Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Е. В. СТЕПАНЕНКО, И. Т. СТЕПАНЕНКО

МАТЕМАТИКА
ОСНОВНОЙ КУРС

Рекомендовано Координационным советом
центров довузовской подготовки иностранных граждан
Федерального агенства по образованию
в качестве учебного пособия по математике
для довузовского обучения иностранных граждан

Тамбов
♦Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»♦
2015

УДК 512.1(075.8)
ББК В1я723
С79

Р е ц е н з е н т ы:

Кандидат технических наук, профессор,
заведующий кафедрой общенаучных дисциплин
ФГБОУ ВПО «Тверской государственный технический университет»
А. Б. Долженко

Кандидат педагогических наук, доцент кафедры
информатики и информационных технологий ФГБОУ ВПО
«Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
Е. В. Клыгина

Степаненко, Е. В.

С79 Математика. Основной курс : учебное пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 252 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1412-2.

Знакомит иностранных учащихся с языком математики. Содержит адаптированные тексты, лексико-грамматический материал и задания, позволяющие студентам-иностранцам усвоить терминологическую лексику и основные задачи курса математики.

Предназначено для студентов-иностранцев, проходящих предвузовскую подготовку.

УДК 512.1(075.8)
ББК В1я723

ISBN 978-5-8265-1412-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для работы со студентами-иностранцами, которые проходят обучение на подготовительном факультете, по программе курса «Математика».

Структура и содержание пособия соответствуют требованиям к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников факультетов и отделений предвузовского обучения иностранных граждан по математике и разработаны с учётом специфических особенностей системы обучения иностранных студентов.

В пособии рассматриваются основные понятия геометрии векторов, основы алгебры (выражения, уравнения, неравенства, функции, комплексные числа, тригонометрия), а также начала анализа (последовательности, предел, производная, интеграл).

Цель пособия – познакомить студентов-иностранцев с языком математики, изложить им математический материал в доступной языковой форме, заложить элементарные умения в чтении и понимании математических текстов, активизировать лексический запас студентов в процессе чтения текстов пособия и выполнения заданий по ним. Кроме того, пособие будет способствовать формированию вычислительных навыков при выполнении студентами соответствующих заданий.

Пособие состоит из 11 разделов, каждый из которых разделён на отдельные темы. Темы содержат теоретический материал (текст для чтения) и примеры, иллюстрирующие математические понятия и термины.

В каждую тему включены задания двух типов: на отработку вводимых математических понятий и на закрепление навыков решения рассмотренных задач.

В конце пособия в приложениях собраны основные формулы, используемые при работе с пособием и необходимые при дальнейшем изучении математики.

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$=$ – равно;
$\neq$ – не равно;
$\approx$ – приближённо равно;
$<$ – меньше;
$>$ – больше;
$\leq$ – меньше или равно;
$\geq$ – больше или равно;
$|a|$ – абсолютная величина (модуль) числа a;
a^m – a в степени m;
$\sqrt{a}$ – квадратный корень из числа a;
$\sqrt[m]{a}$ – корень степени m из числа a ($m \neq 2$);
i – мнимая единица, квадратный корень из –1; $i = \sqrt{-1}$;

$\bar{z}$ – комплексное число, сопряжённое с z; например, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$;

$\log_b a$ – логарифм числа a по основанию b, а если нет необходимости указывать основание, то пишут $\log a$;

$\lg a$ – логарифм по основанию 10 (десятичный логарифм);

$\ln a$ – логарифм по основанию $e \approx 2{,}71828\ldots$ (натуральный логарифм);

$n!$ – факториал числа n; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$;

π – отношение длины окружности к её диаметру; $\pi \approx 3{,}1415\ldots$;

a, b, c, … – постоянные величины (чаще используются первые буквы латинского алфавита);

x, y, z, … – переменные величины (чаще используются последние буквы латинского алфавита);

$f()$, $\varphi()$, $F()$, $\Phi()$, … – функции; например, $f(x)$;
∞ – бесконечность;
$\lim$ – предел;
$\to$ – стремится; например, $x \to a$;
Δ – приращение (греческая прописная буква);
d – дифференциал;
$'$, $''$ – обозначения первой и второй производных; например, $f'(x)$;
$\dfrac{d}{dx}$ – первая производная одного переменного; например, $\dfrac{dy}{dx}$;
$\int$ – неопределённый интеграл;

$\int_a^b$ – определённый интеграл с нижним пределом a и верхним пределом b;

$\Big|_a^b$ – знак двойной подстановки; например, $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(f)$;

$\in$ – принадлежит; например, $a \in A$, элемент a принадлежит множеству A;

$\notin$ – не принадлежит;

$\subset$ – содержится (включено); например, $N \subset Z$, множество N содержится во множестве Z (множество N включено во множество Z);

$\cup$ – объединение; например, (1; 5) $\cup$ (3; 6) = (1; 6);

$\cap$ – пересечение; например, (1; 5) $\cap$ (3; 6) = (3; 5);

$\Rightarrow$ – следует; например, $A \Rightarrow B$ (из A следует B);

$\Leftrightarrow$ – эквивалентно, тождественно равно; например, $A \Leftrightarrow B$;

$\vec{a}$ – вектор;

$\overrightarrow{AB}$ – вектор, начало которого в точке A, а конец – в точке B;

$\angle$ – плоский угол; например, $\angle BAC$ – угол между лучами AB и AC;

$\vec{a}\vec{b}$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

$\varnothing$ – пустое множество;

N – множество натуральных чисел;

Z – множество целых чисел;

Q – множество рациональных чисел;

J – множество иррациональных чисел;

R – множество действительных (вещественных) чисел;

C – множество комплексных чисел;

$[a, b]$ – замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b;

(a, b) – открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b;

$[a, b)$, $(a, b]$ – полуоткрытые промежутки (полуинтервалы) с началом a и концом b;

Латинский алфавит		Греческий алфавит	
Aa – а	*Nn* – эн	Αα – альфа	Νν – ню
Bb – бэ	*Oo* – о	Ββ – бэта	Ξξ – кси
Cc – цэ	*Pp* – пэ	Γγ – гамма	Οο – омикрон
Dd – дэ	*Qq* – ку	Δδ – дельта	Ππ – пи
Ee – е	*Rr* – эр	Εε – эпсилон	Ρρ – ро
Ff – эф	*Ss* – эс	Ζζ – дзэта	Σσ – сигма
Gg – ге (же)	*Tt* – тэ	Ηη – эта	Ττ – тау
Hh – ха (аш)	*Uu* – у	Θϑθ – тэта	Φφ – фи
Ii – и	*Vv* – вэ	Ιι – йота	Χχ – хи
Jj – йот (жи)	*Ww* – дубль-вэ	Κκ – каппа	Υυ – ипсилон
Kk – ка	*Xx* – икс	Λλ – лямбда	Ψψ – пси
Ll – эль	*Yy* – игрек	Μμ – мю	Ωω – омега
Mm – эм	*Zz* – зэт		

Раздел 1
ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Слова и словосочетания

Ве́ктор, ве́кторы	
Отре́зок	Напра́вленный отре́зок
Направле́ние	Направле́ние ве́ктора
Напра́влен	Одина́ково напра́влены
	Противополо́жно напра́влены
Коллинеа́рный, -ая, -ое, -ые	Коллинеа́рные ве́кторы
	Неколлинеа́рные ве́кторы

Текст для чтения

Вектор – это направленный отрезок.

Чтобы задать направление вектора, надо указать его начало и конец. Направление обозначается стрелкой (рис. 1.1). При записи вектора направление задаётся порядком букв, обозначающих начало и конец вектора. Так векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ – это разные векторы.

Векторы называются *одинаково направленными*, если лучи, на которых они лежат, одинаково направлены.

Векторы называются *противоположно направленными*, если лучи, на которых они лежат, противоположно направлены.

Так, на рис. 1.1 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, т.е. $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ противоположно направлены, т.е. $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{c}$.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы либо одинаково направлены, либо противоположно направлены.

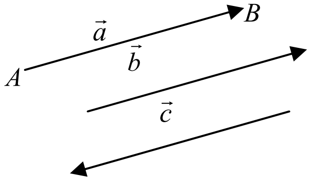


Рис. 1.1

Точка на плоскости имеет две координаты. Пусть точка $A(x_A;\ y_A)$ – начало, а точка $B(x_B;\ y_B)$ – конец вектора $\overrightarrow{AB}$. Тогда числа $a_1 = x_B - x_A$, $a_2 = y_B - y_A$ – *координаты вектора* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 1.2).

Говорят, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты (a_1, a_2), и пишут:

$$\vec{a} = \vec{a}(a_1, a_2) = \overrightarrow{(a_1, a_2)}.$$

Модуль (*абсолютная величина*) *вектора* – это длина отрезка, который изображает вектор. Абсолютная величина (модуль) вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.

Если известны координаты вектора, то его модуль можно найти по формуле

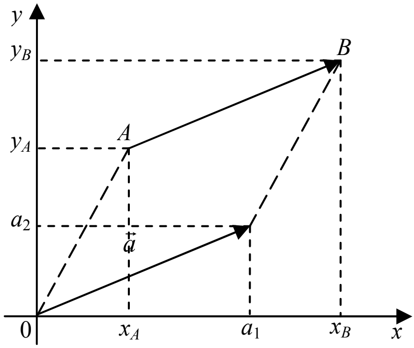


Рис. 1.2

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Нулевой вектор – это вектор, у которого начало и конец совпадают. Координаты нулевого вектора равны нулю. Модуль нулевого вектора равен нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Два вектора называются *равными*, если они совпадают при параллельном переносе.

Из определения следует, что *равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине*.

И обратно: *если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны*.

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты.

И обратно: *если у векторов соответствующие координаты равны*, *то векторы равны*.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое вектор? Как обозначаются векторы?
2. Какие векторы называются одинаково направленными (противоположно направленными)?
3. Какие векторы называются коллинеарными?
4. Что такое координаты вектора?
5. Что такое абсолютная величина (модуль) вектора?
6. Чему равна абсолютная величина вектора с координатами a_1, a_2?
7. Что такое нулевой вектор?
8. Какие векторы называются равными?
9. Когда два вектора равны?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. На прямой даны три точки A, B, C, причём точка B лежит между точками A и C. Среди векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ назовите одинаково направленные и противоположно направленные.

2. Даны вектор $\overrightarrow{AB}$ и точка C. Отложите от точки C вектор, равный вектору $\overrightarrow{AB}$, если: 1) точка C лежит на прямой AB; 2) точка C не лежит на прямой AB.

3. Векторы $\vec{a}(2;\, 4)$, $\vec{b}(-1;\, 2)$, $\vec{c}(c_1;\, c_2)$ отложены от начала координат. Чему равны координаты их концов?

4. Абсолютная величина вектора $\vec{a}(5;\, m)$ равна 13, а вектора $\vec{b}(n;\, 24)$ равна 25. Найдите m и n.

5. Даны точки $A(0;\, 1)$, $B(1;\, 0)$, $C(1;\, 2)$, $D(2;\, 1)$. Докажите равенство векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

6. Даны три точки $A(1;\, 1)$, $B(-1;\, 0)$, $C(0;\, 1)$. Найдите такую точку $D(x;\, y)$, чтобы векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были равны.

7. Даны векторы $\vec{a}(2;\, -4)$, $\vec{b}(1;\, 1)$, $\vec{c}(1;\, -2)$, $\vec{d}(-2;\, 4)$. Укажите пары коллинеарных векторов. Какие из данных векторов одинаково направлены, а какие – противоположно направлены?

8. Известно, что векторы $\vec{a}(1;\, -1)$ и $\vec{b}(-2;\, m)$ коллинеарны. Найдите, чему равно m.

Тема 1.2. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С ВЕКТОРАМИ

Слова и словосочетания

Ве́кторный, -ая, -ое, -ые	Ве́кторное ра́венство
Треуго́льник	Пра́вило треуго́льника
Параллелогра́мм	Пра́вило параллелогра́мма
Диагона́ль (сущ., ж.р.)	Диагона́ль параллелогра́мма
Скаля́р	
Скаля́рный, -ая, -ое, -ые	Скаля́рное произведе́ние ве́кторов
У́гол	У́гол ме́жду ве́кторами

Текст для чтения

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с координатами a_1, a_2, b_1, b_2 называется вектор $\vec{c}$ с координатами $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, т.е.

$$\vec{a}(a_1,\, a_2) + \vec{b}(b_1,\, b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1,\, a_2 + b_2).$$

Для любых векторов $\vec{a}(a_1,\, a_2),\, \vec{b}(b_1,\, b_2),\, \vec{c}(c_1 + c_1)$ верны равенства: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

Теорема. Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Доказательство. Пусть $A(x_A,\, y_A)$, $B(x_B,\, y_B)$, $C(x_C,\, y_C)$ – данные точки (рис. 1.3). Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $x_B - x_A$, $y_B - y_A$, вектор $\overrightarrow{BC}$ имеет координаты $x_C - x_B$, $y_C - y_B$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ имеет координаты $x_C - x_A$, $y_C - y_A$. А это и есть координаты вектора $\overrightarrow{AC}$. Значит, векторы $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ равны. Теорема доказана.

Данная теорема даёт способ построения суммы произвольных векторов, который называется «*правилом треугольника*». Надо от конца вектора $\vec{a}$ отложить вектор $\vec{b}'$, равный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}'$, будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1.4).

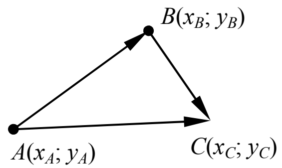


Рис. 1.3

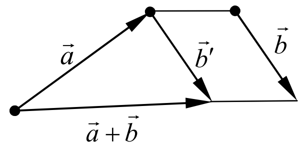


Рис. 1.4

Для векторов с общим началом их сумма изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах («*правило параллелограмма*», рис. 1.5). Действительно, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, а $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Значит, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Разностью векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ называется такой вектор $\vec{c}(c_1, c_2)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Отсюда находим координаты вектора $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$: $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$.

Правило построения разности векторов изображено на рис. 1.6.

Произведением вектора $\overrightarrow{(a_1, a_2)}$ *на число* λ называется вектор $\overrightarrow{(\lambda a_1, \lambda a_2)}$, т.е. $\overrightarrow{(a_1, a_2)} \cdot \lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1, \lambda a_2)}$.

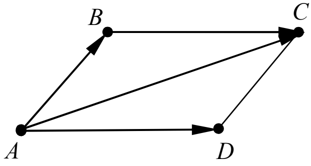


Рис. 1.5

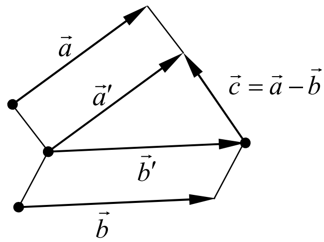


Рис. 1.6

По определению $\overrightarrow{(a_1, a_2)} \cdot \lambda = \lambda \cdot \overrightarrow{(a_1, a_2)}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что для любого вектора $\vec{a}$ и чисел λ и μ верно равенство $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа λ имеет место равенство $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Абсолютная величина вектора $\lambda\vec{a}$ равна $|\lambda||\vec{a}|$. Направление вектора $\lambda\vec{a}$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – отличные от нуля неколлинеарные векторы. Тогда любой вектор $\vec{c}$ можно представить в виде $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ называется число $a_1b_1 + a_2b_2$.

Для скалярного произведения векторов используется такая же запись, как и для произведения чисел. Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ обозначается $\vec{a}^2$ и называется *скалярным квадратом*. Очевидно, что $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ верно равенство $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Углом между ненулевыми векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ называется угол $\angle BAC = \varphi$ (рис. 1.7). *Углом* между двумя произвольными ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Теорема. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

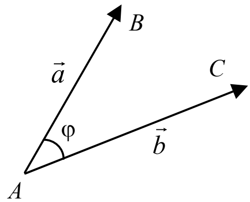


Рис. 1.7

***Следствие* 1.** Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

***Следствие* 2.** Если скалярное произведение векторов, которые не равны нулю, равно нулю, то векторы перпендикулярны.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Дайте определение суммы векторов.
2. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
3. Сформулируйте «правило параллелограмма» сложения векторов.
4. Дайте определение разности векторов.
5. Дайте определение произведения вектора на число.
6. Дайте определение скалярного произведения векторов.
7. Что такое скалярный квадрат?
8. Как определяется угол между векторами?
9. Чему равен угол между одинаково направленными векторами?
10. Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Найдите вектор $\vec{c}$, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и абсолютную величину вектора $\vec{c}$, если: 1) $\vec{a}(1;4), \vec{b}(-4;8)$; 2) $\vec{a}(2;5), \vec{b}(4;3)$.

2. Дан треугольник *ABC*. Найдите сумму векторов: 1) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

3. Найдите вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ и его абсолютную величину, если: 1) $\vec{a}(1;-4), \vec{b}(-4;8)$; 2) $\vec{a}(-2;7), \vec{b}(4;-1)$.

4. Даны векторы $\vec{a}(1;0), \vec{b}(1;1)$ и $\vec{c}(-1;0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы имело место векторное равенство $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

5. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}(1;2), \vec{b}\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

6. Даны вершины треугольника $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$. Найдите косинусы углов треугольника.

7. Докажите, что векторы $\vec{a}(m;n)$ и $\vec{b}(-n;m)$ перпендикулярны или равны нулю.

8. Даны векторы $\vec{a}(3;4)$ и $\vec{b}(m;2)$. При каком значении m эти векторы перпендикулярны?

9. Даны векторы $\vec{a}(1;0)$ и $\vec{b}(1;1)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ был перпендикулярен вектору $\vec{a}$.

Тема 1.3. ПОНЯТИЕ О МНИМЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЛАХ. ФОРМЫ ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Слова и словосочетания

Ко́мпле́ксный, -ая, -ое, -ые	Ко́мпле́ксное число́
	Мно́жество компле́ксных чи́сел
Сопряжённый, -ая, -ое, -ые	Сопряжённые чи́сла
Мни́мый, -ая, -ое, -ые	Мни́мая часть компле́ксного числа́
Фо́рма	Фо́рма за́писи числа́
	Алгебраи́ческая фо́рма за́писи
	Тригонометри́ческая фо́рма за́писи
Аргуме́нт	Аргуме́нт компле́ксного числа́
Си́нус	Си́нус фи
Ко́синус	Ко́синус фи

Текст для чтения

Для решения многих задач физики, электротехники и других наук не хватило множества действительных чисел.

Вспомним квадратный корень из действительного числа. Он существует только если под корнем стоит неотрицательное число, а выражение $\sqrt{-1}$ не имеет смысла. Поэтому возникла потребность нового расширения понятия числа.

Комплексным числом называется число вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а число i – *мнимая единица*, т.е. $i^2 = -1$.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются *равными*, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Комплексные числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются *сопряжёнными* комплексными числами.

Комплексные числа $z = a + bi$ и $-z = -a - bi$ называются *противоположными* комплексными числами.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа. Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $z = a + bi$, а b – его *мнимой частью*. При этом пишут $\mathrm{Re}\, z = a$, $Im\, z = b$.

Любое действительное число a содержится во множестве комплексных чисел и его можно записать в виде $a = a + 0 \cdot i$ или $a = a - 0 \cdot i$.

Комплексное число $0 + bi$ называется *чисто мнимым числом*. Запись bi означает то же самое, что и $0 + bi$.

Множество комплексных чисел обозначают C. Множество действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел: $R \subset C$. Следовательно, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Комплексное число $z = \ = a + bi$ можно изобразить точкой плоскости с координатами (a, b) (рис. 1.8).

Также комплексное число $z = a + bi$ можно геометрически изобразить в виде вектора $\overrightarrow{OM} = \vec{z}$ с началом в точке $O(0, 0)$ и концом в точке $M(a, b)$ (рис. 1.8).

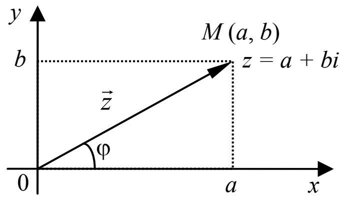


Рис. 1.8

Модулем (*абсолютной величиной*) комплексного числа $z = a + bi$ называется действительное число $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Геометрическая модель – это длина вектора $\overrightarrow{OM}$: $|\overrightarrow{OM}| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Угол φ между положительным направлением оси Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1.8), называется *аргументом* комплексного числа $z = a + bi$.

Если действительную и мнимую части комплексного числа выразить через модуль $r = |z|$ и аргумент φ ($a = r \cdot \cos \varphi$, $b = r \cdot \sin \varphi$), то всякое комплексное число z, кроме нуля, можно записать в *тригонометрической форме* $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Замечание. Подробно тригонометрические функции будут рассмотрены в темах 5, 6 раздела 5.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие числа называются комплексными и мнимыми?
2. Как геометрически представляется комплексное число?
3. Что называется модулем комплексного числа?
4. Что такое аргумент комплексного числа?
5. Какие комплексные числа называются равными?
6. Какие комплексные числа называются противоположными?
7. Какие комплексные числа называются сопряжёнными?
8. Как записать комплексное число в алгебраической форме?
9. Как записать комплексное число в тригонометрической форме?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Для каждого комплексного числа запишите противоположное и сопряжённое числа:

$z_1 = -3 + 5i$; $z_2 = 4 - 7i$; $z_3 = -0{,}6 + 0{,}2i$;
$z_4 = -0{,}4 - 0{,}5i$; $z_5 = 3{,}6 + 0{,}2i$; $z_6 = 1{,}4 - 0{,}2i$;
$z_7 = 3 - 0{,}7i$; $z_8 = -1 + 3i$; $z_9 = -3 + 0{,}7i$; $z_{10} = 4 + 5i$.

2. Изобразите числа из задачи 1 на координатной плоскости.
3. Для каждого числа из задачи 1 найдите его модуль.

Тема 1.4. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Слова и словосочетания

Сложе́ние	Сложе́ние компле́ксных чи́сел
Вычита́ние	Вычита́ние компле́ксных чи́сел
Умноже́ние	Умноже́ние компле́ксных чи́сел
Деле́ние	Деле́ние компле́ксных чи́сел
Возведе́ние в сте́пень	Возведе́ние в сте́пень компле́ксного числа́

Текст для чтения

Над комплексными числами можно выполнять все арифметические действия – сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Но комплексные числа **нельзя** сравнивать! Между комплексными числами не существует понятий «больше» или «меньше».

Сложение и вычитание. Сложение двух комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, выполняется по формуле

$$(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.$$

Например, если $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = -5 + 3i$, то $z_1 + z_2 = (3 - 5) + (4 + 3)i = -2 + 7i$.

Сумма двух сопряжённых комплексных чисел $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ равна $z + \bar{z} = 2a$.

Вычитание двух комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, и выполняется по формуле

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Например, если $z_1 = -3 + 4i$ и $z_2 = -5 + 3i$, то $z_1 - z_2 = (-3 + 5) + (4 - 3)i = 2 + i$.

Если комплексные числа заданы в тригонометрической форме, то перед выполнением сложения или вычитания числа надо записать в алгебраической форме.

Умножение. Умножение двух комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, выполняется по формуле

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Например, если $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 5 + 3i$, то $z_1 z_2 = (3 \cdot 5 - 4 \cdot 3) + (3 \cdot 3 + 4 \cdot 5)i = 3 + 29i$.

Чтобы умножить два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, используют следующую формулу:

$$z_1 z_2 = [r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)][r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] =$$
$$= r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Деление. Деление двух комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, и выполняется по формуле

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Поясним формулу. Пусть $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 2 - 3i$. Найдём частное этих чисел. Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на число $\bar{z}_2 = 2 + 3i$, сопряжённое к z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{2 - 3i} = \frac{(3 + 4i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{(6 - 12) + (9 + 8)i}{4 + 9} = \frac{-6 + 17i}{13} = \frac{-6}{13} + \frac{17}{13} i.$$

Чтобы разделить два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, используют следующую формулу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Возведение в степень и извлечение корня. Возведение комплексного числа, заданного в алгебраической форме, в натуральную степень будем рассматривать как частный случай умножения комплексных чисел: $z^n = zz\ldots z$.

Чтобы возвести в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме, используют *формулу Муавра*:

$$z^n = [r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Чтобы извлечь корень из комплексного числа, надо сначала записать число в тригонометрической форме, а затем использовать формулу

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k \in Z.$$

Чтобы получить n различных значений корня n-й степени из z, надо задать n последовательных значений для k ($k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$).

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие действия можно выполнять с комплексными числами, а какие – нельзя?
2. Как выполняется сложение и вычитание комплексных чисел?
3. В какое форме удобно выполнять сложение и вычитание комплексных чисел?
4. Как выполняется умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме?
5. Как выполняется умножение комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме?
6. Как выполняется деление комплексных чисел, записанных в алгебраической форме?
7. Как выполняется деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме?
8. Как выполняется возведение в степень комплексных чисел, записанных в алгебраической форме?
9. Как выполняется возведение в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Выполните сложение комплексных чисел:

а) $z_1 = -3 + 5i$; $z_2 = 4 - 7i$; б) $z_1 = -0{,}6 + 0{,}2i$; $z_2 = -0{,}4 - 0{,}5i$;

в) $z_1 = 3 - 0{,}7i$; $z_2 = -3 + 0{,}7i$; г) $z_1 = 3{,}6 + 0{,}2i$; $z_2 = 1{,}4 - 0{,}2i$;

д) $z_1 = -1 + 3i$; $z_2 = 4 + 5i$; е) $z_1 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$; $z_2 = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}i$.

2. Найдите разность $z_1 - z_2$ комплексных чисел:

а) $z_1 = 4 - 5i$; $z_2 = 3 + 8i$; б) $z_1 = \frac{5}{6} + \frac{3}{4}i$; $z_2 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}i$;

в) $z_1 = 1{,}5 - 2{,}1i$; $z_2 = 0{,}5 - 0{,}9i$; г) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{5}i$; $z_2 = \frac{3}{8} - \frac{1}{5}i$;

д) $z_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$; $z_2 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}i$; е) $z_1 = \frac{7}{8} - \frac{1}{2}i$; $z_2 = -\frac{1}{2}i$.

3. Найдите произведение комплексных чисел:

а) $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = -4 + i$; б) $z_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4}i$; $z_2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}i$;

в) $z_1 = \sqrt{5}i$; $z_2 = 4\sqrt{5}i$; г) $z_1 = 5 - 3i$; $z_2 = 2i$;

д) $z_1 = 0{,}2 - 0{,}3i$; $z_2 = 0{,}5 + 0{,}4i$.

4. Выполните действия:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1-i}$;

в) $\frac{3-2i}{1+3i}$; г) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$;

д) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; е) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$.

5. Разложите на комплексные множители, применив формулу $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$:

а) $a^2 + 4b^2$; б) $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{9}$; в) $1 + \sqrt{3}$; г) 3.

Раздел 2
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Тема 2.1. ОДНОЧЛЕНЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Слова и словосочетания

Одночле́н
Коэффицие́нт
Алгебраи́ческий, -ая, -ое, -ие — Алгебраи́ческое выраже́ние
Подо́бный, -ая, -ое, -ые — Подо́бные одночле́ны

Текст для чтения

Одночлены и действия над ними. Рассмотрим выражения: 2; a; $3b$; $-4a^2b$; $5{,}4ab^2c^4$. Они содержат числа, переменные, степени с целыми неотрицательными показателями, их произведения. Это одночлены.

Одночленом называется алгебраическое выражение, которое содержит числа, переменные и только действия умножения и возведения в целую неотрицательную степень.

Числовой множитель одночлена называется *коэффициентом*. Например, у одночлена $7xy$ множитель 7 – это коэффициент.

Одночлен $4a^2$ содержит одну переменную a во второй степени. Такой одночлен называется *одночленом второй степени*.

Одночлен $5a^3c$ содержит две переменные: a и c. Сумма показателей степеней переменных равна $3 + 1 = 4$. Такой одночлен называется *одночленом четвёртой степени*.

Таким образом, *степень одночлена* равна сумме показателей степеней всех переменных, которые входят в данный одночлен.

Любое число является одночленом, например, 3. Степень такого одночлена равна нулю. Потому что $3 = 3a^0 = 3a^0x^0 = \ldots$.

Одночлены, которые отличаются только числовым коэффициентом или равны между собой, называются *подобными одночленами*.

Например, $2a^2b^3$ и $3a^2b^3$ – подобные одночлены.

Умножение одночленов. Рассмотрим пример:

$$3a^2b^4(-2ab^2) = 3(-2)(a^2a)(b^4b^2) = -6a^{2+1}b^{4+2} = -6a^3b^6.$$

При умножении одночленов мы применяем коммутативный и ассоциативный законы и свойство 1 степени (прил. 1).

Правило. Чтобы умножить одночлен на одночлен, нужно перемножить коэффициенты одночленов и сложить показатели степеней одинаковых переменных, которые имеют одинаковые основания.

Например,

$$5x^2b^3(-3xb^2y) = 5(-3)x^{2+1}b^{3+2}y = -15x^3b^5y.$$

Возведение одночлена в степень. Рассмотрим пример:

$$(2a^2b^3)^2 = 2^2(a^2)^2(b^3)^2 = 4a^{2\cdot 2}b^{3\cdot 2} = 4a^4b^6.$$

При возведении одночлена в степень мы применяем свойства 3 и 4 степени (прил. 1).

Правило. Чтобы возвести одночлен в степень, нужно возвести все множители одночлена в эту степень.

Например,

$$\left(\frac{1}{2}a^3b^2c\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(a^3\right)^3\left(b^2\right)^3(c)^3 = \frac{1}{8}a^9b^6c^3.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что называется одночленом?
2. Что такое коэффициент одночлена?
3. Как найти степень одночлена?
4. Какие одночлены называются подобными?
5. Как выполняется умножение одночленов? Какие законы и правила при этом используются?
6. Как выполняется возведение одночлена в степень? Какие законы и правила при этом используются?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Выполните умножение одночленов:

а) $5a^3b\ (-3a^2b^2)$; б) $0{,}5ab\ (6a^5b^3)$;
в) $2a^2b^2\ (-0{,}3a^2c^2)$; г) $5ab^3\ (-1{,}1b^4c^5)$.

2. Выполните возведение в степень одночленов:

а) $(5a^3b)^2$; б) $(0{,}2ab)^5$;
в) $(-0{,}3a^2c^2)^4$; г) $(-1{,}1a^2b^4c^5)^3$.

3. Назовите коэффициент и степень всех одночленов задач 1, 2.

Тема 2.2. МНОГОЧЛЕНЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Слова и словосочетания

Многочле́н	
Член	Член многочле́на
Двучле́н	
Трёхчле́н	
Приводи́ть II, привести́ I (*что*?)	Привести́ подо́бные чле́ны
Приведе́ние (*чего*?)	Приведе́ние подо́бных чле́нов

Текст для чтения

Многочлены и действия над ними. Сложим одночлены $8x$, $2y$, 5, получим алгебраическую сумму $8x + 2y + 5$ или многочлен.

Алгебраическая сумма одночленов называется *многочленом*.

Одночлены, которые составляют многочлен, называются его *членами*. Если многочлен содержит два члена, например $2a + 3x$, то это *двучлен*, если три члена, например, $2x^3 – 5x + 6$, то это *трёхчлен* и т.д.

Замечание. Одночлен – это частный случай многочлена.

Рассмотрим многочлен $6ax^2 + 4a^3 + 6ax^2 – 2a^3$. Он содержит четыре члена. Первый и третий члены, а также второй и четвертый члены имеют одинаковые буквенные части. Это подобные члены.

Определение. Члены многочлена называются *подобными*, если они имеют одинаковую буквенную часть.

Сумму подобных членов можно заменить одним членом. Для этого нужно сложить их коэффициенты, а буквенную часть оставить без изменения. Это преобразование называется *приведением подобных членов*.

Например,

$$4a + 5ax – 3a – 7ax = (4 – 3)a + (5 – 7)ax = a – 2ax.$$

Рассмотрим многочлен одной переменной x: $3x^2 + 4x – 5x^4 + 2$.

Он содержит четыре члена. Наибольшую степень имеет член $(–5x^4)$. Этот член называется *старшим членом многочлена*. Степень старшего члена называется *степенью многочлена*. Поэтому данный многочлен – это многочлен четвёртой степени.

Сложение и вычитание многочленов. Сложим два многочлена:

$$(5x^2 – 2x + 3) + (3x^2 + 4x – 7) = 5x^2 – 2x + 3 + 3x^2 + 4x – 7 = 8x^2 + 2x – 4.$$

Вычтем многочлен $7x^2 – 8x + 4$ из многочлена $3x^2 + 5x – 2$:

$$(3x^2 + 5x – 2)–(7x^2 – 8x + 4) = 3x^2 + 5x – 2 – 7x^2 + 8x – 4 = –4x^2 + 13x – 6.$$

Правило. Чтобы выполнить сложение или вычитание многочленов, нужно: 1) раскрыть скобки; 2) привести подобные члены.

Правило раскрытия скобок.

$+(a+b-c)=a+b-c$	$-(a+b-c)=-a-b+c$

Умножение многочлена на одночлен. Дистрибутивный закон умножения $(a+b)c=ac+bc$ можно рассматривать как правило умножения многочлена на одночлен.

Правило. Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно умножить каждый член многочлена на одночлен и сложить произведения.

Например,

$$(2a+5b-3)4c=8ac+20bc-12c.$$

Умножение многочлена на многочлен. Найдём произведение $(a+b)(c+d)$.

Обозначим множитель $(c+d)$ буквой m, получим

$$(a+b)(c+d)=(a+b)m=am+bm=a(c+d)+b(c+d)=$$
$$=ac+ad+bc+bd.$$

Получили сумму произведений каждого члена первого многочлена на каждый член второго многочлена.

Правило. Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и сложить произведения.

Например, найдём произведение:

$$(2x^2-5x+3)(-3x+1)=-6x^3+15x^2-9x+2x^2-5x+3=$$
$$=-6x^3+17x^2-14x+3.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что называется многочленом?
2. Что такое старший член многочлена?
3. Как найти степень многочлена?
4. Как привести подобные члены многочлена?
5. Как выполняется сложение и вычитание многочленов?
6. Как выполняется умножение многочлена на одночлен?
7. Как выполняется умножение многочленов?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Приведите подобные члены:

а) $3a - 5a + 6a - a$; б) $5ab + 4ab^2 - ab - 12ab^2$;
в) $a^2 - b^2 + 3a^2 - 2b^2$; г) $2{,}5y^4 + 0{,}8x^2y^4 + y^4 - 3x^2y^4$.

2. Выполните сложение многочленов:

а) $(4x + 2) + (-x - 3)$; б) $(x^2 + 4x - 5) + (x^2 - 3x + 2)$;
в) $(5x^2 - ax - a^2) + (3x^2 + 2ax - 3a^2) + (-4ax + 2a^2 - x^2)$.

3. Выполните вычитание многочленов:

а) $3a - (a + 2b)$; б) $-4y - (-5 + y)$;
в) $(2m + 3n) - (5m - 6n)$; г) $(11x^3 - 2x^2) - (x^3 + 2x^2)$.

4. Выполните умножение:

а) $(a + 3)\cdot 4$; б) $(-3b)(-2a + 4b)$;
в) $(2x^2 - 5x + 3)(-4x)$; г) $(6a^3 - 7ab + b^2)(-3ab^3)$;
д) $(a + b)(c - d)$; е) $(a - 1)(a - 5)$;
ж) $(7x^3y - xy)(-2x^2y^2 + 5xy^3)$; з) $(x^2 + 3x - 2)(x - 5)$.

5. Выполните действия и упростите:

а) $6(3p + 4q) - 8(5p - q)$; б) $4(x + y - z) - 3(-x - y - z)$;
в) $5(2{,}4 - 0{,}9x + 0{,}16x^2) - 4(-1 + 1{,}5x + 0{,}2x^2)$.

Тема 2.3. ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Слова и словосочетания

Располо́женный, -ая, -ое, ые — Располо́женный многочле́н
Убыва́ющий, -ая, -ее, ие — Убыва́ющие сте́пени переме́нной
Возраста́ющий, -ая, -ее, ие — Возраста́ющие сте́пени пере́менной

Текст для чтения

Одночлены и многочлены – *это целые алгебраические выражения*.

Деление одночлена на одночлен. Рассмотрим пример:

$$\left(6a^5c^3\right):\left(2a^2c\right)=\frac{6a^5c^3}{2a^2c}=\frac{6}{2}\cdot\frac{a^5}{a^2}\cdot\frac{c^3}{c}=3a^{5-2}c^{3-1}=3a^3c^2.$$

Здесь мы использовали свойство 2 степени (прил. 1).

Правило. Чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя и вычесть показатели степеней делителя из показателей степеней одинаковых оснований делимого.

Деление многочлена на одночлен. Разделим многочлен $a + b$ на одночлен c ($c \neq 0$).

Деление многочлена на одночлен c можно заменить умножением на дробь $\frac{1}{c}$ и применить дистрибутивный закон умножения. Получим

$$(a+b):c=(a+b)\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Правило. Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно разделить каждый член многочлена на этот одночлен и сложить частные.

Например,

$$\left(8c^3+6c^2\right):(2c)=\frac{8c^3}{2c}+\frac{6c^2}{2c}=4c^2+3c.$$

Расположенные многочлены. Пусть дан многочлен

$$3x^2 - 2x + 5x^3 - 7.$$

Его члены содержат степени переменной x. Расположим члены многочлена в порядке убывания показателей степеней x. Получим

$$5x^3 + 3x^2 - 2x - 7.$$

Такой многочлен называется *расположенным многочленом.*

Расположим члены многочлена в порядке возрастания показателей степеней x. Получим $-7 - 2x + 3x^2 + 5x^3$.

Если многочлен содержит две или более переменных, то его можно расположить по *убывающим* и *возрастающим* степеням какой-нибудь одной переменной.

Например, дан многочлен $5ab^2 - 4a^3b^4 - 2a^2b + 3$. Расположим его по убывающим степеням переменной a. Получим $-4a^3b^4 - 2a^2b + 5ab^2 + 3$. Расположим его по возрастающим степеням переменной b. Получим $3 - 2a^2b + 5ab^2 - 4a^3b^4$.

Деление многочлена на многочлен. При делении многочленов делимое и делитель располагают по убывающим или возрастающим степеням переменной.

Пример. Разделим многочлен $a^3 - 4a + 4 - a^2$ на многочлен $a + a^2 - 2$. Сначала расположим многочлены по убывающим степеням переменной a, затем выполним деление $(a^3 - a^2 - 4a + 4):(a^2 + a - 2)$.

$$\begin{array}{r|l}
-\;a^3 - a^2 - 4a + 4 & a^2 + a - 2 \\ \cline{2-2}
a^3 + a^2 - 2a\phantom{{}+4} & a - 2 \text{ (частное)} \\ \cline{1-1}
-\;-2a^2 - 2a + 4 & \\
-2a^2 - 2a + 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Первый член делимого a^3 разделим на первый член делителя a^2, в частном получим a; умножим a на делитель $a^2 + a - 2$ и вычтем произведение из делимого. Получим остаток $-2a^2 - 2a + 4$. Разделим первый член первого остатка $-2a^2$ на первый член делителя a^2, получим второй член частного -2; умножим -2 на делитель $a^2 + a - 2$ и вычтем произведение из первого остатка. Остаток равен 0. В этом случае говорят, что первый многочлен *делится нацело* на второй многочлен. Проверим результат – умножим делитель на частное:

$$(a^2 + a - 2)(a - 2) = a^3 + a^2 - 2a - 2a^2 - 2a + 4 = a^3 - a^2 - 4a + 4.$$

Получили делимое. Следовательно, частное верно.

При делении многочлена на многочлен часто получается остаток, который не равен нулю. Например:

$$\begin{array}{r|l}
3a^4 + 7a^3 - 8a^2 + 17a - 11 & a^2 + 3a - 2 \\ \cline{2-2}
3a^4 + 9a^3 - 6a^2 \qquad\qquad\quad & 3a^2 - 2a + 4 \\ \cline{1-1}
-2a^3 - 2a^2 + 17a \qquad & \\
-2a^3 - 6a^2 + 4a \qquad & \\ \cline{1-1}
4a^2 + 13a - 11 & \\
4a^2 + 12a - 8 & \\ \cline{1-1}
a - 3 & \text{(остаток)}
\end{array}$$

Деление закончилось, потому что первый член остатка a не делится на первый член делителя a^2. Получили неполное частное $3a^2 - 2a + 4$ и остаток $a - 3$, который не равен нулю. В этом случае говорят, что первый многочлен *не делится нацело* на второй многочлен.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое целые алгебраические выражения?
2. Как выполняется деление одночлена на одночлен?
3. Как выполняется деление многочлена на одночлен?
4. Что такое расположенный многочлен?
5. Как выполняется деление многочлена на многочлен?
6. Когда говорят, что многочлен делится на многочлен нацело?
7. Когда говорят, что многочлен делится на многочлен с остатком?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Выполните деление многочлена на одночлен:

а) $(4a + 3ac)/a$; б) $(3x^2y - 6xy^2)/(-3xy)$;
в) $(6c^2x^3 - 12c^4x^2)/(-6c^2x^2)$.

2. Разделите многочлен на многочлен:

а) $(a^3 - 3a^2 + 2a - 6)/(a - 3)$; б) $(4x^4 - 5 + 19x^2)/(x^2 + 5)$;

в) $(2c^3 - 2c^2 - 8c + 8)/(c^2 + c - 2)$; г) $(6x^3 - 19x^2 + 12x - 5)/(2x - 5)$.

Тема 2.4. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Слова и словосочетания

Раскла́дывать I, разложи́ть II	Разложи́ть многочле́н на мно́жители
Вспомога́тельный, -ая, -ое, -ые	Вспомога́тельный член
Вводи́ть II, ввести́ I	
Введе́ние (сущ., ср.р.)	Введе́ние вспомога́тельного чле́на

Текст для чтения

Разложить многочлен на множители – значит записать этот многочлен как произведение двух или нескольких многочленов.

Например,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Рассмотрим основные методы разложения многочленов на множители.

Метод вынесения общего множителя за скобки. Разложим на множители многочлен $ac + bc$. Его члены ac и bc имеют общий множитель c. Общий множитель можно вынести за скобки, а в скобках записать результат деления многочлена $ac + bc$ на общий множитель c. Получим: $ac + bc = c(a + b)$. Это равенство верно, так как оно выражает дистрибутивный закон умножения.

Если все члены многочлена имеют общий множитель, то его можно вынести за скобки, а в скобках написать результат деления многочлена на этот общий множитель.

Примеры.

$$2a + 2x = 2(a + x);\ 6a^2 - 4a = 2a(3a - 2);$$
$$10x^2y^3 - 15x^3y^2 + 20xy^4 = 5xy^2(2xy - 3x^2 + 4y^2);$$
$$(a + b)x - (a + b)y = (a + b)(x - y).$$

Метод группировки. Разложим на множители многочлен $ax + bx + ay + by$. Все члены этого многочлена не имеют общего множителя, но первые два члена имеют общий множитель x, а вторые два члена имеют общий множитель y. Соединим первый и второй члены в одну группу, а третий и четвертый в другую группу, получим: $(ax + bx) + (ay + by)$.

В первой группе – общий множитель x, во второй группе – общий множитель y; вынесем их за скобки: $x(a + b) + y(a + b)$.

Получился общий двучленный множитель $(a + b)$. Вынесем его за скобки, получим: $(a + b)(x + y)$.

Следовательно,

$$ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) =$$
$$= x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Примеры.

$$2a - 2b + ax - bx = (2a - 2b) + (ax - bx) =$$
$$= 2(a - b) + x(a - b) = (a - b)(2 + x);$$

$$5 + a^2 - 5a - a^3 = (5 + a^2) - (5a + a^3) =$$
$$= (5 + a^2) - a(5 + a^2) = (5 + a^2)(1 - a).$$

Метод разложения на множители по формуле сокращённого умножения. При разложении на множители можно применять формулы сокращённого умножения (прил. 2).

Примеры.

1. Чтобы разложить на множители многочлен $9a^4 - 25b^2$, применим формулу $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (разность квадратов) и получим

$$9a^4 - 25b^2 = (3a^2)^2 - (5b)^2 = (3a^2 + 5b)(3a^2 - 5b).$$

2. Чтобы разложить на множители многочлен $1 + 2a + a^2$, применим формулу $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (квадрат суммы) и получим

$$1 + 2a + a^2 = 1^2 + 2\cdot 1\cdot a + a^2 = (1 + a)(1 + a).$$

3. Для многочлена $x^3 + 27$ по формуле $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (сумма кубов) получим

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9).$$

Метод введения вспомогательных членов. Разложим на множители многочлен $x^2 + 2x - 3$. Рассмотрим два способа.

1 способ. Введём вспомогательные члены 1 и –1. Затем применим метод группировки и формулу разность квадратов, получим

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 =$$
$$= (x + 1)^2 - 2^2 = (x + 1 - 2)(x + 1 + 2) = (x - 1)(x + 3).$$

2 способ. Член $2x$ запишем как сумму $-x + 3x$ и, применив метод группировки, получим

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 - x + 3x - 3 = (x^2 - x) + (3x - 3) =$$
$$= x(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x + 3).$$

Разложим на множители двучлен $a^4 + 4$. Его можно рассматривать как сумму квадратов двух чисел: $a^4 + 4 = (a^2)^2 + 2^2$.

Введём вспомогательные члены $+4a^2$ и $-4a^2$. Затем применим метод группировки и формулу разность квадратов, получим

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 - 4a^2 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a).$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что значит разложить многочлен на множители?
2. Назовите методы разложения многочленов на множители.
3. Назовите формулы сокращённого умножения.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Разложите многочлены на множители:

а) $3a + 3b$; б) $ax - bx$;
в) $2a^2b^3 - 3a^3b^2$; г) $3x^3 - 6x^2 + x$;
д) $a^{n+1} + a^n$; е) $a^{2n} + a^{n+2}$;
ж) $5a^2 - 5ax - 7a + 7x$; з) $a^3 + a^2b - a^2c - abc$;
и) $3y - x^2 - 3x + xy$.

2. Разложите многочлены на множители. Примените формулы сокращённого умножения:

а) $a^2 - 4$; б) $1 - x^2$;
в) $a^2 - 0{,}01x^2$; г) $a^4 - b^4$;
д) $(a + b)^2 - c^2$; е) $x^2 - (a - b)^2$;
ж) $(a + b)^2 - (a - b)^2$; з) $(x - y)^2 - (x + y)^2$;
и) $1 + 2x + x^2$; к) $8 + 12a + 6a^2 + a^3$;
л) $64 - 96x + 48x^2 - 8x^3$; м) $1 + a^3$;
н) $x^3 - 8y^3$; о) $c^6 - 1$;
п) $0{,}001a^6 + 64b^3$; р) $x^6 - y^6$.

3. Выполните действия, примените формулы сокращённого умножения:

а) $(2 - c)(2 + c)$; б) $(x + y)^2$;
в) $(2a + 3b)(3b - 2a)$; г) $(c - d)^2$;
д) $(a^2 - 1)^2$; е) $(x - 2)^3$;
ж) $(a + 4)^3$; з) $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b\right)^3$;
и) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$; к) $(1 - a^2)(1 + a^2 + a^4)$;

л) $(2a + 3)(4a^2 - 6a + 9)$; м) $(x + y + z)^2$;
н) $(a^2 - a + 1)^2$; о) $(c^3 + c - 2)^2$.

4. Разделите многочлен на многочлен с помощью формул сокращённого умножения:

а) $(x^2 - a^2)/(x - a)$; б) $(a^2 - 9)/(a + 3)$;
в) $(a^2 - 4)/(2 - a)$; г) $(x^2 - 2xy + y^2)/(x - y)$;
д) $(x^3 + y^3)/(x + y)$; е) $(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)/(a^2 - 2a + 1)$;
ж) $(1 - a^3)/(1 - a)$; з) $(8 - x^3)/(4 + 2x + x^2)$;
и) $(a^3 + 27)/(a^2 - 3a + 9)$; к) $(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)/(x + y)$.

5. Разложите многочлены на множители:

а) $2a - 2a^3$; б) $5x^3 - 5x$;
в) $a^2 + 2a + 1 - c^2$; г) $4ax + 9 - x^2 - 4a^2$;
д) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$; е) $x^3 - x^2 - x^6 + x^5$;
ж) $(x + c)^3 - x^2(x + c)$; з) $(a + b)^4 - (a - b)^4$;
и) $a^2 + 4a + 3$; к) $x^2 - 2x - 8$.

Тема 2.5. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ДРОБЬ. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ДРОБИ

Слова и словосочетания

Дробь (сущ., ж.р.)	Алгебраи́ческая дробь
	О́бласть допусти́мых значе́ний алгебраи́ческой дро́би

Текст для чтения

Алгебраическая дробь – это выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B – одночлены или многочлены ($B \neq 0$); A – числитель дроби; B – знаменатель дроби.

Так, выражения $\frac{3}{x}, \frac{2a^3b}{5c}, \frac{4}{x-y}, \frac{a-c}{a+c}$ – это алгебраические дроби.

Алгебраическую дробь, например $\frac{a-c}{a+c}$, читают так: «дробь, в числителе $a - c$, в знаменателе $a + c$».

Область допустимых значений (ОДЗ) *алгебраической дроби* – это множество всех значений переменных, при которых знаменатель дроби не равен нулю.

Например, ОДЗ дроби $\dfrac{2a^2x}{5c}$ – множество всех действительных значений a, x, c, но $c \neq 0$.

Пример. Найдём ОДЗ алгебраической дроби $\dfrac{a-c}{a+c}$. Знаменатель дроби $a + c$ равен нулю, если $a = -c$. Поэтому ОДЗ – это множество пар чисел $(a; c)$ таких, что $a \in R$, $c \in R$ и $a \neq -c$.

Рассмотрим условие равенства дроби нулю. Дробь равна нулю, если её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю, т.е.

$$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ и } B \neq 0.$$

Например, дробь $\dfrac{x+3}{x-2}$ равна 0, если $x + 3 = 0$ и $x - 2 \neq 0$, или если $x = -3$ и $x \neq 2$. Следовательно, $\dfrac{x+3}{x-2} = 0$, если $x = -3$.

Рассмотрим *основное свойство алгебраической дроби*. Если A, B и C – многочлены такие, что $B \neq 0$ и $C \neq 0$, то $\dfrac{A}{B} = \dfrac{AC}{BC}$.

С помощью основного свойства дроби можно сокращать дроби и приводить дроби к общему знаменателю.

Сокращение дробей. Чтобы сократить дробь, нужно сначала разложить числитель и знаменатель на множители, а затем разделить числитель и знаменатель дроби на их общий множитель (при условии, что общий множитель не равен нулю).

Примеры.

1. Пусть дана дробь $\dfrac{5ab}{10a^3}$. Числитель и знаменатель дроби имеют общий множитель $5a$. Поэтому данную дробь можно сократить на $5a$ $(a \neq 0)$: $\dfrac{5ab}{10a^3} = \dfrac{5a \cdot b}{5a \cdot 2a^2} = \dfrac{b}{2a^2}$.

2. Сократим алгебраическую дробь $\dfrac{7x^2 - 7y^2}{2x + 2y}$. Разложим числитель и знаменатель дроби на множители и сократим дробь, получим

$$\frac{7x^2 - 7y^2}{2x + 2y} = \frac{7(x-y)(x+y)}{2(x+y)} = \frac{7(x-y)}{2}.$$

Приведение дробей к общему знаменателю. Чтобы привести дроби к общему знаменателю, нужно сначала разложить знаменатели дробей на множители, найти наименьший общий знаменатель (НОЗ) и дополнительные множители для всех дробей, а затем умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель.

Пример. Привести дроби $\frac{1}{3c}$ и $\frac{1}{2c^2}$ к общему знаменателю.

Наименьший общий знаменатель (НОЗ) – это простейший общий знаменатель, который делится на знаменатель каждой дроби. НОЗ = $6c^2$.

Найдём дополнительные множители дробей. Для этого разделим НОЗ на каждый знаменатель, получим: $\frac{6c^2}{3c} = 2c$, $\frac{6c^2}{2c^2} = 3$.

Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель, получим дроби, у которых знаменатели равны:

$$\frac{1}{3c} = \frac{1 \cdot 2c}{3c \cdot 2c} = \frac{2c}{6c^2}, \ \frac{1}{2c^2} = \frac{1 \cdot 3}{2c^2 \cdot 3} = \frac{3}{6c^2}.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое алгебраическая дробь?
2. Что такое область допустимых значений алгебраической дроби?
3. В чём заключается основное свойство алгебраической дроби?
4. Какие действия с дробями можно выполнить с помощью основного свойства?
5. Как сократить алгебраическую дробь?
6. Как привести дроби к общему знаменателю?
7. Что такое наименьший общий знаменатель?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. При каких значениях x следующие дроби равны нулю?

а) $\frac{x}{5}$; б) $\frac{x-3}{3}$; в) $\frac{x+5}{x+1}$; г) $\frac{2x-6}{x+1}$; д) $\frac{x(x-2)}{x-3}$.

2. Сократите дроби:

а) $\frac{12}{18}$; б) $\frac{10a}{15x}$; в) $\frac{ac}{ax}$; г) $\frac{4ab^2}{8ab}$;

д) $\frac{4a^3x^2y^5}{2a^5x^4y^4}$; е) $\frac{3(a+b)^2}{9a(a+b)}$; ж) $\frac{8x(2-x)}{2x^2(2-x)}$; з) $\frac{a-2}{2-a}$;

и) $\dfrac{4(5-a)}{6(a-5)}$; к) $\dfrac{ax+bx}{ax-bx}$; л) $\dfrac{ac}{ac-c}$; м) $\dfrac{x^2}{x^2+ax}$;

н) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; о) $\dfrac{a^3-x^3}{2a-2x}$; п) $\dfrac{x^2-ax+a^2}{x^3+a^3}$; р) $\dfrac{1+x+x^2}{4-4x^3}$.

3. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\dfrac{a}{3x}, \dfrac{x}{4a^2}, \dfrac{5a}{6x^2}$; б) $\dfrac{3}{a+2}, \dfrac{3c}{a^2-4}, \dfrac{4}{a-2}$;

в) $\dfrac{a}{2x+2c}, \dfrac{3}{x^2+2cx+c^2}$; г) $\dfrac{3}{9-a^2}, \dfrac{5}{6+2a}, \dfrac{a}{a-3}$.

Тема 2.6. ДЕЙСТВИЯ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ДРОБЯМИ

Слова и словосочетания

Измене́ние (сущ., ср.р.)	Измене́ние зна́ков
Выделе́ние (сущ., ср.р.)	Выделе́ние це́лой ча́сти
Почле́нно	Деле́ние почле́нно
	Раздели́ть почле́нно

Текст для чтения

Изменение знаков у членов дроби. Если дана дробь $\dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$, то $\dfrac{A}{B} = \dfrac{-A}{-B} = -\dfrac{-A}{B} = -\dfrac{A}{-B}$.

Это значит, что можно изменить знаки на противоположные: 1) в числителе и в знаменателе; 2) перед дробью и в числителе; 3) перед дробью и в знаменателе.

Пример. Упростим дробь: $\dfrac{b-a}{a-b} = -\dfrac{-(b-a)}{a-b} = -\dfrac{a-b}{a-b} = -1$ $(a \neq b)$.

Выделение целой части из алгебраической дроби. Будем рассматривать дроби, числители и знаменатели которых являются многочленами относительно одних и тех же переменных.

Определение. Алгебраическая дробь $\dfrac{P}{Q}$ называется *правильной*, если степень многочлена P меньше степени многочлена Q.

Дробь $\dfrac{P}{Q}$ называется *неправильной*, если степень многочлена P больше или равна степени многочлена Q.

Из неправильной дроби $\frac{P}{Q}$ можно выделить целую часть, т.е. записать дробь в виде $\frac{P}{Q}=T+\frac{R}{Q}$. Здесь T – *целая часть* (целое алгебраическое выражение); $\frac{R}{Q}$ – *дробная часть* (правильная дробь). Чтобы выделить целую часть из алгебраической дроби, нужно разделить числитель на знаменатель. Частное (полное или неполное) – это целая часть, а остаток – это числитель дробной части.

Примеры.

1. Выделим целую часть из дроби $\frac{a-2}{a}$. Разделим числитель на знаменатель почленно, получим: $\frac{a-2}{a}=\frac{a}{a}-\frac{2}{a}=1-\frac{2}{a}$.

2. Чтобы выделить целую часть из дроби $\frac{x^2-3}{x+2}$, можно разделить числитель на знаменатель или преобразовать числитель дроби, а затем почленно разделить числитель на знаменатель.

$$\frac{x^2-3}{x+2}=\frac{x^2-4+1}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)+1}{x+2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}+\frac{1}{x+2}=(x-2)+\frac{1}{x+2}.$$

Все правила выполнения арифметических действий с обыкновенными дробями и рациональными числами справедливы и для алгебраических дробей. А для возведения дроби в степень справедливы свойства степени с целым показателем при $A \neq 0$, $B \neq 0$ (прил. 1):

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},\ \left(\frac{A}{B}\right)^{-n}=\frac{1}{(A/B)^n}=\left(\frac{B}{A}\right)^n=\frac{B^n}{A^n},\ \left(\frac{A}{B}\right)^0=1.$$

Примеры. Выполним действия с дробями:

1. $\frac{a}{x+y}+\frac{b}{x+y}-\frac{c}{x+y}=\frac{a+b-c}{x+y}$.

2. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{2a}{c}=\frac{bc}{abc}-\frac{ac}{abc}+\frac{2a^2b}{abc}=\frac{bc-ac+2a^2b}{abc}$ (НОЗ = abc).

3. $\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{a^2+ab}$. Разложим знаменатели дробей на множители, найдём НОЗ, а затем выполним все действия.

$$\frac{2b}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{a}{a^2+ab}=\frac{2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a+b}{a(a-b)}+\frac{a}{a(a+b)}=$$

$$=\frac{2b\cdot a}{a(a-b)(a+b)}-\frac{(a+b)(a+b)}{a(a-b)(a+b)}+\frac{a(a-b)}{a(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{2ab-\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(a^2-ab\right)}{a(a-b)(a+b)}=\frac{2ab-a^2-2ab-b^2+a^2-ab}{a(a-b)(a+b)}=$$

$$=\frac{-b^2-ab}{a(a-b)(a+b)}=\frac{-b(b+a)}{a(a-b)(a+b)}=\frac{-b}{a(a-b)}=\frac{b}{a(b-a)}.$$

4. $\frac{2x}{3a}\cdot\frac{a^2}{5x}=\frac{2x\cdot a^2}{3a\cdot 5x}=\frac{2a}{15}$.

5. $\frac{3a^2}{4a^2-b^2}\cdot\frac{2a+b}{5a}=\frac{3a^2(2a+b)}{(2a-b)(2a+b)\cdot 5a}=\frac{3a}{5(2a-b)}$.

6. $\frac{15a}{2c}:\frac{10a}{3c}=\frac{15a}{2c}\cdot\frac{3c}{10a}=\frac{9}{4},\quad a\neq 0, c\neq 0$.

7. $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}:(x+y)=\frac{(x-y)(x+y)}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x+y}=\frac{x-y}{x^2+y^2}$.

8. $\left(\frac{5x^2y}{x+y}\right)^2=\frac{25x^4y^2}{(x+y)^2}$;

9. $\left(\frac{ab}{a-b}\right)^{-3}=\left(\frac{a-b}{ab}\right)^3=\frac{(a-b)^3}{a^3b^3}$.

Задача. Упростить выражение:

$$\left(\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x}{(x-y)^2}\right)\cdot\frac{y^2-2xy+x^2}{2x}+\frac{y}{x+y}.$$

Решение. Найдём ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq y$, $x\neq -y$.

Сначала выполним вычитание в круглых скобках, затем выполним умножение и сложение за скобками.

1) $\frac{x}{x^2-y^2}-\frac{x}{(x-y)^2}=\frac{x}{(x-y)(x+y)}-\frac{x}{(x-y)^2}=$

$$=\frac{x(x-y)-x(x+y)}{(x-y)^2(x+y)}=\frac{x^2-xy-x^2-xy}{(x-y)^2(x+y)}=\frac{-2xy}{(x-y)^2(x+y)}.$$

2) $\dfrac{-2xy}{(x-y)^2(x+y)}\cdot\dfrac{y^2-2xy+x^2}{2x}=\dfrac{-2xy}{(x-y)^2(x+y)}\cdot\dfrac{(x-y)^2}{2x}=\dfrac{-y}{x+y}$.

3) $\dfrac{-y}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{-y+y}{x+y}=0$.

Ответ: 0.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Как можно изменить знаки у членов дроби на противоположные, чтобы величина дроби не изменилась?
2. Какая алгебраическая дробь называется правильной?
3. Какая алгебраическая дробь называется неправильной?
4. Как из неправильной алгебраической дроби выделить целую часть?
5. Как выполняются арифметические действия с алгебраическими дробями?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Измените знак перед дробью на противоположный так, чтобы величина дроби не изменилась:

а) $-\dfrac{-3a}{5}$; б) $-\dfrac{x}{2}$; в) $-\dfrac{-3x}{-4}$; г) $-\dfrac{-2ax}{5-c}$; д) $\dfrac{2-x}{5+x}$.

2. Выделите целую часть из алгебраической дроби:

а) $\dfrac{x+1}{x}$; б) $\dfrac{x^2}{x+1}$; в) $\dfrac{a^2-1}{a^2+1}$; г) $\dfrac{x^3}{x+3}$; д) $\dfrac{x^2+x+3}{x^2+3}$.

3. Выполните действия:

а) $\dfrac{5x}{6a}-\dfrac{x}{6b}$; б) $\dfrac{3}{a^4x^3}+\dfrac{2}{a^3x^4}$; в) $\dfrac{x+4}{a-2}-\dfrac{x-4}{a-2}$;

г) $\dfrac{x}{1-a}+\dfrac{y}{a-1}$; д) $\dfrac{2x}{a-b}-\dfrac{x}{b-a}$; е) $\dfrac{a+1}{a^2-b^2}-\dfrac{a-1}{b-a}$;

ж) $\dfrac{5}{2a-3}+\dfrac{2}{2a+3}-\dfrac{a-1}{9-4a^2}$; з) $a-\dfrac{a-2}{x^2-4}+\dfrac{a-3}{x+2}$.

4. Выполните действия:

а) $\dfrac{7a}{8b}\cdot\dfrac{2a}{7b}$; б) $\dfrac{8a^2}{5x}:\dfrac{4a}{5x^2}$; в) $\dfrac{3a^2b^2}{4xy}\cdot\dfrac{10x^2y}{21a^4b}$;

г) $5a:\dfrac{15a}{b}$; д) $\dfrac{12ax}{7y}:8x^2$; е) $\dfrac{9cx}{2a}\cdot\dfrac{3a}{4c}\cdot\dfrac{4}{3ax^2}$;

ж) $\dfrac{8b^2cx}{9a^5}:\dfrac{7cx}{12a^3}\cdot\dfrac{28a^4}{3b^2}$; з) $\dfrac{a^2b-4b^3}{3ab^2}\cdot\dfrac{a^2b}{a^2-2ab}$.

5. Упростите выражения:

а) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}}$; б) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}$; в) $\dfrac{\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}}$.

6. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{x}{x+1}+1\right)\cdot\dfrac{1-x^2}{4x^2-1}$; б) $\dfrac{x-y}{4y}\cdot\dfrac{8y^2}{x^2-xy}-\dfrac{3}{x^2}$;

в) $1+\dfrac{24}{(x-2)^2}\cdot\dfrac{4x-x^2-4}{3(x+6)}$; г) $\left(x-\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x-y}\right)$;

д) $\left(\dfrac{3a}{1-3a}+\dfrac{2a}{3a+1}\right):\dfrac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$;

е) $\left(\dfrac{5x+y}{x^2-5xy}+\dfrac{5x-y}{x^2+5xy}\right)\cdot\dfrac{x^2-25y^2}{x^2+y^2}$; ж) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$;

з) $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2$; и) $\left(\dfrac{c+1}{c}-\dfrac{1}{c-c^2}\right)\left(c-\dfrac{c^2}{c-1}\right)^{-1}$;

к) $\left(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{2ab}{b^2-a^2}\right)\cdot\dfrac{a}{a-b}+\left(\dfrac{b}{b-a}+\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$.

Тема 2.7. ВЫРАЖЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ МОДУЛЬ

Слова и словосочетания

Содержа́ть I	Содержа́ть мо́дуль
Содержа́щий, -ая, -ее, -ие	Выраже́ние, содержа́щее мо́дуль
Раскрыва́ть I, раскры́ть I	Раскры́ть мо́дуль

Текст для чтения

Модуль (*абсолютная величина*) *числа a* – это само число a, если $a \ge 0$, и противоположное число ($-a$), если $a < 0$:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Под знаком модуля может стоять не только число, но и выражение. Преобразовать выражение, содержащее знак модуля, – значит *раскрыть модуль*.

Если надо раскрыть модуль, то, согласно его свойствам (прил. 5), результат этой операции всегда должен быть неотрицательным.

Если под знаком модуля находится число, значение которого известно, то раскрыть его очень просто. Модуль числа a (или $|a|$) будет равен самому этому числу, если $a \geq 0$. Если $a < 0$, т.е. является отрицательным, то его модуль будет равен противоположному ему числу, т.е. $|-a| = a$.

В том случае, если выражение, стоящее под знаком модуля, возведено в квадрат или в другую чётную степень, то можно просто опустить знак модуля, так как любое число (выражение), возведённое в чётную степень, является неотрицательным.

Если в выражении, которое стоит под знаком модуля, есть неотрицательные числа, то их можно вынести за знак модуля: $|c \cdot x|=c \cdot |x|$, где c – неотрицательное число.

Пример. Упростить выражение $M = \dfrac{|a-1|+|a|+a}{3a^2-4a+1}$.

Решение. Чтобы упростить данное выражение, надо раскрыть в нём все знаки модуля. Для этого надо выполнить следующие действия:

1) определить промежутки знакопостоянства всех выражений, стоящих под знаком модуля;

2) выделить промежутки, на которых все выражения, стоящие под знаком модуля, имеют строго определённый знак;

3) упростить данное выражение на каждом из указанных промежутков, раскрыв все знаки модуля.

Найдём ОДЗ исходного выражения $a \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ и выполним описанные действия.

1. Определим знаки выражений $(a - 1)$ и a, которые стоят под знаком модуля, используя числовую прямую (рис. 2.1).

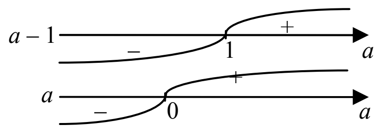


Рис. 2.1

2. Выделим промежутки, на которых выражения $(a - 1)$ и a имеют строго определённый знак. Используем числовую прямую (рис. 2.2). Точку $a = 0$ включим в промежуток II: $0 \leq a < 1$. Точка

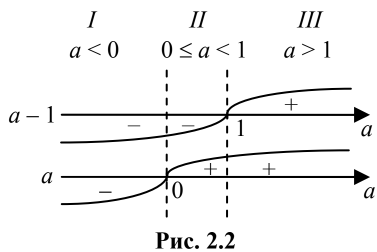


Рис. 2.2

$a = 1$ не рассматривается, так как она не входит в ОДЗ исходного выражения.

3. Упростим исходное выражение, рассматривая его на каждом из полученных промежутков (*I*, *II*, *III*).

I. Пусть $a < 0$. Тогда $a - 1 < 0 \Rightarrow |a - 1| = -(a - 1)$, $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$.

$$M = \frac{|a-1|+|a|+a}{3a^2-4a+1} = \frac{-(a-1)-a+a}{3(a-1)\left(a-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-(a-1)}{(a-1)(3a-1)} = \frac{-1}{3a-1} = \frac{1}{1-3a}.$$

II. Пусть $0 \le a < 1$. Тогда $a - 1 < 0 \Rightarrow |a - 1| = -(a - 1)$, $a \ge 0 \Rightarrow |a| = a$.

$$M = \frac{|a-1|+|a|+a}{3a^2-4a+1} = \frac{-(a-1)+a+a}{3a^2-4a+1} = \frac{-a+1+2a}{3a^2-4a+1} = \frac{a+1}{3a^2-4a+1}.$$

III. Пусть $a > 1$. Тогда $a - 1 > 0 \Rightarrow |a - 1| = a - 1$, $a \ge 0 \Rightarrow |a| = a$.

$$M = \frac{|a-1|+|a|+a}{3a^2-4a+1} = \frac{(a-1)+a+a}{3(a-1)\left(a-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3a-1}{(a-1)(3a-1)} = \frac{1}{a-1}.$$

Ответ: $M = \begin{cases} \dfrac{1}{1-3a}, & \text{если } a < 0; \\ \dfrac{a+1}{3a^2-4a+1}, & \text{если } 0 \le a < 1; \\ \dfrac{1}{a-1}, & \text{если } a > 1. \end{cases}$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое абсолютная величина числа?
2. Что значит раскрыть модуль?
3. Как раскрыть модуль, если под знаком модуля стоит неотрицательное выражение?
4. Как раскрыть модуль, если под знаком модуля стоит отрицательное выражение?
5. Как раскрыть модуль, если выражение под знаком модуля возведено в чётную степень?
6. Какой множитель можно вынести за знак модуля?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Раскройте модуль:

а) $|x - 2|$; б) $|x + 2|$; в) $|x^2 - x|$;

г) $|x + 2| - x$; д) $|2 - x|$; е) $|x + 2| + 2$;
ж) $-3|x - 4| - x$; з) $|6 - x|$; и) $|6 - 2x|$;
к) $|3x - 2| + x + 2$; л) $-2|4 - x| + 4 - x$; м) $|x - |x||$;
н) $|x + 2|x|| + 2x$.

Тема 2.8. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Слова и словосочетания

Иррациона́льный, -ая, -ое, -ые	Иррациона́льное выраже́ние
Ко́рень (сущ., м.р.)	Переме́нная под зна́ком ко́рня
	Алгебраи́ческий ко́рень
	Извле́чь ко́рень
	Преобразова́ние корне́й
Сопряжённый, -ая, -ое, -ые	Сопряжённые выраже́ния

Текст для чтения

***Определение* 1.** *Арифметическим корнем n-й* степени ($n \in N$, $n \neq 1$) из неотрицательного числа a ($a \geq 0$) называется неотрицательное число b ($b \geq 0$), n-ая степень которого равна a, т.е. $b^n = a$.

***Определение* 2.** *Алгебраическим корнем n-й* степени из действительного числа a ($a \in R$) называется число b ($b \in R$) такое, что $b^n = a$.

***Определение* 3.** Алгебраическое выражение называется *иррациональным*, если оно содержит переменную под знаком корня (т.е. производится операция возведения в нецелую рациональную степень).

Примеры.

1. Алгебраическое выражение $x^2 + 4\sqrt{x} - 4$ – это иррациональное алгебраическое выражение, так как переменная x находится под знаком квадратного корня.

2. Алгебраическое выражение $x^2 + \sqrt{4}x + 5$ – это не иррациональное алгебраическое выражение. Почему?

Не из каждого числа или выражения можно извлечь корень.

2.1. Число алгебраических корней степени *n* из числа $a \in R$

Подкоренное выражение	Показатель степени корня	
	$n = 2k$	$n = 2k + 1$
$a > 0$	Два корня: $\pm\sqrt[n]{a}$	Один корень: $\sqrt[n]{a}$
$a = 0$	Один корень: 0	Один корень: 0
$a < 0$	Корней нет	Один корень: $-\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$

Выражение $\sqrt[2k]{a}$ $(k \in N)$ имеет смысл только при $a \geq 0$. Выражение $\sqrt[2k+1]{a}$ $(k \in N)$ имеет смысл для любого $a \in R$. Если $a \geq 0$, то верно равенство $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

Примеры.

1. Найдём ОДЗ выражения $\sqrt[4]{a-1}$.

Решение. Данное выражение имеет смысл, если $a - 1 \geq 0$, т.е. $a \geq 1$. Следовательно, ОДЗ: $a \geq 1$.

2. Упростим выражение $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, используя формулу сокращённого умножения (прил. 1):

$$7-4\sqrt{3} = 4-4\sqrt{3}+3 = 2^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)^2.$$

Так как $2-\sqrt{3} > 0$, то получим

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}.$$

Рассмотрим преобразования иррациональных выражений.

1. Вынесение множителя из-под знака корня:

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b} \quad \left(a \geq 0; b \geq 0; n \in N, n \neq 1\right).$$

2. Внесение множителя под знак корня:

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \quad \left(a \geq 0; b \geq 0; n \in N, n \neq 1\right).$$

Здесь используются свойства 1 и 2 арифметических корней (прил. 3).

Примеры.

1. Вынесем множитель из-под знака корня: $\sqrt[3]{8a^2b^4}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Решение. $\sqrt[3]{8a^2b^4} = \sqrt[3]{2^3 a^2 b^3 b} = 2b\sqrt[3]{a^2 b}$.

2. Упростим выражение $\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + \sqrt{200}$. Для этого вынесем множители из-под знаков корней и найдём алгебраическую сумму:

$$\sqrt{8} - 2\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{2\cdot 2^2} - 2\sqrt{2\cdot 4^2} + \sqrt{2\cdot 10^2} =$$
$$= 2\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

3. Внесём множитель под знак корня:

$$2x^2\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{\left(2x^2\right)^3}\cdot\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{8x^6x}=\sqrt[3]{8x^7}.$$

4. Внесём множитель под знак корня и упростим выражение:

$$ab^2\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}=\sqrt[8]{\frac{a^8b^{16}\cdot 5b^3}{a^7}}=\sqrt[8]{5ab^{19}}.$$

3. Освобождение от иррациональности знаменателя дроби. Освободить от иррациональности знаменатель дробного иррационального выражения – это значит преобразовать дробь так, чтобы знаменатель дроби не содержал радикалов. Для этого следует использовать основное свойство дроби.

Примеры.

1. Освободим дробное иррациональное выражение $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ от иррациональности в знаменателе.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{5}$, получим

$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Мы освободили от иррациональности знаменатель дроби $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

2. Освободим от иррациональности знаменатель дроби $\dfrac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt[5]{3^3}$, получим

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2\cdot 3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}.$$

3. Освободим знаменатель дроби $\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}$ от иррациональности.

Решение. Знаменатель дроби $3+\sqrt{5}$ – это сумма. Поэтому умножим числитель и знаменатель дроби на разность $3-\sqrt{5}$ и, воспользуясь формулой разность квадратов (прил. 2), получим

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5}=\frac{2\left(3-\sqrt{5}\right)}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Замечание. Выражения вида $a + b$ и $a – b$ называются *сопряжёнными выражениями*.

4. Освободим от иррациональности знаменатель дроби $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$, где $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \neq y$.

Решение. Знаменатель дроби $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ – это разность. Поэтому умножив числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, т.е. на сопряжённое выражение, получим

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}.$$

Выполним преобразование выражения, которое содержит радикалы.

Задача. Упростить выражение

$$A=\left(\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}\right),$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$.

Решение.

1) $\frac{\sqrt{a}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}-1}{2\sqrt{a}}=\frac{a-1}{2\sqrt{a}}$;

2) $\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}-\frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}=\frac{\left(a-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}-1\right)-\left(a+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=$

$$=\frac{a\sqrt{a}-a-a+\sqrt{a}-\left(a\sqrt{a}+a+a+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)}=\frac{-4a}{a-1};$$

3) $\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\cdot\frac{-4a}{a-1}=-\frac{2a}{\sqrt{a}}=-\frac{2\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=-2\sqrt{a}$.

Ответ: $A=-2\sqrt{a}$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое арифметический корень n-й степени?
2. Что такое алгебраический корень n-й степени?
3. Какое выражение называется иррациональным?
4. Когда иррациональное выражение имеет смысл?
5. Какие существуют преобразования иррациональных выражений?
6. Какие выражения называются сопряжёнными?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Приведите корни к одинаковым показателям:

а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[6]{5}$; в) $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{15}$ и $\sqrt[8]{7}$.

2. Вынесите множитель за знак корня:

$\sqrt{120}$; $\sqrt{245}$; $\sqrt[3]{32}$; $\sqrt[4]{80}$; $\sqrt[5]{800}$; $\sqrt[3]{1080}$.

3. Внесите множитель под знак корня и упростите выражение:

$4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}\sqrt{15}$; $2\sqrt[3]{5}$; $3\sqrt[3]{4}$; $6\sqrt[3]{1\frac{4}{27}}$; $5\sqrt[4]{\frac{1}{15}}$.

4. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{176}-2\sqrt{275}+\sqrt{1584}-\sqrt{891}$;

б) $2\left(\sqrt{252}-\sqrt{175}\right)-\left(\sqrt{112}-\sqrt{63}-\sqrt{28}\right)$;

в) $\sqrt[4]{0{,}0003}-\sqrt[4]{0{,}0048}+\sqrt[4]{0{,}0243}$.

5. Освободите от иррациональности знаменатель дроби:

а) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$; в) $\frac{2}{\sqrt[5]{8}}$;

г) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$; д) $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; е) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$;

ж) $\frac{a}{\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$; з) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{7}}$; и) $\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$.

6. Запишите корни как степени с рациональными показателями:

$\sqrt{3}$; $\sqrt{5^3}$; $\sqrt[5]{16}$; $3\sqrt[4]{2^{-3}}$; $\sqrt{3\sqrt{3}}$; $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a}}$; $\sqrt[3]{c\cdot\sqrt[4]{c^3}}$.

7. Запишите степени как корни:

$7^{\frac{7}{4}}$; $4^{1,5}$; $2^{-0,5}$; $8^{\frac{2}{3}}$; $a^{\frac{3}{8}}$; $b^{-\frac{2}{3}}$; $2a^{\frac{1}{2}}$; $0,5x^{\frac{2}{3}}$.

8. Вычислите:

а) $16^{\frac{3}{4}}$; б) $243^{0,4}$; в) $8^{1\frac{1}{3}}$; г) $81^{0,25}$; д) $1,44^{-\frac{1}{2}}$;

е) $\dfrac{\sqrt[3]{5^3}\sqrt{25^{0,75}}}{5\sqrt[8]{5^5}}$; ж) $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$; з) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$;

и) $\sqrt[4]{\left(5-\sqrt{3}\right)^4}$; к) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{9}} : 243^{\frac{1}{7}} \cdot \left(7\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{3}}$.

9. Упростите выражения:

а) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$; б) $81^{0,75} + \left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\dfrac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x^2-\sqrt{x}\right)^{-1}}{\left(x+\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)^{-1}}$; г) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \dfrac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$;

д) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1$.

Раздел 3
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Тема 3.1. РАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА. ВИДЫ РАВЕНСТВ

Слова и словосочетания

То́ждество	
Уравне́ние	
Неизве́стное (сущ., ср.р.)	Неизве́стное уравне́ния
	Уравне́ние с одни́м неизве́стным
	Значе́ние неизве́стного
Удовлетворя́ть I, удовлетвори́ть II	Значе́ние неизве́стного удовлетворя́ет уравне́нию
Ко́рень (сущ., м.р.)	Ко́рень уравне́ния
Реше́ние	Реше́ние уравне́ния
Реша́ть I, реши́ть II	Реши́ть уравне́ние

Текст для чтения

Два выражения, которые соединены знаком «равно» (=), образуют *равенство*. Равенство бывает верное и неверное.

По виду выражений равенства делят на две группы:

1. *Числовое равенство*. Правая и левая части равенств – числовые выражения. Например, $3 + 2 = 5$.

2. *Равенство с переменными*. Правая и левая части равенств – выражения с переменными. Например, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Свойства числовых равенств.

***Свойство* 1.** Части равенств можно переставить: если $a = b$, то $b = a$.

***Свойство* 2.** Если два числа равны третьему, то они равны между собой: если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$.

***Свойство* 3.** К обеим частям равенства можно прибавить (вычесть) любое действительное число: если $a = b$, то $a \pm c = b \pm c$ ($c \in R$).

***Свойство* 4.** Обе части равенства можно умножить или разделить на одно и то же число, которое не равно нулю: если $a = b$ и $m \neq 0$, то $am = bm$ и $\frac{a}{m} = \frac{b}{m}$.

Следствие. В обеих частях равенства можно изменить знаки на противоположные: если $a = b$, то $-a = -b$.

Тождества и уравнения. Пусть дано равенство $3(a + b) = 3a + 3b$. Выражения $3(a + b)$ и $3a + 3b$ тождественно равны. Поэтому данное равенство верно при любых значениях переменных a и b. Равенство $3(a + b) = 3a + 3b$ – это *тождество*.

Тождеством называется равенство, которое верно при всех допустимых значениях переменных этого равенства.

Верное числовое равенство тоже называется тождеством. Например, $4 + 6 = 10$, или $10 = 10$ – тождество.

Рассмотрим равенства, которые содержат переменные.

1. Равенство $3x + 1 = 2x - 5$ содержит одну переменную x. Оно верно только при $x = -6$. При других значениях x оно неверно.

2. Равенство $xy = 6$ содержит две переменные x и y. Оно верно, например, при $x = 1$ и $y = 6$, и неверно при $x = 2$ и $y = 5$.

Такие равенства называются *уравнениями*.

Уравнением называется равенство, которое содержит одно или несколько неизвестных и верно только при определённых значениях этих неизвестных.

Обычно неизвестные обозначают буквами x, y, z.

Рассмотрим уравнение с одним неизвестным x:

$$2x - 1 = 3x + 6. \tag{3.1}$$

Если $x = -7$, то данное уравнение принимает вид $2 \cdot (-7) - 1 = 3 \cdot (-7) + 6$, или $-15 = -15$. Значение $x = -7$ обращает уравнение в верное числовое равенство. В этом случае говорят, что число -7 – это решение или корень уравнения (3.1).

Решением (*корнем*) уравнения с одним неизвестным называется значение неизвестного, которое обращает уравнение в верное числовое равенство (тождество).

Если значение неизвестного является корнем уравнения, то говорят, что это значение *удовлетворяет уравнению*. Так, значение $x = -7$ удовлетворяет уравнению (3.1).

Если значение неизвестного не обращает уравнение в тождество, то это значение не является корнем уравнения, или *не удовлетворяет* уравнению.

Например, значение $x = 3$ не удовлетворяет уравнению (3.1). Проверим: $2 \cdot 3 - 1 \neq 3 \cdot 3 + 6$ или $5 \neq 15$.

Рассмотрим уравнение с двумя неизвестными x и y:

$$3x - y = 5. \tag{3.2}$$

Пара значений неизвестных $x = 2$, $y = 1$ обращает уравнение (3.2) в верное числовое равенство: $3 \cdot 2 - 1 = 5$, или $5 = 5$. Пара чисел $(2; 1)$ – это решение уравнения (3.2) .

Решением уравнения с двумя неизвестными x и y называется пара чисел $(x_0; y_0)$, которая обращает уравнение в верное числовое равенство.

Числа x_0 и y_0 называются *координатами* пары: x_0 – первая координата (значение x), y_0 – вторая координата (значение y).

Например, пара чисел (0; –5) является решением уравнения (3.2). Её координаты $x = 0$, $y = – 5$ удовлетворяют (проверьте!) уравнению. Пара чисел (2; 3) не является решением уравнения (3.2), потому что её координаты $x = 2$, $y = 3$ не удовлетворяют уравнению: $3 \cdot 2 – 3 \neq 5$ или $3 \neq 5$.

Решить уравнение – это значит найти множество всех его решений или доказать, что решений нет.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое равенство?
2. Какие бывают равенства? Приведите примеры.
3. Перечислите свойства числовых равенств.
4. Какое равенство называется тождеством?
5. Какое равенство называется уравнением?
6. Что называется корнем уравнения с одним неизвестным?
7. Что значит решить уравнение?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Определите, какие равенства являются тождествами, а какие равенства являются уравнениями:

а) $2(a – x) = 2a – 2x$;	б) $a + 2 = 5$;

в) $\dfrac{2x}{3} = 4$;	г) $(x + 3)(x – 3) = x^2 – 9$;

д) $2x + 3 = 15 – x$;	е) $4y – 5y = – y$;

ж) $0x + 0y = 0$;	з) $5x – 2y = 7$.

Тема 3.2. РАВНОСИЛЬНЫЕ (ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ) УРАВНЕНИЯ. СВОЙСТВА РАВНОСИЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Слова и словосочетания

Равноси́льный, -ая, -ое, -ые	Равноси́льные уравне́ния
Равноси́льность (сущ., ж.р.)	Равноси́льность уравне́ний
Эквивале́нтный, -ая, -ое, -ые	Эквивале́нтные уравне́ния
Интерва́л	Бесконе́чный интерва́л
Объедине́ние	Объедине́ние интерва́лов

Текст для чтения

Два уравнения с одинаковыми неизвестными называются *равносильными* (*эквивалентными*), если множества их решений совпадают, т.е. все решения первого уравнения являются решениями второго, и все решения второго уравнения являются решениями первого.

Между равносильными уравнениями пишут знак «$\Leftrightarrow$».

Примеры.

1. Даны уравнения: $x^2 = 1$ и $|x| = 1$.

Уравнение $x^2 = 1$ имеет множество решений $\{-1; 1\}$. Почему?

Уравнение $|x| = 1$ тоже имеет множество решений $\{-1; 1\}$. Почему?

Множества решений данных уравнений совпадают, поэтому они равносильны: $x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1$.

2. Даны уравнения: $4x = 8$ и $x^2 = 4$.

Уравнение $4x = 8$ имеет только один корень $x = 2$, а уравнение $x^2 = 4$ имеет два корня: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Множества решений данных уравнений не совпадают: $\{2\} \neq \{-2; 2\}$. Поэтому эти уравнения не равносильны.

3. Даны уравнения: $x^2 + 4 = -5$ и $3x = 3x + 7$.

Уравнение $x^2 + 4 = -5$ не имеет решений, потому что при любом значении x левая часть уравнения – положительное число, а правая часть – отрицательное число. Уравнение $3x = 3x + 7$ тоже не имеет решения, потому что при любом значении x левая часть уравнения меньше, чем правая, на 7. Данные уравнения имеют одинаковое множество решений – пустое множество. Поэтому они равносильны:

$$x^2 + 4 = -5 \Leftrightarrow 3x = 3x + 7.$$

Свойства равносильности уравнений.

***Свойство* 1.** Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен, который содержит неизвестное, то получится равносильное уравнение.

Рассмотрим уравнение

$$2x + 3 = 11. \quad (3.3)$$

Оно имеет единственный корень $x = 4$. Прибавим число 5 к обеим частям уравнения (3.3), получим уравнение

$$2x + 3 + 5 = 11 + 5 \text{ или } 2x + 8 = 16. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.4) также имеет единственный корень $x = 4$. Множества решений (3.3) и (3.4) совпадают: $\{4\} = \{4\}$. Следовательно, уравнение (3.4) равносильно уравнению (3.3).

Прибавим многочлен $x + 1$ к обеим частям уравнения (3.3), получим новое уравнение:

$$2x + 3 + x + 1 = 11 + x + 1 \text{ или } 3x + 4 = x + 12. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) также имеет единственный корень $x = 4$, следовательно, уравнение (3.5) равносильно уравнению (3.3).

Следствие. Члены уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую с противоположными знаками.

Рассмотрим уравнение

$$x^2 - 5x + 6 = 0. \qquad (3.6)$$

Прибавим $5x$ к обеим частям уравнения (3.6), получим равносильное уравнение:

$$x^2 - 5x + 6 + 5x = 5x \text{ или } x^2 + 6 = 5x. \qquad (3.7)$$

Но уравнение (3.7) можно получить, если в уравнении (3.6) перенести член $-5x$ из левой части со знаком «+».

***Свойство* 2.** Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, которое не равно нулю, то получится равносильное уравнение.

Например, уравнение (3.3) имеет единственный корень $x = 4$. Умножим обе части уравнения (3.3) на 2, получим новое уравнение:

$$(2x + 3) \cdot 2 = 11 \cdot 2 \text{ или } 4x + 6 = 22. \qquad (3.8)$$

Уравнение (3.8) также имеет единственный корень $x = 4$. Проверим

$$4{\cdot}4 + 6 = 22 \text{ или } 22 = 22.$$

Следовательно, уравнение (3.8) равносильно уравнению (3.3).

Рассмотрим уравнение

$$12x - 28 = 20 + 8x. \qquad (3.9)$$

Все члены уравнения (3.9) имеют общий множитель 4. Разделим обе части уравнения на 4, получим уравнение

$$(12x - 28) : 4 = (20 + 8x) : 4 \text{ или } 3x - 7 = 5 + 2x. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) можно получить, если обе части уравнения (3.9) умножить на дробь $\frac{1}{4}$. Следовательно, уравнения (3.9) и (3.10) равносильны.

Свойства уравнений применяют при решении уравнений.

Например, решим уравнение $5x - 2 = 3x + 4$.

Перенесём член -2 в правую часть уравнения со знаком «+», а член $3x$ в левую часть со знаком «–»

$$5x - 3x = 4 + 2.$$

Приведём подобные члены в обеих частях уравнения: $2x = 6$.

Разделим обе части уравнения на 2: $x = 3$.

Решение данного уравнения можно записать так:

$$5x - 2 = 3x + 4 \Leftrightarrow 5x - 3x = 4 + 2 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Рассмотрим уравнение $\frac{1}{x-1} = 2x-3$.

Левая часть уравнения имеет смысл, если $x \in R \setminus \{1\}$. Правая часть уравнения имеет смысл при всех $x \in R$. Следовательно, обе части уравнения имеют смысл, если $x \in R \setminus \{1\}$.

Множество значений неизвестного, при которых обе части уравнения имеют смысл, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) *уравнения*.

Следовательно, ОДЗ уравнения $\frac{1}{x-1} = 2x-3$ – это множество всех действительных чисел R без числа 1, или объединение двух бесконечных интервалов $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ (см. прил. 4).

Примеры.

1. Найдём ОДЗ уравнения $\frac{1}{x+2} = \frac{2}{x-3}$.

Решение. $x + 2 \neq 0$ и $x - 3 \neq 0$, тогда $x \neq -2$ и $x \neq 3$.

Ответ. ОДЗ: $x \in R \setminus \{-2; 3\}$.

2. Найдём ОДЗ уравнения $\frac{3x}{x^2-25} + \frac{12}{1-x} = 8$.

Решение. $x^2 - 25 \neq 0$ и $1 - x \neq 0$, тогда $x \neq -5$, $x \neq 5$, $x \neq 1$.

Ответ. ОДЗ: $x \in R \setminus \{-5; 5; 1\}$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие уравнения называются равносильными?
2. Перечислите свойства равносильных уравнений.
3. Что называется областью допустимых значений уравнения?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Определите, какие уравнения равносильны, а какие уравнения не равносильны:

а) $4x = 0$ и $3x = 0$;

б) $5x + 3 = 6$ и $\frac{5x+3}{3} = 2$;

в) $x - 2 = 5$ и $2x = 14$;

г) $x + 2 = 7$ и $x + 2 = -7$;

д) $x + 1 = 4$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{4}{3}$;

е) $3x - 1 = 2$ и $5x - 7 = 2$.

2. Найдите область допустимых значений уравнений:

а) $2x + 3 = 7x - 5$;

б) $1 - \frac{x+4}{x} = 3x$;

в) $\frac{2}{x+3} = 4x - 5$;

г) $\frac{x}{4} + \frac{3}{x-2} = \frac{4-x}{x+1}$;

д) $\frac{3}{x} - \frac{2x+5}{x-2} = \frac{7}{x+2}$;

е) $8 + \frac{3y}{y-1} = \frac{5}{y^2-1}$.

Тема 3.3. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ И ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Слова и словосочетания

Лине́йный, -ая, -ое, -ые	Лине́йное уравне́ние
Коэффицие́нт	Коэффицие́нт уравне́ния
Член	Свобо́дный член уравне́ния

Текст для чтения

Линейным уравнением с одним неизвестным называется уравнение вида

$$ax + b = 0, \qquad (3.11)$$

где x – неизвестное; a – *коэффициент* при неизвестном; b – *свободный член*; a и b – любые числа.

Например, $x - 5 = 0$ и $2x + 9 = 0$ – это линейные уравнения с одним неизвестным.

Решим уравнение (3.11). Перенесём свободный член из левой части уравнения в правую часть и изменим его знак на противоположный. Получим равносильное уравнение:

$$ax = -b. \qquad (3.12)$$

При решении уравнения (3.12) возможны три случая.

1. Уравнение имеет единственное решение (только один корень). Если $a \neq 0$, то обе части уравнения (3.12) можно разделить на a. Получим $x = -\frac{b}{a}$. Следовательно, множество решений уравнения: $\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2. Уравнение имеет бесконечное множество решений. Если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение (3.12) принимает вид $0x = 0$. При всех значениях $x \in R$ получаем верное равенство $0 = 0$. Следовательно, множество решений уравнения: R.

3. Уравнение не имеет решения. Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение (3.12) принимает вид $0x = -b$. При всех значениях $x \in R$ левая часть уравнения равна нулю, а правая не равна нулю. Следовательно, множество решений уравнения – пустое множество $\varnothing$.

Примеры.

1. Решим уравнение $2x + 3 = -5x + 10$.

Решение. Перенесём неизвестный член $-5x$ в левую часть уравнения со знаком плюс (+), а свободный член 3 в правую часть со знаком минус (–)

$$2x + 5x = 10 - 3.$$

Приведём подобные члены в обеих частях уравнения

$$7x = 7.$$

Разделим обе части уравнения на 7, т.е. на коэффициент при x

$$x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

2. Решим уравнение $x + \frac{2x-7}{2} - \frac{3x+1}{5} = 5 - \frac{x+6}{2}$.

Решение. Найдём наименьший общий знаменатель: НОЗ = 10. Освободимся от дробных членов, т.е. умножим все члены уравнения на 10:

$$10x + 5(2x - 7) - 2(3x + 1) = 50 - 5(x + 6).$$

Раскроем скобки:

$$10x + 10x - 35 - 6x - 2 = 50 - 5x - 30.$$

Перенесём неизвестные члены в левую часть уравнения, а числа – в правую часть:

$$10x + 10x - 6x + 5x = 50 - 30 + 35 + 2.$$

Приведём подобные члены в обеих частях уравнения:

$$19x = 57.$$

Разделим обе части уравнения на коэффициент при x (число 19):

$$x = 3.$$

Ответ: $x = 3$.

Уравнение вида $ax + by = c$, где x и y – неизвестные; a, b, c – коэффициенты (любые данные числа, но a и b вместе не равны нулю), называется *уравнением первой степени* (*линейным уравнением*) *с двумя неизвестными*.

Число a – это коэффициент при x, число b – коэффициент при y, число c – свободный член.

Например, $4x + 2y = 9$; $x - 3y = -5$ – это линейные уравнения с двумя неизвестными.

Решением уравнения $ax + by = c$ называется пара чисел (x_0; y_0), которая обращает уравнение в верное числовое равенство.

Например, дано уравнение $3x + y = 5$. Пара чисел (1; 2) – это решение уравнения, потому что $3 \cdot 1 + 2 = 5$, или $5 = 5$. Пара чисел (0; 5) – это тоже решение уравнения. Но пара чисел (2; 3) не является решением, потому что $3 \cdot 2 + 3 \neq 5$, или $9 \neq 5$. Данное уравнение имеет бесконечное множество решений.

Решим уравнение $3x + y = 5$, т.е. найдём множество всех решений уравнения. Выразим y через x, получим $y = 5 - 3x$. Пусть $x = c \in R$. Тогда $y = 5 - 3c$. Множество всех решений уравнения можно записать так: $\{(c; 5 - 3c) \mid c \in R\}$.

Решим уравнение $ax + by = c$ в общем виде. Выразим y через x: $ax + by = c \Leftrightarrow by = c - ax \Leftrightarrow y = \dfrac{c - ax}{b}$, если $b \neq 0$. Дадим неизвестному x любое значение, например, $x = t \in R$. Найдём соответствующее значение неизвестного y: $y = \dfrac{c - at}{b}$. Запишем множество решений уравнения:

$$\left\{\left(t; \frac{c - at}{b}\right) \middle| \, t \in R\right\}.$$

Пример. Решим уравнение $\dfrac{2x - 3}{2} + 2y = \dfrac{x + 8y}{4}$.

Решение. Упростим уравнение и приведём к виду $ax + by = c$:

$$\frac{2x - 3}{2} + 2y = \frac{x + 8y}{4} \Leftrightarrow 2(2x - 3) + 4 \cdot 2y = x + 8y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x - 6 + 8y = x + 8y \Leftrightarrow 3x + 0y = 6 \Leftrightarrow x + 0y = 2.$$

Получили уравнение, в котором коэффициент при y равен 0. Тогда при любом значении $y \in R$ имеем $x = 2$. Пусть $y = t \in R$. Тогда пары чисел вида (2; t) являются решениями данного уравнения. Например, пары чисел (2; 0), (2; –1), (2; 5) – это решения уравнения. Уравнение имеет бесконечное множество решений.

Ответ: $\{(2; t) \mid t \in R\}$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Каков общий вид линейного уравнения с одним неизвестным?
2. Сколько корней может иметь уравнение $ax + b = 0$?
3. Как решить линейное уравнение с одним неизвестным?

4. Что называется решением уравнения $ax + by = c$?
5. Сколько решений имеет уравнение $ax + by = c$?
6. Как решить линейное уравнение с двумя неизвестными?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите уравнения:

а) $3 - 5(x - 2) = x + 4$; б) $4(x + 2) - 2(3x - 2) = 14 - 5x$;
в) $2(x - 2) = 3(2x + 1)$; г) $(2x - 1)^2 - 4(x + 1)(x - 1) = 3$;
д) $(x - 1)(x + 3) = 0$; е) $(3x + 5)(3x - 5) - (3x - 1)^2 = 10$;
ж) $(x + 1)(x - 1) = x^2$; з) $2(x - 1)^2 - (x + 5)(x - 5) = x^2 - 4$;
и) $(x + 5)^2 - (x - 1)^2 = 48$; к) $\frac{3}{5}x - 1 = x$;
л) $2x - 3 = \frac{4x}{3}$; м) $\frac{5x-6}{2} = \frac{4x-5}{3}$;
н) $\frac{x-2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x+7}{6}$; о) $\frac{x-7}{6} = \frac{x+1}{2} - 3$;
п) $\frac{2(3x-1)}{5} = 4 - \frac{x+2}{2}$; р) $\frac{2x-7}{6} - \frac{3x}{4} = \frac{1-5x}{3} + 1$.

2. Решите задачи:

а) Сумма двух чисел равна 54. Одно число больше другого в 8 раз. Найдите эти числа.

б) Если к неизвестному числу прибавить 30 и результат разделить на 6, то получится 8. Чему равно неизвестное число?

3. Найдите множество решений каждого уравнения:

а) $x + y = 2$; б) $3x - y = 5$; в) $2x - 3y = 1$.

Тема 3.4. СИСТЕМА ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ. РАВНОСИЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

Слова и словосочетания

Систе́ма — Систе́ма уравне́ний
Пересече́ние (сущ., ср.р.) — Пересече́ние мно́жеств реше́ний

Текст для чтения

Два линейных уравнения с двумя неизвестными $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ образуют *систему*, если нужно найти общее решения этих уравнений. Систему записывают так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \tag{3.13}$$

a_1 и b_1 вместе не равны нулю, a_2 и b_2 также вместе не равны нулю.

Решением системы уравнений (3.13) называется *пара чисел* (x_0; y_0), которая удовлетворяет каждому уравнению системы, т.е. обращает уравнения в верные числовые равенства:

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 = c_1 \quad \text{и} \quad a_2 x_0 + b_2 y_0 = c_2.$$

Например, дана система уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 5x - 2y = 4. \end{cases}$

Пара чисел (2; 3) – это решение системы, потому что 2·2 + 3 = 7 и 5·2 – 2·3 = 4 – верные числовые равенства (7 = 7 и 4 = 4).

Решить систему уравнений (3.13) – это значит найти множество всех решений данной системы или доказать, что их нет.

Каждое уравнение системы имеет бесконечное множество решений. Пусть A – это множество решений первого уравнения системы (3.13), B – это множество решений второго уравнения. Тогда множество решений системы (3.13) – это пересечение множеств A и B ($A \cap B$).

Равносильные системы уравнений. Две системы уравнений называются *равносильными* (*эквивалентными*), если множества их решений совпадают.

Свойства равносильности систем уравнений.

***Свойство* 1.** Любое уравнение системы можно заменить равносильным уравнением, получится равносильная система.

Например, дана система уравнений $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Умножим второе уравнение системы на 2. Получим равносильную систему $\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x - 2y = 4. \end{cases}$

***Свойство* 2.** Любое уравнение системы можно заменить суммой или разностью данных уравнений, получится равносильная система.

Например, дана система уравнений $\begin{cases} 4x - 3y = 5, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

Первое уравнение системы прибавим ко второму уравнению системы. Получим равносильную систему $\begin{cases} 4x - 2y = 5, \\ 6x = 12. \end{cases}$

***Свойство* 3.** Из любого уравнения системы можно выразить одно неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение. Новое и первое уравнения образуют систему, которая равносильна данной системе.

Например, дана система уравнений $\begin{cases} x-3y=6, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим неизвестное x через y, получим

$$\begin{cases} x=3y+6, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$$

Подставим выражение для x во второе уравнение системы и получим равносильную систему $\begin{cases} x=3y+6, \\ 3(3y+6)+2y=7. \end{cases}$

Между равносильными системами уравнений пишут знак равносильности $\Leftrightarrow$. Например: $\begin{cases} x-3y=6, \\ 3x+2y=7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y+6, \\ 3(3y+6)+2y=7. \end{cases}$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что называется системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
2. Что называется решением системы $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$?
3. Что значит решить систему двух уравнений с двумя неизвестными?
4. Какие системы называются равносильными?
5. Назовите свойства равносильных систем уравнений. Приведите примеры.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Для каждой системы уравнений приведите примеры равносильных систем:

а) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 3x+4y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 5x+6y=-7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-3y=-8, \\ -x+2y=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x=4y, \\ 5x-6y=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y+15=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x-2y=2, \\ 5x+4y=18; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 4x-3y=6, \\ 6x-4{,}5y=9; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 5x-3y=11, \\ 2{,}5x-1{,}5y=-6. \end{cases}$

Тема 3.5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Слова и словосочетания

Подстано́вка	Ме́тод подстано́вки
Определи́тель (сущ., м.р.)	Определи́тель систе́мы
	Определи́тель неизве́стного
	Вы́числить определи́тель

Текст для чтения

Метод подстановки. Этот метод основан на свойстве 3 равносильности систем уравнений. Из любого уравнения системы можно выразить одно неизвестное через другое и подставить это выражение во второе уравнение системы. В результате получается уравнение с одним неизвестным.

Примеры.

1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 4x-3y=-1, \\ 3x+4y=18. \end{cases}$

Решение. Выразим из первого уравнения неизвестное x через y и подставим полученное выражение во второе уравнение. Получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 4x-3y=-1, \\ 3x+4y=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y-1}{4}, \\ 3\cdot\dfrac{3y-1}{4}+4y=18; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y-1}{4}, \\ 25y=75; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\cdot3-1}{4}, \\ y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

Пара чисел (2; 3) – это решение системы.

Проверим решение системы. Подставим значения $x=2$, $y=3$ в каждое уравнение исходной системы. Получим верные равенства.

Ответ: $x=2$, $y=3$.

2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x-2y=3, \\ -2x+4y=1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x-2y=3, \\ -2x+4y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3, \\ -2(2y+3)+4y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3, \\ -6=1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы не имеет решения (получили неверное равенство). Следовательно, система уравнений не имеет решения.

Ответ: $\varnothing$.

Метод алгебраического сложения. Этот метод основан на свойствах 1 и 2 равносильности систем уравнений. Каждое уравнение системы можно умножить на дополнительные множители так, чтобы коэффициенты при одном и том же неизвестном в обоих уравнениях стали противоположными. Затем одно уравнение прибавить к другому уравнению. В результате получается уравнение с одним неизвестным.

Пример. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$

Решение. Чтобы коэффициенты при неизвестном x стали противоположными, умножим первое уравнение на (-3), а второе – на 4, а затем прибавим первое уравнение ко второму. Получим

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases} \left| \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \cdot 4 \end{matrix} \right. \Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 9y = 3, \\ 12x + 16y = 72; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 25y = 75; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 \cdot 3 = -1, \\ y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2$, $y = 3$.

Метод определителей (метод Крамера). Чтобы решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

необходимо из коэффициентов и свободных членов составить три определителя (см. тему 11.4 раздела 11)

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$ – определитель системы,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$ – определитель неизвестного x,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$ – определитель неизвестного y

и найти значения неизвестных по формулам $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$ $(\Delta \neq 0)$.

Если определитель системы $\Delta = 0$, а определители неизвестных не равны нулю, то система не имеет решений.

Если определитель системы и определители неизвестных равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

Примеры.

1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 4x - 3y = -1, \\ 3x + 4y = 18. \end{cases}$

Решение. Составим и вычислим определители Δ, Δ_x, Δ_y и найдём значения неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 9 = 25 \neq 0\,,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 18 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 54 = 50 \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{50}{25} = 2\,,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 18 \end{vmatrix} = 72 + 3 = 75 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{75}{25} = 3\,.$$

Ответ: $x = 2$, $y = 3$.

2. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x - 3y = 2, \\ 4x - 6y = 3. \end{cases}$

Решение. Составим и вычислим определители Δ, Δ_x, Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0\,,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 9 = -3 \neq 0\,,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2 \neq 0\,.$$

Так как $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, то система решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

3. Решим систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 6x - 4y = 2. \end{cases}$

Решение. Составим и вычислим определители Δ, Δ_x, Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0\,,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0\,,\ \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0\,.$$

Так как все определители равны нулю, то система имеет бесконечное множество решений.

В этом случае следует применить другой метод (самостоятельно).

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие существуют методы решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными?
2. Как решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом подстановки?
3. Как решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом алгебраического сложения?
4. Как решить систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом определителей?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите системы уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 3x+4y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 5x+6y=-7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-3y=-8, \\ -x+2y=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x=4y, \\ 5x-6y=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 5x-5y+15=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x-y=0, \\ 2x+y=5; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x+5y=7, \\ 3x-2y=4; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x-3y-4=0, \\ -2x+6y+8=0. \end{cases}$

2. Решите системы уравнений методом сложения:

а) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x-y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 3x+4y=7; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 5x+6y=-7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x-3y=-8, \\ -x+2y=6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3x=4y, \\ 5x-6y=2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y+17=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 3x-2y=2, \\ 5x+4y=18; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 4x-3y=6, \\ 6x-4{,}5y=9; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 5x-3y=11, \\ 2{,}5x-1{,}5y=-6. \end{cases}$

3. Решите системы уравнений методом определителей:

а) $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 4x+5y=14; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x+2y=4, \\ 7x+4y=8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-7y=17, \\ 8x+9y=-10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x-y=8, \\ 5x+2y=1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x-3y=-5, \\ 4x+y=11; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-2y-5=0, \\ -7x+3y+13=0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} 7x-3y=-1, \\ 4x-5y=-17; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x-2y=5, \\ 3x-3y=7{,}5y+6; \end{cases}$ и) $\begin{cases} 5x-3y=11, \\ 2{,}5x-1{,}5y=6. \end{cases}$

4. Выберите метод и решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{5x}{2}+\dfrac{y}{5}=-4; \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{9}-\dfrac{x-y}{3}=2; \\ \dfrac{2x-y}{6}-\dfrac{3x+2y}{3}=-20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=8, \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{2}-x=y-2, \\ \dfrac{3x-7}{4}=\dfrac{2y-3}{6}+1. \end{cases}$

Тема 3.6. СИСТЕМА ТРЁХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Слова и словосочетания

Тро́йка	Тро́йка чи́сел
Треуго́льный, -ая, -ое, -ые	Треуго́льный вид

Текст для чтения

Уравнение вида $ax + by + cz = d$, где x, y, z – неизвестные; a, b, c, d – числа, называется *линейным уравнением с тремя неизвестными*.

Решением уравнения $ax + by + cz = d$ называется *тройка чисел* $(x_0; y_0; z_0)$, координаты которой $x = x_0$; $y = y_0$; $z = z_0$ обращают уравнение в верное числовое равенство.

Например, тройка чисел (1; 3; 2) является решением уравнения $5x - 2y + z = 1$, потому что её координаты $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$ обращают уравнение в верное числовое равенство. А тройка чисел (4; –2; 1) не является решением уравнения, потому что её координаты $x = 4$, $y = -2$, $z = 1$ не удовлетворяют уравнению (не обращают уравнение в верное числовое равенство).

Три линейных уравнения с тремя неизвестными можно объединить в систему вида

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

Это *система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными*. Коэффициенты при неизвестных каждого уравнения вместе не равны нулю.

Тройка чисел (x_0; y_0; z_0) называется *решением системы*, если её координаты удовлетворяют каждому уравнению системы.

Решить систему – значит найти множество её решений или доказать, что их нет.

Для решения системы трёх уравнений с тремя неизвестными используют следующие методы:

1. Метод Крамера (метод определителей – тема 4 раздела 11).
2. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Формулы **метода Крамера** решения системы трёх уравнений аналогичны формулам для системы двух уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \ (\Delta \neq 0).$$

Пример. Решим систему уравнений $\begin{cases} 7x - 3y + 5z = 32, \\ 5x + 2y + z = 11, \\ 2x - y + 3z = 14. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся приведёнными формулами:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 7 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot (-3) - \\ -5 \cdot 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 5 \cdot (-3) = 43 \neq 0, \end{matrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 32 & -3 & 5 \\ 11 & 2 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 32 \cdot 2 \cdot 3 + 11 \cdot (-1) \cdot 5 + 14 \cdot 1 \cdot (-3) - \\ -5 \cdot 2 \cdot 14 - 32 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 11 \cdot (-3) = 86, \end{matrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 32 & 5 \\ 5 & 11 & 1 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 7 \cdot 11 \cdot 3 + 5 \cdot 14 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \cdot 32 - \\ -5 \cdot 11 \cdot 2 - 7 \cdot 1 \cdot 14 - 3 \cdot 5 \cdot 32 = -43, \end{matrix}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 32 \\ 5 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 7\cdot2\cdot14+5\cdot(-1)\cdot32+2\cdot11\cdot(-3)- \\ -32\cdot2\cdot2-7\cdot11\cdot(-1)-14\cdot5\cdot(-3)=129, \end{array}$$

Отсюда $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{86}{43}=2,\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-43}{43}=-1,\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{129}{43}=3$.

Ответ: $x = 2, y = -1, z = 3$.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений с тремя неизвестными основан на последовательном исключении неизвестных из уравнений системы и приведении системы уравнений к треугольному виду (тема 3 раздела 11).

Пример. Решим методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2, \\ 2x-4y+3z=1. \end{cases}$$

Будем последовательно исключать неизвестные из уравнений. Сначала исключим неизвестное x из второго и третьего уравнений:

1) умножим первое уравнение системы на (–3) и прибавим ко второму уравнению;

2) умножим первое уравнение системы на (–2) и прибавим к третьему уравнению:

$$\left.\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2, \\ 2x-4y+3z=1; \end{cases}\right| \cdot(-3)\cdot(-2) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+4z=3, \\ \quad 5y-7z=-7, \\ \qquad -5z=-5. \end{cases}$$

Третье уравнение системы – это уравнение с одним неизвестным. Его решение $z = 1$. Подставим это решение во второе уравнение и найдём значение неизвестного y: $5y - 7\cdot1 = -7$, $y = 0$. Затем подставим в первое уравнение значения неизвестных y и z и найдём значение неизвестного x: $x - 2\cdot0 + 4\cdot1 = 3$, $x = -1$.

Ответ: $x = -1, y = 0, z = 1$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными?

2. В чём заключается метод Крамера решения системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными?

3. Как решить систему трёх линейных уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса?

Задание 3. Решите задачи.

1. Решите системы уравнений методами Крамера и Гаусса:

а) $\begin{cases} x-2y+5z=9, \\ 3x+y-z=4, \\ 2x-3y+4z=11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-4y+3z=10, \\ -3x+9y-10z=-25, \\ 4x-3y+z=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x+y-3z=-7, \\ 3x+3y-7z=2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ x-y+2z=-7, \\ 2x+3y-z=1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+2y-z=7, \\ 3x-y+z=2, \\ 3x-5y+2z=-7; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x-2y+3z=-1, \\ 2x+y-5z=9, \\ 4x-3y+z=7; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x+2y+3z=-1, \\ 3x+5y+z=-10, \\ x+y+3z=-10; \end{cases}$ з) $\begin{cases} x-y-z=5, \\ 2x+y+3z=3, \\ x-4y-6z=7. \end{cases}$

Тема 3.7. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ. ВИДЫ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СПОСОБЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Слова и словосочетания

Уравне́ние	Квадра́тное уравне́ние
	Приведённое уравне́ние
	Квадра́тное уравне́ние о́бщего ви́да
	По́лное квадра́тное уравне́ние
	Непо́лное квадра́тное ура́внение
Кра́тность (сущ., ж.р.)	Ко́рень кра́тности два
Кра́тный, -ая, -ое, -ые	Кра́тный ко́рень
Двукра́тный, -ая, -ое, -ые	Двукра́тный ко́рень
Дискримина́нт	Дискримина́нт уравне́ния
Совоку́пность (сущ., ж.р.)	Совоку́пность уравне́ний

Текст для чтения

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (3.14)$$

где a, b, c – некоторые числа ($a \neq 0$); x – неизвестное, называется *квадратным уравнением*. Числа a, b, c называются *коэффициентами квадратного уравнения* (a – первый коэффициент, b – второй коэффициент, c – свободный член).

Если в уравнении (3.14) $a = 1$, то уравнение называется *приведённым* и записывается в виде

$$x^2 + px + q = 0.$$

Если в уравнении (3.14) коэффициенты b и c не равны нулю, то уравнение называется *полным квадратным уравнением* (*квадратным уравнением общего вида*).

Например, уравнения $2x^2 - 8x + 3 = 0$ и $x^2 + x - 1 = 0$ – полные квадратные уравнения.

Если один коэффициент b или c равен нулю или оба коэффициента b и c равны нулю, то квадратное уравнение называется *неполным*. Все неполные уравнения – это частные случаи полного квадратного уравнения.

Например, уравнения $5x^2 - 2x = 0$, $-3x^2 + 6 = 0$, $4x^2 = 0$ – неполные квадратные уравнения.

Значение неизвестного x, при котором уравнение (3.14) обращается в верное числовое равенство, называется *корнем уравнения*.

Например, значение $x = 2$ является корнем уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, потому что $2^2 - 5{\cdot}2 + 6 = 0$ или $0 = 0$ – верное числовое равенство.

Решить квадратное уравнение – значит найти множество его корней или доказать, что их нет.

Решение неполных квадратных уравнений.

1. Уравнение имеет вид $ax^2+bx = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Левую часть уравнения разложим на множители, получим

$$x(ax + b) = 0.$$

Левая часть уравнения – произведение выражений. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю: $x = 0$ или $ax + b = 0$. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений, получим $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ ax + b = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\dfrac{b}{a}. \end{array}\right.$

Получили два корня $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

2. Уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$).

Из уравнения выразим x^2, получим

$$ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a}.$$

При решении последнего уравнения возможны два случая:

1) если $-\frac{c}{a} > 0$, то получим два корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

2) если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет решения, потому что при любом $x \in R$ левая часть уравнения неотрицательна, а правая часть отрицательна.

3. Уравнение имеет вид $ax^2 = 0$ ($a \neq 0$).

Разделим обе части уравнения на a, получим $x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0$.

Уравнение имеет корень 0 – это *двукратный корень уравнения* или *корень кратности два*.

Примеры.

1. Решим уравнение $3x^2 - 12x = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители и найдём корни: $3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 0, \\ x - 4 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Ответ: $\{0; 4\}$.

2. Решим уравнение $3x^2 - 48 = 0$.

Решение. $3x^2 - 48 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{16} = \pm 4$.

Ответ: $\{-4; 4\}$.

3. Решим уравнение $4x^2 + 8 = 0$.

Решение. $4x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = -8 \Leftrightarrow x^2 = -2$.

Ответ: $\varnothing$.

4. Решим уравнение $-3x^2 = 0$.

Решение. $-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

Решение полного квадратного уравнения. Чтобы решить квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), надо найти *дискриминант* уравнения $D = b^2 - 4ac$.

1. Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.
2. Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных действительных корня: $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.

3.1. Результат решения квадратного уравнения общего вида

$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$			
$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Множество действительных корней уравнения	$\left\{\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right\}$	$\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$	$\varnothing$

3. Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Примеры.

1. Решим уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$, где $a = 1$, $b = -5$, $c = 6$.

Решение. Найдём дискриминант

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\cdot1\cdot6 = 25 - 24 = 1.$

$D = 1 > 0$, поэтому уравнение имеет два корня. Найдём корни

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2\cdot1} = \frac{5 \pm 1}{2},\ x_1 = \frac{5+1}{2} = 3,\ x_2 = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Ответ: $\{2; 3\}$.

2. Решим уравнение $4x^2 - 4x + 1 = 0$, где $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$.

Решение. Найдём дискриминант

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\cdot4\cdot1 = 16 - 16 = 0.$

$D = 0$, поэтому уравнение имеет один двукратный корень

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot4} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Ответ: $\{0{,}5\}$.

3. Решим уравнение $x^2 - 3x + 5 = 0$, где $a = 1$, $b = -3$, $c = 5$.

Решение. Найдём дискриминант

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\cdot1\cdot5 = 9 - 20 = -11.$$

$D < 0$, поэтому уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $\varnothing$.

Другие формулы корней квадратного уравнения.

1. Пусть в уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ второй коэффициент b – чётное число, т.е. $b = 2k$ $(k \in R)$. Тогда уравнение принимает вид

$$ax^2 + 2kx + c = 0,$$

а корни можно найти по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$.

2. Пусть дано приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, где $a = 1$, $b = p$, $c = q$. Формула корней данного уравнения имеет вид

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ .$$

Примеры.

1. Решим уравнение $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

Решение. Здесь $b = -8$, тогда $\dfrac{b}{2} = -4$.

$$x_{1,2} = \frac{-\dfrac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15}}{3} = \frac{4 \pm 1}{3},$$

$$x_1 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}\ ,\ x_2 = 1.$$

Ответ: $\left\{1; 1\dfrac{2}{3}\right\}$.

2. Решим уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$.

Решение. Здесь $p = -4$, $q = -5$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - (-5)} = 2 \pm \sqrt{9} = 2 \pm 3\ ,$$

$$x_1 = 2 + 3 = 5;\ x_2 = 2 - 3 = -1.$$

Ответ: $\{-1; 5\}$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какое уравнение называется квадратным?
2. Какое бывает квадратное уравнение?
3. Какое квадратное уравнение называется приведённым?
4. Что называется дискриминантом квадратного уравнения?

5. Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
6. Назовите разные формулы корней квадратного уравнения.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите квадратные уравнения:

а) $x^2 = 16$;	б) $x^2 + 6x + 9 = 0$;	в) $10x^2 – 3x – 1 = 0$;
г) $x^2 – 10 = 39$;	д) $x^2 – 3x + 2 = 0$;	е) $x^2 – 3x + 8 = 0$;
ж) $x^2 + 9 = 0$;	з) $x^2 – 5x + 4 = 0$;	и) $x(x + x) = 3$;
к) $x^2 + 2x = 0$;	л) $3x^2 + x – 4 = 0$;	м) $2x^2 – 5x = – 2$;
н) $x^2 – x = 0$;	о) $5x^2 – 9x – 2 = 0$;	п) $7x^2 – 3 = 4x$;
р) $(x – 2)^2 = 0$;	с) $9x^2 – 12x + 4 = 0$;	т) $9x^2 – 3x = 6$.

Тема 3.8. СВОЙСТВО КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Слова и словосочетания

Теоре́ма	Теоре́ма Вие́та
	Обра́тная теоре́ма
Доказа́тельство	Доказа́тельство теоре́мы
Дока́зывать I, доказа́ть I	Доказа́ть теоре́му
Подбо́р	Подбо́р корне́й уравне́ния
Подбира́ть I, подобра́ть I	Подобра́ть ко́рни уравне́ния
Сле́дствие	Сле́дствие из теоре́мы
Уравне́ние	Биквадра́тное уравне́ние
Заме́на	Вы́полнить заме́ну

Текст для чтения

Рассмотрим без доказательства следующие теоремы.

Теорема Виета. Сумма корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна $(–p)$, а произведение корней равно q.

Обратная теорема. Если сумма двух чисел x_1 и x_2 равна $(–p)$, а произведение этих чисел равно q, то числа x_1 и x_2 являются корнями приведённого уравнения $x^2 + px + q = 0$.

При помощи теоремы Виета и обратной теоремы можно находить корни квадратного уравнения без формулы, только путём подбора.

Примеры.

1. Найдём корни уравнения $x^2 + x – 6 = 0$.

Решение. Обозначим корни x_1 и x_2. По теореме Виета имеем

$x_1 + x_2 = – 1$; $x_1x_2 = – 6$.

Корни уравнения x_1 и x_2 могут быть только числами 2 и (–3), потому что $2 + (-3) = -1$ и $2 \cdot (-3) = -6$.

Ответ: $\{-3; 2\}$.

2. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$. Составим квадратное уравнение, которое имеет корни $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$. Найдём сумму и произведение дробей $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = -\frac{p}{q}, \quad \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1x_2} = \frac{1}{q}.$$

По обратной теореме числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ – корни квадратного уравнения $x^2 + \frac{p}{q}x + \frac{1}{q} = 0$ или $qx^2 + px + 1 = 0$.

3. Известно, что числа 2 и 3 – это корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Тогда числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ – это корни уравнения $6x^2 - 5x + 1 = 0$. (Проверьте!)

Разложение квадратного трёхчлена на множители. Многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x – переменная; a, b, c – некоторые числа ($a \neq 0$), называется *квадратным трёхчленом*.

Значения переменной x, которые обращают квадратный трёхчлен в нуль, называются *корнями трёхчлена*. Следовательно, корни трёхчлена – это корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если первый коэффициент квадратного трёхчлена равен 1 ($a = 1$), то квадратный трёхчлен называется *приведённым*; его записывают в виде $x^2 + px + q$.

Теорема. Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2, то его можно записать в виде произведения

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства. Вынесем за скобки первый коэффициент a:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Заменим дроби $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ их значениями, получим

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] =$$

$$= a\left(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2\right) = a\left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)\right] = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема доказана.

Следствие. Если приведённый квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет корни x_1 и x_2, то его можно разложить на множители

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Примеры.

1. Разложим на множители квадратный трёхчлен $2x^2 + 5x - 3$.

Решение. Найдём корни данного трёхчлена, т.е. решим квадратное уравнение $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49$, $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$,

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}, \ x_1 = -3, \ x_2 = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

2. Разложим на множители квадратный трёхчлен $x^2 - 2x - 8$.

Решение. Найдём корни уравнения $x^2 - 2x - 8 = 0$ по теореме Виета: $x_1 + x_2 = 2$, $x_1x_2 = -8$. Подбором чисел получим $x_1 = 4$, $x_2 = -2$. Следовательно, $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$.

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ($a \neq 0$) называется *биквадратным уравнением*.

С помощью замены $y = x^2$ биквадратное уравнение приводится к квадратному уравнению $ay^2 + by + c = 0$.

Примеры.

1. Решим биквадратное уравнение $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Решение. Приведём данное уравнение к квадратному с помощью замены $y = x^2$. Тогда $x^4 = y^2$. Имеем $4y^2 - 5y + 1 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение и найдём значения неизвестного y:

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{5 \pm 3}{8}, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{1}{4}.$$

Так как $y = x^2$, то уравнение $4y^2 - 5y + 1 = 0$ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = y_1, \\ x^2 = y_2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = \dfrac{1}{4}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm 1, \\ x_{3,4} = \pm\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1; 1; -\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

2. Решим биквадратное уравнение $x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Решение. Пусть $x^2 = y$, тогда $x^4 = y^2$. Получим $y^2 - y - 6 = 0$. Найдём y:

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -2.$$

Составим и решим совокупность двух уравнений, получим

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = y_1, \\ x^2 = y_2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 3, \\ x^2 = -2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\sqrt{3}, \\ \varnothing. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$.

3. Решим уравнение $(x^2 - 2x)^2 - 7\,(x^2 - 2x) - 8 = 0$.

Решение. Данное уравнение также можно привести к квадратному уравнению с помощью замены $y = x^2 - 2x$, тогда $(x^2 - 2x)^2 = y^2$. Тогда уравнение примет вид $y^2 - 7y - 8 = 0$. Из полученного уравнения найдём y:

$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 8}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2}, \quad y_1 = 8, \quad y_2 = -1.$$

Составим и решим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 8, \\ x^2 - 2x = -1; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 4,\ x_2 = -2, \\ x_{3,4} = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2; 1; 4\}$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какое уравнение называется квадратным?
2. Какое квадратное уравнение называется приведённым?
3. О чём говорит теорема Виета?
4. Как разложить на множители квадратный трёхчлен?
5. Как разложить на множители приведённый квадратный трёхчлен?
6. Что такое биквадратное уравнение?
7. Как решить биквадратное уравнение?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Известно, что x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Составьте новое квадратное уравнение, которое имеет корни $2x_1$ и $2x_2$. Примените теорему Виета.

2. Составьте квадратное уравнение, если даны его корни:

а) $x_1 = 3, x_2 = -1$; б) $x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = -\frac{3}{5}$;

в) $x_1 = -2, x_2 = -5$; г) $x_1 = 2+\sqrt{3}, x_2 = 2-\sqrt{3}$;

д) $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{3}$; е) $x_1 = -1+\sqrt{2},\ x_2 = -1-\sqrt{2}$.

3. Разложите квадратные трёхчлены на множители:

а) $x^2 + 3x - 10$; б) $5x^2 + x - 4$; в) $3a^2 - 2a - 5$;
г) $a^2 - 3a - 4$; д) $x^2 + x - 30$; е) $a^2 - 2ab - 3b^2$.

4. Сократите дроби:

а) $\frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-10}$; б) $\frac{x^2+4x-5}{x^2+8x+15}$; в) $\frac{3a^2+2ab-b^2}{5a^2+6ab+b^2}$;

г) $\frac{a^2+3a-10}{a^2-3a+2}$; д) $\frac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-1}$; е) $\frac{2a^2-5ab-3b^2}{2a^2-7ab-4b^2}$.

5. Решите биквадратное уравнение с помощью замены:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; б) $5x^4 + 3x^2 - 2 = 0$;
в) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; г) $7x^4 + 6x^2 - 1 = 0$;
д) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$; е) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$.

Тема 3.9. УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ СОДЕРЖАТ МОДУЛЬ

Слова и словосочетания

Мо́дуль (сущ., м.р.)

По определе́нию мо́дуля
Содержа́ть мо́дуль
Стоя́ть под зна́ком мо́дуля

Текст для чтения

При решении уравнений, которые содержат модуль, используются определение модуля и его свойства (прил. 5).

Примеры.

1. Решим уравнение $|x| = 4$.

Решение. По определению модуля $|x| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = 4. \end{cases}$

Ответ: {–4; 4}.

2. Решим уравнение $|x| = -2$.

Решение. При любом значении x имеем $|x| \geq 0$, но $-2 < 0$, следовательно, данное уравнение не имеет решения.

Ответ: $\varnothing$.

3. Решим уравнение $|x - 2| = 3$.

Решение. По определению модуля

$$|x-2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -3, \\ x - 2 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 5. \end{cases}$$

Ответ: { –1 ; 5 }.

4. Решим уравнение $|x + 2| + |2x - 6| = 7$.

Решение. Найдём значения неизвестного x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль:

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2;\ 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3.$$

Числа (–2) и 3 разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; -2)$, $[-2; 3)$, $[3; +\infty)$. Запишем в таблицу эти промежутки и по определению модуля преобразуем каждое выражение.

3.2. Решение уравнения $|x + 2| + |2x - 6| = 7$

	$(-\infty; -2)$	$[-2; 3)$	$[3; +\infty)$
$\lvert x + 2 \rvert$	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$\lvert 2x - 6 \rvert$	$-2x + 6$	$-2x + 6$	$2x - 6$
$\lvert x + 2 \rvert + \lvert 2x - 6 \rvert = 7$	$-3x + 4 = 7$	$-x + 8 = 7$	$3x - 4 = 7$
Корни	$x = -1 \notin (-\infty; -2)$	$x = 1 \in [-2; 3)$	$x = 3\frac{2}{3} \in [3; \infty)$

Ответ: $\left\{1;\ 3\frac{2}{3}\right\}$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.
1. Дайте определение модуля числа.
2. Каковы свойства модуля числа?
3. Как раскрыть модуль?
4. Когда уравнение с модулем не имеет решений?

***Задание* 3.** Решите задачи.
1. Решите уравнения с модулем:

а) $x^2 + |x| - 2 = 0$; б) $2|x + 6| - |x| - |x - 6| = 18$;
в) $x^2 - 2x - 3 = |3x - 3|$; г) $|x - 6| = 4 - x^2$;
д) $x^2 + |x - 3| + |x - 1| = 1$; е) $|||x - 1| + 2| - 1| + 1| = 2$.

Тема 3.10. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Слова и словосочетания

Группиро́вка	Ме́тод группиро́вки
Группирова́ть I, сгруппирова́ть II	Сгруппирова́ть слага́емые
Подстано́вка	Ме́тод подстано́вки
Уравне́ние	Симметри́ческое уравне́ние

Текст для чтения

Рациональные уравнения включают в себя целые и дробно-рациональные уравнения.

Целое рациональное уравнение – это уравнение, которое можно записать в виде

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – заданные числа; x – неизвестное; $n \geq 1$.

Дробно-рациональное уравнение – это уравнение вида

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 x^0} = 0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_m, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ – заданные числа; x – неизвестное; $n \geq 0$; $m \geq 1$.

Рассмотрим основные методы решения рациональных уравнений.

Простейшие уравнения решаются с помощью простых преобразований – приведением к общему знаменателю, приведением подобных членов и т.д. Основная цель – разложить левую часть уравнения на множители, заменить исходное уравнение системой или совокупностью новых, более простых, уравнений.

Пример. Решить уравнение $\dfrac{7(x-2)(x-3)(x-4)}{(2x-7)(x+2)(x-6)}=-2$.

Решение. Найдём ОДЗ уравнения $\begin{cases} 2x-7\neq 0, \\ x+2\neq 0, \\ x-6\neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 3{,}5, \\ x\neq -2, \\ x\neq 6. \end{cases}$

Преобразуем уравнение – умножим правую и левую части на знаменатель, раскроем скобки и приведём подобные слагаемые:

$$(7x-14)(x-3)(x-4)=-2(2x-7)(x+2)(x-6),$$

$$7x^3-49x^2+84x-14x^2+98x-168=$$
$$=-4x^3+16x^2+48x+14x^2-56x+168,$$

$$11x^3-93x^2+190x=0 \Leftrightarrow x(11x^2-93x+190)=0.$$

Получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ 11x^2-93x+190=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_{2,3}=\dfrac{93\pm\sqrt{8649-8360}}{22}=\dfrac{93\pm 17}{22}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=5, \\ x_3=3\dfrac{5}{11}. \end{array}\right.$$

Все найденные значения x удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\left\{0;\,3\dfrac{5}{11};\,5\right\}$.

Метод группировки. С помощью группировки слагаемых уравнение приводится к виду, в котором левая часть – это произведение нескольких многочленов, а правая часть равна нулю.

Примеры.

1. Решить уравнение $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0$.

Решение. Раскроем скобки, сгруппируем слагаемые и разложим многочлен в левой части уравнения на множители:

$$\underline{x^3}-\underline{ax^2}-\underline{\underline{bx^2}}+\underline{\underline{abx}}-\underline{cx^2}+\underline{acx}+\underline{bcx}-\underline{abc}=0,$$

$$x^2(x-a)-bx\,(x-a)-cx\,(x-a)+bc(x-a)=0,$$

$$(x-a)(\underline{x^2}-\underline{bx}-\underline{\underline{cx}}+\underline{\underline{bc}})=0 \Leftrightarrow (x-a)[x(x-b)-c(x-b)]=0,$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a=0, \\ x-b=0, \\ x-c=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=a, \\ x_2=b, \\ x_3=c. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{a; b; c\}$.

2. Решить уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Решение. Сначала запишем уравнение в виде $x^3 - x - 2x + 2 = 0$, а затем выполним группировку и разложим левую часть на множители:

$$x(x^2-1)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)-2(x-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)[(x^2-1)+(x-1)]=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+1+1)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x+2=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=1, \\ x_3=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2; 1\}$.

Метод подстановки (замены, введения новой переменной). Метод заключается в следующем: найти в уравнении повторяющееся выражение и это выражение обозначить новой переменной, чтобы упростить вид исходного уравнения.

Примеры.

1. Для уравнения $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$ используется замена $\frac{x^2+x-5}{x}=t$, чтобы получить уравнение $t+\frac{3}{t}+4=0$.

2. В уравнении $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$ можно сделать замену $x^2 - 4x = t$. Тогда получим $\frac{21}{t+10}-t=6$.

3. Уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$ сначала надо преобразовать к виду $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55$. А затем выполнить замену $x^2 + 2x = t$. Получим $t^2 - t - 56 = 0$.

Некоторые стандартные подстановки:

1) уравнение $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ сводится к биквадратному, если сделать подстановку $x=t-\frac{a+b}{2}$;

2) симметрическое уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ (коэффициенты членов, равноотстоящих от концов, равны) решается

с помощью подстановки $x + \dfrac{1}{x} = t$, если n – чётное; если n – нечётное, то уравнение имеет корень $x = –1$;

3) уравнения вида $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = 1$ сводятся к квадратному, если $a + b = c + d$.

Примеры.

1. Решить уравнение $(x – 4)(x – 5)(x – 6)(x – 7) = 1680$.

Решение. Поменяем местами второй и четвёртый множители:

$$(x – 4)(x – 7)(x – 6)(x – 5) = 1680;$$
$$(x^2 – 11x + 28)(x^2 – 11x + 30) = 1680.$$

Пусть $x^2 – 11x + 28 = t$, тогда

$$t\,(t + 2) = 1680 \Leftrightarrow t^2 + 2t – 1680 = 0,\ t_1 = –42,\ t_2 = 40.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 11x + 28 = -42, \\ x^2 - 11x + 28 = 40; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 11x + 70 = 0, \\ x^2 - 11x - 12 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing, \\ x_1 = 12,\ \ x_2 = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{–1; 12\}$.

2. Решить симметрическое уравнение $2x^4 + 3x^3 – 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $x^2 \neq 0$, получим

$$2x^2 + 3x - 16 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 16 = 0\,.$$

Обозначим $x + \dfrac{1}{x} = t$, тогда $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = t^2$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Получаем $2(t^2 – 2) + 3t – 16 = 0$, т.е. $2t^2 + 3t – 20 = 0$, $t_1 = –4$, $t_2 = \dfrac{5}{2}$.

Следовательно, имеем

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = -4, \\ x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{2}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 1 = 0, \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}, \\ x_3 = \dfrac{1}{2},\ \ x_4 = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-2 \pm \sqrt{3},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right\}$.

3. Решить уравнение $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$.

Решение. Сделаем подстановку $x = t - \frac{3+5}{2}$, т.е. $x = t - 4$. Тогда получаем $(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 - 14 = 0 \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0$. Пусть $t^2 = z \geq 0$, тогда $z^2 + 6z - 7 = 0 \Rightarrow z_1 = -7$, $z_2 = 1$.

Так как $t^2 = z \geq 0$, то $z_1 = -7$ – не является корнем уравнения.

Итак, $z = 1$, т.е. $t^2 = 1$, отсюда $t_1 = -1$, $t_2 = 1$.

Следовательно, $x = -1 - 4$ и $x = 1 - 4$, т.е. $x_1 = -5$, $x_2 = -3$.

Ответ: $\{-5; -3\}$.

Метод подбора. При решении уравнений высших степеней рациональные корни уравнения $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ следует искать в виде $\frac{p}{q}$, где p – делитель свободного члена a_0; q – делитель первого коэффициента a_n; числа p и q взаимно просты, $p \in Z$, $q \in N$.

Примеры.

1. $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$.

Решение. Здесь $a_n = 1$, $a_0 = 6$. Поэтому, если данное уравнение имеет рациональные корни, то их следует искать среди делителей числа 6: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Проверкой убеждаемся, что $x = 3$ – корень уравнения, так как $27 - 9 - 24 + 6 = 0$.

Разложим многочлен в левой части уравнения на множители, зная, что один множитель имеет вид $(x - 3)$:

$$x^3 - x^2 - 8x + 6 = x^3 - 3x^2 + 2x^2 - 6x - 2x + 6 =$$
$$= x^2(x - 3) + 2x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 2x - 2);$$

То есть исходное уравнение имеет вид $(x - 3)(x^2 + 2x - 2) = 0$.

Отсюда находим, что $x_1 = 3$ – решение, найденное подбором, $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$ – из уравнения $x^2 + 2x - 2 = 0$.

Ответ: $\left\{-1 \pm \sqrt{3}, 3\right\}$.

2. Решить уравнение $4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Решение. Здесь $a_n = 4$, $a_0 = -1$. Поэтому рациональные корни уравнения следует искать среди чисел ± 1; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{4}$ (делители числа 4 есть 1; 2; 4, делители числа –1 есть ± 1). Если $x = -\frac{1}{2}$, то уравнение обращается в верное числовое равенство, т.е. $x = -\frac{1}{2}$ – корень уравнения.

Разложим многочлен в левой части уравнения на множители, зная, что один множитель имеет вид $\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Получим

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^3+6x^2-2x-2\right)=0 .$$

Отсюда $x_1=-\frac{1}{2}$ – решение, найденное методом подбора, и

$$4x^3 + 6x^2 - 2x - 2 = 0, \text{ т.е. } 2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0.$$

Аналогично находим корень нового уравнения $x=-\frac{1}{2}$. Вновь разложим многочлен в левой части уравнения на множители. Получим $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2+2x-2\right)=0$. Отсюда $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Искусство. Задачу следует решать нестандартно, придумать свой метод, догадаться что-то прибавить и отнять, выделить полный квадрат, на что-то разделить и умножить и т.д.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какое уравнение называют целым рациональным уравнением?
2. Какое уравнение называют дробно-рациональным уравнением?
3. Назовите методы решений рациональных уравнений.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решить простейшие рациональные уравнения:

а) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; б) $\frac{x^3+8}{x+2}=12$;

в) $x(x + 2) = 2x + 1$; г) $\frac{3}{x+2}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

д) $(x - 1)^2 - x(x + 2) = 2x - 3$; е) $\frac{2x-1}{x+2}+2=\frac{4x+3}{2x+1}$;

ж) $\frac{2}{x+2}-1+\frac{1}{x}=0$.

2. Решить рациональные уравнения методом группировки:

а) $x^3 - 8 + x - 2 = 0$; б) $x^3 + x + 2 = 0$;

в) $x^4 - 5x^3 + 20x - 16 = 0$;

г) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2 = 0$ (записать $4x^2 = 2x^2 + 2x^2$);

д) $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 = 0$.

3. Решить рациональные уравнения методом подстановки:

а) $6-\dfrac{21}{x^2-4x+10}=4x-x^2$; б) $\dfrac{x-3}{x^2+4x+9}+\dfrac{x^2+4x+9}{x-3}=2$;

в) $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0$; г) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;

д) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=10\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{4}{x}\right)$; е) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^4+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^4=82$;

ж) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 1$.

4. Решить рациональные уравнения методом подбора:

а) $x^3 - 3x + 2 = 0$; б) $x^4 - x^3 - 35x^2 + 57x + 90 = 0$;

в) $2x^3 + x^2 - 9 = 0$; г) $4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + 3 = 0$;

д) $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$.

5. Решить рациональные уравнения, используя нестандартные приёмы:

а) $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = 4{,}5$; б) $x^2+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=1$;

в) $4x^4 + 6x^3 - 10x^2 - 9x + 9 = 0$; г) $x^4 - 8x + 63 = 0$;

д) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30$;

е) $(x - 4)^3(x - 5)^3 + 2(x - 5)^3 + (x - 4)^3 = 0$ (замена $t = x - 5$);

ж) $x^4 - 2x^2 - 12x - 8 = 0$ ($x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$).

Тема 3.11. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Слова и словосочетания

Уравне́ние	Иррациона́льное уравне́ние
Радика́л	Под зна́ком радика́ла
Уедине́ние	Уедине́ние радика́ла
Уединя́ть I, уедини́ть II	Уедини́ть радика́л

Текст для чтения

Иррациональным уравнением относительно x называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала. Решение уравнения следует искать в ОДЗ для неизвестного.

Замечания:

1) $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|$, где $n \in N$;

2) из равенства $\sqrt[2n]{x} = a$ следует, что $x \geq 0$, $a \geq 0$, $x = a^{2n}$.

Рассмотрим основные методы решения иррациональных уравнений.

Уединение радикала и возведение в степень. Суть метода: преобразовать уравнение так, чтобы получить равносильное рациональное уравнение.

Примеры.

1. $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$.

Решение. Уединим радикал $\sqrt{15-x} = 6 - \sqrt{3-x}$ и найдём ОДЗ

$$\begin{cases} 15 - x \geq 0, \\ 3 - x \geq 0, \\ 6 - \sqrt{3-x} \geq 0. \end{cases}$$

Подробно о решении неравенств будет рассказано в разделе 4.
Возведём в квадрат обе части уравнения, получим

$$\left(\sqrt{15-x}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{3-x}\right)^2 \Leftrightarrow 15 - x = 36 - 12\sqrt{3-x} + 3 - x;$$

$$12\sqrt{3-x} = 24 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow 3 - x = 4 \Leftrightarrow x = -1.$$

Найденное значение x удовлетворяет ОДЗ.
Ответ: $x = -1$.

2. $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$.

Решение. Уединим радикалы $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2}$ и найдём ОДЗ

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ 3x + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Возведём обе части уравнения в шестую степень (почему?):

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^6 \Leftrightarrow (x+2)^3 = (3x+2)^2;$$

$$x^3 + 6x\ 9x^2 + 12xx^3 - 3x;$$

$$x^3 - 3xx^3 + 1) - 3(x$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x+1)(x-1) = 0;$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1 - 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0;$$

$$(x+1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0, \\ (x-2)^2 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_{2,3} = 2. \end{array}\right.$$

Значение $x_1 = -1$ не удовлетворяет ОДЗ.
Ответ: $\{2\}$.

Введение новой переменной (подстановка, замена). Суть метода – выделить в уравнении повторяющееся выражение и ввести новое неизвестное так, чтобы упростить исходное уравнение.

Пример. $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0.$

Решение. Обозначим $x^2+3x-6=t$ (можно $\sqrt{x^2+3x-6}=t\geq 0$ или $x^2+3x=t$). Тогда получим $t-12+4\sqrt{t}=0,$ т.е. $4\sqrt{t}=12-t.$

ОДЗ $\begin{cases} t\geq 0, \\ 12-t\geq 0. \end{cases}$

Возведём в квадрат обе части уравнения и находим корни:

$$16t=144-24t+t^2 \Leftrightarrow t^2-40t+144=0,\ t_1=4,\ t_2=36.$$

Значение $t_2=36$ не удовлетворяет ОДЗ. Поэтому

$$x^2+3x-6=4 \Leftrightarrow x^2+3x-10=0,\ x_1=-5,\ x_2=2.$$

Ответ: $\{-5; 2\}$.

Примеры других подстановок:

а) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$ – подстановка $\sqrt[3]{x}+2=t$ (или $\sqrt[3]{x}=t$);

б) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$ – подстановка $x=t^6$;

в) $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}+\sqrt{\dfrac{8-6x+x^2}{18-7x-x^2}}=\dfrac{13}{6}$ – подстановка $\sqrt{\dfrac{18-7x-x^2}{8-6x+x^2}}=t$, $t>0$.

Уравнения, содержащие кубические радикалы. Основным методом решения таких уравнений является последовательное возведение в куб обеих частей уравнений, используя формулы

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b);$$
$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b).$$

Примеры.

1. $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$.

Решение. Возведём в куб обе части уравнения

$$\left(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}\right)^3=1^3;$$

$$x+45-(x-16)-3\sqrt[3]{x+45}\sqrt[3]{x-16}\left(\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}\right)=1.$$

Учитывая, что выражение в скобках равно 1, получаем

$$x+45-(x-16)-3\sqrt[3]{x+45}\sqrt[3]{x-16}=1;$$

$$3\sqrt[3]{x+45}\sqrt[3]{x-16}=60 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+45)(x-16)}=20.$$

Возведём в куб обе части уравнения:

$(x + 45)(x - 16) = 8000 \Leftrightarrow x^2 + 29x - 8720 = 0$, $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

Проверкой убеждаемся, что это корни уравнения.
Ответ: $\{-109; 80\}$.

2. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

Решение. Приведём его без дополнительных пояснений.

$$(x+5)+(x+6)+3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}\right)=2x+11;$$

$$2x+11+3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\sqrt[3]{2x+11}=2x+11;$$

$$3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\sqrt[3]{2x+11}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+5}=0,\\ \sqrt[3]{x+6}=0,\\ \sqrt[3]{2x+11}=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=-5,\\ x_2=-6,\\ x_3=-5{,}5.\end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что это корни уравнения.
Ответ: $\{-6; -5{,}5; -5\}$.

Искусство. Для каждого уравнения необходимо найти свой метод решения (нестандартный).

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какое уравнение называют иррациональным?
2. Назовите методы решения иррациональных уравнений.
3. Как решаются уравнения, содержащие кубические радикалы?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите иррациональные уравнения способом уединения радикала и возведения в степень:

а) $\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1$; б) $\sqrt[3]{x+3}-\sqrt{x-1}=0$;

в) $\sqrt{x-5}-\sqrt{5-x}=\sqrt{x-1}$; г) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$;

д) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+4}=0$; е) $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{x^2-6x+9}$;

ж) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

2. Решите иррациональные уравнения методом введения новой переменной:

а) $x+12\sqrt{x}-64=0$; б) $\sqrt{12-x}+\frac{4}{\sqrt{12-x}+3}=2$;

в) $\frac{x+1}{3x-2}=2\sqrt{x}$; г) $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{17}{4}$;

д) $x+\sqrt[3]{x}=2$; е) $x\sqrt{x^2+15}-2=\sqrt{x}\sqrt[4]{x^2+15}$;

ж) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$.

3. Решите уравнения, содержащие кубические радикалы:

а) $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3x-2}=\sqrt[3]{x-1}$; б) $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$;

в) $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5$; г) $\sqrt[3]{54+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{54-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{18}$;

д) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$ ($x_1=0, x_{2,3}=\pm 1,\ x_{4,5}=\pm\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$).

4. Решите уравнения, используя нестандартные приёмы:

а) $\sqrt{x+5}=x^2-5$; б) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$;

в) $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$;

г) $\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2+2x+1}=\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-x+1}$.

Тема 3.12. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Слова и словосочетания

Систе́ма — Систе́ма уравне́ний
Одноро́дный, -ая, -ое, -ые — Одноро́дное уравне́ние

Текст для чтения

При решении систем уравнений используют свойства равносильности систем уравнений и методы решения рациональных и иррациональных уравнений и систем линейных уравнений (раздел 3, темы 4, 5, 7, 10, 11).

Метод подстановки. Из какого-либо уравнения системы выражаем одно неизвестное через другие и подставляем в оставшиеся уравнения системы.

Пример. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$

Решение. Из второго уравнения выразим неизвестное y и подставим в первое уравнение, а затем применим метод решения иррационального уравнения:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}=4, \\ y=28-x; \end{cases}$$

$$\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}\right)^3=4^3;$$

$$x+28-x+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{28-x}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{28-x}\right)=64;$$

$$12\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{28-x}=36 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{28-x}=3 \Leftrightarrow x\,(28-x)=27;$$

$$x^2-28x+27=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=27 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=27, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;\,27),\,(27;\,1)\}$.

Метод алгебраического сложения. Цель метода – упростить уравнения системы и/или избавиться от одного неизвестного.

Пример. $\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20. \end{cases}$

Решение. Умножим второе уравнение на 3 и прибавим к первому уравнению:

$$\begin{cases} x^3+y^3=65, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=125, \\ x^2y+xy^2=20; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3=125, \\ xy(x+y)=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ 5xy=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5, \\ xy=4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $\{(1;\,4),\,(4;\,1)\}$.

Метод введения новых неизвестных. Цель метода – упростить уравнения системы.

Пример. $\begin{cases} x^2 + y^2 = xy + 13, \\ x + y = \sqrt{xy} + 3. \end{cases}$

Решение. Воспользуемся формулой $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ и перепишем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = xy + 13, \\ x + y = \sqrt{xy} + 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 13, \\ x + y - \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$

Введём новые неизвестные u и v: $x + y = u$, $\sqrt{xy} = v$, $xy \geq 0$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} u^2 - 3v^2 = 13, \\ u - v = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v+3)^2 - 3v^2 = 13, \\ u = v + 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4, \\ v = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u = 5, \\ v = 2. \end{cases}$$

Возвратимся к исходным неизвестным:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + y = 5, \\ \sqrt{xy} = 2. \end{cases}$$

Обе системы удобно решать методом подстановки.

Ответ: $\left\{ \left(2 - \sqrt{3};\ 2 + \sqrt{3}\right);\ \left(2 + \sqrt{3};\ 2 - \sqrt{3}\right);\ (1;\ 4),\ (4;\ 1) \right\}$.

Система содержит однородное уравнение. Уравнение вида $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$) называется *однородным уравнением* второй степени относительно x и y.

Если система уравнений содержит однородное уравнение или левая часть уравнения – это однородное выражение, то можно выразить линейно одно из неизвестных через другое.

Пример. $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6. \end{cases}$

Решение. Заметим, что левые части уравнений системы – однородные выражения одной и той же степени. Исключим из системы свободные члены. Умножим обе части первого уравнения на 2 и вычтем почленно второе уравнение из первого:

$$-\begin{cases} 4x^2 - 6xy + 2y^2 = 6, \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6, \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0. \qquad}$$

Получили однородное уравнение. Разделим уравнение на $x^2 \neq 0$, получим $3-8\frac{y}{x}+4\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$. Пусть $\frac{y}{x}=t$, тогда $4t^2 - 8t + 3 = 0$, $t_1=\frac{1}{2}$, $t_2=\frac{3}{2}$. Переходя к исходным переменным, получаем две системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}, \\ x^2+2xy-2y^2=6\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{3}{2}, \\ x^2+2xy-2y^2=6.\end{cases}$$

Обе системы решаем методом подстановки:

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}, \\ x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}x, \\ x^2+2x\frac{1}{2}x-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=6;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}x, \\ 3x^2=12;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{1}{2}x, \\ x^2=4;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1, \\ x=2\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y=-1, \\ x=-2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=\frac{3}{2}, \\ x^2+2xy-2y^2=6;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{3}{2}x, \\ x^2+2x\frac{3}{2}x-2\left(\frac{3x}{2}\right)^2=6;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{3}{2}x, \\ -x^2=12;\end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

Делаем проверку.

Ответ: {(–2; –1), (2; 1)}.

Искусство. Систему уравнений решать нестандартно, проявив определённую смекалку.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Перечислите методы решения систем уравнений. Приведите примеры решения систем уравнений каждым методом.
2. Какое уравнение называется однородным?

3. Расскажите, как решаются системы, содержащие однородные уравнения.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите системы уравнений методом подстановки:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2), \\ x + y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ -3x + 4y + 2z = 11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y^2 + \sqrt{3y^2 - 2x + 3} = \dfrac{2}{3}x + 5, \\ 3x - 2y = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$

2. Решите системы уравнений методом алгебраического сложения:

а) $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x + y^2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -x + 5y = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^3 + 2y = 6x, \\ 2x + y^3 = 6y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + 5y = -1, \\ 5x + 3y = 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$

3. Решите системы уравнений методом введения новых неизвестных:

а) $\begin{cases} x + \sqrt{xy} + y = 13, \\ x^2 + y^2 + xy = 91; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x + y - 2) = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{y}{x}(x + y - 1) = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{7}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{4}{\sqrt{y-7}} = \dfrac{5}{3}, \\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}} - \dfrac{3}{\sqrt{y-7}} = \dfrac{13}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy + x + y = 5, \\ x^2y + xy^2 = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 3; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y = 5, \\ 2x^2 + 3y^2 - 2x - 6y = 13. \end{cases}$

4. Решите системы, содержащие однородные уравнения:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 2x + y^2 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x^2 - 10y^2 = 5, \\ 3x^2 - 2xy + 5y^2 = 35; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 4, \\ 2x^2 + xy - y^2 = 2. \end{cases}$

5. Решите системы уравнений, используя нестандартные приёмы:

а) $\begin{cases} x(y+z) = 5, \\ y(x+z) = 8, \\ z(x+y) = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y - z = 7, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy(x+y) = -2, \\ x^3 + y^3 = 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2\sqrt{xy}, \\ x + y = 20. \end{cases}$

Раздел 4

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА, ИХ СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ

Тема 4.1. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Слова и словосочетания

Нера́венство	Стро́гое нера́венство
	Нестро́гое нера́венство
	Тожде́ственное нера́венство
Смысл	Одина́ковый смысл
	Противополо́жный смысл

Текст для чтения

Действительные числа можно сравнивать по величине. Если два числа a и b не равны, то a может быть больше, чем b ($a > b$) или a может быть меньше, чем b ($a < b$).

***Определение* 1.** Число *a больше*, чем число b ($a > b$), если разность $a - b > 0$, т.е. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Например, $5 > -3$, потому что $5 - (-3) = 5 + 3 = 8 > 0$.

***Определение* 2.** Число *a меньше*, чем число b ($a < b$), если разность $a - b < 0$, т.е. $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

Например, $-12 < 8$, потому что $-12 - 8 = -20 < 0$.

Записи $5 > 3$, $2x - 1 < 0$, $(a + b)^2 \geq 0$ – это неравенства.

Если неравенство содержит знак $>$ или знак $<$, то оно называется *строгим неравенством*. Например, $5 > 2$ или $3x - 6 < 0$ – строгие неравенства.

Если неравенство содержит знак $\geq$ или знак $\leq$, то оно называется *нестрогим неравенством*. Например, $a \geq 7$, $b \leq 5$ – это нестрогие неравенства.

Два неравенства вида $a > b$ и $c > d$ или вида $a < b$ и $c < d$ называются неравенствами *одинакового смысла*. Два неравенства вида $a > b$ и $c < d$ называются неравенствами *противоположного смысла*.

Неравенства могут содержать переменные величины (одну или несколько). Например, неравенство $2x > 8$ содержит одну переменную x. Если $x = 5$, то это неравенство верно: $2{\cdot}5 > 8$ или $10 > 8$. Если $x = 3$, то неравенство неверно: $3{\cdot}2 > 8$ или $6 > 8$.

Неравенство $(a + b)^2 \geq 0$ содержит две переменные a и b. Данное неравенство верно при любых значениях переменных a и b.

***Определение* 3.** Неравенство, верное при любых допустимых значениях его переменных, называется *тождественным неравенством*.

Например, $(a + b)^2 \ge 0$ – тождественное неравенство; $2 > 1$ – верное числовое неравенство или тождественное неравенство.

Тождественные неравенства с переменными можно доказать.

Пример. Докажем неравенство $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, где $a, b \in R^+$.

Выражение $\frac{a+b}{2}$ – это среднее арифметическое чисел a и b; выражение $\sqrt{ab}$ – это среднее геометрическое двух положительных чисел (см. тему 2 раздела 6). Данное неравенство говорит о том, что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Доказательство. Составим разность левой и правой частей неравенства и упростим её:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \ge 0 .$$

Так как полученная разность неотрицательна для всех неотрицательных чисел, то по определению 1 имеем

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} .$$

Неравенство доказано.

Свойства числовых неравенств.

***Свойство* 1.** Если $a > b$, то $b < a$, и наоборот, если $b > a$, то $a < b$. Например, $13 > 7$, тогда $7 < 13$; $4 < 6$, тогда $6 > 4$.

***Свойство* 2. Транзитивность.** Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Например, $5 > 3$ и $3 > 2$, тогда $5 > 2$.

***Свойство* 3.** Если $a > b$ и $c \in R$, то $a + c > b + c$. Например, $7 > 2$, тогда $7 + 3 > 2 + 3$ или $10 > 5$.

***Свойство* 4.** Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится.

Например, дано неравенство $12 > 8$ и число $m = 4$ $(m > 0)$, тогда $12 \cdot 4 > 8 \cdot 4$ или $48 > 32$; $12 : 4 > 8 : 4$ или $3 > 2$. Знак данного неравенства не изменился.

***Свойство* 5.** Если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$ и $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Например, дано неравенство $9 > -6$ и число $m = -3$ ($m < 0$). Тогда $9\cdot(-3) < -6\cdot(-3)$ или $-27 < 18$; $9 : (-3) < (-6) : (-3)$ или $-3 < 2$. Знак данного неравенства (>) изменился на противоположный знак (<).

***Свойство* 6. Сложение неравенств.** Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. Два неравенства одинакового смысла можно почленно складывать, получается неравенство того же смысла.

Например, сложим неравенства

$$+\begin{array}{c} 2 > -1 \\ 5 > 3 \\ \hline 2 + 5 > -1 + 3 \\ 7 > 2 \end{array} \qquad +\begin{array}{c} -3 < 2 \\ 4 < 7 \\ \hline -3 + 4 < 2 + 7 \\ 1 < 9 \end{array}$$

***Свойство* 7. Вычитание неравенств.** Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$. Два неравенства противоположного смысла можно почленно вычесть, получается неравенство такого же смысла, как неравенство – уменьшаемое.

Например, вычтем второе неравенство из первого:

$$-\begin{array}{c} 9 > 3 \\ -5 < 1 \\ \hline 9 - (-5) > 3 - 1 \\ 14 > 2 \end{array} \qquad -\begin{array}{c} -3 < 5 \\ 2 > -7 \\ \hline 3 - 2 < 5 - (-7) \\ 1 < 9 \end{array}$$

***Свойство* 8. Умножение неравенств.** Если $a > b$ и $c > d$, где $a, b, c, d \in R^+$, то $a \cdot c > b \cdot d$. Два неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать (перемножать), получается неравенство того же смысла.

Например, перемножим неравенства:

$$\times\begin{array}{c} 3 > 2 \\ 5 > 4 \\ \hline 3 \cdot 5 > 2 \cdot 4 \\ 15 > 8 \end{array} \qquad \times\begin{array}{c} 0{,}5 < 1{,}2 \\ 1{,}4 < 2{,}5 \\ \hline 0{,}5 \cdot 1{,}4 < 1{,}2 \cdot 2{,}5 \\ 0{,}7 < 3 \end{array}$$

***Свойство* 9.** Если $a > b$, где $a, b \in R^+$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Например, $3 > 2$, тогда $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

***Свойство* 10. Деление неравенств.** Если $a > b$ и $c < d$, где $a, b, c, d \in R^+$, то $a : c > b : d$. Два неравенства противоположного смысла с положительными членами можно почленно делить, получится неравенство такого же смысла, как неравенство – делимое.

Например, разделим почленно неравенства:

$$:\begin{array}{c} 12 > 6 \\ 2 < 3 \\ \hline 12 : 2 > 6 : 3 \\ 6 > 2 \end{array} \qquad :\begin{array}{c} 10 < 15 \\ 5 > 3 \\ \hline 10 : 5 < 15 : 3 \\ 2 < 5 \end{array}$$

***Свойство* 11. Возведение неравенства в степень.** Если $a > b$, где $a, b \in R^+$ и $n \in N$, то $a^n > b^n$. Неравенство с положительными членами можно возводить в степень, получается неравенство того же смысла.

Например, возведём неравенство в степень

$3 > 2$, $n = 4$, тогда $3^4 > 2^4$ или $81 > 16$.

***Свойство* 12. Извлечение корня из неравенства.** Если $a > b$, где $a, b \in R^+$ и $n \in N \setminus \{1\}$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Из обеих частей неравенства с положительными членами можно извлекать корень, получается неравенство того же смысла.

Например, извлечём корень из неравенства

$$125 > 64,\ n = 3,\ \text{тогда}\ \sqrt[3]{125} > \sqrt[3]{64}\ \text{или}\ 5 > 4.$$

Каждое свойство можно доказать с помощью определений 1 и 2 и других свойств.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие неравенства называются строгими?
2. Какие неравенства называются нестрогими?
3. Что такое неравенства одинакового смысла?
4. Что такое неравенства противоположного смысла?
5. Что такое тождественное неравенство?
6. Какими свойствами обладают числовые неравенства? Приведите примеры.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Пусть $a < b$. Сравните числа:

а) $a + x$ и $b + x$; б) $a - 5$ и $b - 5$; в) $a + x^2$ и $b + x^2$;
г) $a - a^2$ и $b - b^2$; д) $-2(a + 4)$ и $-2(b + 4)$.

2. Умножьте обе части данного неравенства на указанное число:

а) $3{,}25 < 4$ на 3; б) $3{,}4 > 2{,}3$ на 4; в) $2a > 1$ на 0,5;

г) $1\frac{2}{3} > \frac{5}{6}$ на –12; д) $-2\frac{1}{3} < -1\frac{2}{5}$ на –6; е) $-4a < -3$ на –0,25.

3. Разделите обе части данного неравенства на указанное число:

а) $-2 < 3$ на 3; б) $3{,}9 > 2{,}7$ на –4;

в) $3x < 9a - 15b$ на 3; г) $-\frac{2x}{3} < -\frac{1}{4}$ на $-\frac{2}{3}$;

д) $-0{,}75x > \frac{1}{3}$ на –0,75.

4. Докажите неравенства:

а) $\frac{2a}{1+a^2} \le 1$ $(a \in R)$; б) $(x + 2y)^2 \ge 4xy$ $(x, y \in R)$;

в) $a^2 + \frac{1}{a^2} \ge 2$ $(a \ne 0)$.

Тема 4.2. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. РАВНОСИЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ РЕШЕНИЕ

Слова и словосочетания

Равноси́льный, -ая, -ое, -ые	Равноси́льные неравенства
Равноси́льность (сущ., ж.р.)	Знак равноси́льности

Текст для чтения

Неравенством с одной переменной называется неравенство вида $f(x) > g(x)$ или $f(x) < g(x)$, где $f(x)$ («эф от икс») и $g(x)$ («же от икс») – выражения с переменной x.

Например, $2x + 5 > 3x - 1$, $\frac{5x-1}{x} < \frac{7}{9}$ – это неравенства с одной переменной.

Множество всех значений переменной, при которых имеют смысл обе части неравенства, называется *областью допустимых значений* (ОДЗ) *неравенства.*

Например, ОДЗ неравенства $2x + 5 > 3x - 1$ – это множество всех действительных чисел R, а ОДЗ неравенства $\frac{5x-1}{x} < \frac{7}{9}$ – это $R \setminus \{0\}$.

Решением неравенства $f(x) > g(x)$ называется такое значение $x = a$, которое обращает его в верное числовое неравенство $f(a) > g(a)$.

Например, значение $x = -2$ – это решение неравенства $5x - 7 < 0$, потому что $5\cdot(-2) - 7 < 0$ или $-17 < 0$ – верное числовое неравенство.

Решить неравенство – это значит найти множество его решений.

Равносильные неравенства. Два неравенства $f_1(x) > g_1(x)$ и $f_2(x) > g_2(x)$ называются *равносильными*, если множества их решений совпадают, т.е. все решения первого неравенства являются решениями второго, а все решения второго неравенства являются решениями первого.

Если два неравенства равносильны, то между ними пишут знак равносильности $\Leftrightarrow$.

Например, $2x > 10 \Leftrightarrow x - 2 > 3$, потому что каждое неравенство имеет множество решений $(5; +\infty)$.

Два неравенства с одинаковой переменной, которые не имеют решений, также равносильны, потому что их множество решений $\varnothing$.

Например, $x^2 < -1 \Leftrightarrow 2x^2 + 1 < 0$, потому что каждое неравенство не имеет решения.

Примем без доказательства следующие теоремы.

Теорема 1. Если к левой и правой частям неравенства $f(x) > g(x)$ прибавить одно и то же число или выражение $h(x)$, которое имеет смысл при всех допустимых значениях x данного неравенства, то получим неравенство $f(x) + h(x) > g(x) + h(x)$, равносильное данному неравенству.

Следствие. Члены неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую часть с противоположным знаком.

Теорема 2. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить или разделить на одно и то же положительное число m ($m > 0$), то получим неравенство $mf(x) > mg(x)$ или $\frac{f(x)}{m} > \frac{g(x)}{m}$, равносильное данному неравенству.

Теорема 3. Если обе части неравенства $f(x) > g(x)$ умножить или разделить на одно и то же отрицательное число m ($m < 0$) и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство $mf(x) < mg(x)$ или $\frac{f(x)}{m} < \frac{g(x)}{m}$, равносильное данному неравенству.

Теоремы о равносильности неравенств применяют при решении неравенств.

Линейные неравенства с одной переменной и их решение. Неравенства вида $ax + b < 0$, где x – переменная; a и b – некоторые числа, называются *линейными*.

Рассмотрим решение линейного неравенства: $ax + b > 0$.

Перенесём свободный член из левой части неравенства в правую:

$$ax > -b. \qquad (4.1)$$

1. $a > 0, -b \in R$.

Разделим обе части неравенства (4.1) на положительное число a, получим равносильное неравенство $x > -\frac{b}{a}$.

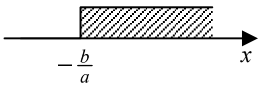


Рис. 4.1

Из этого неравенства следует, что множество решений исходного неравенства – это бесконечный интервал $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ (рис. 4.1).

2. $a < 0, -b \in R$.

Разделим обе части неравенства (4.1) на отрицательное число a и изменим знак неравенства на противоположный, получим равносильное неравенство $x < -\frac{b}{a}$. Из этого неравенства следует, что множество решений исходного неравенства – это бесконечный интервал $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ (рис. 4.2).

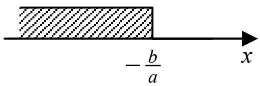


Рис. 4.2

3. $a = 0, -b < 0$.

Неравенство (4.1) принимает вид $0 \cdot x > -b$. Данное неравенство верно при любых $x \in R$ (левая часть равна нулю, а правая часть – отрицательное число: $0 > -b$ – верное неравенство). Следовательно, множество решений данного неравенства – множество всех действительных чисел R.

4. $a = 0, -b > 0$.

Неравенство (4.1) принимает вид $0 \cdot x > -b$. Данное неравенство неверно при всех $x \in R$, потому что левая часть равна 0, а правая часть – положительное число: $0 > -b$ – неверное неравенство. Следовательно, данное неравенство не имеет решения. Его множество решений – пустое множество $\varnothing$.

Примеры. Решим неравенства.

1. $2x - 3 > x - 5 \Leftrightarrow 2x - x > 3 - 5 \Leftrightarrow x > -2$.

Ответ: $(-2; +\infty)$.

2. $x + 2 \geq 3x - 4 \Leftrightarrow x - 3x \geq -4 - 2 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Ответ: $(-\infty; 3]$.

3. $\dfrac{3x+1}{3} - 1 < \dfrac{2x-1}{2}$.

Решение. Сначала освободимся от дробных членов. НОЗ = 6. Умножим обе части неравенства на 6, получим равносильное неравенство

$$2(3x + 1) - 6 < 3(2x - 1).$$

Затем упростим и решим неравенство

$$6x + 2 - 6 < 6x - 3 \Leftrightarrow 6x - 6x < -3 - 2 + 6 \Leftrightarrow 0x < 1 \Leftrightarrow 0 < 1.$$

Последнее неравенство верно при всех $x \in R$.

Ответ: R.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое неравенство с одной переменной?
2. Что такое область допустимых значений неравенства с одной переменной?
3. Что такое решение неравенства?
4. Что значит решить неравенство?
5. Что такое равносильные неравенства?
6. Какие теоремы справедливы для равносильных неравенств?
7. Что такое линейное неравенство с одной переменной?
8. Как решить линейное неравенство с одной переменной?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите неравенства:

а) $2x - 3 > x + 1$; б) $x + 2 < 3x - 4$;

в) $2x + 8 \le 10 - 4x$;

г) $3(5 - x) > 2 - 3x$;

д) $5x - 10 \ge 5(x - 2)$;

е) $7 - 3(2x - 5) > 3 - 4x$;

ж) $\frac{3x+1}{2} \le \frac{12-5x}{3}$;

з) $\frac{x-1}{4} + 1 > \frac{2-3x}{2} - \frac{x}{6}$;

и) $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} < 1$.

Тема 4.3. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ РЕШЕНИЕ

Слова и словосочетания

Фу́нкция	Квадрати́чная фу́нкция
Гра́фик	Гра́фик фу́нкции
Пара́бола	
Ме́тод	Графи́ческий ме́тод
Каса́ться I, косну́ться I	Пара́бола каса́ется оси́ абсци́сс

Текст для чтения

Квадратное неравенство – это неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где $a \ne 0$. Левая часть квадратного неравенства – это квадратный трёхчлен или квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$. Графиком квадратичной функции является парабола. С помощью параболы можно решить квадратное неравенство, т.е. определить значения x, при которых $y < 0$ или $y > 0$.

Пример. Решим графическим методом неравенство $x^2 - 3x + 2 < 0$.

Решение. Найдём дискриминант квадратного трёхчлена в левой части неравенства $D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4{\cdot}1{\cdot}2 = 9 - 8 = 1 > 0$.

Так как $D > 0$, то парабола $y = x^2 - 3x + 2$ пересекает ось абсцисс в точках x_1 и x_2, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.

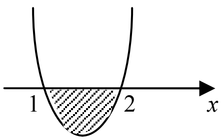
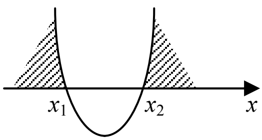
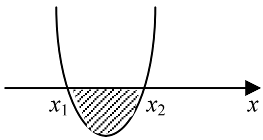
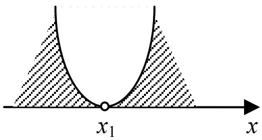
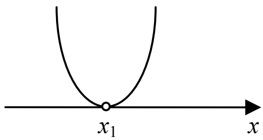
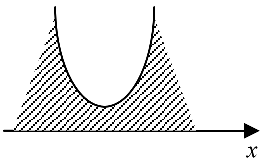
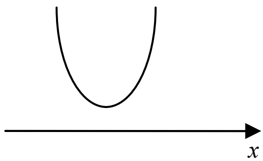


Рис. 4.3

Решим уравнение, получим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. На оси отметим точки $x = 1$ и $x = 2$ и через них проведём параболу $y = x^2 - 3x + 2$ (рис. 4.3). Из рисунка видно, что $y < 0$, если $1 < x < 2$. Следовательно, множество решений исходного неравенства – это промежуток (1; 2).

Мы рассмотрели в общем виде решение квадратного неравенства для случая, когда первый коэффициент положительный ($a > 0$). Если $a < 0$, то обе части неравенства можно умножить на (–1) – знак неравенства изменится на противоположный и получится равносильное неравенство, в котором $a > 0$. Например, неравенство $-3x^2 + x - 5 > 0$ равносильно неравенству $3x^2 - x + 5 < 0$.

4.1. Решение квадратных неравенств ($a > 0$) в общем виде

$D = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$D > 0$	 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	 $x \in (x_1; x_2)$
$D = 0$	 $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	 $\varnothing$
$D < 0$	 $x \in (-\infty; +\infty)$	 $\varnothing$

Примеры.

1. Решим неравенство: $2x^2 - 5x + 2 > 0$.

Решение. Найдём дискриминант $D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0$. Так как $D > 0$, то квадратный трёхчлен в левой части неравенства имеет два действительных корня: x_1 и x_2. Решим квадратное уравнение $2x^2 - 5x + 2 = 0$, получим $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$. Отметим точки $x = \frac{1}{2}$ и $x = 2$ на числовой прямой Ox и проведём через них параболу $y = 2x^2 - 5x + 2$ (рис. 4.4). Из рисунка видно, что $y > 0$, если $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ или $x \in (2; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

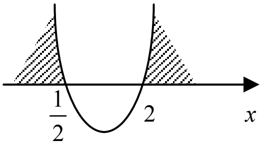


Рис. 4.4

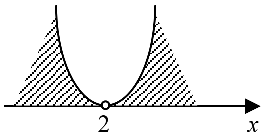


Рис. 4.5

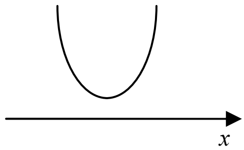


Рис. 4.6

2. Решим неравенство $x^2 - 4x + 4 > 0$.

Решение. Найдём дискриминант $D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$. Так как $D = 0$, то квадратное уравнение $x^2 - 4x + 4 = 0$ имеет один корень: $x = 2$. Поэтому парабола $y = x^2 - 4x + 4$ касается оси Ox в точке $x = 2$ (рис. 4.5). Из рисунка видим, что $y > 0$, если $x \in R$ и $x \neq 2$.

Ответ: $x \in R \setminus \{2\}$.

3. Решим неравенство $-x^2 + x - 2 > 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на (-1) и изменим знак неравенства на противоположный, получим равносильное неравенство $x^2 - x + 2 < 0$. Решим это неравенство. Найдём дискриминант

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$.

Так как $D < 0$, то парабола $y = x^2 - x + 2$ не имеет общих точек с осью Ox (рис. 4.6). Из рисунка видно, что при всех $x \in R$ функция положительна ($y > 0$). Поэтому не существует значений x, при которых $y < 0$.

Ответ: $\varnothing$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое квадратное неравенство?
2. Как графически решить квадратное неравенство? Приведите примеры.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите квадратные неравенства:

а) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$; б) $x^2 + 4x + 3 > 0$; в) $x^2 + 5x + 6 \leq 0$;
г) $x^2 + x - 6 > 0$; д) $x^2 - 2x + 1 > 0$; е) $x^2 - 6x + 9 < 0$;
ж) $4x^2 + 4x + 1 > 0$; з) $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$; и) $3x^2 + 5x + 2 < 0$;
к) $5x^2 - 3x - 2 > 0$.

Тема 4.4. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ РЕШЕНИЕ

Слова и словосочетания

Ме́тод	Ме́тод интерва́лов
Чередова́ть I	Зна́ки череду́ются

Текст для чтения

Целое рациональное неравенство – это неравенство вида $P(x) > 0$ или $P(x) < 0$, где $P(x)$ – многочлен относительно переменной x.

Например, $x - 3 > 0$, $4x^2 - 4x + 1 < 0$, $(x - 1)(2x + 3)(x - 5) > 0$, $2x^3 - 7x^2 + x - 1 < 0$ – это целые рациональные неравенства.

Дробно-рациональное неравенство – это неравенство вида $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ или $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$, где $A(x)$ и $B(x)$ – многочлены относительно x, $B(x) \neq 0$.

Дробно-рациональное неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ равносильно целому рациональному неравенству $A(x)B(x) > 0$.

Действительно, так как $B(x) \neq 0$, то выражение $[B(x)]^2 > 0$ при всех значениях x из ОДЗ неравенства. Тогда обе части неравенства $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ можно умножить на $[B(x)]^2$, получится равносильное неравенство $A(x)B(x) > 0$. Аналогично решают неравенства вида $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$.

Для решения целых рациональных и дробно-рациональных неравенств используют *метод интервалов*. Его цель – разложить многочлен в левой части на множители, найти нули этого многочлена и на числовой оси определить промежутки, на которых многочлен принимает положительные или отрицательные значения.

Примеры.

1. Решим неравенство: $(x - 1)(x + 2)(x - 4) > 0$.

Решение. Левая часть неравенства – это многочлен относительно переменной x. Обозначим его $P(x)$. Тогда $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$. Многочлен $P(x)$ задаёт функцию $y = P(x)$, где $x \in R$. Известно, что график многочлена – это одна непрерывная линия. Найдём нули функции $y = P(x)$, т.е. корни уравнения $P(x) = 0$. Получим $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$.

Следовательно, график функции $y = P(x)$ пересекает ось абсцисс в точках –2, 1, 4. Отметим эти точки на оси Ox (рис. 4.7).

Они делят ось Ox на четыре интервала: $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(1; 4)$, $(4; +\infty)$. В каждом интервале функция имеет постоянный знак: «+» или «–». При пересечении графика $y = P(x)$ с осью абсцисс функция изменяет свой знак с плюса на минус или с минуса на плюс. Поэтому знаки функции в интервалах между корнями чередуются.

Определим знак функции $y = P(x)$, например, в интервале $(-2; 1)$. Возьмём любое значение $x \in (-2; 1)$, например, $x = 0$, и определим знак $P(0)$: $P(0) = (0-1)(0+2)(0-4) = (-1)(2)(-4) = 8 > 0$.

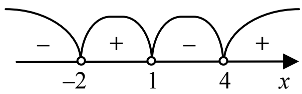


Рис. 4.7

Так как $P(0) > 0$, то в каждой точке $x \in (-2; 1)$ $P(x) > 0$. Значит в интервале $(-2; 1)$ функция имеет знак «+». Получим следующие знаки функции в интервале между корнями: –, +, –, + (рис. 4.7).

Решениями данного неравенства $P(x) > 0$ является такие значения x, при которых функция положительна, т.е. имеет знак «+». Это интервалы $(-2; 1)$ и $(4; +\infty)$. Объединение этих интервалов является множеством решений данного неравенства.

Ответ: $(-2; 1)\cup(4; +\infty)$.

2. Решим неравенство $(x-2)(x+3)^2(x-5) > 0$.

Решение. Найдём нули функции $y = (x-2)(x+3)^2(x-5)$. Получим $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$. Отметим числа –3, 2 и 5 на оси Ox, получим четыре интервала (рис. 4.8).

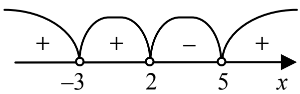


Рис. 4.8

Найдём знак функции y при $x = -4$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 6$:

$$y(-4) = (-4-2)(-4+3)^2(-4-5) > 0,$$

$$y(0) = (0-2)(0+3)^2(0-5) > 0,$$

$$y(3) = (3-2)(3+3)^2(3-5) < 0, \quad y(6) = (6-2)(6+3)^2(6-5) > 0.$$

Получили следующие знаки функции в интервалах между корнями: +, +, –, + (рис. 4.8). Найдём значения x, при которых $y > 0$, т.е. имеет знак «+». Это интервалы $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$ и $(5; +\infty)$. Интервалы $(-\infty; -3)$ и $(-3; 2)$ в один интервал объединить нельзя, так как при $x = -3$ $y = 0$.

Ответ: $(-\infty; -3)\cup(-3; 2)\cup(5; +\infty)$.

3. Решим неравенство $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x+1} < 0$.

Решение. Найдём область допустимых значений неравенства ОДЗ $= R \setminus \{-1\}$. Умножим обе части неравенства на $(x+1)^2$, получим равносильное неравенство $(x-2)(x+3)(x+1) < 0$.

Решим новое неравенство методом интервалов. Найдём нули функции в левой части неравенства, получим числа: 2, –3, –1. Отметим эти числа на оси Ox, получим четыре интервала (рис. 4.9).

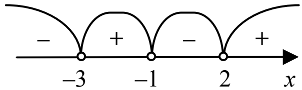


Рис. 4.9

Определим знак функции в точке $x = 0$:

$$(0-2)(0+3)(0+1) = (-2)(3)(1) = -6 < 0\ (-).$$

Так как $0 \in (-1;\ 2)$, то в этом интервале функция имеет знак «–». Получим следующие знаки в интервалах: –, +, –, +. Решениями являются точки интервалов, в которых функция имеет знак минус «–».

Ответ: $(-\infty;\ -3) \cup (-1;\ 2)$.

4. Решим неравенство $\dfrac{x}{x+2} + \dfrac{12}{x^2 - x - 6} > -1$.

Решение. Сначала приведём неравенство к виду $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0$. Для этого перенесём свободный член в левую часть неравенства, приведём все слагаемые к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x+2} + \frac{12}{x^2 - x - 6} > -1 \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} + \frac{12}{(x-3)(x+2)} + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-3) + 12 + (x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-3)(x+2)} > 0.$$

ОДЗ: $x \neq -2$, $x \neq 3$.

Числитель дроби $x^2 - 2x + 3$ имеет отрицательный дискриминант $D = -8$. Поэтому $x^2 - 2x + 3 > 0$ при всех $x \in R$. Выражения $(x-3)^2$ и $(x+2)^2$ положительны при всех $x \in$ ОДЗ. Разделим обе части неравенства на $x^2 - 2x + 3$ и умножим на $(x-3)^2(x+2)^2$, получим равносильное неравенство $(x-3)(x+2) > 0$, где $x \neq -2$, $x \neq 3$.

Это квадратное неравенство. Решим его с помощью параболы (рис. 4.10). Нули функции $y = (x-3)(x+2)$ – это числа –2 и 3. Парабола направлена вверх. Функция положительна в интервалах $(-\infty;\ -2)$ и $(3;\ +\infty)$.

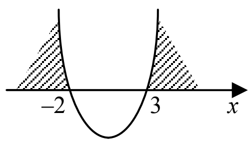


Рис. 4.10

Ответ: $(-\infty;\ -2) \cup (3;\ +\infty)$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое целое рациональное неравенство?
2. Какое неравенство называется дробно-рациональным?
3. Каким методом решают рациональные неравенства? Какова цель этого метода? Приведите примеры.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите целые рациональные неравенства:

а) $(x+2)(x-5)(x-1)<0$; б) $(5-x)(x-3)(2x+6)>0$;

в) $(x^2-1)(x+3)\le 0$; г) $x(x^2-9)(x+1)>0$;

д) $x^2(3x+12)(x-2)<0$; е) $4x^3-x>0$;

ж) $(x+1)^2(x-4)(x+2)<0$; з) $(x-3)(x+1)^2(x-2)^2>0$;

и) $(x^2-5x+6)(x^2+5x+4)\le 0$; к) $(x^2-2x+5)(x^2-x-6)>0$.

2. Решите дробно-рациональные неравенства:

а) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{x-2}>0$; б) $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x-3)}<0$; в) $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-4x+3}\le 0$;

г) $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$; д) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\ge 1$; е) $\dfrac{x-3}{x-2}>\dfrac{x-2}{x-1}$;

ж) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x+3}\ge 0$; з) $\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2}\le 0$.

Тема 4.5. СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ НЕСКОЛЬКИХ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Слова и словосочетания

Систе́ма	Систе́ма нера́венств
Совоку́пность	Совоку́пность нера́венств
Пересече́ние	Пересече́ние мно́жеств реше́ний
Объедине́ние	Объедине́ние мно́жеств реше́ний
Объединя́ть I, объедини́ть II	Объедини́ть нера́венства

Текст для чтения

Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств с одной переменной, то говорят, что надо решить *систему неравенств*.

Неравенства в системе объединяют фигурной скобкой.

Решение системы неравенств – это значение переменной, которое обращает *каждое* неравенство системы в верное числовое неравенство.

Решить систему линейных неравенств – значит найти множество всех её решений. Чтобы решить систему неравенств, следует:

1) найти *множества решений* каждого неравенства системы;

2) найти *пересечение* этих множеств.

Примеры.

1. Решим систему двух линейных неравенств: $\begin{cases} -2x+1>3x-4, \\ x-4<-2x+5. \end{cases}$

Решение. Найдём множества решений каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} -2x+1>3x-4, \\ x-4<-2x+5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x>-5, \\ 3x<9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x<3. \end{cases}$$

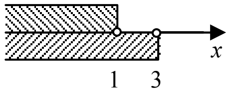


Рис. 4.11

Найдём пересечение двух интервалов (рис. 4.11).

Ответ: (–∞; 1).

2. Решим систему двух линейных неравенств $\begin{cases} 5x-3\le 7x+1, \\ 4x-5\le x-2. \end{cases}$

Решение. Найдём множества решений каждого неравенства системы:

$$\begin{cases} 5x-3\le 7x+1, \\ 4x-5\le x-2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x\le 4, \\ 3x\le 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ x\le 1. \end{cases}$$

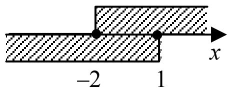


Рис. 4.12

Найдём пересечение двух интервалов (рис. 4.12).

Ответ: [–2; 1].

Если ставится задача найти множество всех таких значений переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств с одной переменной, то говорят, что надо решить *совокупность неравенств*.

Неравенства в совокупности объединены квадратной скобкой.

Решение совокупности неравенств – это значение переменной, которое обращает *любое* неравенство совокупности в верное числовое неравенство.

Решить совокупность линейных неравенств – значит найти множество всех её решений. Чтобы решить совокупность неравенств, следует:

1) найти *множества решений* каждого неравенства совокупности,

2) найти *объединение* этих множеств.

Пример. Решим совокупность двух линейных неравенств

$$\left[\begin{aligned} &3x-7>7x+9, \\ &x-3>-3x+1. \end{aligned}\right.$$

Решение. Найдём множества решений каждого неравенства совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}3x-7>7x+9,\\ x-3>-3x+1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4x>16,\\ 4x>4;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-4,\\ x>1;\end{array}\right. \quad -\infty< x <-4 \text{ или } 1< x <+\infty.$$

Ответ: $(-\infty; -4)\cup(1; +\infty)$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Когда говорят, что надо решить систему неравенств?
2. Что такое решение системы неравенств?
3. Как решить систему неравенств?
4. Когда говорят, что надо решить совокупность неравенств?
5. Что такое решение совокупности неравенств?
6. Как решить совокупность неравенств?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите системы линейных неравенств:

а) $\begin{cases}6x-1>9-4x,\\ 3-2x<x+1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}5x+4>7x-2,\\ -3x+1<x+5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}4-2x<-5x+1,\\ 3x-4\ge 2x-10;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x-8<2x-10,\\ 2-5x\ge 6-6x;\end{cases}$

д) $\begin{cases}\dfrac{8x+1}{3}>\dfrac{4x+9}{2}-\dfrac{x-1}{6},\\ \dfrac{5x-2}{10}>\dfrac{2x+1}{5}-\dfrac{x+2}{2};\end{cases}$ е) $\begin{cases}\dfrac{7-x}{2}-1\dfrac{3}{5}\le\dfrac{3+4x}{5},\\ 2x>\dfrac{x-1}{3}+2.\end{cases}$

2. Решите совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}4x+7>2x+13,\\ 3x+2<2x+3;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}2-3x>8-5x,\\ 2(4-x)\ge x-22;\end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}5-2x>3x-10,\\ 2(1-2x)>1-5x;\end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l}2x-4>5-x,\\ 1-5x\le 8-4x.\end{array}\right.$

3. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0, \\ 2x - 6 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ 5x - 10 < 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 > 0, \\ x^2 - 9 \le 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x^2 - 3x - 2 \ge 0, \\ x^2 - 2x \le 0. \end{cases}$

Тема 4.6. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАК МОДУЛЯ

Слова и словосочетания

Равноси́льный, -ая, -ое, -ые	Равноси́льные нера́венства
Равноси́льно	Нера́венство равноси́льно систе́ме нера́венств
	Нера́венство равноси́льно совоку́пности нера́венств

Текст для чтения

При решении неравенств, которые содержат модуль, используется определение абсолютной величины и её свойства (прил. 5).

Если $a > 0$, то

$\lvert f(x) \rvert < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$	$\lvert f(x) \rvert > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < -a, \\ f(x) > a. \end{array} \right.$

Если $a < 0$, то

$\lvert f(x) \rvert < a \Rightarrow \varnothing$.	$\lvert f(x) \rvert > a \Rightarrow x \in R$.

Примеры.

1. Решим неравенство $| x | < 2$.

Решение. Модуль числа x меньше, чем 2, если число x больше, чем –2, но меньше, чем 2. Поэтому данное неравенство равносильно двойному неравенству или системе двух неравенств:

$$-2 < x < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x < 2. \end{cases}$$

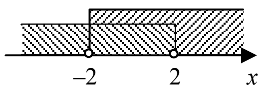


Рис. 4.13

Множество решений системы изображено на рис. 4.13.

Ответ: (– 2; 2).

2. Решим неравенство $| x – 2 | < 5$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству или системе:

$$-5 < x - 2 < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > -5, \\ x-2 < 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3, \\ x < 7; \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-3; 7).$$

Ответ: (– 3; 7).

3. Решим неравенство $|x| > 2$.

Решение. Модуль числа x больше, чем 2, если число x меньше, чем –2, или больше, чем 2. Поэтому данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty).$$

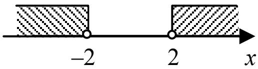


Рис. 4.14

Множество решений совокупности двух неравенств – это объединение множеств решений этих неравенств (рис. 4.14).

Ответ: $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$.

4. Решим неравенство $|5x - 7| > 8$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 5x-7 > 8, \\ 5x-7 < -8; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < -0{,}2; \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -0{,}2) \cup (3; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -0{,}2)\cup(3; +\infty)$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое абсолютная величина числа?
2. Каковы свойства абсолютной величины числа?
3. Как раскрывают модуль в неравенствах?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите неравенства с модулем:

а) $|x| < 1$; б) $|x| > 3$; в) $|x + 1| < 2$;
г) $|x - 3| > 5$; д) $|2x - 3| < 5$; е) $|3x - 2| < 7$;
ж) $|5 - 2x| > 1$; з) $|1 - 3x| \le 2$; и) $|x - 3| > -1$;
к) $|2x + 1| < -5$; л) $-|x + 2| > 3$; м) $-|4 - 2x| < -6$.

2. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} |x-2| < 5, \\ x^2 - 4 > 0; \end{cases}$; б) $\begin{cases} |x-1| > 2, \\ 3x^2 - 2x - 1 < 0. \end{cases}$

Тема 4.7. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Слова и словосочетания

Ко́рень (сущ., м.р.)	Ко́рень чётной сте́пени Ко́рень нечётной сте́пени

Текст для чтения

При решении иррациональных неравенств необходимо помнить, что корни нечётной степени рассматриваются при всех действительных значениях подкоренных выражений, а корни чётной степени – только при неотрицательных действительных значениях (арифметические корни), т.е. из $\sqrt[2n]{x} = a$ следует $x \ge 0$, $a \ge 0$.

Решение иррационального неравенства с одной переменной сводится к решению равносильной ему системы рациональных неравенств или совокупности систем иррациональных неравенств.

Простейшие иррациональные неравенства имеют вид

$$\sqrt[n]{f(x)} > a\,,\ \sqrt[n]{f(x)} < a\,,\ \sqrt[n]{f(x)} > g(x),\ \sqrt[n]{f(x)} < g(x),$$

$$\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[m]{g(x)},\ \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[m]{g(x)}\,.$$

При решении неравенства вида $\sqrt[2k]{f(x)} > a$ возможны два случая:

1) если $a \ge 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству вида $f(x) > a^{2k}$;

2) если $a < 0$, то решением исходного неравенства является вся область допустимых значений выражения $f(x)$.

При решении неравенства вида $\sqrt[2k]{f(x)} < a$ возможны два случая:

1) если $a \ge 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству вида $0 < f(x) < a^{2k}$;

2) если $a < 0$, то решением исходного неравенства является пустое множество.

Примеры. Решим неравенства.

1. $\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3\,.$

Решение. Найдём ОДЗ: $x^2 - 4x \ge 0 \Leftrightarrow x(x - 4) \ge 0$. Изобразим решение на числовой оси (рис. 4.15, *а*).

Рассмотрим промежутки, на которых правая часть неравенства принимает отрицательные и положительные значения (рис. 4.15, *б*, *в*):

1) если $x - 3 < 0$, т.е. $x < 3$. Пересечение с ОДЗ даёт ответ 1: $(-\infty, 0]$;

2) если $x - 3 \geq 0$, т.е. $x \geq 3$, то получаем $x^2 - 4x > (x - 3)^2$, т.е. $2x > 9$. Отсюда получаем ответ 2: $(4{,}5; +\infty)$.

Объединяя ответы 1 и 2, получаем окончательный ответ.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (4{,}5; +\infty)$.

2. $\sqrt{x+6} < x-5$.

Решение. Найдём ОДЗ: $x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -6$. Изображаем на числовой оси (рис. 4.16, *а*):

1) если $x - 5 < 0$, т.е. $x < 5$, то исходное неравенство решений не имеет (левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна);

2) если $x - 5 \geq 0$, т.е. $x \geq 5$ (рис. 4.16, *б*), то получаем

$$x + 6 < (x - 5)^2 \Leftrightarrow x + 6 < x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 19 > 0,$$

$$\left(x - \frac{11 - 3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{11 + 3\sqrt{5}}{2}\right) > 0 \text{ (рис. 4.16, } в\text{).}$$

С учётом ОДЗ получаем окончательный ответ.

Ответ: $\left(\dfrac{11 + 3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

3. $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2$.

Решение. Найдём ОДЗ: $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Выполним подстановку. Пусть $\sqrt{2-x} = t > 0$. Тогда

$$\frac{4}{t} - t - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{4 - t^2 - 2t}{t} < 0.$$

Так как $t > 0$, то имеем

$$4 - t^2 - 2t < 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[t - \left(1 - \sqrt{5}\right)\right]\left[t - \left(1 + \sqrt{5}\right)\right] > 0.$$

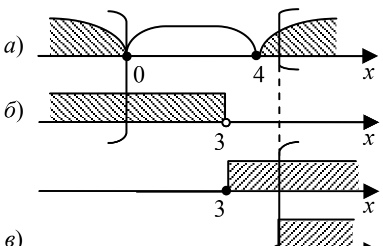


Рис. 4.15

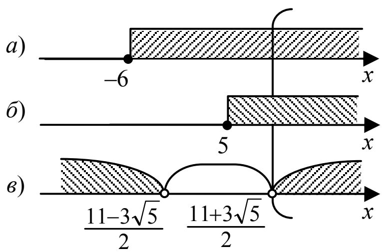


Рис. 4.16

Изобразим решение на числовой оси (рис. 4.17).

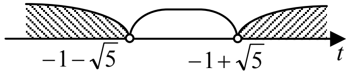


Рис. 4.17

Но $t=\sqrt{2-x}$. Значит, $\sqrt{2-x}<-1-\sqrt{5}$ или $\sqrt{2-x}>-1+\sqrt{5}$. Первое неравенство не имеет смысла (почему?).

Решим второе неравенство. Правая часть положительна, возведём в квадрат обе части неравенства:

$$\left(\sqrt{2-x}\right)^2>\left(-1+\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 2-x>1-2\sqrt{5}+5 \Leftrightarrow x<2\sqrt{5}-4 .$$

С учётом ОДЗ получаем окончательный ответ.

Ответ: $\left(-\infty; 2\sqrt{5}-4\right)$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. При каких значениях подкоренных выражений рассматривают корни нечётной степени?
2. При каких значениях подкоренных выражений рассматривают корни чётной степени?
3. Назовите простейшие иррациональные неравенства.
4. Какие случаи возможны при решении неравенства вида $\sqrt[2k]{f(x)}>a$ и $\sqrt[2k]{f(x)}<a$?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите иррациональные неравенства:

а) $\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+3}<x$;

б) $\sqrt{6-x}\ge\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}$;

в) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$;

г) $\sqrt{3-x}>\sqrt{x-2}$;

д) $\sqrt{x^2-9x+20}\le\sqrt{x-1}\le\sqrt{x^2-13}$.

Раздел 5

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Тема 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Слова и словосочетания

Фу́нкция	Элемента́рная фу́нкция Степенна́я фу́нкция Показа́тельная фу́нкция Логарифми́ческая фу́нкция Тригонометри́ческая фу́нкция Обра́тная тригонометри́ческая фу́нкция Алгебраи́ческая фу́нкция Трансценде́нтная фу́нкция
Функциона́льный, -ая, -ое, -ые	
Зави́симость (сущ., ж.р.)	Зави́симость переме́нной
Зави́симый, -ая, -ое, -ые	Зави́симая переме́нная
Соотве́тствовать I (*что*? *чему*?)	Значе́ние y соотве́тствует значе́нию x
Аргуме́нт	
О́бласть (сущ., ж.р.)	О́бласть определе́ния фу́нкции
Мно́жество	Мно́жество значе́ний фу́нкции
Классифика́ция	Классифика́ция фу́нкций

Текст для чтения

Переменная y называется *функцией* переменной x, если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y. При этом используют запись $y = f(x)$ и говорят «игрек равен эф от икс».

Переменную x называют *независимой переменной* (*аргументом*), а переменную y – *зависимой переменной*. Значение y, которое соответствует заданному значению x, называют *значением функции*.

Областью определения $D(f)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех действительных значений аргумента x, при которых функция может иметь действительное значение.

Пример. Областью определения функции $y = x$ является множество всех действительных чисел R, а для функции $y = \frac{1}{x}$ областью определения является множество R кроме $x = 0$.

Множеством значений $E(f)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех действительных значений функции y, которые она может принимать.

Пример. Множеством значений функции $y = x + 1$ является множество всех действительных чисел, а множеством значений функции $y = x^2 + 1$ является множество всех действительных чисел, бóльших или равных 1.

Графиком функции называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Основные способы задания функции:

1. Формула $y = f(x)$, которая определяет зависимость переменной y от переменной x. Например, $y = x^2 + 1$.
2. Таблица значений функции

x	0	1	2	3	4
y	1	2	5	10	17

3. График функции (рис. 5.1).

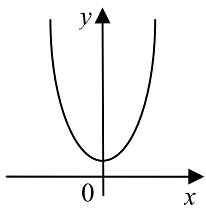


Рис. 5.1

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

1) *степенная функция* $y = x^{\alpha}$, где $\alpha \in R$;

2) *показательная функция* $y = a^x$, где $a \in R^+$, $a \neq 1$;

3) *логарифмическая функция* $y = \log_a x$, где $a \in R^+$, $a \neq 1$;

4) *тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

5) *обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называются функции, полученные из основных элементарных функций с помощью четырёх арифметических действий и формирования сложной функции, которые применены конечное число раз.

Элементарные функции можно разделить на *алгебраические* и *трансцендентные*.

Алгебраическая функция – элементарная функция, которая в каждой точке области определения может быть задана с помощью алгебраического уравнения. Функция называется *алгебраической*, если она является алгебраической в каждой точке области определения.

Например, функция $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ является алгебраической на интервале (–1; 1), так как она удовлетворяет уравнению $F^2 + x^2 = 1$.

Трансцендентная функция – функция, которая не является алгебраической.

Например, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое функция?
2. Какая переменная называется аргументом?
3. Что такое область определения функции?
4. Что такое множество значений функции?
5. Что называют графиком функции?
6. Перечислите основные способы задания функции.
7. Назовите основные элементарные функции.
8. Какие функции называются алгебраическими?
9. Какие функции являются трансцендентными?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Найдите область определения следующих функций:

а) $y = \dfrac{5-x}{3x+1}$;   б) $y = \sqrt{-x^2+x+6}$;

в) $y = \sqrt{\dfrac{x^2+6x-7}{18-7x-x^2}}$;   г) $y = \dfrac{x+5}{x^2+3x-4}$;

д) $y = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{3}{x}$;   е) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{3-6x}}$;

ж) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt[8]{2-x}$;   з) $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$;

и) $y = \sqrt{|x-1| - \big||3-x|-2\big|}$.

Тема 5.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Слова и словосочетания

Чётность (сущ., ж.р.)	Чётность фу́нкции
Чётный, -ая, -ое, -ые	Чётная фу́нкция
Нечётность (сущ., ж.р.)	Нечётность фу́нкции
Нечётный, -ая, -ое, -ые	Нечётная фу́нкция
Симметри́чный, -ая, -ое, -ые	Симметри́чный гра́фик фу́нкции
Симметри́чен	Гра́фик симметри́чен относи́тельно оси *Oy*
Возраста́ние	Возраста́ние фу́нкции
Возраста́ть I	Фу́нкция возраста́ет
Возраста́ющий, -ая, -ее, -ие	Возраста́ющая фу́нкция
Убыва́ние	Убыва́ние фу́нкции
Убыва́ть I	Фу́нкция убыва́ет
Убыва́ющий, -ая, -ее, -ие	Убыва́ющая фу́нкция
Моното́нность (сущ., ж.р.)	Моното́нность фу́нкции Промежу́тки моното́нности
Моното́нный, -ая, -ое, -ые	Моното́нная фу́нкция
Знак	Постоя́нный знак
Знакопостоя́нство	Промежу́тки знакопостоя́нства
Периоди́ческий, -ая, -ое, -ие	Периоди́ческая фу́нкция
Обрати́мый, -ая, -ое, -ые	Обрати́мая фу́нкция
Асимпто́та	Асимпто́та гра́фика фу́нкции Вертика́льная асимпто́та Горизонта́льная асимпто́та Накло́нная асимпто́та

Текст для чтения

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если:

1) область определения функции симметрична относительно начала координат (если $x \in D(f)$, то $-x \in D(f)$);

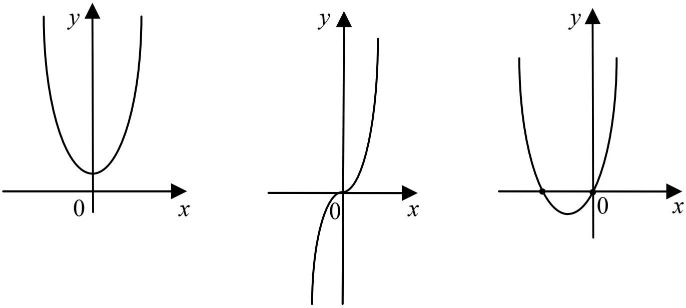
2) для любого значения $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если:

1) область определения функции симметрична относительно начала координат (если $x \in D(f)$, то $-x \in D(f)$);

2) для любого значения $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Если функция не является ни чётной, ни нечётной, то она называется функцией *общего вида*.



а) $y = x^2 + 1$ *б*) $y = x^3$ *в*) $y = (x+1)^2 - 1$

Рис. 5.2

График чётной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 5.2, *а*), график нечётной функции симметричен относительно начала координат (рис. 5.2, *б*). График функции общего вида изображён на рис. 5.2, *в*.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ при $x_1 < x_2$ верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на промежутке (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ при $x_1 < x_2$ верно неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*, а промежутки, на которых функция возрастает или убывает, – *промежутками монотонности*.

Пример. Функция $y = x^2$ при $x > 0$ монотонно возрастает, а при $x < 0$ монотонно убывает.

Значения аргумента $x \in D(f)$, при которых $f(x) = 0$, называются *корнями* (или *нулями*) функции. Значения аргумента, при которых функция обращается в нуль, – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox (рис. 5.2, *в*).

Числовые промежутки, на которых функция не меняет свой знак (т.е. остаётся положительной или отрицательной), называются *промежутками знакопостоянства* функции.

Промежутки знакопостоянства функции можно определить по графику функции. Рассмотрим, например, функцию $y = x^3$ (рис. 5.2, *б*). Здесь $f(x) > 0$ (график расположен выше оси Ox) при $x \in R^+$, $f(x) < 0$ (график расположен ниже оси Ox) при $x \in R^-$.

Функция называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для любых $x \in D(f)$, $x - T \in D(f)$, $x + T \in D(f)$ выполняются равенства $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$. Часто для периодических функций находят *наименьший положительный период*.

Пример. Функция $y = \sin x$ – периодическая функция с периодом $T = 2\pi$, т.е. $\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi)$.

Если функция $y = f(x)$ принимает каждое значение только при одном значении аргумента x, то это *обратимая функция*.

Пример. Функция $y = 3x + 5$ – обратимая, так как каждое значение y принимается только при одном значении x. А функция $y = x^2$ – необратимая, так как, например, значение $y = 4$ функция принимает при $x = 2$ и при $x = -2$.

Пусть функция $y = f(x)$ – это обратимая функция. Решим это уравнение относительно x и получим уравнение $x = \varphi(y)$, в котором y является аргументом, а x – функцией этого аргумента. Поменяем местами буквы x и y, получим $y = \varphi(x)$.

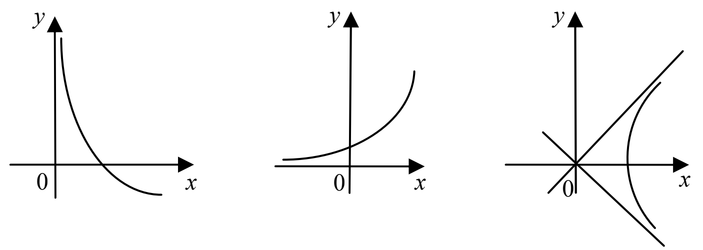
Функция $y = \varphi(x)$ называется *обратной* к функции $y = f(x)$.

Областью определения обратной функции является множество значений исходной функции, а множеством значений обратной функции является область определения исходной функции. Графики исходной и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Графики некоторых функций имеют асимптоты.

Прямая называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменной точки M графика до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю, т.е. точка графика функции при своём стремлении в бесконечность должна неограниченно приближаться к асимптоте.

Асимптоты бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные (рис. 5.3). Асимптоты подробнее рассмотрены в теме 10.5.



а) вертикальная асимптота $x = 0$ *б*) горизонтальная асимптота $y = 0$ *в*) наклонные асимптоты $y = x$, $y = -x$

Рис. 5.3

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какая функция называется чётной?
2. Какая функция называется нечётной?
3. Что такое функция общего вида?
4. Какая функция называется возрастающей?
5. Какая функция называется убывающей?
6. Какая функция называется монотонной?
7. Что такое промежутки монотонности функции?
8. Что такое промежутки знакопостоянства и нули функции?
9. Какая функция называется периодической?
10. Какая функция имеет обратную фукнцию?
11. Что такое асимптота графика функции?
12. Какие существуют асимптоты?

Тема 5.3. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Слова и словосочетания

Степенно́й, -ая, -ое, -ые	Степенна́я фу́нкция
Квадрати́чный, -ая, -ое, -ые	Квадрати́чная фу́нкция
Пара́бола	Куби́ческая пара́бола
Лине́йный, -ая, -ое, -ые	Лине́йная фу́нкция
Биссектри́са	Биссектри́са угла́
Гипе́рбола	

Текст для чтения

Функция вида $y = x^k$, $k \in R$, называется *степенной функцией* с показателем k.

Свойства и графики степенной функции зависят от показателя степени k. Рассмотрим различные варианты.

I. Показатель степени $k = 2n$ – чётное число.

Функция имеет вид $y = x^{2n}$.

1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = [0; +\infty)$.
3. Функция чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$ (график симметричен относительно оси Oy).

4. Функция убывает при $x \in (-\infty; 0]$ и возрастает при $x \in [0; +\infty)$.

5. На рисунке 5.4 приведены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$.

Замечание. Функция $y = x^2$ называется *квадратичной*, а её график – *параболой*.

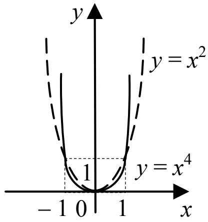


Рис. 5.4

II. Показатель степени $k = 2n - 1$ – нечётное число.

Функция имеет вид $y = x^{2n-1}$.

1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = R$.
3. Функция нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$ (график симметричен относительно начала координат O).
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. На рисунке 5.5 приведены графики функций $y = x$ и $y = x^3$.

Замечание. График функции $y = x^3$ называется *кубической параболой*. При $n = 1$ получаем *линейную функцию* $y = x$. Её график – прямая, которая является биссектрисой первого и третьего координатных углов. Функцию $y = ax$ $(a \in R)$ называют *прямой пропорциональностью*.

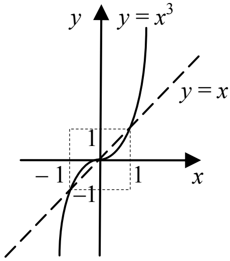


Рис. 5.5

III. Показатель степени $k = -2n$, где $n \in N$.

Функция имеет вид $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$.

1. $D(f) = R \setminus \{0\}$ (все действительные числа, кроме числа 0).
2. $E(f) = R^+$.
3. Функция чётная (график симметричен относительно оси Oy), так как $\dfrac{1}{(-x)^{2n}} = \dfrac{1}{x^{2n}}$.
4. Функция возрастает при $x \in (-\infty; 0)$ и убывает при $x \in (0;+\infty)$.
5. Функция имеет две асимптоты: вертикальную $x = 0$ и горизонтальную $y = 0$.
6. На рисунке 5.6 приведены графики функций $y = \dfrac{1}{x^2}$ и $y = \dfrac{1}{x^4}$.

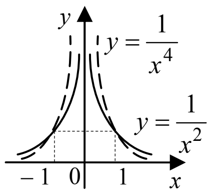


Рис. 5.6

IV. Показатель степени $k = -(2n - 1)$, где $n \in N$.

Функция имеет вид $y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}$.

1. $D(f) = R \setminus \{0\}$ (все действительные числа, кроме числа 0).
2. $E(f) = R \setminus \{0\}$.
3. Функция нечётная (график симметричен относительно начала координат O), так как $\dfrac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\dfrac{1}{x^{2n-1}}$.
4. Функция убывает на всей области определения.

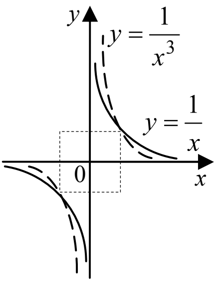


Рис. 5.7

5. Функция имеет две асимптоты: вертикальную $x = 0$ и горизонтальную $y = 0$.
6. На рисунке 5.7 приведены графики функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \dfrac{1}{x^3}$.

Замечание. График функции $y = \dfrac{1}{x}$ называется *гиперболой*. Функция $y = \dfrac{a}{x}$ носит название *обратная пропорциональность*.

V. Показатель степени k – положительное действительное нецелое число.

Функция имеет вид $y = x^k$.

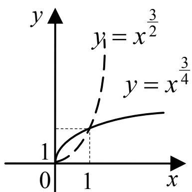


Рис. 5.8

1. $D(f) = [0;+\infty)$.
2. $E(f) = [0;+\infty)$.
3. Функция не является чётной или нечётной.
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. На рисунке 5.8 приведены графики функций $y = x^{\frac{3}{2}}$ и $y = x^{\frac{3}{4}}$.

VI. Показатель степени k – отрицательное действительное нецелое число.

Функция имеет вид $y = x^k$.

1. $D(f) = (0;+\infty)$.
2. $E(f) = (0;+\infty)$.
3. Функция не является чётной или нечётной.

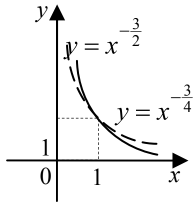


Рис. 5.9

4. Функция убывает на всей области определения.

5. На рисунке 5.9 приведены графики функций $y = x^{-\frac{3}{2}}$ и $y = x^{-\frac{3}{4}}$.

Замечание. Степенную функцию с нецелым показателем можно рассматривать более подробно, выделяя следующие ситуации: показатель степени (несократимая дробь) – правильная или неправильная, положительная или отрицательная, числитель и знаменатель – чётные и/или нечётные числа. В этом случае есть возможность для каждой ситуации описать свойства более подробно.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какая функция называется степенной?
2. Какая функция называется линейной?
3. Какая функция называется квадратичной?
4. Какая функция называется прямой пропорциональностью?
5. Какая функция называется обратной пропорциональностью?
6. График какой функции называется параболой?
7. График какой функции называется кубической параболой?
8. График какой функции называется гиперболой?
9. Опишите свойства степенной функции $y = x^n$ для разных значений показателя степени.

Тема 5.4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

Слова и словосочетания

Показа́тель (сущ., м.р.)	Показа́тель сте́пени
Показа́тельный, -ая, -ое, -ые	Показа́тельная фу́нкция
Логари́фм	Логари́фм числа́
	Основа́ние логари́фма
	Логари́фм по основа́нию *a*
Логарифми́ческий, -ая, -ое, -ие	Логарифми́ческая фу́нкция

Текст для чтения

Пусть a – это действительное положительное число, которое не равно одному, а x – это любое действительное число. Тогда выражение a^x – это *степень с действительным показателем*, для которой выполняются все свойства степени с целым и рациональным показателями (прил. 1 и 3).

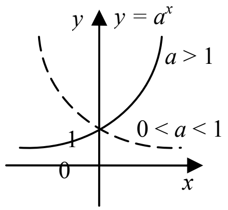


Рис. 5.10

Функция, которая задана формулой $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, – это *показательная функция*.

Основные свойства функции $y = a^x$ приведены в табл. 5.1, а графики – на рис. 5.10.

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Логарифм числа b по основанию a – это показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

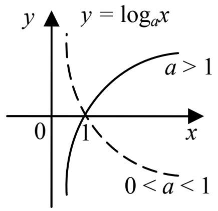


Рис. 5.11

Выражение $\log_a b$ читают так: логарифм числа b по основанию a.

Функция, которая задана формулой $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, – это *логарифмическая функция*.

Основные свойства функции $y = \log_a x$ приведены в табл. 5.2, а графики – на рис. 5.11.

5.1. Основные свойства функции $y = a^x$

	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	$D(f) = \boldsymbol{R}$	
2	$E(f) = \boldsymbol{R}^+$	
3	Функция возрастает	Функция убывает
4	Функция всегда принимает положительные значения	
5	Если $x = 0$, то $a^x = 1$	Если $x = 0$, то $a^x = 1$
6	Если $x > 0$, то $a^x > 1$	Если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$
7	Если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$	Если $x < 0$, то $a^x > 1$
8	График функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$	

5.2. Основные свойства функции $y = \log_a x$

	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	$D(f) = R^+$	
2	$E(f) = R$	
3	Функция возрастает	Функция убывает
4	Если $x = 1$, то $\log_a x = 0$	Если $x = 1$, то $\log_a x = 0$
5	Если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$	Если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$
6	Если $x > 1$, то $\log_a x > 0$	Если $x > 1$, то $\log_a x < 0$
7	График функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$	

Логарифмическая функция и показательная функция – обратные функции.

По таблицам 5.1 и 5.2 можно сравнить свойства обратных функций: область определения и множество значений меняются местами, характер монотонности не изменяется.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое степень с действительным показателем?
2. Какая функция называется показательной?
3. Опишите свойства показательной функции для разных значений основания степени.
4. Что такое логарифм числа b по основанию a?
5. Какая функция называется логарифмической?
6. Опишите свойства логарифмической функции для разных значений основания логарифма.

Тема 5.5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

Слова и словосочетания

Окру́жность (сущ., ж.р.)

Ра́диус — Ра́диус окру́жности

Це́нтр — Це́нтр окру́жности

Си́нус — Си́нус угла́ α

Ко́синус	Ко́синус угла́ α
Та́нгенс	Та́нгенс угла́ α
	Ось та́нгенсов
Кота́нгенс	Кота́нгенс угла́ α
	Ось кота́нгенсов
Се́канс	Се́канс угла́ α
Косе́канс	Косе́канс угла́ α

Текст для чтения

Все тригонометрические функции (синус, косинус, тангенс и котангенс) относятся к основным элементарным функциям.

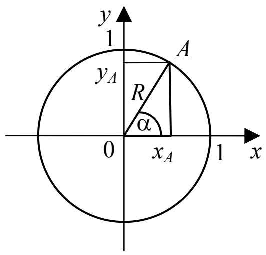


Рис. 5.12

Прежде чем говорить об этих функциях, рассмотрим на координатной плоскости окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 1$ (рис. 5.12).

Синусом угла α называется отношение ординаты y к длине радиуса R. Синус угла обозначается $\sin\alpha$ и читается «синус угла альфа».

Косинусом угла α называется отношение абсциссы x к длине радиуса R. Косинус угла α обозначается $\cos\alpha$ и читается «косинус угла альфа».

Тангенсом угла α называется отношение ординаты y к абсциссе x. Тангенс угла α обозначается $\operatorname{tg}\alpha$ и читается «тангенс угла альфа».

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы x к ординате y. Котангенс угла α обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$ и читается «котангенс угла альфа».

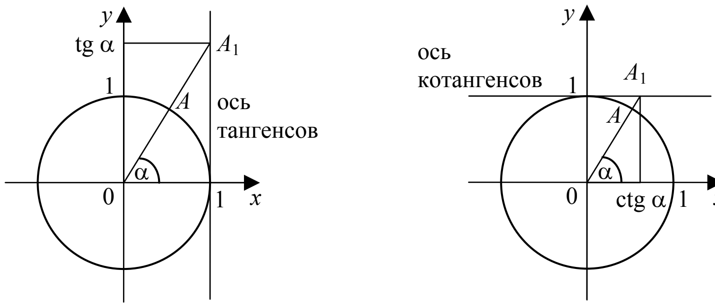
Итак, $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$.

Не трудно видеть, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Секансом угла α называется величина обратная cos α. Секанс угла α обозначается sec α и читается «секанс угла альфа».

Косекансом угла α называется величина обратная $\sin\alpha$. Косеканс угла α обозначается cosec α и читается «косеканс угла альфа».

Итак, $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.



а) *б*)

Рис. 5.13

Рассматрим единичную окружность. Её радиус $R = 1$. Поэтому определения тригонометрических функций запишем в виде

$$\sin\alpha = y,\quad \cos\alpha = x,\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x},\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{x}{y},\quad \sec\alpha = \frac{1}{x},\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{1}{y}.$$

Мы видим, что синус угла α равен ординате конца подвижного единичного радиуса-вектора. Косинус угла α равен абсциссе конца подвижного единичного радиуса-вектора. Для геометрического истолкования тангенса и котангенса вводят понятия оси тангенсов и оси котангенсов (рис. 5.13, *а*, *б*).

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. К каким функциям относятся тригонометрические функции?
2. Что называется синусом угла α? Покажите на единичной окружности.
3. Что называется косинусом угла α? Покажите на единичной окружности.
4. Что называется тангенсом угла α? Покажите на единичной окружности. Используйте линию тангенсов.
5. Что называется котангенсом угла α? Покажите на единичной окружности. Используйте линию котангенсов.
6. Что называется секансом угла α?
7. Что называется косекансом угла α?
8. Запишите определения тригонометрических функций с использованием координат точки?

Тема 5.6. СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Слова и словосочетания

Синусо́ида	Гра́фик фу́нкции си́нус называ́ется синусо́идой
Косинусо́ида	Гра́фик фу́нкции ко́синус называ́ется косинусо́идой
Тангенсо́ида	Гра́фик фу́нкции та́нгенс называ́ется тангенсо́идой

Текст для чтения

Функция синус $y = \sin x$.

1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = [-1;\ 1]$.
3. Функция нечётная, так как $\sin(-x) = -\sin x$.
4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$, т.е. $\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$.
5. Функция обращается в нуль при $x = \pi k$, $k \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства функции: $y > 0$, если $x \in (0 + 2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.
7. Функция убывает, если $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$, возрастает, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.
8. На рисунке 5.14 изображён график функции синус, который называется *синусоидой*.

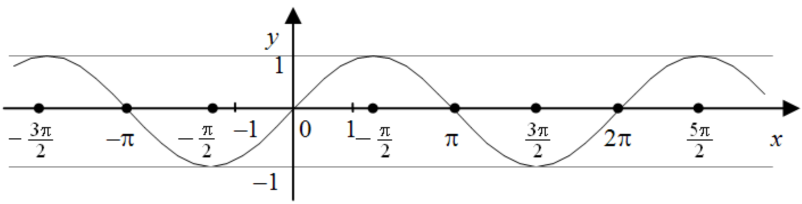


Рис. 5.14

Функция косинус $y = \cos x$.

1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = [-1; 1]$.
3. Функция чётная, так как $\cos(-x) = \cos x$.
4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = 2\pi$, т.е. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x$.
5. Функция обращается в нуль при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства функции $y > 0$, если $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.
7. Функция возрастает, если $x \in [-\pi + 2\pi k; 0 + 2\pi k]$, $k \in Z$, убывает, если $x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.
8. На рисунке 5.15 изображён график функции косинус, который называется *косинусоидой*.

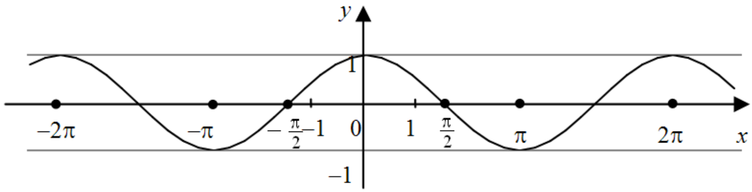


Рис. 5.15

Функция тангенс $y = \mathrm{tg}\, x$.

1. $D(f) = R \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right\}$, $k \in Z$ (все действительные числа, кроме чисел вида $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$).
2. $E(f) = R$.
3. Функция нечётная, так как $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$.
4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = \pi$, т.е. $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}(x - \pi) = \mathrm{tg}\, x$.
5. Функция обращается в нуль при $x = \pi k$, $k \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства функции $y > 0$, если $x \in \left(0 + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; 0 + \pi k\right)$, $k \in Z$.

7. Функция возрастает, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$.

8. На рисунке 5.16 изображён график функции тангенс, который называется *тангенсоидой*.

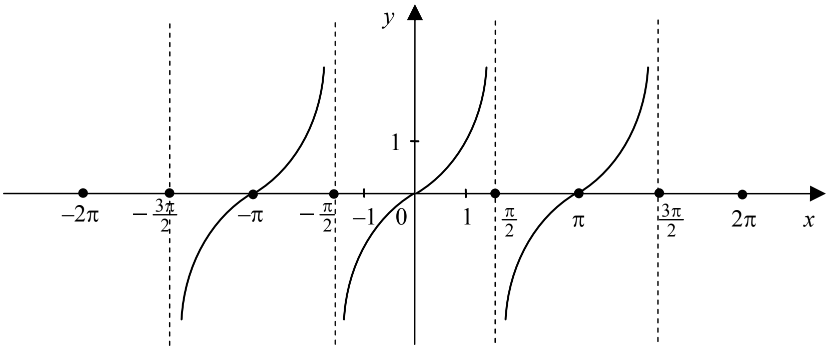


Рис. 5.16

Функция котангенс $y = \mathrm{ctg}\, x$.

1. $D(f) = R\backslash\{\pi k\}$, $k \in Z$ (все действительные числа, кроме чисел вида $x = \pi k$, $k \in Z$).
2. $E(f) = R$.
3. Функция нечётная, так как $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$.
4. Функция периодическая, наименьший положительный период $T = \pi$, т.е. $\mathrm{ctg}(x+\pi) = \mathrm{ctg}(x-\pi) = \mathrm{ctg}\, x$.
5. Функция обращается в нуль при $x = \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства функции $y > 0$, если $x \in \left(0+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; 0+\pi k\right)$, $k \in Z$.
7. Функция убывает, если $x \in (0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.
8. На рисунке 5.17 изображён график функции котангенс.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

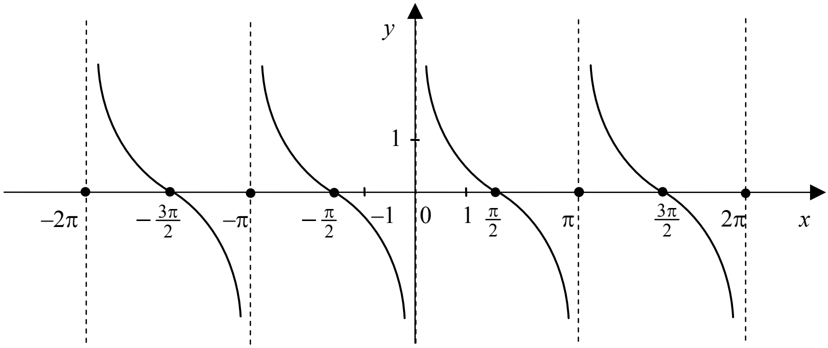


Рис. 5.17

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какими свойствами обладает функция $y = \sin x$? Как называется её график? Постройте график функции синус.
2. Какими свойствами обладает функция $y = \cos x$? Как называется её график? Постройте график функции косинус.
3. Какими свойствами обладает функция $y = \operatorname{tg} x$? Как называется её график? Постройте график функции тангенс.
4. Какими свойствами обладает функция $y = \operatorname{ctg} x$? Постройте график функции котангенс.

Тема 5.7. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Слова и словосочетания

Аркси́нус	Аркси́нус *а*
Аркко́синус	Аркко́синус трёх
Аркта́нгенс	Аркта́нгенс одного́
Арккота́нгенс	Арккота́нгенс двух
Аркфу́нкция	Аркфу́нкция – это обра́тная тригонометри́ческая фу́кнция

Текст для чтения

Обратные тригонометрические функции (арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс) являются основным элементарным функциями. Часто из-за приставки «арк» обратные тригонометрические функции называют *аркфункциями*.

Для того чтобы найти обратную функцию для периодической тригонометрической функции, необходимо выбрать отрезок области определения функции, на котором она монотонно возрастает или монотонно убывает и принимает все значения из множества значений функции. То есть необходимо выбрать отрезок области определения, на котором функция будет обратимой.

Функция арксинус $y = \arcsin x$.

Арксинус – это функция, обратная для функции $y = \sin x$.

Выберем отрезок оси Ox вида $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$. На этом отрезке функция $y = \sin x$ монотонно возрастает от –1 до +1. Следовательно, для любого y_0 из отрезка $[-1; +1]$ оси Oy существует единственное значение x_0 из отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ оси Ox такое, что $y_0 = \sin x_0$.

То есть для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ существует однозначная обратная функция. Эту функцию принято называть *арксинусом* и обозначать $y = \arcsin x$.

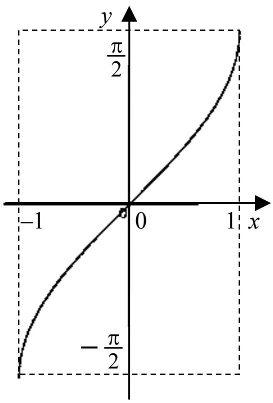


Рис. 5.18

Свойства функции $y = \arcsin x$:

1. $D(f) = [-1; +1]$.
2. $E(f) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция нечётная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4. График функции проходит через начало координат O.
5. Промежутки знакопостоянства функции: $\arcsin x \geq 0$ при $0 \leq x \leq 1$; $\arcsin x < 0$ при $-1 \leq x < 0$.
6. Функция монотонно возрастает на всей области определения.
7. График функции приведён на рис. 5.18.

Функция арккосинус $y = \arccos x$.

Арккосинус – это функция, обратная для функции $y = \cos x$.

Выберем отрезок $[0; \pi]$. На этом отрезке функция $y = \cos x$ монотонно убывает от +1 до –1. Следовательно, для любого $y_0 \in [-1; 1]$ оси Oy существует только одно значение $x_0 \in [0; \pi]$, такое, что $y_0 = \cos x_0$.

Другими словами, на отрезке $[0; \pi]$ для функции $y = \cos x$ существует однозначная обратная функция. Эту функцию называют *арккосинусом* и обозначают $y = \arccos x$.

Свойства функции $y = \arccos x$:

1. $D(f) = [-1; +1]$.
2. $E(f) = [0; \pi]$.
3. Функция $y = \arccos x$ ни чётная, ни нечётная. Для неё выполняется тождество $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
4. График функции $y = \arccos x$ пересекает ось Ox в точке $(1; 0)$, а ось Oy в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
5. Функция принимает неотрицательные значения на всей области определения.
6. Функция монотонно убывает на всей области определения.
7. График функции приведён на рис. 5.19.

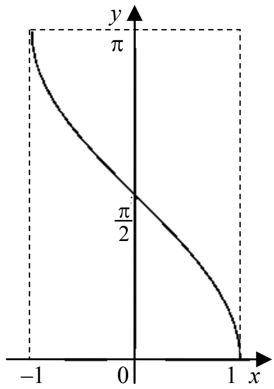


Рис. 5.19

Функция арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$.

Выберем интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, для любого y_0, лежащего на оси Oy существует единственное значение x_0 из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что $y_0 = \operatorname{tg} x_0$. Другими словами, для функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ существует однозначная обратная функция. Эту функцию называют *арктангенсом* и обозначают $y = \operatorname{arctg} x$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен с графиком функции $y = \operatorname{tg} x$ относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов (рис. 5.20).

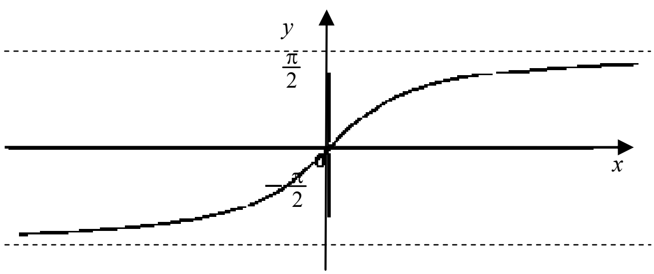


Рис. 5.20

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. График функции проходит через начало координат.
5. Промежутки знакопостоянства: $\operatorname{arctg} x < 0$ при $-\infty < x < 0$, $\operatorname{arctg} x > 0$ при $0 < x < +\infty$.
6. Функция монотонно возрастающая.
7. Функция имеет две горизонтальные асимптоты $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.
8. График функции приведён на рис. 5.20.

Функция арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$.

Выберем интервал $(0; \pi)$. На этом интервале функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Следовательно, для каждого y_0, лежащего на оси Oy, существует единственное значение $x_0 \in (0; \pi)$, такое, что $y_0 = \operatorname{ctg} x_0$. Другими словами, на интервале $(0; \pi)$ существует однозначная функция обратная к функции $y = \operatorname{ctg} x$. Эту функцию называют *арккотангенсом* и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ обладает следующими свойствами:

1. $D(f) = R$.
2. $E(f) = (0; \pi)$.
3. Функция ни чётная, ни нечётная. Для неё выполняется тождество $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
4. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ пересекает ось Oy в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
5. Функция принимает положительные значения на всей области определения.
6. Функция монотонно убывает на всей области определения.
7. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ имеет две горизонтальные асимптоты $y = 0$ и $y = \pi$.
8. График функции приведён на рис. 5.21.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

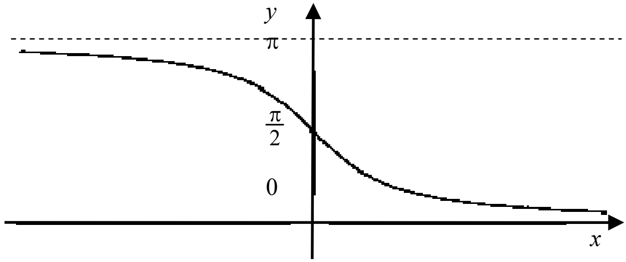


Рис. 5.21

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какими свойствами обладает функция $y = \arcsin x$? Постройте график функции арксинус.
2. Какими свойствами обладает функция $y = \arccos x$? Постройте график функции арккосинус.
3. Какими свойствами обладает функция $y = \operatorname{arctg} x$? Постройте график функции арктангенс.
4. Какими свойствами обладает функция $y = \operatorname{arcctg} x$? Постройте график функции арккотангенс.

Тема 5.8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Слова и словосочетания

Преобразова́ние	Преобразова́ние пло́скости
	Преобразова́ние гра́фика фу́нкции
Перено́с	Паралле́льный перено́с
Симме́три́я	Осева́я симме́три́я
	Центра́льная симме́три́я
Сжима́ть I, сжать I	
Сжа́тие	Сжа́тие гра́фика вдоль оси́ *Oy*
	Сжа́тие гра́фика к оси́ *Oy*
Растя́гивать I, растяну́ть I	
Растяже́ние	Растяже́ние гра́фика вдоль оси́ *Oy*
	Растяже́ния гра́фика от оси́ *Oy*
Отобража́ть I, отобрази́ть II	Отобрази́ть относи́тельно оси́ *Ox*
Отображе́ние	Симметри́чное отображе́ние

Текст для чтения

Если известен график функции $y = f(x)$, то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии и т.п.) можно построить графики более сложных функций.

1. График функции $y = f(bx)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ в b раз к оси Oy при $b > 1$ и растяжением в $\frac{1}{b}$ раз от оси Oy при $0 < b < 1$ (рис. 5.22).

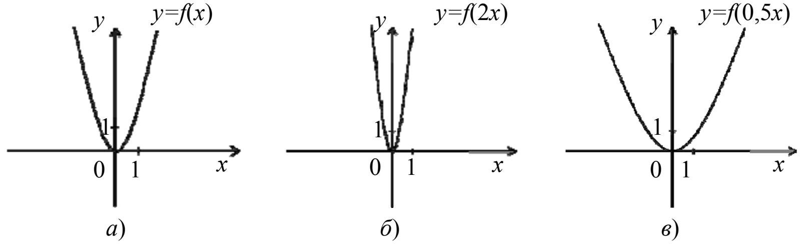


Рис. 5.22

2. График функции $y = f(x + c)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на c при $c > 0$ и в положительном направлении на $|c|$ при $c < 0$ (рис. 5.23).

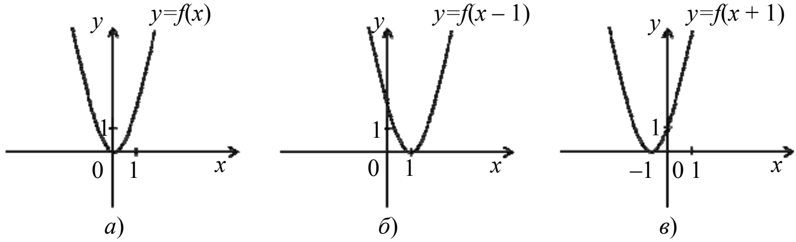


Рис. 5.23

3. График функции $y = af(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в a раз при $a > 1$ и сжатием вдоль оси Oy в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$ (рис. 5.24).

4. График функции $y = f(x) + k$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ в положительном направлении оси Oy на k при $k > 0$ и в отрицательном направлении на $|k|$ при $k < 0$ (рис. 5.25).

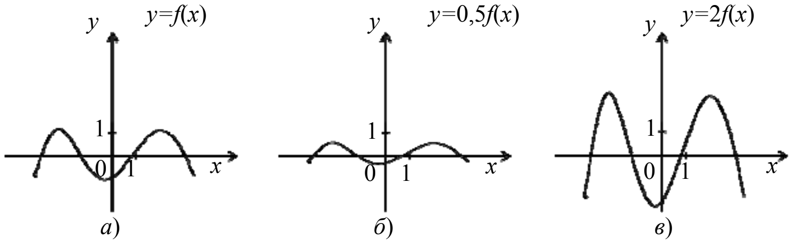


Рис. 5.24

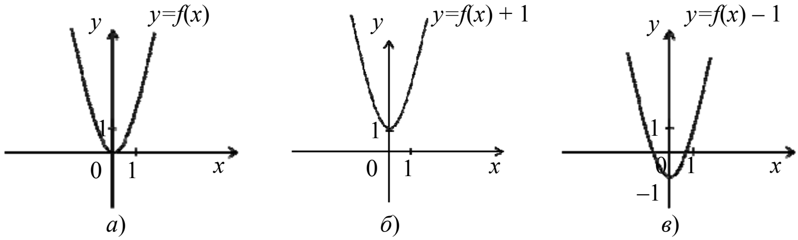


Рис. 5.25

5. График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy (рис. 5.26, *а*, *б*).

6. График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox (рис. 5.26, *а*, *в*).

7. График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика функции $y = f(x)$, которая лежит над осью Ox, сохраняется, а часть графика, которая лежит под осью Ox, отображается симметрично относительно оси Ox (рис. 5.27, *а*, *б*).

8. График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: при $x \geq 0$ график функции $y = f(x)$ сохраняется, а при $x < 0$ полученная часть графика отображается симметрично относительно оси Oy (рис. 5.27, *а*, *в*).

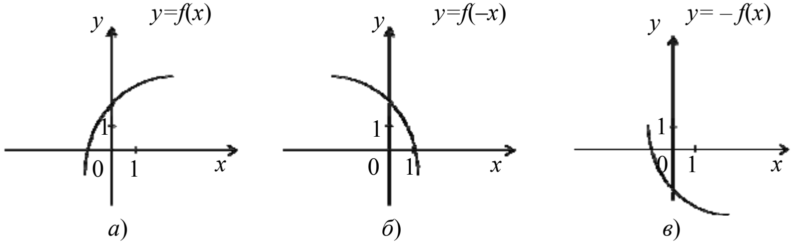


Рис. 5.26

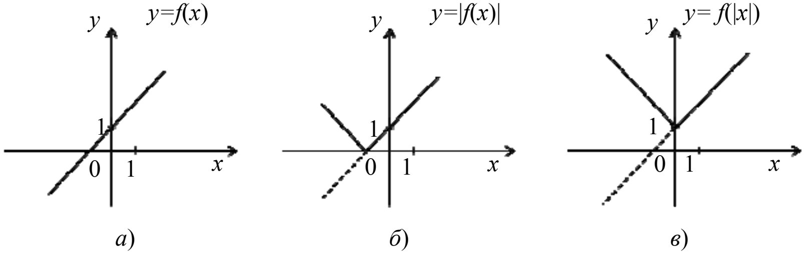


Рис. 5.27

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = f(bx)$ из графика функции $y = f(x)$?
2. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = f(x + c)$ из графика функции $y = f(x)$?
3. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = a\,f(x)$ из графика функции $y = f(x)$?
4. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = f(x) + k$ из графика функции $y = f(x)$?
5. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = f(-x)$ из графика функции $y = f(x)$?
6. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = -f(x)$ из графика функции $y = f(x)$?
7. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$?
8. Расскажите и покажите, как получить график функции $y = f(|x|)$ из графика функции $y = f(x)$?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. С помощью преобразований постройте графики функций:

а) $y = (x-3)^2 - 1$ б) $y = \sqrt{|x| - 1}$

в) $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$ г) $y = x^2 + 6x + 8$

д) $y = x - x^2$ е) $y = 3 - 2^x$

ж) $y = \dfrac{x}{2x-1}$ з) $y = |x^2 + x|$.

Раздел 6

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Тема 6.1. ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Слова и словосочетания

После́довательность (сущ., ж.р.)	Числова́я после́довательность Бесконе́чная числова́я после́довательность
Член	Член после́довательности О́бщий член после́довательности
Знакочереду́ющийся, -аяся, -ееся, иеся	Знакочереду́ющаяся после́довательность
Ограни́ченный, -ая, -ое, -ые	Ограни́ченная после́довательность

Текст для чтения

Бесконечная числовая последовательность $(x_n)_{n\in N}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – это функция, которая определена на множестве натуральных чисел.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются *членами* или *элементами* числовой последовательности $(x_n)_{n \in N}$, x_n – это *общий член последовательности* $(x_n)_{n \in N}$. Члены числовой последовательности пронумерованы в порядке возрастания номеров. Если $m > n$, то член x_m следует за членом x_n. При этом число x_m может быть меньше или равно числу x_n.

Примеры.

1. $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ – последовательность натуральных чисел.
2. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2n-1}, \ldots$ – числовая последовательность.

Основные способы задания числовых последовательностей.

1. Перечисление элементов последовательности: 1, 2, 3, 4, …
2. Задание формулы общего члена последовательности: $x_n = \frac{1}{2n-1}$.
3. Описание правила получения любого члена последовательности. Например, каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов.

Если последовательность задана перечислением элементов, то можно найти одну из формул для задания общего члена последовательности. Если последовательность задана формулой общего члена, то можно определить значение любого члена последовательности по его номеру.

Примеры.

1. Написать первые пять членов последовательности, которая задана формулой $x_n = \dfrac{e^{n^2}}{2n+3}\cos\dfrac{\pi n}{2}$.

Решение. Придавая n значения 1, 2, 3, 4, 5, получим первые пять членов последовательности:

$$x_1 = \frac{e^{1^2}}{2\cdot 1+3}\cos\frac{\pi\cdot 1}{2} = 0,\ x_2 = -\frac{e^4}{7},\ x_3 = 0,\ x_4 = \frac{e^{16}}{11},\ x_5 = 0.$$

2. Написать какую-нибудь формулу общего члена последовательности, если известны её первые пять членов: $\dfrac{5}{2}, -\dfrac{8}{4}, \dfrac{11}{8}, -\dfrac{14}{16}, \dfrac{17}{32}, \ldots$

Решение. Заметим, что последовательность знакочередующаяся. Числа 5, 8, 11, 14, 17 отличаются на 3 и их можно найти по формуле $5 + 3(n - 1) = 2 + 3n$. Числа 2, 4, 8, 16, 32 – это степени числа 2, их можно найти по формуле 2^n. Поэтому формулу общего члена данной последовательности можно записать в виде $x_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2+3n}{2^n}$ (можно доказать, что существует бесконечно много возможных формул для x_n).

Свойства последовательностей.

1. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существуют два числа m и M, такие, что для любого $n \in N$ имеет место неравенство $m \le x_n \le M$, т.е. $\exists\ m, M \in R \mid \forall\ n \in N\ m \le x_n \le M$.

Пример. Последовательность (x_n): $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$ ограничена, так как имеет место неравенство $0 < x_n \le 1$.

2. Последовательность (x_n) называется *возрастающей*, если каждый её член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е. $\forall\ n \in N\ x_{n+1} > x_n$.

Пример. Последовательность (x_n): $0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots, \dfrac{n-1}{n}, \ldots$ возрастающая, так как $x_{n+1} - x_n = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > x_n$.

3. Последовательность (x_n) называется *убывающей*, если каждый её член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е. $\forall\ n \in N\ x_{n+1} < x_n$.

Пример. Последовательность (x_n): $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ убывающая, так как $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow x_{n+1} < x_n$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое бесконечная числовая последовательность?
2. Назовите способы задания числовой последовательности.
3. Какая последовательность называется ограниченной? Приведите примеры.
4. Какая последовательность называется возрастающей? Приведите примеры.
5. Какая последовательность называется убывающей? Приведите примеры.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Найдите первые пять членов последовательности, общий член которых имеет вид:

а) $a_n = \frac{2^n + 1}{n!}$; б) $a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2}$; в) $a_n = \frac{6n - 2}{n!}$;

г) $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$; д) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}}{(2n+1)!}$; е) $a_n = (-1)^{n^2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2. Напишите какую-нибудь формулу общего члена последовательностей:

а) $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ б) $\frac{2}{3}; \frac{8}{9}; \frac{26}{27}; \frac{80}{81}; \ldots$

в) $\frac{1}{11}; \frac{2}{21}; \frac{2\cdot 3}{31}; \frac{2\cdot 3\cdot 4}{41}; \ldots$ г) $-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3\sqrt{3}}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{9\sqrt{3}}; \ldots$

д) $\frac{3}{2}; \left(\frac{6}{2\cdot 4}\right)^4; \left(\frac{9}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^9; \left(\frac{12}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^{16}; \ldots$ е) $2; \frac{9}{4}; \frac{28}{9}; \frac{65}{16}; \frac{126}{25}; \ldots$

Тема 6.2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Слова и словосочетания

Прогре́ссия	Арифмети́ческая прогре́ссия
	Член прогре́ссии
	Ра́зность арифмети́ческой прогре́ссии
	Геометри́ческая прогре́ссия
	Знамена́тель геометри́ческой прогре́ссии
Сре́днее (сущ., ср.р.)	Сре́днее арифмети́ческое
	Сре́днее геометри́ческое

Текст для чтения

Арифметическая прогрессия (a_n) – это числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа, которое называется *разностью арифметической прогрессии*.

Число $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_{k+1} - a_k = ... = d$ – это разность арифметической прогрессии.

Пример. 1, 3, 5, 7, … – арифметическая прогрессия, так как разность любых двух соседних членов постоянна и равна двум.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно задать её первый член a_1 и разность d.

При разных значениях разности арифметическая прогрессия ведёт себя по-разному.

Если $d > 0$, то прогрессия возрастает.

Если $d < 0$, то прогрессия убывает.

Если $d = 0$, то прогрессия является *постоянной* последовательностью.

Свойство арифметической прогрессии: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in N$.

Величину a_n в данной формуле называют *средним арифметическим* величин a_{n-1} и a_{n+1}.

Формулы *n*-го (энного) члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_{n-1} + d,\ n \in N;\ a_n = a_1 + d(n-1),\ n \in N.$$

Формула суммы *n* первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,\ n \in N.$$

Если в последней формуле член последовательности a_n выразить через a_1, то получим следующую формулу суммы:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n, \; n \in N.$$

Геометрическая прогрессия (b_n) – это числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена и одного и того же числа, неравного нулю, которое называется *знаменателем геометрической прогрессии*.

Число $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \ldots = b_{k+1} : b_k = \ldots = q$ – это знаменатель геометрической прогрессии**.**

Пример. 1, 3, 9, 27, … – геометрическая прогрессия, так как частное любых двух соседних членов последовательности – это постоянное число, равное трём.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно задать её первый член b_1 и знаменатель q.

При разных значениях знаменателя геометрическая прогрессия ведёт себя по-разному.

Если $q > 1$, то прогрессия возрастает.

Если $0 < q < 1$, то прогрессия убывает.

Если $q = 1$, то прогрессия является *постоянной* последовательностью.

Если $q < 0$, то прогрессия является *знакочередующейся* последовательностью.

Свойство геометрической прогрессии: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \in N$.

Величину b_n в данной формуле называют *средним геометрическим* величин b_{n-1} и b_{n+1}.

Формулы *n*-го (энного) члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_{n-1} \cdot q, \; n \in N, \; b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \; n \in N.$$

Формула суммы *n* первых членов геометрической прогрессии

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}, \; n \in N, q \neq 1.$$

Если в последней формуле член последовательности b_n выразить через b_1, то получим следующую формулу суммы:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \; n \in N, q \neq 1.$$

Пусть (b_n) – геометрическая прогрессия, у которой знаменатель $|q| < 1$, $b_1 \neq 0$. Тогда сумму всех членов геометрической прогрессии можно найти по формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое арифметическая прогрессия?
2. Что называют разностью арифметической прогрессии?
3. Назовите свойство арифметической прогрессии.
4. Назовите формулы n-го члена арифметической прогрессии.
5. Назовите формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии.
6. Что такое геометрическая прогрессия?
7. Что называют знаменателем геометрической прогрессии?
8. Назовите свойство геометрической прогрессии.
9. Назовите формулы n-го члена геометрической прогрессии.
10. Назовите формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Пусть a_i ($i = 1, 2,\ldots, n$) – это члены арифметической прогрессии, d – разность прогрессии, S_n – сумма n первых членов прогрессии. Найдите:

а) d, n, если $a_1 = 10$, $a_n = 40$, $S_n = 275$;

б) a_1, a_9, если $d = 4$, $n = 9$, $S_9 = 162$;

в) a_1, d, S_{10}, если $a_3 + a_{11} = 44$, $a_2 + a_{11} = 41$;

г) a_1, d, если $a_1 + a_5 - a_3 = 10$, $a_1 + a_6 = 7$;

д) a_1, d, если $5a_1 + 10a_5 = 0$, $S_4 = 14$.

2. Пусть b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) – это члены геометрической прогрессии, q – знаменатель прогрессии, S_n – сумма n первых членов прогрессии. Найдите:

а) q, n, если $b_1 = 2$, $b_6 = 64$;

б) S_8, если $b_2 + b_4 = 10$, $b_3 + b_5 = 20$;

в) b_1, b_n, если $q = 2$, $n = 7$, $S_n = 635$;

г) b_1, S_n, если $b_n = 128$, $q = 2$, $n = 7$;

д) b_1, q, если $b_2 + b_5 - b_4 = 10$, $b_3 + b_6 - b_5 = 20$.

3. Первые члены арифметической и геометрической прогрессии равны 3. Второй член арифметической прогрессии больше второго члена геометрической на 6; третьи члены прогрессий равны. Найдите эти прогрессии, если все члены обеих прогрессий положительны.

4. Сумма первых трёх членов арифметической прогрессии равна 30. Если от первого члена отнять 5, от второго 4, а третий член оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти прогрессии.

5. Три положительных числа дают в сумме 21 и составляют арифметическую прогрессию. Если к ним соответственно прибавить 2, 3 и 9, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

6. Сумма трёх чисел, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию, равна 65. Если от меньшего из чисел отнять 1, а от большего отнять 19, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Раздел 7

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Тема 7.1. ЛОГАРИФМЫ И ИХ СВОЙСТВА. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ И ПОТЕНЦИРОВАНИЕ

Слова и словосочетания

Логари́фм	Логари́фм числа́ a по основа́нию b
	Десяти́чный логари́фм
	Натура́льный логари́фм
Логарифми́рование	Вы́полнить логарифми́рование
Логарифми́ровать, I	Прологарифми́ровать о́бе ча́сти
Прологарифми́ровать I	ра́венства
Потенци́рование	Вы́полнить потенци́рование

Текст для чтения

Пусть заданы положительные действительные числа a и b, причём $a \neq 1$.

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени x, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b, т.е. из равенства $a^x = b$ следует равенство $x = \log_a b$ и наоборот.

Имеет место **основное логарифмическое тождество** $a^{\log_a b} = b$.

Если основание логарифма a – это любое действительное положительное число, неравное числу 1, то выражение $\log_a b$ читается «логарифм числа (выражения) бэ по основанию а».

Если основание логарифма $a = 10$, то выражение $\log_a b$ можно записать короче: $\log_{10} b = \lg b$ и прочитать «десятичный логарифм числа (выражения) бэ».

Если основание логарифма $a = e \approx 2{,}7$ (приближённо равно 2,7), то выражение $\log_a b$ можно записать короче: $\log_e b = \ln b$ и прочитать «натуральный логарифм числа (выражения) бэ».

Для логарифмов выполняются следующие свойства:

1) $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$;
2) $\log_a a = 1$;
3) $\log_a 1 = 0$;
4) $c = \log_a a^c$ – запись числа через логарифм;

5) $c = a^{\log_a c}$;

6) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$;

7) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$ (логарифм произведения равен сумме логарифмов модулей множителей);

8) $\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2} \right) = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$ (логарифм частного равен разности логарифмов модулей делимого и делителя);

9) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a |x|$ (логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм модуля основания);

10) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула перехода к логарифму по основанию c ($c > 0$, $c \neq 1$);

11) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (частный случай формулы перехода);

12) Если основание логарифма и число, которое стоит под знаком логарифма, возвести в одинаковую степень n ($n \neq 0$), то значение логарифма не изменится: $\log_a b = \log_{a^n} b^n$, $n \neq 0$.

Логарифмирование – это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

Пример. Найдите $\lg x$, если $x = \dfrac{3a^2 \sqrt[5]{b^3}}{c^4 (a+b)}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Решение. Выполним логарифмирование и получим

$$\lg x = \lg \frac{3a^2 \sqrt[5]{b^3}}{c^4 (a+b)} = \lg\left(3a^2 \sqrt[5]{b^3}\right) - \lg\left[c^4 (a+b)\right] =$$

$$= \lg 3 + \lg a^2 + \lg \sqrt[5]{b^3} - \lg c^4 - \lg(a+b) =$$

$$= \lg 3 + 2\lg a + \frac{3}{5}\lg b - 4\lg c - \lg(a+b).$$

Для того чтобы выполнить логарифмирование, выражение необходимо записать в виде произведения и/или частного. В этом случае говорят, что выражение надо привести к виду, удобному для логарифмирования.

Потенцирование – это преобразование, обратное логарифмированию: $\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$, ($f_1(x)$, $f_2(x) > 0$).

Пример. Найдите x, если $\lg x = 2\lg a - 5\lg b + \frac{3}{7}\lg c$, $a > 0, b > 0, c > 0.$

Решение. Выполним потенцирование и получим

$$\lg x = 2\lg a - 5\lg b + \frac{3}{7}\lg c = \lg a^2 - \lg b^5 + \lg c^{\frac{3}{7}} =$$

$$= \lg\left(a^2 \cdot c^{\frac{3}{7}}\right) - \lg b^5 = \lg\frac{a^2\sqrt[7]{c^3}}{b^5} \Rightarrow x = \frac{a^2\sqrt[7]{c^3}}{b^5}.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что называют логарифмом числа b по основанию a?
2. Какими могут быть числа a и b?
3. Назовите основное логарифмическое тождество.
4. Как можно записать и прочитать логарифм по основанию 10?
5. Как можно записать и прочитать логарифм по основанию e?
6. Перечислите свойства логарифмов?
7. Что такое логарифмирование?
8. Что значит привести выражение к виду, удобному для логарифмирования?
9. Что такое потенцирование?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Прологарифмируйте выражение по основанию 10 (все переменные положительные):

а) $x = 3ac$; б) $x = \frac{2ck}{a}$; в) $x = \frac{a^2k^5}{c^3}$;

г) $x = 4(a + c)$; д) $x = \frac{a+c}{a-c}$; е) $x = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{ack}$;

ж) $x = \left(\frac{\sqrt[3]{ac}}{\sqrt[4]{3c}}\right)^5$; з) $x = 5a\cdot\sqrt[3]{a^4(a-c)^2}$.

2. Выполните потенцирование и найдите x:

а) $\lg x = 3\lg a + \lg 6$; б) $\lg x = 2\lg a - 3\lg k + 4\lg c$;

в) $\lg x = \lg a - 4\lg c$; г) $\lg x = 2\lg(a + c) - 0{,}5\lg(a - c)$;

д) $\lg x = \frac{2}{3}\lg a + 1{,}5\lg c$; е) $\lg x = \frac{2}{3}(\lg a - \lg c) - \lg(a - c)$.

Тема 7.2. ЗАДАЧИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Слова и словосочетания

Дока́зывать I, доказа́ть I	Доказа́ть то́ждество
Преобразо́вывать I, преобразова́ть I	Преобразова́ть су́мму в произведе́ние
	Преобразова́ть произведе́ние в су́мму

Текст для чтения

Среди задач на преобразование тригонометрических выражений выделяют следующие:

1) доказать тригонометрическое тождество;
2) вычислить значение выражения;
3) упростить выражение, преобразовать сумму в произведение и произведение в сумму.

При решении этих задач используются формулы, связывающие тригонометрические функции между собой, а также формулы приведения, формулы сложения, формулы двойного, тройного, половинного аргумента и другие (прил. 6 – 9). Кроме того, следует помнить свойства степени (прил. 1) и корня (прил. 3), а также формулы сокращённого умножения (прил. 2).

Рассмотрим эти задачи подробнее.

Задача **1. Доказать тригонометрическое тождество.**

При доказательстве тригонометрических тождеств используют следующие приёмы: преобразование обеих частей тождества к одному и тому же выражению, преобразование левой части к правой и правой части к левой, доказательство того, что разность между правой и левой частями тождества равна нулю.

Примеры. Доказать тождества:

1. $$\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{tg}^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\cos^2(-\alpha)}{\mathrm{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=1.$$

Решение. Преобразуем левую часть тождества. Для этого сначала воспользуемся формулами приведения (прил. 8), свойством чётности/нечётности тригонометрических функций и основными тригонометрическими тождествами (прил. 6):

$$\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2(\alpha-2\pi)}+\frac{\cos^2(-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Получили, что левая часть тождества равна правой части: 1 = 1. Таким образом, тождество доказано.

2. $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. Преобразуем левую часть тождества. Для этого воспользуемся формулами двойного угла (прил. 9) и основным тригонометрическим тождеством:

$$\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+2\sin\alpha\cos\alpha}{\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Получили верное равенство: $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha$. Тождество доказано.

3. $2\cos\dfrac{3x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=2\cos^2 x+\cos x-1$.

Решение. В левой части тождества применим формулу преобразования произведения в сумму (прил. 9):

$$2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]=\cos 2x+\cos x.$$

В правой части тождества применим формулу понижения степени (прил. 9):

$$2\cos^2 x+\cos x-1=\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos x=\cos 2x+\cos x.$$

Получили, что левая и правая части равны. Тождество доказано.

***Задача* 2. Вычислить значение выражения.**

При решении задач этого вида надо приводить функции произвольных углов к функциям углов, значения которых заданы в таблице (прил. 7) с помощью основных тригонометрических тождеств и других формул.

Примеры. Вычислите:

1. $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Решение. Выразим $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$ с помощью основного тригонометрического тождества. При этом помним, что в четвёртом координатном углу косинус принимает положительные значения. Остальные функции можно выразить уже через две функции – синус и косинус:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Окончательно получим

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$.

2. $\dfrac{\cos 115^\circ \sin 305^\circ + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{\cos 160^\circ \sin 230^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ}$.

Решение. Так как 115° = 90° + 25°, 305° = 270° + 35°, 160° = 90° + + 70°, 230° = 270° – 40°, то воспользуемся формулами приведения (прил. 8):

$$\frac{\cos 115^\circ \sin 305^\circ + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{\cos 160^\circ \sin 230^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ} =$$
$$= \frac{\cos(90^\circ+25^\circ)\sin(270^\circ+35^\circ) + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{\cos(90^\circ+70^\circ)\sin(270^\circ-40^\circ) - \cos 70^\circ \sin 40^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 25^\circ(-\cos 35^\circ) + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{-\sin 70^\circ(-\cos 40^\circ) - \cos 70^\circ \sin 40^\circ} =$$
$$= \frac{\sin 25^\circ \cos 35^\circ + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ}.$$

Теперь воспользуемся формулами сложения (прил. 9):

$$\frac{\sin 25^\circ \cos 35^\circ + \sin 35^\circ \cos 25^\circ}{\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ} = \frac{\sin(25^\circ+35^\circ)}{\sin(70^\circ-40^\circ)} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

3. $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{6}\right)+\cos\dfrac{17\pi}{3}+\operatorname{tg}\dfrac{22\pi}{3}-\operatorname{ctg}\dfrac{37\pi}{4}$.

Решение. Воспользуемся формулами приведения (прил. 8) и свойствами чётности/нечётности тригонометрических функций:

$$\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)+\cos\frac{17\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{22\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{37\pi}{4}=$$

$$=-\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(6\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(7\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}\left(9\pi+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{3}-1=\sqrt{3}-1.$$

Ответ: $\sqrt{3}-1$.

***Задача* 3. Упростить выражение, преобразовать сумму в произведение и произведение в сумму.**

Примеры.

1. Упростить выражение

$$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha).$$

Решение. Воспользуемся формулами приведения и свойством чётности/нечётности функций синус и косинус:

$$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)-\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)=$$

$$=-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha-\sin\alpha(-\sin\alpha)=$$

$$=-(-\cos\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Ответ: 1.

2. Преобразовать $\sin^4 x$ в сумму первых степеней.

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени:

$$\sin^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)=$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x.$$

Ответ: $\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{8}\cos 4x$.

3. Преобразовать в произведение выражение:

$$\sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2\sin^2\alpha \sin 3\alpha.$$

Решение. Применим к выражению $\sin 2\alpha$ формулу двойного угла, затем вынесем общий множитель за скобки и воспользуемся формулой сложения (прил. 9):

$$\sin 2\alpha \cos 3\alpha - 2\sin^2\alpha \sin 3\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \cos 3\alpha - 2\sin^2\alpha \sin 3\alpha =$$
$$= 2\sin \alpha\,(\cos \alpha \cos 3\alpha - \sin \alpha \sin 3\alpha) = 2\sin \alpha \cos(\alpha + 3\alpha) =$$
$$= 2\sin \alpha \cos 4\alpha.$$

Ответ: $2\sin \alpha \cos 4\alpha$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Перечислите задачи на преобразование тригонометрических выражений.
2. Назовите формулы двойного угла.
3. Назовите формулы понижения степени.
4. Назовите формулы приведения.
5. Назовите основное тригонометрическое тождество.
6. Назовите формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.
7. Назовите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Докажите тригонометрическое тождество:

а) $\sin^3\alpha\,(1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3\alpha\,(1+ \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$;

б) $\dfrac{\sin^2 \alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$;

в) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)} \cdot \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha - \pi)}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - \alpha)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)} = \sin\alpha$;

г) $\cos^4 \dfrac{\alpha}{2} - \sin^4 \dfrac{\alpha}{2} = \cos\alpha$;

д) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

е) $1-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$;

ж) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

з) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

2. Вычислите значение выражения:

а) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\cos\dfrac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}$;

б) $4\sin 810° + 3\cos 720° - 3\sin 630° + 5\cos 900°$;

в) $\sin\left(-\dfrac{47\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{21\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(-\dfrac{23\pi}{4}\right)-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{19\pi}{6}\right)$;

г) $\dfrac{\sin 40°\cos 345°-\cos 40°\sin 15°}{\cos 375°\cos 10°-\sin 15°\sin 10°}$;

д) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}, \dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

е) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}, \cos\beta=-\dfrac{5}{13}, \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi, \pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$.

3. Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$;

г) $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{5\alpha}{2}\right)$;

д) $\sin(\alpha-2\pi)\cos(2\pi-\beta)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$.

Раздел 8
ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Тема 8.1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Слова и словосочетания

Уравне́ние	Показа́тельное уравне́ние
	Просте́йшее уравне́ние
Деле́ние	Почле́нное деле́ние

Текст для чтения

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное входит в показатель степени.

Рассмотрим основные методы решения показательных уравнений.

Простейший метод решения уравнений вида $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) основан на использовании определения логарифма: $x = \log_a b$.

Примеры. Решить простейшие уравнения:

1) $4^x = 5$. Решение. $x = \log_4 5$.
2) $2^x = -3$. Решение. $x \in \varnothing$, так как $b = -3 < 0$.
3) $2^{x-1} = 1024$.

Решение.

а) $x - 1 = \log_2 1024$, т.е. $x = 1 + \log_2 1024$;

б) $\dfrac{2^x}{2} = 1024$, $2^x = 2048$, $x = \log_2 2048$;

в) $2^{x-1} = 2^{10}$, $x - 1 = 10$, $x = 11$.

Метод приведения к одному основанию основан на следующем свойстве степеней: если две степени равны и равны их основания, то равны и их показатели. То есть, уравнения надо привести к виду $a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}$. Отсюда $f_1(x) = f_2(x)$.

Примеры. Решим уравнения приведением к одному основанию:

1. $\sqrt{2} \cdot 0{,}5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} - 16^{\frac{1}{2(\sqrt{x}+1)}} = 0$.

Решение. Все степени в данном уравнении приведём к степеням с основанием 2. Поэтому перепишем уравнение следующим образом:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{-5}{4\sqrt{x}+10}} = 2^{\frac{4}{2(\sqrt{x}+1)}} \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{2}-\frac{5}{2(2\sqrt{x}+5)}} = 2^{\frac{2}{\sqrt{x}+1}}.$$

Отсюда получаем иррациональное уравнение

$$\frac{1}{2}-\frac{5}{2(2\sqrt{x}+5)}=\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

Пусть $\sqrt{x}=t\geq 0$, тогда

$$\frac{1}{2}-\frac{5}{2(2t+5)}=\frac{2}{t+1} \Leftrightarrow \frac{2t+5-5}{2(2t+5)}=\frac{2}{t+1} \Leftrightarrow 2t\,(t+1)=4\,(2t+5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t^2+2t-8t-20=0 \Leftrightarrow t^2-3t-10=0 \Leftrightarrow t_1=5,\ t_2=-2.$$

Второй корень не подходит, так как $t \geq 0$. Итак, $\sqrt{x}=5$, $x = 25$.

Ответ: $x = 25$.

2. $6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8} \Leftrightarrow \frac{2^{2x+4}}{2^{x+8}}=\frac{3^{3x}}{3^{2x+4}} \Leftrightarrow 2^{2x+4-x-8}=3^{3x-2x-4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2^{x-4}=3^{x-4}$ (Уже ясно, что $x = 4$).

Но перепишем уравнение иначе, разделив на $3^{x-4}\neq 0$:

$$\frac{2^{x-4}}{3^{x-4}}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=\left(\frac{2}{3}\right)^{0} \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: $x = 4$.

Метод подстановки. Введение нового неизвестного (подстановка) обычно производится после преобразования членов уравнения.

Пример. Решим уравнение методом подстановки:

$$3\cdot 5^{2x-1}-2\cdot 5^{x-1}=0{,}2.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 5: $3\cdot(5^x)^2-2\cdot 5^x=1$.

Обозначим $5^x = t > 0$, тогда $3t^2-2t-1=0$. Отсюда $t_1 = 1$, $t_2=-\frac{1}{3}$ (не подходит). Итак, $5^x=1=5^0$, $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Метод почленного деления применяют для решения однородных уравнений. Суть метода в почленном делении трёхчленного уравнения, члены которого представляют собой степени с одинаковыми показателями и различными основаниями, на одну из степеней.

Пример. Решим уравнение методом почленного деления

$$6\cdot 4^x-13\cdot 6^x+6\cdot 9^x=0.$$

Решение. Уравнение однородное, имеет вид

$$6\cdot 2^{2x} - 13\cdot 2^{x}\cdot 3^{x} + 6\cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $2^{2x} = 4^{x} \neq 0$, получаем

$$6-13\cdot\frac{6^x}{4^x}+6\cdot\frac{9^x}{4^x}=0 \Leftrightarrow 6-13\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x+6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}=0\,.$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$. Тогда $6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{3}{2}$.

Получаем два уравнения $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}$ и $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$, из которых находим, что $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Метод группировки поясним на примере:

$$3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2} = 6\cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$$

Решение. Преобразуем уравнение и перегруппируем слагаемые

$$3\cdot 4^x + \frac{81}{3}\cdot 9^x = 6\cdot 4^x\cdot 4 - \frac{9}{2}\cdot 9^x\,,$$

$$3\cdot 4^x - 24\cdot 4^x = -\frac{9}{2}\cdot 9^x - 27\cdot 9^x\,,$$

$$4^x(3-24) = \left(-\frac{9}{2}-27\right)\cdot 9^x \Leftrightarrow -21\cdot 4^x = -\frac{63}{2}\cdot 9^x\,.$$

Запишем это равенство в виде пропорции

$$\frac{4^x}{9^x} = \frac{63}{2\cdot 21} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\,0{,}5.$$

Ответ: $x = -\,0{,}5$.

Системы показательных уравнений. Для их решения используют приёмы решения систем алгебраических уравнений и методы решения показательных уравнений.

Примеры.

1. $\begin{cases} 3^{2x} - 2^{y} = 725, \\ 3^{x} - 2^{\frac{y}{2}} = 25. \end{cases}$

Решение. Введём новые неизвестные t и z: $3^x = t > 0$, $2^{y/2} = z > 0$. Получаем

$$\begin{cases} t^2 - z^2 = 725, \\ t - z = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-z)(t+z) = 725, \\ t - z = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + z = 29, \\ t - z = 25. \end{cases}$$

Решив систему уравнений методом сложения, получим $t = 27$, $z = 2$. Возвращаемся к неизвестным x и y:

$$3^x = 27 \Rightarrow x = 3; \qquad 2^{y/2} = 2 \Rightarrow y = 2.$$

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

2. $\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}, \\ 5 \cdot 5^{x-y} = 5^{2y+1}. \end{cases}$

Решение. Уравняем основания в обоих уравнениях

$$\begin{cases} 2^{6x+3} = 2^{5+4y-1}, \\ 5^{1+x-y} = 5^{2y+1}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 3 = 4y + 4, \\ 1 + x - y = 2y + 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y = 1, \\ x - 3y = 0. \end{cases}$$

Решив систему методом подстановки, получим $x = \dfrac{3}{14}$, $y = \dfrac{1}{14}$.

Ответ: $\left(\dfrac{3}{14}; \dfrac{1}{14} \right)$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какое уравнение называется показательным?
2. Как решаются простейшие показательные уравнения?
3. Как решить показательное уравнение методом приведения к одному основанию?

4. Как решить показательное уравнение методом подстановки?
5. Как решить показательное уравнение методом почленного деления?
6. Как решить показательное уравнение методом группировки?
7. Что используют при решении систем показательных уравнений?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите простейшие показательные уравнения:

а) $3^{x-4} = 1$; б) $2^x = 3^{x+1}$;
в) $5^{|x-1|} = 7$; г) $5^{x+1} + 3\cdot5^{x-1} - 6\cdot5^x + 12 = 0$;
д) $3^{2x+1} - 2\cdot9^x + 3^{2x-1} = 5$.

2. Решите показательные уравнения методом приведения к одному основанию:

а) $2^{x^2-6x-2,5} = \sqrt{512}$; б) $3^{2x^2-5x+6} = 18+6+2+\ldots$;
в) $16^x = 4^{|x+1|}$; г) $5^{2x+1} = 2^{3x}\cdot3^{x+2}$;
д) $\dfrac{(0,2)^{x+0,5}}{\sqrt{5}} = 5\cdot0,04^x$.

3. Решите показательные уравнения методом подстановки:

а) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$; б) $33\cdot2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$;
в) $3^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{2x}} = 2$; г) $3^{1-x} + 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 8$.

4. Решите показательные уравнения методом почленного деления:

а) $4^x - 14^x\cdot2 = 3\cdot49^x$; б) $3\cdot9^x + 5\cdot6^x = 2^{2x+1}$;
в) $3\cdot4^x - 7\cdot10^x + 2\cdot25^x = 0$; г) $4\cdot81^{\frac{1}{x}} - 12\cdot36^{\frac{1}{x}} + 9\cdot16^{\frac{1}{x}} = 0$;
д) $25^{2x-x^2+1} + 9^{2x-x^2+1} = 34\cdot15^{2x-x^2}$.

5. Решите показательные уравнения методом группировки:

а) $5^{2x} - 4^{x+1} = 4^x + 5^{2x-1}$; б) $5^{2x} - 7^x - 17\cdot5^{2x} + 7^x\cdot17 = 0$;
в) $7^{3x} + 9\cdot5^{2x} = 5^{2x} + 9\cdot7^{3x}$; г) $6^{x+1} + 3^{x+1} = 3^{x+2} - 6^x + 3^x$;
д) $4^{x+2} - 10\cdot3^x - 2\cdot3^{x+3} + 11\cdot2^{2x} = 0$.

6. Решите системы показательных уравнений:

а) $\begin{cases} 2^x\cdot3^y = 648, \\ 3^x\cdot2^y = 432; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{2x} + 4^{2y} = 28, \\ 3^x - 4^y = 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 9\cdot3^x\cdot2^y = 1, \\ 3^y = 9\cdot3^x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ yx^2 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2^x + 2\cdot3^{x+y} = 56, \\ 3\cdot2^x + 3^{x+y+1} = 87. \end{cases}$

Тема 8.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ СИСТЕМЫ

Слова и словосочетания

Уравне́ние	Логарифми́ческое уравне́ние
Ме́тод	Ме́тод логарифми́рования
	Ме́тод потенци́рования

Текст для чтения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма.

Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений.

По определению логарифма решаются простейшие уравнения вида $\log_a x = b$. В этом случае $x = a^b$.

Примеры.

1. $\log_3 x(x-2) = 1$.

Решение. ОДЗ: $x(x-2) > 0$.

По определению логарифма $x(x-2) = 3$. Отсюда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Проверкой убеждаемся, что оба корня принадлежат ОДЗ и удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

2. $\lg\left(81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}}\right) = 0$.

Решение. По определению логарифма

$$81\sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 10^0 \Leftrightarrow 3^4 \cdot 3^{\frac{x^2-8x}{3}} = 1 \Leftrightarrow 3^{4+\frac{x^2-8x}{3}} = 3^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + \frac{x^2-8x}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \text{ и } x_1 = 2,\ x_2 = 6.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

Метод потенцирования заключается в следующем: с помощью формул уравнение приводится к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Это уравнение (при $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > 0,\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример. Решим методом потенцирования уравнение

$$3\log_5 2 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x}).$$

Решение. ОДЗ: $3^x - 5^{2-x} > 0$.

Используя свойства логарифма, получаем

$\log_5 2^3 + \log_5 5^2 - \log_5 5^x = \log_5 (3^x - 5^{2-x}) \Leftrightarrow \log_5 \frac{8\cdot 25}{5^x} = \log_5\left(3^x - \frac{25}{5^x}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{200}{5^x} = 3^x - \frac{25}{5^x} \Leftrightarrow 200 = 15^x - 25 \Leftrightarrow 15^x = 15^2$, $x = 2 \in$ ОДЗ.

Ответ: $x = 2$.

Метод подстановки. Обычно подстановку (замену) производят после преобразований исходного уравнения.

Пример.

Решим уравнение $\log_x\left(9x^2\right)\log_3^2 x = 4$ методом подстановки.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$.

Используя свойства логарифмов, запишем уравнение так:

$$\left(\log_x 9 + \log_x x^2\right)\log_3^2 x = 4 \Leftrightarrow \left(2\log_x 3 + 2\right)\left(\log_3 x\right)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\log_3 x} + 2\right)\left(\log_3 x\right)^2 = 4 .$$

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $\left(\frac{2}{t} + 2\right)t^2 = 4$, т.е. $t^2 + t - 2 = 0$. Отсюда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Поэтому $\log_3 x = -2$ и $\log_3 x = 1$. Отсюда $x_1 = 3^{-2}$ и $x_2 = 3$. Сделав проверку, можно убедиться, что x_1 и x_2 – корни данного уравнения.

Ответ: $x_1 = \frac{1}{9}, x_2 = 3$.

Метод приведения к одному основанию. Обычно условие задачи подсказывает, к какому основанию перейти. При решении уравнений данным методом используются свойства логарифмов, в частности, формула перехода к новому основанию, и метод подстановки.

Пример. Решим методом приведения к одному основанию уравнение $20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 - 3\log_{\frac{x}{2}} x^2 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq \frac{1}{16}$, $x \neq 2$.

Перейдём к основанию 2 и преобразуем левую часть уравнения:

$$20\frac{\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4x} + 7\frac{\log_2 x^3}{\log_2 16x} - 3\frac{\log_2 x^2}{\log_2 \frac{x}{2}} = 0;$$

$$20\frac{\frac{1}{2}\log_2 x}{\log_2 4+\log_2 x}+7\frac{3\log_2 x}{\log_2 16+\log_2 x}-3\frac{2\log_2 x}{\log_2 x-\log_2 2}=0;$$

$$\frac{10\log_2 x}{2+\log_2 x}+\frac{21\log_2 x}{4+\log_2 x}-\frac{6\log_2 x}{\log_2 x-1}=0.$$

Пусть $\log_2 x=t$. Тогда

$$\frac{10t}{2+t}+\frac{21t}{4+t}-\frac{6t}{t-1}=0 \Leftrightarrow t\left(\frac{10}{2+t}+\frac{21}{4+t}-\frac{6}{t-1}\right)=0.$$

Отсюда $t_1=0$ (т.е. $\log_2 x=0$ или $x_1=1$) и $\frac{10}{2+t}+\frac{21}{4+t}-\frac{6}{t-1}=0$, т.е.

$$10t^2+30t-40+21t^2+21t-42-6t^2-36t-48=0;$$
$$25t^2+15t-130=0 \Leftrightarrow 5t^2+3t-26=0 \Leftrightarrow t_2=2,\ t_3=-2{,}6.$$

Тогда $\log_2 x=2$, $x_2=4$, $\log_2 x=-\frac{13}{5}$, $x_3=2^{-\frac{13}{5}}=\frac{1}{\sqrt[5]{2^{13}}}=\frac{1}{4\sqrt[5]{8}}$.

Все найденные значения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=4$, $x_3=\frac{1}{4\sqrt[5]{8}}$.

Метод логарифмирования. Обычно логарифмируют уравнения вида $f_1(x)^{f_2(x)}=f_3(x)$. Поясним этот метод на примере.

Пример. Решим уравнение $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{5+\lg x}$, $x>0$, $x\neq 1$, методом логарифмирования.

Решение. Логарифмируем по основанию 10:

$$\lg\left(x^{\frac{\lg x+5}{3}}\right)=\lg\left(10^{5+\lg x}\right) \Leftrightarrow \frac{\lg x+5}{3}\lg x=(5+\lg x)\lg 10.$$

Пусть $\lg x=t$. Тогда

$$\frac{t+5}{3}t=5+t \Leftrightarrow t(t+5)-3(t+5)=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (t+5)(t-3)=0 \Leftrightarrow t_1=-5,\ t_2=3.$$

Получаем $\lg x=-5$, $x_1=10^{-5}$ и $\lg x=3$, $x_2=10^3$.

Ответ: $x_1=10^{-5}$, $x_2=1000$.

Системы логарифмических уравнений. При их решении используются приёмы решения систем алгебраических уравнений, основные логарифмические формулы и методы решения логарифмических уравнений.

Пример. Решим систему уравнений $\begin{cases} \log_{\sqrt{x}} xy = 8, \\ \log_3\left(\log_{\frac{1}{9}} \dfrac{x}{y}\right) = 0. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1, y > 0,\ \log_{\frac{1}{9}} \dfrac{x}{y} > 0$.

По определению логарифма имеем

$$\begin{cases} xy = \left(\sqrt{x}\right)^8, \\ \log_{\frac{1}{9}} \dfrac{x}{y} = 3^0 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = x^4, \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{9}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3, \\ y = 9x. \end{cases}$$

Имеем $x^3 = 9x$, т.е. $x^2 = 9$, $x = \pm 3$. Но $x = -3 \notin$ ОДЗ. Поэтому подходит только $x = 3$. Тогда $y = 27$. Найденные значения x и y удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $x = 3$, $y = 27$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какое уравнение называется логарифмическим?
2. Как решить логарифмическое уравнение по определению логарифма?
3. Как решить логарифмическое уравнение методом логарифмирования?
4. Как решить логарифмическое уравнение методом подстановки?
5. Как решить логарифмическое уравнение методом приведения к одному основанию?
6. Как решить логарифмическое уравнение методом потенцирования?
7. Что используют при решении систем логарифмических уравнений?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите логарифмические уравнения, используя определение логарифма:

а) $\log_2 \sqrt{(1-x)^2} = 3$; б) $\log_3 (x^2 + 4x + 12) = 2$;

в) $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$; г) $\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)\lg(7-x)=0$;

д) $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0,2$.

2. Решите логарифмические уравнения методом потенцирования:

а) $\log_2(4^x+4)=x+\log_2(2^{x+1}-3)$; б) $\lg(3x-2)-2=\frac{1}{2}\lg(x+2)-\lg 50$;

в) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$; г) $0,5\lg(2x-1)+\lg\sqrt{x-9}=1$;

д) $\log_3\sqrt{2x^2-x+3}\cdot\log_{\sqrt{5+4x-x^2}}3=1$.

3. Решите логарифмические уравнения методом подстановки:

а) $\lg(10x^2)\lg x=1$; б) $\sqrt{2-\log_x 9}=-\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}$;

в) $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{2}}=2$; г) $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$;

д) $3^{\log_2 x}+x^2=25$.

4. Решите логарифмические уравнения методом приведения к одному основанию:

а) $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$; б) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5,5$;

в) $\sqrt{\log_x\sqrt{5x}}\,\log_5 x=-1$; г) $\log_{3x}\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$;

д) $\log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{81}}3=0$.

5. Решите уравнения методом логарифмирования:

а) $x^{\lg x}=1000x^2$; б) $(x+1)^{\lg(x+1)}=100(x+1)$;

в) $x^{2\lg^3 x-1,5\lg x}=\sqrt{10}$; г) $27x^{\log_{27}x}=x^{\frac{10}{3}}$;

д) $\left(\sqrt{x}\right)^{\log_5 x-1}=5$.

6. Решите системы логарифмических уравнений:

а) $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=2,\\ \log_2 xy=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4^{-y}\log_2 x=4,\\ \log_2 x+2^{-2y}=4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^{\lg y}=2,\\ xy=20;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\ x^2-5y^2+4=0;\end{cases}$ д) $\begin{cases}\log_5 x+3^{\log_3 y}=7,\\ x^y=5^{12}.\end{cases}$

Тема 8.3. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Слова и словосочетания

Уравне́ние Тригонометри́ческое уравне́ние

Текст для чтения

К простейшим уравнениям относятся уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Рассмотрим их.

Решение уравнения $\sin x = a$. Уравнение имеет смысл при $-1 \le a \le 1$. Так как функция $y = \sin x$ имеет период 2π, то достаточно найти решение уравнения $\sin x = a$ на участке длиной 2π.

Возьмём отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Он состоит из двух отрезков $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то решением уравнения $\sin x = a$ по определению арксинуса является $\boldsymbol{x = \arcsin a}$.

Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, то уравнение $\sin x = a$ запишем в виде $\sin(\pi - x) = a$. Это верно, так как $\sin x = \sin(\pi - x)$, но аргумент $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, что следует из рассуждений:

$$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} \le -x \le -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}.$$

Из равенства $\sin(\pi - x) = a$, $\pi - x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ следует, что $\pi - x = \arcsin a$, т.е. $\boldsymbol{x = \pi - \arcsin a}$.

Все решения уравнения $\sin x = a$ получим, прибавив к найденным решениям выражение $2\pi k$, $k \in Z$. Получим

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z; \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Найденные решения можно записать в виде одной формулы

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z.$$

(При $n = 2k$ получается первое решение, при $n = 2k + 1$ – второе решение.)

Решение уравнения $\cos x = a$. Уравнение имеет смысл при $-1 \le a \le 1$. Найдём решение этого уравнения на участке $[-\pi, \pi]$.

На второй его половине, ($x \in [0, \pi]$) решением уравнения $\cos x = a$ по определению арккосинуса является $\boldsymbol{x = \arccos a}$.

Если $x \in [-\pi, 0]$, то уравнение $\cos x = a$ перепишем в виде $\cos(-x) = a$, так как $\cos(-x) = \cos x$, но при этом $-x \in [0, \pi]$. По определению арккосинуса находим $-x = \arccos a$, т.е. $\boldsymbol{x = -\arccos a}$.

Прибавив к полученным решениям числа $2\pi k$, $k \in Z$, получим все решения уравнения, а именно:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Решение уравнения tg*x* = *a*. Найдём решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$ на участке длиной π.

Возьмём участок $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда из равенства $\operatorname{tg} x = a$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ по определению арктангенса следует $\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} a}$. Прибавив к найденному решению числа πk, $k \in Z$, получим все решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$, а именно:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z.$$

Решение уравнения ctg*x* = *a*. Найдём решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ на участке длиной π.

Возьмём участок $(0, \pi)$. Тогда из равенства $\operatorname{ctg} x = a$, $x \in (0, \pi)$ следует $\boldsymbol{x = \operatorname{arcctg} a}$, по определению арккотангенса. Прибавив к найденному решению числа πk, $k \in Z$, получим все решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$, а именно:

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z.$$

В таблице 8.1 приведены решения простейших тригонометрических уравнений.

8.1. Решения простейших тригонометрических уравнений ($k \in Z$)

Вид уравнения	Значения a		
	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
$\cos x = a$	$x = \pi + 2\pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = 2\pi k$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$	$x = \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

Примеры. Решить простейшие уравнения:

1. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)=\dfrac{1}{2}$.

Решение. Так как функция синус нечётная, то уравнение можно записать в виде $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$. Отсюда

$$x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in Z,$$

$$x=\frac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$$

Полученное решение можно записать в виде двух формул:

если $n = 2k$ (чётное число), то $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, $k \in Z$,

если $n = 2k - 1$ (нечётное число), то $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ. $x=\dfrac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in Z$.

2. $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Уравнение не имеет решений, так как $\dfrac{\pi}{3}>1$.

Ответ: $x \in \varnothing$.

3. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Решение. $x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\pi k=\pm\left(\pi-\arccos\dfrac{1}{2}\right)+2\pi k$, $k \in Z$,

т.е. $x-\dfrac{\pi}{4}=\pm\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\pi k=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

Полученное решение можно записать в виде двух формул

$$x=\frac{11}{12}\pi+2\pi k \text{ и } x=-\frac{5}{12}\pi+2\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k \in Z$.

4. $\mathrm{tg}\,3x = 1995$.

Решение. $3x = \mathrm{arctg}\ 1995 + \pi k$, $x = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}1995 + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}1995 + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

5. $\mathrm{ctg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. $x = \mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие уравнения относятся к простейшим тригонометрическим уравнениям?
2. Как решают простейшие тригонометрические уравнения?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите простейшие тригонометрические уравнения:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x = \frac{1}{2}$; в) $\mathrm{tg}\,x = 1$;

г) $\mathrm{ctg}\,x = 2{,}05$; д) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\mathrm{tg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\mathrm{ctg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; и) $\sin 2x = \frac{1}{2}$;

к) $\cos 2x = 1$; л) $\sin x = \frac{4}{5}$; м) $\mathrm{tg}\,3x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

н) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$; о) $\cos^2 x = \frac{1}{9}$; п) $\mathrm{tg}^2\,x = 1$;

р) $\mathrm{ctg}^2\,x = 3$.

Тема 8.4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Слова и словосочетания

Приём	О́бщий приём
Ме́тод	Ме́тод пониже́ния сте́пени
Универса́льный, -ая, -ое, -ые	Универса́льная подстано́вка
Одноро́дный, -ая, ое, -ые	Одноро́дное уравне́ние

Текст для чтения

Общий приём заключается в том, что все тригонометрические функции, которые входят в уравнение, выражают через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию, зависящую от одного и того же аргумента.

Пример. Решим уравнение $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$.

Решение. Заменим $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$:

$$2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0, \text{ т.е. } 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Отсюда $\sin x = \dfrac{1}{2}$ и $\sin x = 2$. Так как $2 > 1$, то уравнение $\sin x = 2$ не имеет решений. Из уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ получаем $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

Метод группировки. Путём группировки слагаемых уравнение приводится к виду, когда левая часть разложена на множители, а правая часть равна нулю.

Пример. Решим уравнение $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = (1 + \cos 2x) + \cos x$$

и применим формулу преобразования суммы в произведение и формулу половинного аргумента:

$$2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x;$$

$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) = \cos x\,(2\cos x + 1);$$

$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) - \cos x\,(2\cos x + 1) = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos x) = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(2\sin x \cos x - \cos x) = 0;$$

$$(2\cos x + 1)(2\sin x - 1)\cos x = 0.$$

Отсюда

$$2\cos x + 1 = 0,\ \cos x = -\frac{1}{2},\ \ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\ ,\ k \in Z,$$

или $$2\sin x - 1 = 0,\ \sin x = \frac{1}{2}\ ,\ \ x = \left(-1\right)^m \frac{\pi}{6} + \pi m\ ,\ m \in Z,$$

или $$\cos x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n\ ,\ n \in Z.$$

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \left(-1\right)^m \frac{\pi}{6} + \pi m$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $k, m, n \in Z$.

Уравнения, решаемые понижением степени. Если тригонометрическое уравнение содержит $\sin x, \cos x$ в чётной степени, то применим формулы понижения степени (прил. 9).

Пример. Решить уравнение $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.
Решение.

$$\frac{1-\cos 6x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = \frac{1-\cos 10x}{2} + \frac{1-\cos 12x}{2};$$

$$2 - \cos 6x - \cos 8x = 2 - \cos 10x - \cos 12x;$$

$$(\cos 10x + \cos 12x) - (\cos 6x + \cos 8x) = 0;$$

$$2\cos 11x \cos x - 2\cos 7x \cos x = 0;$$

$$2\cos x\ (\cos 11x - \cos 7x) = 0;,$$

$$4\cos x \sin 9x \sin 2x = 0.$$

Отсюда $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k\ ,\ k \in Z,$

или $\sin 9x = 0{,}9x = \pi m,\ x = \frac{\pi}{9} m\ ,\ m \in Z,$

или $\sin 2x = 0{,}2x = \pi n,\ x = \frac{\pi}{2} n\ ,\ n \in Z.$

Решение $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ является частью множества корней $x = \frac{\pi}{2} n$ (при $n = 2k + 1$).

Ответ: $x = \frac{\pi}{9} m$, $x = \frac{\pi}{2} n$, $m, n \in Z$.

Универсальная подстановка. При решении уравнений вида $a\cos x + b\sin x = c$ удобно применять универсальную подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t$. Тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Уравнение становится рациональным. После нахождения его решения надо проверить, не удовлетворяют ли исходному уравнению числа $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. (Делая подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, считаем, что $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, т.е. $x \neq \pi + 2\pi n$, $n \in Z$).

Пример. Решим уравнение $3\sin x - 4\cos x = 5$.

Решение. Выполним подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ $\left(\cos\frac{x}{2} \neq 0\right)$. Тогда

$$\frac{3 \cdot 2t}{1+t^2} - \frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2} = 5 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

Значит, $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. Отсюда $x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Числа $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, не являются решением данного уравнения, так как $3\sin(\pi + 2\pi k) - 4\cos(\pi + 2\pi k) = 4 \neq 5$.

Ответ: $x = 2\operatorname{arctg}3 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Однородные уравнения и уравнения, приводимые к ним. Однородные уравнения, т.е. уравнения вида

$$a\cos x + b\sin x = 0;$$
$$a\cos^2 x + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = 0$$

и т.д. (в которых у всех слагаемых сумма показателей одинакова) приводятся к алгебраическим относительно $\operatorname{tg} x$ с помощью деления обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0$ и $\cos^2 x \neq 0$ соответственно.

Некоторые уравнения можно сделать однородными с помощью замены числа 1 на $\cos^2 x + \sin^2 x$, с помощью различных преобразований функций, входящих в уравнение и т.д. Например:

$$a\cos x + b\sin x = c \Rightarrow a\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$= c\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right) \Rightarrow (a-c)\cos^2\frac{x}{2} + 2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - (a+c)\sin^2\frac{x}{2} = 0.$$

Получили однородное уравнение.

Пример. Решим уравнение $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$ (если $\cos x = 0$, то из исходного уравнения получим, что и $\sin x = 0$, что невозможно, так как $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Тогда имеем

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 3,\ \operatorname{tg} x = -1.$$

Отсюда сразу следует, что $x = \text{arctg}3 + \pi n$, $n \in Z$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Ответ: $x = \text{arctg}3 + \pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in Z$.

Кроме рассмотренных существуют и другие методы решения тригонометрических уравнений, например, методы подстановки, введения вспомогательного угла и другие.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Назовите методы решения тригонометрических уравнений.
2. В чём заключается общий приём решения тригонометрических уравнений?
3. Как решают тригонометрические уравнения методом группировки?
4. Как решают тригонометрические уравнения методом понижения степени?
5. Как решают тригонометрические уравнения методом универсальной подстановки?
6. Какие уравнения называются однородными? Как решают однородные тригонометрические уравнения?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите тригонометрические уравнения общим приёмом:

а) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$; б) $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$;
в) $5\text{ctg}^2 x - 8\text{ctg}x + 3 = 0$; г) $7\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$.

2. Решите однородные тригонометрические уравнения:

а) $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$;
б) $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;
в) $\sin^2 x - 6\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 0$.

3. Решите тригонометрические уравнения:

а) $\cos^2(\pi - x) + 8\cos(\pi + x) + 7 = 0$; б) $\sin 2x\cos x - \cos 2x\sin x = 0$;
в) $8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x = 1$; г) $\sin 2x\cos 5x - \sin 3x\cos 4x = 0$;
д) $4\sin x - 6\cos x = 1$; е) $\sin^2 x + \cos^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$;
ж) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$; з) $\cos 2x - \cos 6x = 0$;
и) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$; к) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$;
л) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$.

Раздел 9

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Тема 9.1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Слова и словосочетания

Нера́венство Показа́тельное нера́венство

Текст для чтения

Показательное неравенство – это неравенство, которое содержит переменную в показателе степени.

С помощью методов решения показательных уравнений показательное неравенство можно привести к виду

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} \text{ (где } a > 0,\ a \neq 1).$$

1. Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$.

Другими словами, чтобы решить показательное неравенство, надо привести все выражения в левой части и в правой части к степени с одинаковым основанием и решить новое неравенство, которое составлено из показателей степеней.

Примеры. Решим показательные неравенства:

1. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} < 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

Решение. Используем свойства степени, выносим общий множитель за скобки:

$$2^x \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^3 - 2^x \cdot 2^4 < 5^x \cdot 5 - 5^x \cdot 5^2;$$

$$2^x\,(4 - 8 - 16) < 5^x(5 - 25) \Leftrightarrow 2^x \cdot (-20) < 5^x \cdot (-20);$$

$$2^x > 5^x \Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x > \left(\frac{2}{5}\right)^0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ так как } \frac{2}{5} < 1.$$

Ответ: $(-\infty; 0)$.

2. $0{,}008^x + 5^{1-3x} + 0{,}04^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30{,}04$.

Решение. Упрощаем

$$\left(\frac{1}{125}\right)^x + \frac{5}{5^{3x}} + \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}(x+1)} < 30\frac{1}{25} \Leftrightarrow \frac{1}{5^{3x}} + \frac{5}{5^{3x}} + \frac{1}{5^{3x}\cdot 5^3} < \frac{751}{25}.$$

Пусть $5^{-3x} = t > 0$, тогда

$$t + 5t + \frac{t}{125} < \frac{751}{25} \Leftrightarrow \frac{751}{125}t < \frac{751}{25} \Leftrightarrow t < 5.$$

Но $t = 5^{-3x} < 5 = 5^1$. Отсюда $-3x < 1$, $x > -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Решение систем показательных неравенств рассмотрим на примере.

Пример. Решим систему неравенств $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2}. \end{cases}$

Решение. Приведём степени каждого неравенства к одинаковому основанию и перейдём к системе рациональных неравенств:

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3, \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{\frac{7}{2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x^2 - 6x - 3{,}5 < 3{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ (x+1)(x-7) < 0. \end{cases}$$

Изображаем решение полученной системы неравенств на числовой прямой (рис. 9.1) и получаем ответ.

Ответ: (–1; 3).

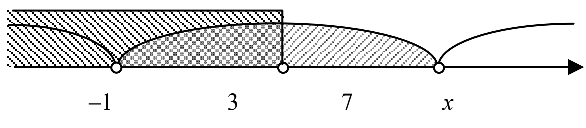


Рис. 9.1

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое показательное неравенство?
2. Чему равносильно неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, если $a > 1$?
3. Чему равносильно неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, если $0 < a < 1$?
4. Как решить показательное неравенство?
5. Что применяют для решения систем показательных неравенств?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решить показательные неравенства:

а) $4^{\frac{5x-1}{2x-1}} \geq 64$;

б) $3 \cdot 16^x - 5 \cdot 36^x + 2 \cdot 81^x < 0$;

в) $36^x - 7 \cdot 6^x + 6 \leq 0$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1} \leq 3$;

д) $0{,}3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\dots} < \sqrt[3]{0{,}3^{3x^2+5x}} < 1$;

е) $1 < 3^{\left|x^2-x\right|} < 9$.

Тема 9.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

Слова и словосочетания

Нера́венство

Логарифми́ческое нера́венство

Текст для чтения

Логарифмическое неравенство – это неравенство, которое содержит переменную под знаком логарифма.

С помощью методов решения логарифмических уравнений логарифмическое неравенство нужно привести к неравенству вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ (где } a > 0,\ a \neq 1).$$

1. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств $f(x) > g(x) > 0$.

2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств $0 < f(x) < g(x)$.

Другими словами, чтобы решить логарифмическое неравенство, надо привести все логарифмы к одинаковому основанию и решить соответствующую систему алгебраических неравенств.

Примеры. Решим логарифмические неравенства:

1. $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$.

Решение ОДЗ: $x > 0$. Пусть $\log_{0,5} x = t$. Тогда имеем

$$t^2 + t - 2 \le 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-1) \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -2, \\ t \le 1. \end{cases}$$

Но $\log_{0,5} x = t$. Поэтому

$$\begin{cases} \log_{0,5} x \ge -2, \\ \log_{0,5} x \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{0,5} x \ge \log_{0,5} 0{,}5^{-2}, \\ \log_{0,5} x \le \log_{0,5} 0{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0{,}5^{-2} = 4, \\ x \ge 0{,}5. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ ($x > 0$) получаем ответ.

Ответ: [0,5; 4].

2. $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Решение. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0, x \ne 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \ne 1, \\ 3x - 1 > 0, \\ x^2 + 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, x \ne 1, \\ x > \dfrac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ne 1, \\ x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Исходное неравенство запишем в виде $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$.

а) Если $\dfrac{1}{3} < x < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1$. Решим это неравенство:

$$\frac{3x-1}{x^2+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1-x^2-1}{x^2+1} < 0 \Rightarrow -x^2 + 3x - 2 < 0 \text{ (так как } x^2 + 1 > 0);$$

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0.$$

Изображаем решение на числовой оси (рис. 9.2, *а*) и получаем первый промежуточный ответ $\left(\dfrac{1}{3}; 1\right)$.

б) Если $x > 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1$, т.е.

$$3x-1>x^2+1 \text{ (учли, что } x^2+1>0);$$
$$x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)<0.$$

Изображаем на оси (рис. 9.2, *б*) и получаем второй промежуточный ответ (1; 2).

Ответ: $\left(\frac{1}{3};1\right)\cup\left(1;2\right)$.

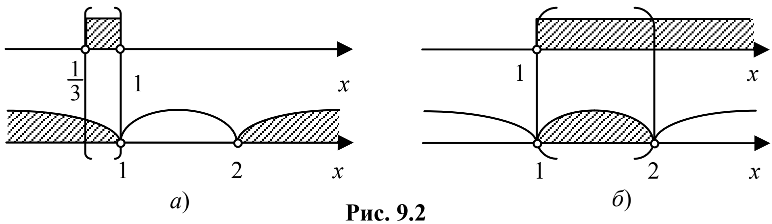


Рис. 9.2

3. $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>\frac{1}{x}$.

Решение. Отметим, что $x>0$, $x\neq 1$ (если $x=1$, то неравенство принимает вид $1>1$). Неравенство запишем в виде

$$x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2}>x^{-1}.$$

а) Если $0<x<1$, то исходное неравенство равносильно неравенству $2-\log_2^2 x-\log_2 x^2<-1$, т.е.

$$\log_2^2 x+\log_2 x^2-3>0 \Rightarrow t^2+2t-3>0, \text{ где } t=\log_2 x;$$

$$(t+3)(t-1)>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x>1,\\ \log_2 x<-3;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2,\\ x<\frac{1}{8}.\end{array}\right.$$

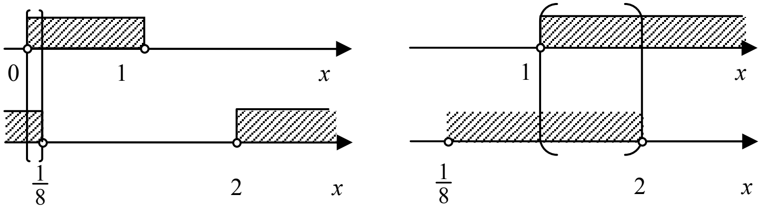
Изображаем решение на числовой оси (рис. 9.3, *а*) и получаем первый промежуточный ответ $\left(0;\frac{1}{8}\right)$.

б) Если $x>1$, то исходное неравенство равносильное неравенству $2-\log_2^2 x-\log_2 x^2>-1$, т.е. $(t+3)(t-1)<0$, где $t=\log_2 x$. Отсюда

$$\left\{\begin{array}{l}\log_2 x<1,\\ \log_2 x>-3;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x<2,\\ x>\frac{1}{8}.\end{array}\right.$$

Изображаем решение на числовой оси (рис. 9.3, *б*) и получаем второй промежуточный ответ (1; 2).

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup (1; 2)$.



а) *б*)

Рис. 9.3

4. $\dfrac{\lg 7 - \lg\left(-8x - x^2\right)}{\lg(x+3)} > 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lg 7 - \lg\left(-8x - x^2\right) > 0, \\ \lg(x+3) > 0; \end{cases} (*) \\ \begin{cases} \lg 7 - \lg\left(-8x - x^2\right) < 0, \\ \lg(x+3) < 0. \end{cases} (**) \end{array}\right.$$

Далее решим каждую систему и найдём объединение решений.

Решение системы (*):

$$\begin{cases} \lg 7 - \lg\left(-8x - x^2\right) > 0, \\ \lg(x+3) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg 7 > \lg\left(-8x - x^2\right), \\ \lg(x+3) > \lg 1, \\ -8x - x^2 > 0, \\ x+3 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 > -8x - x^2, \\ x+3 > 1, \\ 8x + x^2 < 0, \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+1) > 0, \\ x > -2, \\ x(x+8) < 0, \\ x > -3; \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 0 \text{ (рис. 9.4, } a\text{)}.$$

Решение системы (**):

$$\begin{cases} \lg 7-\lg\left(-8x-x^2\right)<0, \\ \lg(x+3)<0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg 7<\lg\left(-8x-x^2\right), \\ \lg(x+3)<\lg 1, \\ -8x-x^2>0, \\ x+3>0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7<-8x-x^2, \\ x+3<1, \\ 8x+x^2<0, \\ x>-3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+7)(x+1)<0, \\ x<-2, \\ x(x+8)<0, \\ x>-3; \end{cases} \Rightarrow -3<x<-2 \text{ (рис. 9.4, } б\text{)}.$$

Ответ: (–3; –2) ∪ (–1; 0).

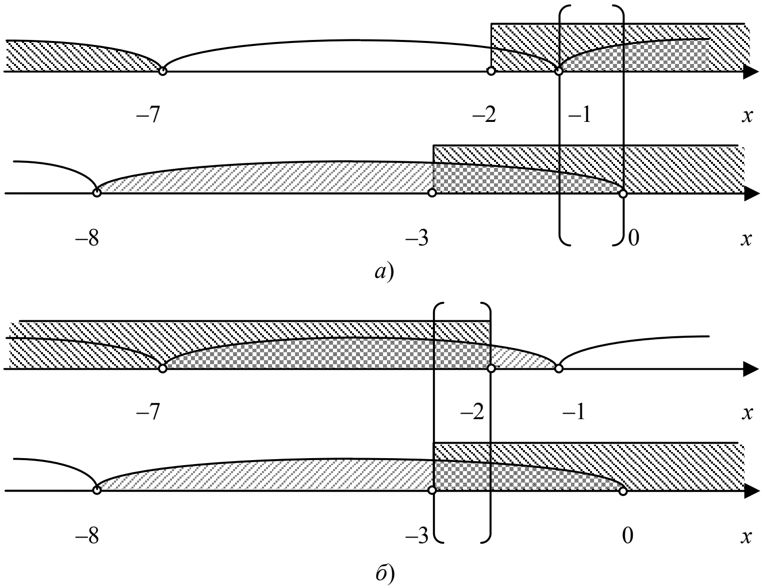


Рис. 9.4

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое логарифмическое неравенство?

2. Чему равносильно неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, если $a > 1$?

3. Чему равносильно неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, если $0 < a < 1$?

4. Как решить логарифмическое неравенство?

5. Что применяют для решения систем логарифмических неравенств?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите логарифмические неравенства:

а) $\dfrac{1}{1-\lg x}+\dfrac{1}{1+\lg x}>2$; б) $\log_2(x^2 - 5x + 4) < 2$;

в) $\log_{x-6}(x^2 - 6x + 5) \le 0$; г) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \dfrac{5}{2}$;

д) $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) > 5$.

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}(x-1)\lg 2 + \lg\left(2^{x+1}+1\right) < \lg\left(7\cdot 2^x + 12\right),\\ \log_x(x+2) > 2.\end{cases}$$

Тема 9.3. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Слова и словосочетания

Нера́венство Тригонометри́ческое нера́венство

Текст для чтения

Неравенства, содержащие переменную под знаком тригонометрической функции, называются *тригонометрическими*.

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства

$$\sin x > a,\quad \sin x < a,\quad \cos x > a,\quad \cos x < a,$$
$$\operatorname{tg} x > a,\quad \operatorname{tg} x < a,\quad \operatorname{ctg} x > a,\quad \operatorname{ctg} x < a,$$

где a – данное число.

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

При решении тригонометрических неравенств используют свойство монотонности тригонометрических функций, промежутки знакопостоянства, а также единичную окружность или график соответствующей функции.

Решение неравенств вида $\sin x > a$ ($\sin x < a$).

Примеры. Решим тригонометрические неравенства:

1) $\sin x > 0{,}5$; 2) $\sin x < -0{,}5$; 3) $\sin x \geq -0{,}5$.

Решение.

1) $\sin x > 0{,}5$. На единичной окружности строим дуги AC и AC_1, синус которых равен 0,5 (рис. 9.5). Из рисунка видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, начало которых находится в точке A, в конец – в любой внутренней точке дуги CBC_1, т.е. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Чтобы получить все решения данного неравенства, достаточно к концам этого промежутка прибавить $2\pi k$.

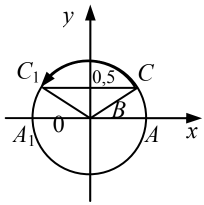


Рис. 9.5

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

2) $\sin x < -0{,}5$. Для решения данного неравенства построим графики функций $y = \sin x$ и $y = -0{,}5$ (рис. 9.6).

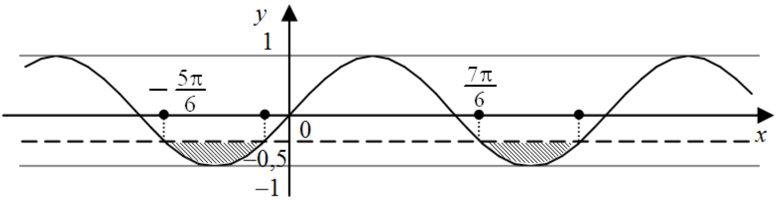


Рис. 9.6

Из рисунка 9.6 видно, что прямая $y = -0{,}5$ пересекает синусоиду в бесконечном числе точек. На рисунке 9.6 выделены несколько промежутков значений аргумента, удовлетворяющих данному неравенству, один из них $\left(-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)$. Используя периодичность синуса, запишем окончательный ответ.

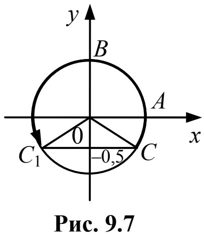


Рис. 9.7

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

3) $\sin x \geq -0{,}5$. На единичной окружности строим дуги AC и AC_1, синус которых равен –0,5 (рис. 9.7). Из рисунка видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, начало которых находится

в точке A, в конец – в любой внутренней точке дуги CBC_1, т.е. $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{7\pi}{6}$. Учитывая периодичность функции синус, получаем ответ.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le x \le \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Решение неравенств вида cos *x* > *a* (cos *x* < *a*).

Примеры. Решим тригонометрические неравенства:

1) $\cos 3x \ge -0{,}5$; 2) $\cos 2x < -0{,}5$.

Решение.

1) $\cos 3x \ge -0{,}5$. Обозначим $3x$ через α, тогда данное неравенство примет вид $\cos \alpha \ge -0{,}5$. Этому неравенству удовлетворяют все точки единичной окружности, абсциссы которых больше или равны $-0{,}5$ (рис. 9.8). Из рисунка видно, что эти точки лежат правее прямой $x = -0{,}5$ или на самой прямой. Следовательно, множество всех точек, удовлетворяющих данному неравенству – это дуга, выделенная на рисунке 9.8. Концы этой дуги входят в искомое множество, так как их абсциссы равны $-0{,}5$ и, значит, удовлетворяют данному неравенству. Таким образом, $-\frac{2\pi}{3} \le \alpha \le \frac{2\pi}{3}$.

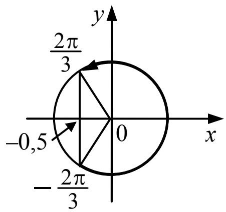


Рис. 9.8

Учитывая периодичность косинуса, запишем множество всех решений неравенства $\cos \alpha \ge -0{,}5$: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \alpha \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Переходя снова к переменной x, получаем искомый ответ:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le 3x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z;$$

$$-\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \le x \le \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in Z.$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} \le x \le \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

2) $\cos 2x < -0{,}5$. Обозначим $2x$ через α, тогда данное неравенство примет вид $\cos \alpha < -0{,}5$. Этому неравенству удовлетворяют все точки единичной окружности, абсциссы которых меньше $-0{,}5$ (рис. 9.9). Из рисунка видно, что эти точки лежат левее прямой $x = -0{,}5$. Следовательно, множество всех точек, удовлетворяющих данному неравенству, – это дуга, выделенная на рис. 9.9. Концы этой дуги не входят в искомое

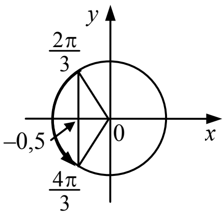


Рис. 9.9

множество, так как исходное неравенство – строгое. Таким образом, $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$.

Учитывая периодичность косинуса, запишем множество всех решений неравенства $\cos\alpha < -0{,}5$: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < \alpha < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Переходя снова к переменной x, получаем искомый ответ:

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < 2x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$.

Решение неравенств вида tg $x > a$ (tg $x < a$).

Примеры. Решим тригонометрические неравенства:

1) $\mathrm{tg}3x \geq 1$; 2) $\mathrm{tg}3x \geq -1$.

Решение.

1) $\mathrm{tg}3x \geq 1$. Введём новую переменную, т.е. обозначим $3x$ через α, тогда данное неравенство примет вид $\mathrm{tg}\,\alpha \geq 1$.

Построим единичную окружность и проведём линию тангенсов, которая является касательной к окружности в точке (1; 0). Так как α – решение неравенства $\mathrm{tg}\,\alpha \geq 1$, то ордината точки T_α линии тангенсов, равная $\mathrm{tg}\,\alpha$, должна быть больше или равна 1. Все такие точки лежат на луче AT (рис. 9.10).

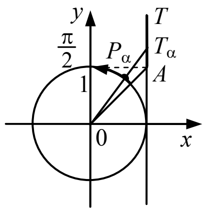


Рис. 9.10

Точки P_α единичной окружности, соответствующие точкам T_α, образуют дугу, выделенную на рис. 9.10. Для точек P_α этой дуги и выполняется неравенство $\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Чтобы получить все решения неравенства $\mathrm{tg}\,\alpha \geq 1$, достаточно к концам полученного промежутка прибавить период тангенса:

$$\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Так как $\alpha = 3x$, то $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \leq x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \leq x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

2) tg $x \ge -1$. Построим на единичной окружности дуги, тангенс которых равен – 1 (рис. 9.11). Концы искомых дуг – точки дуги C_1AB, за исключением точки B, так как при $x = \frac{\pi}{2}$ функция тангенс не существует. Следовательно, $-\frac{\pi}{4} \le x < \frac{\pi}{2}$.

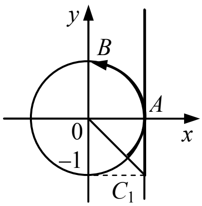


Рис. 9.11

Учитывая периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, получим окончательный ответ.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k \le x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Решение неравенств вида $\operatorname{ctg} x > a$ ($\operatorname{ctg} x < a$) проводится аналогично, но с использованием линии котангенсов, которая параллельна оси Ox.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие неравенства называются тригонометрическими?
2. Какие неравенства относятся к простейшим тригонометрическим неравенствам?
3. Как решаются неравенства вида $\sin x > a$ ($\sin x < a$)?
4. Как решаются неравенства вида $\cos x > a$ ($\cos x < a$)?
5. Как решаются неравенства вида $\operatorname{tg} x > a$ ($\operatorname{tg} x < a$)?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Решите неравенства:

а) $\sin x > 0$; б) $\sin x < 0$; в) $\cos x > 0$;

г) $\cos x < 0$; д) $\operatorname{tg} x > 0$; е) $\operatorname{tg} x < 0$;

ж) $\sin x < 1$; з) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\cos x < 1$;

к) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; л) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; м) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

н) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; о) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; п) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$.

Раздел 10

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Тема 10.1. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Слова и словосочетания

Величина́	Переме́нная величина́
	Постоя́нная величина́
Ана́лиз	Математи́ческий ана́лиз
Ограни́ченный, -ая, -ое, -ые	Ограни́ченная величина́
	Ограни́ченный сни́зу
	Ограни́ченный све́рху
Преде́л	Преде́л после́довательности
Преде́льный, -ая, -ое, -ые	Преде́льное значе́ние
Бесконе́чность (сущ., ж.р.)	Плюс бесконе́чность
	Ми́нус бесконе́чность
Бесконе́чно	
Ма́лый, -ая, -ое, -ые	Бесконе́чно ма́лая величина́
Большо́й, -ая, -ое, -ие	Бесконе́чно больша́я величина́

Текст для чтения

Величина – одно из основных понятий не только математики. Величина – это результат измерения. Величина определяется числом и единицей измерения. В математике отвлекаются от физического смысла величины и интересуются только числом, которым эта величина выражается.

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные численные значения.

Переменная величина, которая принимает одно и то же численное значение, называется *постоянной величиной*.

Переменная величина принимает различные числовые значения. Эти значения геометрически изображаются точками числовой оси.

Множество всех числовых значений переменной величины называется *областью изменения* этой переменной.

Переменная величина x называется *ограниченной сверху*, если существует такое число $M \in R$, что верно неравенство $x < M$.

Переменная величина x называется *ограниченной снизу*, если существует такое число $m \in R$, что верно неравенство $x > m$.

Переменная величина x называется *ограниченной*, если она ограничена снизу и сверху.

Рассмотрим числовую последовательность $(x_n)_{n \in N}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значений переменной x.

Постоянное число a называется *пределом числовой последовательности* $(x_n)_{n \in N}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε, существует такой номер n_0, что для любого номера $n \geq n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a$$

и говорят: «предел последовательности x_n при n, которое стремится к бесконечности, равен a». Значение, к которому стремится n (здесь – это бесконечность), называется *предельным значением величины n*.

Таким образом, число a является пределом числовой последовательности $(x_n)_{n \in N}$, если её элементы отличаются от a сколь угодно мало, начиная с некоторого номера n_0. Номер n_0 зависит от выбора числа ε. При уменьшении числа ε соответствующий номер n_0, в общем случае, увеличивается. Чем бо́льшей близости значений элементов числовой последовательности $(x_n)_{n \in N}$ к числу a мы требуем, тем бо́льшие номера n_0 приходится рассматривать. Исключение составляет случай, когда последовательность $(x_n)_{n \in N}$ – постоянна и равна a.

Возьмём числовую ось Ox и изобразим на ней числа a, $a - \varepsilon$, $a + \varepsilon$, а также члены числовой последовательности $(x_n)_{n \in N}$. Получим геометрическое истолкование предела числовой последовательности (рис. 10.1). Для любого сколь угодно малого отрезка $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ длиной 2ε все элементы числовой последовательности $(x_n)_{n \in N}$, начиная с некоторого, будут находиться внутри этого отрезка.

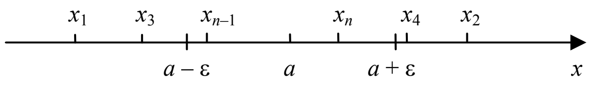


Рис. 10.1

Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Переменная величина x называется *бесконечно малой*, если, начиная с некоторого значения, она по абсолютной величине становится и остаётся меньше сколь угодно малого заранее заданного положительного числа ε.

Из определения предела числовой последовательности получаем, что предел бесконечно малой величины равен нулю.

Переменная x называется *бесконечно большой*, если её значения по абсолютной величине становятся и остаются больше сколь угодно большого наперёд заданного числа A, начиная с некоторого номера n_0. Если некоторая величина x является бесконечно большой, то пишут $|x_n| > A$ (для каждого $n > n_0$). Это означает, что в процессе изменения переменная величина x может стать больше произвольно взятого числа A. Если переменная величина x является бесконечно большой и сохраняет определённый знак (плюс или минус), то говорят, что переменная x имеет предел $+\infty$ (плюс бесконечность) или $-\infty$ (минус бесконечность). Это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\,,\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\,.$$

Очевидно, что для бесконечно большой величины $|x_n| \to +\infty$. Между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами существует простая связь. Если переменная x_n является бесконечно малой, то обратная ей величина $\dfrac{1}{x_n}$ является бесконечно большой. Верно и обратное утверждение. Если переменная x_n является бесконечно большой, то обратная ей величина $\dfrac{1}{x_n}$ является бесконечно малой.

Свойства бесконечно малых величин.

1. Если у бесконечно малой величины поменять знак на противоположный, то получится бесконечно малая величина.
2. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.
3. Произведение ограниченной величины и бесконечно малой величины есть бесконечно малая величина.
4. Произведение постоянной величины и бесконечно малой величины есть бесконечно малая величина.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое величина? Какие бывают величины? Приведите примеры.
2. Что такое область изменения величины?

3. Когда величина называется ограниченной снизу? Приведите примеры.

4. Когда величина называется ограниченной сверху? Приведите примеры.

5. Какая величина называется ограниченной? Приведите примеры.

6. Что такое предел числовой последовательности?

7. Что такое предельное значение переменной? Приведите примеры.

8. В чём геометрический смысл предела последовательности?

9. Какая величина называется бесконечно малой? Приведите примеры.

10. Какая величина называется бесконечно большой? Приведите примеры.

11. Назовите свойства бесконечно малых величин.

Тема 10.2. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ. НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Слова и словосочетания

Неопределённость (сущ., ж.р.)	Раскры́ть неопределённость Раскры́тие неопределённости Виды неопределённости Неопределённость ви́да бесконе́чность раздели́ть на бесконе́чность

Текст для чтения

Теорема 1. Числовая последовательность не может иметь два различных предела.

Доказательство. Предположим, что числовая последовательность x_n имеет два предела a и b. Пусть $a < b$. Выберем некоторое число c такое, что $a < c < b$.Так как $x_n \to a$, то существует номер n_a такой, что для всех $n > n_a$ будет выполняться неравенство $x_n < c$. У данной числовой последовательности есть другой предел $b > c$. Поэтому найдётся номер n_b такой, что для всех $n > n_b$ будет $x_n > c$. Если выбрать бо́льший из n_a и n_b, то будем иметь два неравенства: $x_n < c$ и $x_n > c$. Но это невозможно. Полученное противоречие указывает на то, что наше предположение о существовании двух различных пределов неверно. Следовательно, всякая числовая последовательность может иметь только один предел. Теорема доказана.

Следствие. Если две переменные величины, имеющие пределы, при всех своих изменениях равны между собой, то равны и их пределы.

Остальные теоремы примем без доказательства.

Теорема 2. Предел суммы конечного числа переменных, имеющих пределы, равен сумме пределов переменных.

Теорема 3. Предел разности конечного числа переменных, имеющих пределы, равен разности пределов переменных.

Теорема 4. Предел произведения конечного числа переменных, имеющих пределы, равен произведению пределов переменных.

***Следствие* 1.** Предел степени переменной, имеющей предел, равен той же степени предела переменной.

***Следствие* 2.** Предел корня из переменной, имеющей предел, равен корню той же степени из предела переменной.

Теорема 5. Предел частного от деления двух переменных, имеющих пределы, равен частному от деления пределов делимого и делителя при условии, что предел делителя не равен нулю.

Мы рассмотрели пределы суммы, разности, произведения и частного переменных, имеющих конечные пределы. В этом случае вычисление предела сводится к подстановке предельного значения в выражение под знаком предела.

Сейчас рассмотрим случаи, когда пределы переменных x_n и y_n (один или оба) бесконечны. Для частного переменных x_n и y_n рассмотрим случай, когда предел знаменателя равен нулю.

В зависимости от закона изменения обеих переменных, предел выражений $x_n + y_n$, $x_n y_n$, $\frac{x_n}{y_n}$ может иметь различные значения или не существовать. Если предел не существует, то говорят о раскрытии неопределённостей. Рассмотрим основные виды неопределённостей при $n \to \infty$.

1. Пусть в частном $\frac{x_n}{y_n}$ обе величины стремятся к нулю. Это отношение является *неопределённостью вида* $\frac{0}{0}$ (нуль разделить на нуль).

$$x_n = \frac{1}{n^3} \to 0,\ y_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n} \to 0.$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0,\ y_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \to \infty.$$

$$x_n = \frac{a}{n^2} \to 0,\ y_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{a}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = a = \text{const}.$$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \to 0,\ y_n = \frac{1}{n^2} \to 0 \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = (-1)^n \text{ – не существует.}$$

2. Пусть в частном $\frac{x_n}{y_n}$ обе величины стремятся к бесконечности. Это отношение является *неопределённостью вида* $\frac{\infty}{\infty}$ (бесконечность разделить на бесконечность).

$$x_n = n \to \infty,\ y_n = n^2 \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0.$$

$$x_n = n^2 \to \infty,\ y_n = n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n} = n \to \infty.$$

$$x_n = an \to \pm\infty (a \neq 0),\ y_n = n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{an}{n} = a = \text{const}.$$

$$x_n = \left[2 + (-1)^{n+1}\right] n \to \infty,\ y_n = n \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{\left[2 + (-1)^{n+1}\right] n}{n} = 2 + (-1)^{n+1} \text{ –}$$

не существует.

3. Рассмотрим произведение $x_n y_n$ двух переменных, где $x_n \to 0$ и $y_n \to \pm\infty$. В этом случае говорят, что произведение имеет *неопределённость вида* $0 \cdot \infty$ (нуль умножить на бесконечность).

$$x_n = \frac{1}{n^3} \to 0,\ y_n = n^2 \to \infty \Rightarrow x_n y_n = \frac{1}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n} \to 0.$$

$$x_n = \frac{1}{n} \to 0,\ y_n = n^3 \to \infty \Rightarrow x_n y_n = \frac{1}{n} \cdot n^3 = n^2 \to \infty.$$

$$x_n = \frac{a}{n} \to 0 (a \neq 0),\ y_n = n \to \infty \Rightarrow x_n y_n = \frac{a}{n} \cdot n = a = \text{const}.$$

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0,\ y_n = n \to \infty \Rightarrow x_n y_n = \frac{(-1)^n}{n} \cdot n = (-1)^n \text{ – не суще-}$$

ствует.

4. Рассмотрим сумму $x_n + y_n$, в которой $x_n \to +\infty$ и $y_n \to -\infty$. Эта сумма представляет *неопределённость вида* $\infty - \infty$ (бесконечность минус бесконечность).

$$x_n = 2n \to +\infty,\ y_n = -n \to -\infty \Rightarrow x_n + y_n = 2n - n = n \to +\infty.$$
$$x_n = n \to +\infty,\ y_n = -2n \to -\infty \Rightarrow x_n + y_n = n - 2n = -n \to -\infty.$$
$$x_n = n + a \to +\infty\ (a \neq 0),\ y_n = -n \to -\infty \Rightarrow x_n + y_n = n + a - n = a = \text{const}.$$
$x_n = n + (-1)^n \to +\infty$, $y_n = -n \to -\infty \Rightarrow x_n + y_n = n + (-1)^n - n = (-1)^n$ – не существует.

Об их раскрытии будет сказано позже (тема 4 раздела 10).

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела числовой последовательности.
2. Сформулируйте теоремы о пределах суммы и разности переменных.
3. Сформулируйте теорему о пределе произведения переменных и следствия из этой теоремы.
4. Сформулируйте теорему о пределе частного переменных.
5. Перечислите основные виды неопределённостей и приведите примеры.

Тема 10.3. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Слова и словосочетания

Преде́л	Преде́л фу́нкции Преде́л фу́нкции сле́ва Преде́л фу́нкции спра́ва Односторо́нний преде́л

Текст для чтения

Функция $y = f(x)$ имеет своим *пределом* число b в точке a, если для каждого малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое малое положительное число $\delta > 0$, что для всех x, которые удовлетворяют неравенству $|x - a| < \delta$, где $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Факт наличия предела у функции символически записывают так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

и говорят: «предел функции $f(x)$ при x, который стремится к a, равен b» или «предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ равен b».

Случается так, что при стремлении к точке a переменная x принимает значения, которые меньше, чем a. В этом случае говорят о пределе функции слева. Если же при стремлении к точке a переменная x принимает значения, которые больше, чем a, говорят о пределе функции справа.

Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева* в точке a, если для каждого малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует малое положительное число $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ как только $a - x < \delta$.

Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *справа* в точке a, если для каждого малого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует малое положительное число $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ как только $x - a < \delta$.

Односторонние пределы (слева и справа) обозначают так:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = b.$$

Теорема. Для существования предела функции $y = f(x)$ в точке a необходимо и достаточно существование и равенство пределов слева и справа от точки a, т.е.

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b = \lim_{x \to a+0} f(x) = b = \lim_{x \to a} f(x) = b.$$

При вычислении пределов функций используются теоремы, которые сформулируем без доказательства.

Теорема 1. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то существует предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема 2. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то существует предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

Теорема 3. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ и предел $g(x)$ не равен нулю, то существует предел их отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$, равный отношению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

***Следствие* 1.** Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left[kf(x)\right]=k\lim_{x\to a}f(x).$$

***Следствие* 2.** Если $n \in N$, то справедливы соотношения

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n\,,\ \lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}\ .$$

***Следствие* 3.** Предел многочлена (целой рациональной функции) при $x\to a$ равен значению этого многочлена при $x = a$:

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\left(c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0\right)=F(a).$$

***Следствие* 4.** Предел дробно-рациональной функции при $x\to a$ равен значению этой функции при $x = a$ (если a принадлежит области определения этой функции):

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\frac{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0}{c_mx^m+c_{m-1}x^{m-1}+\ldots+c_1x+c_0}=F(a).$$

Рассмотрим примеры использования теорем о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^2+\sqrt{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to 3}3x^2+\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=3\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^2+\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}=$

   $=3\cdot 3^2+\sqrt{3+1}=29$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 4}(5x+2)}{\lim\limits_{x\to 4}(2x+3)}=\dfrac{5\cdot 4+2}{2\cdot 4+3}=\dfrac{22}{11}=2$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+2x-4}=\dfrac{1^2-3\cdot 1+1}{1^2+2\cdot 1-4}=\dfrac{-1}{-1}=1$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Когда функция $y = f(x)$ в точке a имеет своим пределом число b?
2. Когда число b называется пределом функции $y = f(x)$ слева в точке a?
3. Когда число b называется пределом функции $y = f(x)$ справа в точке a?
4. Сформулируйте теоремы, которые используют при вычислении пределов функций.
5. Сформулируйте следствия из теорем о пределах функций.

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-3x+4\right);$ б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3-x^2+1\right);$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3x^3+x^2+8x+10\right);$ г) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\left(x^2-1\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)\right];$

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2};$ е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1};$

ж) $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+x-1\right);$ з) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sin\pi x-2\cos\pi x+3\right).$

Тема 10.4. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ

Слова и словосочетания

Преде́л Замеча́тельный преде́л

Текст для чтения

Рассмотрим ситуации, в которых нельзя непосредственно применить теоремы о вычислении пределов. В некоторых из этих ситуаций возможно применение так называемых *замечательных пределов*:

– первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

– второй замечательный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

1. Предел знаменателя дроби равен нулю (знаменатель дроби – бесконечно малая величина).

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{4x-8}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty .$$

2. Раскрытие неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-2}{2x-5}=\dfrac{2}{5}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{5-x-5-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=-\sqrt{5}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\dfrac{bx}{\sin bx}\cdot\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{a}{b}.$

3. Знаменатель функции – бесконечно большая величина.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{4x+1}=\left(\frac{5}{\infty}\right)=0\ .$$

4. Раскрытие неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+7}{2x^2-5x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{3}{2}.$$

5. Раскрытие неопределённости вида $\infty-\infty$.

а) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x-8}{(x+2)(x^2-2x+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-4}{x^2-2x+4}=-\dfrac{1}{2}.$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}}=\dfrac{4}{2}=2.$

6. Раскрытие неопределённости вида 1^∞.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}\cdot3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=$

$=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^3=e^3.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{2}{3x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{2x/3}\cdot\frac{2x}{3}\cdot\frac{2}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{2x/3}}\right]^{\frac{4}{9}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{2x/3}}\right]^{\frac{4}{9}}=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{2x/3}}\right]^{\frac{4}{9}}=e^{\frac{4}{9}}.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Назовите замечательные пределы.
2. На примерах расскажите, как раскрыть неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$.
3. На примерах расскажите, как раскрыть неопределённость вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.
4. На примерах расскажите, как раскрыть неопределённость вида $\infty-\infty$.
5. На примерах расскажите, как раскрыть неопределённость вида 1^{∞}.

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; и) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$; л) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; м) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$;

н) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$; о) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$; п) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$;

р) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}x-1}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cos x}{x}$; т) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$;

у) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$; ф) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^{x}$; х) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$;

ц) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{5}{2x}}$.

Тема 10.5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ. АСИМПТОТЫ

Слова и словосочетания

Прираще́ние	Прираще́ние аргуме́нта Прираще́ние фу́нкции
Де́льта	Де́льта икс Де́льта и́грек
Непреры́вность (сущ., ж.р.)	Непреры́вность фу́нкции в то́чке
Непреры́вный, -ая, -ое, -ые	Непреры́вная фу́нкция
Непреры́вен, непреры́вна, -о, -ы	Фу́нкция непреры́вна в интерва́ле (a, b) Фу́нкция непреры́вна на отре́зке [a, b]
Разры́в	То́чка разры́ва фу́нкции
Произво́дная (сущ., ж.р.)	Произво́дная фу́нкции
Дифференци́рование	Дифференци́рование фу́нкции
Дифференци́ровать I, Продифференци́ровать I	Продифференци́ровать фу́нкцию
Дифференци́руемый, -ая, -ое, -ые	Дифференци́руемая фу́нкция
Дифференциа́л	Дифференциа́л фу́нкции

Текст для чтения

Пусть дана функция $y = f(x)$.

Приращение аргумента – это разность двух значений аргумента x_1 и x_2, которые лежат в области определения функции: $\Delta x = x_2 - x_1$. Запись Δx читается как «дельта икс».

Приращение функции – это разность двух значений функции, которые соответствуют значениям аргумента x_1 и x_2:

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1).$$

Запись Δy читается как «дельта игрек».

Так как $\Delta x = x_2 - x_1$, то $x_2 = x_1 + \Delta x$. Пусть $x_1 = x$. Тогда приращение функции можно записать как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если она в этой точке определена и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 .$$

Можно дать другое определение непрерывности функции.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) .$$

Функция называется *непрерывной в промежутке*, если она непрерывна во всех точках этого промежутка. Будем говорить, что функция $f(x)$ *непрерывна в интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала; *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в интервале (a, b) и имеют место равенства

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b) .$$

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число Δx таково, что $x + \Delta x$ тоже принадлежит этому промежутку. Тогда *производной функции* $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю (если этот предел существует):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} .$$

Если производная существует для каждого значения x в области определения функции, то она представляет собой новую функцию от аргумента x.

Процесс вычисления производной функции называется *дифференцированием*. Найти производную функции – это значит *продифференцировать* функцию. Функция $y = f(x)$, которая имеет производную в точке x, называется *дифференцируемой в* этой *точке*. Функция $y = f(x)$, которая имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой на* этом *промежутке*.

Производная функции имеет следующие обозначения:

y' – игрек штрих;

$f'(x)$ – эф штрих от икс;

$\dfrac{dy}{dx}$ – дэ игрек по дэ икс;

y'_x – игрек штрих по икс.

Выражение $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$ запишем иначе: $dy = f'(x)dx$. Здесь dy – это *дифференциал функции* $y = f(x)$, а dx – *дифференциал аргумента*.

Сформулируем **зависимость** между непрерывностью и наличием производной функции.

Если функция $f(x)$ имеет производную при некотором значении аргумента x, то при этом значении x данная функция непрерывна.

Если условие непрерывности функции в некоторой точке нарушено, то такую точку называют *точкой разрыва функции*.

Виды разрывов функции.

1. *Разрыв первого рода*. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правый и левый пределы

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

2. *Разрыв второго рода*. Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

При исследовании поведения функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами*. Существуют три вида асимптот: *вертикальные, горизонтальные, наклонные*.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке бесконечен.

Прямая $y = A$ называется *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} f(x) = A$.

Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \neq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - kx\right] = b$, то прямая $y = kx + b$ ($k \neq 0$) является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

Аналогично рассматривают наклонные асимптоты при $x \to -\infty$.

На практике удобно искать асимптоты в следующем порядке: 1) вертикальные; 2) горизонтальные; 3) наклонные.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое приращение аргумента и приращение функции?
2. Когда функция называется непрерывной в точке?
3. Когда функция называется непрерывной в промежутке?
4. Когда функция называется непрерывной в интервале?
5. Когда функция называется непрерывной на отрезке?
6. Что называется производной функции $y = f(x)$?
7. Что значит продифференцировать функцию?
8. Какая функция называется дифференцируемой в точке (в промежутке)?
9. Что называется дифференциалом аргумента, дифференциалом функции?
10. Сформулируйте зависимость между непрерывностью и наличием производной функции.
11. Что такое точка разрыва функции? Какие существуют виды разрывов функции?
12. Какая прямая называется вертикальной асимптотой графика функции?
13. Какая прямая называется горизонтальной асимптотой графика функции?
14. Какая прямая называется наклонной асимптотой графика функции?

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Исследуйте функции на непрерывность и установите характер точек разрыва:

а) $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x - 6}$; б) $y = \operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x$; в) $y = \ln(x^2 + 5x - 6)$.

2. Исследуйте функции на асимптоты:

а) $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$; б) $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 + 5x - 1}{x^2 + 2x - 2}$; в) $y = \dfrac{x^2(x+1)}{(x+2)^2(x^2 - 10)}$.

Тема 10.6. ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Слова и словосочетания

Дифференци́рование (сущ., ср.р.) Фо́рмулы дифференци́рования
Конста́нта

Текст для чтения

Примем без доказательства следующую **теорему.**

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии, что $v(x) \neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие формулы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v',\ (uv)' = u'v + uv',\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

При доказательстве теоремы следует использовать определение производной, равенство $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$ и правила вычисления пределов функций.

Формулы дифференцирования.

1. Производная постоянной (константы) равна нулю: $\boldsymbol{C' = 0}$.
2. Производная функции $y = x$ равна одному (единице): $\boldsymbol{x' = 1}$.
3. Производная алгебраической суммы конечного числа функций равна сумме производных слагаемых: $\boldsymbol{(u \pm v)' = u' \pm v'}$.
4. Производная произведения двух функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй: $\boldsymbol{(uv)' = u'v + uv'}$.
5. Производная произведения постоянной на функцию равна произведению постоянной на производную функции (постоянную можно вынести за знак производной): $\boldsymbol{(Cu)' = Cu'}$.
6. Производная частного равна дроби, числитель которой есть разность между произведением производной делимого на делитель и произведением делимого на производную делителя, а знаменатель есть квадрат делителя: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Пусть дана функция $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Обозначим $x^2 + 1$ через u. Тогда $y = \sqrt{u}$ зависит от переменной x через вспомогательную переменную u, а переменная u является функцией аргумента x.

Такого рода функции называются *сложными функциями* или *функциями от функций*: $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$.

7. Если y является дифференцируемой функцией от u, а u является дифференцируемой функцией от x, то производная y по x равна произведению производной функции y по u на производную функции u по x: $\boldsymbol{f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)}$.

Таблица производных элементарных функций приведена в прил. 10.

Рассмотрим примеры использования формул дифференцирования и определим производные следующих функций:

1) $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 5$; 2) $y = \dfrac{x - a}{x + a}$; 3) $y = \sqrt[3]{\left(x^3 + 1\right)^2}$;

4) $y = x^2\sqrt{x^2-1}$; 5) $y = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; 6) $y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$;

7) $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; 8) $y = (\arccos 3x)^2$; 9) $y = \lg(2x+1)$;

10) $y = \ln\sqrt{2x}$; 11) $y = 3^{2x^2}$; 12) $y = \ln x \cdot e^x$.

Решение.

1) $y' = (4x^3)' + (2x^2)' + x' - 5' = 12x^2 + 4x + 1$;

2) $$y' = \frac{(x-a)'(x+a)-(x-a)(x+a)'}{(x+a)^2} = \frac{x+a-x+a}{(x+a)^2} = \frac{2a}{(x+a)^2};$$

3) $$y' = \left[\left(x^3+1\right)^{\frac{2}{3}}\right]' = \frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{3}}\left(x^3+1\right)' = \frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}};$$

4) $$y' = \left(x^2\sqrt{x^2-1}\right)' = \left(x^2\right)'\sqrt{x^2-1} + x^2\left(\sqrt{x^2-1}\right)' =$$
$$= 2x\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{2x\left(x^2-1\right)+x^3}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{3x^3-2x}{\sqrt{x^2-1}};$$

5) $$y' = \frac{(1-\sin x)'(1+\sin x)-(1-\sin x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} =$$
$$= \frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2};$$

6) $$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = -\frac{4}{(2\sin x\cos x)^2} =$$
$$= -\frac{4}{\sin^2 2x};$$

7) $$y' = \left(\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\left(\sqrt{x}\right)' = -\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}};$$

8) $y' = [(\arccos 3x)^2]' = 2\arccos 3x \cdot (\arccos 3x)' =$
$$= 2\arccos 3x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\right)\cdot(3x)' = -\frac{6\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}};$$

9) $$y' = (\lg(2x+1))' = \frac{1}{(2x+1)\ln 10}(2x+1)' = \frac{2}{(2x+1)\ln 10};$$

10) $y' = \left(\ln\sqrt{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\dfrac{1}{2\sqrt{2x}}(2x)' = \dfrac{1}{2x}$;

11) $y' = \left(3^{2x^2}\right)' = 3^{2x^2}\cdot\ln 3\cdot\left(2x^2\right)' = 3^{2x^2}\cdot\ln 3\cdot 4x$;

12) $y' = (\ln x e^x)' = (\ln x)'e^x + \ln x\,(e^x)' = \dfrac{1}{x}\cdot e^x + \ln x\cdot e^x = e^x\left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Сформулируйте теорему о производной суммы, разности, произведения и частного двух функций.
2. Назовите формулы дифференцирования.
3. Какая функция называется сложной?
4. Назовите производные основных элементарных функций.

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^3 - 2x^2 + 5$;

б) $y = 5^{100} + x^5 - 4x$;

в) $y = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{4}x^4 + 2x$;

г) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{7}x^7$;

д) $y = (1 + x^3)(4x^2 + 3x + 5)$;

е) $y = x^2\cdot\cos x + x^3\cdot\sin x$;

ж) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

з) $y = \dfrac{\sqrt[5]{x^2} + 2x - 3}{x\sqrt{x} + \sqrt[7]{x^4} - 1}$;

и) $y = 2^x + \operatorname{tg} x + x^2\cdot\ln x$;

к) $y = (5x + 2)^3$;

л) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}$;

м) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

н) $y = 5\cos(3x + 2)\cdot\sin 7x$;

о) $y = \sin^3 5x$;

п) $y = \sin\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$;

р) $y = \ln(\cos^2 5x)$;

с) $y = \operatorname{tg}^5(x^2 - 5)$;

т) $y = \dfrac{e^x\cdot\sin x}{\cos x^2}$;

у) $y = \operatorname{ctg}^2 e^x + \cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$;

ф) $y = \sqrt[5]{e^{\sin 5x\left(x^2-3\right)^3}}$.

Тема 10.7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛЫ ПРОИЗВОДНОЙ

Слова и словосочетания

Каса́тельная (сущ., ж.р.)	Каса́тельная к криво́й
Преде́льный, -ая, ое, -ые	Преде́льное положе́ние
Секу́щая (сущ., ж.р.)	
Норма́ль (сущ., ж.р.)	Норма́ль к криво́й
Треуго́льник	Прямоуго́льный треуго́льник
Скоро́сть (сущ., ж.р.)	Сре́дняя ско́рость
	Мгнове́нная ско́рость
	Исти́нная ско́рость
	Ско́рость измене́ния фу́нкции

Текст для чтения

Геометрический смысл производной. *Касательной* к данной кривой $y = f(x)$ в данной её точке A называется предельное положение секущей AB, когда точка B, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке A (рис. 10.2).

Прямая, проходящая через точку A, перпендикулярно касательной, называется *нормалью* к кривой в точке A.

Рассмотрим непрерывную кривую $y = f(x)$ (рис. 10.3). Отметим на этой кривой неподвижную точку $A(x_0, y_0)$ и точку $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, которая движется по кривой. Тогда расстояние от точки B до оси абсцисс $BB_1 = y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$.

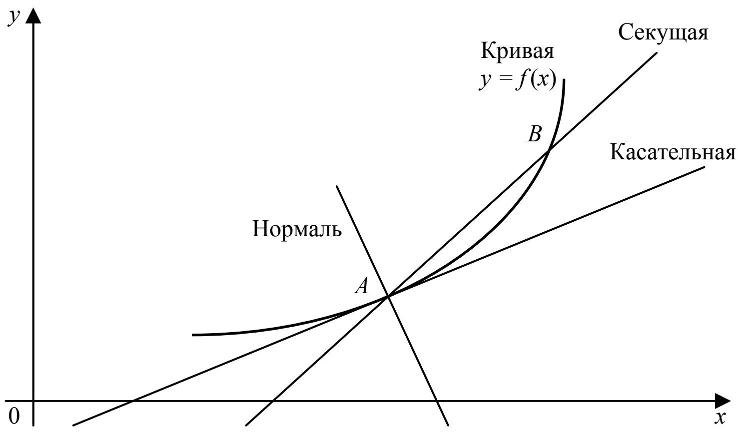


Рис. 10.2

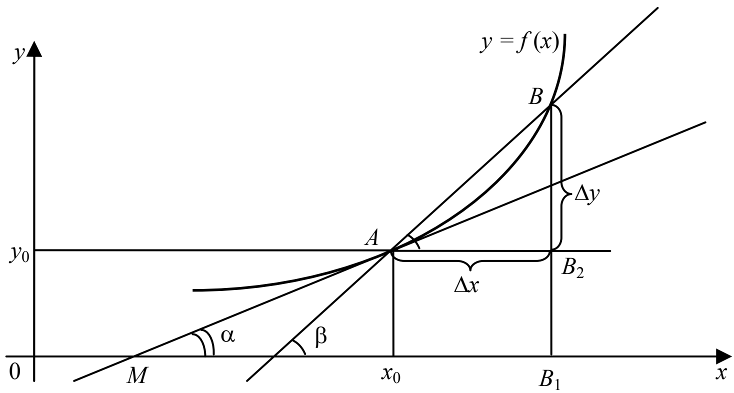


Рис. 10.3

Проведём прямую AB, пересекающую кривую $f(x)$ в точках A и B, и прямую AB_2, параллельную оси Ox.

Обозначим в прямоугольнике треугольнике ΔABB_2 угол $\angle BAB_2 = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. с геометрической точки зрения tgβ равен тангенсу угла наклона секущей AB к оси Ox.

При $\Delta x \to 0$ точка B, перемещаясь по кривой $f(x)$, неограниченно приближается к точке A, секущая AB, поворачиваясь около точки A, стремится занять предельное положение касательной в точке A к кривой $f(x)$. При этом $\beta \to \alpha$, где α – угол, который образован касательной AM с положительным направление оси Ox, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta = \alpha$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$.

Из равенства $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x$, но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha$, поэтому $y'_x = \operatorname{tg}\alpha$ или $y'_x = k$, где k – угловой коэффициент касательной AM к графику функции $y = f(x)$ в точке A, равный тангенсу угла наклона касательной к оси Ox, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = k$.

Итак, производная функции $y = f(x)$ в точке A равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в этой точке A.

Физический смысл производной. Пусть функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки M по прямой линии, т.е. $y = f(x)$ – это путь, который прошла точка M от начала отсчёта за время x.

Тогда за время x_0 пройден путь $y = f(x_0)$, а за время x_1 – путь $y = f(x_1)$. За промежуток времени $\Delta x = x_1 - x_0$ точка M пройдёт отрезок пути $\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (рис. 10.3). Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ называют *средней скоростью* движения за время Δx, а предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ определяет *мгновенную скорость* точки в момент времени x_0.

Понятие скорости, взятое из физики, удобно при изучении поведения произвольной функции. Отношение приращения функции к приращению аргумента называется *средней скоростью* изменения функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношение показывает, сколько единиц приращения функции приходится на единицу приращения аргумента.

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, называется *мгновенной* (*истинной*) *скоростью* изменения функции при данном значении аргумента, т.е. $y'(x_0)$ – это мгновенная скорость изменения функции $y(x)$ при $x = x_0$.

Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с её помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие прямые называются касательной, нормалью и секущей к графику функции $y = f(x)$? Используйте чертёж.
2. В чём заключается геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке A?
3. В чём заключается физический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к параболе в данной на ней точке:

а) $y = -x^2 + x$ в точке $x = -2$;

б) $y = x^2 - 3x + 2$ в точке $x = 3$;

в) $y = x^2 - 7x + 10$ в точке $x = 4$.

2. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. В какой момент времени t_0 скорость точки станет равной нулю?

3. Тело массой $m = 12$ кг движется прямолинейно по закону $S = t^2 + 2t + 3$. Найдите кинетическую энергию тела $W_к = \frac{mv^2}{2}$ через 5 с после начала движения.

Тема 10.8. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Слова и словосочетания

Произво́дная (сущ., ж.р.)	Произво́дная второ́го поря́дка Втора́я произво́дная Тре́тья произво́дная Э́нная произво́дная
Дифференциа́л	Дифференциа́л второ́го поря́дка
Ускоре́ние	Сре́днее ускоре́ние

Текст для чтения

Производная $f'(x)$ от функции $y = f(x)$ тоже будет функцией от аргумента x. Значит, её можно дифференцировать, т.е. найти производную от производной.

Производная от производной называется *производной второго порядка* или *второй производной*. Так как вторая производная тоже функция от аргумента x, то её можно дифференцировать, т.е. найти *третью производную*. Аналогично можно найти производную любого порядка. В общем случае говорят о производной порядка n – энной производной.

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = f''(x)dx^2$.

10.1. Обозначения и правила чтения производных высших порядков

y''	игрек два штриха;	$f''(x)$	эф два штриха от икс;
y''_x	игрек два штриха по икс;	$\dfrac{d^2 f}{dx^2}$	дэ два эф по дэ икс дважды;
y'''	игрек три штриха;	$f'''(x)$	эф три штриха от икс;
y'''_x	игрек три штриха по икс;	$\dfrac{d^3 f}{dx^3}$	дэ три эф по дэ икс трижды;
$y^{(n)}$	игрек энная производная;	$f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$	эф энная производная от икс.

Примеры.

1. Найти производную третьего порядка от функции $y = 4x^3 + 7x^2 + 1$.

2. Найти производную второго порядка от функции $y = \sin ax$.

Решение.

1. $y' = 12x^2+14x$; $y'' = 24x+14$; $y''' = 24$.

2. $y' = a \cos ax$; $y'' = (a \cos ax)' = – a^2 \sin ax$.

Физический смысл второй производной. Пусть точка движется прямолинейно по закону $S = f(t)$, где S – путь, пройденный точкой за время t. Скорость движения точки есть производная пути по времени (тема 7 раздела 10): $v = S' = f'(t)$.

Если точка движется неравномерно, то скорость за промежуток времени Δt получит приращение Δv. Отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ показывает изменение скорости в единицу времени; оно называется *средним ускорением* за промежуток времени от t до Δt.

Если приращение $\Delta t \to 0$, то $t + \Delta t \to t$, а среднее ускорение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ будет стремиться к ускорению a в данный момент времени t, т.е.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v' = S'' .$$

Следовательно, ускорение a прямолинейного движения точки в данный момент времени равно второй производной пути по времени.

Пример. Закон прямолинейного движения точки $S = t^3+2t^2$. Найти: 1) скорость движения точки в момент t; 2) ускорение в момент $t = 3$ с.

Решение.

1) $v = S'(t) = 3t^2 + 4t$.

2) $a = v'(t) = S''(t) = 6t +4$.

В момент времени $t = 3$ с ускорение $a = 6 \cdot 3 + 4 = 22$ м/с^2.

Ответ: 1) $v = 3t^2 + 4t$; 2) $a = 22$ м/с^2.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое производная второго порядка?
2. Как найти третью производную от функции $y = f(x)$?
3. Что называют дифференциалом второго порядка?
4. В чём заключается физический смысл второй производной?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Найдите производные указанного порядка:

а) $y = x^4$, $y^{(5)}$ – ? б) $y = x^2 \ln x$, y''' – ?

в) $y = \sqrt{x-1}$, y'' – ? г) $y = x \ln x$, y'' – ?

д) $y = x^2 \sin 2x$, $y^{(4)}$ – ? е) $y = x \cdot e^{5x}$, $y^{(11)}$ – ?

2. Точка движется прямолинейно по закону $S = t^3 + 5t^2 + 4$. Найдите величины скорости и ускорения в момент времени $t = 2$ с.

3. Точка движется прямолинейно по закону $S = (t - 2)^2 e^{-t}$. Найдите скорость и ускорение точки.

Тема 10.9. ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

Слова и словосочетания

Ма́ксимум	То́чка ма́ксимума фу́нкции
Ми́нимум	То́чка ми́нимума фу́нкции
Экстре́мум	То́чки экстре́мума фу́нкции
Стациона́рный, -ая, -ое, -ые	Стациона́рные то́чки
Крити́ческий, -ая, -ое, -ие	Крити́ческая то́чка
Вы́пуклость (сущ., ж.р.)	Промежу́ток вы́пуклости кри́вой
	Вы́пуклость вверх
	Вы́пуклость вниз
Вы́пуклый, -ая, -ое, -ые	Вы́пуклая крива́я
Переги́б	То́чка переги́ба

Текст для чтения

Возрастание и убывание функции. Экстремум. Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком её производной. Если на некотором промежутке $f'(x) > 0$, то функция на этом промежутке возрастает. Если же $f'(x) < 0$, то функция на этом промежутке убывает.

Рассмотрим графики функций $y = f(x)$ (рис. 10.4) и $y = \varphi(x)$ (рис. 10.5). Если слева от некоторого допустимого значения $x = x_0$ функция $y = f(x)$ возрастает, а справа убывает, то значение $x = x_0$ называется *точкой максимума* данной функции, т.е. функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет максимум. Если слева от некоторого допустимого значения $x = x_0$ функция $y = \varphi(x)$ убывает, а справа возрастает, то значение $x = x_0$ называется *точкой минимума* данной функции, т.е. функция $y = \varphi(x)$ при $x = x_0$ имеет минимум.

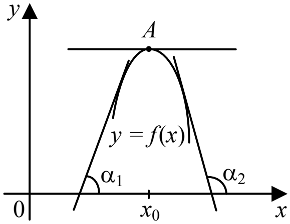


Рис. 10.4

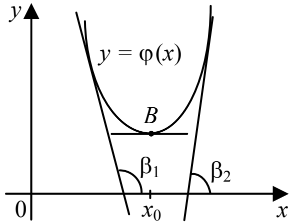


Рис. 10.5

Точка максимума служит границей перехода функции от возрастания к убыванию, а точка минимума – границей перехода функции от убывания к возрастанию.

Точки минимума и максимума называются *точками экстремума*.

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума, надо найти её производную и решить уравнение $f'(x) = 0$. Точки, в которых производная равна нулю, называются *стационарными*.

Признаки экстремума функции. Если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с положительного на отрицательный, то точка x_0 является точкой максимума функции $f(x)$.

Если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с отрицательного на положительный, то точка x_0 является точкой минимума функции $f(x)$.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Решение. Найдём производную данной функции и приравняем её к нулю. Получим $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) \Rightarrow 3x(x + 2) = 0$. Уравнение имеет два корня $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. В этих точках $f(0) = 0$, $f(-2) = 4$. Производная принимает положительные значения слева от точки $x = -2$ и справа от точки $x = 0$ и отрицательные значения между этими точками.

Таким образом, $x = -2$ – точка максимума функции $f(x) = x^3 + 3x^2$, а $x = 0$ – точка минимума.

Стационарные точки, а также точки, в которых функция $y = f(x)$ не имеет производной, в совокупности называются *критическими точками* этой функции.

Направление выпуклости графика функции. Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вниз* в промежутке $a < x < b$, если она лежит выше касательной к кривой, проведённой в любой точке этого промежутка (рис. 10.6).

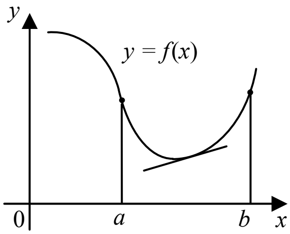


Рис. 10.6

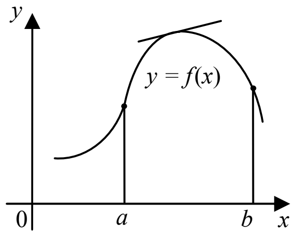


Рис. 10.7

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой вверх* в промежутке $a < x < b$, если она лежит ниже касательной к кривой, проведённой в любой точке этого промежутка (рис. 10.7).

Промежутки, в которых график функции обращён выпуклостью вверх или вниз, называются *промежутками выпуклости графика функции*. Выпуклость кривой, которая является графиком функции $y = f(x)$, характеризуется знаком её второй производной.

Если в некотором промежутке $f''(x) > 0$, то кривая выпукла вниз на этом промежутке; если же $f''(x) < 0$, то кривая выпукла вверх на этом промежутке.

Точка графика функции $y = f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется *точкой перегиба графика функции* $y = f(x)$.

Точками перегиба могут служить только критические точки, принадлежащие области определения функции $y = f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба с координатами $(x_0, f(x_0))$.

Пример. Найти точку перегиба кривой $f(x) = 6x^2 - x^3$.

Решение. Найдём вторую производную функции и приравняем её к нулю. Получим $f'(x) = 12x - 3x^2$, $f''(x) = 12 - 6x \Rightarrow 12 - 6x = 0$. Уравнение имеет только один корень $x = 2$. Так как в промежутке $-\infty < x < 2$ имеем $f''(x) > 0$ (кривая выпукла вниз), а в промежутке $2 < x < \infty$ имеем $f''(x) < 0$ (кривая выпукла вверх), то при $x = 2$ кривая имеет точку перегиба. Находим её ординату: $f(2) = 16$. Итак, точка перегиба имеет координаты (2; 16).

Ответ: точка перегиба имеет координаты (2; 16).

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Чем характеризуется возрастание и убывание функции $y = f(x)$?
2. Что такое точки экстремума? Какие бывают точки экстремума?
3. Какие точки называются критическими?
4. Как найти критические точки функции?
5. Когда кривая называется выпуклой вверх (вниз)?
6. Что такое точки перегиба?
7. Как найти точки перегиба графика функции?

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; в) $y = \frac{1}{2x}$;

г) $y = \ln\frac{1}{x}$; д) $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$; е) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$.

2. Исследуйте функции на экстремум:

а) $y = x^2 - 8x + 12$; б) $y = 2x^4 - x$; в) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$;

г) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$; д) $y = x^2 e^{-x}$; е) $y = x \ln x$.

3. Найдите промежутки выпуклости кривой:

а) $y = 2x^3$; б) $y = x^2$;
в) $y = -x^2 - 1$; г) $y = x^2 + 3x - 1$;
д) $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 6$; е) $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 8$.

4. Найдите точки перегиба кривой:

а) $f(x) = x^3 - x$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$;
в) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$; г) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$.

Тема 10.10. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА

Слова и словосочетания

Иссле́дование (сущ., ср.р.)	Иссле́дование фу́нкции
	Провести́ иссле́дование фу́нкции
Иссле́довать I	Иссле́довать поведе́ние фу́нкции

Текст для чтения

Исследование функции включает в себя изучение основных свойств и характера поведения функции. При этом используют методы решения уравнений, неравенств, вычисления пределов и производных.

План исследования функции:

1. Область определения функции.
2. Непрерывность и точки разрыва.
3. Асимптоты и поведение функции у асимптот.
4. Чётность, нечётность.
5. Периодичность.
6. Точки пересечения с осями координат и промежутки знакопостоянства.
7. Промежутки монотонности и точки экстремума функции.
8. Промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции.
9. Дополнительные точки.
10. График функции.

Примеры. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$; б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

Решение.

а) $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

1. Область определения $D(f) = R$.
2. Функция непрерывна на всей области определения. Точек разрыва нет.
3. Так как функция непрерывна на всей числовой прямой, то она не имеет вертикальных асимптот. Так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(x^2 + 2x - 5 - \frac{6}{x}\right) = \infty,$$

то функция не имеет и наклонных (в том числе горизонтальных) асимптот.

4. $y(-x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \neq y(x) \neq -y(x)$, значит это функция общего вида.
5. Функция непериодическая.
6. Найдём точки пересечения графика функции с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2.$$

Найдём точки пересечения графика функции с осью Oy:

$$x = 0 \Rightarrow y = -6.$$

Промежутки знакопостоянства

$$y > 0 \text{ при } x \in (-3; -1) \cup (2; +\infty);\ y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 2).$$

7. Исследуем функцию на экстремумы:

$$y' = (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)' = 3x^2 + 4x - 5; \quad y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 5 = 0;$$

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{19}}{3} \approx -2{,}12, \qquad x_2 = \frac{-2+\sqrt{19}}{3} \approx 0{,}79.$$

x	$\left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{19}}{3}\right)$	$\frac{-2-\sqrt{19}}{3}$	$\left(\frac{-2-\sqrt{19}}{3}; \frac{-2+\sqrt{19}}{3}\right)$	$\frac{-2+\sqrt{19}}{3}$	$\left(\frac{-2+\sqrt{19}}{3}; +\infty\right)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$\approx 4{,}06$	$\searrow$	$\approx -8{,}21$	$\nearrow$

8. Определим направления выпуклости графика функции:

$$y'' = (3x^2 + 4x - 5)' = 6x + 4; \; y'' = 0 \Rightarrow 6x + 4 = 0, \; x = -\frac{2}{3}.$$

x	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$
y''	–	0	+
y	$\cap$	$-2\frac{2}{27}$	$\cup$

Таким образом, точка с координатами $\left(-\frac{2}{3}; -2\frac{2}{27}\right)$ – точка перегиба графика функции.

9. Найдём дополнительные точки: при $x = -2$ $y = 4$; при $x = 1$ $y = -8$.

10. График функции изображён на рис. 10.8.

б) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

1. Область определения $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Функция непрерывна на всей области определения. Точки $x = -1$ и $x = 1$ – точки разрыва второго рода.

3. Функция имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$ и $x = 1$.

$$\lim_{x \to -1-0} y(x) = \lim_{x \to -1-0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -1+0} y(x) = +\infty; \; \lim_{x \to 1-0} y(x) = -\infty; \; \lim_{x \to 1+0} y(x) = +\infty.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}[y(x)-0]=0$, то функция имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

4. $y(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-y(x)$, значит это нечётная функция. Её график симметричен относительно начала координат.

5. Функция непериодическая.

6. Найдём точки пересечения графика функции с осью Ox:

$$y=0\Rightarrow\ \frac{x}{x^2-1}=0\ \Rightarrow x=0.$$

Найдём точки пересечения графика функции с осью Oy:

$$x=0\Rightarrow y=0.$$

Промежутки знакопостоянства:

$y > 0$ при $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$;

$y < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

7. Исследуем функцию на экстремумы:

$$y'=\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'=\frac{x^2-1-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}<0\ \ \forall\, x\in D(f).$$

Так как производная на всей области определения функции принимает отрицательные значения, то функция на всей области определения убывает и точек экстремума не имеет.

8. Определим направления выпуклости графика функции:

$$y''=\left(-\frac{x^2+1}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-\frac{2x\left(x^2-1\right)^2-\left(x^2+1\right)\cdot 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Вторая производная равна нулю только при $x = 0$ и не существует при $x = -1$ и $x = 1$.

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
y''	–	+	0	–	+
y	$\cap$	$\cup$	0	$\cap$	$\cup$

Таким образом, точка (0; 0) – точка перегиба графика функции.

9. Найдём дополнительные точки:

x	-2	2	-3	3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

10. График функции изображён на рис. 10.9.

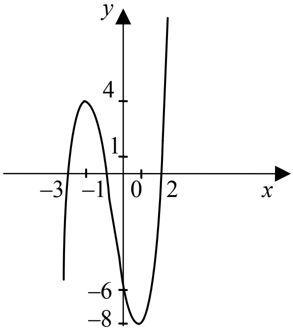


Рис. 10.8

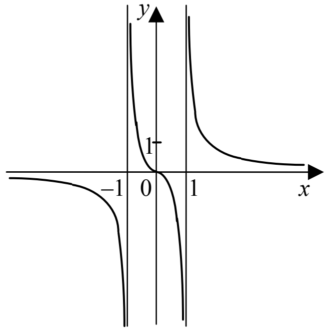


Рис. 10.9

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что включает в себя исследование функции?
2. Что используют при исследовании функции?
3. Каков план исследования функции?

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = x^3 + 3x^2$; б) $y = x^2(x - 1)$;

в) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$; г) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;

д) $y = \sin x - \cos 2x$; е) $y = \sin x + \sin 2x$;

ж) $y = (x-2)\sqrt{x+1}$; з) $y = x^2 + \sqrt{x}$;

и) $y = \dfrac{1}{e^x - 1}$; к) $y = x + \dfrac{1}{e^x}$;

л) $y = \ln(4 - x^2)$; м) $y = x - \ln(x + 1)$.

Тема 10.11. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Слова и словосочетания

Исчисле́ние	Дифференциа́льное исчисле́ние
Интегри́рование	Интегри́рование фу́нкции
Первообра́зная (сущ., ж.р.)	Первообра́зная (фу́нкция)
Интегра́л	Неопределённый интегра́л
	Знак интегра́ла
Интегра́льный, -ая, -ое, -ые	Интегра́льное исчисле́ние
Подынтегра́льный, -ая, -ое, -ые	Подынтегра́льная фу́нкция
	Подынтегра́льное выраже́ние
Интегри́ровать I, проинтегри́ровать I	Проинтегри́ровать фу́нкцию

Текст для чтения

Одной из главных задач дифференциального исчисления является задача нахождения скорости изменения какой-либо функции, т.е. задача нахождения производной (или дифференциала). На практике часто приходится решать обратную задачу: зная скорость изменения функции, найти эту функцию. Такая операция называется *интегрированием*. Это означает, что надо найти функцию $F(x)$ по одному из выражений $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$ или $F'(x) = f(x)$, где $f(x)$ – известная функция.

Искомая функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* по отношению к функции $f(x)$.

Первообразной функцией для данной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$.

Например, первообразной функцией для функции $3x^2$ является x^3, так как $(x^3)' = 3x^2$. Но эта первообразная не единственная, а только одна из многих, так как $(x^3 + C)' = 3x^2$, где $C = \mathrm{const}$ – произвольная постоянная.

Если на некотором промежутке функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то первообразной будет и любая функция вида $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – постоянная.

Если $F(x)$ – какая-либо первообразная функция для функции $f(x)$, то выражение $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а выражение $f(x)\mathrm{d}x$ называется *подынтегральным выражением*, знак $\int$ называется *знаком интеграла*.

По определению неопределённого интеграла можно записать

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

а прочитать «интеграл от выражения эф малое от икс дэ икс равен выражению эф большое от иск плюс цэ».

Операция нахождения первообразной по данной функции называется *интегрированием*. Найти множество всех первообразных для данной функции – это значит *проинтегрировать* данную функцию.

Основные свойства неопределённого интеграла.

1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \; d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)dx = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак неопределённого интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \; a \neq 0.$$

4. Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое интегрирование?
2. Какая функция называется первообразной функцией?
3. Что называется неопределённым интегралом?
4. Что называется подынтегральной функцией?
5. Что называется подынтегральным выражением?
6. Что значит проинтегрировать функцию?
7. Перечислите основные свойства неопределённого интеграла?

Тема 10.12. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Слова и словосочетания

Интегра́л	Табли́ца интегра́лов
Интегри́рование	Непосре́дственное интегри́рование
Ме́тод	Ме́тоды интегри́рования
	Ме́тод заме́ны (подста́новки)
	Ме́тод интегри́рования по частя́м

Текст для чтения

Так как интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, получим табличные интегралы с помощью таблицы производных (прил. 10).

Непосредственное интегрирование. Непосредственным интегрированием принято называть вычисление неопределённых интегралов с помощью непосредственного использования таблицы первообразных (прил. 11) и основных свойств неопределённых интегралов.

Один из приёмов, используемых при вычислении интегралов, называется *методом замены переменных* (*методом подстановки*). Он заключается в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в интеграл $\int F(u)du$, который легко вычисляется по таблице из прил. 11.

Примеры. Вычислить методом замены переменных интегралы:

1) $\int \operatorname{tg} x dx$; 2) $\int \sin(ax+b)dx$; 3) $\int \frac{xdx}{\sin^2(x^2+1)}$; 4) $\int (2x^3+1)^4 x^2 dx$.

Решение.

1) Так как $\sin x\, dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

2) Так как $d(ax+b) = a\, dx$, то $dx = \frac{1}{a} d(ax+b)$. Следовательно,

$$\int \sin(ax+b)dx = \int \sin(ax+b) \cdot \frac{1}{a} d(ax+b) =$$

$$= \frac{1}{a} \int \sin(ax+b) d(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

3) Так как $xdx=\frac{1}{2}d\left(x^2+1\right)$, то

$$\int\frac{xdx}{\sin^2\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{\sin^2\left(x^2+1\right)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x^2+1\right)+C\ .$$

4) Пусть $2x^3+1=u$, тогда $6x^2dx=du$, $x^2dx=(1/6)du$. Тогда

$$\int\left(2x^3+1\right)^4x^2dx=\frac{1}{6}\int u^4du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}+C=\frac{1}{30}\left(2x^3+1\right)^5+C\ .$$

Метод интегрирования по частям основан на использовании формулы $\int udv=uv-\int vdu$. Эта формула позволяет свести вычисление $\int udv$ к вычислению $\int vdu$, который может оказаться проще.

Примеры. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям: 1) $\int\ln xdx$; 2) $\int\operatorname{arctg}xdx$; 3) $\int xe^xdx$; 4) $\int x^2\cos xdx$.

Решение.

1) $$\int\ln xdx\left|\begin{matrix}u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C\,.$$

2) $$\int\operatorname{arctg}xdx\left|\begin{matrix}u=\operatorname{arctg}x & du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ dv=dx & v=x\end{matrix}\right|=x\operatorname{arctg}x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=$$

$$=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C\ .$$

3) $$\int xe^xdx\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=e^xdx & v=e^x\end{matrix}\right|=xe^x-\int e^xdx=$$

$$=xe^x-e^x+C=e^x\left(x-1\right)+C\ .$$

4) $$\int x^2\cos xdx\left|\begin{matrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\cos xdx & v=\sin x\end{matrix}\right|=$$

$$=x^2\sin x-2\int x\sin xdx\left|\begin{matrix}u=2x & du=2dx\\ dv=\sin xdx & v=-\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$=x^2\sin x-2\left(-x\cos x+\int\cos xdx\right)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\ .$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Перечислите табличные интегралы.
2. Что такое непосредственное интегрирование?
3. В чём заключается метод замены переменной?
4. На чём основан метод интегрирования по частям?

***Задание* 3.** Решите задачи:

1. Вычислите интегралы, используя непосредственное интегрирование и метод подстановки:

а) $\int 3x^2 dx$; б) $\int (2x^2-1)^2 dx$; в) $\int \left(5x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{3}{4}}\right) dx$;

г) $\int (e^x + 2x) dx$; д) $\int \frac{2dx}{x+3}$; е) $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$;

ж) $\int (\sin x - 5) dx$; з) $\int \cos 4x dx$; и) $\int \frac{\cos x dx}{3\sin x - 1}$;

к) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$; л) $\int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; м) $\int \frac{dx}{25+x^2}$.

2. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int x \ln x dx$; б) $\int x^2 e^x dx$; в) $\int x \sin x dx$;

г) $\int (x+1) e^x dx$; д) $\int x^2 \sin x dx$; е) $\int x^5 e^{x^2} dx$;

ж) $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$; з) $\int (x^2 + 2x + 3) \cos x dx$; и) $\int \arcsin x dx$;

к) $\int x e^{-x} dx$.

Тема 10.13. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Слова и словосочетания

Интегра́л	Определённый интегра́л
Преде́л	Ве́рхний преде́л
	Ни́жний преде́л

Текст для чтения

Сформулируем без доказательства теорему *Ньютона-Лейбница*.

Теорема Ньютона-Лейбница. Пусть $f(x)$ – данная функция, $F(x)$ – её произвольная первообразная. Тогда имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется *определённым интегралом*, $x = b$ – называется *верхним пределом интегрирования*, $x = a$ – называется *нижним пределом интегрирования*.

Разность $F(b) - F(a)$ записывают в виде $F(x)\Big|_a^b$ и читают «эф от икс подстановка от а до бэ».

Алгоритм нахождения определённого интеграла.

1. Найти первообразную функцию $F(x)$ для функции $f(x)$.
2. Вычислить значение $F(x)$ при $x = b$.
3. Вычислить значение $F(x)$ при $x = a$.
4. Вычислить разность $F(b) - F(a)$.

Примеры. Вычислить определённые интегралы:

1. $\int_2^3 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\left(3^2 - 2^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

2. $\int_0^{\pi/6} \cos xdx = \sin x\Big|_0^{\pi/6} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Основные свойства определённого интеграла.

1. При перестановке пределов интегрирования знак определённого интеграла изменяется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Определённый интеграл суммы функций равен сумме определённых интегралов этих функций:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Пример.

$$\int_{-1}^{3}(x^3+1)\,dx=\left(\frac{x^4}{4}+x\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\left(\frac{3^4}{4}+3\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}+(-1)\right)=24.$$

Вычисление определённого интеграла методом замены переменной.

При вычислении определённого интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определённый интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ преобразуется с помощью подстановки $u = \varphi(x)$ или $x = \psi(u)$ в определённый интеграл относительно новой переменной u. При этом старые пределы интегрирования a и b заменяются соответственно новыми пределами интегрирования α и β, которые находятся из исходной подстановки.

Примеры. Вычислить определённые интегралы:

1) $I_1=\int_2^3(2x-1)^3\,dx$; 2) $I_2=\int_0^1(2x^3+1)^4\,x^2dx$; 3) $I_3=\int_{\sqrt{2}/3}^{\sqrt{3}/3}\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Решение.

1) Введём новую переменную интегрирования с помощью подстановки $2x - 1 = u$. Дифференцируя, получим $2\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, откуда $\mathrm{d}x = 0{,}5\mathrm{d}u$. Найдём новые пределы интегрирования, подставив в выражение $2x - 1 = u$ значения $x = 2$ и $x = 3$ соответственно: $u_{x=2} = 2\cdot 2 - 1 = 3$, $u_{x=3} = 2\cdot 3 - 1 = 5$. Следовательно,

$$I_1=\frac{1}{2}\int_3^5 u^3du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Bigg|_3^5=\frac{1}{8}\left(5^4-3^4\right)=68.$$

2) Пусть $2x^3 + 1 = u$, тогда $6x^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$, $x^2\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/6$. Вычислим новые пределы интегрирования: $u_{x=0} = 2\cdot 0^3 + 1 = 1$, $u_{x=1} = 2\cdot 1^3 + 1 = 3$. Таким образом,

$$I_2=\frac{1}{6}\int_1^6 u^4du=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^5}{5}\Bigg|_1^3=\frac{1}{30}\left(3^5-1^5\right)=8\frac{1}{15}.$$

3) Преобразуем подкоренное выражение и введём новую переменную: $4-9x^2=4\left[1-\left(\frac{3}{2}x\right)^2\right]$, $\frac{3}{2}x=u$, $dx=\frac{2}{3}du$. Найдём новые пределы интегрирования:

$$u_{x=\sqrt{2}/3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ u_{x=\sqrt{3}/3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно,

$$I_3 = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{4(1-u^2)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot \arcsin u\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{3}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{36}.$$

Вычисление определённого интеграла методом интегрирования по частям выполняется по следующей формуле:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Примеры. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int_1^e \ln xdx$; 2) $\int_0^1 \operatorname{arctg} xdx$; 3) $\int_1^2 xe^x dx$.

Решение.

1) $$\int_1^e \ln xdx \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{xdx}{x} = e - \int_1^e dx = e - x\Big|_1^e =$$

$= e - e + 1 = 1.$

2) $$\int_0^1 \operatorname{arctg} xdx \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

3) $$\int_1^2 xe^e dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 xe^e dx = 2e^2 - e^1 - e^x\Big|_1^2 = e^2.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Сформулируйте теорему Ньютона-Лейбница.
2. Что называется определённым интегралом?
3. Каков алгоритм нахождения определённого интеграла?
4. Перечислите основные свойства определённого интеграла.
5. Как вычислить определённый интеграл методом замены переменной?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Вычислите интегралы, используя непосредственное интегрирование и метод подстановки:

а) $\int_{-1}^{0}\left(x^3+2x\right)dx$; б) $\int_{-2}^{3}\left(4x^3-3x^2+2x+1\right)dx$; в) $\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{x^3}$;

г) $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x^2}\,dx$; д) $\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; е) $\int_{1}^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$;

ж) $\int_{1}^{3}e^{2x}dx$; з) $\int_{0}^{1}e^{3x}dx$; и) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x-\sin x)dx$;

к) $\int_{0}^{\pi/4}\frac{4dx}{\cos^2 x}$; л) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; м) $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$.

2. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int_{1}^{e}x\ln x dx$; б) $\int_{0}^{1}xe^{-x}dx$;

в) $\int_{0}^{\pi/2}x\sin x dx$; г) $\int_{1}^{2}(x+1)e^{x}dx$;

д) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^2\sin x dx$; е) $\int_{0}^{1}$.

Тема 10.14. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Слова и словосочетания

Трапе́ция	Криволине́йная трапе́ция
Едини́ца	Квадра́тная едини́ца (кв.ед.)

Текст для чтения

Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой. Рассмотрим непрерывную на всей области определения функцию $y = f(x)$, график которой изображён на рис. 10.10.

Кривая $f(x)$, ось Ox, прямые $x = a$ и $x = b$ ограничивают криволинейную трапецию. Площадь этой фигуры выражается определённым интегралом

$$S=\int_a^b f(x)\,dx .$$

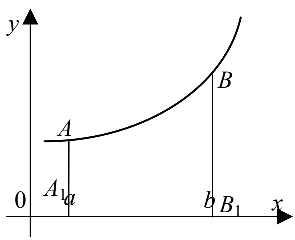


Рис. 10.10

Примеры. Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями: 1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$; 2) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$; 3) $y = x^2$, $y = 2x$.

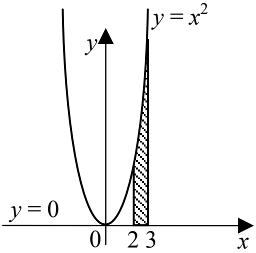


Рис. 10.11

Решение.

1) Фигура, ограниченная линиями $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$, изображена на рис. 10.11. Её площадь

$$S = \int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{1}{3}\left(3^3 - 2^3\right) = 6\frac{1}{3} \text{ кв.ед.}$$

2) Фигура, ограниченная линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$, изображена на рис. 10.12.

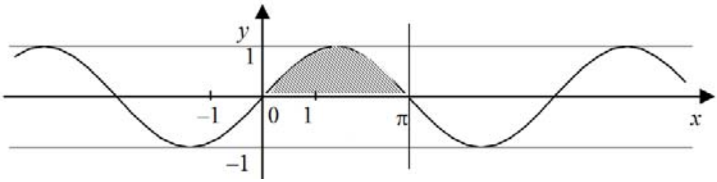


Рис. 10.12

Её площадь: $S = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$ кв.ед.

3) Фигура, ограниченная линиями $y = x^2$, $y = 2x$, изображена на рис. 10.13. Для вычисления точек пересечения заданных линий необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x, \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

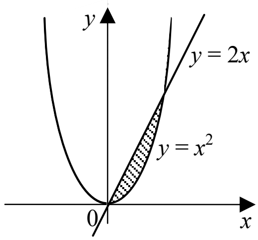


Рис. 10.13

Искомая площадь равна разности площадей:

$$S = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 x^2 dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 4 - \frac{8}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ кв.ед.}$$

Вычисление пути, пройденного точкой. Путь S, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v = f(t)$, $v \geq 0$, за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt.$$

Примеры.

1. Скорость движения точки изменяется по закону

$$v = (3t^2 + 2t + 1) \text{ м/с.}$$

Найти путь S, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Решение. Найдём путь с помощью определённого интеграла:

$$S=\int_0^{10}\left(3t^2+2t+1\right)dt=\left(t^3+t^2+t\right)\Big|_0^{10}=10^3+10^2+10=1110 \text{ м.}$$

Ответ. $S = 1110$ м.

2. Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь S, пройденный точкой за четвёртую секунду.

Решение. Здесь пределами интегрирования являются $t_1 = 3$, $t_2 = 4$. Следовательно,

$$S=\int_3^{4}\left(9t^2-8t\right)dt=\left(3t^3-4t^2\right)\Big|_3^{4}=83 \text{ м.}$$

Ответ. $S = 83$ м.

3. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью v = (39,2 – 9,8t) м/с. Найти наибольшую высоту H_{max} подъёма тела.

Решение. Тело достигает наибольшей высоты подъёма в момент времени t_0, когда $v = 0$, т.е. 39,2 – 9,8t = 0, следовательно, $t_0 = 4$ с.

$$H_{max}=\int_0^{4}(39{,}2-9{,}8t)dt=\left(39{,}2t-4{,}9t^2\right)\Big|_0^{4}=78{,}4 \text{ м.}$$

Ответ. $H_{max} = 78{,}4$ м.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое криволинейная трапеция?
2. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
3. Как найти площадь криволинейной трапеции?
4. В чём заключается физический смысл определённого интеграла?
5. Как найти путь, пройденный точкой?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Вычислите площади фигур, ограниченных данными линиями:

а) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; б) $y = x^2 - 4x + 5$, $x - y + 5 = 0$;
в) $y = x^2 - 8x + 16$, $x + y - 6 = 0$; г) $y = -x^2 + 6x - 5$, $y = 0$;
д) $4x^2 - 9y + 18 = 0$; $2x^2 - 9y + 36 = 0$.

2. Уравнение скорости прямолинейного движения точки $v = 3t^2 - 2t - 1$ (v в м/с, t в с). Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

3. Уравнение скорости прямолинейного движения точки $v = 6t^2 - 10t$ (v в м/с, t в с). Найдите путь, пройденный точкой за третью секунду.

Раздел 11
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Тема 11.1. МАТРИЦЫ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА

Слова и словосочетания

Табли́ца	Прямоуго́льная табли́ца чи́сел
Ма́трица	Едини́чная ма́трица
	Квадра́тная ма́трица
	Нулева́я ма́трица
	Симметри́чная ма́трица
	Прямоуго́льная ма́трица
Разме́р	Разме́р ма́трицы
Разме́рность (сущ., ж.р.)	Разме́рность ма́трицы
Столбе́ц, столбцы́	Столбе́ц ма́трицы
Строка́	Строка́ ма́трицы
Элеме́нт	Элеме́нт ма́трицы
Диагона́ль (сущ., ж.р.)	Гла́вная диагона́ль
	Побо́чная диагона́ль
Ве́ктор	Ве́ктор-столбе́ц
	Ве́ктор-строка́

Текст для чтения

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Так, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – это матрица, в которой две строки и три столбца. Обозначают матрицы заглавными латинскими буквами.

Элементы матрицы обозначают теми же буквами, что и матрицу, но строчными: $A = (a_{ij})$. В этой матрице всего 6 элементов: $a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 4$ (надо читать a_{11} – «а-один-один», a_{12} – «а-один-два» и т.д.). Число строк и столбцов в матрице называют её *размерами*, причём число строк называют первым. Итак, A есть матрица размером 2×3 («два на три»).

Пример. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$. Она имеет две строки и два столбца, значит, это матрица размером 2×2. Матрица содержит четыре элемента: $a_{11} = 4$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 7$, $a_{22} = 1$.

Две матрицы считаются *равными* (одинаковыми) тогда и только тогда, когда у них совпадают их размеры (число строк и число столбцов) и совпадают сами строки и столбцы. Пусть, например, $A = (a_{ij})$ есть матрица $n \times m$ и $B = (b_{ij})$ есть матрица $k \times s$. $A = B$ тогда и только тогда, когда $k = n$, $s = m$ и $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1, 2, \ldots, m$.

Если число строк не равно числу столбцов, то матрица называется *прямоугольной*. Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*. В квадратной матрице элементы a_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, n$) образуют *главную диагональ* матрицы. А элементы $a_{i,\,n-i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) образуют *побочную диагональ* матрицы.

Если в квадратной матрице только на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы – нули, то такая матрица называется *единичной*. Так, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть единичная матрица размерности 3. В каждой размерности есть своя единичная матрица.

Также в каждой размерности есть *нулевая* матрица. Например, $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица размерности 3.

Если все элементы квадратной матрицы A удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица A называется *симметричной*.

Примеры.

1. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Она имеет размеры 2×3, т.е. не является квадратной, поэтому не может быть симметричной.

2. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Она имеет размеры 2×2, т.е. является квадратной. Сравним её элементы: $a_{12} = a_{21} = 3$ Так как это верное равенство, то матрица – симметрична.

Если матрица имеет только один столбец, т.е. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, то такую матрицу называют *вектор-столбцом* размерности k. Если матрица имеет только одну строку, т.е. $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_s)$, то такую матрицу называют *вектор-строкой* размерности s.

Задания

***Задание* 1**. Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2**. Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что такое матрица? Из чего состоит матрица?
2. Что называют размерами матрицы?
3. Какие матрицы называются равными?
4. Какие матрицы называются квадратными и прямоугольными?
5. Что такое главная и побочная диагонали?
6. Какая матрица называется симметричной?
7. Какая матрица называется вектор-столбцом?
8. Какая матрица называется вектор-строкой?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. В заданной матрице определите её размеры и выпишите все элементы:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}4&6&0\\2&0&8\end{pmatrix};\quad \text{б) } B=\begin{pmatrix}1&0\\1&4\\0&2\end{pmatrix};\quad \text{в) } C=\begin{pmatrix}5&12\\1&8\end{pmatrix};$$

$$\text{г) } D=\begin{pmatrix}2&3&0\\6&3&16\\2&0&8\end{pmatrix};\quad \text{д) } F=\begin{pmatrix}4&-1\\8&-2\\0&0\end{pmatrix};\quad \text{е) } G=\begin{pmatrix}2&0&1\\6&3&2\\4&7&5\end{pmatrix}.$$

2. Проверьте, какие из приведённых матриц являются симметричными:

$$\text{а) } A=\begin{pmatrix}4&6&0\\6&0&6\end{pmatrix};\quad \text{б) } B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&4&2\\0&2&5\end{pmatrix};\quad \text{в) } C=\begin{pmatrix}5&12\\12&8\end{pmatrix};$$

$$\text{г) } D=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&6&1\\0&1&8\end{pmatrix};\quad \text{д) } F=\begin{pmatrix}4&8&1\\8&-3&2\\1&2&0\end{pmatrix};\quad \text{е) } G=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&7\\4&7&5\end{pmatrix}.$$

Тема 11.2. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Слова и словосочетания

Транспони́рование	Транспони́рование ма́трицы
Транспони́ровать I	Транспони́ровать ма́трицу
Транспони́рованный, -ая, -ое, -ые	Транспони́рованная ма́трица

Текст для чтения

Транспонирование матриц. Если в матрице поменять местами строки и столбцы, то получится новая матрица – *транспонированная*. При этом первая строка исходной матрицы становится первым столбцом транспонированной матрицы, вторая строка – вторым столбцом и т.д. Если исходная матрица имеет размеры $m \times n$, то транспонированная к ней матрица будет иметь размеры $n \times m$.

Транспонировать матрицу – значит поменять местами строки и столбцы. Например, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ – исходная матрица, тогда

$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ – транспонированная матрица.

Умножение матрицы на число. Чтобы матрицу умножить на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

Например, умножим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ на число 2. Получим матрицу $2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – матрицы одних и тех же размеров, тогда матрица-сумма $A + B$ состоит из элементов $a_{ij} + b_{ij}$, т.е. при сложении матриц складываются их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Матрицы разных размеров складывать нельзя!

Операция сложения матриц обладает следующими *свойствами*:

1) коммутативность: $A + B = B + A$;
2) ассоциативность: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Пример. Сложим матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 & 0+3 \\ 1+1 & 0+4 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Иногда (но не всегда!) матрицы можно умножить одну на другую.

Пусть даны две матрицы – $A = (a_{ij})$ размерами $m \times n$ и $B = (b_{ij})$ размерами $k \times s$. Произведение AB существует тогда и только тогда, когда $n = k = r$. При этом в результате получается матрица C размерами $m\times s$ с элементами $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$ или $c_{ij} = \sum_{t=1}^{r} a_{it}b_{tj}$.

Пример. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot0+3\cdot4+0\cdot2 \\ 1\cdot1+0\cdot1+4\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4+4\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA тоже существует:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot3+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot4 \\ 1\cdot2+4\cdot1 & 1\cdot3+4\cdot0 & 1\cdot0+4\cdot4 \\ 0\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot3+2\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $AB \neq BA$. Следовательно, умножение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. зависит от порядка множителей. Если матрицу V нельзя умножить на матрицу W, то говорят также, что произведение VW не существует.

Так как вектор-столбцы и вектор-строки – это частные случаи матриц, то можно (иногда!) перемножать матрицы и векторы и даже векторы друг с другом по описанному правилу перемножения матриц.

Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$YA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot2-1\cdot1 & 4\cdot3-1\cdot0 & 4\cdot0-1\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -4 \end{pmatrix},$$

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot1+3\cdot2+0\cdot0 \\ 1\cdot1+0\cdot2+4\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$XY = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot4 & 1\cdot(-1) \\ 2\cdot4 & 2\cdot(-1) \\ 0\cdot4 & 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что произведения XA, AY, YX не существуют.

Свойства операции умножения матриц:

1) ассоциативность: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2) дистрибутивность относительно сложения: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, $(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$.

Для *некоторых* матриц умножение обладает свойством коммутативности, т.е. $A \cdot B = B \cdot A$.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Что значит транспонировать матрицу?
2. Как умножить матрицу на число?
3. Какие матрицы можно складывать и вычитать?
4. Как выполнить сложение и вычитание двух матриц?
5. Какими свойствами обладает операция сложения матриц?
6. Для каких матриц можно выполнить умножение?
7. Как умножить матрицу A на матрицу B?
8. Какими свойствами обладает операция умножения матриц?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Найдите значение выражения λA, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = -3$;

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$; г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$;

д) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0{,}5$; е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\lambda = 0{,}1$.

2. Найдите значение выражений $A+B$ и $A - B$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 5 & 12 & -1 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найдите значение выражений AB и BA (если они существуют) для следующих матриц:

а) $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 5 & 12 & -1 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 8 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найдите матрицу A^T, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 5 & 12 & -1 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5. Найдите значение выражения $2A + 5B$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$

6. Найдите значение выражения A^3, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$

7. Найдите значение выражения $2A^2 + 3A + 5E$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 11.3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МАТРИЦ

Слова и словосочетания

Преобразова́ние	Элемента́рное преобразова́ние
Перестано́вка	Перестано́вка стро́к
Эквивале́нтный, -ая, -ое, -ые	Эквивале́нтные ма́трицы
Вид	Ма́трица треуго́льного ви́да
Вычёркивание	Вычёркивание строки́
	Вычёркивание столбца́
Вычёркивать I, вы́черкнуть I	Вы́черкнуть строку́ ма́трицы

Текст для чтения

С матрицами можно проводить элементарные преобразования:

1. Замена строк столбцами, а столбцов – строками (транспонирование).
2. Перестановка строк матрицы.
3. Умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля.
4. Прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

Полученные в результате таких преобразований матрицы называются *эквивалентными*.

С помощью элементарных преобразований можно матрицу преобразовать к *треугольному виду*, когда все элементы, стоящие под главной диагональю, равны нулю.

Пример.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Чтобы с помощью элементарных преобразований получить под главной диагональю нули, нужно выполнить следующие действия.

1. Умножить первую строку на –3 и прибавить результат ко второй строке:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -10 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Умножить первую строку на 2 и результат прибавить к третьей строке:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -10 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -10 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix}.$$

3. Умножить вторую строку на 1 и результат прибавить к третьей строке:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -10 \\ 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Получили матрицу треугольного вида.

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Какие элементарные преобразования можно проводить с матрицами?
2. Какие матрицы называются эквивалентными?
3. Когда говорят, что матрица имеет треугольный вид?
4. Как привести матрицу к треугольному виду?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Приведите матрицу к треугольному виду, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$;   б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;   в) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 16 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $C = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$;   д) $F = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;   е) $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Тема 11.4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Слова и словосочетания

Определи́тель (сущ., м.р.)	Определи́тель ма́трицы
Мино́р	Мино́р элеме́нта ма́трицы
Алгебраи́ческое дополне́ние	Алгебраи́ческое дополне́ние элеме́нта
Ма́трица	Обра́тная ма́трица

Текст для чтения

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – квадратная матрица второго порядка. *Определителем* матрицы A называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$. Определитель обозначается ΔA («дельта-а») или $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Схема вычисления определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Примеры. Вычислим определители второго порядка:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 9 \cdot 1 = 16 - 9 = 7$;

2. $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = -12 - (-2) = -12 + 2 = -10$.

Определитель квадратной матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ вычисляется так:

$$\Delta A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Схема вычисления определителя третьего порядка:

$$A = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Например, вычислим определитель третьего порядка

$$\left| \begin{matrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{matrix} =$$
$$= 5 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 7 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 3(-1) \cdot 6 =$$
$$= 60 + 84 - 6 - 28 - 60 + 18 = 68.$$

Миноры и алгебраические дополнения. *Минором* некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного определителя вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Так, минором элемента a_{11} определителя третьего порядка является определитель $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^s$, где s – сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. То есть алгебраическим дополнением элемента a_{11} определителя третьего порядка будет

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей.

1. Определитель не изменится при транспонировании.
2. Переставить две строки (два столбца) определителя – значит умножить его на –1.

3. Если определитель имеет две одинаковые строки (столбца), то он равен нулю.

4. Общий множитель элементов строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

5. Чтобы определитель умножить на число k, можно все элементы любой строки (столбца) определителя умножить на это число k.

6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

7. Определитель равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца), например i-й, на их алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} \cdot A_{ik}\right),$$

где A_{ik} – алгебраические дополнения элементов a_{ik}.

Эти свойства используют, чтобы найти определитель любой квадратной матрицы.

Обратная матрица. Пусть A – какая-нибудь матрица. Тогда матрица B называется *обратной* к матрице A, если $AB = BA = E$, где E – единичная матрица тех же размеров.

Проведём аналогию с числами: для числа 2 число $\frac{1}{2}$ есть обратное, так как $2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 2^{-1} = 1$. Поэтому матрица, обратная к A, обозначается A^{-1}.

Только **квадратная** матрица может иметь обратную матрицу.

Порядок нахождения обратной матрицы.

1. Проверить, квадратная ли матрица A. Если нет, то обратной матрицы не существует. Если да, то выполнить шаг 2.

2. Вычислить определитель ΔA. Если он равен нулю, то обратной матрицы не существует. Если он не равен нулю, то выполнить шаг 3.

3. Вместо каждого элемента матрицы поставить его алгебраическое дополнение.

4. Транспонировать полученную матрицу.

5. Каждый элемент новой матрицы разделить на определитель ΔA исходной матрицы.

Например, рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Вычислим её определитель: $\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1$.

Так как определитель $\Delta A = 1 \neq 0$, то обратная матрица существует. Выпишем для всех элементов их алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3,$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Получим

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка. Умножим матрицу A на матрицу A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задания

***Задание* 1.** Прочитайте слова и словосочетания и переведите незнакомые по словарю.

***Задание* 2.** Прочитайте текст и ответьте на вопросы.

1. Как вычислить определитель матрицы второго порядка?
2. Как вычислить определитель матрицы третьего порядка?
3. Какая матрица называется обратной к матрице A?
4. Как найти обратную матрицу?

***Задание* 3.** Решите задачи.

1. Вычислите определители и найдите обратные матрицы для следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $C = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$;

г) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; д) $F = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Вычислите определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -4 & 3 \\ -5 & 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие, предназначенное для студентов-иностранцев, проходящих довузовскую подготовку, охватывает вопросы, изучаемые в основном курсе математике по программам технического и экономического профилей.

В настоящем пособии в логической последовательности рассматриваются основные понятия геометрии векторов, основы алгебры (выражения, уравнения, неравенства, функции, комплексные числа, тригонометрия), начала анализа (последовательности, предел, производная, интеграл), основные понятия теории матриц. Материал пособия дополнен необходимыми иллюстрациями.

Систематическая вдумчивая работа с использованием настоящего пособия позволит читателю научиться понимать и грамотно использовать научную математическую терминологию.

Авторы выражают надежду, что данное пособие станет помощником будущим специалистам на их пути освоения русского языка, научного стиля речи и математики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Степаненко, Е. В.** Математика. Вводный курс : учеб. пособие / Е. В. Степаненко, И. Т. Степаненко, Т. В. Губанова. – М. : ФЛИНТА: Наука, 2012. – 104 с.

2. **Богомолов, Н. В.** Сборник задач по математике : учеб. пособие для ссузов / Н. В. Богомолов. – 4-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2007. – 204 с.

3. **Богомолов, Н. В.** Математика : учеб. для ссузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 4-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2006. – 395 с.

4. **Сборник** задач по курсу математического анализа. Ч. I : учеб.-метод. пособие для студентов физ.-мат. ф-тов / В. К. Кабанин, М. А. Ляшко, С. А. Ляшко, и др. ; под ред. С. А. Ляшко. – Балашов : Изд-во БГПИ, 2000. – 132 с.

5. **Погорелов, А. В.** Геометрия : учеб. для 7 – 11 кл. общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов. – 5-е изд. – М. : Просвещение, 1995. – 383 с.

6. **Крамор, В. С.** Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. – М. : Просвещение, 1990. 416 с.

7. **Громов, Ю. Ю.** Тригонометрия : учеб. пособие / Ю. Ю. Громов, Н. А. Земской, О. Г. Иванова и др. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – 104 с.

8. **Громов, Ю. Ю.** Алгебра : учеб. пособ. / Ю. Ю. Громов, О. Г. Иванова, А. В. Лагутин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. – 152 с.

9. **Начало** математического анализа : учеб.-метод. пособие / авт.-сост. : А. Я. Алеева, Ю. Ю. Громов, О. Г. Иванова, А. В. Лагутин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. – 56 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА

Степенью числа a с показателем k, где $k \in N$ ($k \neq 1$), $a \in R$, называется произведение k множителей, каждый из которых равен a:

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ раз}}, \; a^1 = a, \; a^0 = 1, \; a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0).$$

Число a – это основание степени, а число k – это показатель степени.

Свойства степени.

1. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основания не изменяются:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \; n, m \in Z.$$

2. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основания не изменяются:

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \; n, m \in Z.$$

3. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание не изменяется:

$$(a^n)^m = a^{nm}, \; n, m \in Z.$$

4. Степень произведения равна произведению степеней множителей:

$$(abc)^k = a^k b^k c^k, \; k \in Z.$$

5. Степень частного равна частному степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}, \; b \neq 0, \; k \in Z.$$

Приложение 2

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

1. Разность квадратов: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
2. Квадрат суммы: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. Квадрат разности: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
4. Квадрат трёхчлена: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.
5. Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
6. Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
7. Куб суммы: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
8. Куб разности: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Заметим, что $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, т.е. сумму квадратов двух действительных чисел можно разложить на комплексные множители.

Приложение 3

СВОЙСТВА КОРНЕЙ

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны равенства:

1) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;

4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

5) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

6) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $(a \geq 0)$;

7) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

8) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ $(a \geq 0)$;

9) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, если $0 \leq a < b$;

10) $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$.

Приложение 4

ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

Неравенство	Обозначение	Как читать промежуток
$a < x < b$	$x \in (a;\, b)$ $x \in]a;\, b[$	Интервал от a до b (открытый промежуток)
$a \leq x \leq b$	$x \in [a;\, b]$	Отрезок от a до b (замкнутый или закрытый промежуток)
$a \leq x < b$	$x \in [a;\, b)$ $x \in [a;\, b[$	Полуинтервал от a до b, закрытый слева (включая a)
$a < x \leq b$	$x \in (a;\, b]$ $x \in]a;\, b]$	Полуинтервал от a до b, закрытый справа (включая b)
$-\infty < x < +\infty$	$x \in (-\infty;\, +\infty)$ $x \in]-\infty;\, +\infty[$	Числовая прямая: интервал от минус бесконечности до плюс бесконечности (R)
$-\infty < x < a$	$x \in (-\infty;\, a)$ $x \in]-\infty;\, a[$	Интервал от минус бесконечности до a
$-\infty < x \leq a$	$x \in (-\infty;\, a]$ $x \in]-\infty;\, a]$	Луч: полуинтервал от минус бесконечности до a, закрытый справа (включая a)
$a < x < +\infty$	$x \in (a;\, +\infty)$ $x \in]a;\, +\infty[$	Интервал от a до плюс бесконечности
$a \leq x < +\infty$	$x \in [a;\, +\infty)$ $x \in [a;\, +\infty[$	Луч: полуинтервал от a до плюс бесконечности, закрытый слева (включая a)

Приложение 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МОДУЛЯ

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Для любых действительных чисел a и b имеют место соотношения:

1) $|-a| = |a|$; 2) $|a|^2 = a^2$; 3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$; 5) $|a + b| \le |a| + |b|$; 6) $|a - b| \ge |a| - |b|$.

Приложение 6

ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
2. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\alpha \ne \dfrac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.
3. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
4. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, $\alpha \ne \pi k$, $k \in Z$.

Приложение 7

ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Приложение 8

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Функция	Аргумент β							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\beta$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Правило:

1. Если угол α откладывается от горизонтальной оси, то название функции не изменяется; от вертикальной – функция меняет название.

2. Знак приведённой функции совпадает со знаком приводимой функции, т.е., считая угол острым, надо определить знак функции в левой части.

Приложение 9

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Формулы сложения

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta};$$
$$\mathrm{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta+1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\beta}.$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Формулы тройного угла

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формулы половинного угла

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}; \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Приложение 10

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

$C' = 0$ (C – константа)	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ $(\lvert u\rvert < 1)$
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ $(\lvert u\rvert < 1)$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Приложение 11

ТАБЛИЦА НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$\int dx = x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C$, $n \neq -1$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln\lvert a+bx\rvert + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$

Приложение 12

СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Для логарифмов выполняются следующие свойства ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$):

1) $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$

2) $\log_a a = 1$;

3) $\log_a 1 = 0$;

4) $c = \log_a a^c$;

5) $c = a^{\log_a c}$;

6) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$;

7) $\log_a (x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|$;

8) $\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2} \right) = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|$;

9) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a |x|$;

10) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$;

11) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;

12) $\log_a b = \log_{a^n} b^n$, $n \neq 0$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА, ИХ СИСТЕМЫ И СОВОКУПНОСТИ

Раздел 5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Раздел 11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Учебное издание

СТЕПАНЕНКО Елена Викторовна
СТЕПАНЕНКО Игорь Тимофеевич

МАТЕМАТИКА
ОСНОВНОЙ КУРС

Учебное пособие

Редактор З. Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию Т. Ю. Зотова

ISBN 978-5-8265-1412-2

Подписано в печать 20.05.2015.
Формат 60×84 / 16. 14,65 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 248

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08;
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru