x_i(y_1^2 + 8\lambda^2)}{z_i(x_i + 4\lambda^2)} + \frac{2\lambda^2 y_2}{y_2^2 + 4\lambda^2} \sum_{i=1}^2 \frac{x_i^3 + x_i(y_2^2 + 8\lambda^2)}{z_{i+2}(x_i^2 + 4\lambda^2)} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \left(\frac{3-4\mu_0}{2} \left[\sum_{i=1}^2 y_i (\rho_{2i} - \rho_{2i-1}) + \sum_{i=1}^2 (-1)^2 x_i^2 \ln \frac{\rho_i + y_1}{\rho_{i+2} - y_2} \right] + \right. \\
 & + \frac{5-12\mu_0 + 8\mu_0^2}{2} \left[\sum_{i=1}^2 y_i (z_{2i} - z_{2i-1}) + \sum_{i=1}^2 (-1)^2 (4\lambda^2 + x_i^2) \ln \frac{z_i + y_1}{z_{i+2} - y_2} \right] - \\
 & - 8\lambda^4 \left[\sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^2 y_i}{(x_i^2 + 4\lambda^2) z_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i y_2}{(x_i^2 + 4\lambda^2) z_{i+2}} \right] - \\
 & \left. - 2\lambda^2 (5-8\mu_0) \sum_{i=1}^2 (-1)^i \ln \frac{z_i + y_1}{z_{i+2} - y_2} \right\}.
 \end{aligned}$$

В формуле кроме ранее принятых обозначений дополнительно введены следующие:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= n(1+x), \quad x_2 = n(1-x), \quad y_1 = 1+y; \\
 y_2 &= 1-y, \quad \rho_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad \rho_2^2 = x_2^2 + y_1^2; \\
 \rho_3^2 &= x_1^2 + y_2^2, \quad \rho_4^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad z_i = 4\lambda^2 + \rho_i^2.
 \end{aligned}$$

На рисунке 4.4 представлен пример, рассчитанный по формулам, поверхности осадки одного квадрата прямоугольной площадки, нагруженной моментной нагрузкой $\sigma = \alpha \xi$ для $\mu = 0,3$ при $\lambda = 0$ и $n = 1$. Для того чтобы перейти от этой поверхности к определению крена жесткой площадки, уравнение осадок которой имеет выражение $W_{(x_0,y_0)} = \alpha i$, подберем такое значение i , чтобы отклонение плоскости $W_{(x_0,y_0)}$ от поверхности $W_{(x_0,y_0)}$ было минимальным. Воспользуемся

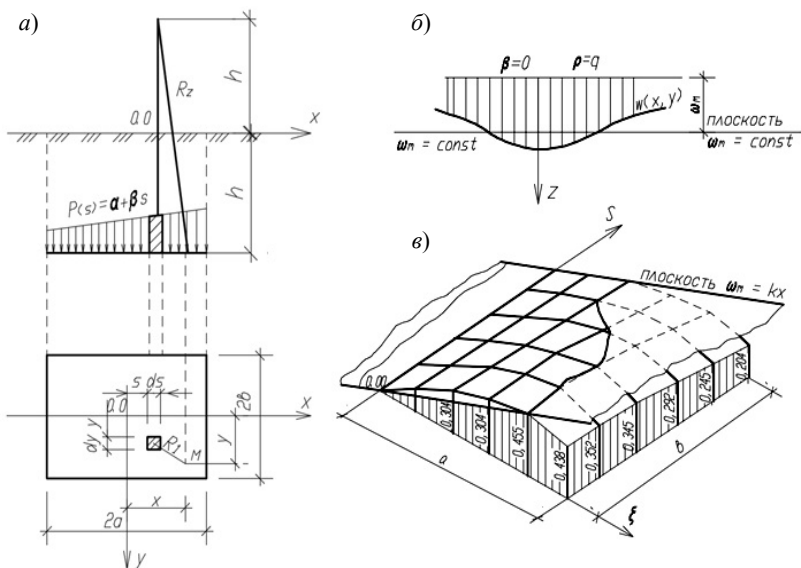


Рис. 4.4. Схема к расчету фундамента (а), эпюры осадок при центральной (б) и внецентренной нагрузках (в)

для этого методом наименьших квадратов. Отклонение плоскости от истинной поверхности для произвольной точки площадки M

$$\Delta = W_{(x_0, y_0)} - aix,$$

$$\Delta^2 = [W_{(x_0, y_0)}]^2 - 2W_{(x_0, y_0)}aix + a^2i^2x^2.$$

Сумма квадратов отклонений для всей площади

$$\iint_F \Delta^2 dx_0 dy_0 = \iint_F \left\{ [W_{(x_0, y_0)}]^2 - 2W_{(x_0, y_0)}aix + a^2i_x^2x^2 \right\} ab dx dy.$$

Минимум функции

$$\frac{d \left[\iint_F \Delta^2 dx_0 dy_0 \right]}{d[i]} = \iint_F \left[-2W_{(x_0, y_0)}ax + 2ia^2x^2 \right] ab dx dy = 0.$$

Сокращая на $2a^2b$, выражение для i представим в таком виде:

$$i = \frac{\iint_F W_{(x_0, y_0)} x dx dy}{\iint_F ax^2 dx dy}.$$

Знаменатель формулы для одного квадранта прямоугольной площадки будет равен

$$\iint_F ax^2 dx dy = a \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 dy = \frac{a}{3}.$$

Подставляя в формулу значение $W_{(x_0, y_0)}$, получим

$$i = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{3M}{4a^2} \frac{3}{a} \int_0^1 x dx \int_0^1 W_{(x, y)} dy$$

или

$$i = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{3M}{4a^2} \bar{i},$$

где $\bar{i} = 3 \int_0^1 x dx \int_0^1 W_{(x, y)} dy$.

Вычисленные значения \bar{i} приведены в табл. 4.5.

Таблица 4.5

λ	Значение \bar{i} при n			
	0,25	0,50	1,00	2,00
0	0,2018	0,451	0,7341	1,2106
0,5	0,1655	0,4436	0,6400	1,0967
1,0	0,1342	0,3146	0,5037	0,9500
2,0	0,1143	0,2522	0,3881	0,7893
3,0	0,1051	0,2339	0,3780	0,7037
5,0	0,1042	0,2209	0,3576	0,5808

Таблица 4.6

n	0,25	0,50	1,00	2,00
τ_0 по табл. 4.5	0,2008	0,451	0,7341	1,2108
τ_0 по Горбунову-Посадову	0,207	0,397	0,697	1,147
τ_0/τ_p	0,9700	1,111	1,053	1,056

Оценку точности полученных значений i можно проверить на основнии сопоставления полученных знаний при $\lambda = 0$ с коэффициентами, полученными М. И. Горбуновым-Посадовым. Это сравнение представлено в табл. 4.6.

О соотношении перемещений оснований в направлении, перпендикулярном направлению действия силы, и в направлении ее действия. Очевидно, что любое действие нагрузки в линейно деформируемой среде вызывает не только перемещения по направлению действия силы, но и другие деформации-перемещения в направлениях, перпендикулярных ее действию, и крены площадок, находящихся за пределом нагруженной площади. В целях выяснения доли перемещений, возникающих в основании, в направлениях, перпендикулярных действию нагрузки, по отношению к перемещениям, по ее направлению рассмотрим пример, представленный на рис. 4.5.

Жесткая площадка квадратной формы в плане со сторонами $2b$ находится на глубине h от поверхности среды и нагружена вертикальной силой F . Определим отношения вертикального смещения основания – его осадку S и горизонтальное перемещение U по направлению оси X в точках A, B, C, D, E и F . Соответствующие координаты этих точек относительно центра квадратного фундамента будут:

$$X_A = b, \quad X_B = 2b, \quad X_C = 3b,$$

$$X_D = 5b, \quad X_E = 8b, \quad X_F = 10b.$$

Вертикальные перемещения основания. Для этой цели необходимо использовать метод угловых точек, а за пределами нагруженной площадки непосредственно формулу Р. Миндлина, полагая

$$P = \sigma_m ab = \sigma_m nb^2,$$

где $n = a/b$.

Тогда для метода угловой точки мы получим выражение

$$W_{y_2} = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b \bar{W}_{y_2},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{W}_{y_2} = & \frac{1}{8\pi(1-\mu_0)^2} \left[\frac{2\pi\lambda^2}{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2}} \left(\frac{1}{n^2+4\lambda^2} + \frac{1}{1+4\lambda^2} \right) + \right. \\ & + \frac{8(1-\mu_0)^2 - (3-4\mu_0)}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} + n}{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} - n} + n \ln \frac{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} + 1}{\sqrt{1+n^2+4\lambda^2} - 1} \right) + \\ & + \frac{3-4\mu_0}{2} \left(\ln \frac{\sqrt{1+n^2} + n}{\sqrt{1+n^2} - n} + n \ln \frac{\sqrt{1+n^2} + 1}{\sqrt{1+n^2} - 1} \right) - \\ & \left. - 4\lambda(1-\mu_0)^2 \operatorname{arctg} \frac{n}{2\lambda\sqrt{1+n^2+4\lambda^2}} \right]. \end{aligned}$$

Полагая $m = \frac{z}{b}$, $n = \frac{a}{b}$, $\lambda = \frac{H}{b}$ и рассматривая сосредоточенную силу $P = \sigma_m n b^2$ как равнодействующую, приложенной нагрузки в соответствии с принципом Сен-Венана, получим

$$S = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b \bar{W},$$

$$\begin{aligned} \bar{W} = & \frac{n}{8\pi(1-\mu_0)^2} \times \\ & \times \left[\frac{3-4\mu_0}{m} + \frac{8(1-\mu_0)^2 - (3-4\mu_0)}{\sqrt{m^2+4\lambda^2}} + \frac{2\lambda^2(5-8\mu_0)}{\sqrt{(m^2+4\lambda^2)^3}} + \frac{24\lambda^2}{\sqrt{(m^2+4\lambda^2)^5}} \right]. \end{aligned}$$

Если заглабление площадки примем равной $H = 8b$ или $4(2b)$, т.е. четырехкратной длины стороны площадки, то для угловой точки $t - \lambda = 4$, а для остальных точек A, B и $C - \lambda = 8$. Вычисленные значения \bar{W}_{y_1} приведены в табл. 4.7.

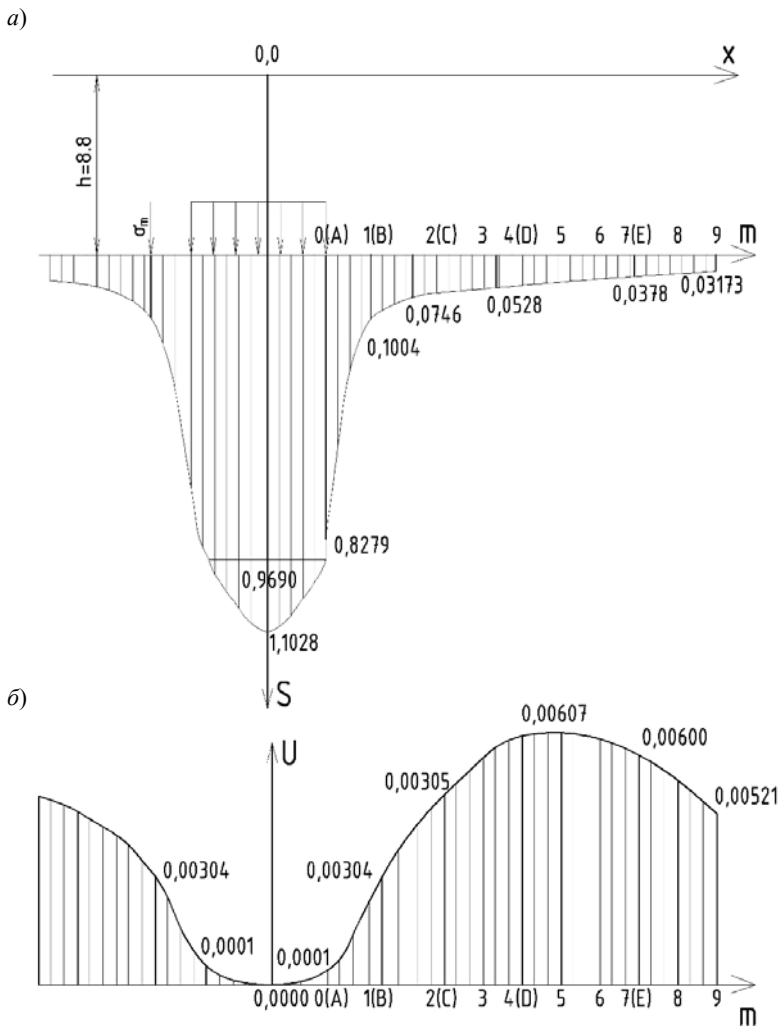


Рис. 4.5. Эпюры вертикальных (а) и горизонтальных (б) перемещений массива в горизонтальной плоскости на уровне подошвы гибкого штампа

Произведен расчет коэффициентов осадок для значений $m = 2, 3, 5, 8$ и 10 . Соответствующие значения \bar{W} приведены в табл. 4.8.

Таблица 4.7

$\bar{W}_{\text{уг}}$ ($\lambda = 4, n = 1$)	$\bar{W}_{\text{уг}}$ при $\lambda = 8$ и при n			
	1	2	3	4
0,3142	0,2907	0,4136	0,5322	0,5628

Таблица 4.8

\bar{W} при $\lambda = 8$ и m				
2	3	5	8	10
0,1004	0,0746	0,0528	0,0378	0,0317

На основании формул легко могут быть вычислены осадки всех интересующих нас точек:

1) осадки в пределах загруженной площадки:

$$S_0 = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b \cdot 4 \cdot 0,2907 = 1,1628 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

$$S_t = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m 2b \cdot 0,3142 = 0,6884 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

$$S_A = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b \cdot 2 \cdot 0,4136 = 0,8272 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

$$S_0 = \frac{2S_0 - S_t}{3} = 0,9690 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

2) осадки в точках за пределами загруженной площадки:

в точке B

$$S_B = 0,1004 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке C

$$S_C = 0,8746 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке D

$$S_D = 0,0528 \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке E

$$S_E = 0,0378 \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке F

$$S_F = 0,0317 \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b.$$

На рисунке 4.5 приведена соответствующая эпюра осадок, причем в пределах загруженной площади учтена жесткость площадки путем вычисления средней осадки.

Горизонтальные перемещения в основании, вызванные вертикальной нагрузкой. Используя вторую формулу Р. Миндлина, выведем формулы для подсчета горизонтальных перемещений в основании, вызванных вертикальной нагрузкой.

Для определения перемещения в пределах загруженной площадки используем метод угловой точки. Для точек вблизи площадки используем метод интегрирования равномерной нагрузки по загруженной площадке, а для точек, достаточно удаленных от загруженной площадки, осадку будем определять, используя принцип Сен-Венана, как от сосредоточенной силы.

Формулу Миндлина для случая $z = h$ и при переходе к относительным величинам

$$\lambda = H/b, \quad n = a/b, \quad x = \xi nb,$$

где $\xi = x/a$, $\eta = y/b$, $\rho = mb$, можно представить в таком виде

$$U = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} P\Psi_{(\xi,\eta)},$$

$$\Psi_{(\xi,\eta)} = \frac{n\xi}{8b\pi(1-\mu_0)^2} \left[\frac{12\lambda^2}{\bar{R}_2^5} - \frac{\alpha}{\bar{R}_2(\bar{R}_2 + 2\lambda)} \right],$$

где

$$\alpha = 4(1-\mu_0)(1-2\mu_0),$$

$$\bar{R}_2 = \sqrt{n^2\xi^2 + \eta^2 + 4\lambda^2} = \sqrt{m^2 + 4\lambda^2}.$$

Горизонтальные перемещения угловой точки. Для определения горизонтального смещения точки O выделим элементарную сосредоточенную силу $\Delta P = \sigma_m dx dy = \sigma_m n b^2 d\xi d\eta$, и тогда формула может быть записана в виде

$$U_{\text{уг}} = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b \bar{U}_{\text{уг}},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\text{уг}} &= \frac{n^2}{8\pi(1 - \mu_0)^2} \int_0^1 d\eta \int_0^1 \left[\frac{12\lambda^5}{R_2^5} - \frac{\alpha}{R_2(R_2 + 2\lambda)} \right] \xi d\xi = \\ &= \frac{1}{8\pi(1 - \mu_0)^2} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} - \frac{4\lambda^3}{(n^2 + 4\lambda^2)\sqrt{1 + n^2 + 4\lambda^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \int_0^1 \ln \left(\frac{2\lambda + \sqrt{\eta^2 + n^2 + 4\lambda^2}}{2\lambda + \sqrt{\eta^2 + 4\lambda^2}} \right) d\eta \right]. \end{aligned}$$

Значения $U_{\text{уг}}$ для $\mu_0 = 0,35$ и необходимых для расчета значений λ и $n = 1$ и 2 приведены в табл. 4.9.

Горизонтальное перемещение за пределами загруженной площадки. Так же как и в предыдущем случае, выделяется сосредоточенная сила и вычисляется перемещение по той же формуле, но с иными пределами интегрирования по переменной x . Пределы для x должны быть приняты $c - a$ и $c + a$ или при переходе к безразмерной переменной $\xi - m - n$ и $m + n$.

Следовательно, горизонтальное перемещение точки N определится выражением

$$U_N = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b \bar{U}_N,$$

Таблица 4.9

$\bar{U}_{\text{уг}}$ при $\lambda = 4$ и $n = 1$	$\bar{U}_{\text{уг}}$ при $\lambda = 8$ и n	
	1	2
0,000802	0,000204	0,000795

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_N &= \frac{n^2}{4\pi(1-\mu_0)^2} \int_0^1 d\eta \int_{m-n}^{m+n} \left[\frac{12\lambda^3}{R_2^5} - \frac{\alpha}{R_2(R_2+2\lambda)} \right] \xi d\eta = \\ &= \frac{1}{4\pi(1-\mu_0)^2} \left[\frac{4\lambda^3}{\left[(m-n)^2 + 4\lambda^2 \right] \sqrt{1+(m-n)^2 + 4\lambda^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\lambda^3}{\left[(m+n)^2 + 4\lambda^2 \right] \sqrt{1+(m+n)^2 + 4\lambda^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \int_0^1 \ln \left(\frac{2\lambda + \sqrt{\eta^2 + (m+n)^2 + 4\lambda^2}}{2\lambda + \sqrt{\eta^2 + (m+n)^2 + 4\lambda^2}} \right) d\eta \right]. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов \bar{U}_N по формуле были вычислены для $n = 1$ и $m = 2, 3, 5$ и приведены в табл. 4.10.

Горизонтальные перемещения точки от действия сосредоточенной силы $N = \sigma_m 4nb^2$. Учитывая, что для достаточно удаленных от нагруженной площадки точек ее действие в соответствии с принципом Сен-Венана может быть заменено действием сосредоточенной силы, выражение может быть представлено в виде

$$U = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b \bar{U},$$

$$\bar{U} = \frac{m}{2\pi(1-\mu_0)^2} \left[\frac{12\lambda^3}{\sqrt{(m^2 + 4\lambda^2)^5}} - \frac{\alpha}{\sqrt{m^2 + 4\lambda^2} \left(\sqrt{m^2 + 4\lambda^2} + 2\lambda \right)} \right].$$

Таблица 4.10

Значения \bar{U}_N при m		
2	3	5
0,003038	0,004358	0,006068

Таблица 4.11

Значения \bar{U} при m		
5	8	10
0,006068	0,006004	0,005211

Значения соответствующих координат при $\mu = 0,35$ и $\lambda = 8$, вычисленные по для $m = 5, 8, 10$, даны в табл. 4.11.

Подтверждение правильности выведенных формул следует из сопоставления значений \bar{U}_N из табл. 4.10 для $m = 5$ со значениями \bar{U} из табл. 4.11 для того же m . Поскольку эти величины полностью совпадают, сделанные суждения полностью подтверждаются.

Таким образом, горизонтальные перемещения основания составляют:

- 1) для загруженной площадки:
– перемещение точки t

$$U_t = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m 2b \cdot 0,000802 = 0,001604 \sigma_m b;$$

- перемещение точки A

$$U_A = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m 2b \cdot 0,000795 = 0,00159 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

- среднее перемещение основания у грани загруженной площадки

$$U_A = \frac{2U_t + U_A}{3} = 0,001595 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

- 2) перемещение за пределами загруженной площадки:
в точке B

$$U_B = 0,003038 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке C

$$U_C = 0,004358 \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке *D*

$$U_D = 0,006068 \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке *E*

$$U_E = 0,006004 \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b;$$

в точке *F*

$$U_F = 0,005211 \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b.$$

Эпюра горизонтальных перемещений по оси *X* представлена на рис. 4.5.

Полученные значения осадок и горизонтальных перемещений позволяют оценить значение перемещений, возникающих перпендикулярно действию нагрузки. Эти подсчеты представлены в табл. 4.12.

Поскольку у всех значений *S* и *U* общий множитель $\frac{1-\mu_0^2}{E_0} \sigma_m b$, то

сравнение осуществляется по величине безразмерных коэффициентов.

Из таблицы 4.12 следует, что горизонтальное смещение составляет 0,6% от осадки площадки и всего 1,6% от осадки в той же точке.

Эти подсчеты дают основание считать возможным при выполнении расчетов с учетом взаимного влияния нагрузок с различных площадок пренебречь перемещениями, возникающими в направлениях, перпендикулярных действующей нагрузке.

Таблица 4.12

№	Рассматриваемые точки	\bar{W}	\bar{U}	$\bar{U}_i / \bar{W}_i, 100\%$
1	Грань загруженной площадки	0,9690	0,001596	0,2
2	точка <i>B</i>	0,1004	0,003038	3,0
3	точка <i>C</i>	0,0746	0,004358	5,8
4	точка <i>D</i>	0,0528	0,006068	11,5
5	точка <i>E</i>	0,0378	0,006004	15,9
6	точка <i>F</i>	0,0317	0,005211	16,4

Перемещение вертикальной жесткой площадки под воздействием приложенной к ней нагрузки. Поскольку в задаче о перемещениях заделанного в грунтовой среде фундамента значительную роль играет боковая поверхность, рассмотрим зависимости от нагрузок перемещений жесткой прямоугольной площадки.

Геометрическая схема задачи Р. Миндлина представлена на рис. 4.6. Будем искать перемещения этой площадки под действием:

1) нормальной нагрузки T_x как от действия равномерно распределенного давления $\sigma_m = T_x / 4bt$;

2) вертикальной нагрузки N как от действия равномерно распределенного касательного напряжения $T_z = N / 4bt$;

3) от горизонтальной нагрузки в плоскости площадки, как от действия равномерно распределенного касательного напряжения $\tau_y = T_y / 4bt$.

В такой постановке задачи являются, по существу, задачами о перемещениях абсолютно гибких фундаментов. Осуществляя переход к определению перемещений жестких фундаментов, воспользуемся обычно принятым здесь приемом и тогда получим:

$$\begin{aligned} - \text{от действия нагрузки } T_x & \quad U = \frac{4U_0 + U_A + U_B}{6}; \\ - \text{от действия нагрузки } N & \quad W = \frac{4W_0 + W_A + W_B}{6}; \\ - \text{от действия нагрузки } T_y & \quad U = \frac{4V_0 + 4V_A + V_B}{6}, \end{aligned}$$

где индексами O , A и B определены значения соответствующих перемещений точек O – центра площадки и его углов A и B .

Перемещение вертикальной жесткой площадки от действия нормальной нагрузки T_x . Перемещения U от действия горизонтальной нормальной нагрузки T_x будем определять по формуле Р. Миндлина.

Для произвольной точки M с координатами y_0 и z_0 и перемещения U_m от элементарной сосредоточенной силы $\Delta T = \frac{T}{4bt} dydz$:

$$\begin{aligned} \Delta U_M &= \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} T_x \frac{dydz}{bt} \frac{1}{32\pi(1 - \mu_0)^2} \times \\ &\times \left[\frac{3 - 4\mu_0}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2(h + z_0)(h + z)}{R_2^3} + \frac{4(1 - \mu_0)(1 - 2\mu_0)}{R_2 + (2h + z_0 + z)} \right], \end{aligned}$$

где

$$R_1 = \sqrt{(y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} ;$$

$$R_2 = \sqrt{(y_0 - y)^2 + (2h + z + z_0)^2} .$$

Если ввести безразмерные величины

$$\frac{h}{b} = \lambda, \quad \frac{y}{b} = \eta, \quad \frac{z}{b} = \xi, \quad \frac{t}{b} = m, \quad \frac{y_0}{b} = \eta_0, \quad \frac{z_0}{b} = \xi_0 ,$$

то

$$R_1 = b\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (\xi_0 - \xi)^2} ;$$

$$R_2 = b\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi + \xi_0)^2} .$$

Для $R_2 + (2\lambda + \xi + \xi_0)$ можно получить приближенное, но более простое выражение

$$\begin{aligned} [R_2 + (2\lambda + \xi + \xi_0)]^2 &= R_2^2 + 2R_2(2\lambda + \xi + \xi_0) + \\ &+ (2\lambda + \xi + \xi_0)^2 = (\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi + \xi_0)^2 + \\ &+ 2\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi + \xi_0)^2} + (2\lambda + \xi + \xi_0)^4 + \\ &+ (2\lambda + \xi + \xi_0)^2 . \end{aligned}$$

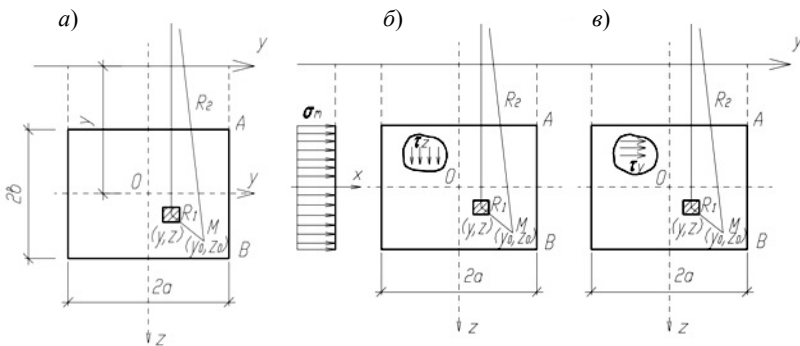


Рис. 4.6. Схемы к определению перемещений вертикальной площадки от действия равномерно распределенной нормальной (а), вертикальной касательной (б) и горизонтальной касательной (в) нагрузок

Если пренебречь выражением $(\eta_0 - \eta)^2(2\lambda + \xi + \xi_0)^2$ по сравнению с $(2\lambda + \xi + \xi_0)^4$ (поскольку $(\eta_0 - \eta)$ меньше 1, в то время как $(2\lambda + \xi + \xi_0)$ значительно больше 1), то $[R_2 + (2\lambda + \xi + \xi_0)]^2 = (\eta_0 - \eta)^2 + 4(2\lambda + \xi + \xi_0)^2$, откуда

$$R_2 + (2\lambda + \xi + \xi_0) = \sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + 4(2\lambda + \xi + \xi_0)^2}.$$

После подстановки безразмерных величин, характеристик и условных сокращений — $\alpha_1 = (3 - 4\mu_0)$ и $\alpha = 4(1 - \mu_0)(1 - 2\mu_0)$, полное перемещение U_M точки M будет равно

$$U_M = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{T_x}{b} \bar{U}_M,$$

где
$$\bar{U}_M = \frac{1}{32\pi(1 - \mu_0)^2 m} [\alpha_1 J_{1,M} + J_{2,M} + J_{3,M} + \alpha_2 J_{4,M}],$$

здесь
$$J_{1,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_B - \eta)^2 + (\xi_B - \xi)^2}};$$

$$J_{2,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\alpha + \xi_0 + \xi)^2}};$$

$$J_{3,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \frac{2[(\lambda + \xi_0)\lambda + (\lambda + \xi_0)\xi] d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (2\alpha + \xi_0 + \xi)^2]^3}};$$

$$J_{4,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + 4(2\alpha + \xi_0 + \xi)^2}}.$$

Если в эти выражения подставить координаты для точек:

$$O - \xi_0 = 0, \quad \eta_0 = 0;$$

$$A - \xi_0 = -m, \quad \eta_0 = -1;$$

$$B - \xi_0 = +m, \quad \eta_0 = 1,$$

то полученные выражения определяют перемещения соответствующих точек:

$$U_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{T_x}{b} \bar{U}_0,$$

где

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{32\pi(1-\mu_0)^2 m} [\alpha_1 J_{1,0} + J_{2,0} + J_{3,0} + \alpha_2 J_{4,0}];$$

$$U_A = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{T_x}{b} \bar{U}_A,$$

$$\bar{U}_A = \frac{1}{32\pi(1-\mu_0)^2 m} [\alpha_1 J_{1,A} + J_{2,A} + J_{3,A} + \alpha_2 J_{4,A}];$$

$$U_B = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{T_x}{b} \bar{U}_B,$$

$$\bar{U}_B = \frac{1}{32\pi(1-\mu_0)^2 m} [\alpha_1 J_{1,B} + J_{2,B} + J_{3,B} + \alpha_2 J_{4,B}].$$

После подстановки этих выражений в формулу будем иметь

$$U = \frac{1-\mu_0^2}{E_0} \frac{T_x}{b} \bar{U},$$

где

$$\bar{U} = \frac{1}{192\pi(1-\mu_0)^2 m} [\alpha_1 \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \alpha_2 \bar{U}_3];$$

$$\bar{U}_1 = 4J_{1,0} + J_{1,A} + J_{1,B};$$

$$\bar{U}_2 = 4(J_{2,0} + J_{3,0}) + J_{2,A} + J_{2,B} + J_{3,A} + J_{3,B};$$

$$\bar{U}_3 = 4J_{4,0} + J_{4,A} + J_{4,B}.$$

Значения \bar{U}_1 , \bar{U}_2 и \bar{U}_3 после интегрирования выражений для $J_{1,M}$; $J_{2,M}$; $J_{3,M}$ и $J_{4,M}$ с соответствующими координатами точек M имеют выражения

$$\bar{U}_1 = 10 \ln \frac{\sqrt{1+m^2} + m}{\sqrt{1+m^2} - m} + 8m \ln \left[\sqrt{\sqrt{1+m^2} + m} + \sqrt{\sqrt{1+m^2} - m} \right] - 4m \ln(2m);$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 = & 8 \ln \frac{(2\lambda + m) + \sqrt{1 + (2\lambda + m)^2}}{(2\lambda - m) + \sqrt{1 + (2\lambda - m)^2}} + 2 \ln \frac{(\lambda + m) + \sqrt{1 + (\lambda + m)^2}}{(\lambda - m) + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}} + \\ & + 4m \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda} - \sqrt{1 + \lambda^2} \right) + \\ & + 16\lambda^2 \left(\frac{\sqrt{1 + (2\lambda + m)^2}}{2\lambda + m} - \frac{\sqrt{1 + (2\lambda - m)^2}}{2\lambda - m} \right) + \\ & + (\lambda + m)\sqrt{1 + (\lambda + m)^2} - (\lambda - m)\sqrt{1 + (\lambda - m)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_3 = & \ln \frac{2(\lambda + m) + \sqrt{1 + 4(\lambda + m)^2}}{2(\lambda - m) + \sqrt{1 + 4(\lambda - m)^2}} + 4 \ln \frac{2(2\lambda + m) + \sqrt{1 + 4(2\lambda + m)^2}}{2(2\lambda - m) + \sqrt{1 + 4(2\lambda - m)^2}} + \\ & + 2(\lambda + m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\lambda + m)^2}}{2(\lambda + m)} - 2(\lambda - m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\lambda - m)^2}}{2\lambda - m}. \end{aligned}$$

Безразмерные функции \bar{U}_1 , \bar{U}_2 и \bar{U}_3 вычислены для $\mu_0 = 0,35$ и представлены в виде таблиц и графиков $\bar{U} = \bar{U}(m, \lambda)$.

Перемещения вертикальной жесткой площадки от действия вертикальной нагрузки N . Для определения вертикальных перемещений W используем формулу Р. Миндлина. Положим

$$\Delta N = \frac{N}{4bt} dydz;$$

$$R_1 = \sqrt{(y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2};$$

$$R_2 = \sqrt{(y_0 - y)^2 + (2h + z_0 - z)^2}.$$

Тогда для точки M

$$\Delta W_M = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} N \frac{dydz}{bt} \frac{1}{32\pi(1 - \mu_0)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{3 - 4\mu_0}{R_1} + \frac{8(1 - \mu_0)^2 - (3 - 4\mu_0)}{R_2} + \frac{(z_0 - z)^2}{R_1^3} + \right.$$

$$+ \frac{(3 - 4\mu_0)(2h + z_0 - z)^2 - 2(h + z_0)(h + z)}{R_2^3} +$$

$$\left. + \frac{6(h + z_0)(h + z)(2h + z_0 - z)^2}{R_2^5} \right].$$

Переходя к безразмерным характеристикам и переменным и обозначая через $\alpha_1 = (3 - 4\mu_0)$ и $\alpha_2 = 8(1 - \mu_0)^2$, получим

$$W_m = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{N}{b} \bar{W}_M,$$

где

$$\bar{W}_m = \frac{1}{32\pi(1 - \mu_0)^2 m} [\alpha_1 \bar{W}_{1,M} + \alpha_2 \bar{W}_{2,M} + \bar{W}_{3,M}],$$

$$\bar{W}_{1,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \left[\frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_B - \eta)^2 - (\xi_B - \xi)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\alpha + \xi_0 + \xi)^2}} + \frac{(2\alpha + \xi_0 + \xi)^2 d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (2\alpha + \xi_0 + \xi)^2]^3}} \right];$$

$$\bar{W}_{2,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\alpha + \xi_0 + \xi)^2}};$$

$$\bar{W}_{3,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \left[\frac{(\xi_B - \xi)^2 d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (\xi_0 + \xi)^2]^3}} - \frac{2(\lambda + \xi_0)(\lambda + \xi) d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (2\alpha + \xi_0 + \xi)^2]^3}} + \frac{6(\lambda + \xi_0)(\lambda + \xi)(2\alpha + \xi_0 + \xi)^2 d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (2\alpha + \xi_0 + \xi)^2]^3}} \right].$$

Если в эти выражения подставить координаты точек O , A и B и использовать формулу, то

$$W_m = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{N}{b} \bar{W},$$

где

$$\bar{W} = \frac{1}{192\pi(1 - \mu_0)^2 m} [\alpha_1 \bar{W}_1 + \bar{W}_3 + \alpha_2 \bar{W}_2];$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_1 &= 4\bar{W}_{1,0} + \bar{W}_{1,A} + \bar{W}_{1,B} = \\ &= 2 \left[(\lambda + m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda + m)^2}}{\lambda + m} + (\lambda - m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}}{\lambda - m} + \right. \\ &\quad \left. + 5 \ln \frac{\sqrt{1 + m^2} + m}{\sqrt{1 + m^2} - m} + 2m \ln \frac{1 + \sqrt{1 + m^2}}{m} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_2 &= 4\bar{W}_{2,0} + \bar{W}_{2,A} + \bar{W}_{2,B} = \\ &= 2 \left[4 \ln \frac{(2\lambda + m) + \sqrt{1 + (2\lambda + m)^2}}{(2\lambda - m) + \sqrt{1 + (2\lambda - m)^2}} + \ln \frac{(\lambda + m) + \sqrt{1 + (\lambda + m)^2}}{(\lambda - m) + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + (\lambda - m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda + m)^2}}{\lambda + m} + (\lambda - m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}}{\lambda - m} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_3 = & 10 \ln \frac{\sqrt{1+m^2}+m}{\lambda+m} + 2(\lambda-m) \ln \frac{1+\sqrt{1+(\lambda-m)^2}}{\lambda-m} + \\ & + 16\lambda^2 \left[\frac{\sqrt{1+(2\lambda+m)^2}}{2\lambda+m} + \frac{\sqrt{1+(2\lambda-m)^2}}{2\lambda-m} \right] + \\ & + \frac{4\lambda[2+(2\lambda+m)^2]}{(2\lambda+m)\sqrt{1+(2\lambda+m)^2}} + \frac{4\lambda[2+(2\lambda-m)^2]}{(2\lambda-m)\sqrt{1+(2\lambda-m)^2}} - \\ & - (\lambda+m)\sqrt{1+(\lambda+m)^2} + (\lambda-m)\sqrt{1+(\lambda-m)^2}. \end{aligned}$$

Безразмерные величины \bar{W}_2 , \bar{W}_2 и \bar{W}_3 вычислены для $\mu_0 = 0,35$ и ряда величин m и λ .

Горизонтальные перемещения вертикальной жесткой площадки от действия горизонтальной касательной силы T_y . Для определения этих перемещений используем вторую формулу Р. Миндлина. Так как направление силы совпадает с осью y , то переменные y и x в формуле следует поменять местами. Используя тот же прием, что и ранее, элементарное горизонтальное перемещение по направлению оси y будет равняться

$$\begin{aligned} \Delta V_M = & \frac{1-\mu_0^2}{E_0} T_y \frac{dydz}{bt} \frac{1}{32\pi(1-\mu_0)^2} \times \\ & \times \left[\frac{3-4\mu_0}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{y^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu_0)y^2 - 2(h+z_0)(h+z)}{R_2^3} + \right. \\ & + \frac{6y^2(h+z_0)(h+z)}{R_2^5} + \frac{4(1-\mu_0)(1-2\mu_0)}{R_2+2h+z_0+z} - \\ & \left. - \frac{4(1-\mu_0)(1-2\mu_0)y^2}{R_2(R_2+2h+z_0+z)^2} \right], \end{aligned}$$

здесь, как и раньше, обозначено:

$$R_1 = \sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (z_0 - z)^2};$$

$$R_2 = \sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2h + z_0 + z)^2};$$

$$R_2 + 2h + z_0 + z = \sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + 4(2h + z_0 + z)^2}.$$

Переходя к безразмерным характеристикам и переменным, а также обозначая через $\alpha_1 = (3 - 4\mu_0)$ и $\alpha_2 = 4(1 - \mu_0)(1 - 2\mu_0)$, перемещение V_M может быть представлено в виде

$$V_M = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{T_y}{b} \bar{V}_M,$$

где

$$\bar{V}_M = \frac{1}{32\pi(1 - \mu_0)^2 m} [\alpha_1 \bar{V}_{1,M} + \bar{V}_{2,M} + \bar{V}_{3,M} + \alpha_2 \bar{V}_{4,M}];$$

$$\bar{V}_{1,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \left[\frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 - (\xi_0 - \xi)^2}} + \frac{\eta^2 d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (2h + \xi_0 + \xi)^2]^3}} \right];$$

$$\bar{V}_{2,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \left[\frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi_0 + \xi)^2}} + \frac{\eta^2 d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (\xi_0 - \xi)^2]^3}} \right];$$

$$\bar{V}_{3,M} = 2(\lambda + \xi_0) \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \left[\frac{(\lambda + \xi) d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi_0 + \xi)^2]^3}} + \frac{3\eta^2 (\lambda + \xi) d\xi}{\sqrt{[(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi_0 + \xi)^2]^3}} \right];$$

$$\bar{V}_{4,M} = \int_{-1}^{+1} d\eta \int_{-m}^{+m} \left[\frac{d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi_0 + \xi)^2} + (2\lambda + \xi_0 + \xi)} + \frac{\eta^2 d\xi}{\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi_0 + \xi)^2} \left[\sqrt{(\eta_0 - \eta)^2 + (2\lambda + \xi_0 + \xi)^2} + (2\lambda + \xi_0 + \xi) \right]^2} \right].$$

Используя формулу и подставляя вместо η_0 и η координаты точек O , A и B , формула для определения перемещений получит вид

$$V_M = \frac{1 - \mu_0^2}{E_0} \frac{T_y}{b} \bar{V},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \frac{1}{192\pi(1-\mu_0)^2 m} [\alpha_1 \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \alpha_2 \bar{V}_4]; \\ \bar{V}_1 &= 4\bar{V}_{1,0} + \bar{V}_{1,A} + \bar{V}_{1,B} = 10 \ln \frac{\sqrt{1+m^2} + m}{\sqrt{1+m^2} - m} + 4m \ln \frac{\sqrt{1+m^2} + 1}{m} + \\ &+ 2(\lambda + m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}}{\lambda + m} - 2(\lambda - m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}}{\lambda - m} + \\ &+ 4(2\lambda + m) \ln \frac{\sqrt{1 + (2\lambda + m)^2} + 1}{\sqrt{1 + (2\lambda + m)^2} - 1} - 4(2\lambda - m) \ln \frac{\sqrt{1 + (2\lambda - m)^2} + 1}{\sqrt{1 + (2\lambda - m)^2} - 1}; \\ \bar{V}_2 &= 8 \ln \frac{(2\lambda + m) + \sqrt{1 + (2\lambda + m)^2}}{(2\lambda - m) + \sqrt{1 + (2\lambda - m)^2}} + 2 \ln \frac{(\lambda + m) + \sqrt{1 + (\lambda + m)^2}}{(\lambda - m) + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}} + \\ &+ 2(\lambda + m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda + m)^2}}{\lambda + m} + 2(\lambda - m) \ln \frac{1 + \sqrt{1 + (\lambda - m)^2}}{\lambda - m} + \\ &+ 4m \frac{\sqrt{1+m^2} \left(\sqrt{1+m^2} + 1 \right)^2}{m \left(\sqrt{1+m^2} - 1 \right)^2}. \end{aligned}$$

Аналогичные функции получены и для других параметров [13]. Решения для перемещений отдельных площадок были использованы при разработке метода расчета заглубленных призматических фундаментов [13].

4.2. РЕШЕНИЯ С. В. ИКОНИНА

Расчетная схема фундамент–основание

Исходя из экспериментальных данных, приведенных в главах II – IV, а также учитывая возможности численных методов потенциала, примем следующую расчетную схему фундамент–основание:

- а) фундамент – абсолютно жесткое тело произвольной формы;
- б) на фундамент действует статическая система сил общего вида;
- в) основание – изотропное линейно деформируемое полупространство, характеризуемое модулем деформации и коэффициентом Пуассона. В первом приближении однородное;
- г) массовые силы в основании отсутствуют;
- д) в зонах контакта фундамента с основанием справедливы граничные условия II типа по Л. А. Галину;
- е) взаимодействие между фундаментом и окружающим его грунтовым массивом основано на принципе односторонних связей.

При выводе интегральных уравнений метода потенциала воспользуемся символикой, приводимой в книге Ю. В. Верюжского.

Система интегральных уравнений метода потенциала для жестких штампов в случае действия на поверхности контакта с полупространством для односторонних связей

Для вывода искомой системы уравнений воспользовался методикой, предложенной Г. Б. Конверистовым для решения задачи о жестком заглубленном штампе, впаянном в полупространство. Суть этой методики изложена в работе.

Рассмотрено полупространство $X_3 \geq 0$, ослабленное выемкой D . Границу раздела между ними обозначим Γ . Сделаем допущение, что на поверхности полупространства S нагрузка отсутствует. Пусть в выемку D вставлен либо непосредственно в ней изготовленный штамп D' .

Приложено к нему статическую систему сил $\left\{ \begin{matrix} P_i \\ M_i \end{matrix} \right\}$, где P_i и M_i –

соответственно проекции на оси и моменты относительно осей декартовой системы координат $OX_1X_2X_3$ равнодействующей внешней нагрузки. В результате полупространство окажется деформированным, а точки $N(X_1X_2X_3) \in \Gamma$ получают перемещения $U_j^{(n)}(N)$, как показано на рис. 4.7, а. Индекс (n) обозначает то, что перемещения точки N рассматриваются относительно осей местной системы координат $Nn_1n_2n_3$.

Теперь мысленно представим, что штамп исчез. Для того чтобы равновесие внутри полупространства при этом не нарушилось, приложим к Γ соответствующую распределенную реакцию со стороны штампа $P_j^{(n)}(N)$. Согласно принятой терминологии в теории упругости назовем данное состояние полупространства основным.

Рассмотрим полупространство $X_3 \geq 0$, но уже сплошное. Мысленно выделим в нем область D^* , являющуюся точной копией выемки D . В произвольной точке $K(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ полупространства, причем $K \in D^*$, приложим сосредоточенную силу $A_i = 1$, как показано на рис. 4.7–4.9. Тогда поверхность Γ , ограничивающая область D^* , деформируется, а лежащие на ней точки получают перемещения $U_{ij}^{(n)*}(K, N)$, где i – направление силы A_i , j – направление перемещения, вызываемого этой силой в точке K . Символ (*) обозначает специфику рассматриваемого состояния полупространства. Теперь вырежем и удалим область D^* . Чтобы сохранить равновесие внутренних точек полупространства, приложим к Γ соответствующую реакцию $P_{ij}^{(n)*}(K, N)$ со стороны отброшенной части. Полученное таким образом состояние полупространства называется вспомогательным. Необходимо заметить, что область D^* также останется в равновесии, если к ограничивающей ее поверхности Γ^* , причем $\Gamma^* = \Gamma$, приложить такую же по величине реакцию $P_{ij}^{(n)*}(K, N)$, но с обратным знаком.

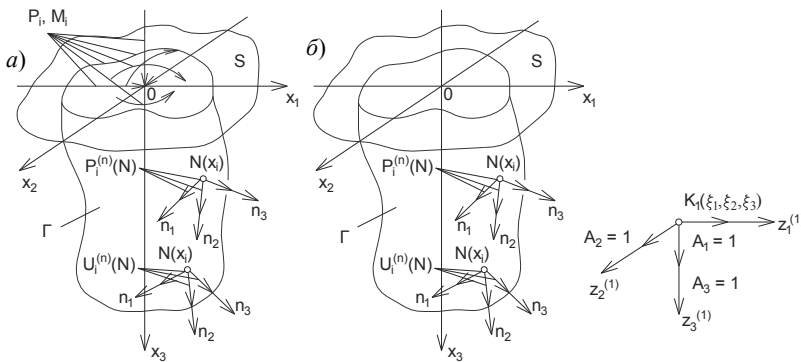


Рис. 4.7. Основное и вспомогательное состояния полупространства, ослабленного выемкой

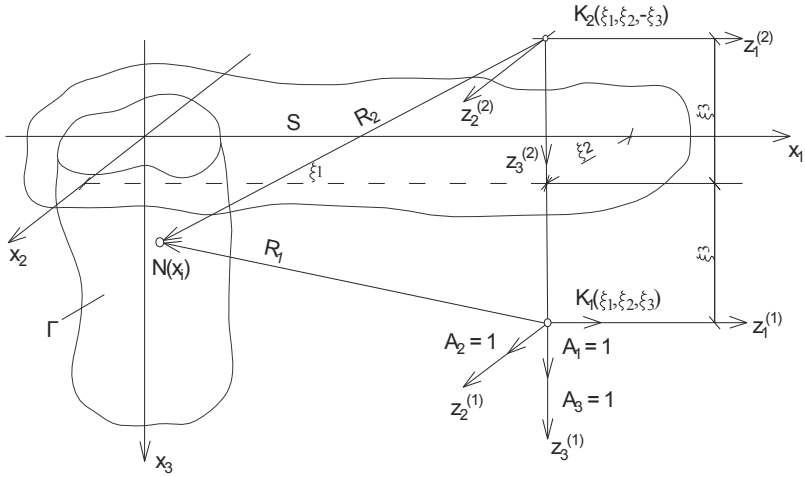


Рис. 4.8. Схема расположения полюсов интегрирования

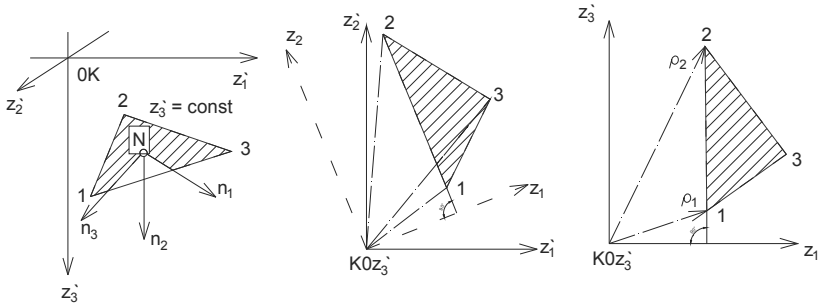


Рис. 4.9. Схемы координатных преобразований в полярном базисе

Применяя теорему Бетти к описанным основному и вспомогательному состояниям полупространства, сформированы формулы Сомилаина, которые записаны в следующем обобщенном виде:

$$U_i(K) = \iint_{\Gamma} P_j^{(n)}(N) U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma - \iint U_j^{(n)}(N) P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma, \quad (4.1)$$

где $U_i(K)$ – перемещение в i -м направлении произвольной точки K полупространства, находящегося в основном состоянии.

Для простоты дальнейших выкладок положено, что оси местных систем координат $Nn_1n_2n_3$ параллельны одноименным осям общей системы координат $OX_1X_2X_3$. Функцию $U_j^{(n)}(N)$ представлено в виде следующей разности:

$$U_j^{(n)}(N) = V_j^{(n)}(N) - W_j^{(n)}(N), \quad (4.2)$$

где $V_j^{(n)}(N)$ – функция, описывающая перемещения точек, лежащих на поверхности штампа D' ; $W_j^{(n)}(N)$ – функция, характеризующая величину раскрытия щели штампом и полупространством.

Функцию $V_j^{(n)}(N)$ выразим через смещение штампа как жесткого тела:

$$V_j^{(n)}(N) = \Delta_j - \omega_m x_n e_{jmn}, \quad (4.3)$$

где Δ_j, ω_m – перемещения и углы поворота штампа относительно осей общей системы координат; $OX_1X_2X_3$ – текущие координаты точки N , лежащей на поверхности штампа; D' – тензор Леви–Чивита.

Подставим выражения (4.1) и (4.2) в (4.3), получено

$$U_i(K) = \iint_{\Gamma} P_j^{(n)}(N) U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma - \iint_{\Gamma} \Delta_j^{(n)} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma + \\ + \iint_{\Gamma} \omega_m x_n e_{jmn} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma. \quad (4.4)$$

Интеграл $\iint_{\Gamma} \Delta_j^{(n)} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma$ представлен при значении индекса $i = 1$, тогда

$$\iint_{\Gamma} \Delta_j^{(n)} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = \Delta_1 \iint_{\Gamma} P_{11}^{(n)*}(K, N) d\Gamma + \\ + \Delta_2 \iint_{\Gamma} P_{12}^{(n)*}(K, N) d\Gamma + \Delta_3 \iint_{\Gamma} P_{13}^{(n)*}(K, N) d\Gamma. \quad (4.5)$$

Слагаемые, входящие в сумму (4.5), представляют собой соответственно проекции на оси OX_1, X_2, X_3 равнодействующей внешней нагрузки, приложенной к области D^* , которая была изъята из полупространства при построении вспомогательного состояния. Поскольку эта

область находится в равновесии, то все интегралы в выражении (4.5) тождественно равны нулю. К аналогичному заключению придем и в случаях, когда $i = 2$ и $i = 3$, на основании изложенного записано

$$\iint_{\Gamma} \Delta_j^{(n)} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = 0. \quad (4.6)$$

При значении индекса $i = 1$ интеграл

$$\iint_{\Gamma} \omega_m x_n e_{jmn} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma.$$

Получено

$$\begin{aligned} & \iint_{\Gamma} \omega_m x_n e_{jmn} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = \\ & = \omega_1 \iint_{\Gamma} \left[x_2 P_{13}^{(n)*}(K, N) - x_3 P_{12}^{(n)*}(K, N) \right] d\Gamma + \\ & + \omega_2 \iint_{\Gamma} \left[x_1 P_{13}^{(n)*}(K, N) - x_3 P_{11}^{(n)*}(K, N) \right] d\Gamma + \\ & + \omega_3 \iint_{\Gamma} \left[x_1 P_{12}^{(n)*}(K, N) - x_3 P_{11}^{(n)*}(K, N) \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Интегральные члены суммы (4.7) являются не чем иным, как моментами равнодействующей внешней нагрузки, приложенной к поверхности области D^* , соответственно, относительно осей координат OX_1, OX_2, OX_3 . Поскольку, как отмечалось выше, область D^* находится в равновесии, то все интегралы в выражении (4.7) равны нулю. Аналогичная ситуация наблюдается и в случаях $i = 2$ и $i = 3$, поэтому на полном основании можем записать

$$\iint_{\Gamma} \omega_m x_n e_{jmn} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = 0. \quad (4.8)$$

С учетом результатов (4.6) и (4.7) выражение (4.8) упрощится и примет вид

$$U_i(K) = \iint_{\Gamma} P_j^{(n)}(N) U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma + \iint_{\Gamma} W_j^{(n)}(N) P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma. \quad (4.9)$$

На поверхности Γ выделены два участка Γ^+ и Γ^- , причем так, чтобы $\Gamma = \Gamma^+ + \Gamma^-$. Область Γ^+ назовем областью контакта штампа D' с полупространством $X_3 \geq 0$, а область Γ^- – зоной щелеобразования. Поскольку на Γ^- нагрузка отсутствует, а на Γ^+ размеры щелей равны нулю, так как в области контакта приняты граничные условия II типа по Л. А. Галину, то справедливыми будут следующие равенства:

$$\iint_{\Gamma} P_j^{(n)}(N) U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = \iint_{\Gamma^+} P_j^{(n)}(N) U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma$$

и

$$\iint_{\Gamma} W_j^{(n)}(N) P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = \iint_{\Gamma^-} W_j^{(n)}(N) P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma. \quad (4.10)$$

Подставляя их в выражение (4.9), получили искомую систему интегральных уравнений метода потенциала для жесткого штампа с учетом действия односторонних связей на контуре выемки. Запишем ее в следующем обобщенном виде:

$$U_i(K) = \iint_{\Gamma^+} P_j^{(n)}(N) U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = \iint_{\Gamma^-} W_j^{(n)}(N) P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma. \quad (4.11)$$

Таким образом, перемещение произвольной точки K , лежащей в основании штампа, численно равно сумме работ контактных напряжений $P_j^{(n)}(N)$ в основном состоянии на перемещениях $U_{ij}^{(n)*}(K, N)$ вспомогательного состояния плюс сумма работ поверхностных напряжений $P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma$ вспомогательного состояния на разностях перемещений одноименных точек штампа и полупространства в основном состоянии $P_j^{(n)}(N)$. Контактные напряжения основного состояния должны удовлетворять условиям равновесия штампа, которые записываются в следующем виде:

$$P_i = \iint_{\Gamma^+} P_j^{(n)}(N) \delta_{ij} d\Gamma$$

и

$$M_i = \iint_{\Gamma^+} P_j^{(n)} x_n e_{ijn}(K, N) d\Gamma. \quad (4.12)$$

где δ_{ij} – символ Кронкера.

В качестве выражений, описывающих напряженно-деформируемое состояние полупространства $X_3 \geq 0$ при действии внутри него сосредоточенных сил $A_i = 1$, приняты формулы, выведенные Р. Миндлиным. Текст этих формул приводится в монографии А. В. Флорина.

Напряжения $P_{ij}^{(n)*}(K, N)d\Gamma$, прикладываемые к контуру выемки D во вспомогательном состоянии, связаны с напряжениями, действующими внутри полупространства, следующей зависимостью:

$$P_{ij}^{(n)*}(K, N)d\Gamma = U_i \sigma_{ij}^{(n)*}(K, N) C_{1l}, \quad (4.13)$$

где U_i – тождественный оператор, подчеркивающий специфику вспомогательного состояния; C_{1l} – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности выемки; $\sigma_{ij}^{(n)*}(K, N)$ – тензор напряжений, появляющихся в пространстве при воздействии на него единичных сил.

Формулы Р. Миндлина представлены в следующем обобщенном виде:

– для перемещений

$$U_{il}^{(n)*}(K, N) = [16\pi G(1-\mu)]^{-1} \left\{ (3-4\mu)\delta_{ij}R_1^{-1} + z_i^{(1)}z_j^{(1)}R_1^{-3} + \right. \\ + (8\mu^2 - 12\mu + 5)\delta_{ij}R_2^{-1} + (3-4\mu) \times \\ \times [z_i^{(2)}z_j^{(2)} - 2\xi_3(z_i^{(1)}\delta_{j3} + z_j^{(2)}\delta_{i3})(1-\delta_{i3}\delta_{j3})]R_1^{-1} + \\ + 2\xi_3(z_3^{(2)} - \xi_3)(1-2\delta_{i3})(R_1^2\delta_{ij} - z_i^{(2)}z_j^{(2)})R_2^{-5} - \\ - 4(1-\mu)(1-2\mu)[z_3^{(2)}\delta_{ij}(1-\delta_{i3}) - z_i^{(2)}\delta_{j3} + z_j^{(2)}\delta_{j3} + \\ \left. + z_i^{(2)}z_j^{(2)}(1-\delta_{i3})(1-\delta_{j3})(R_2 + z_3^{(2)})^{-1}]R_2^{-1}(R_2 + z_3^{(2)})^{-1} \right\}; \quad (4.14)$$

– для тензора напряжений

$$\begin{aligned}
 U_1 U_{m1}^{(n)*}(K, N) = & \left[8\pi(1-\mu) \right]^{-1} \left\{ (1-2\mu) \left(z_i^{(1)} \delta_{m1} - z_l^{(1)} \delta_{im} z_m^{(1)} \delta_{il} \right) R_1^{-3} - \right. \\
 & - z_i^{(1)} z_m^{(1)} z_l^{(1)} R_1^{-5} - (1-2\mu) \left(z_i^{(2)} \delta_{m1} - z_l^{(2)} \delta_{im} - z_m^{(2)} \delta_{il} \right) R_2^{-3} - \\
 & - 2(1-2\mu) \xi_3 \left[3\delta_{m1} \delta_{i3} + (\delta_{m3} \delta_{il} + \delta_{i3} \delta_{ml}) (1-2\delta_{m3} \delta_{il} \delta_{i3}) \right] R_2^{-3} - \\
 & - 3(3-4\mu) z_m^{(2)} z_l^{(2)} \left(z_i^{(2)} - 2\xi_3 \delta_{i3} \right) R_2^{-5} + \\
 & + 6\xi_3 (1-2\delta_{i3}) \left[\xi_3 z_i^{(2)} \delta_{il} - (z_3^{(2)} - \xi_3) \left(z_i^{(2)} \delta_{im} + z_m^{(2)} \delta_{il} \right) \right] + \\
 & + (1-2\mu) \left(z_i^{(2)} z_l^{(2)} \delta_{3m} + z_i^{(2)} z_m^{(2)} \delta_{3l} - z_3^{(2)} z_l^{(2)} \delta_{ml} \right) \left. \right] R_2^{-5} + \\
 & + 30 \left(\xi_3^{(2)} - \xi_3 \right) \xi_3 z_i^{(2)} z_m^{(2)} z_l^{(2)} (1-2\delta_{i3}) R_2^{-7} + \\
 & + 4(1-\mu)(1-2\mu) \left\{ (\delta_{il} - \delta_{il} \delta_{i3}) \left[z_i^{(2)} R_2^{-2} - \delta_{i3} (R_2 + z_3^{(2)})^{-1} \right] - \right. \\
 & - (1-\delta_{i3})(1-\delta_{m3}) \left[(1-\delta_{i3}) \left(z_i^{(2)} \delta_{i3} + z_m^{(2)} \delta_{il} + z_l^{(2)} \delta_{i3} \right) - \right. \\
 & - \delta_{i3} z_m^{(2)} z_l^{(2)} \left(2R_2 + z_3^{(2)} \right) R_2^{-2} - (1-\delta_{i3}) z_i^{(2)} z_m^{(2)} z_l^{(2)} \times \\
 & \left. \left. \times \left(3R_2 + z_3^{(2)} \right) R_2^{-2} \left(R_2 + z_3^{(2)} \right)^{-1} \right] \left(R_2 + z_3^{(2)} \right)^{-2} \right\} R_2^{-1} \left. \right\}, \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

где согласно рис. 4.9:

$$z_1^{(1)} = x_1 - \xi_3 = z_1^{(2)}; \quad z_2^{(1)} = z_2^{(2)} = x_2 - \xi_2;$$

$$z_3^{(1)} = x_3 - \xi_3; \quad z_3^{(2)} = x_3 - \xi_3;$$

$$R_1 = \left(z_1^{(1)2} + z_2^{(1)2} + z_3^{(1)2} \right)^{1/2};$$

$$R_2 = \left(z_1^{(2)2} + z_2^{(2)2} + z_3^{(2)2} \right)^{1/2}.$$

Следует заметить, что отдельные фрагменты решения Р. Миндлина использовались для расчета свай в глинистых грунтах Ф. К. Лапшиным, а в песках А. Ю. Василенко, П. А. Оробченко, Г. М. Петренко, С. И. Цымбалом, для расчета внецентренно нагруженных столбчатых фундаментов В. В. Леденёвым. Первым же, кто обосновал правомерность применения к расчетам грунтовых оснований решений теории упругости, а также назвал границы их применимости, был Н. М. Герсеванов.

Решение системы интегральных уравнений методом потенциала

Для решения выведенной в предыдущем разделе системы интегральных уравнений воспользовался численно-аналитическим методом, предложенным Ю. В. Верюжским.

Рассмотрим случай, когда сила $A_i = 1$, приложенная внутри полупространства во вспомогательном состоянии, находится на как угодно малом расстоянии $\varepsilon \rightarrow 0$ от поверхности Γ выемки, но $K \in \Gamma$. Тогда перемещения точки K , вычисляемые практически, не будут отличаться от перемещения точек $N \in \Gamma$, попадающих в ε -окрестность точки K , на этом основании запишем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \omega_m \xi_n e_{imn} - W_i^{(n)}(K) = \\ &= \iint_{\Gamma^+} P_j^{(n)}(N) U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma + \iint_{\Gamma^-} W_j^{(n)}(N) P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.16)$$

справедливо при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поверхности Γ^+ и Γ^- аппроксимированы набором плоских фрагментов в виде треугольников и четырехугольников произвольной конфигурации. Сделаем допущение, что в пределах фрагментов, принадлежащих Γ^+ , плотности распределения неизвестных контактных напряжений постоянны. Аналогичное предположение сделано и относительно характера изменения функции, описывающей величину раскрытия щели вдоль поверхности Γ^- . Это позволило сформировать следующий алгебраический аналог формулы (4.16):

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \omega_m \xi_n e_{imn} - W_i^{(n)}(K) = \\ &= \sum_{t=1}^e P_j^{(n)}(N_t) \iint_{\Gamma^+(t)} U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma + \\ &+ \sum_{f=1}^q W_j^{(n)}(N_f) \iint_{\Gamma^-(f)} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.17)$$

представляющий собой систему линейных уравнений, коэффициенты которой являются значениями интегралов, взятых по отдельным фрагментам поверхности Γ от функций, описывающих перемещения и напряжения полупространства во вспомогательном состоянии.

Для того чтобы система уравнения (4.17) оказалась замкнутой, добавлены к ней алгебраические аналоги формул (4.12), выражающих условия равновесия штампа. В итоге получаем:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_i &= \omega_m \xi_n e_{imn} - W_i^{(n)}(K) = \\ &= \sum_{t=1}^e P_j^{(n)}(N_t) \iint_{\Gamma^+(t)} U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma + \\ &+ \sum_{f=1}^q W_j^{(n)}(N_f) \iint_{\Gamma^-(f)} P_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma; \\ P_i &= \sum_{t=1}^e P_j^{(n)}(N_t) \Gamma^+(t) \delta_{ij}; \\ M_i &= \sum_{t=1}^e P_j^{(n)}(N_t) S_n^+(t) e_{ijn}, \end{aligned} \right. \quad (4.18)$$

где e – число фрагментов, на которые разбита область контакта Γ^+ штампа с полупространством; $P_j^{(n)}(N_t)$ – осредненные значения контактных напряжений в пределах t -го фрагмента, а $\Gamma^+(t)$ и $S_n^+(t)$ – соответственно его площадь и статические моменты инерции относительно осей общей системы координат $0X_1X_2X_3$; f – число фрагментов, на которые разбита область щелеобразования Γ^- ; $W_j^{(n)}(N_f)$ – средние размеры щели в пределах f -го фрагмента.

Подставив выражения (4.14) и (4.15) под знак двойного интеграла, найдены формулы, служащие для вычисления коэффициентов системы уравнений (4.18). В случае когда нормаль фрагмента аппроксимации будет параллельна оси $0X_3$, они примут вид:

$$\begin{aligned} \iint_{\Gamma} U_{ij}^{(n)*}(K, N) d\Gamma &= [16\pi G(1-\mu)]^{-1} \left\{ (3-4\mu) \delta_{ij} T^{(1)}(1) + T_{ij}^{(1)}(2) + \right. \\ &+ (8\mu^2 - 12\mu + 5) \delta_{ij} T^{(2)} + (3-4\mu) \times \\ &\times \left[T_{ij}^{(2)}(2) - 2\xi_3(z_3^2)^{-1} (T_{i3}^{(2)}(2) \delta_{3j} + T_{i3}^{(2)}(2) \delta_{j3}) (1 - \delta_{i3} \delta_{j3}) \right] + \\ &+ 2\xi_3(z_3^2 - \xi_3) (1 - 2\delta_{j3}) \left(T_{33}^{(2)}(2) (z_3^2)^{-2} - 3T_{ij}^{(2)}(3) \right) - \\ &\left. - 4(1-\mu)(1-2\mu) (T_{ij}^{(2)}(6) + T_{ij}^{(2)}(7)) \right\} \quad (4.19) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Gamma} U_l \sigma_{ml}^{(n)*}(K, N) d\Gamma = & [8\pi G(1-\mu)]^{-1} \left\{ (1-2\mu) \left(z_3^{(1)} \right)^{-1} \times \right. \\
 & \times \left(T_{i3}^{(1)}(2) \delta_{ml} - T_{l3}^{(1)}(2) \delta_{im} - T_{m3}^{(1)}(2) \delta_{il} \right) - 3T_{iml}^{(1)}(4) - \\
 & - (1-2\mu) \left(z_3^{(2)} \right)^{-1} \left(T_{i3}^{(2)}(2) \delta_{ml} - T_{l3}^{(2)}(2) \delta_{im} - T_{m3}^{(2)}(2) \delta_{il} \right) - \\
 & - (1-2\mu) \xi_3 \left[3\delta_{ml} \delta_{il} + (\delta_{m3} \delta_{il} + \delta_{l3} \delta_{mi}) \times \right. \\
 & \times (1-2\delta_{m3} \delta_{l3} \delta_{i3}) \left. \right] T_{33}^{(2)}(2) \left(z_3^{(2)} \right)^{-2} - \\
 & - 3(3-4\mu) \left(T_{iml}^{(2)}(4) - 2\xi_3 \delta_{i3} T_{ml}^{(2)}(3) \right) + 6\xi_3 (1-2\delta_{i3}) \times \quad (4.20) \\
 & \times \left[\xi_3 \delta_{ml} \left(z_3^{(2)} \right)^{-1} \left(T_{l3}^{(2)}(3) \delta_{im} + T_{m3}^{(2)}(3) \delta_{im} \right) + \right. \\
 & \left. + (1-2\mu) \left(T_{il}^{(2)}(3) \delta_{3m} + T_{im}^{(2)}(3) \delta_{3l} - T_{3i}^{(2)}(3) \delta_{ml} \right) \right] + \\
 & + 30 \left(z_3^{(2)} - \xi_3 \right) \xi_3 (1-2\delta_{i3}) T_{iml}^{(2)}(5) + 4(1-2\mu)(1-\mu) \times \\
 & \times \left[(\delta_{ml} - \delta_{m3} \delta_{l3}) T_{i3}^{(2)}(2) \left(z_3^{(2)} \right)^{-1} - T_{iml}^{(2)}(8) - T_{iml}^{(2)}(9) \right] \left. \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 T(1) &= \iint_{\Gamma} \frac{1}{R} d\Gamma; \\
 T_{ij}(2) &= \iint_{\Gamma} z_i z_j R^{-3} d\Gamma; \quad T_{ij}(3) = \iint_{\Gamma} z_i z_j R^{-5} d\Gamma; \\
 T_{iml}(4) &= \iint_{\Gamma} z_i z_j z_l R^{-5} d\Gamma; \quad T_{iml}(5) = \iint_{\Gamma} z_i z_m z_l R^{-7} d\Gamma; \\
 T_{ij}(6) &= \iint_{\Gamma} (z_j \delta_{i3} - z_i \delta_{j3}) [R(R+z_3)]^{-1} d\Gamma; \\
 T_{ij}(7) &= \iint_{\Gamma} (1-\delta_{i3})(z_3 \delta_{ij} + z_i z_j (1-\delta_{j3})(R+z_3)^{-1}) [R(R+z_3)]^{-1} d\Gamma; \\
 T_{iml}(8) &= \iint_{\Gamma} \delta_{j3} [(\delta_{ml} - \delta_{m3} \delta_{l3}) - (1-\delta_{l3})(1-\delta_{m3}) z_m z_l \times \\
 & \quad \times (2R+z_3) R^{-2} (R+z_3)^{-1}] R^{-1} (R+z_3)^{-1} d\Gamma;
 \end{aligned}$$

$$T_{iml}(9) = \iint_{\Gamma} (1 - \delta_{l3})(1 - \delta_{m3})(1 - \delta_{j3}) [z_l \delta_{ml} + z_l \delta_{im} + z_m \delta_{im} - z_l z_m z_l \times \\ \times (3R + z_3)R^{-2}(R + z_3)^{-1}] R^{-1}(R + z_3)^{-2} d\Gamma.$$

Таким образом, чтобы найти коэффициенты системы уравнений (4.18), необходимо для каждого фрагмента, на которые разбита поверхность Γ , определить значения интегралов (4.21). Первообразные этих интегралов будем искать на основе распространения методики, разработанной применительно к решению Кельвина, на рассматриваемый нами случай.

На рисунке 4.10 показана общая глобальная система координат $OX_1 X_2 X_3$ и две вспомогательные, связанные с точкой K_1 (первый базис) и точкой K_2 (второй базис). Часть решения Миндлина, содержащая R_1 интегрируется с полюса K_1 , а часть, содержащая R_2 , с полюса K_2 . На рисунках 4.11 и 4.12 приведены два вида аппроксимирующих фрагментов. Оба случая объединяет то, что в повороте базовых систем координат не участвует ось OZ'_3 . Последственность применяемых координатных преобразований вполне очевидна. В полярном базисе, изображенном на рис. 4.11, значения первообразных от выражений P Миндлина определяются из формулы

$$U_{kl} = \int_0^{\rho_1} \rho d\rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} U_{kl}^{(n)*}(K, N) d\varphi + \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho d\rho \int_{\arccos \frac{l}{\rho}}^{\varphi_2} U_{kl}^{(n)*}(K, N) d\varphi. \quad (4.21)$$

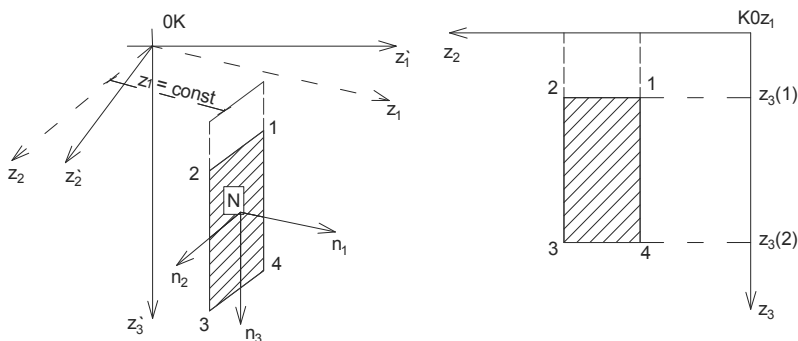


Рис. 4.10. Схемы координатных преобразований при интегрировании в декартовом базисе

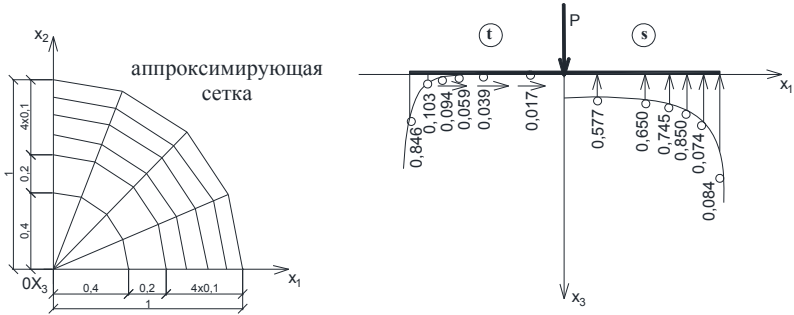


Рис. 4.11. Решение тестовой задачи Ж. Буссинеска

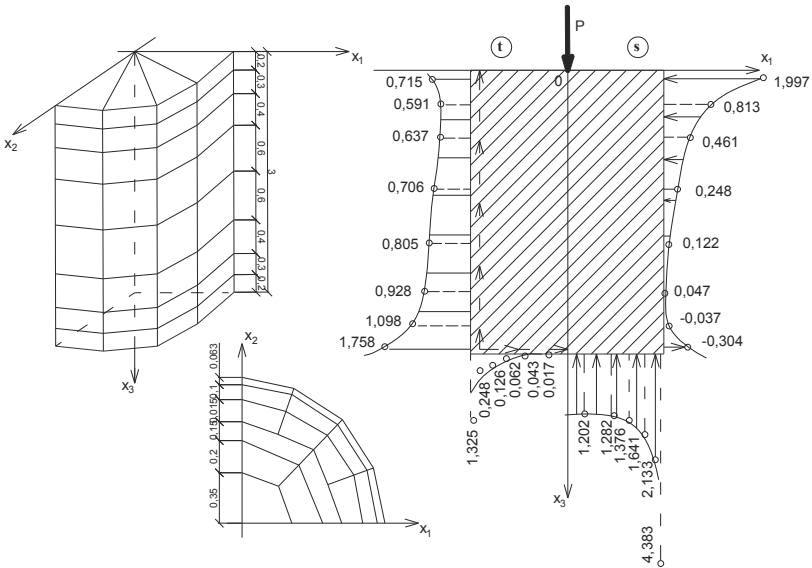


Рис. 4.12. Решение тестовой задачи О. В. Шишова

В случае интегрирования в декартовом базисе первообразные ищутся с помощью выражения

$$U_{kl} = \int_{z_2(1)}^{z_2(2)} dz_2 \int_{z_3(1)}^{z_3(2)} U_{kl}^{(n)*}(K, N) dz_3. \quad (4.22)$$

Поскольку форма U_{kl} является тензором второго ранга, то связь матрицы Миндлина в старой системе координат с матрицей Миндлина в новой системе координат выражается зависимостью

$$U'_{ij} = C_{ki}C_{lj}U_{kl}, \quad (4.23)$$

где $\{U'_{ij}\}$ – матрица Миндлина в старой системе координат $OX_1X_2X_3$; $\{C_{kl}\}, \{C_{ij}\}$ – матрицы косинусов, связывающие старую систему координат со вспомогательной повернутой.

Первообразные интегралов $T(1) \dots T_{ij}(5)$ содержатся в монографии Ю. В. Верюжского. Первообразные же от интегралов остальных четырех типов пришлось взять дополнительно. Для случая интегрирования в полярном базисе приведены ниже:

$$T_{13}(6) = \iint_{\Gamma} [R(R+z_3)]^{-1} d\Gamma = \frac{h\varphi - z_3\psi_3 \sin \varphi}{\varphi} + \frac{z_3\psi_2 - h\psi_1}{\rho};$$

$$T_{23}(6) = \iint_{\Gamma} z_2 [R(R+z_3)]^{-1} d\Gamma = \frac{h\psi_4 + z_3\psi_3 \cos \varphi}{\varphi};$$

$$\begin{aligned} T_{11}(7) &= \iint_{\Gamma} [z_3(R+z_3) + z_1^2] [R(R+z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ &= \frac{-z_3 \sin \varphi \cos \varphi (1 + \psi_4 + z_3^{-1}R)}{\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{22}(7) &= \iint_{\Gamma} [z_3(R+z_3) + z_2^2] [R(R+z_3)^2]^{-1} d\Gamma = \\ &= \frac{-z_3 [\varphi - \psi_1 - \sin \varphi \cos \varphi (1 + \psi_4 - z_3^{-1}R)]}{\varphi} + \frac{h\psi_2}{\rho}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{12}(7) &= \iint_{\Gamma} z_1 z_2 [R(R+z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ &= \frac{-z_3 [\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi (\psi_4 - z_3^{-1}R)]}{\varphi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{311}(8) &= \iint_{\Gamma} [1 - z_1^2 (2R+z_3) R^{-2} (R+z_3)^{-1}] [R(R+z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ &= \frac{\varphi - \psi_4 \sin \varphi \cos \varphi}{\varphi} + \frac{\psi_1}{\rho}; \end{aligned}$$

$$T_{322}(8) = \iint_{\Gamma} [1 - z_1^2 (2R + z_3) R^{-2} (R + z_3)^{-1}] [R(R + z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ = \frac{\psi_4 \sin \varphi \cos \varphi}{\varphi};$$

$$T_{312}(8) = \iint_{\Gamma} [-z_1 z_2 (2R + z_3)] [R^3 (R + z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ = \frac{\psi_4 \cos^2 \varphi}{\varphi};$$

$$T_{111}(9) = \iint_{\Gamma} [3z_1 - z_1^3 (3R + z_3) R^{-2} (R + z_3)^{-1}] [R(R + z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ = \frac{\sin^3 \varphi \psi_3}{\varphi} + \frac{\psi_2}{\rho} + \frac{2 \cos^2 \varphi (\rho^2 - h^2)^{1/2} (r + z_3)^{-1}}{\rho};$$

$$T_{222}(9) = \iint_{\Gamma} [3z_2 - z_2^3 (3R + z_3) R^{-2} (R + z_3)^{-1}] [R(R + z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ = \frac{\cos^3 \varphi \psi_3 + h r^{-1} \sin^2 \varphi}{\varphi} + \frac{h [z_3 + h^2 (r + z_3)^{-1}] [r(r + z_3)]^{-1}}{\rho};$$

$$T_{211}(9) = \iint_{\Gamma} [z_2 - z_2 z_1^2 (3R + z_3) R^{-2} (R + z_3)^{-1}] [R(R + z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ = \frac{-\cos \varphi \sin^2 \varphi \psi_3 + h r^{-1} \cos^2 \varphi}{\varphi} + \frac{h [r - h^2 (r + z_3)^{-1}] [r(r + z_3)]^{-1}}{\rho};$$

$$T_{122}(9) = \iint_{\Gamma} [z_1 - z_2^2 z_1 (3R + z_3) R^{-2} (R + z_3)^{-1}] [R(R + z_3)]^{-1} d\Gamma = \\ = \frac{\sin \varphi \cos \varphi \{ \cos \varphi \psi_3 - h r^{-1} [1 + (r + z_3)^{-1} (r - z_3)] \}}{\varphi};$$

$$T_{112}(9) = T_{121}(9) = T_{211}(9); \quad T_{212}(9) = T_{221}(9) = T_{122}(9),$$

где

$$\psi_1 = \arctan(z_3 R^{-1} \tan \varphi); \quad \psi_2 = \ln |R + \rho \sin \varphi|; \\ \psi_3 = \ln |(R + \rho) z_3^{-1}|; \quad \psi_3 = \ln |(R + z_3)(2z_3)^{-1}|. \quad (4.24)$$

Аналогичные зависимости были получены при интегрировании выражений в декартовой системе координат, изображенной на рис. 4.12.

Формируя коэффициенты системы уравнений (4.18) в соответствии с выражениями (4.24) и разрешая ее, найдем неизвестные: перемещения штампа Δ_i и ω_m , контактные напряжения $P_j^{(n)}(N)$ и размеры щели $W_j^{(n)}(N)$ между штампом и полупространством. Поскольку области Γ^+ и Γ^- заранее не известны, то систему (4.18) будем решать итерационно, задаваясь на первом шаге каким-либо приближением. На следующих шагах это приближение будем корректировать до тех пор, пока на фрагментах аппроксимации, принадлежащих области Γ^+ , не будет соблюдаться условие $\sigma_N \geq 0$, а на фрагментах из Γ^- – условие $W_N \geq 0$, где σ_N – нормальная составляющая контактных напряжений, а W_N – величина раскрытия щели вдоль нормали рассматриваемого фрагмента.

Результаты решения пространственных контактных задач теории упругости для жестких заглубленных штампов

На основе выполненных теоретических исследований, изложенных в разделах 1.2 и 1.3, был разработан вычислительный комплекс программ «ШТАМП», предназначенный для эксплуатации на электронно-вычислительных машинах серии ЕС-ЭВМ. Текст программ написан на языке «ФОРТРАН-IV». На рисунке 4.13 приведена укрупненная блок-схема названного вычислительного комплекса. Его возможности многократно были проверены при решении разнообразных тестовых задач. Приведены результаты численного счета для двух таких задач. Видно, что значения контактных напряжений, полученные по программе «ШТАМП» (они отмечены кружочками), практически совпадают с уже известными решениями. Коэффициент Пуассона при этом принимался равным $\mu = 0,3$. Оба приведенных решения пронумерованы, а значения ординат эпюр контактных напряжений даны в долях от величины, равной частному от деления силы P на площадь контакта штампа с полупространством.

В таблицах 4.13 и 4.14 даны соответственно в первом, втором и третьем приближениях результаты решения ряда задач для жесткого цилиндрического заглубления штампа, нагруженного наклонной силой P . Все решения соответствуют следующим значениям исходных параметров: $E = 10$ МПа; $P = 1000$ кН.

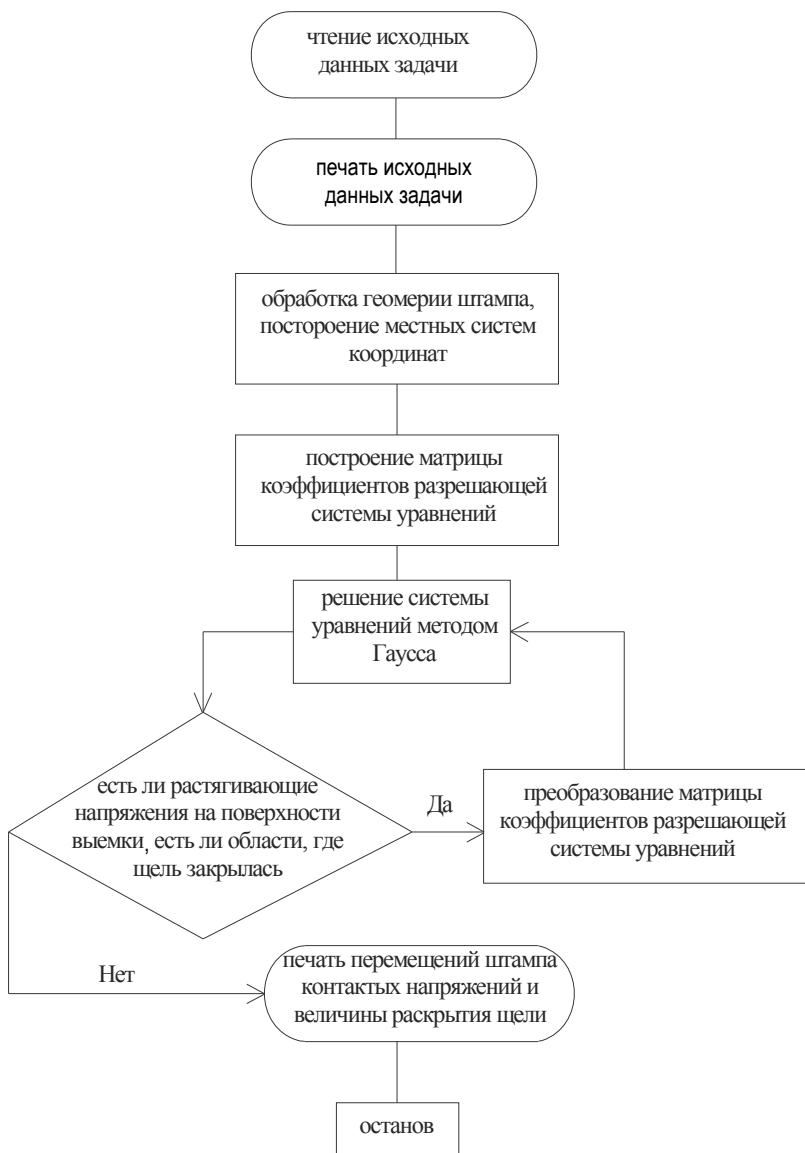


Рис. 4.13. Блок-схема программы «ШТАМП»

Перемещения жесткого цилиндрического фундамента диаметром 2 м под действием наклонной силы $P = 1000$ кН при $E = 10$ МПа, полученные без учета щелеобразования (второе приближение), приведены в табл. 4.13.

Перемещения жесткого цилиндрического фундамента диаметром 2 м под действием наклонной силы $P = 1000$ кН при $E = 10$ МПа, полученные при моделировании щелеобразования путем вычерчивания строк и столбцов из матрицы коэффициентов разрешающей системы уравнений (второе приближение), приведены в табл. 4.14.

Таблица 4.13

$\lambda \backslash \delta$	0	22,5°	45°	67,5°	90°
Горизонтальное перемещение U^* , см					
1	0	1,29	2,38	3,11	3,37
2	0	1,13	2,08	2,72	2,94
3	0	0,990	1,83	2,39	2,59
4	0	0,880	1,63	2,12	2,30
Вертикальное перемещение S^* , см					
1	2,40	2,22	1,69	0,917	0
2	1,77	1,64	1,23	0,679	0
3	1,44	1,33	1,02	0,550	0
4	1,22	1,13	0,864	0,467	0
Крен θ^* , 10^{-3} радианы					
1	0	4,16	7,69	10,05	10,88
2	0	2,49	4,60	6,02	6,51
3	0	1,63	3,02	3,94	4,27
4	0	1,16	2,14	2,79	3,02

Таблица 4.14

$\lambda \backslash \delta$	22,5°	45°	67,5°	90°
Горизонтальное перемещение U^* , см				
1	1,28	2,64	4,17	5,23
2	1,14	2,31	3,24	3,61
3	1,02	2,00	2,78	3,10
4	0,906	1,77	2,44	2,70
Вертикальное перемещение S^* , см				
1	2,27	1,63	0,241	-1,60
2	1,68	1,23	0,532	-0,243
3	1,37	1,01	0,457	-0,154
4	1,18	0,867	0,415	-0,109
Крен θ^* , 10^{-2} радианы				
1	2,27	1,63	0,241	-1,60
2	1,68	1,23	0,532	-0,243
3	1,37	1,01	0,457	-0,154
4	1,18	0,867	0,415	-0,109

4.3. КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Контактные напряжения по поверхности фундаментов. Теория, эксперимент. Рассмотрим жесткие фундаменты по критерию М. И. Горбунова-Посадова. В теоретических исследованиях использовали модели:

Линейно деформируемая среда: В. М. Абрамов (1997); В. М. Александров (1967); С. М. Алейников, С. В. Иконин (1990, 2000); Н. М. Бородачев (1976); Ф. М. Бородачева (1969); О. В. Босаков (1988); Ю. В. Верюжский, С. В. Иконин, В. В. Савицкий (1982); Л. А. Галин (1953, 1980); В. С. Губенко (1960); К. Е. Егоров (1960); Б. Н. Жемочкин (1978); С. В. Иконин (1988, 1992); Я. М. Кузина (1973); Г. Б. Ковнеристов (1962, 1978); В. А. Кофман, М. И. Горбунов-Посадов (1977); С. Г. Кушнер (2008); М. Я. Леонов (1953); В. М. Лиховцев (1978); В. С. Никитин,

Г. С. Шапиро (1978); А. Б. Огранович (1989, 1992); Г. Я. Попов (1982); Л. А. Розин (1998); И. К. Самарин (1978); В. А. Смирнов (1982); О. Я. Шехтер (1956); И. Я. Штаерман (1949) и др.

Упруго-пластическая среда: М. И. Горбунов-Посадов (1993); В. М. Лиховцев (1976); Б. Ю. Мирзабекян (1978); В. Ф. Александрович, В. Г. Федоровский (1979, 1984); Л. А. Багин (1980); В. П. Дыба (1980); Ю. Н. Мурзенко (1989); В. М. Кириллов (1992) и др.

Экспериментальные исследования контактного напряжения проводили: Н. В. Лалетин (1940); И. Ф. Разоренов (1955); А. П. Криворотов (1965); Ле Ат Хой (1965); Г. А. Скормин, М. В. Малышев (1970); VCP Commitee (1971); В. В. Левенстам (1971) и др.; Г. М. Ломизе, А. Л. Крыжановский, В. Ф. Петрянин (1972); В. В. Леденёв, Б. С. Одинг (1975); В. В. Леденёв (1975, 1981); И. Т. Сергеев, В. С. Глухов (1976); А. В. Филатов (1977); С. В. Довнарлович, Д. Е. Польшин, В. С. Сидорчук (1977); Е. А. Сорочан, В. И. Быков (1978); И. С. Иванов (1989); И. Кузма, И. И. Никитенко (1983); С. В. Довнарлович, А. А. Теняков (1987); А. И. Калаев (1990); Т. И. Финаева, А. С. Кананян (1989) и др.

Подробную информацию о трансформации контактных напряжений под подошвой фундаментов по мере роста нагрузки можно найти в работах: Ю. Н. Мурзенко, В. В. Леденёва, Криворотов А. П. не выявил трансформации напряжений.

Анализ расчетных и замеренных контактных напряжений выполняли: М. Н. Горбунов-Посадов, В. И. Соломин, Ю. Н. Мурзенко и др., а также в книге «Развитие контактных задач в СССР» (1976). Контактные напряжения под фундаментами и сооружений измеряли: Г. Е. Лазебник (1965); С. В. Довнаревич, А. А. Теняков (1987) и др. Информация о напряжениях и перемещениях под подошвой плотин дана в книге А. Н. Марчука (1983).

При использовании уравнений теории упругости краевые контактные напряжения достигают бесконечных значений. Имеются конструктивные предложения по их ограничению. Так, И. Я. Штаерман (1979) предложил закруглять углы, где по расчетам напряжения бесконечны.

В смешанных моделях с использованием уравнений теории упругости и пластичности очертания эпюр приближаются к экспериментальным.

Список литературы к главе 4

1. **Алейников, С. М.** Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственных неоднородных оснований : монография / С. М. Алейников. – М. : АСВ, 2000. – 754 с.

2. **Алейников, С. М.** Пространственная деформация поверхности упругого слоя переменной толщины / С. М. Алейников, С. В. Иконин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1990. – № 5. – С. 21 – 23.
3. **Барвашов, В. А.** Комбинированные модели грунтового основания / В. А. Барвашов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1978. – № 1. – С. 34 – 36.
4. **Бартоломей, А. А.** Расчет осадок ленточных свайных фундаментов / А. А. Бартоломей. – М. : Стройиздат: 1972. – 128 с.
5. **Бородачев, Н. М.** О характере особенностей контактных напряжений под кольцевым штампом / Н. М. Бородачев // Прикладная математика и механика. – 1971. – Т. 40, Вып. 2. – С. 372 – 376.
6. **Верюжский, Ю. В.** Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики : монография / Ю. В. Верюжский. – Киев : Вища школа, 1978. – 184 с.
7. **Верюжский, Ю. В.** Использование метода потенциала в расчетах жестких фундаментов / Ю. В. Верюжский, С. В. Иконин, В. В. Савицкий // Основания и фундаменты. – Киев : Будивельник, 1982. – Вып. 15. – С. 21 – 25.
8. **Галин, Л. А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости : монография / Л. А. Галин. – М. : Наука, 1980. – 304 с.
9. **Горбунов-Посадов, М. И.** Осадки фундаментов на слое грунта, подстилаемом скальным основанием / М. И. Горбунов-Посадов. – М. : Стройиздат, 1946. – 60 с.
10. **Иконин, С. В.** Взаимодействие жесткого цилиндрического фундамента с песчаным основанием : дис. ... канд. техн. наук / С. В. Иконин. – Киев, 1983. – 195 с.
11. **Криворотов, А. П.** О распределении нормальных напряжений по подошве жесткого штампа при изменении вертикальной нагрузки / А. П. Криворотов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1963. – № 2. – С. 8 – 12.
12. **Кушнер, С. Г.** Расчет фундамента основания зданий и сооружений : монография / С. Г. Кушнер. – ООО «ИПО Запорожье», 2008. – 496 с.
13. **Леденёв, В. В.** Несущая способность и перемещения заглубленных фундаментов при действии плоской системы сил : дис. ... д-ра техн. наук / В. В. Леденёв. – Воронеж, 1998. – 495 с.
14. **Леденёв, В. В.** Теоретические основы механики деформирования и разрушения : монография / В. В. Леденёв, В. Г. Однолько, З. Х. Нгуен. – Тамбов : ТГТУ, 2013. – 312 с.

15. **Миндлин, Р.** Сосредоточенные силы в упругом полупространстве / Р. Миндлин, Д. Чень // Сб. переводов и «Механика», 1952. – Вып. 4(14). – С. 118 – 133.

16. **Мурзенко, Ю. Н.** Экспериментальные исследования распределения нормальных и касательных напряжений в основании круглого штампа с помощью тензорных месдоз / Ю. Н. Мурзенко, К. В. Ревенко // Основания и фундаменты. – Новочеркасск : НПИ, 1976. – С. 3 – 12.

17. **Огранович, А. Б.** Расчет фундаментной стенки на горизонтальную нагрузку с учетом разрыва сплошности основания / А. Б. Огранович, М. И. Горбунов-Посадов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1966. – № 3. – С. 11 – 14.

18. **Плевков, В. С.** Определение размеров внецентренно нагруженных фундаментов различной геометрической формы в плане / В. С. Плевков, А. И. Полищук. – Томск : ТПИ, 1990. – 168 с.

19. **Попов, Г. Я.** Контактные задачи для линейно деформируемого основания / Г. Я. Попов. – Киев : Одесса : Вища школа, 1982. – 168 с.

20. **Снитко, А. Н.** О решении контактной задачи для жесткой стенки в упругой среде / А. Н. Снитко // Сб. докладов ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. – Л., 1970. – Вып. 11. – С. 74 – 85.

21. **Трещев, А. А.** Теория деформирования прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния : монография / А. А. Трещев. – Тула : ТулГУ, 2016. – 326 с.

22. **Филатов, А. В.** Экспериментальные исследования эпюр реактивного давления грунта и перемещений свай при горизонтальных нагрузках / А. В. Филатов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1977. – № 1. – С. 32 – 34.

23. **Шеляпин, Р. С.** Приближенное определение осадки жесткого, круглого заглубленного фундамента / Р. С. Шеляпин // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1965. – № 6. – С. 11 – 18.

24. **Чернышев, Е. М.** Уровни организации и иерархия структуры строительных композитов в строительных конструкциях. В 2 т. / Е. М. Чернышев // Механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов : сб. ст. по материалам 7-й Междунар. конф. / РААСН. – Воронеж : ВГАСУ, – 2013. – Т. 2.

5. ПРИЧИНЫ И ПРИМЕРЫ РАЗРУШЕНИЙ ЗДАНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ОШИБКАМИ ПРИ ИЗЫСКАНИЯХ, ПРОЕКТИРОВАНИИ, СТРОИТЕЛЬСТВЕ И ЭКСПЛУАТАЦИИ

5.1. ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ ЗДАНИЙ

Известно, что грунты основания обладают распределительной способностью, т.е. от источника нагружения перемещения и напряжения распространяются в среде на определенное расстояние. По проведенным замерам в Санкт-Петербурге осадки поверхности грунта зафиксированы на расстоянии до 200 м от тяжелых зданий. При строительстве коммерческого центра высотой 303 м в Германии было осуществлено научное сопровождение проектирования и строительство с замером перемещений грунтового основания на глубину до 70 м при глубине подошвы телескопических буронабивных свай 45 м и окружающих зданий, дополнительные осадки которых были спрогнозированы. Тщательно выполненный анализ напряженно-деформированного состояния системы свай–окружающий массив позволил назначить оптимальные величины длин свай и расстояний между ними. Пройденный геотехнический мониторинг подтвердил результаты прогноза и обеспечил жесткие требования по ограничению осадки строящегося здания (2,5 см) и дополнительных осадок близко расположенных ранее построенных двух зданий высотой по 100 м ($\Delta S \leq 0,5$ см).

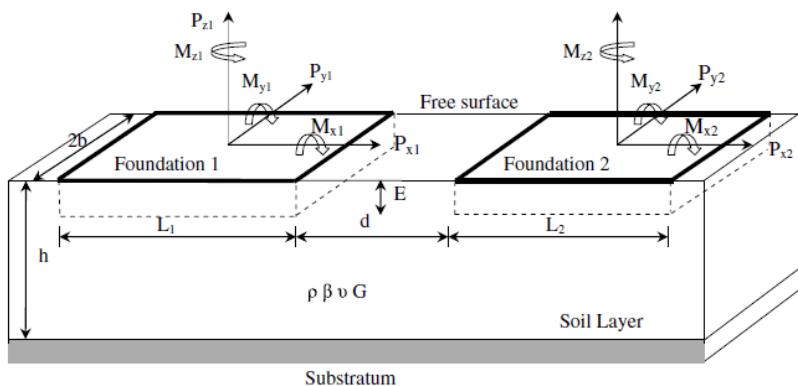
Влияние близко расположенных железобетонных швов привело к значительному повреждению стен (А. П. Сеницын, 1987). Последующий анализ причин этого [6] показал, что расчеты оснований были выполнены по гипотезе Винклера, т.е. без учета распределительной способности грунтов. Кроме того, экспериментально и теоретически показано, что осадка сооружений, имеющих неодинаковую площадь, различна при равном едином давлении.

Практические рекомендации по снижению взаимного влияния близко расположенных зданий разработаны С. Н. Сотниковым, В. Г. Симагиным, В. П. Вершининым (1984, 1986); С. Н. Сотниковым, А. А. Собениным (1970); С. Н. Сотниковым (1984); В. Г. Симагиным, П. А. Коноваловым (1978); В. М. Улицким, А. Г. Шашкиным (1999, 2005); А. Б. Фадеевым, Р. А. Мангушевым (2006) и др.

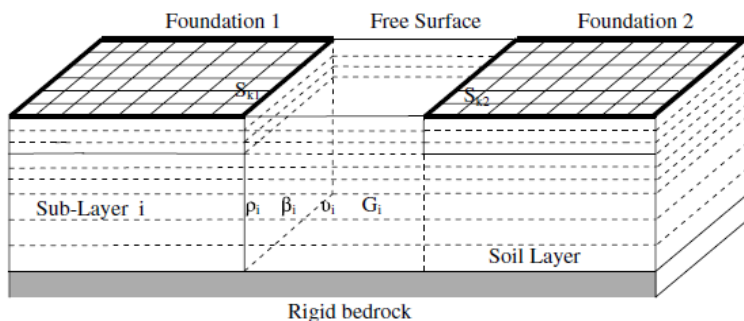
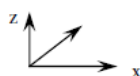
Разработан ряд нормативных документов: ВСН 490–87; ТСН 50-302–96, ТСН 50-302–2004, рекомендации Харьковского Промстройниипроекта [13] и др.

В последнее время вопрос о взаимном влиянии широко обсуждается в печати в связи с возведением высотных зданий с глубиной до 40 м подземной части и при строительстве в условиях тесной городской застройки.

В зарубежной печати опубликован ряд статей [1 – 4], в которых рассматриваются проблемы динамического взаимодействия соседних фундаментов (рис. 5.1). Так, в статье [1] разработана математическая модель взаимодействия с использованием функции Грина.



a)



b)

Рис. 5.1. Схема моделей и нагрузок (a), конечноэлементная модель (б)

Задачи определения последствий взаимного влияния близко расположенных зданий зависят от многих параметров, носящих случайный характер. Необходимо рассматривать совместную работу надземной и подземной частей зданий. К примеру, такую задачу для отдельного объекта рассматривал Б. А. Гарагаш (2012). При этом определяющим являлось соотношение жесткости здания, фундаментов и основания. Примеры механизма взаимного влияния зданий даны в работе [14].

Леденёв В. В. экспериментально исследовал распределительную способность песчаного основания и взаимное влияние фундаментов [8 – 10]. Были установлены функциональные зависимости между влияющими параметрами.

Выявлен ряд зданий и сооружений, получивших значительные повреждения от влияния пристроенных. Результаты технического обследования приведены в работе [10]. Наиболее характерным примером является строительство Курского элеватора, состоящего из рабочей башни, административного здания, трех силосных корпусов и встроенных между ними помещений. Башня возведена на свайном фундаменте, административное здание и встроенные помещения – на сборных ленточных фундаментах, силосные корпуса – на монолитных железобетонных плитных фундаментах толщиной 1 м. За осадками и кренами плит проводили инструментальные наблюдения. Крены были незначительные, а осадки – примерно одинаковые, равные 24 см. Осадки фундаментов рабочей башни, административного здания и встроенных помещений определены расчетом по модели линейно деформируемого полупространства и составляли в среднем 20 мм. Относительные разности осадок между силосными корпусами и соседними зданиями были не допустимы. Осадочные швы не были сделаны. В результате этого в стенах административного здания и встроенных помещениях образовались многочисленные сквозные трещины, произошла значительная деформация полов встроенных помещений с подъемом местами до 30 см. Принято решение эксплуатацию элеватора приостановить, а поврежденные здания разобрать и сделать заново. На рисунке 5.2 показана кинематическая схема деформирования одного из встроенных помещений.

При проектировании элеватора не было учтено взаимное влияние примыкающих зданий и сооружений и не предупреждены мероприятия для предотвращения повреждений.

После строительства пристроенного дома, по адресу: г. Тамбов, К. Маркса, 225а, на фасаде обследуемого здания начали появляться

трещины (рис. 5.3). Фасад дома № 36 был полностью оштукатурен. Через небольшой промежуток времени трещины стали проявляться через штукатурку, произошло раскрытие деформационного шва. Трещины наблюдались только на фасадах со стороны двора и ул. К. Маркса. На противоположных фасадах здания трещины и раскрытие деформационного шва не выявлены. Это свидетельствует о явном влиянии пристройки на здание.

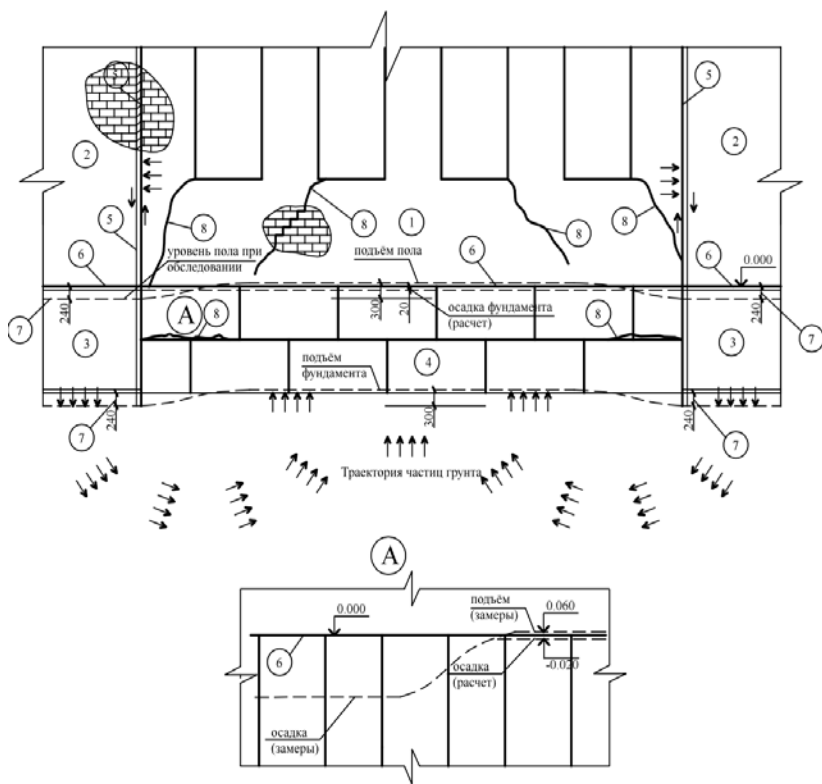


Рис. 5.2. Влияние фундаментных плит на ленточные фундаменты:

- 1 – встроенное здание; 2 – силовые корпуса;
- 3 – фундаментные плиты; 4 – ленточные фундаменты;
- 5 – деформационные швы; 6 – начальное положение;
- 7 – осадка плиты по наблюдениям; 8 – трещины;
- A – перемещение



a)



b)

Рис. 5.3. Фасады здания со стороны двора (a) и ул. К. Маркса (б)

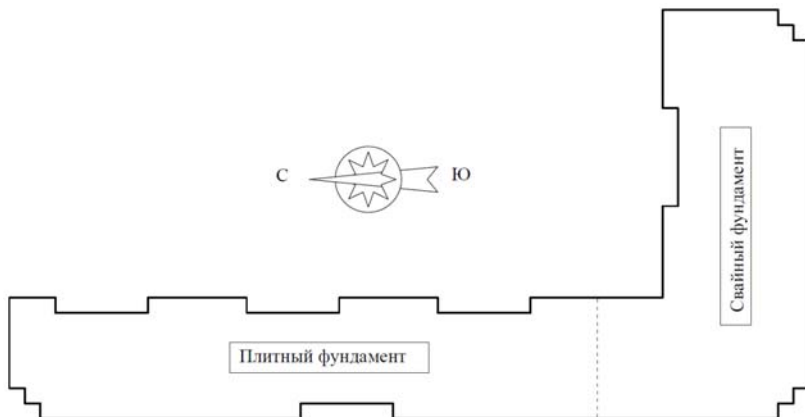
5.2. ИЗМЕНЕНИЯ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ, МЕХАНИЧЕСКИХ И РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ И МАТЕРИАЛОВ КОНСТРУКЦИЙ

В процессе эксплуатации происходит ряд изменений заданных параметров: нарушение температурно-влажного режима, возникновение динамических нагрузок, повышение влажности грунтов основания или грунтовых вод технологическими растворами, систематическое замачивание конструкций, изменение расчетных схем, механические повреждения, дефекты изготовления и монтажа, низкое качество

материалов и работ и т.д. [5, 8, 9]. Отмеченные изменения часто происходят неравномерно по площади или объему. Возникают значительные градиенты напряжений и деформаций. Снижается долговечность и эксплуатационные качества. Часто происходят одновременные изменения ряда параметров.

Отмеченные факторы приводят к изменению и усложнению расчетных моделей, что не прогнозируется в проектах.

На рисунке 5.4 приведены примеры повреждений зданий в г. Тамбове.



а)



б)

**Рис. 5.4. План здания (а), общий вид (б), дворовый фасад (в)
(Тамбов, ул. Студенческая Набережная, д. 25)**



в)

Рис. 5.4. Окончание

Причиной раскрытия и вертикальных смещений температурно-деформированных швов является недопустимая относительная разность осадок зданий, построенных на свайном и плитном фундаментах.

Рассмотрим деформации пятиэтажного жилого дома по адресу: г. Тамбов, ул. Рылеева, д. 62, корп. 1 (рис. 5.5).

Во время строительства нового дома (при забивке свай) образовались трещины на главном фасаде существующего здания. Были установлены маячки и временно прекращено строительство. Ситуация усугубляется тем, что в подвале произошла утечка из коммуникаций, и длительное время подвал был затоплен канализационными стоками. Уровень воды составлял более двух метров. После частичного ремонта ситуация нормализовалась. Но на момент обследования выяснилось, что подвал опять затоплен водой.

Трещины продолжают развиваться. Об этом свидетельствуют разорванные маячки. Последние маячки установлены 13.07.04. После строительства нового дома наблюдение за ситуацией прекращено.

a)

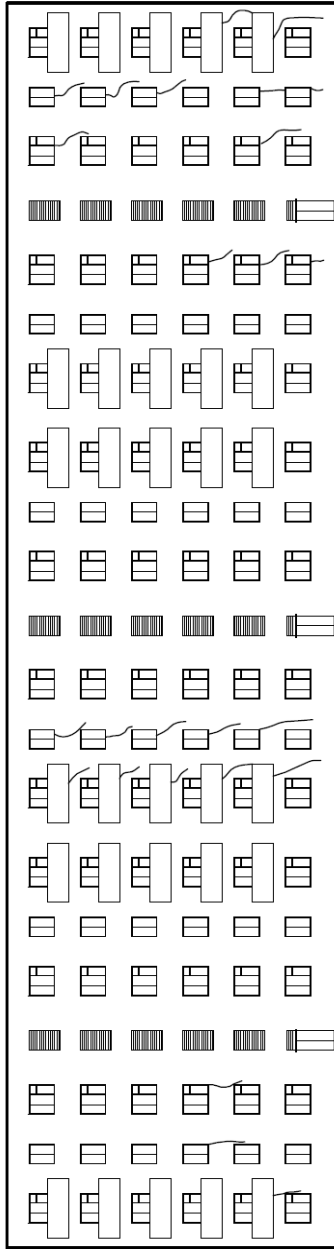
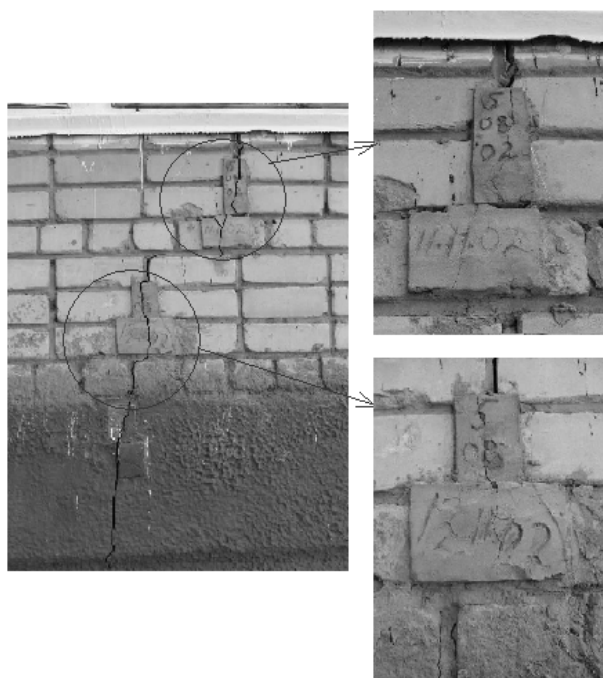


Рис. 5.5. Фасад здания (а), картины трещин в стенах (б)



б)

Рис. 5.5. Окончание

Список литературы к главе 5

1. **Badreddine Sbartaï.** Dynamic Interaction of Two Adjacent Foundations Embedded in a Viscoelastic Soil // *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2016. – V. 16. – 1450110. – 23 p.
2. **Kausel, E.** Dynamic stiffness of circular foundations / E. Kausel, J. M. Roesset // *J. End. Mech. Div. ASCE* 101. – 1975. – P. 771 – 785.
3. **Kausel, E.** Dynamic analysis of footings on layered media / E. Kausel, J. M. Roesset, G. Waas // *J. Eng. Mech.* 101. – 1975. – P. 679 – 693.
4. **Wong, J. E.** Dynamic interaction between rigid foundations in a layered half-space / J. E. Wong, J. Luco // *Soil Dynam. Earthquake Eng.* – 1986. – N 5(3). – P. 149 – 158.
5. **Антонов, В. М.** Проектирование зданий в особых условиях строительства и эксплуатации : учебное пособие / В. М. Антонов, В. В. Леденёв, В. И. Скрылев. – Тамбов : ТГТУ, 2002. – 240 с.
6. **Жемочкин, Б. Н.** Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Синицын. – М. : Стройиздат, 1962. – 240 с.
7. **Леденёв, В. В.** Взаимное влияние близко расположенных зданий / В. В. Леденёв, Тью Тхи Хоанг Ань, А. Я. Аль-Бухейти // Устойчивое развитие региона: архитектура, строительство, транспорт : материалы 3-й Междунар. науч.-практ. конф. 27 июня, 2016. – Тамбов : Изд-во Першина Р. В., 2016. – С. 102 – 106.
8. **Леденёв, В. В.** Несущая способность и перемещения заглубленных фундаментов при действии плоской системы сил : дис. ... д-ра техн. наук / В. В. Леденёв. – Воронеж, 1998. – 495 с.
9. **Леденёв, В. В.** Предупреждение аварий : учебное пособие / В. В. Леденёв, В. И. Скрылев. – М. : АСВ, 2002. – 240 с.
10. **Леденёв, В. В.** Прочность и трещиностойкость стен : монография / В. В. Леденёв. – Тамбов : ТГТУ, 2015. – 224 с.
11. **Мидзиловски, Ч.** Влияние глубокого заложения строительных конструкций на соседние здания – Статический анализ / Ч. Мидзиловски, С. Домиан // *Американский журнал строительства и архитектуры*. – 2014. – Т. 2, № 4. – С. 136 – 142.
12. **Расторгуев, Б. С.** Проектирование зданий и сооружений при аварийных взрывных воздействиях : учебное пособие / Б. С. Расторгуев, А. И. Плотников, Д. З. Хуснутдинов. – М. : АСВ, 2007. – 152 с.
13. **Рекомендации** по расчету осадок, кренов и усилий в фундаментах существующих промышленных зданий от влияния вновь пристраиваемых зданий и сооружений / Харьковский Промстройниипроект. – М. : Стройиздат, 1987. – 104 с.
14. **Симагин, В. Г.** Проектирование и устройство фундаментов вблизи существующих сооружений в условиях плотной застройки : учебное пособие / В. Г. Симагин. – М. : АСВ, 2010. – 128 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Обоснованный выбор расчетных схем и моделей является важнейшим этапом проектирования, обеспечивающий необходимую несущую способность, жесткость и трещиностойкость конструкций и зданий, при соблюдении эстетических, технологических и конструктивных требований [8, 14, 15, 18, 21 – 24].

2. В практике проектирования в нашей стране и за рубежом часто применяют комбинированные модели, например, П. Л. Пастернака, которые более полно учитывают свойства грунтовых оснований. Фундаментальные исследования провел А. В. Перельмутер [17].

3. В последние годы опубликовали ряд крупных работ по численным методам расчета [1, 2 – 12, 16 – 20] строительных конструкций, позволяющих учесть ряд неблагоприятных факторов, повысить скорость и точность расчетов.

4. Важнейшей проблемой является проектирование зданий и сооружений с учетом совместной работы несущих элементов, особенно грунтового основания. Фундаментальные исследования в этом направлении выполнены Б. А. Гарагашем (2012). Сведения о нагрузках и воздействиях приведены в работах [5, 8, 9, 16, 18].

5. В процессе строительства и эксплуатации происходят изменения механических и реологических характеристик материалов, условий эксплуатации, появление неблагоприятных факторов, механические повреждения и др. [18].

Необходимо прогнозирование этих изменений, что представляет чрезвычайно сложную задачу. На практике это часто не рассматривают. Важное значение придается районированию территорий по инженерно-геологическим и гидрологическим условиям [18].

6. Научное сопровождение проектирования и строительства уникальных зданий и сооружений [5, 9] обеспечивает экономичность, надежность возведения новых объектов и безопасность существующих.

Важен учет опыта нормирования, проектирования и строительства в зарубежных странах [11], В. О. Алмазов (2007), А. Г. Колмогоров, В. С. Плевков (2009) и др.

7. Опыт обследования зданий и сооружений (В. В. Леденёв, 1970 – 2000) показал, что часто причиной отказов конструкций, зданий и сооружений является нарушение условий эксплуатации, несвоевременный ремонт, грубые ошибки при изысканиях, проектировании, строительстве и эксплуатации, а иногда в назначении расчетных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Агапов, В. П.** Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости пространственных тонкостенных подкрепленных конструкций : монография / В. П. Агапов. – М. : АСВ, 2000 – 152 с.
2. **Алейников, С. М.** Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственных неоднородных оснований : монография / С. М. Алейников. – М. : АСВ, 2000 – 754 с.
3. **Бенерджи, П.** Метод граничных элементов в прикладных науках : монография / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М. : Мир, 1984.
4. **Бреббия, К.** Применение метода граничных элементов в технике / К. Бреббия, С. Уокер. – М. : Мир, 1982. – 248 с.
5. **Дубровский, В. Б.** Строительство атомных электростанций : учебник / В. Б. Дубровский. – М. : АСВ, 2010. – 368 с.
6. **Численные** и аналитические методы расчета строительных конструкций / А. Б. Акимов, П. А. Акимов, В. Н. Сидоров, М. Л. Мозгалева. – М. : АСВ, 2009. – 336 с.
7. **Ильин, В. П.** Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – М. : АСВ; СПб. : СПбГАСУ, 2005. – 425 с.
8. **Кабанцев, О. В.** Расчет и конструирование многоэтажных и высотных монолитных железобетонных зданий. Спецкурс. Конспект лекций : учебное пособие / О. В. Кабанцев. – М. : АСВ, 2013. – 419 с.
9. **Канчели, Н. В.** Строительные пространственные конструкции : учебное пособие / Н. В. Канчели. – М. : АСВ, 2008. – 128 с.
10. **Кацикаделис, Дж. Т.** Граничные элементы: Теория и приложения / Дж. Т. Кацикаделис. – М. : АСВ, 2007. – 348 с.
11. **Колмогоров, А. Г.** Расчет железобетонных конструкций по российским и зарубежным нормам : учебное пособие / А. Г. Колмогоров, В. С. Плевков. – Томск : Печатная мануфактура, 2009. – 496 с.
12. **Коренева, Е. Б.** Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения : монография / Е. Б. Коренева. – М. : АСВ, 2009. – 240 с.
13. **Коробко, В. И.** Строительная механика стержневых систем : учебник / под ред. В. И. Коробко. – М. : АСВ, 2007. – 510 с.
14. **Леденёв, В. В.** Оболочечные конструкции в строительстве : учебное пособие / В. В. Леденёв, А. В. Худяков. – Тамбов : ТГТУ, 2016. – 272 с.

15. **Леденёв, В. В.** Теоретические основы механики деформирования и разрушения : монография / В. В. Леденёв, В. Г. Однолько, З. Х. Нгуен. – Тамбов : ТГТУ, 2013. – 312 с.
16. **Нагрузки** и воздействия на здания и сооружения : справочное пособие / В. П. Гордеев, А. И. Лантух-Лященко, В. А. Пашинский и др. ; под общ. ред. А. В. Перельмутера. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, АСВ, ДМК Пресс, 2011. – 528 с.
17. **Перельмутер, А. В.** Расчетные модели сооружений и возможность их анализа : монография / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. – М. : Изд-во СКАД СОФТ, АСВ, ДМК Пресс, 2011. – 736 с.
18. **Руководство** по комплексному освоению подземного пространства крупных городов. – М. : РААСН, 2004. – 208 с.
19. **Сливкер, В. И.** Строительная механика. Вариационные основы : учебное пособие / В. И. Сливкер. – М. : АСВ, 2005. – 736 с.
20. **Ильин, В. П.** Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – М. : АСВ, СПб. : СПбГАСУ, 2005. – 425 с.
21. **Комаров, И. А.** Термодинамика и тепломассообмен в дисперсных мерзлых породах : монография / И. А. Комаров. – М. : Научный мир, 2003. – 608 с.
22. **Лехницкий, С. Г.** Теория упругости анизотропного тела : монография / С. Г. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 415 с.
23. **Ломакин, В. А.** Теория упругости неоднородных тел : монография / В. А. Ломакин. – М. : МГУ, 1976. – 368 с.
24. **Сафонов, В. С.** Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок / В. С. Сафонов, Нгуен Динь Хоа // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. – Воронеж, 2010. – № 1(17). – С. 157 – 166.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ КОНСТРУКЦИЙ И ЗДАНИЙ	5
1.1. Нагрузки и воздействие на основание, конструкции, здания и сооружения	5
1.2. Расчетные модели строительных конструкций	7
1.3. Расчетные модели и технология проектирования зданий ...	11
Список литературы к главе 1	28
2. РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛОВ, ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ, ЖЕЛЕЗОБЕТОНА И ФУНДАМЕНТОВ	32
2.1. Механические и реологические модели оснований и фундаментов	32
2.2. Моделирование грунтовых оснований	107
Список литературы к главе 2	121
3. РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛИТНЫХ И СВАЙНЫХ ФУНДАМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАЗНЫХ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ	125
3.1. Плиты и плитные фундаменты	125
3.2. Каркасно-стержневые модели ростверков	210
Список литературы к главе 3	214
4. РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ЛИНЕЙНО ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЫ	219
4.1. Решение В. В. Леденёва	219
4.2. Решения С. В. Иконина	260
4.3. Контактные напряжения	278
Список литературы к главе 4	279
5. ПРИЧИНЫ И ПРИМЕРЫ РАЗРУШЕНИЙ ЗДАНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ОШИБКАМИ ПРИ ИЗЫСКАНИЯХ, ПРОЕКТИРОВАНИИ, СТРОИТЕЛЬСТВЕ И ЭКСПЛУАТАЦИИ	282
5.1. Взаимное влияние зданий	282
5.2. Изменения условий эксплуатации, механических и реологических свойств грунтовых оснований и материалов конструкций	286
Список литературы к главе 5	271
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	292
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	293

Научное издание

ЛЕДЕНЁВ Виктор Васильевич
МОНАСТЫРЁВ Павел Владиславович
КУЛИКОВ Геннадий Михайлович
ПЛОТНИКОВА Светлана Валерьевна

РАСЧЕТНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ

Монография

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

ISBN 978-5-8265-1660-7



9 785826 516607

Подписано в печать 30.12.2016.
Формат 60×84 / 16. 17,2 усл. печ. л.
Тираж 400 экз. (1-й з-д 40 экз.) Заказ № 522

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВО «ТГТУ»

392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08;
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru