

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Д. Ю. МУРОМЦЕВ, В. Н. ШАМКИН

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ПРИНЯТИЕ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию
в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники
и автоматизации в качестве учебного пособия для магистрантов
по направлению 11.04.03 «Конструирование и технология
электронных средств» (магистерские программы
«Информационные технологии проектирования электронных средств»
и «Проектирование систем связи и телекоммуникаций»)*



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2015

УДК 658.512.011.56.001.57:681.5
ББК 32.965-02-5-05
М91

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры «Общая физика»
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г. Р. Державина»

И. И. Пасечников

Доктор технических наук, профессор кафедры «Информационные
процессы управления» ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

В. А. Погонин

Муромцев, Д. Ю.

М91 Методы оптимизации и принятие проектных решений : учебное
пособие для магистрантов по направлению 11.04.03 / Д. Ю. Муром-
цев, В. Н. Шамкин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. –
80 с. – 100 экз.

ISBN 978-5-8265-1451-1

Основное внимание уделяется разработке математического и алгоритми-
ческого обеспечения информационных технологий поддержки принятия
обоснованных проектных решений, осуществляемых в условиях полной опре-
делённости (задачи оптимизации), а также в условиях неопределённости цели
и среды. Изложение материала сопровождается численными примерами.

Предназначено для магистрантов по направлению 11.04.03 «Конструи-
рование и технология электронных средств» (магистерские программы
«Информационные технологии проектирования электронных средств» и
«Проектирование систем связи и телекоммуникаций») при изучении теоре-
тических курсов, выполнении лабораторных, курсовых и дипломных работ
с применением компьютерных технологий поддержки принятия проектных
решений, а также других инженерных специальностей по автоматизации
конструкторско-технологического проектирования и экспертным системам.
Может быть использовано инженерами, аспирантами и преподавателями
при проведении научных исследований.

УДК 658.512.011.56.001.57:681.5
ББК 32.965-02-5-05

ISBN 978-5-8265-1451-1

© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический
университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2015

ВВЕДЕНИЕ

Принятие решений – наиболее ответственная и интеллектуальная сфера деятельности человека и в первую очередь руководителя любого ранга. Например, руководству предприятий электронного профиля приходится принимать решения по разработке главного курса развития предприятия, созданию конкурентных преимуществ, выбору новых видов продукции для производства, увеличению доли рынка и т.д.

Проект редко бывает успешным, если его руководители не используют методы принятия обоснованных решений. Основными характеристиками проектов являются:

- наличие определённых целей;
- выполняются людьми;
- требуются для выполнения ресурсы, количество которых ограничено;
- подлежат управлению, т.е. планируются, контролируются и регулируются;
- уникальность;
- наличие неопределённости;
- сложность решаемых задач;
- новизна;
- неповторяемость.

Задачи выбора наилучших вариантов на разных этапах проектирования наиболее приемлемы для использования методов принятия решений. Особенности таких задач являются:

- цена ошибки от неправильно принятого решения может быть высокой и связанной с серьёзными материальными или иными затратами;
- уникальный характер задач, для решения которых отсутствуют разработанные математические модели;
- сложность решаемых математических задач, учитывающих множество различного рода ограничений и частных показателей;
- для некоторых задач отсутствуют достоверные данные и приходится принимать решение в условиях неопределённости;

- многие задачи требуют оперативного решения;
- требуется обширный справочный материал (базы данных);
- в ряде случаев в процессе принятия решения возможно использовать только мнение экспертов (специалистов в конкретных предметных областях).

Успех решения задач во многом зависит от того, насколько чётко и правильно они сформулированы, какой выбран метод для их решения и насколько грамотно интерпретируются результаты решения.

Возможны различные классификационные признаки задач принятия решений. В частности, по степени или условиям, в которых они принимаются, различают:

- задачи принятия решений в условиях определённости, в которых вся необходимая исходная информация точно известна (задачи оптимизации);

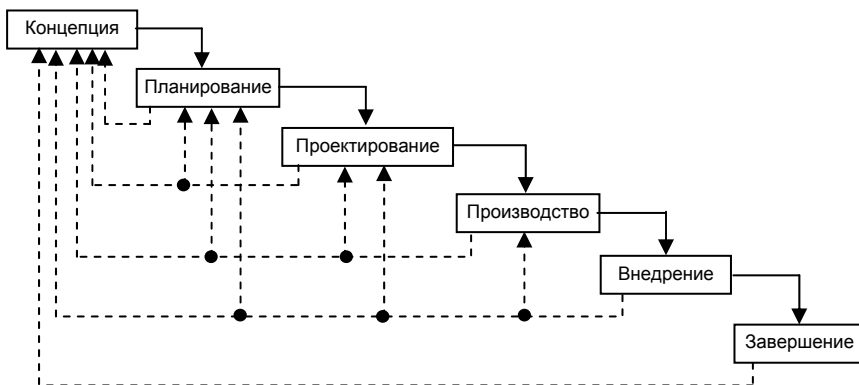
- задачи принятия решений в условиях неопределённости, в которых исходные данные отсутствуют, а главную роль играют интуиция и опыт экспертов;

- задачи принятия решений в условиях частичной неопределённости, в которых известными являются лишь некоторые характеристики альтернативных вариантов для возможных ситуаций, а иногда и вероятности этих ситуаций. Характер изменения ситуаций может быть нейтральным (игры с природой) или противодействующим конфликтным.

Именно этот признак взят за основу при изложении материала в учебном пособии.

1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Встречающиеся на практике задачи проектирования, требующие применения методов принятия решений, исключительно разнообразны. Наибольшее распространение получили два вида моделей выполнения проектов – каскадная («водопад») и спиральная (рис. 1.1). Для каскадной модели характерны обратные связи, по которым возможна коррекция результатов принятых решений после окончания очередного этапа. Спиральная модель предполагает итерационный процесс выполнения проекта; каждая итерация представляет собой законченный цикл разработки, приводящий к выпуску внутренней или внешней версии продукта.



а)



б)

Рис. 1.1. Модели выполнения проектов по разработке нового продукта:
а – каскадная; б – спиральная

В задачах принятия решений приходится выбирать один или несколько альтернативных вариантов, зачастую в ситуациях отсутствия или недостоверности исходных данных.

Выделяют три группы решений, принимаемых руководителями, в зависимости от их важности и тяжести возможных последствий в случае ошибочных решений:

- 1) стратегические решения, принимаемые руководителями верхнего уровня и относящиеся к долгосрочным проектам;
- 2) тактические решения, принимаемые руководителями среднего уровня и относящиеся к среднесрочным проектам;
- 3) оперативные решения, принимаемые руководителями разного уровня по краткосрочным проектам.

При формализации постановок задач принятия решений будут использованы следующие понятия и обозначения.

Определение 1. Пусть задано множество вариантов

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad (1.1)$$

и сформулирован критерий Q , на основе которого необходимо принять решение о наилучшем варианте $v^* \in V$. Данную задачу будем называть задачей выбора оптимального варианта (ВОВ). Если из множества (1.1) необходимо по критерию Q отобрать подмножество вариантов $V_0 \subset V$ таких, что каждый вариант $v_j^0 \in V_0$ предпочтительнее вариантов $v_k \in V \setminus V_0$, то данную задачу назовём задачей выбора предпочтительных вариантов (ВПВ).

Задачи ВОВ и ВПВ формализованно запишем в виде

$$v^* = \arg \underset{v}{\text{opt}} \{Q(v), v \in V\}, \quad (1.2)$$

$$\forall v_j^0 \in V_0; \forall v_v \in V \setminus V_0: v_j^0 \succ_Q v_v, \quad (1.3)$$

здесь \succ_Q – знак предпочтения по критерию Q .

Задачи ВОВ и ВПВ делятся на классы, различающиеся полнотой сведений, необходимых для решения.

Определение 2. По степени определённости и полноты исходных данных задачи ВОВ и ВПВ делятся на три класса:

– в задачах первого класса, т.е. в задачах полной определённости, известны математические модели, позволяющие рассчитывать значения критерия и другие характеристики, необходимые для принятия решения, это класс оптимизации и управления;

– ко второму классу относятся задачи, для которых задаются лишь перечень вариантов n и критерий в виде словесной формулировки целевой функции (Ц), это задачи принятия решений в условиях неопределённости или задачи качественного характера;

– третий класс задач характеризуется заданием количественных данных (часто приближённых) о значениях критерия в различных ситуациях, возможно вероятностях этих ситуаций и т.п., это задачи принятия решений в условиях частичной неопределённости.

Задачи первого класса имеют место при определении конструктивных параметров изделий и технологических объектов, расчёте оптимальных режимов их работы, при разработке систем управления ими. Здесь для получения решений используются методы оптимизации и оптимального управления [1 – 23, 40 – 43].

Задачи второго класса обычно возникают, когда решение необходимо принять оперативно и в достаточно новой области, для сбора экспериментальных (статистических) данных и разработки математической модели нет времени (или средств). Для решения задач этого класса широкое распространение получили методы экспертных оценок и другие родственные им методы [24 – 43].

Для задач третьего класса, т.е. в условиях частичной неопределённости, характерно наличие большего количества информации для принятия решений, по сравнению с задачами второго класса. Известны как классические методы с хорошо разработанной теорией, так и эвристические, например методы теории игр, Байеса–Лапласа и др. [24 – 43].

При реализации вариантов $v \in V$ могут возникнуть различные ситуации s , множество этих ситуаций (их число k) обозначим

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}. \quad (1.4)$$

Например, для технических проектов, подаваемых на конкурс, такими ситуациями могут быть следующие:

- несоответствие технических характеристик изделий получаемым на практике и ожидаемым по проекту;
- уменьшение потребительского спроса;
- увеличение себестоимости по сравнению с запланированной и т.д.

На момент решения задач (1.2) или (1.3) неизвестно, какая из ситуаций $s \in S$ будет иметь место в действительности.

Значения критерия Q для различных ситуаций будут различными, т.е. для двух вариантов v_i и v_j надо сопоставлять $\{Q(v_i; s), s \in S\}$ и $\{Q(v_j; s), s \in S\}$.

Определение 3. Если множество ситуаций S применительно к задачам (1.2), (1.3) чётко определено для всех вариантов, то задачи будем соответственно называть задачами ВОВ и ВПВ в условиях неопределённости, обусловленной возможными ситуациями s , или сокращенно ВОВ на S и ВПВ на S .

Математически данные задачи записываются следующим образом:

$$v^* = \arg \operatorname{opt}_v \{Q(v, S), v \in V\}, \quad (1.5)$$

$$\forall v_j^0 \in V_0, \forall v_k \in V \setminus V_0 : v_j^0 \underset{Q(v, S)}{>} v_k, \quad (1.6)$$

где $Q(v, S)$ – значение критерия Q для варианта v с учётом возможных ситуаций $s \in S$.

Определение 4. Если в задачах (1.5), (1.6) известны вероятности ситуаций $p(s), s \in S$, то они соответственно называются задачами ВОВ и ВПВ на множестве вероятных ситуаций или сокращенно ВОВ на $P(S)$ и ВПВ на $P(S)$, здесь

$$P(S) = \{p(s), s \in S\}. \quad (1.7)$$

Большое влияние при выборе метода решения задач ВОВ и ВПВ оказывает характер критерия Q . Можно выделить четыре основных случая задания критерия:

- 1) критерий Q представляет собой скалярную величину, которую обозначим q , например это может быть один из показателей эффективности;
- 2) критерий представляет собой векторную величину с m компонентами, т.е.

$$Q = (q_1, q_2, \dots, q_m), \quad (1.8)$$

следует заметить, что в общем случае критерий Q для разных проектов может содержать разные компоненты;

- 3) вместо количественного показателя в качестве критерия рассматривается словесно сформулированная цель, на основе которой принимается решение, такое словесное описание критерия обозначим Ц;

- 4) в качестве критерия задаются статистические данные, характеризующие эффективности вариантов, обозначим эти данные для варианта v_i массивом

$$X(v_i) = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}), v_i \in V. \quad (1.9)$$

Принятие решения применительно к любой из приведённых задач является заключительным этапом следующего процесса:

- 1) возникновение и конкретизация проблемы;
- 2) идентификация модели задачи;
- 3) формирование множества вариантов, выбор критерия, введение возможных ситуаций;
- 4) математическая постановка задачи;
- 5) наполнение задачи конкретными числовыми данными;
- 6) выбор метода решения;
- 7) численное решение задачи и анализ полученных результатов;
- 8) принятие решения.

Наиболее эффективно использование компьютерных технологий на этапах 2, 5 – 7.

Укрупнённая схема многостадийного процесса принятия решения представлена на рис. 1.2.

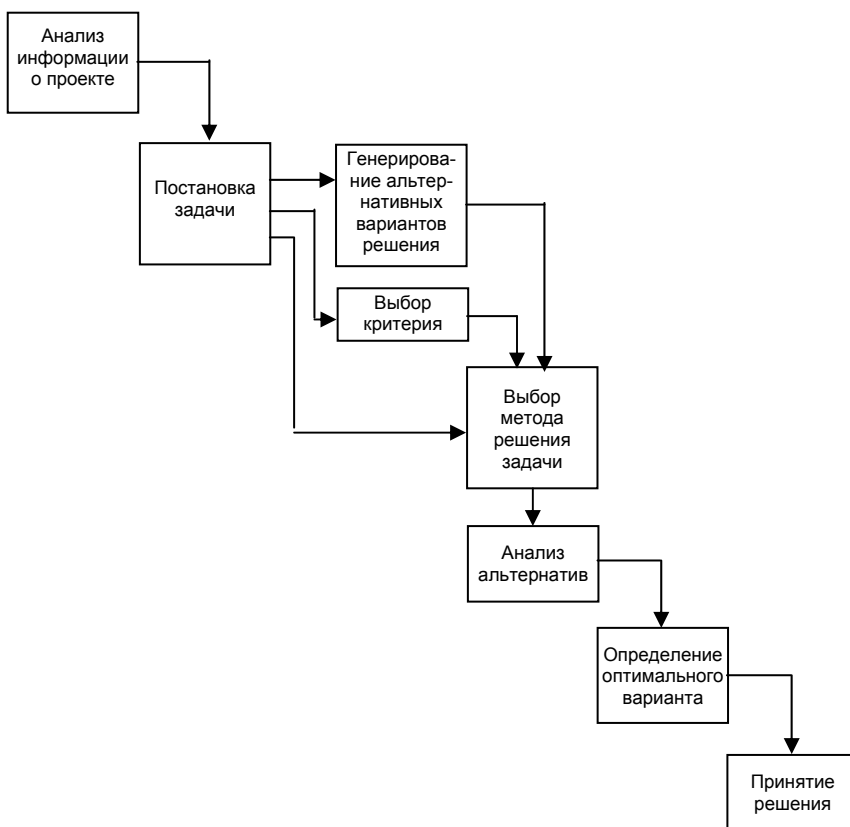


Рис. 1.2. Многостадийная модель процесса принятия решения

В принятии оптимальных решений (выборе оптимального варианта) обычно принимают участие три группы лиц, различающихся по их роли в процессе решения проблемы.

1. Лицо, принимающее решение (ЛПР), или группа ЛПР. Это лицо формулирует цель (критерий оптимальности), ограничения, окончательно устанавливает вариант для реализации (принимает итоговое решение).

2. Группа экспертов, специалистов по конкретной проблеме (экспертная комиссия (ЭК)). Они определяют альтернативные варианты, критерии, выявляют относительную важность, значимость альтернатив, ранжируют или сравнивают варианты и т.д.

3. Группа консультантов по математическим методам теории принятия решений или рабочая группа (РГ). Они организуют работу экспертов и ЛПР, разрабатывают процедуру работы, обрабатывают и анализируют информацию от экспертов.

В зависимости от сложившихся условий задачи ВОВ и ВПВ могут решаться ЭК и затем ЛПР или только ЭК, или только ЛПР.

При создании компьютерной технологии и особенно распределённых систем поддержки принятия решений важно разработать обобщённую модель задачи принятия решения, которая должна отражать её характерные особенности, влияющие на выбор метода решения.

Определение 4. Под моделью задачи принятия решения применительно к выбору вариантов будем понимать кортеж

$$\langle W, F, N, U \rangle \quad (1.10)$$

со следующими компонентами:

W – определяет вид задачи по числу выделяемых вариантов – ВОВ или ВПВ, в кортеже на первом месте может быть v^* или V_0 ;

F – функционал – определяет характер задания критерия, на втором месте может быть q или Q , или Π , или X ;

N – вид неопределённости, связанной с возможными ситуациями, на третьем месте ставится S , если задаётся множество ситуаций, или $P(S)$, если для ситуаций заданы вероятности, или 1, если ситуации не определены;

U – участники принятия решения, т.е. на четвёртом месте могут быть расположены ЭК + ЛПР, или ЛПР, или ЭК.

Например, модель

$$\langle v^*, q, P(S), \text{ЛПР} \rangle \quad (1.11)$$

определяет задачу ВОВ при скалярном критерии q с заданием возможных ситуаций и их вероятностей, решаемую ЛПР.

Число возможных задач определяется мощностью множества K , т.е. декартова произведения множеств

$$\mathcal{K} = \mathcal{W} \times \mathcal{F} \times \mathcal{N} \times \mathcal{U}, \quad (1.12)$$

здесь

$$\mathcal{W} = \{v^*, V_o\}, \mathcal{F} = \{q, Q, Ц, X\}; \\ \mathcal{N} = \{S, P(S), 1\}, \mathcal{U} = \{\text{ЭК} + \text{ЛПР}; \text{ЛПР}, \text{ЭК}\}.$$

Исходные данные для конкретной задачи множества \mathcal{K} представляют собой массив реквизитов вида

$$R = (n, (n_o), \text{extr}, M_q, (M_Q), (M_x), n_s, (W_p), U), \quad (1.13)$$

здесь n – число вариантов (мощность множества V); n_o – число предпочтительных вариантов (мощность множества V_o); extr – характер задачи на минимум или максимум; $M_q(M_Q)$ – матрицы значений критериев; M_x – массивы статистических данных; n_s – число ситуаций; (W_p) – вектор вероятностей ситуаций; U – кто принимает решение (ЛПР, ЭК, ЭК + ЛПР). В круглые скобки в (1.13) заключены компоненты R , которые для некоторых задач не требуются.

Например, применительно к задаче (1.11) массив R может иметь следующие значения:

$$R = \left(\begin{array}{c} n \\ 3; \text{max}; \end{array} \begin{array}{c} \text{extr} \\ \left[\begin{array}{cccc} 10 & 12 & 8 & 3 \\ 11 & 10 & 7 & 4 \\ 8 & 9 & 10 & 5 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} M_q \\ \\ \\ \end{array} ; \begin{array}{c} n_s \\ 4; \end{array} \begin{array}{c} W_p \\ (0,6; 0,2; 0,1; 0,1); \end{array} \begin{array}{c} U \\ \text{ЛПР} \end{array} \right).$$

Следует заметить, что в некоторых случаях матрица $M_q(M_Q)$ и вектор W_p могут задаваться интервальными значениями.

Рассмотренная модель задачи (1.10) и массив реквизитов (1.13) позволяют перейти к созданию компьютерных технологий, обеспечивающих оперативное решение задач принятия проектных решений.

2. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ (ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ)

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Будем далее понимать под оптимизацией целенаправленную деятельность, состоящую в получении наилучших результатов в соответствующих условиях. При постановке задачи оптимизации необходимо иметь объект оптимизации и правильно сформулировать цель оптимизации. При её решении требуется ресурс оптимизации, под которым понимается свобода выбора значений некоторых параметров объекта оптимизации. Иными словами, объект оптимизации имеет определённые степени свободы – управляющие воздействия, с помощью которых возможно изменять его состояние в соответствии с определёнными требованиями.

Количественную оценку оптимизируемого качества объекта обычно называют критерием оптимальности (критерием оптимизации). Вид критерия оптимальности определяется конкретным содержанием решаемой задачи оптимизации и может оказывать существенное влияние на выбор метода решения.

Различают оптимизацию режимов действующих объектов и оптимизацию при их проектировании. Естественно, что оптимизация на стадии проектирования более эффективна, поскольку имеются дополнительные конструктивные параметры, которыми можно варьировать.

Математические методы оптимизации можно эффективно применять лишь при наличии математического описания оптимизируемого объекта.

Выбор того или иного метода решения конкретной задачи оптимизации в значительной степени определяется постановкой задачи, а также используемой математической моделью объекта оптимизации.

В качестве критерия оптимальности могут быть использованы: целевая функция одной или нескольких переменных, несколько целевых функций, функционал.

Если имеется только одна числовая функция, характеризующая меру близости осуществления поставленной цели, и ищется экстремум (максимум или минимум) этой функции при наличии ограничений на эти переменные, то говорят о задаче математического программирования.

Если таких функций несколько, то говорят о задаче многокритериальной или задаче векторной оптимизации.

Если в роли критерия выступает функционал, экстремум которого ищется на множестве функций, заданных в функциональных пространствах, то имеют место задачи вариационного исчисления или задачи оптимального управления.

В зависимости от того, конечно или бесконечно число искомым переменных, говорят о конечномерных или бесконечномерных задачах оптимизации, а накладываются или нет ограничения на эти переменные, различают задачи условной и безусловной оптимизации.

В зависимости от того, сколько экстремумов может быть у критерия оптимальности, различают одно- и многоэкстремальные задачи.

Когда ищется максимум критерия оптимальности в некотором допустимом множестве, то говорят о задаче максимизации, а когда ищется минимум – задаче минимизации.

Следует отметить, что задача максимизации некоторой функции может быть сведена к задаче минимизации этой функции, взятой со знаком «минус», и наоборот, а множество глобальных и локальных строгих и нестрогих решений этих задач совпадают.

В математическом программировании обычно выделяют следующие разделы (классы задач):

- *линейное программирование* (целевая функция и все ограничения линейны);

- *нелинейное программирование* (нелинейная целевая функция произвольного вида определена на множестве, задаваемом нелинейными ограничениями различного вида);

- *квадратичное программирование* (целевая функция – квадратичная и выпуклая, а допустимое множество решений определяется линейными равенствами и неравенствами);

- *выпуклое программирование* (целевая функция и допустимые множества выпуклы);

- *геометрическое программирование* (целевая функция и все ограничения являются полиномами (положительными полиномами));

- *дискретное программирование* (решение ищется лишь в дискретных, например целочисленных точках множества допустимых решений);

- *стохастическое программирование* (в отличие от детерминированных задач входная информация носит элемент неопределённости);

- *динамическое программирование* (особый вид задачи оптимизации, где вне зависимости от конкретного вида целевой функции и ограничений поиск оптимального решения представляется в виде многошагового процесса).

Частным случаем выпуклого программирования является квадратичное программирование, а частным случаем того и другого – линейное программирование.

Вариационные задачи и задачи оптимального управления относятся к классу задач оптимизации в бесконечномерных функциональных пространствах, а в качестве элементов, по которым здесь ведётся поиск минимума или максимума функционала, выступают функции.

Очевидно, что не существует единого метода решения всех возможных задач оптимизации. Одни из методов являются более общими, а другие – менее общими.

Специфической особенностью многих методов решения задач оптимизации (за исключением, пожалуй, нелинейного программирования) является то, что задачу вначале до определённого момента решают аналитически, а затем уже отыскивают собственно оптимальное решение.

Другие методы наилучшим образом подходят для решения оптимальных задач с математическими моделями определённого вида (например, линейное, геометрическое и динамическое программирование).

Замечательно, что у задач линейного, квадратичного и выпуклого программирования имеется общее свойство: найденная точка локального экстремума (минимума или максимума) является оптимальной точкой. Эти задачи являются одноэкстремальными, а в основе теории выпуклого и, следовательно, линейного и квадратичного программирования лежит теорема Куна–Такера о необходимых и достаточных условиях существования оптимальной точки.

Менее изученными и более сложными являются многоэкстремальные задачи, для которых отмеченное выше свойство не выполняется.

При использовании численных методов нелинейного программирования, которые часто называют прямыми, в процессе пошагового поиска используется информация, получаемая при вычислении значений критерия оптимальности, служащего оценкой эффективности поиска.

Отдельные методы (исследование функций классического анализа, множители Лагранжа, нелинейное программирование) применяют на определённых этапах решения других более сложных задач оптимизации (например, в динамическом программировании или в принципе максимума).

2.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Из курса математического анализа известны методы решения не сложных оптимизационных задач, в которых задано аналитическое выражение критерия оптимальности – целевой функции от управляющих воздействий, при этом целевая функция является непрерывной или гладкой. Благодаря этому возможно найти аналитические выражения для их первых производных, а для гладких функций и вторых производных, а затем, используя различные признаки исследовать «подозрительные» на экстремум точки.

При проверке отбрасывают те точки, которые не могут определять экстремальные значения критерия, а среди оставшихся выбирают те, которые могут удовлетворять наибольшему или наименьшему значению критерия оптимальности в зависимости от постановки задачи.

Поскольку система уравнений, получаемая в результате приравнивания нулю первых производных функций, обеспечивает лишь необходимые условия оптимальности, то её решение в дальнейшем проверяют с помощью достаточных условий (критерий Сильвестра) с целью выявить тип экстремума.

Эти методы исследования позволяют находить экстремум в так называемых задачах безусловной оптимизации. При наличии ограничений на область изменения независимых переменных, т.е. в задачах условной оптимизации, упомянутые методы используют только для нахождения экстремальных значений внутри области. Кроме того, проводят анализ значений целевой функции на границе области изменения, где может находиться экстремум функции, который может оказаться весьма сложным, в особенности для задач с большим числом переменных.

При решении классической задачи на условный экстремум, содержащей ограничения типа равенств, используют метод неопределённых множителей Лагранжа, который позволяет свести задачу условной оптимизации к решению более простой задачи безусловной оптимизации, хотя и более высокой размерности. Используются отмеченные выше методы исследования экстремума функции классического анализа, при этом порядок системы уравнений, решаемой для нахождения экстремумов, соответственно повышается на число имевшихся ограничений.

Этот метод часто используется как вспомогательный при решении другими методами различных задач оптимизации, в которых содержатся ограничения типа равенств, например в вариационном исчислении и динамическом программировании.

2.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование

Линейное программирование – это математический аппарат, позволяющий решать задачи оптимизации, в которых критерий оптимальности является линейной функцией нескольких переменных, а область их изменения определяется совокупностью линейных выражений.

Каждой задаче линейного программирования может быть поставлена в соответствие двойственная ей задача. Центральным фактом в линейном программировании является теорема двойственности, устанавливающая равенство оптимальных значений целевых функций прямой и двойственной задач. Решение двойственной задачи может оказаться легче решения исходной задачи и быть полезным при решении прямой задачи, а также может быть использовано при разработке различных алгоритмов.

Многие задачи линейного программирования могут быть решены с помощью практически универсального алгоритма – симплексного метода, который позволяет за конечное число шагов находить оптимальное реше-

ние. При этом наличие в исходной постановке различных комбинаций ограничений (равенств или неравенств) и их числа не сказывается на возможностях применения алгоритма, поскольку возможны эквивалентные преобразования, позволяющие свести исходную задачу к нужному виду. В отличие от других методов дополнительные проверки на оптимальность получаемых здесь решений не требуется.

В задачах линейного программирования допустимое множество решений можно представить в виде выпуклого многогранника, при этом исходное решение находится в вершине многогранника, а иногда на его ребре или грани. Симплекс-метод позволяет, начав из какой-либо вершины, далее двигаться в таком направлении, перебирая вершины, при котором значение целевой функции возрастает (убывает). В многограннике каждой вершине соответствует своя система уравнений, выбираемая специальным образом из системы неравенств ограничений и условий задачи. Таким образом, вычислительная процедура симплекс-метода состоит в последовательном решении систем линейных алгебраических уравнений.

Нелинейное программирование

Под нелинейным программированием понимается большая группа численных методов, которые иногда называют также «прямыми методами» решения оптимизационных задач. С их помощью решаются задачи с нелинейными целевыми функциями, в которых на искомые переменные могут быть наложены нелинейные ограничения, имеющие вид равенств или неравенств. По сути методы нелинейного программирования используют, если ни один из методов других разделов математического программирования не позволяет сколько-нибудь продвинуться в решении оптимизационной задачи.

Методы одномерной оптимизации: сканирования, половинного деления, золотого сечения, чисел Фибоначчи, ДСК-Пауэла имеют как самостоятельное значение, так и часто используются в качестве вспомогательных (например, при спуске по направлению) в многомерных методах оптимизации. При использовании этих методов задают интервал поиска изменения переменной и точность определения оптимального значения этой переменной. Большинство методов (за исключением метода сканирования) применяются для унимодальных функций.

Среди методов безусловной многомерной оптимизации выделяют методы нулевого, первого и второго порядков. В методах нулевого порядка на каждом шаге при поиске экстремума целевой функции используется информация о значениях этой функции на предыдущих шагах, в методах первого порядка, кроме этого, используется информация о производных, а в методах второго порядка – также и о вторых производных функции в этих точках.

К методам безусловной многомерной оптимизации нулевого порядка относят методы сканирования, покоординатного спуска, деформируемого многогранника; первого порядка – методы релаксаций, наискорейшего спуска; второго порядка – ньютоновские и квазиньютоновские методы. Заслуживают также упоминание методы случайного поиска безусловного экстремума целевой функции.

Для решения задач условной оптимизации с ограничениями типа неравенств и равенств используют методы прямого поиска с возвратом, проектирования вектора градиента, штрафных функций.

Особую роль нелинейное программирование играет на отдельных этапах решения задач оптимизации другими методами, например с помощью динамического программирования, принципа максимума и др.

Выпуклое программирование

Рассматриваются методы решения задач минимизации выпуклых функций на выпуклых множествах, задаваемых системами неравенств и равенств. Существует законченная теория выпуклого программирования и разработаны многочисленные методы решения задач.

Центральным фактом выпуклого программирования является теорема Куна–Такера о седловой точке, которая даёт необходимое и достаточное условие существования оптимального решения задачи. При некоторых дополнительных условиях это позволяет получить эффективные алгоритмы решения, связанные с поиском седловой точки.

Другой подход к решению связан с поиском возможных направлений, которые не выводят из множества допустимых точек и вдоль которых целевая функция уменьшается. На каждой итерации такого метода вычисляется возможное направление, исходящее из очередной точки, после чего производится сдвиг по этому направлению.

Используются методы, основанные на сведении задач выпуклого программирования к безусловной оптимизации (методы штрафов) и последовательной их аппроксимации с помощью линейного программирования.

Квадратичное программирование

Рассматриваются методы решения задач минимизации выпуклых квадратичных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств. Разработана законченная теория и численные методы решения задач, в том числе типа симплексного метода, приводящие к решению за конечное число шагов (итераций).

Эти задачи часто возникают как вспомогательные при решении различных задач математического программирования.

Дискретное программирование

Дискретное программирование занимается исследованием решения задач оптимизации на конечных множествах и, в частности решения целочисленных задач. Рассматриваются задачи, называемые нетривиальными, в которых выделяют дополнительные условия: число элементов на рассматриваемых конечных множествах весьма велико, настолько, чтобы нельзя было решить задачу вручную путём перебора и сравнения значений целевой функции или на ЭВМ; задача не является регулярной*.

Универсальных эффективных методов решения задач дискретного программирования не создано главным образом из-за трудностей их решения, обусловленных большим числом локальных экстремумов.

Существуют достаточно известные методы – метод ветвей и границ и его различные модификации, которые являются методами направленного перебора. Их эффективно применяют для решения специализированных задач, однако среди них можно подобрать такие задачи, для которых упомянутые методы направленного перебора незначительно отличаются от полного перебора.

Другим источником трудностей решения задач дискретного программирования является то, что допустимое множество часто задаётся в неявной форме. Например, в целочисленном линейном программировании его определяют в виде целочисленных решений системы линейных неравенств. Такое и более сложное задание множеств допустимых решений делает нетривиальной не только саму задачу перечисления элементов множества, но и указания даже одного элемента.

Основные результаты дискретного программирования получены для более узких классов задач – транспортной задачи, задачи о коммивояжёре и нескольких коммивояжёрах, линейного целочисленного программирования, задачи о расписаниях, экстремальные задачи на графах и др.

В настоящее время развиваются приближённые методы для решения практических задач большой размерности, которые принципиально мало отличаются от методов поиска экстремумов непрерывных функций и функционалов, алгоритмов локальной оптимизации, случайного поиска.

Геометрическое программирование

С помощью методов геометрического программирования решается один специальный класс задач математического программирования, в которых целевые функции и ограничения задают в виде положительных по-

* Задачу называют регулярной, если: а) для любого элемента конечного множества определена непустая окрестность с числом элементов, много меньшим числа элементов исходного конечного множества; б) локальный экстремум легко определим и совпадает хотя бы с одним глобальным.

линомов, т.е. сумм произведений степенных функций от независимых переменных. Подобные задачи часто встречаются при проектировании. В отдельных случаях ряд задач нелинейного программирования с помощью аппроксимации целевых функций и ограничений целесообразно свести к задаче геометрического программирования.

В основе алгоритма решения задачи геометрического программирования лежит известное неравенство между среднеарифметическим и среднегеометрическим. Именно оно дало название данному методу и именно благодаря ему строится двойственная функция и формулируется двойственная задача, решение которой во многих случаях гораздо проще, чем решение исходной задачи. Между решением прямой и двойственной задач существует определённая взаимосвязь.

Стохастическое программирование

С помощью методов стохастического программирования решаются задачи условной оптимизации при неполной информации о параметрах условий задачи, которые (все или некоторые) могут оказаться неопределёнными или случайными. В одном случае возможно установить те или иные вероятностные характеристики параметров условий задачи, в другом – нет. В первом случае описывается ситуация, связанная с риском, во втором – ситуация, связанная с неопределённостью.

В отдельных задачах стохастического программирования заменяют случайные параметры их средними значениями и решают детерминированную задачу. Существуют постановки задач, в которых ограничения должны удовлетворяться при всех реализациях случайных параметров, называемые жёсткими постановками. Иногда в задачах необходимо, чтобы обеспечивалась вероятность попадания решения в допустимую область не ниже заданной, такие задачи называются задачами с вероятностными ограничениями.

Целевой функцией этих моделей являются обычно математическое ожидание реализаций показателя качества решения задачи оптимизации или вероятность превышения случайным значением показателя качества некоторого фиксированного порога.

Динамическое программирование

В динамическом программировании исследуются задачи оптимизации дискретных многостадийных (многошаговых) процессов, в которых критерий оптимальности задаётся в виде аддитивной или мультипликативной функции критериев оптимальности отдельных стадий.

Согласно принципу оптимальности Беллмана, каждая точка оптимальной стратегии обладает тем свойством, что отрезок траектории, начинающийся из этой точки, тоже оптимален. Другими словами, опти-

мальное поведение обладает тем свойством, что каково бы ни было первоначальное поведение процесса, последующие решения должны быть оптимальными относительно уже реализовавшегося состояния. Применение этого принципа позволяет вывести функциональные уравнения Беллмана, лежащие в основе алгоритмов решения задач динамического программирования.

По существу этот метод даёт возможность последовательно определять оптимальные стратегии управления на всех стадиях процесса, начиная с последней. При этом управления на каждой стадии находят, решая с помощью методов нелинейного программирования частные задачи оптимизации, значительно менее сложные, чем исходная задача оптимизации. Благодаря этому достигается серьёзный выигрыш во времени решения задачи.

Ограничения на переменные учитываются при решении частных задач оптимизации, причём ограничения типа равенств позволяют уменьшать размерность этих задач с помощью метода множителей Лагранжа.

Многокритериальная оптимизация

Многокритериальные (векторные) задачи возникают, когда необходимо одновременное выполнение нескольких критериев, зачастую противоречивых. На первый взгляд, возможность оценки того или иного решения по нескольким различным критериям кажется протivoестественной. Однако, поскольку задачи такого рода возникают, то требуется найти разумный компромисс между несколькими критериями. Поскольку здесь имеет место экстремальная задача, в которой целевая функция является вектором, то изменяется само понятие оптимальности решения.

Принцип оптимальности по Парето представляется наиболее естественным в том смысле, что соответствует интуитивным представлениям о наилучших значениях этих функций. Главным становится достижение некоторой области компромисса (множество Парето), состоящей из эффективных, оптимальных по Парето точек. При этом часто множество эффективных точек оказывается весьма обширным, что затрудняет выбор конкретного решения, и это требует введения некоторых «вторичных» принципов оптимальности.

Во многих случаях, когда критерии соизмеримы, векторная задача сводится к задаче со скалярным критерием, т.е. производится свёртка функций (взвешенная сумма, минимальная компонента). При несоизмеримости критериев соответствующий принцип оптимальности может быть выработан аксиоматически.

Прежде чем искать экстремум векторной функции, обычно задают отношение порядка, т.е. правило сравнения двух векторов, благодаря чему можно сделать вывод о том, какой из векторов является лучшим.

2.4. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Вариационное исчисление

Для решения задач оптимизации, в которых критерием оптимальности является функционал, а искомыми переменными – неизвестные функции, используют методы вариационного исчисления, которые сводят решение исходной оптимальной задачи к интегрированию некоторой системы дифференциальных уравнений Эйлера. Уравнения, число которых равно числу неизвестных функций, являются нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка с граничными условиями, заданными на обоих концах интервала интегрирования. Искомые функции определяются в результате интегрирования системы.

Уравнения Эйлера выводятся как необходимые условия экстремума функционала. Поэтому полученные интегрированием системы дифференциальных уравнений функции должны быть проверены на экстремум функционала.

При наличии ограничений типа равенств, имеющих вид функционалов, применяют множители Лагранжа, что даёт возможность перейти от условной задачи к безусловной.

Наиболее значительные трудности при использовании вариационных методов возникают в случае решения задач с ограничениями типа неравенств.

Прямые методы решения задач поиска экстремума функционалов обычно позволяют свести исходную вариационную задачу к задаче нелинейного программирования, решить которую иногда проще, чем краевую задачу для уравнений Эйлера.

При решении вариационных задач с подвижными границами используют так называемые условия трансверсальности.

Оптимальное управление

Для решения задач оптимизации процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений, применяют принцип максимума Понтрягина. Достоинством этого математического аппарата является то, что решение может определяться в виде разрывных функций, что невозможно в вариационном исчислении.

Нахождение оптимального решения сводится к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений процесса и сопряжённой системы для вспомогательных функций при граничных условиях, заданных на обоих концах интервала интегрирования, т.е. к решению краевой задачи. На область изменения переменных могут быть наложены ограничения.

Принцип максимума для процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, при некоторых предположениях является и достаточным условием оптимальности. Поэтому дополнительной проверки на оптимальность получаемых решений в этих случаях не требуется.

Для дискретных процессов принцип максимума в той же формулировке, что и для непрерывных процессов, вообще говоря, несправедлив. Однако условия оптимальности, получаемые при его применении для многостадийных процессов, позволяют найти достаточно удобные алгоритмы.

2.5. ПРИМЕРЫ ПОСТАНОВОК ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Постановка задачи выбора эффективной системы управления сложного технологического объекта с учётом изменения состояний функционирования

Прежде всего, введём необходимые для постановки задачи проектирования систем управления определения и условные обозначения.

В дальнейшем будем называть системой некоторую совокупность подсистем (частей, элементов), объединённых функционально или конструктивно, предназначенную для выполнения требуемых функций в определённых условиях в течение заданного времени. Элементом системы будем называть некоторую часть, способную выполнять определённую операцию в общем процессе функционирования. Оба понятия являются в достаточной мере условными и существенно зависят от объекта исследования и необходимой точности анализа.

Так, например, при рассмотрении в качестве сложной системы совокупности автоматических систем регулирования (АСР) и контроля (АСК) режимных переменных какого-либо технологического процесса элементами являются эти локальные системы. При рассмотрении же отдельной локальной АСР её можно принять за систему, а элементами считать входящие в её состав датчики, приборы и т.д. Нетрудно привести и другие примеры подобного рода.

Рассмотрим теперь некоторую систему a , состоящую из n элементов. Каждый элемент системы в любой момент времени находится в определённом состоянии. В общем случае таких состояний может быть несколько – состояние нормального функционирования и состояния элемента, когда он не может по различным причинам выполнять свои функции (состояния отказа). На практике в большинстве случаев удаётся (или приходится) использовать модель элемента только с двумя состояниями – состояниями работоспособности и отказа.

Переход элемента из одного состояния в другое происходит мгновенно в случайные моменты времени. Этот процесс удобно рассматривать как случайное изменение некоторой характеристики $s(t)$ функционирова-

ния элемента, принимающей дискретные значения 1, если элемент исправен, и 0, если элемент отказал. На рисунке 2.1 показан процесс изменения состояний такого элемента.

Поведение отдельно рассматриваемого элемента может отличаться от его поведения в составе системы, поскольку могут, например, появиться зависимости по отказам в результате подчинённости элементов друг другу, зависимости по восстановлению из-за режима обслуживания (дисциплины восстановления вышедших из строя элементов) и т.д.

Совокупность состояний всех элементов системы в некоторый момент времени определяет состояние системы в этот момент времени, а совместное изменение состояний всех элементов системы определяет её поведение во времени.

В случае когда каждый из элементов системы характеризуется лишь двумя состояниями – работоспособности и отказа, система описывается 2^n различными состояниями. Характеристикой системы в этом случае является вектор $S(t) = \{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$, компоненты которого $s_i(t)$ – функции, принимающие в случайные моменты времени значение 0 или 1.

В процессе функционирования вследствие отказов или восстановления отдельных элементов система претерпевает случайное изменение структуры, т.е. она переходит из одного состояния, характеризуемого совокупностью состояний отдельных элементов, в другое.

Обозначим через h – произвольное состояние функционирования системы, а через H – множество всех её возможных состояний. Если все n элементов системы исправны, то система находится в состоянии нормального функционирования, которое обозначим h_0 . Через h_i обозначим состояние системы, характеризующееся нарушением функций i -го элемента, через h_{ij} – состояние, при котором нарушены функции i -го и j -го элементов, причём i -й элемент прекратил функционирование первым и т.д.

Таким образом, состояние $h \in H$ характеризует систему в смысле нарушения функции её составных частей.

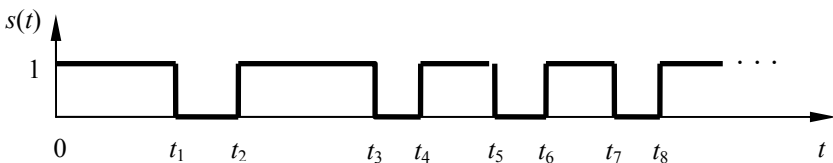


Рис. 2.1. Процесс изменения состояний элемента системы:

$t_1, t_3, t_5, t_7, \dots$ – моменты отказа элемента;

t_2, t_4, t_6, \dots – моменты его восстановления

Каждое состояние $h \in H$ системы a , характеризуется вполне определённым показателем эффективности функционирования, который мы обозначим через $E(a, h)$. Этот показатель характеризует выходной эффект системы при условии, что она находится именно в этом состоянии. На рисунке 2.2 в качестве примера представлен график изменения эффективности $E(a)$ системы как функции времени при изменении состояний функционирования. Кроме того, каждое состояние $h \in H$ системы a может осуществляться с определённой вероятностью $P(a)$.

Эффективность функционирования системы a при известных $E(a, h)$ и $P(a, h)$ может быть определена по формуле

$$E(a) = \sum_{h \in H} E(a, h) P(a, h). \quad (2.1)$$

Заметим, что выходной эффект системы, подверженной отказам, является случайной величиной. В нашем случае величина $E(a)$ в выражении (2.1) характеризует математическое ожидание выходного эффекта системы a .

В качестве показателя $E(a, h)$, характеризующего работу систем управления, могут выступать себестоимость и объём выпускаемой продукции, концентрации ключевых компонентов и т.д.

В общем случае показатели эффективности функционирования и вероятности состояний являются функциями времени. Следует учитывать, однако, что для систем управления сложными технологическими объектами в большинстве случаев не характерны нестационарные, в смысле надёжности, режимы работы, поэтому чаще всего нас интересуют именно стационарные значения вероятностей состояний $P(a, h)$ и, соответственно, стационарные значения эффективностей $E(a)$.

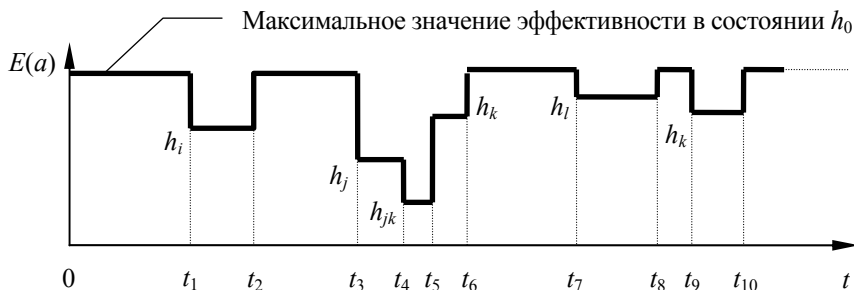


Рис. 2.2. Изменение эффективности $E(a)$ системы при смене состояний её функционирования:

t_1, t_3, t_4, t_7, t_9 — моменты выхода из строя элементов системы;

$t_2, t_5, t_6, t_8, t_{10}$ — моменты восстановления элементов

Для оценки эффективности $E(a)$ функционирования системы необходимо знать показатели $E(a, h)$, характеризующие эффективность конкретных состояний системы. Решение этой задачи возможно с помощью физического или математического моделирования.

В первом случае непосредственно на объекте имитируются возможные состояния путём отключения в различные моменты времени отдельных элементов системы и определяются соответствующие этим состояниям значения выходного эффекта.

Во втором случае с помощью математической модели объекта, дополненной уравнениями связи для исследуемых систем управления, путём компьютерной имитации моделируются различные отказовые ситуации и определяются соответствующие значения эффективностей этих состояний.

Отметим, что при проектировании систем управления целесообразно использовать метод математического моделирования, поскольку постановка многочисленных и продолжительных опытов на объекте в условиях реального производства практически невозможна.

Следует учитывать, что необходимость определения тех или иных значений $E(a, h)$ диктуется той степенью точности, с которой мы хотим провести анализ эффективности. Дело в том, что в ряде случаев из всех значений $h \in H$ только h_0 и h_i играют существенную роль, а вероятности состояний высшего порядка настолько малы, что в сумме даже с весовыми множителями $E(a, h)$ могут не превысить допустимой ошибки. Этот факт учитывается предварительной оценкой вероятностей тех или иных состояний.

Сформулируем задачу выбора эффективной системы управления объектом на множестве её состояний функционирования.

Определение показателей $E(a, h)$ методом математического моделирования требует знания математической модели исследуемого объекта.

Условно технологический процесс может быть изображён так, как показано на рис. 2.3, где выделены основные группы переменных, определяющих течение процесса и характеризующих его состояние в любой момент времени. Обозначим пространства входных и выходных координат объекта управления в виде декартовых произведений $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ и $Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_p$. Элементами пространств X и Y являются векторы $x = \{x_i\}$, $x \in X_i$, $i = 1, m$ и $y = \{y_j\}$, $y_j \in Y_j$, $j = 1, p$, которые соответственно называются входами и выходами объекта (входными и выходными переменными).

Очевидно, пространство X можно представить в виде $X = U \times F$, где $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_q$ и $F = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_r$ – соответственно пространства управлений и возмущений, а вектор входов можно представить состоящим из двух частей – вектора управлений $u = \{u_k\}$, $u_k \in U_k$, $k = \overline{1, q}$ и вектора возмущений $f = \{f_l\}$, $f_l \in F_l$, $l = \overline{1, r}$.

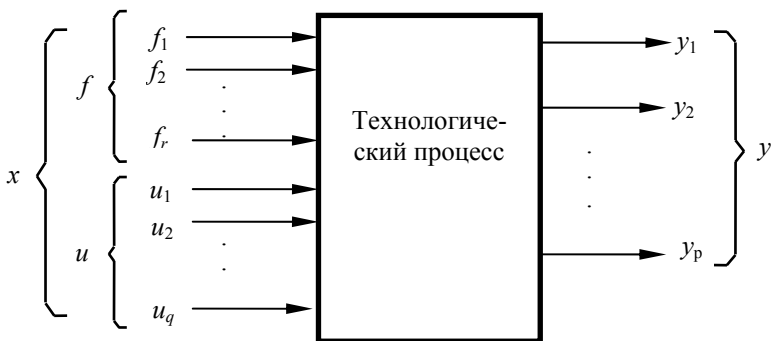


Рис. 2.3. Схематическое изображение технологического процесса как объекта управления

Математическую модель динамики объекта обозначим

$$y = M(x) \text{ или } y = M(u, f), \quad (2.2)$$

здесь M – оператор, ставящий в соответствие вектору входных переменных $x \in X$ или паре векторов $u \in U, f \in F$ вектор выходных переменных $y \in Y^*$.

В процессе функционирования объекта и системы управления должны выполняться плановые технико-экономические показатели на качество, количество и себестоимость выпускаемой продукции. При этом переменные x и y должны удовлетворять технологическим ограничениям для каждого состояния функционирования системы

$$K_{h,i}(x, y) \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad h \in H. \quad (2.3)$$

Ограничения (2.3) включают в себя требования безопасности, а также требования, чтобы x и y находились в области допустимых значений X_d, Y_d , т.е. $x \in X_d \subset X, y \in Y_d \subset Y$.

Выполнение ограничений (2.3) обеспечивается системой управления a с алгоритмом управления A , который определяется как оператор, ставящий в соответствие векторам $f \in F$ и $y \in Y$ вектор управления $u \in U$ в различных состояниях функционирования:

$$u = A_h(f, y), \quad h \in H. \quad (2.4)$$

Множество различных систем управления, реализующих алгоритм A , обозначим \mathcal{A} .

* Очевидно, что в нашем случае все векторы u, f, y являются, вообще говоря, функциями времени, поскольку нас интересует динамическое поведение объектов.

При разработке системы управления накладываются ограничения на затраты и время проектирования, срок окупаемости системы и др. Эти ограничения запишем в следующем виде:

$$L_{h,i}(C_L, a) \geq 0, \quad i = \overline{1, n_L}, \quad h \in H, \quad (2.5)$$

где C_L – вектор показателей проекта.

Систему управления a будем называть допустимой, если выполняются ограничения (2.3) и (2.5). Множество допустимых систем управления обозначим \mathcal{A}_d .

Сравнение вариантов допустимых систем управления производится с помощью показателя $E(a)$ (см. (2.1)), характеризующего эффективность функционирования системы a .

Традиционная задача выбора эффективной системы управления

В традиционной постановке задачи проектирования системы управления алгоритм управления (2.4) и ограничения (2.3), (2.5) рассматриваются для состояния нормального функционирования h_0 , т.е.

$$u = A_{h_0}(f, y); \quad (2.6)$$

$$K_{h_0,i}(x, y) \geq 0, \quad i = \overline{1, n_k}; \quad (2.7)$$

$$L_{h_0,i}(C_L, a) \geq 0, \quad i = \overline{1, n_L}. \quad (2.8)$$

Задача оптимального выбора системы управления в этом случае заключается в разработке такой системы a^* , которая обеспечивает выполнение ограничений (2.7), (2.8) и максимизирует некоторый усреднённый по возмущениям показатель эффективности $E_f(a, h_0)$ системы a для состояния нормальной работы h_0 вида

$$E_f(a, h_0) = \int_{f \in F} E(f, a, h_0) \varphi(f) df, \quad (2.9)$$

где $E(f, a, h_0)$ – значения показателя эффективности системы a для возмущения $f \in F$ в состоянии нормальной работы h_0 ; $\varphi(f)$ – плотность распределения возмущения f .

Таким образом, задача проектирования системы управления объектом без учёта нарушения функционирования её составных частей сводится к задаче нахождения a^* , такой что

$$E_f(a^*, h_0) = \max_{a \in \mathcal{A}_d} E_f(a, h_0). \quad (2.10)$$

Здесь множество \mathcal{A}_d понимается как совокупность систем управления, для которых выполняются ограничения (2.7) и (2.8).

В данной задаче снижение эффективности управления вследствие нарушения функций составных частей системы учитывается обычно косвенно путём введения различных поправочных коэффициентов, например коэффициента простоя вследствие отказов и т.д. Такой подход может привести к ошибочным выводам при сравнении различных вариантов систем управления и выборе из них наилучшей системы.

Действительно, если две системы управления a_j и a_k исследуются только в состоянии h_0 и $E_f(a_j, h_0) > E_f(a_k, h_0)$, то принимается решение о внедрении системы a_j . Затем в процессе эксплуатации выявляется, что в результате, например несколько меньшей надёжности системы a_j , она большую, по сравнению с a_k , часть времени функционирует в состояниях, отличных от h_0 , причём со значительным снижением эффективности или когда отказы приводят к авариям и тяжёлым последствиям. В этих случаях выбранная нами система a_j на самом деле может оказаться далеко не лучшей.

Нарушение функционирования составных частей систем управления и оценка последствий этих нарушений ещё на стадии проектирования в полной мере учитывается при решении задачи выбора системы управления с учётом возможности её нахождения в различных состояниях функционирования.

Задача выбора эффективной системы управления a на множестве состояний функционирования.

Пусть известна модель объекта (2.2), требуется разработать систему управления a^* с алгоритмом (2.4), которая обеспечивает выполнение технологических ограничений (2.3), ограничений на проектирование (2.5) и доставляет максимум показателю эффективности $E_f(a)$ на множестве состояний функционирования

$$E_f(a^*) = \max_{a \in \mathcal{A}_n} \left[\sum_{h \in H} E_f(a, h) P(a, h) \right], \quad (2.11)$$

где $E_f(a, h)$ – усреднённый по $f \in F$ показатель эффективности системы a в состоянии $h \in H$.

Задача (2.11) наиболее полно учитывает особенность функционирования исследуемых систем управления и позволяет делать обоснованные выводы о целесообразности внедрения наилучшего, в указанном смысле, варианта системы. Естественно, что новая постановка задачи ведёт к определённой усложнению математического аппарата, связанному с увеличением числа рассматриваемых состояний функционирования.

Постановка и решение задачи дестабилизационной оптимизации сложного технологического объекта

Сформулируем вначале простейшую задачу дестабилизационной оптимизации сложного технологического объекта, работающего на отрезке времени $[0, t]$ в условиях переменной производительности.

Традиционная задача поддержания (стабилизации) оптимального статического режима некоторого технологического объекта заключается в установке управляющего воздействия $u \in U$ (U – область допустимых управлений), однозначно соответствующего изменяющейся производительности – возмущающему воздействию $f \in F$ (F – область возможных возмущений). Предполагается, что f является кусочно-постоянной функцией. Допущение обоснованно, поскольку для сложных технологических объектов характерны длительные промежутки времени их работы в конкретных установившихся технологических режимах.

Математически задача формулируется следующим образом. Необходимо для заданного в момент времени t возмущения $f(t)$ найти отвечающее ему в этот момент управление $\overset{\circ}{u}(t)$, при котором

$$\varphi(\overset{\circ}{u}(t), f(t)) = 0. \quad (2.12)$$

Физически (2.12) может представлять собой балансовое уравнение массы, компонента, энергии или количества движения.

Вследствие однозначной зависимости $\overset{\circ}{u}$ от f можно записать (2.12) в виде

$$\overset{\circ}{u}(t) = \Phi(f(t)), \quad (2.13)$$

где $\Phi(\cdot)$ – некоторая функция.

Эту задачу называют *задачей стабилизации управления*. Будем считать её разрешимой для области $F \times U$, являющейся прямым (декартовым) произведением областей F и U , если для каждого $f(t) \in F$ справедливо неравенство

$$u^H(t) = u^H(f(t)) \leq \overset{\circ}{u}(t) \leq u^B(f(t)) = u^B(t), \quad (2.14)$$

где $u^H(f(t))$, $u^B(f(t))$ – соответственно нижнее и верхнее допустимые значения управления при возмущении $f(t)$ в момент времени t .

Условие (2.13) жёстко фиксирует управляющее воздействие $\overset{\circ}{u}$ для каждого f . Другими словами, множество $\overset{\circ}{U}_f$ допустимых управлений

при каждом f состоит из одного элемента, что делает невозможной постановку новой задачи оптимизации.

Множество $\overset{\circ}{U}_f$ можно расширить, если рассматривать некоторый отрезок времени $[0, T]$, на котором допустимо нарушение (2.12).

Введём $\mu(t)$ – меру (показатель) нарушения на отрезке $[0, t]$ балансового соотношения (2.12) и определим её выражением

$$\mu(t) = C + \int_0^t \varphi(u(t), f(t)) dt, \quad (2.15)$$

где C – постоянная величина.

Заметим, что физически $\mu(t)$ – это технологический параметр, изменяющийся в результате нарушения соответствующего баланса (концентрация, температура, давление, уровень в ёмкости).

Из (2.15) следует, что $\mu(0) = C$, т.е. константа C есть значение параметра $\mu(t)$ в начальный момент времени $t = 0$. Очевидно, что при соблюдении (2.12) и соотношения (2.13) между $\overset{\circ}{u}(\tau)$ и $f(\tau)$ для любого $\tau \in [0, t]$, имеет место равенство

$$\int_0^t \varphi(\overset{\circ}{u}(\tau), f(\tau)) d\tau \equiv 0, \quad (2.16)$$

а $\mu(t) = \mu(0)$, т.е. $\mu(t)$ равно тому значению показателя нарушения балансового соотношения, которое уже было к моменту $t = 0$.

Пусть далее μ^H и μ^B – допустимые пределы изменения показателя (2.15) нарушения балансового соотношения (2.12) при любом $t \in [0, T]$. Тогда для всех t должно выполняться соотношение

$$\mu^H \leq \mu(t) \leq \mu^B. \quad (2.17)$$

Пусть также $\mu(0)$ удовлетворяет условию (2.17), т.е.

$$\mu^H \leq \mu(0) \leq \mu^B. \quad (2.18)$$

В свете сказанного возможно сформулировать несколько задач.

Простейшая задача оптимизации на отрезке времени $[0, T]$. При заданном $\mu(0)$, удовлетворяющем (2.18), найти определённую на $[0, T]$

функцию $u(t)$, при которой принимает минимальное значение функционал

$$I(u, f) = \int_0^T Q(u(t), f(t)) dt, \quad (2.19)$$

где $Q(\cdot)$ – некоторая подынтегральная функция, и в любой момент времени $t \in [0, T]$ показатель $\mu(t)$ удовлетворяет условию

$$\mu^H \leq \mu(t) \leq \mu^B, \quad (2.20)$$

и выполняется ограничение на управление

$$u^H(f(t)) \leq u(t) \leq u^B(f(t)). \quad (2.21)$$

Очевидно, что при $\mu^H = \mu^B = \mu(0)$ задача (2.19) – (2.21) превращается в задачу (2.12), которая является её частным случаем. При этом стабилизирующее управление $\overset{\circ}{u}^T$ на отрезке $[0, T]$ входит в множество U^T возможных управлений u^T . Это значит, что решение задачи (2.19) – (2.21), по крайней мере, не хуже решения на $[0, T]$ стабилизационной задачи с критерием

$$I(\overset{\circ}{u}, f) = \int_0^T Q(\overset{\circ}{u}(t), f(t)) dt. \quad (2.22)$$

В принципе задача (2.19) – (2.21) может быть расширена, если допустить варьирование $\mu(0)$. В этом случае она формулируется следующим образом.

Расширенная задача оптимизации на $[0, T]$. Необходимо найти значение $\mu(0)$ и определённую на $[0, T]$ функцию $u(t)$, при которых принимает минимальное значение функционал (2.19) и в любой момент времени t удовлетворяются условия (2.18), (2.20), (2.21).

Обозначим через $\omega(t)$ – отклонение в момент t управления $u(t)$ от стабилизирующего управления $\overset{\circ}{u}(t)$, т.е.

$$\omega(t) = u(t) - \overset{\circ}{u}(t). \quad (2.23)$$

Тогда расширенную задачу с учётом (2.23) можно переформулировать.

Задача оптимизации на $[0, T]$ в отклонениях. Необходимо найти значение $\mu(0)$ и определённую на $[0, T]$ функцию $\omega(t)$, при которых принимает минимальное значение функционал

$$I(f, \omega) = \int_0^t Q(\overset{\circ}{u}(t) + \omega(t), f(t)) dt, \quad (2.24)$$

и в любой момент времени $t \in [0, T]$ удовлетворяются условия:

$$\mu^H \leq (t) \leq \mu^B; \quad (2.25)$$

$$\mu(t) = \mu(0) + \int_0^t \varphi(\overset{\circ}{u}(t) + \omega(t), f(t)) dt; \quad (2.26)$$

$$\omega^H(f(t)) \leq \omega(t) \leq \omega^B(f(t)), \quad (2.27)$$

где

$$\begin{cases} \omega^H(f(t)) = u^H(f(t)) - \overset{\circ}{u}(f(t)), \\ \omega^B(f(t)) = u^B(f(t)) - \overset{\circ}{u}(f(t)). \end{cases} \quad (2.28)$$

Задачу (2.23) – (2.28) будем называть также *задачей дестабилизационной оптимизации*.

Характерно, что из условий (2.14), (2.28) имеем

$$\begin{cases} \omega^H(f(t)) \leq 0, \\ \omega^B(f(t)) \geq 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Очевидно, что при $\omega(t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, T]$

$$\varphi(\overset{\circ}{u}(f(t)), f(t)) = 0,$$

и эта задача превращается в задачу стабилизации (2.12), эффективность которой оценивается критерием (2.22).

Можно сформулировать обобщения задачи (2.24) – (2.29) на многомерные случаи с различного рода зависимостями подынтегральной функции $Q(\omega(t), f(t))$ в (2.24) от управления $\omega(t)$.

На рисунке 2.4 приведена геометрическая интерпретация алгоритма выбора оптимального управляющего воздействия u^* для одномерного случая, когда имеются одно управление u и одна координата состояния μ , а подынтегральные функции в (2.15) и (2.19) являются линейными параметрическими, зависящими от управления u (или ω) при f в качестве параметра. Рассмотрены различные варианты. Здесь $\overset{\circ}{u}_1$ и $\overset{\circ}{u}_2$ – управления,

соответствующие оптимальным статическим режимам при возмущениях f_1 , действующем на отрезке $[0, t_1]$, и f_2 , действующем на отрезке $[t_1, T]$. Значения $Q(u_1, f_1)$, $Q(u_2, f_2)$ подынтегральной функции при управлениях u_1 и u_2 обозначены соответственно точками a и b .

Среднее значение \bar{I} функционала на интервале $[0, T]$ при возмущении (f_1, f_2) и управлении (u_1, u_2) определяется выражением

$$\bar{I} = Q(u_1, f_1)\alpha + Q(u_2, f_2)(1 - \alpha), \quad (2.30)$$

где

$$\alpha = \frac{t_1}{T} < 1. \quad (2.31)$$

Для простоты рассуждений предполагается, что двухуровневые на интервале $[0, T]$ возмущение f и управление u имеют известную точку переключения $t_1 = T/2$.

Если в качестве управлений выбраны u_1 и u_2 , т.е. стабилизирующие управления, то среднее значение \bar{I} лежит на прямой, соединяющей т. a и b , и учитывая, что $t_1 = t_2 = T/2$, т.е. $\alpha = 1/2$, то значение \bar{I} соответствует точкам 0 на рис. 2.4, $a - в$. Очевидно, что $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$.

Доказано, что решение задачи дестабилизационной оптимизации зависит от знака выражения $\pi = B_1|\beta_2| - B_2|\beta_1|$, где B_1 и B_2 – коэффициенты, характеризующие наклон функций $Q(u, f)$ и $\varphi(u, f)$ в (2.19) и (2.15) соответственно при возмущениях f_1 и f_2 .

Рассмотрим случай, когда $B_1 > 0$, $B_2 > 0$ и $B_1 < B_2$ (см. рис. 2.4, a). При этом $\pi < 0$ и $\omega_1 = u_1^* - u_1^{\circ} > 0$, $\omega_2 = u_2^* - u_2^{\circ} < 0$. Поскольку $\beta_1 = \beta_2$, а $t_1 = T - t_1 = T/2$, то получим, что $\omega_1 = \omega_2$.

При значениях управлений u_1, u_2 подынтегральная функция $Q(u, f)$ принимает соответственно значения $Q(u_1, f_1)$ и $Q(u_2, f_2)$ (см. т. a' и b' на рис. 2.4, a). Среднее значение \bar{I} характеризуется т. $0'$. Таким образом, отрезок $00'$ отвечает уменьшению ΔQ целевой функции при использовании дестабилизационного управления (u_1, u_2) .

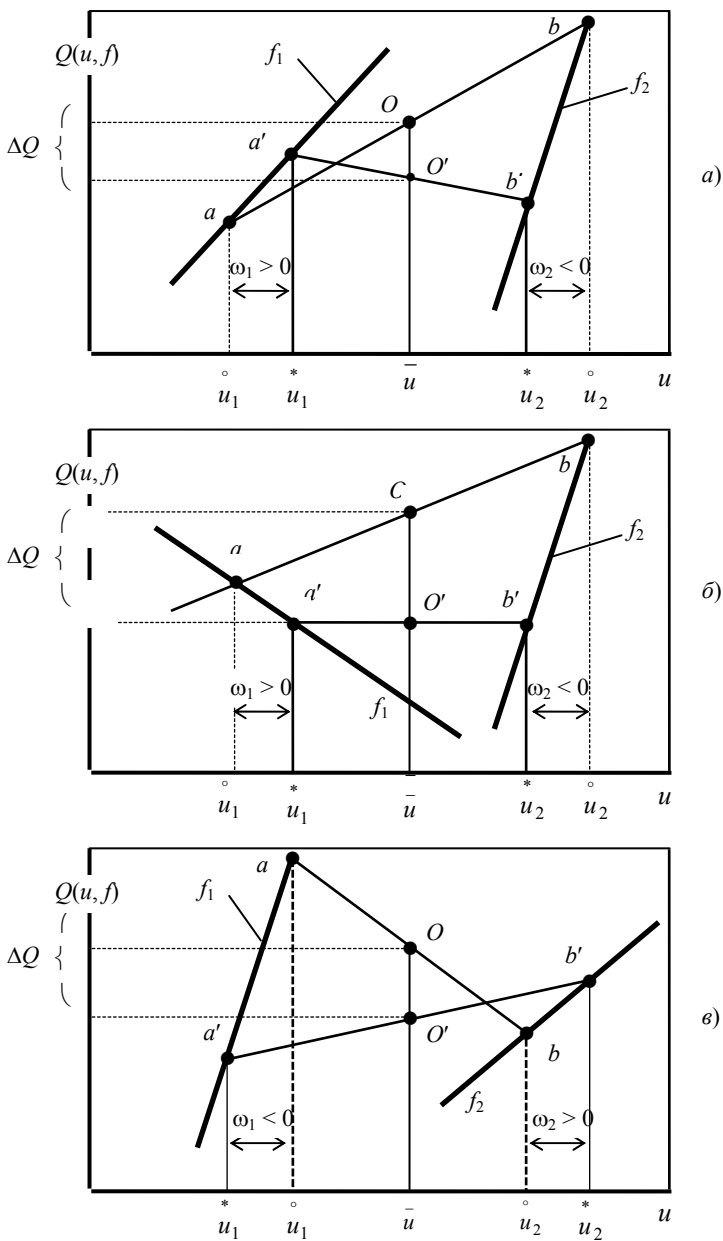


Рис. 2.4. Алгоритм выбора дестабилизирующего управления $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ в линейной задаче

Рассмотрим случай, когда $B_1 < 0, B_2 > 0$ (см. рис. 2.4, б). Здесь $\pi_1 < 0$ и, следовательно, $\omega_1^* > 0, \omega_2^* < 0$, а при $\beta_1 = \beta_2$ и $t_1 = T/2$, так же и $\omega_1^* = -\omega_2^*$. Выигрыш ΔQ от применения дестабилизационного управления соответствует отрезку $00'$.

На рисунке 2.4, в представлен случай, когда $B_1 > 0, B_2 > 0$ и $B_1 > B_2$. Здесь $\pi_1 < 0$ и $\omega_1^* < 0, \omega_2^* > 0$. При $\beta_1 = \beta_2$ и $t_1 = T/2$ имеем $\omega_2^* = -\omega_1^*$. Выигрыш ΔQ обозначен отрезком $00'$.

Описаны также алгоритмы линейной многомерной задачи, при избыточности управляющих воздействий, многоуровневой и нелинейных задач.

При решении сформулированных выше задач используются методы математического моделирования, теории оптимального управления, теории автоматического управления, теории вероятностей и кибернетики.

3. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Задачи, возникающие при необходимости действовать в ситуациях, известных не полностью, называются задачами принятия решений в условиях неопределённости. При этом возможны негативные последствия, связанные с принятием решения, степень неприемлемости которых изменяется возможными потерями, лица, принимающего решение (ЛПР).

3.1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ МЕТОДОМ РАНЖИРОВАНИЯ ВАРИАНТОВ ПРИ СКАЛЯРНОМ КРИТЕРИИ

Решение задачи в условиях высокой степени неопределённости характерной для фазы формирования концепции проекта, когда исходных данных для принятия обоснованного решения недостаточно, имеющиеся сведения недостоверны, возможные риски достаточно не исследованы, на результаты могут влиять действия конкурентов и т.д.

Этим методом решается как задача ранжирования вариантов при скалярном критерии q , так и в случае словесной формулировки цели (Ц), а также другие задачи ВОВ и ВПВ в условиях полной неопределённости:

$$\langle v^*, q, 1, \text{ЭК} \rangle, \langle v^*, \text{Ц}, 1, \text{ЭК} \rangle, \langle v^*, X, 1, \text{ЭК} \rangle, \\ \langle V_o, q, 1, \text{ЭК} \rangle, \langle V_o, \text{Ц}, 1, \text{ЭК} \rangle, \langle V_o, X, 1, \text{ЭК} \rangle.$$

Простейший метод экспертных оценок, основанный на ранжировании вариантов, заключается в следующем.

Пусть имеется группа из m экспертов $\{j = 1, \dots, m, m \geq 2\}$ и множество вариантов решения $V = \{v(i), i = 1, \dots, n\}$. Сформулирована целевая функция принятия решения в виде критерия q или цели Ц. В результате сопоставления вариантов по критерию q на основе накопленного опыта и профессиональных знаний каждый эксперт определяет начальный вектор рангов вариантов, для j -го эксперта этот вектор $y(i)$ имеет вид

$$y(j) = (y(j, 1), y(j, 2), \dots, y(j, n)),$$

где $y(j, i)$ – ранг варианта $v(i)$ или v_i решения, присваиваемый j -м экспертом, при этом $y(j, h) < y(j, t)$, если вариант v_h предпочтительнее варианта v_t по критерию Q . Допускается $y(j, h) = y(j, t)$, ($h \neq t$), а также отсут-

стве значений $y(j, i)$ (знак « \leftrightarrow ») для вариантов, которые j -й эксперт считает одинаково неперспективными.

Вектора $y(j)$, $j = 1 \dots m$, образуют $(m \times n)$ -матрицу рангов

$$Y = \|y(j, i)\|_{m \times n},$$

причём

$$y(j, i) \in \{1, 2, \dots, n, (-)\}.$$

Требуется по значениям компонентов матрицы Y определить:

- рейтинги вариантов;
- степень согласованности мнений экспертов (рассчитать коэффициент конкордации W и проверить его значимость);
- оптимальный вариант v^* или сформировать подмножество предпочтительных вариантов V_0 , содержащее оптимальное решение.

Ранжированием совокупности (множества) вариантов $V = \{v(i, j), i = 1, \dots, n\}$ называется нумерация вариантов $v(i)$ в соответствии с возрастанием (или убыванием) некоторого критерия q . Ранг $x(i)$ варианта $v(i)$ указывает место, которое занимает i -й вариант среди других вариантов, расположенных в соответствии с данным критерием. Ранжирование часто применяется, когда значения $q(v_i)$ для вариантов нельзя измерить или рассчитать. Окончательным результатом ранжирования n вариантов решения j -м экспертом является нормированная последовательность (вектор, ряд)

$$x(j) = (x(j, 1), x(j, 2), \dots, x(j, n)),$$

а h -м экспертом

$$x(h) = (x(h, 1), x(h, 2), \dots, x(h, n)).$$

Причём для суммы рангов $x(j, i)$ любого эксперта при правильном ранжировании должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i=1}^n x(j, i) = n(n+1)/2. \quad (3.1)$$

Степень связи между последовательностями рангов

$$x(j, 1), x(j, 2), \dots, x(j, n)$$

и

$$x(h, 1), x(h, 2), \dots, x(h, n)$$

оценивается с помощью коэффициентов ранговой корреляции K по Спирмену или по Кендаллу. Значения K принадлежат отрезку $[-1, 1]$. Если последовательности $x(j)$ и $x(h)$ равны, т.е. мнения экспертов j и h совпадают, то $K=1$, если же ранжирование вариантов двумя экспертами полностью противоположно, то $K=-1$, и если ранги в последовательностях $x(j)$ и $x(h)$ независимы, то $K \rightarrow 0$.

Например: номера вариантов ($n=5$): 1 2 3 4 5
 ранги j -го эксперта ($x(j, i)$): 3 1 2 5 4
 ранги h -го эксперта ($x(h, i)$): 2 3 1 4 5
 причём в соответствии с (3.1)

$$\sum_{i=1}^5 x(j, i) = \sum_{i=1}^5 x(h, i) = 15.$$

Коэффициент ранговой корреляции по Спирмену K_C рассчитывается по формуле

$$K_C = 1 - \frac{6 \left[\sum_{i=1}^n (x(j, i) - x(h, i))^2 \right]}{n(n^2 - 1)}. \quad (3.2)$$

Для нашего примера K_C равен

$$K_C = 1 - 6 \frac{1 + 2^2 + 1 + 1 + 1}{5(5^2 - 1)} = 0,6.$$

Коэффициент конкордации W оценивает степень согласованности мнений m экспертов ($m > 2$) при ранжировании вариантов. Если все эксперты одинаково проранжировали варианты, т.е. их мнения полностью совпадают, то $W=1$, если связи между рядами $x(j)$, $j=1, \dots, m$, нет, т.е. мнения экспертов сильно расходятся, то W близко к нулю. Таким образом, значения коэффициента W принадлежат отрезку $[0, 1]$.

В случае, когда компетентность экспертов не учитывается, т.е. для всех экспертов веса одинаковы и равны 1, расчёт коэффициента конкордации производится по формуле

$$W = \frac{\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^m x(j, i) - m(n+1)/2 \right]^2}{\frac{1}{12} m^2 n(n^2 - 1) - m \sum_{j=1}^m T(j)}, \quad (3.3)$$

$$T(j) = \frac{\sum_{i=1}^n t(j, i)(t^2(j, i) - 1)}{12}, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $t(j, i)$ – число повторений рангов $x(j, i)$ в j -м ряду.

В случае, когда учитывается компетентность экспертов введением весовых коэффициентов $c(j)$, $j = 1, \dots, m$, коэффициент W рассчитывается следующим образом:

$$W = \frac{12 \sum_{i=1}^n d(i)^2}{\left[m^2 n(n^2 - 1) - 12m \sum_{j=1}^m T(j) \right] \left[\sum_{j=1}^m c(j)/m \right]^2}, \quad (3.4)$$

$$d(j) = \left(\sum_{i=1}^m c(j) x(j, i) \right) - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c(j) x(j, i) \right].$$

Веса $c(j)$ могут определяться различными путями. Например, на основе учёта квалификации, образования, стажа работы по специальности и т.д. Более объективно для определения $c(j)$ можно использовать тесты или методы ранжирования другой группой экспертов.

Заметим, что используемые в формулах (3.2) – (3.4) ранги $x(j, i)$ обязательно должны удовлетворять условию нормировки (3.1). Например, ранги $y(j, i)$, представленные j -м экспертом и занесённые в исходную матрицу рангов Y для $n = 6$, равны $y(j) = (2, 1, 1, -, -, -)$ и не удовлетворяют условию (3.1), после нормирования они имеют вид $x(j) = (3; 1,5; 1,5; 5; 5; 5)$, т.е. выполняется условие

$$\sum_{i=1}^6 x(j, i) = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21.$$

В этом примере последовательность рангов $y(j)$ преобразуется в нормированный ряд $x(j)$ следующим образом. Эксперт поставил второй v_2 и третий v_3 варианты на первое место (две единицы в ряду $y(j)$). В нормированном ряду два лучших варианта в сумме должны давать $1 + 2 = 3$. Поэтому этим вариантам присваиваются одинаковые значения $x(j, 2) = x(j, 3) = 3/2 = 1,5$. На третье место j -й эксперт поставил 1-й ва-

риант, поэтому $x(j, 1) = 3$. Остальные варианты эксперт считает одинаково неперспективными, они должны стоять на 4-м, 5-м и 6-м местах, поэтому

$$x(j, 4) = x(j, 5) = x(j, 6) = \frac{4+5+6}{3} = 5.$$

Достоверность предположения о согласованности мнений экспертов проверяется методами проверки статистических гипотез. Статистические гипотезы представляют собой некоторые предположения относительно характеристик случайных величин, вероятностных связей, зависимостей и т.п., которые подлежат проверке. Различают нулевые и альтернативные гипотезы. К нулевым гипотезам относятся предположения о равенстве нулю определяемых статистических показателей или отсутствии различия между ними.

Например, коэффициент ранговой корреляции $K = 0$ или коэффициент конкордации $W = 0$. В этих случаях отклонения оценок K и W от нуля объясняются лишь случайными колебаниями в статистических данных. Альтернативными называются все остальные гипотезы, например $K > 0$, $K < 0$ или $W > 0$.

Процедура обоснованного сопоставления гипотезы с полученными при исследовании практическими результатами (данными) называется статистической проверкой гипотез. Для осуществления проверки используется некоторая случайная величина λ – критическая статистика, которая связана с рассчитанным параметром (K , W и т.д.), при этом известен закон распределения λ в предположении правильности нулевой гипотезы, это распределение определяет соответствующий статистический критерий. Обычно критерий носит название закона распределения критической статистики.

Например, для проверки значимости коэффициента конкордации W , т.е. проверки гипотезы, что W существенно больше 0, может использоваться Z -критерий Фишера и критерий «Хи-квадрат» Пирсона (или χ^2).

В первом случае в качестве критической статистики используется величина

$$\hat{Z} = 0,5 \ln[(n+1)W/(1-W)], \quad (3.5)$$

имеющая распределение с числами степеней свободы

$$v_1 = n - 1, \quad v_2 = (m - 1)v_1, \quad (3.6)$$

здесь n , m – число вариантов и экспертов соответственно.

Во втором случае рассматривается величина

$$\hat{\chi}^2 = m(n-1)W, \quad (3.7)$$

подчиняющаяся распределению Пирсона с

$$v = n - 1 \quad (3.8)$$

степенями свободы.

Число степеней свободы v соответствует числу свободно варьируемых данных, по которым рассчитывается статистический показатель (в нашем примере W), это число определяется как разность между объёмом выборки и числом наложенных связей.

Для формализации процедуры проверки статистической гипотезы область значений критической статистики λ делится на две части – допустимую L , в которой наиболее вероятны значения λ в предположении правильности нулевой гипотезы, и критическую $L_{кр}$, внутри которой появление значений λ при условии правильности нулевой гипотезы маловероятно.

Если рассчитанная по результатам экспертизы оценка критической статистики $\hat{\lambda}$ принадлежит L , то принимается нулевая гипотеза и исследуемый показатель считается незначимым. В противном случае, т.е. когда $\hat{\lambda}$ принадлежит $L_{кр}$ (или $\hat{\lambda}$ не принадлежит L), нулевая гипотеза отвергается, а исследуемый показатель считается значимым или существенно отличным от нуля, например, W существенно больше нуля и мнения экспертов можно считать согласованными.

Граница $\lambda_{гр}$ между областями L и $L_{кр}$ выбирается в зависимости от уровня значимости $100\alpha\%$ или максимальной вероятности α – ошибки первого рода. Ошибка первого рода возникает, когда рассчитанная по результатам экспертизы оценка критической статистики $\hat{\lambda}$ принадлежит $L_{кр}$ и будет отброшена нулевая гипотеза, которая в действительности справедлива. При экспертных оценках рекомендуется брать $\alpha = 0,01$; $0,025$ или $0,05$ (соответственно уровни значимости 1; 2,5 или 5%).

Проверка значимости коэффициента конкордации W производится в следующем порядке.

1. Выбирается статистический критерий (Фишера или Пирсона). При $n \geq 7$ рекомендуется использовать критерий Пирсона.

2. По формуле (3.5) или (3.7) рассчитывается оценка критической статистики (\bar{Z} или $\hat{\chi}^2$).

3. Задаётся уровень значимости $100\alpha\%$, рассчитываются числа (или число) степеней свободы v по формулам (3.6) или (3.8) и по соответ-

вующей статистической таблице критерия определяется граничное $\lambda_{гр}$ или табличное $\lambda_T(v, \alpha)$ значение. Например, для критерия Пирсона по табл. П1 Приложения по значениям $v = n - 1$ и $100\alpha \%$ определяется $\chi_T^2(v, \alpha)$.

4. Принимается решение: если $\hat{\chi}^2 > \chi_T^2(v, \alpha)$, то нулевая гипотеза отвергается и коэффициент конкордации W значим, при соответствующем значении $100\alpha \%$; если $\hat{\chi}^2 < \chi_T^2(v, \alpha)$, то имеет место нулевая гипотеза и W незначим.

Для облегчения принятия решения по результатам экспертов рассчитываются результирующие (суммарные) и средние ранги вариантов, т.е.

$$xs(i) = \sum_{j=1}^m x(j, i) \quad \text{и} \quad \bar{x}(i) = \frac{1}{m} xs(i), \quad i = 1, \dots, n.$$

По значениям $xs(i)$ и $\bar{x}(i)$ оцениваются рейтинги вариантов $R(i)$, $i = 1, \dots, n$, для случая значимого коэффициента W и $R_1(i)$, $i = 1, \dots, n$, при незначимом W . Расчёт $R(i)$ и $R_1(i)$ выполняется по формулам

$$R(i) = \frac{1}{m} \left[\sum_{j=1}^m (1/x(j, i)) \right], \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

$$R_1(i) = \frac{1}{xs(i)} \left(\sum_{i=1}^n xs(i) \right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.10)$$

Заметим, что в формуле (3.9) обычно принимается $1/x(j, i) = 0$, если $x(j, i) = n$.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим обработку результатов экспертизы шести вариантов ($n = 6$), проведённой четырьмя экспертами ($n = 4$), которые представлены в табл. 3.1.

3.1. Результаты экспертизы $y(j, i)$

Эксперты	Варианты					
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
1	1	2	1	4	3	5
2	1	2	2	3	1	4
3	1	1	3	2	3	4
4	1	1	3	3	4	3

3.2. Нормированные ранги $x(j, i)$

Эксперты	Варианты						Значения $T(j)$
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	
1	1,5	3,0	1,5	5	4,0	6	0,5
2	1,5	3,5	3,5	5	1,5	6	1,0
3	1,5	1,5	4,5	3	4,5	6	1,0
4	1,5	1,5	4,0	4	6,0	4	2,5
$xs(i)$	6	9,5	13,5	17	16	22	
$xs(i) - m(n+1)/2$	-8	-4,5	-0,5	3	2	8	
$(xs(i) - m(n+1)/2)^2$	64	20,25	0,25	9	4	64	

После нормирования рангов данные заносятся в табл. 3.2.

По результатам табл. 3.2 рассчитывается коэффициент конкордации (см. (3.3))

$$W = \frac{\sum_{i=1}^6 \left(xs(i) - \frac{4 \cdot 7}{2} \right)^2}{\frac{1}{2} 4^2 \cdot 6 \cdot (6^2 - 1) - 4 \sum_{j=1}^4 T(j)} = \frac{64 + 20,25 + 0,25 + 9 + 4 + 64}{280 - 4(0,5 + 1 + 1 + 2,5)} = 0,621.$$

$$T(1) = \frac{2(2^2 - 1)}{12} = 0,5; \quad T(2) = \frac{2(2^2 - 1) + 2(2^2 - 1)}{12} = 1;$$

$$T(3) = \frac{2(2^2 - 1) + 2(2^2 - 1)}{12} = 1; \quad T(4) = \frac{2(2^2 - 1) + 3(3^2 - 1)}{12} = 2,5.$$

Проверку значимости коэффициента W производим по критерию «Хи-квадрат». Расчётное значение критерия в соответствии с (3.7) равно

$$\hat{\chi}^2 = m(n-1)W = 4(6-1)0,621 = 12,42.$$

Значение $\hat{\chi}^2$ сравнивается с табличным значением $\hat{\chi}_T^2$, получаемым при $\alpha = 0,05$ и $\nu = n-1 = 5$ (см. табл. П1 приложения).

Так как

$$\hat{\chi}^2 = 12,42 > \chi_T^2(0,05; 5) = 11,07,$$

то нулевая гипотеза отвергается и W значима, а мнения экспертов при уровне значимости 5% можно считать согласованными.

Рейтинги вариантов, рассчитанные по формуле (3.9), равны:

$$R(1) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x(j,1)} = 0,667; \quad R(2) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x(j,2)} = 0,488;$$

$$R(3) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x(j,3)} = 0,356; \quad R(4) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x(j,4)} = 0,196;$$

$$R(5) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x(j,5)} = 0,326; \quad R(6) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{x(j,6)} = 0,188.$$

Таким образом, наибольшие рейтинги по согласованному мнению экспертов имеют варианты v_1 и v_2 .

Методы экспертных оценок имеют ряд разновидностей, отличающихся способами анализа вариантов экспертами (обычное ранжирование, парные сравнения и др.), обработки результатов, а также различиями на других стадиях проведения экспертиз. Обычно выделяют следующие стадии:

- 1) формулировка ЛПР проблемы и цели экспертизы;
- 2) подбор ЛПР основного состава рабочей группы (РГ);
- 3) разработка в РГ и утверждение у ЛПР технического задания на проведение экспертного опроса;
- 4) разработка в РГ подробного сценария проведения сбора и анализа экспертных мнений (оценок), включая конкретный вид экспертной информации (слова, условные градации, числа, ранжировки, разбиения или иные виды объектов нечисловой природы) и конкретные методы анализа этой информации;
- 5) подбор экспертов в соответствии с их компетентностью;
- 6) формирование экспертной комиссии (целесообразно заключение договоров с экспертами об условиях их работы и её оплаты, утверждение ЛПР состава экспертной комиссии);
- 7) проведение сбора экспертной информации;
- 8) анализ экспертной информации;
- 9) при наличии нескольких туров – повторение двух предыдущих этапов;
- 10) интерпретация полученных результатов и подготовка заключения для ЛПР;
- 11) официальное окончание деятельности РГ.

3.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ МЕТОДОМ РАНЖИРОВАНИЯ ВАРИАНТОВ ПРИ ВЕКТОРНОМ КРИТЕРИИ

Качество проектируемых радиоэлектронных средств и их частей обычно оценивается большим числом показателей, относящихся к различным свойствам – целевому назначению, помехозащищённости, пропускной способности, надёжности и т.д. Комплекс показателей качества

имеет большую размерность и включает как количественные величины, имеющие определённую размерность, количественные безразмерные (относительные) величины, так и качественные, например, оценивающие дизайн, и представляемые в баллах. При сравнении вариантов проектных решений комплекс показателей качества представляется в виде векторного критерия $Q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$.

Все частные показатели делятся на две группы: монотонно «убывающие» (масса, стоимость и т.п.) и монотонно «возрастающие» (пропускная способность, вероятность безотказной работы и т.д.).

При формировании критерия Q рекомендуется:

1) выбирать минимальное число наиболее важных частных критериев $q_l, l = 1, \dots, k$;

2) показатели q_l должны иметь ясный смысл и характеризовать простые свойства;

3) вектор Q должен с достаточной точностью характеризовать качество проектируемого объекта.

Обычно при решении задач оптимального проектирования все q_i приводятся к стандартному виду, т.е. они должны удовлетворять условиям:

1) $q_l > 0$;

2) чем меньше q_l , тем лучше;

3) в идеале $q_l \rightarrow 0$.

Для сокращения размерности вектора Q отдельные показатели могут рассматриваться в виде ограничений.

Многокритериальность в задачах принятия проектных решений может рассматриваться в следующих аспектах:

1) непосредственно в смысле векторного критерия с k частными показателями;

2) как результат работы отдельных экспертов по скалярному критерию q , т.е. пусть $r(j, i), j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$ – нормированные ранги, выставленные m экспертами n вариантам, тогда для варианта v_i можно рассматривать m -вектор показателей

$$Q_s(v_i) = (r(1, i), r(2, i), \dots, r(m, i)); \quad (3.10)$$

3) результаты оценок вариантов различными методами при скалярном критерии q в условиях, выполненных ЛПР, в этом случае

$$Q_m(v_i) = (q_1(v_i), q_2(v_i), \dots, q_\mu(v_i)), \quad (3.11)$$

где $q_j(v_i), j = 1, \dots, \mu$ – значения показателей варианта v_i , полученные различными методами, μ – число используемых методов;

4) для сравнения значений $q(i, s)$ на множестве ситуаций S .

Во всех рассмотренных случаях оптимальный вариант v^* обычно определяется на основе «компромисса» между частными показателями. Наибольшее развитие получили алгоритмы решения многокритериальных задач, использующие:

- метод оптимизации по Парето;
- способы «свёртки» векторного критерия в скалярный;
- способ выделения наиболее важного частного показателя в качестве основного и наложение ограничений на остальные показатели.

Многокритериальные задачи принятия проектного решения с использованием метода оптимизации по Парето обычно решаются в два этапа. На первом этапе формируется подмножество $V^{\text{П}}$ Парето-оптимальных вариантов. На втором этапе применяется один из способов сведения векторного критерия Q в скалярный q , после чего используются методы для скалярных критериев.

Для задач ВПВ второй этап зависит от соотношения между мощностями множеств $V^{\text{П}}$ (получается в результате первого этапа) и V_0 (задаётся условиями задачи). Если $|V^{\text{П}}| = |V_0|$, то второго этапа не требуется и $V_0 = V^{\text{П}}$. Если $|V^{\text{П}}| > |V_0|$, то выполняются работы второго этапа с вариантами $v \in V^{\text{П}}$. Если же $|V^{\text{П}}| < |V_0|$, то расчёты начинаются с первого этапа для элементов $v \in V \setminus V^{\text{П}}$ в целях выделения подмножества вариантов V'_0 , для которого $|V'_0| = |V_0| - |V^{\text{П}}|$.

Рассмотрим формирование подмножества Парето-оптимальных вариантов $V^{\text{П}}$ на примере работы одного эксперта при ранжировании вариантов отдельно по всем частным критериям q_j , $j = 1, \dots, k$, в результате такого ранжирования получается матрица рангов

$$R = \|r(j, i)\|_{k \times n}, \quad (3.12)$$

где $r(j, i)$ – ранг i -го варианта по j -му показателю.

Предполагается, что чем меньше ранг, тем вариант лучше. Тогда из двух вариантов v_i и v_v , характеризующихся столбцами матрицы R

$$\begin{pmatrix} r(1, i) \\ r(2, i) \\ \vdots \\ r(k, i) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} r(1, v) \\ r(2, v) \\ \vdots \\ r(k, v) \end{pmatrix},$$

вариант v_i считается предпочтительнее ($v_i \succ v_v$), если для всех $j = 1, \dots, k$, выполняется условие $r(j, i) \leq r(j, v)$, причём хотя бы по одному частному критерию строго $r(j, i) < r(j, v)$.

В случае, когда по отдельным частным критериям предпочтительнее вариант v_i , а по другим – v_v , варианты v_i и v_v считаются равнозначными или эквивалентными относительно векторного критерия Q , равнозначность вариантов обозначается $v_i \sim v_v$.

Вариант v_i^* считается оптимальным, если он предпочтительнее по отношению к остальным $n - 1$ вариантам, и оптимальным по Парето, если для него нет предпочтительных вариантов. Если имеется несколько вариантов, для которых нет предпочтительных, то эти варианты образуют подмножество вариантов V^{Π} , оптимальных по Парето ($V^{\Pi} \subseteq V$). Алгоритм формирования подмножества V^{Π} следующий.

1. Сопоставляются варианты v_1 и v_2 . Если $v_1 \sim v_2$, то переходят к сравнению v_1 с v_3 . Если $v_1 \succ v_2$, то вариант v_2 исключается из дальнейшего рассмотрения. Если же $v_2 \succ v_1$, то из рассмотрения исключается v_1 .

2. Аналогично вариант v_1 попарно сопоставляется с остальными вариантами v_3, \dots, v_n . Все варианты v_1 , для которых имеет место $v_i \prec v_1$, исключаются из дальнейшего анализа.

В результате сравнений варианта v_1 с другими вариантами v_i , $i = 2, \dots, n$, первый вариант либо включается в подмножество V^{Π} (если имеются варианты $v_i \prec v_1$), либо выбывает, если имеется вариант $v_i \succ v_1$. Если же имеет место $v_1 \succ v_i$, $i = 2, \dots, n$, то v_1 является оптимальным вариантом v^* .

3. Таким же образом производится попарное сравнение второго варианта (если $v_2 \sim v_1$ или $v_2 \succ v_1$) с оставшимися v_i , $i = 3, \dots, n$ и т.д.

Аналогично подмножество V^{Π} формируется и для других случаев. В задачах на максимум, когда q_j играют роль эффективностей, вариант v_i предпочтительнее v_v ($v_i \succ v_v$), если для всех $j = 1, \dots, k$ выполняется условие $q(j, i) \geq q(j, v)$, причём хотя бы по одному частному критерию $q(j, i) > q(j, v)$.

Естественно, что при формировании V^{Π} все частные показатели должны быть ориентированы или только на максимум (эффективность), или только на минимум (затраты, ранги и т.д.).

Пример 2. Рассмотрим оптимизацию по Парето для исходных данных, содержащихся в примере 1 (см. табл. 3.2). Здесь роль частных показателей (q_i) играют мнения четырёх экспертов ($k = m = 4$) при ранжировании шести вариантов ($n = 6$). Результаты сопоставления (табл. 3.3) нормированных рангов первого варианта (v_1) с остальными показывают, что v_1 предпочтительнее каждого из остальных вариантов $v_i, i = 2, \dots, 6$, т.е. является оптимальным.

Если для дальнейшего исследования требуется отобрать три-четыре варианта, то формируется множество Парето-оптимальных вариантов из оставшихся пяти.

Результаты сопоставления рангов варианта v_2 с $v_i, i = 3 \dots 6$ (табл. 3.4) показывают, что $v_2 \sim v_3, v_2 \sim v_5$ и $v_2 > v_4, v_2 > v_6$, т.е. для v_2 нет предпочтительных вариантов, и он включается в подмножество V^n , а варианты v_4 и v_6 исключаются из дальнейшего рассмотрения.

3.3. Результаты сопоставления рангов варианта v_1

v_1 и v_2	v_1 и v_3	v_1 и v_4	v_1 и v_5	v_1 и v_6
$1,5 < 3,0$	$1,5 \sim 1,5$	$1,5 < 5,0$	$1,5 < 4,0$	$1,5 < 6,0$
$1,5 < 3,5$	$1,5 < 3,5$	$1,5 < 5,0$	$1,5 \sim 1,5$	$1,5 < 6,0$
$1,5 \sim 1,5$	$1,5 < 4,5$	$1,5 < 3,0$	$1,5 < 4,5$	$1,5 < 6,0$
$1,5 \sim 1,5$	$1,5 < 4,0$	$1,5 < 4,0$	$1,5 < 6,0$	$1,5 < 4,0$

3.4. Результаты сопоставления рангов варианта v_2

v_2 и v_3	v_2 и v_4	v_2 и v_5	v_2 и v_6
$3,0 > 1,5$	$3,0 < 5,0$	$3,0 < 4,0$	$3,0 < 6,0$
$3,5 \sim 3,5$	$3,5 < 5,0$	$3,5 > 1,5$	$3,5 < 6,0$
$1,5 < 4,5$	$1,5 < 3,0$	$1,5 < 4,5$	$1,5 < 6,0$
$1,5 < 4,0$	$1,5 < 4,0$	$1,5 < 6,0$	$1,5 < 4,0$

Сравнение вариантов v_3 с v_5 показывает, что они эквивалентны, т.е. $v_3 \sim v_5$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 &v_3 \text{ и } v_5 \\
 &1,5 < 4,0 \\
 &3,5 > 1,5 \\
 &4,5 \sim 4,5 \\
 &4,0 < 6,0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, сопоставлением рангов для вариантов v_i , $i = 2, \dots, 6$, выделено три варианта v_2, v_3, v_5 , для которых нет предпочтительных, эти варианты образуют подмножество Парето-оптимальных, т.е. $V^H = \{v_2, v_3, v_5\}$.

Для «свёртывания» векторного критерия на втором этапе решения многокритериальных задач обычно используются «аддитивный» и «мультипликативный» способы.

При «аддитивном» способе свёртывание производится путём сложения значений частных показателей с соответствующими весами. Так как обычно частные критерии имеют различную физическую природу и в соответствии с этим различную размерность, то при образовании обобщённого критерия оперируют не с «натуральными» критериями, а с их нормированными значениями. Нормирование частных показателей производится путём отношения «натурального» критерия к некоторой нормирующей величине, измеряемой в тех же единицах, что и сам критерий.

Обычно применяются три подхода к выбору нормирующего делителя. В соответствии с первым подходом в качестве нормирующего делителя принимаются некоторые директивные значения параметров.

Второй подход предполагает в качестве нормирующих делителей использовать максимальные значения критериев, достигаемые в соответствующих областях.

При третьем подходе в качестве нормирующих делителей выбирают разность между максимальным и минимальным значениями критерия в области компромисса.

Выбор подхода к формированию безразмерной формы частных критериев в значительной степени носит субъективный характер и должен быть обоснован в каждом конкретном случае.

Таким образом, расчёт аддитивного критерия для варианта v_i производится по формуле

$$q_a(v_i) = \sum_{l=1}^k c_l \frac{q_l(v_i)}{q_l^H(v_i)}, \quad (3.13)$$

где c_l – весовой коэффициент v -го частного критерия; $q_l^H(v_i)$ – l -й нормирующий делитель.

Введение весовых коэффициентов c_l должно учитывать различную значимость частных показателей при формировании аддитивного критерия. Определение весовых коэффициентов часто встречает серьёзные трудности и обычно сводится к использованию формальных процедур или к применению экспертных оценок.

Аддитивный критерий имеет ряд недостатков, главный из них состоит в том, что критерий q_a не вытекает из объективной роли частных по-

казателей и выступает как формальный математический приём, придающий задаче удобный для решения вид. Другой недостаток заключается в том, что в критерии q_a может происходить взаимная компенсация частных критериев. Это значит, что значительное уменьшение одного из критериев вплоть до нулевого значения может быть покрыто возрастанием другого критерия. Для ослабления этого недостатка вводят ограничения на минимальные значения частных критериев и их весовых коэффициентов.

Мультипликативный способ предполагает перемножение частных критериев, т.е.

$$q_m(v_i) = \prod_{l=1}^k q_l(v_i). \quad (3.14)$$

В случае неравноценности частных показателей вводятся весовые коэффициенты c_v и мультипликативный критерий принимает вид

$$q_m(v_i) = \prod_{l=1}^k c^l q_l(v_i). \quad (3.15)$$

Достоинством мультипликативного критерия является то, что при его использовании не требуется нормировка частных показателей. К недостаткам критерия относятся: критерий компенсирует недостаточную величину одного частного показателя избыточной величиной другого и имеет тенденцию сглаживать уровни частных критериев за счёт неравнозначных первоначальных значений критериев.

Таким образом, задача «свёртывания» векторного критерия Q в скалярный q_a или q_m является достаточно сложной и не имеет однозначного решения.

3.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ МЕТОДОМ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

Метод парных сравнений часто используется при экспертизе вариантов сложных проектов, здесь трудоёмкая процедура ранжирования n вариантов заменяется многократным применением более простой процедуры попарного сравнения вариантов между собой. Достоинства этого метода особенно проявляются при векторных критериях оптимальности Q большой размерности и большом числе вариантов n .

Пусть сравниваются два варианта v_h, v_p из множества V и вариант v_h по заданным критериям предпочтительнее варианта v_p . Это будем обозначать $v_h \succ v_p$.

В ходе экспертизы каждый эксперт заполняет таблицу, в неё он заносит результаты парных сравнений, образующие $(n \times n)$ -матрицу

$$Z = \|z(h, p)\|_{n \times n},$$

где

$$z(h, p) = \begin{cases} 1, & \text{если } v_h \succ v_p; \\ 0, & \text{если } v_h \prec v_p; \\ -, & \text{если } v_h \sim v_p. \end{cases}$$

Для j -го эксперта матрицу Z будем обозначать $Z(j)$. Общий вид такой матрицы, характеризующей результаты парных сравнений, представлен в табл. 3.5.

3.5. Матрица $Z(j)$ парных сравнений j -го эксперта

Номер варианта	v_1	v_2	...	v_p	...	v_n
v_1	—	$z(1, 2; j)$...	$z(1, p; j)$...	$z(1, n; j)$
v_2	$z(2, 1; j)$	—	...	$z(2, p; j)$...	$z(2, n; j)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
v_h	$z(h, 1; j)$	$z(h, 2; j)$...	$z(h, p; j)$...	$z(h, n; j)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
v_n	$z(n, 1; j)$	$z(n, 2; j)$...	$z(n, p; j)$...	—

3.6. Пример заполненной матрицы Z парных сравнений одним экспертом

Номер варианта	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	—	1	0	1
v_2	0	—	0	1
v_3	1	1	—	0
v_4	0	0	1	—

Например, для четырёх вариантов ($n = 4$) заполненная одним экспертом табл. 3.5 может иметь вид, представленный табл. 3.6, ей соответствует матрица Z , равная

$$Z = \begin{bmatrix} - & 1 & 0 & 1 \\ 0 & - & 0 & 1 \\ 1 & 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - \end{bmatrix}.$$

Элементы данной матрицы означают, что эксперт при сравнении вариантов v_1 и v_2 отдал предпочтение первому варианту ($v_1 \succ v_2$), поэтому $z(1,2)=1$, при сравнении v_1 с v_3 – третьему ($v_1 \prec v_3$) и $z(1,3)=0$, при сравнении v_1 с v_4 – первому и $z(1,4)=1$ и т.д.

Матрицы $Z(j)$ обладают следующими свойствами:

- 1) по главной диагонали стоят знаки « \leftrightarrow » (прочерк);
- 2) если элемент $z(h, p)=1$, то $z(p, h)=0$, $h \neq p$;
- 3) так как число парных сравнений вариантов равно числу сочетаний из n по 2, т.е.

$$C(2/n) = n(n-1)/2,$$

то матрица Z содержит C_n^2 единиц и C_n^2 нулей.

Свойство третье используется для проверки правильности заполнения матрицы экспертом, т.е.

$$\sum_{h=1}^n \sum_{p=1}^n z(h, p) = n(n-1)/2.$$

Эксперту рекомендуется следующий порядок заполнения $Z(j)$.

Сначала следует попарно сравнивать вариант v_1 с v_2, \dots, v_n , т.е. заполнять первую строку матрицы $Z(j)$. Далее вариант v_2 с v_3, \dots, v_n и т.д. То есть достаточно записать значение $z(h, p; j)$ лишь выше главной диагонали. Другая часть матрицы заполняется на основе второго свойства (если $z(h, p)=1$, то $z(p, h)=0$, $h \neq p$).

При сравнении вариантов v_h и v_p по векторному критерию необходимо учитывать важность показателей и число показателей, по которым v_h превосходит v_p .

3.7. Обобщённая матрица Γ при парных сравнениях

Номер варианта	v_1	v_2	...	v_p	...	v_n	\sum^1
v_1	–	$g(1, 2)$...	$g(1, p)$...	$g(1, n)$	H_1
v_2	$g(2, 1)$	–	...	$g(2, p)$...	$g(2, n)$	H_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
v_h	$g(h, 1)$	$g(h, 2)$...	$g(h, p)$...	$g(h, n)$	H_h
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
v_n	$g(n, 1)$	$g(n, 2)$...	$g(n, p)$...	–	H_n
\sum^2	P_1	P_2	...	P_p	...	P_n	\sum^3

В результате работы m экспертов заполняется m таблиц $Z(j)$, $j = 1, 2, \dots, m$ парных сравнений. Обработка результатов экспертизы начинается с объединения этих таблиц в одну обобщённую табл. 3.7, содержащую $(n \times n)$ -матрицу

$$\Gamma = \|g(h, p)\|_{n \times n},$$

элементы которой получаются суммированием соответствующих значений матриц $Z(j)$, т.е.

$$g(h, p) = \sum_{j=1}^m z(h, p; j).$$

Дополнительно табл. 3.7 содержит столбец \sum^1 и строку \sum^2 . Элементы H_1, \dots, H_n столбца \sum^1 равны суммам элементов строк матрицы Γ , т.е.

$$H_h = \sum_{p=1}^n g(h, p), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

а элементы P_1, \dots, P_n строки $\sum 2$ равны суммам элементов столбцов матрицы Γ , т.е.

$$P_p = \sum_{h=1}^n g(h, p), \quad p = 1, 2, \dots, n.$$

Матрица Γ и компоненты табл. 3.7 должны удовлетворять следующим свойствам.

1. Сумма элементов матрицы Γ равна

$$\sum 3 = \sum_{h=1}^n \sum_{p=1}^n g(h, p) = mC_n^2 = mn(n-1)/2.$$

2. При полном согласии мнений экспертов в C_n^2 ячейках $g(h, p) = m$, в остальных $g(h, p) = 0, h \neq p$.

3. При минимальном согласии каждая ячейка табл. 3.7 содержит $g = m/2$, если m – чётное, и $g = (m+1)/2$ или $g = (m-1)/2$, если m – нечётное.

4. Сумма из элементов j -го столбца и i -й строки постоянна для всех i , т.е.

$$\sum_{h=1}^n g(h, i) + \sum_{p=1}^n g(i, p) = \text{const}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или

$$H_1 + P_1 = H_2 + P_2 = \dots = H_n + P_n.$$

5. Суммы элементов векторов $\sum 1 = (H_1, \dots, H_n)$ и $\sum 2 = (P_1, \dots, P_n)$ равны, т.е.

$$\sum_{h=1}^n H_h = \sum_{p=1}^n P_p = \sum 3.$$

С помощью табл. 3.5 и 3.7 вычисляется средняя частота предпочтения каждого варианта каждым экспертом и средний ранг фактора, полученный от всех экспертов.

Пример 3. В качестве примера рассмотрим случай парных сравнений для $n = 4$ и $m = 3$. Результаты сравнений экспертами приведены в табл. 3.8 – 3.10.

3.8. Матрица парных сравнений 1-го эксперта ($j = 1$)

Номер варианта	v_1	v_2	v_3	v_4	$f(h; 1)$	$w(h; 1)$
v_1	–	1	0	1	2	1/3
v_2	0	–	0	1	1	1/6
v_3	1	1	–	0	2	1/3
v_4	0	0	1	–	1	1/6

3.9. Матрица парных сравнений 2-го эксперта ($j = 2$)

Номер варианта	v_1	v_2	v_3	v_4	$f(h; 2)$	$w(h; 2)$
v_1	–	0	0	1	1	1/6
v_2	1	–	1	1	3	1/2
v_3	1	0	–	0	2	1/6
v_4	0	0	1	–	1	1/6

3.10. Матрица парных сравнений 3-го эксперта ($j = 3$)

Номер варианта	v_1	v_2	v_3	v_4	$f(h; 3)$	$w(h; 3)$
v_1	–	0	0	0	0	0
v_2	1	–	0	0	1	1/6
v_3	1	1	–	0	2	1/3
v_4	1	1	1	–	3	1/2

В этих таблицах содержатся также значения частот (чисел) предпочтения варианта v_h j -м экспертом $f(h; j)$ и нормированных частот предпочтения варианта v_h j -м экспертом $w(h; j)$, которые рассчитываются по формулам:

$$f(h; j) = \sum_{p=1}^n z(h, p; j), \quad w(h; j) = \frac{f(h; j)}{C_n^2},$$

причём

$$\sum_{h=1}^n w(h; j) = 1,$$

т.е. нормирование заключается в делении частот $f(h; j)$ на число сравнений $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

По существу $f(h; j)$, $h=1, \dots, n$ – это суммы элементов строк матрицы $Z(j)$. В рассматриваемом примере для первого эксперта $f(h; 1)$, $h=1, \dots, 4$, равны:

$$f(1; 1) = z(1, 2; 1) + z(1, 3; 1) + z(1, 4; 1) = 1 + 0 + 1 = 2; \quad f(2; 1) = 0 + 0 + 1 = 1; \\ f(3; 1) = 1 + 1 + 0 = 2; \quad f(4; 1) = 0 + 0 + 1 = 1;$$

$$w(1; 1) = f(1; 1) / C_4^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}; \quad w(2; 1) = \frac{1}{6};$$

$$w(3; 1) = \frac{1}{3}; \quad w(4; 1) = \frac{1}{6} \text{ и т.д.}$$

Аналогично получаются значения $f(h; j)$ и $w(h; j)$, $h=1, \dots, 4$, $j=2, \dots, 4$.

Обобщённая матрица Γ для рассматриваемого примера содержится в табл. 3.11. Здесь выполнены все свойства матрицы Γ , т.е.

$$\sum 3 = 3 \frac{4(4-1)}{2} = 18; \quad H_i + P_i = \sum_{h=1}^4 g(h, i) + \sum_{p=1}^4 g(i, p) = 9 \quad \text{для } i=1, 2, 3, 4,$$

и

$$\sum_{h=1}^4 H_h = \sum_{p=1}^4 P_p = 18.$$

Последний столбец табл. 3.11 содержит значения нормированных средних частот (рейтингов) $w(h)$, $h=1, \dots, n$ с учётом мнения всех экспертов, которые вычисляются по формуле

$$w(h) = \frac{\sum_{j=1}^m w(h; j)}{\sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^n w(h; j)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m w(h; j).$$

3.11. Обобщённая матрица Г парных сравнений для $n = 4$ и $m = 3$

Номер варианта	v_1	v_2	v_3	v_4	$\sum 1$	$w(h)$
v_1	–	1	0	2	$H_1 = 3$	1/6
v_2	2	–	1	2	$H_1 = 5$	5/18
v_3	3	2	–	0	$H_1 = 5$	5/18
v_4	1	1	3	–	$H_1 = 5$	5/18
$\sum 2$	$P_1 = 6$	$P_2 = 4$	$P_3 = 4$	$P_4 = 4$	$\sum 3 = 18$	$\sum w(h) = 1$

В примере

$$\begin{aligned}
 w(1) &= \frac{\sum_{j=1}^3 w(1; j)}{\sum_{j=1}^3 \sum_{h=1}^4 w(h; j)} = \\
 &= \frac{1/3 + 1/6 + 0}{(1/3 + 1/6 + 0) + (1/6 + 1/2 + 1/6) + (1/3 + 1/6 + 1/3) + (1/6 + 1/6 + 1/2)} = \frac{1}{6} \approx 0,17; \\
 w(2) &= \frac{1/6 + 1/2 + 1/6}{3} = \frac{5}{18} \approx 0,27; \quad w(3) = \frac{1/3 + 1/6 + 1/3}{3} = \frac{5}{18} \approx 0,27; \\
 w(4) &= \frac{1/6 + 1/6 + 1/2}{3} = \frac{5}{18} \approx 0,27.
 \end{aligned}$$

Заметим, что частоты $w(h)$, $h = 1, \dots, n$, можно рассчитывать также непосредственно по табл. 3.11 или по формуле

$$w(h) = \frac{H_h}{\sum 3}.$$

Чем больше значение $w(h)$, тем предпочтительнее вариант v_h .

При последующей обработке табл. 3.11 преобразуется в таблицу, где варианты располагаются в порядке убывания значений H_h . При равенстве значений H_h на первое место ставится вариант v_h , в строке матрицы Г которого содержится $g(\max)$ и нет нулей, на 2-е место с $g(\max)$ и нулями, на 3-е без $g(\max)$ и т.д. Покажем это на примере преобразований табл. 3.11 в табл. 3.12.

3.12. Преобразованная обобщённая матрица Γ парных сравнений с $n = 4$ и $m = 3$

Номер варианта	v_1	v_2	v_3	v_4	Средние частоты $w(h)$
v_1	–	3	1	1	5/18
v_2	0	–	2	3	5/18
v_3	2	1	–	2	5/18
v_4	2	0	1	–	1/6

Здесь на первом месте записан четвёртый вариант, так как v_4 содержит $g(\max) = 3$ и в строке нет нулей. Далее вариант v_3 с $g(\max)$ и одним нулём, затем v_2 с двумя $g = 2$ и, наконец, v_1 с $g = 2$ и нулём.

Таким образом, в табл. 3.12 варианты располагаются в порядке предпочтения по результатам опроса экспертов, отмеченное преобразование позволяет разделить варианты даже с одинаковыми рангами.

Далее рассчитывается коэффициент согласия W_{Π} , характеризующий насколько согласованы мнения экспертов при парных сравнениях. Расчёт W_{Π} производится по формуле

$$W_{\Pi} = \frac{4S}{m(m-1)n(n-1)},$$

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{g(i,j)}^2,$$

где $C_{g(i,j)}^2$ – число сочетаний из $g(i,j)$ элементов по 2, а $g(i,j)$ – элемент матрицы Γ в табл. 3.7 (табл. 3.11 или 3.12), при этом

$$C_{g(i,j)}^2 = \begin{cases} 0, & \text{если } g(i,j) < 2, \\ 1, & \text{если } g(i,j) = 2, \\ \frac{g(g-1)}{2}, & \text{если } g(i,j) > 2. \end{cases}$$

Например, для табл. 3.11 имеем

$$g(1,4) = g(2,1) = g(2,4) = g(3,2) = 2 \text{ и } C_{g(1,4)}^2 = C_{g(2,1)}^2 = C_{g(2,4)}^2 = C_{g(3,2)}^2 = C_2^2 = 1,$$

$$g(3,1) = g(4,3) = 3 \text{ и } C_{g(3,1)}^2 = C_{g(4,3)}^2 = C_3^2 \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3,$$

для остальных $g(i,j) C_{g(i,j)}^2 = 0$.

В результате получаем

$$S = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 C_{g(i,j)}^2 = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 10 \cdot 0 = 10,$$

$$W_n = \frac{4 \cdot 10}{3(3-1) \cdot 4(4-1)} = \frac{5}{9} \approx 0,55.$$

Коэффициент W_n может находиться в пределах от $W_n(\min)$ (при минимальном согласии экспертов) до 1 (их полное согласие), т.е. $W_n \in [W_n(\min); 1]$.

Значение $W_n(\min)$ рассчитывается из соотношения

$$W_n(\min) = \begin{cases} \frac{m-1}{2m}, & \text{если } m \text{ нечётное;} \\ \frac{m-2}{2(m-1)}, & \text{если } m \text{ чётное.} \end{cases}$$

В примере $m = 3$ и

$$W_n(\min) = \frac{3-1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Таким образом, $W_n = 0,55$ принадлежит отрезку $[0,33; 1]$.

Оценка значимости коэффициента W_n , т.е. существенно ли он отличается от $W_n(\min)$ при больших m и n , производится с использованием критерия «Хи-квадрат» (χ^2).

Для этого рассчитывается оценка критерия по результатам экспертизы

$$\hat{\chi}^2 = \frac{4}{m-2} \left[S - 0,5 C_n^2 C_m^2 \frac{m-3}{m-2} \right]$$

и число степеней свободы

$$v = C_n^2 \frac{m(m-1)}{(m-2)^2}.$$

В нашем случае

$$\hat{\chi}^2 = \frac{4}{3-2} \left[10 - \frac{1}{2} C_4^2 C_3^2 \frac{3-3}{3-2} \right] = 40; v = C_4^2 \frac{3(3-1)}{(3-2)^2} = 6 \cdot 6 = 36.$$

3.13. Значения $\chi^2_T(v, \alpha)$

Число степеней свободы ν	Уровень значимости	
	$100\alpha = 1\%$	$100\alpha = 5\%$
2	9,21	5,99
4	13,28	9,49
6	16,81	12,59
8	20,09	15,51
10	23,21	18,31
12	26,23	21,03
14	29,14	23,69
16	32	26,30

Значение $\hat{\chi}^2$ сравнивается с табличным $\chi^2_T(v, \alpha)$, определяемым по числу ν и уровню значимости α (обычно $100\alpha\% = 1\%$ или $100\alpha\% = 5\%$ (табл. 3.13). Более полная таблица значений $\chi^2_T(v, \alpha)$ дана в табл. П1 приложения.

Если $\hat{\chi}^2 > \chi^2_T(v, \alpha)$, то гипотеза о значимости W_{Π} (согласованности мнений экспертов) принимается, в противном случае ($\hat{\chi}^2 \leq \chi^2_T(v, \alpha)$) – отвергается.

В нашем случае по табл. П1 приложения при $\nu = 36$ и $\alpha = 0,05$ нетрудно найти соответствующее значение χ^2_T/v . Это будет $\chi^2_T(36; 0,05)/36 = 1,414$, а, следовательно, $\chi^2_T(36; 0,05) = 50,9$.

Так как

$$\chi^2 = 40 \text{ и } \chi^2 < \chi^2_T(36; 0,05) = 50,9,$$

то гипотеза о значимости W_{Π} отвергается и мнения экспертов не являются согласованными.

4. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

При выполнении работ на этапах планирования и проектирования (разработки) жизненного цикла проекта могут использоваться различные методы принятия решений в условиях частичной неопределённости. Принимаемое решение часто зависит от применяемого метода и во многих случаях далеко не очевидно, какой метод следует применять.

4.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ

Исходной информацией для решения подобных задач является функция потерь (доходов), значение которой зависит от двух аргументов – решения и ситуации. Как правило, функцию потерь преобразуют в функцию риска, зависящую только от одного аргумента, а именно от принимаемого решения.

Способ такого преобразования неоднозначен и зависит от выбранного ЛПР критерия риска. Применимость различных критериев риска в разных ситуациях зависит от характера неопределённости ситуации – состояния природы или целенаправленного противодействия. Выделяют две разновидности неопределённости: известно только множество возможных состояний или распределение вероятностей на множестве этих состояний.

Наибольшее распространение в качестве критериев риска получили критерии минимакса и Байеса. Использование первого не требует никакой информации о ситуации (за исключением указания множества возможных ситуаций) и поэтому его можно применять при любой неопределённой ситуации, причём для неопределённости противодействия он является единственно приемлемым критерием. Применение критерия Байеса требует знания вероятностей состояний. Задачи, связанные с этими неопределённостями, изучают соответственно теория статистических решений и теория игр.

Теория игр – это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Участвующие в конфликтах стороны часто заинтересованы в том, чтобы скрыть от противника свои намерения, поэтому принятие решений в условиях конфликта можно называть принятием решений в условиях неопределённости. И наоборот, возможно интерпретировать фактор неопределённости как противника ЛПР, а принятие решений в условиях неопределённости можно понимать как принятие решений в условиях конфликта.

Конфликтом считают всякое явление, относительно которого можно говорить о его участниках, их действиях, исходах, к которым эти действия приводят, о сторонах, так или иначе заинтересованных в этих исходах и о сущности этой заинтересованности. Участников конфликта называют коалициями действия, возможные действия каждой из коалиций – её стра-

тегиями, исходы конфликта – ситуациями, заинтересованные стороны – коалициями интересов. Говорят также о возможной предпочтительности для каждой коалиции интересов одной ситуации перед другой. Сам конфликт в целом формально описывают как некоторую систему и называют её игрой. Конкретизация задающих игру компонент приводит к разнообразным частным классам игр.

Если в игре имеется лишь одна коалиция действия, то множество ситуаций совпадает с множеством стратегий, и игра называется нестратегической. Если в игре множества коалиций действия и коалиций интересов совпадают, то коалиции называются игроками, а отношения предпочтения задаются функциями выигрыша, и имеет место бескоалиционная игра. Их частными классами являются антагонистические игры, в том числе матричные игры. К бескоалиционным играм относятся динамические игры, в том числе дифференциальные игры, рекурсивные игры, игры на выживание и др.

Принятием решения в теории игр считается выбор коалиции действия или, в частности, выбор игроком некоторой своей стратегии. Этот выбор можно представить в виде однократного действия и свести формально к выбору элемента из множества. Игры с таким пониманием выбора стратегий называют играми в нормальной форме.

Им противостоят динамические игры, в которых выбор стратегии является развёртывающимся во времени процессом, сопровождающимся расширением и сужением возможностей, приобретением и утратой информации о текущем положении дел и т.п. Формально стратегией в такой игре является функция, определённая на множестве всех информационных состояний ЛПР.

Заметим, что единого представления об оптимальности в теории игр нет. Поэтому приходится рассматривать различные принципы оптимальности, область применимости каждого из которых ограничивается сравнительно узкими классами игр. В основе каждого из этих принципов лежат некоторые интуитивные представления об оптимуме, как о чём-то «устойчивом» или «справедливом». Известны принципы: осуществимости цели, который приводит к ситуациям равновесия, индивидуальные отклонения от которых не могут сопровождаться увеличением выигрыша; максимина; вектора Шепли и др.

Ситуации, удовлетворяющие в некоторой игре тем или иным требованиям оптимальности, называются решениями игры. Поскольку представления об оптимальности не являются однозначными, то говорят о решениях игр в различных смыслах.

Не существует единого способа нахождения решений игр, и часто решение игры оказывается неоднозначным, а исчерпывающий анализ игры требует полного перечисления всех её решений. Лишь в отдельных, исключительных случаях решение игры поддаётся описанию посредством

формул. Большой частью оно формулируется в виде алгоритмов (например, для матричных игр это алгоритм решения стандартной задачи линейного программирования).

Наиболее известны и разработаны матричные игры – антагонистические игры, в которых участвуют два игрока, имеющих конечное число стратегий, и которые задаются матрицей выигрышей. При выборе стратегии игроками они руководствуются принципом максимина (принципом гарантированного результата). Эти игры всегда имеют решение в смешанных стратегиях, а при наличии седловой точки в матрице выигрышей имеют решение в чистых стратегиях.

4.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Если вероятности возможных ситуаций, в которых будут реализовываться результаты проекта, не известны и исходными данными для принятия решения служит матрица эффективностей $E = \|e_{ij}\|_{n \times k}$ (здесь e_{ij} – эффективность варианта v_i , $i = \overline{1, n}$ в ситуации s_j , $j = \overline{1, k}$), то применяют методы равной вероятности, Гурвица (Гурвича) и Шанявского. Эти методы отличаются простотой, их удобно использовать, если допускается риск от неправильно выбранного варианта.

В методе равной вероятности оптимальным считается вариант v^* , для которого среднее значение эффективности по возможным ситуациям максимально, т.е.

$$v^* = \arg \max_i \left\{ \bar{e}(v_i) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e_{ij}, \quad i = \overline{1, n} \right\}. \quad (4.1)$$

Таким образом, здесь в качестве критерия оптимальности варианта выступает значение

$$q_{p.v}(v_i) = \bar{e}(v_i).$$

Если вместо матрицы эффективности E задаётся матрица затрат (потерь) $G = \|g_{ij}\|_{n \times k}$ (здесь g_{ij} – затраты варианта v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в ситуации s_j , $j = 1, 2, \dots, k$), то оптимальным считается вариант, для которого критерий

$$q_{p.v}(v_i) = g(v_i) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k g_{ij}$$

минимален.

Задачи с матрицей E называют задачами на максимум, а с матрицей G – на минимум.

В методе Гурвица в задаче на максимум роль критерия $q_{\Gamma}(v_i)$ играет взвешенное значение минимальной и максимальной эффективности варианта, т.е.

$$q_{\Gamma}(v_i) = ce_i^{\min} + (1-c)e_i^{\max}, \quad (4.2)$$

$$e_i^{\min} = \min_j \{e_{ij}, j = \overline{1, k}\}, \quad e_i^{\max} = \max_j \{e_{ij}, j = \overline{1, k}\},$$

где c – весовой коэффициент, $c \in (0, 1)$.

Для оптимального варианта имеет место

$$v^* = \arg \max_i \{q_{\Gamma}(v_i), i = \overline{1, n}\}.$$

Если решается задача на минимум, то

$$v^* = \arg \min_i \{q_{\Gamma}(v_i), i = \overline{1, n}\},$$

$$q_{\Gamma}(v_i) = cq_i^{\min} + (1-c)q_i^{\max},$$

$$q_i^{\min} = \min_j \{q_{ij}, j = \overline{1, k}\}, \quad q_i^{\max} = \max_j \{q_{ij}, j = \overline{1, k}\}.$$

Метод Шанявского использует результаты, получаемые методом равной вероятности с некоторой коррекцией. В задаче на максимум варианты сравниваются по критерию

$$q_{\text{Ш}}(v_i) = cq_{\text{р.в}}(v_i) + (1-c)e_i^{\min}, \quad (4.3)$$

$$v^* = \arg \max_i \{q_{\text{Ш}}(v_i), i = \overline{1, n}\},$$

в задаче на минимум

$$q_{\text{Ш}}(v_i) = cq_{\text{р.в}}(v_i) + (1-c)e_i^{\max}, \quad (4.4)$$

$$v^* = \arg \min_i \{q_{\text{Ш}}(v_i), i = \overline{1, n}\}.$$

Критерий $q_{\text{Ш}}(v_i)$ в отличие от критериев $q_{\text{р.в}}(v_i)$ и $q_{\Gamma}(v_i)$ следует использовать в случаях, когда при выборе оптимального варианта требуется больше осторожности. Вместе с тем все эти методы позволяют полу-

чить эффект, если решение по однотипной проблеме принимается достаточно часто, т.е. выигрыш будет достигнут в среднем при многократном решении задач.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим использование этих методов для матрицы эффективности, представленной в табл. 4.1. Здесь же содержатся рассчитанные значения критериев $q_{p.v}$, q_{Γ} и $q_{\text{Ш}}$ при $c = 0,5$.

Как видно из табл. 4.1, по критерию $q_{p.v}$ следует отдать предпочтение варианту v_1 , по критерию q_{Γ} – варианту v_3 и по критерию $q_{\text{Ш}}$ – v_3 .

В случае, когда большую роль играют последствия ошибочных решений или альтернативных потерь, которые мы понесём по сравнению со случаем известной заранее ситуации, применяется метод Сэвиджа. Построение матрицы R последствий ошибочных решений, когда q соответствует эффективности (задача на максимум), производится следующим образом:

1) для каждого столбца матрицы $\|e_{ij}\|_{n \times k}$ находятся максимальные элементы, т.е.

$$e_1^{\max} = \max_i e_{i1}, e_2^{\max} = \max_i e_{i2}, \dots, e_k^{\max} = \max_i e_{ik}; \quad (4.5)$$

2) из элементов (4.5) вычитаются другие элементы соответствующих столбцов, в результате получают элементы матрицы R, т.е.

$$r_{11} = e_1^{\max} - e_{11}, r_{21} = e_1^{\max} - e_{21} \text{ и т.д.}$$

4.1. Матрица эффективности $E_{4 \times 3}$

Вариант	Ситуация			Значение критериев		
	s_1	s_2	s_3	$q_{p.v}$	q_{Γ}	$q_{\text{Ш}}$
v_1	8	6	2	5,33	5	3,67
v_2	7	5	3	5	5	4
v_3	6,5	4	4,5	5	5,5	4,5
v_4	7	2	4,5	4,5	4,5	3,25

В качестве показателей вариантов q_C рассматриваются максимальные значения в строках матрицы R , предпочтительнее вариант с минимальным значением показателя, т.е.

$$v^* = \arg \min_i (q_C(v_i), i = \overline{1, n}), \quad q_C(v_i) = \max_j \{r_{ij}\}. \quad (4.6)$$

Для данных табл. 4.1 максимальные элементы в столбцах соответственно равны

$$e_1^{\max} = 8; \quad e_2^{\max} = 6; \quad e_3^{\max} = 4,5.$$

Матрица R последствий ошибочных решений приведена в табл. 4.2. В соответствии с (4.6) оптимальным по методу Сэвиджа является вариант v_2 , т.е. $v^* = v_2$.

Если рассматриваемая проблема имеет большое значение, цена риска принять неправильное решение исключительно велика, а решение реализуется однократно, необходимо учитывать возможные ситуации, вероятности которых неизвестны, при этом значения матрицы эффективности E (или затрат G) достаточно достоверны, то можно применять методы теории игр.

В случае решения задачи на максимум с использованием матрицы E применяется максиминный критерий и предпочтение отдаётся варианту, для которого наименьшее значение $e_i^{\min} = \min_j \{e_{ij}\}$ максимально, т.е.

$$v^* = \arg \max_i \left\{ \min_j \{e_{ij}\} \right\}. \quad (4.7)$$

4.2. Матрица последствий ошибочных решений

Вариант	Ситуация			q_C
	s_1	s_2	s_3	
v_1	0	0	2,5	2,5
v_2	1	1	1,5	1,5
v_3	1,5	2	0	2
v_4	1	4	0	4

Таким образом, в каждой строке находятся минимальные значения $e_i^{\min} = \min_j \{e_{ij}\}$, а затем выбирается вариант v^* с максимальным значением e_i^{\min} , т.е. ищется максимин.

Для матрицы эффективностей E , приведенной в табл. 4.1:

$$e_1^{\min} = 2; e_2^{\min} = 3; e_3^{\min} = 4; e_4^{\min} = 2.$$

В соответствии с соотношением (4.7) $v^* = v_3$, для этого варианта гарантирован результат с эффективностью не менее 4 при любых возможных ситуациях.

Для задач на минимум с матрицей G используется минимаксный критерий, т.е.

$$v^* = \arg \min_i \left\{ \max_j \{g_{ij}\} \right\}. \quad (4.8)$$

В этом случае в каждой строке находятся максимальные значения затрат $g_i^{\max} = \max_j \{g_{ij}\}$ и выбирается вариант v^* с минимальным значением g_i^{\max} , т.е. ищется минимакс.

В предположении, что в табл. 4.1 содержатся значения матрицы G , т.е. затраты, то

$$g_1^{\max} = 8; g_2^{\max} = 7; g_3^{\max} = 6,5; g_4^{\max} = 7 \text{ и } v^* = v_3.$$

В задачах на максимум иногда используется простой критерий в виде произведения элементов строк, т.е.

$$q_{\text{пр}}(v_i) = \prod_{j=1}^k e_{ij},$$

и определяется вариант

$$v^* = \arg \max_i (q_{\text{пр}}(v_i)).$$

Для данных табл. 4.1 получим $q_{\text{пр}}(v_1) = 8 \cdot 6 \cdot 2 = 96$, $q_{\text{пр}}(v_2) = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$, $q_{\text{пр}}(v_3) = 6,5 \cdot 4 \cdot 4,5 = 117$, $q_{\text{пр}}(v_4) = 7 \cdot 2 \cdot 4,5 = 63$ и $v^* = v_3$.

Этот критерий может использоваться в случаях, когда необходимо считаться со всеми ситуациями и допускается некоторый риск.

Если в матрице $\|e_{ij}\|_{n \times k}$ содержатся и отрицательные элементы, то критерий $q_{i\text{пр}}$ можно использовать перейдя от исходной к новой матрице

$$\|e_{ij} + a\|_{n \times k}, \text{ где } a > \left| \min_{i,j} e_{ij} \right|.$$

В случаях, когда вероятности $P(s_j)$, $j = 1, \dots, k$, ситуаций известны, используют метод Байеса–Лапласа. В задачах на максимум варианты сравниваются по усреднённым с учётом вероятностей значениям критерия, т.е.

$$q_{\text{Б.Л}}(v_i) = \sum_{j=1}^k e_{ij} P(s_j), \quad (4.9)$$

и предпочтение отдаётся варианту

$$v^* = \arg \max_i \{q_{\text{Б.Л}}(v_i), i = 1, \dots, n\}. \quad (4.10)$$

В задачах на минимум

$$v^* = \arg \min_i \{q_{\text{Б.Л}}(v_i), i = 1, \dots, n\}, \quad (4.11)$$

$$q_{\text{Б.Л}}(v_i) = \sum_{j=1}^k g_{ij} P(s_j).$$

Область применения метода Байеса–Лапласа:

- 1) вероятности ситуаций $P(s_j)$, $j = 1, \dots, k$, известны и их можно считать постоянными на период реализации проекта;
- 2) решение по проектированию подобных систем принимается и реализуется часто;
- 3) риск от неправильно принятого решения не приводит к серьёзным последствиям.

Например, пусть матрица E в табл. 4.1 дополнена следующими вероятностями ситуаций:

$$P(s_1) = 0,6; \quad P(s_2) = 0,1; \quad P(s_3) = 0,3,$$

тогда

$$q_{\text{Б.Л}}(v_1) = 8 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 = 6;$$

$$q_{\text{Б.Л}}(v_2) = 7 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,3 = 5,6;$$

$$q_{\text{Б.Л}}(v_3) = 6,5 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,1 + 4,5 \cdot 0,3 = 5,65;$$

$$q_{\text{Б.Л}}(v_4) = 7 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,1 + 4,5 \cdot 0,3 = 5,75$$

и $v^* = v_1$.

Метод Байеса–Лапласа часто используется в сочетании с другими методами.

Например, критерий Ходжа–Лемана определяется в виде взвешенного среднего между оценками, получаемыми методами Байеса–Лапласа и максимина (в задаче на максимум), т.е.

$$q_{\text{Х.Л}}(v_i) = c \sum_{j=1}^k e_{ij} P(s_j) + (1-c) \min_j (e_{ij}(v)). \quad (4.12)$$

и

$$v^* = \arg \max_i \left(c \sum_{j=1}^k e_{ij} P(s_j) + (1-c) \min_j (e_{ij}(v)) \right). \quad (4.13)$$

Данный метод применяется в случаях, когда имеются некоторые предположения о вероятностях ситуаций $P(s_j)$, $j=1, \dots, k$, принятое решение может реализоваться много раз и допускается некоторый риск.

Если рассматриваются значения потерь (затрат) в различных ситуациях и $q_{ij} < 0$, то можно использовать критерий Гермейера. Согласно этому критерию для каждой строки находится наименьшее значение в виде

$$q_{\text{Гер}}(v_i) = \min_j (q_{ij} P(s_j)) \quad (4.14)$$

и затем определяется вариант v^* с максимальным значением $q_{\text{Гер}}(v_i)$, т.е.

$$v^* = \arg \max_i (q_{\text{Гер}}(v_i)). \quad (4.15)$$

Данный критерий можно использовать и при отдельных положительных значениях q_{ij} . В этих случаях подбирают некоторое число $a > 0$ и матрицу $\|q_{ij}\|_{n \times k}$ пересчитывают в $\|q_{ij} - a\|_{n \times k}$ со всеми отрицательными элементами.

Область применения критерия: вероятности ситуаций приближённо известны и с ними надо считаться, решение реализуется один (или малое число) раз и допускается некоторый риск.

Известен ряд более сложных составных критериев, которые используют результаты, получаемые различными методами, например в виде объединения критериев Байеса–Лапласа и минимакса. В данном случае матрица $\|e_{ij}\|_{n \times k}$ дополняется тремя столбцами:

– в первом записываются усреднённые значения (математические ожидания) строк, т.е.

$$q_{\text{Б.Л}}(v_i) = \sum_{j=1}^k e_{ij} P(s_j);$$

– во втором вычисленная разность между «опорным» значением

$$q_{\max}(i_0, j_0) = \max_i \max_j (e_{ij}) \quad (4.16)$$

и наименьшими значениями в строках

$$q_{\min}(v_i) = \min_j (e_{ij}); \quad (4.17)$$

– в третьем помещаются разности между

$$q_{\max}(v_i) = \max_j (e_{ij}) \quad (4.18)$$

и наибольшим значением $q_{\max}(i_0, j)$ той строки, в которой находится $q_{\max}(i_0, j_0)$.

Выбирается вариант v^* , который имеет наибольшее математическое ожидание и при этом выполняются следующие условия между элементами второго и третьего столбцов:

1) соответствующее значение из второго столбца

$$q_{\max}(i_0, j_0) - q_{\min}(v^*)$$

должно быть меньше или равно задаваемому уровню риска $\varepsilon_{\text{доп}}$;

2) значение из третьего столбца для строки v^* должно быть больше значения из второго столбца.

Область применения данного критерия: имеется априорная информация о вероятностях $P(s_j)$, $j = 1, \dots, k$; необходимо в комплексе учитывать возможные ситуации и допускается ограниченный риск.

В последние годы большое распространение получили алгоритмы принятия решений, основанные на нечётких множествах и нечёткой логике. Эти алгоритмы особенно эффективны, когда ситуации известны весьма приближённо. Однако здесь требуется значительная работа по определению функций принадлежности, что иногда связано с серьёзными трудностями.

5. МЕТОДИКА ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Выбирая методы для принятия решения, проектировщик в первую очередь должен учитывать условия и фазы жизненного цикла (ЖЦ) проекта. Общие рекомендации по выбору методов в зависимости от этих факторов приведены в табл. 5.1.

Рекомендуемая методика принятия проектного решения базируется на следующих положениях:

- 1) принятие решений производится на каждой фазе выполнения проекта;
- 2) наибольшее число альтернативных вариантов рассматривается на начальных фазах проекта (концепция, планирование);
- 3) состав группы альтернативных вариантов после завершения очередной фазы может изменяться;

5.1. Рекомендации по выбору методов

Укрупнённые этапы ЖЦ проекта	Условия принятия решений		
	Неопределённость	Частичная неопределённость	Определённость
Концепция	Методы экспертных оценок. Теория игр	Байесовские методы	–
Планирование	Методы Гурвица, Сэвиджа. Теория игр	Байесовские методы. Теория игр	–
Проектирование	Методы Гурвица, Сэвиджа. Теория игр	Байесовские методы. Теория игр	Методы оптимизации
Производство	–	–	Методы оптимизации и оптимального управления

4) для каждой фазы ЖЦ проекта характерны свои признаки генерации вариантов;

5) для принятия решения предпочтительно использовать результаты применения комбинации различных методов.

Принятие обоснованного решения в основном определяется тремя факторами:

1) правильной постановкой задачи исследования, т.е. определением модели задачи;

2) выбором наиболее эффективного метода её решения (или группы методов);

3) использованием компьютерных технологий для оперативной обработки данных.

При выборе наилучшего варианта проектного решения можно использовать различные методы. С учётом особенностей задач проектирования и возможностей применения компьютерных технологий наибольшее применение нашли следующие методы:

- экспертных оценок (ЭО), в частности ранжирования вариантов (ЭОР) и парных сравнений (ЭОПС);

- теории игр, в частности максимина или минимакса (ММ);

- Байеса–Лапласа (БЛ) и его частный случай – метод равной вероятности (РВ);

- Гурвица (Г);

- Шаньявского (Ш);

- минимизации последствий ошибочного решения Сэвиджа (С).

В таблице 5.2 приведены рекомендации по применению методов в зависимости от важности исследуемой проблемы, повторяемости решения задач, наличия информации о вероятностях ситуаций.

5.2. Рекомендации по применению методов

Важность проблемы	Вероятности ситуаций	Повторяемость задач	
		Однократные	Многократные
Высокая	$p(s)$ известны	ЭОПС, ММ, Ш	ЭОПС, БЛ, Ш
	неизвестны	ЭОПС, ММ, Ш	ЭОПС, Ш, ММ
Средняя	$p(s)$ известны	ЭОПС, БЛ, ММ, С	ЭОР, БЛ, Г
	неизвестны	ЭОПС, С, ММ, Ш	ЭОР, РВ, Г, Ш
Низкая	$p(s)$ известны	ЭОР, БЛ, ММ, С	ЭОР, БЛ, Г
	неизвестны	ЭОР, Ш, РВ, Г, С	ЭОР, РВ, Г

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Умению принятия решений можно научиться так же, как и другим навыкам, необходимым в жизни. В тех случаях, когда для решения задачи имеются все необходимые исходные данные, и она поддаётся формализации, то возможно принятие решения, которое удовлетворило бы всех. Таким решением будет соответствующим образом найденное оптимальное решение. Если же данных недостаточно или они отсутствуют, т.е. имеется та или иная степень неопределённости, то приходится использовать, наряду с математическими, и другие ресурсы.

Перечислим следующие принципы, которые будут полезны в процессе принятия любых решений:

- Постарайтесь проблему представить в целом, а лишь затем вникните в отдельные детали.

- Не принимайте решения до тех пор, пока не будут рассмотрены все возможные варианты.

- Сомневайтесь, даже если что-то утверждают более знающие, а может быть и даже более знаменитые коллеги.

- Старайтесь рассматривать стоящую перед вами проблему с различных точек зрения, даже если шансы на успех кажутся ничтожно малыми.

- Ищите аналогию или модель, которая может помочь понять сущность стоящей проблемы.

- Задавайте как можно больше вопросов, относящихся к проблеме.

- Не доверяйте первому пришедшему в голову решению, не ограничивайтесь им.

- Следует поговорить с кем-либо о стоящей проблеме перед принятием окончательного решения, а также выслушать мнение и других людей.

- Не пренебрегайте своими чувствами, не преуменьшайте их значение, а также значение интуиции.

Вряд ли возможно принятие решения, которое удовлетворило бы всех.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

А. Методы оптимизации

Основная литература

1. **Гюнтер, Н. М.** Курс вариационного исчисления [Электронный ресурс] : учебник / Н. М. Гюнтер. – 2-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2009. – Заглавие с экрана. – URL : http://e.lanbook.com/books/pdf.php?book_id=119&p_id=25&bookid=3130
2. **Есипов, Б. А.** Методы исследования операций [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б. А. Есипов. – СПб. : Изд-во «Лань», 2010. – Заглавие с экрана. – URL : http://e.lanbook.com/books/pdf.php?book_id=144&p_id=25&bookid=87
3. **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 3-е изд., стер. – Изд-во «Лань», 2010. – Заглавие с экрана. – URL : http://e.lanbook.com/books/pdf.php?book_id=487&p_id=25&bookid=3155
4. **Лесин, В. В.** Основы методов оптимизации [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. В. Лесин, Ю. П. Лисовец. – 3-е изд., испр. – СПб. : Изд-во «Лань», 2011. – Заглавие с экрана. – URL : http://e.lanbook.com/books/pdf.php?book_id=1552&p_id=25&bookid=1588
5. **Микони, С. В.** Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив [Электронный ресурс] : учебное пособие / С. В. Микони. – СПб. : Изд-во «Лань», 2009. – Заглавие с экрана. – URL : http://e.lanbook.com/books/pdf.php?book_id=269&p_id=25&bookid=201

Дополнительная литература

6. **Акулич, И. Л.** Математическое программирование в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие / И. Л. Акулич. – 3-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2011. – Заглавие с экрана. – URL : http://e.lanbook.com/books/pdf.php?book_id=2027&p_id=25&bookid=2956
7. **Аоки, М.** Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования / М. Аоки ; пер. с англ. ; под ред. Б. Т. Поляка. – М. : Наука, 1977. – 343 с.
8. **Банди, В.** Методы оптимизации. Вводный курс / В. Банди ; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1988. – 128 с.
9. **Беллман, Р.** Динамическое программирование и современная теория управления ; пер. с англ. Е. Я. Ройгенберга / Р. Беллман, Р. Калаба ; под ред. Б. С. Разумихина. – М. : Наука, 1969. – 118 с.

10. **Беллман, Р.** Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус ; пер. с англ. ; под ред. А. А. Первозванского. – М. : Наука, 1965. – 458 с.

11. **Бояринов, А. И.** Методы оптимизации в химической промышленности : учебное пособие для хим.-технол. специальностей вузов / А. И. Бояринов, В. В. Кафаров ; под ред. В. В. Кафарова. – М. : Химия, 1969. – 564 с.

12. **Воронов, Е. М.** Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений : учебник для вузов / Е. М. Воронов ; под ред. Н. Д. Егупова. – М. : МГТУ, 2001. – 576 с.

13. **Карманов, В. Г.** Математическое программирование : учебное пособие для вузов / В. Г. Карманов. – 2-е и 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1980 и 1986. – 256 с. и 286 с.

14. **Карманов, В. Г.** Математическое программирование : учебное пособие / В. Г. Карманов. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2000. – 264 с.

15. **Математическая** теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин и др. – 2-е изд. – М. : Физматгиз, 1969. – 384 с.

16. **Математическая** теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин и др. – 4-е изд., стер. – М. : Наука, 1983. – 392 с.

17. **Островский, Г. М.** Методы оптимизации химических реакторов / Г. М. Островский, Ю. М. Волин. – М. : Химия, 1967. – 248 с.

18. **Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие для вузов / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М. : Высш. школа, 2002. – 544 с.

19. **Петухов, В. И.** Методы оптимизации измерительной информации : учебное пособие по курсу «Информ.-измерит. техника» / В. И. Петухов. – Рязань : Рязанский радиотехн. ин-т, 1972.

20. **Поляк, Б. Т.** Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. – М. : Наука, 1983. – 384 с.

21. **Сборник** задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 3-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2010. – Заглавие с экрана. – URL : http://e.lanbook.com/books/pdf.php?book_id=539&p_id=25&bookid=3154

22. **Черноруцкий, И. Г.** Методы оптимизации в теории управления : учебное пособие для вузов / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : Питер, 2004. – 256 с.

23. **Эльсгольц, Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник / Л. Э. Эльсгольц ; под ред. А. Н. Тихонова и др. – 2-е изд., стер. – М. : Наука, 1969. – 424 с.

Б. Принятие проектных решений

Основная литература

24. **Бодров, В. И.** Математические методы принятия решений : учебное пособие / В. И. Бодров, Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартемьянов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 124 с. – URL : http://window.edu.ru/window_catalog/files/r22017/bodrov.pdf

25. **Литовка, Ю. В.** Получение оптимальных проектных решений и их анализ с использованием математических моделей : лаб. практикум / Ю. В. Литовка. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – URL : http://window.edu.ru/window_catalog/files/r38641/litovka.pdf

26. **Муромцев, Ю. Л.** Принятие проектных решений : учебное пособие / Ю. Л. Муромцев, Д. Ю. Муромцев, Л. П. Орлова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. – Ч. 2. – 80 с.

27. **Мартемьянов, Ю. Ф.** Экспертные методы принятия решений / Ю. Ф. Мартемьянов, Т. Я. Лазарева. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – 80 с.

28. **Принятие проектных решений : учебное пособие / В. М. Балыбин и др.** – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – Ч. 1. – 80 с. – URL : http://window.edu.ru/window_catalog/files/r21742/balybin.pdf

29. **Черноруцкий, И. Г.** Методы принятия решений : учебное пособие для вузов / И. Г. Черноруцкий, Б. Брей. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

Дополнительная литература

30. **Воронов, Е. М.** Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений : учебник для вузов / Е. М. Воронов ; под ред. Н. Д. Егупова. – М. : МГТУ, 2001. – 576 с.

31. **Методы искусственного интеллекта для синтеза проектных решений : учебное пособие / В. Е. Подольский и др.** – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – 80 с.

32. **Муромцев, Ю. Л.** Принятие обоснованных решений с использованием экспертных оценок : метод. указания / Ю. Л. Муромцев, Л. П. Орлова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1996. – 26 с.

33. **Муромцев, Ю. Л.** Информационные технологии в проектировании энергосберегающих систем управления динамическими режимами : учебное пособие / Ю. Л. Муромцев, Л. П. Орлова. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2000. – 84 с.

34. **Ногин, В. Д.** Принятие решений при многих критериях : учеб.-метод. пособие / В. Д. Ногин. – СПб. : Изд-во «ЮТАС», 2007. – 104 с. – URL : http://window.edu.ru/window_catalog/files/r75535/nogin_u11.pdf

35. **Павлов, А. Н.** Принятие решений в условиях нечёткой информации : учебное пособие / А. Н. Павлов, Б. В. Соколов. – СПб. : ГУАП, 2006. – URL : http://window.edu.ru/window_catalog/files/r44960/pavl_prinresh.pdf

36. **Петров, А. В.** Дискуссия и принятие решений в группе: технология модерации : учеб.-метод. пособие / А. В. Петров. – СПб. : Речь, 2005. – 80 с.

37. **Системный** анализ и принятие решений. Словарь-справочник : учебное пособие для вузов / под ред. В. Н. Волковой, В. Н. Козлова. – М. : Высш. школа, 2004. – 616 с.

38. **Смирнов, Э. А.** Разработка управленческих решений : учебник для вузов / Э. А. Смирнов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 271 с.

39. **Юдин, Д. Б.** Вычислительные методы теории принятия решений / Д. Б. Юдин. – М. : Наука, 1989. – 320 с.

Периодическая литература

Журналы (<http://elibrary.ru/>):

40. «Автоматика и телемеханика».

41. «Известия Российской академии наук»

42. «Информационные технологии в проектировании и производстве».

43. «Радиотехника и электроника».

Интернет-ресурсы

44. <http://www.elanbook.com>

45. <http://window.edu.ru>

46. <http://www.lib.tstu.ru>

47. <http://elibrary.ru/>

48. <http://www.matlab.ru/>

49. <http://sapr.mgsu.ru/biblio/optimiz/opt.htm>

ПРИЛОЖЕНИЕ

III. χ^2_{τ} в зависимости от числа степеней свободы ν и уровня значимости α

Число степеней свободы ν	χ^2_{τ}		Число степеней свободы ν	χ^2_{τ}/ν	
	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$
1	6,64	3,84	35	1,64	1,42
2	9,21	5,99	40	1,59	1,39
3	11,35	7,82	45	1,55	1,37
4	13,28	9,49	50	1,52	1,35
5	15,09	11,07	55	1,50	1,33
6	16,81	12,59	60	1,47	1,32
7	18,48	14,07	70	1,43	1,29
8	20,09	15,51	80	1,40	1,27
9	21,67	16,92	90	1,38	1,26
10	23,21	18,31	100	1,36	1,24
11	24,73	19,68	120	1,32	1,22
12	26,23	21,03	140	1,30	1,20
13	27,09	22,36	160	1,28	1,19
14	29,14	23,69	180	1,26	1,18
15	30,58	24,00	200	1,25	1,17
16	32,00	26,30	250	1,22	1,15
17	33,41	27,59	300	1,20	1,14
18	34,81	28,87	350	1,18	1,13
19	36,19	30,14	400	1,17	1,12
20	37,57	31,41	450	1,16	1,11
21	38,93	32,67	500	1,15	1,11
22	40,29	33,92	750	1,12	1,09
23	41,64	35,17	1000	1,11	1,07
24	42,98	36,42	5000	1,05	1,03
25	44,31	37,65	∞	1,00	1,00
26	45,64	38,86			
27	46,96	40,11			
28	48,28	41,34			
29	49,59	42,56			
30	50,89	43,77			

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. КЛАССИФИКАЦИЯ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ	5
2. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЁННОСТИ (ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ)	12
2.1. Основные понятия и классификация методов решения задач оптимизации	12
2.2. Исследование функций классического анализа, метод неопределённых множителей Лагранжа	14
2.3. Математическое программирование	15
2.4. Вариационное исчисление и оптимальное управление	21
2.5. Примеры постановок задач оптимизации	22
3. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ	36
3.1. Решение задачи в условиях неопределённости методом ранжирования вариантов при скалярном критерии	36
3.2. Решение задачи в условиях неопределённости методом ранжирования вариантов при векторном критерии	44
3.3. Решение задачи в условиях неопределённости методом парных сравнений	50
4. МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ	61
4.1. Общая характеристика методов	61
4.2. Решение задачи в условиях частичной неопределённости	63
5. МЕТОДИКА ПРИНЯТИЯ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ	71
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	73
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	74
ПРИЛОЖЕНИЕ	78

Учебное издание

МУРОМЦЕВ Дмитрий Юрьевич
ШАМКИН Валерий Николаевич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ПРИНЯТИЕ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

ISBN 978-5-8265-1451-1



Подписано в печать 13.11.2015.
Формат 60 × 84/16. 4,65 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 500

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14.
Тел./факс (4752) 63-81-08, 63-81-33.
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru