Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

В. И. БАРСУКОВ, О. С. ДМИТРИЕВ

Ф И З И К А

МЕХАНИКА

*Допущено Научно-методическим советом по физике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по техническим направлениям подготовки
и специальностям*

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2015

УДК 535. 338 (0765)
ББК В36я 73-5
Б26

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор,
заслуженный деятель науки Российской Федерации,
заведующий кафедрой общей физики
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
В. А. Федоров

Доктор технических наук, профессор,
директор Тамбовского филиала ФГБОУ ВПО «МГУ КИ»
В. М. Тютюнник

Барсуков, В. И.

Б26 Физика. Механика : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 248 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1441-2.

Содержит материал, подготовленный по разделу «Механика» курса общей физики, читаемого в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом для высших технических учебных заведений.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям дневной и заочной форм обучения.

УДК 535. 338 (0765)
ББК В36я 73-5

ISBN 978-5-8265-1441-2

ВВЕДЕНИЕ

ПОНЯТИЕ ПРЕДМЕТА И НАЗНАЧЕНИЯ ФИЗИКИ

«*Физика*» – в переводе с греческого – «*природа*». В глубокой древности под физикой понимали *естествознание* в самом широком смысле этого слова. Физика тогда включала в себя буквально *все* сведения о живой и не живой природе. Лишь значительно позднее, когда познания человечества об окружающем мире необычайно расширились и углубились, отдельные части физики выделились в ряд самостоятельных естественных наук (геология, зоология, ботаника, химия, астрономия и т.д.).

Что же такое современная физика, каков её предмет?

Современная физика есть наука о строении материи, о простейших и наиболее общих формах движения её, о взаимных превращениях форм движения и видов материи.

Что следует понимать под материей и движением?

Под *материей* диалектический материализм понимает всё то, что существует объективно, т.е. независимо от человеческого сознания, и что познаётся в чувственном опыте.

«Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них».

Под *движением* в широком (философском) смысле следует понимать любые *изменения реальности*, любой протекающий в природе и человеческом обществе *процесс*.

Примеры движения материи: изменения взаимного расположения тел в пространстве, нагревания и охлаждения тел, радиоактивный распад, химическая реакция, рост растений, передача наследственности, социальное развитие и т.д.

Движение – объективная форма существования материи, её неотъемное свойство.

Материя без движения, равно как и движение без материи – немыслима.

Никогда не прекращающиеся *движения* и постоянное *взаимодействие* материальных объектов – вот главное, что обнаруживается при изучении окружающего нас материального мира.

Конкретные свойства материи и формы её движения неисчерпаемы. Из всего разнообразия свойств материи и формы её движения физика изучает лишь *простейшие*, но вместе с тем *наиболее общие* свойства и формы. Так, физика изучает *структуру элементарных частиц* и их простейших образований – *ядер и атомов*, т.е. строение того, из чего состоит и самое простое, и самое сложное вещество. Физика изучает структуру и общие свойства основных видов материи – *вещества* и *поля*, познаёт закономерности взаимных превращений этих видов друг в друга.

Из известных современной науке форм движения материи физика изучает следующие четыре простейшие формы: 1) *механическую*, 2) *молекулярно-кинетическую*, 3) *электромагнитную*, 4) *внутриатомную*.

Изучение именно этих форм движения важно потому, что они, эти формы движения, неизменно сопутствуют более сложным, более высоким формам движения материи. Так, к примеру, механическое перемещение, закономерности которого изучает физика, имеет место и в таком довольно простом явлении, как диффузия, и в таком сложном биологическом процессе, как передача раздражения в нервной ткани.

Физика является *основой всего современного естествознания*, ибо устанавливает самые общие законы природы, законы, которые лежат в основе конкретных естественных наук.

Физика вооружает естественные науки всё более тонкими и совершенными методами научного исследования.

Не следует преуменьшать и обратное влияние других естественных наук на развитие физики. Несомненно, что в своём развитии физика использует достижения смежных ей наук о природе.

Исключительно велика роль физики в развитии *техники*. Самим своим существованием и непрерывным прогрессом техника обязана, прежде всего, физике. Не будет преувеличением сказать, что *техника – это прикладная физика*, поскольку все её важнейшие отрасли возникли на основе тех или иных открытий физики. Так, открытие закона электромагнитных волн положило начало развитию радиотехники и т.д.

В свою очередь, техника, развиваясь и совершенствуясь, выдвигает перед физикой такие проблемы, решение которых требует более глубокого проникновения в природу различных физических явлений. Так, развитие авиации и ракетной техники *потребовало решения проблемы «звукового барьера», сверхпрочных и жаростойких материалов, дальней радиосвязи и т.д.*

Знать физику будущим инженерам необходимо потому, что физика как никакая другая наука помогает *выработке правильного диалектико-материалистического миропонимания* и способствует осознанному *овладению общеинженерными и специальными знаниями*. Изучение физики важно ещё в одном отношении: она даёт яркие примеры того, что единственным методом научного познания законов природы является *диалектический метод*, суть которого заключена в формулировке: «От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике». Достаточно проследить за историей открытия какого-либо закона или созданием какой-либо физической теории, чтобы *убедиться в её справедливости*.

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Прежде чем начать систематическое изложение основ физики, необходимо сделать несколько общих замечаний и затронуть ряд методических вопросов. Эти замечания связаны с некоторыми особенностями курса физики, трудностями, которые встречаются на пути самостоятельно изучающих этот предмет, характерными ошибками, допускаемыми студентами на зачётах, экзаменах и т.д.

Особое внимание при изучении курса физики следует обратить внимание на *чёткость* и *строгость определений* физических величин.

Что значит дать определение той или иной величины, что значит раскрыть её так называемый физический смысл? Из каких элементов должно складываться определение?

Физика – наука «*точная*». Она имеет дело с понятиями и величинами, которые в подавляющем большинстве случаев доступны *количественному измерению*. Указание на *метод* измерения, как правило, содержится в определении («величина, численно равная….», «величина, измеряемая…» и т.д.).

Следует, однако, помнить, что это лишь одна из двух сторон физического содержания определяемой величины, а именно – количественная, математическая сторона. Любая физическая величина, кроме количественного содержания, имеет вполне определённое *качественное содержание*. Качественное содержание выражает существо физической величины, оно характеризует вполне определённое *свойство* или *качество* материального объекта, вполне определённый *процесс изменений*, протекающий в пространстве и времени, вполне определённую *связь* между явлениями, процессами, величинами и т.д.

Например, напряжённость электрического поля характеризует *свойство* поля оказывать силовое воздействие на вносимые в него заряженные тела или частицы; скорость механического движения – *процесс* изменения пространственного положения тел; электроёмкость проводника – *связь* между изменением заряда проводника и изменением его потенциала и т.д. К сожалению, о качественной стороне определяемых величин часто забывают и ограничиваются чисто математическим, количественным толкованием.

Сталкиваясь с новой физической величиной, надо, прежде всего, понять, каково её качественное содержание, и только после этого определять её количественно. *Единство качественной и количественной сторон* – вот что должно представлять собой определение.

В качестве примера приведём определение напряжённости электрического поля.

Напряжённость электрического поля – векторная физическая величина, *характеризующая* силовое воздействие поля на вносимые в него электрические заряды *и численно равна силе*, с которой поле действует на единичный точечный заряд, помещённый в данную точку. Направление вектора напряжённости совпадает с направлением силы, действующей на *положительный* пробный заряд:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_+}.$$

Явления и процессы, протекающие в природе, закономерно связанны друг с другом, т.е. подчиняются вполне определённым количественным законам. Между отдельными законами существует *логическая связь*. Это значит, что, зная одни законы, можно «вывести», «предсказать» другие законы. По своему логическому построению некоторые разделы физики напоминают математику, например геометрию.

Так же, как в основании геометрии кладется ряд постулатов и на их основе строится доказательство других теорем, в основу той или иной физической теории кладутся некоторые не противоречащие опыту фундаментальные идеи и законы (в физике их часто называют началами или аксиомами) и из них «выводятся» другие законы и следствия.

В основе механики, например, лежат три закона Ньютона. Опираясь на эти законы, можно вывести и доказать математически такие законы, как законы сохранения механической энергии, импульса, момента импульса, получить формулу пути, скорости и т.д. Такое построение механики вовсе не означает, что законы Ньютона играют главнейшую роль, а законы сохранения второстепенную, подчинённую, что они менее самостоятельны. В принципе, механику можно было бы построить по иной логической схеме: «постулировать», опираясь на опыт, законы сохранения и из них получить законы Ньютона и все другие соотношения.

Изучая ту или иную теорию, надо, прежде всего, понять, *какие фундаментальные законы положены в её основу*, понять её внутреннюю логику, тогда легче будет запомнить, а главное *осознать* выводы и доказательства тех следствий, которые вытекают из этих основных законов.

Следует иметь в виду, что число действительно основных, фундаментальных законов природы (по крайней мере, известных в настоящее время) сравнительно невелико, и они выражаются с математической точки зрения, как правило, просто. Гораздо более обширны и требуют более сложного математического аппарата *частные проявления* основных законов.

Естественно полагать, что усвоению основных законов физики будет уделено достаточно времени и внимания.

При изучении физики имеют дело с двумя категориями физических величин – скалярными и векторными.

Скалярные величины – это величины, которые с количественной точки зрения определяются только *численным значением*. Таковыми являются, например длина, масса, время, работа, энергия, температура, электрический заряд, потенциал, электродвижущая сила и т.д.

Действия над скалярными величинами производятся по *правилам алгебры*. Анализируя физическое содержание той или иной скалярной величины, особое внимание следует обратить на то, что означает её отрицательное значение (например, отрицательная энергия, отрицательная работа, отрицательный потенциал и т.д.).

Векторные величины характеризуются не только *численными* значениями, но и *направлением* в пространстве. Примером векторных физических величин могут служить: перемещение, скорость, ускорение, сила, импульс, напряжённость электрического поля, плотность тока и т.д. Действия над векторными величинами производятся по правилам *векторной алгебры*. Особое внимание следует обратить на умение определять направление векторных величин, особенно в случаях, когда данная величина является комбинацией нескольких других векторных величин. Здесь иногда полезно знать и применять различные мнемонические правила (правило буравчика, правило левой руки, правило правой руки и т.д.).

Записывая математическое выражение того или иного закона, следует чётко представлять, является ли эта запись векторной или скалярной. Отсутствие знаков вектора в векторном уравнении – грубая физическая ошибка. Не менее важно умение перейти от векторной записи уравнения к скалярной, умение найти численное значение векторной величины.

Физика пользуется довольно сложным математическим аппаратом, в частности, она широко использует дифференциальное и интегральное исчисления. Часто один и тот же закон выражается в двух математических формах – дифференциальной и интегральной (например, закон Ома, Джоуля–Ленца, уравнения Максвелла и т.д.). С чем это связано?

В чём отличие дифференциальной формы записи от интегральной? В каких случаях мы вынуждены прибегать к дифференцированию и в каких к интегрированию?

Интегральная формула связывает физические величины, относящиеся, вообще говоря, *к разным точкам пространства*, описывает процесс изменений, протекающий в *конечном объёме* в течение *конечного промежутка времени*. К интегрированию мы вынуждены прибегать в случаях, когда рассматриваемая физическая величина распределена в пространстве неравномерно или изменяется с течением времени.

Дифференциальный закон связывает величины, относящиеся к бесконечно малому объёму, т.е. практически к *одной и той же точке* пространства, описывает процесс, протекающий в течение *бесконечно малого промежутка времени*.

Математическим признаком дифференциальной формы записи является наличие дифференциалов или производных в уравнениях. Переход от дифференциальной формы к интегральной осуществляется интегрированием, переход от интегральной формы к дифференциальной – дифференцированием. Приведём примеры интегральных и дифференциальных формул.

Хорошо известные из элементарного курса физики формулы законов: Ома $\left(I = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}\right)$, Джоуля–Ленца ($Q = I^2Rt$) – интегральные формулы. Первая связывает потенциалы концов участка цепи с током, протекающим через любое сечение этого участка. Вторая формула определяет количество теплоты, выделившееся в проводнике конечных размеров *за конечный промежуток времени t*. Дифференциальная форма закона Ома имеет вид

$$j = \frac{1}{\rho} E ,$$

где $j = \dfrac{dI}{dS}$ – плотность тока (ток, протекающий через единицу площади поперечного сечения); ρ – удельное сопротивление; E – напряжённость электрического поля в проводнике. Плотность тока j и напряжённость поля E относятся *к одной и той же точке проводника*.

Используя аппарат высшей математики, физика вкладывает несколько иной смысл в некоторые её понятия. Так, широко используемый в физике термин «физически бесконечно малая величина» не следует понимать в буквальном, математическом смысле.

Что такое, к примеру, физически бесконечно малый объём?

Физически бесконечно малым называют такой объём dV, который, с одной стороны, столь *велик*, что содержит *достаточное* для того или иного усреднения количество молекул (только в том случае к объёму dV можно применить такие понятия, как температура, давление, плотность). С другой стороны, этот объём настолько *мал*, что любая из усреднённых величин в его пределах остаётся практически неизменной.

Особую роль в науке вообще и в физике в частности играют так называемые *абстракции*, «*модели*».

Реальные свойства материальных объектов настолько сложны, закономерные и случайные связи между различными процессами и явлениями столь многообразны, что учёт всех свойств, всех связей при анализе изучаемого явления оказывается невозможным.

Поэтому, анализируя то или иное физическое явление, необходимо прежде всего выделить в нём *главное – существенные связи* и закономерности, и отбросить все второстепенные, несущественные.

Мысленная операция, в ходе которой главное, определяющее отделяется от всего второстепенного, называется *абстрагированием*, а построенная в результате этой операции некая условная идеализированная схема явления или объекта – *абстракцией или «моделью»*.

Материальная точка, абсолютно твёрдое тело, инерциальная система отчёта, инерциальное движение, идеальный газ, равновесный процесс, точечный заряд, элемент тока и т.д. – вот далеко не полный перечень абстракций, с которыми нам предстоит иметь дело.

Правильно построенная, научная абстракция всегда отражает некоторые черты реальной действительности и, следовательно, содержит в себе элементы объективной истины.

Однако всегда следует помнить, что реальный объект и построенная на его основе абстракция – не одно и то же. *Реальный объект* – неизмеримо *сложнее*. Потому любая абстракция имеет ограниченный характер и пригодна лишь для грубого, приближённого описания ограниченного круга явлений. Отсюда следует, что и те закономерности, которые получены на основе соответствующих схем, «моделей» и упрощенных предложений, также имеют приближённый и ограниченный характер.

Можно сказать, что известные нам законы физики выражают лишь *наше знание* о законах природы. Всегда имеется принципиальная возможность уточнения, обобщения и даже коренной ломки того или иного закона (исключения составляют фундаментальные *законы сохранения материи и движения* – законы сохранения энергии, импульса, заряда и т.д.).

Изучая ту или иную теорию, следует обращать внимание на её *характер*, *на подход* к рассматриваемым явлениям.

Если теория не учитывает реальной микроструктуры изучаемого материального объекта, она называется *макроскопической* или *феноменологической*. Таковыми являются, например термодинамика, макроскопическая электродинамика. В термодинамике даже не упоминается о том, что вещество дискретно, состоит из молекул и атомов; в электростатике не учитывается атомистичность электрического заряда.

Если же выводы теории строятся на основе учёта конкретной структуры изучаемого объекта, тех микропроцессов, которые определяют макроскопические свойства этого объекта, то теория называется *структурной* или *микроскопической*. Именно такими теориями являются молекулярно-кинетическая теория и электронная теория металлов.

Подходя к рассмотрению одних и тех же явлений с различных точек зрения, феноменологическая и структурная теории взаимно дополняют друг друга, образуя, по сути, единое целое.

И в заключение *о роли закона сохранения и превращения энергии*. Этот всеобщий закон природы красной нитью проходит буквально через все разделы физики. «Энергетический» подход к явлениям, «энергетический» метод «доказательства» формул и уравнений оказываются весьма плодотворными.

Целый ряд физических законов (первое начало термодинамики, закон Ома, Джоуля–Ленца, правила Кирхгофа, закон электромагнитной индукции) являются, по сути, частными проявлениями этого универсального закона. Поэтому понятие «энергия» и закон сохранения и превращения её должны быть положены в самую основу физических знаний.

1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. МЕХАНИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

Предметом механики является изучение закономерностей простейшей формы движения материи – *механического движения*.

Механическим движением называется процесс изменения взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

В определении отражён тот факт, что механическое движение (перемещение), как и всякое другое движение, происходит в *пространстве и времени*.

Пространство и время – сложные философские категории, несмотря на их кажущуюся очевидность, основанную на нашем житейском опыте. Эти понятия в ходе развития физики и философии претерпели весьма существенные изменения.

Ньютон, создавая свою механику, постулировал, что пространство и время имеют *абсолютный характер*. Что это значит? Это значит, что пространство и время существует *независимо* от материи и движения.

Пространство, по Ньютону, – протяжённое неподвижное пустое вместилище материальных тел. Оно *однородно* (в нём нет привилегированных точек, все его точки равноправны), *изотропно* (в нём нет привилегированных направлений, все его направления равноправны) и *эвклидово* (его геометрия описывается геометрией Эвклида).

Время, по Ньютону, – *абсолютная длительность*, не зависящая от тел. Оно также *однородно* (в нём нельзя найти мгновение, которое отличалось бы от других) и всюду во Вселенной течёт равномерно и одинаково.

Механика, постулирующая абсолютный характер пространства и времени, называется ньютоновской или *классической*.

Успехи классической механики в XVII – XIX вв. были столь поразительны, что, по словам немецкого физика М. Лауэ, она стала «наукой, стоящей над опытом», т.е. наукой, положения которой не нуждаются в опытной проверке.

В начале XX в. некоторые представления классической механики подверглись кардинальному пересмотру. Этот пересмотр привёл к созданию одной из величайших научных теорий нашего времени – *теории относительности*.

Основные идеи теории относительности, созданной А. Эйнштейном, сводятся к тому, что *пространство и время неотделимы от материи и её движения и имеют относительный*, а не абсолютный *характер*, что свойства пространства и времени зависят от конкретных материальных тел, от характера и интенсивности их движений. Теория относительности установила, что классическая механика с её представлениями об абсолютном пространстве и едином времени имеет *ограниченный*, приближённый характер. Она с достаточной степенью точности описывает лишь *медленные* (по сравнению со скоростью света) движения макроскопических тел и совершенно непригодна для описания быстрых движений и движений микрообъектов.

Быстрые *движения макроскопических тел* описывает так называемая релятивистская механика или *специальная* (*частная*) *теория относительности*. Движения микрочастиц рассматривает механика, называемая *квантовой*.

Необходимо отметить, что ни теория относительности, ни квантовая механика не отвергают полностью классическую механику, *они развивают её дальше* на принципиально новой основе, обобщая на случай сколь угодно *больших скоростей* и сколь угодно *малых масс*.

В пределе уравнения релятивистской и квантовой механики (в первом случае при $\upsilon \ll c$, c – скорость света в вакууме, во втором при $m \gg m_0$, m_0 – масса электрона) переходят в уравнения классической механики.

Следовательно, современная физика рассматривает механику Ньютона как частный, предельный случай релятивистской механики, с одной стороны, и квантовой – с другой.

Понятие «механическое движение» неприменимо к одному отдельному телу. О движении данного тела имеет смысл говорить лишь тогда, когда есть возможность определить его *положение* относительно другого тела или других тел. Поэтому, приступая к изучению движения какого-либо тела, мы должны сначала установить, по отношению к какому телу будем рассматривать движение. Из соображений удобства это тело условно считается «*неподвижным*».

Тело, которое условно считается неподвижным, по отношению к которому определяется положение других тел, называется *телом отсчёта или системой отсчёта*.

Механическое движение можно рассматривать с разных точек зрения. Во-первых, с *геометрической*, т.е. изучать *внешнюю* сторону различных видов движения, не вникая в те взаимодействия и причины, которые обусловливают тот или иной вид движения. Во-вторых, с *причинно-следственной*, т.е. изучать движение с точки зрения тех взаимодействий, которые обусловливают данное движение или изменяют его.

Разделы механики, изучающие движение с указанных точек зрения, называются соответственно *кинематикой* и *динамикой*. Особо рассматриваются условия равновесия (*статика*).

В рамках *кинематики* выбор системы отсчёта ничем не ограничен, *все системы равноправны* и любая из них может использоваться при описании движения.

С точки зрения *динамики* некоторые системы отсчёта имеют преимущество перед другими. Вопрос о том, какими должны быть эти преимущественные системы, будет рассмотрен позднее.

Основными объектами механики являются *материальная точка* и *абсолютно твёрдое тело*.

Материальная точка – это тело, формой и размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Вопрос о том, можно ли данное тело считать материальной точкой, определяется не абсолютными размерами этого тела, а *условиями задачи, масштабами движения*. Одно и то же тело в разных задачах может рассматриваться и как материальная точка, и как протяжённое тело. Например, при определении траектории полёта искусственного спутника Земли его с успехом можно принимать за материальную точку, но при расчёте затрат энергии на преодоления сопротивления атмосферы при выведении спутника на орбиту его следует считать телом, имеющим определённую форму, размеры и т.д.

Абсолютно твёрдое тело это тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь. В таком теле расстояния между отдельными точками остаются неизменными.

Изучение законов механического движения естественно начать с движения материальной точки. Движение такого объекта – простейшее движение, ибо в этом случае не приходится учитывать вращение тела и смещение отдельных его частей.

Что значит знать движение материальной точки? Это значит – знать её *положение в пространстве в любой момент времени*.

Для определения положения точки в пространстве и аналитического описания её движения с выбранным телом отсчёта необходимо связать какую-либо *координатную систему*. Выберем прямоугольную (декартову) систему координат. Тогда положение материальной точки M будет однозначно определено, если будут заданы координаты x, y, z (рис. 1.1).

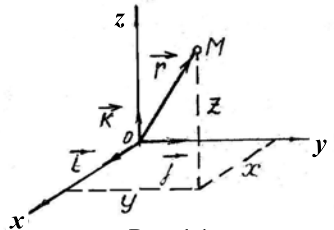


Рис. 1.1

Число независимых координат, которые необходимо задать, чтобы однозначно определить положение материального объекта (точки, системы точек, тела и т.д.) в пространстве, называется числом степеней свободы.

Так как для определения положения материальной точки необходимо задать *три координаты*, то говорят, что материальная точка имеет *три степени* свободы.

Вместо трёх скалярных величин x, y, z положение точки может быть задано одной векторной – радиус-вектором $\vec{r}$, проведённым из начала координат в точку, в которой находится частица (см. рис. 1.1). Координаты x, y, z являются проекциями радиус-вектора на координатные оси:

$$x = r_x, \;\; y = r_y, \;\; z = r_z \,. \qquad (1.1)$$

Радиус-вектор связан со своими проекциями следующим соотношением:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \,, \qquad (1.2)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы вдоль координатных осей x, y, z.

Модуль вектора (его абсолютная величина)

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1.3)$$

1.2. ЛИНЕЙНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Если материальная точка *движется*, то это означает, что её положение относительно выбранной системы отсчёта, т.е. её координаты, с течением времени *изменяются*. Найти *кинематический закон* движения точки – значит найти конкретный вид функции, выражающей зависимость координаты от времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \tag{1.4}$$

Если из этих уравнений исключить время, то мы получим уравнение *траектории движения*.

Траекторией движения материальной точки называется *линия*, которую эта точка описывает при своём движении. В зависимости от формы траектории различают движения *прямолинейные* и *криволинейные* (частным случаем криволинейного движения является движение по окружности).

Форма траектории зависит от *системы отсчёта*, относительно которой рассматривается движение.

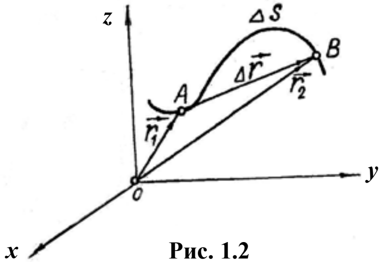


Рис. 1.2

Пусть материальная точка в данной системе отсчёта двигалась по некоторой криволинейной траектории (рис. 1.2). В момент времени t_1 она занимала положение A, определяемое радиус-вектором $\vec{r}_1$, в момент времени t_2 – положение B , определяемое радиус-вектором $\vec{r}_2$.

Вектор $\Delta\vec{r}$, *проведённый из начальной точки A в конечную B, называется линейным перемещением за время* $\Delta t = t_2 - t_1$.

Легко видно из чертежа, что перемещение $\Delta\vec{r}$ есть приращение радиус-вектора точки за время Δt: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Отрезок траектории ΔS, заключённый между точками A и B, называется путём, пройденным за тот же промежуток времени Δt (путь часто обозначается просто буквой S).

Численные значения $\Delta\vec{r}$ и ΔS в случае прямолинейного движения в одну сторону совпадают, в случае же криволинейного движения они совпадают только в пределе, т.е. для бесконечно малого перемещения: $|d\vec{r}| = dS$.

Одно и то же перемещение $\Delta\vec{r}$ две материальные точки могут совершить за различные промежутки времени.

Для характеристики *быстроты* изменения пространственного положения движущихся тел вводится понятие *линейной скорости*.

Линейная скорость $\vec{\upsilon}$ – это векторная физическая величина, характеризующая *процесс изменения пространственного положения* движущейся точки относительно выбранной системы отсчёта, численно равная линейному перемещению, совершённому *за единицу времени*, и совпадающая по направлению с направлением этого перемещения.

Следует в общем случае различать *среднюю* и *истинную* или мгновенную скорости.

Пусть материальная точка, двигаясь по произвольной траектории, за некоторый промежуток времени переместилась на $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.3). Чтобы рассчитать, какое в среднем перемещение совершает точка за единицу времени, надо $\Delta\vec{r}$ разделить на Δt: $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Эта величина называется *средней скоростью* за время Δt:

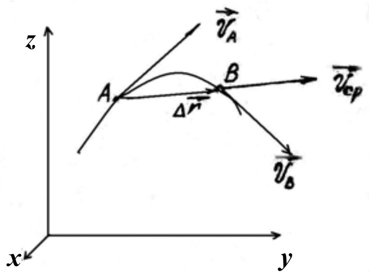


Рис. 1.3

$$\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Направление вектора средней скорости *совпадает* с направлением перемещения $\Delta\vec{r}$. Если промежуток времени Δt уменьшается, то точка *B* будет приближаться к точке *A*, а секущая *AB* будет всё меньше отличаться от дуги *AB*. В конце концов точки *A* и *B* сольются, при этом направление $d\vec{r}$ будет совпадать с направлением касательной. При $\Delta t \to 0$ отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ стремится к вполне определённому пределу.

Вектор $\vec{\upsilon}$, численно равный пределу отношения $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ и направленный по касательной к траектории в соответствующей точке, называется *истинной* или *мгновенной скоростью*:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.6}$$

но $\vec{\upsilon} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ есть производная от $\vec{r}$ по *t*: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Следовательно, мгновенная скорость равна производной от радиус-вектора движущейся точки по времени:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (1.7)$$

Численное значение (модуль) мгновенной скорости

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

Поскольку проекциями радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат являются координаты x, y, z, то легко найти и проекции скорости на координатные оси. Они будут равны производным от x, y, z по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \;\; \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \;\; \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (1.8)$$

Модуль мгновенной скорости равен

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}. \qquad (1.9)$$

Зная проекции вектора скорости на оси координат, можно найти и сам вектор $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}. \qquad (1.10)$$

Радиус-вектор $\vec{r}$, определяющий положение материальной точки относительно выбранной системы отсчёта, и скорость $\vec{\upsilon}$, определяющая изменение её пространственного *положения*, являются основными величинами, характеризующими состояние движения материальной точки. Поэтому эти две векторные величины (или, соответственно, шесть скалярных – x, y, z и υ_x, υ_y, υ_z) называются *параметрами механического состояния*.

В процессе движения величина и направление скорости могут изменяться. Быстроту изменения линейной скорости с течением времени характеризует *линейное ускорение*.

Линейное ускорение – векторная физическая величина, характеризующая *процесс изменения линейной скорости* с течением времени, численно равная *изменению скорости за единицу времени* и совпадающая по направлению с направлением этого изменения.

По аналогии со средней и мгновенной скоростью введём *среднее* и *мгновенное* ускорения.

Пусть в некоторый момент времени t_1 точка двигалась со скоростью $\vec{\upsilon}_1$, а в момент t_2 со скоростью $\vec{\upsilon}_2$. Изменение скорости за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$, очевидно, равно $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1$.

На чертеже векторную разность найдём следующим образом. Перенесём вектор $\vec{\upsilon}_2$ параллельно самому себе так, чтобы его начало совместилось с началом вектора $\vec{\upsilon}_1$ (рис. 1.4). Вектор $\Delta\vec{\upsilon}$, соединяющий конец $\vec{\upsilon}_1$ с концом $\vec{\upsilon}_2$, и будет представлять собой изменение (или приращение) скорости за время Δt.

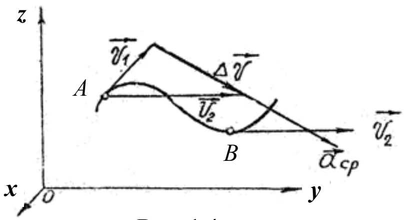


Рис. 1.4

Разделив $\Delta\vec{\upsilon}$ на промежуток времени Δt, в течение которого это изменение произошло, мы найдём среднее ускорение за этот промежуток:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \tag{1.11}$$

Направление вектора $\vec{a}_{\text{ср}}$, как это видно из формулы (1.11), совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{\upsilon}$ (рис. 1.4). При $\Delta t \to 0$ отношение $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ стремится к вполне определённому пределу $\vec{a}$, называемому *истинным* или *мгновенным* ускорением (ускорением в данный момент времени):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \tag{1.12}$$

Используя обозначение производной, выражение (1.12) можно переписать в виде

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \tag{1.13}$$

т.е. ускорение в любой момент времени определяется производной от скорости по времени.

Направление мгновенного ускорения совпадает с направлением приращения скорости $d\vec{\upsilon}$ за бесконечно малый промежуток времени и в зависимости от характера изменения величины и направления скорости может составлять с вектором скорости *любой угол*. Этот угол будет острым, если величина скорости *возрастает* (в частности, он может быть равен *нулю*, если скорость возрастает по величине, но не меняется по направлению). Если величина скорости уменьшается (*замедленное движение*), то этот угол будет *тупым* (в случае, если скорость уменьшается по величине, оставаясь *неизменной* по направлению, он равен π). Наконец, если скорость изменяется только по направлению, вектор ускорения в любой точке траектории *перпендикулярен* к ней (траектория в этом случае – окружность).

Так как $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, то

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{1.14}$$

т.е. ускорение равно второй производной от радиус-вектора $\vec{r}$ по времени.

Проекции вектора ускорения выражаются производными от соответствующих компонент скорости по времени:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x;\; a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \dot{\upsilon}_y;\; a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \dot{\upsilon}_z. \tag{1.15}$$

Принимая во внимание, что

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\; \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\; \upsilon_z = \frac{dz}{dt},$$

получим:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};\; a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y};\; a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \tag{1.16}$$

т.е. проекции вектора ускорения на координатные оси выражаются вторыми производными от соответствующих координат по времени.

Модуль ускорения равен

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.} \tag{1.17}$$

Вектор $\vec{a}$ равен

$$\vec{a} = \sqrt{a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.} \tag{1.18}$$

Вектор ускорения характеризует изменение *величины и направления* скорости. Эти изменения можно оценивать раздельно.

Разложим вектор приращения скорости на две составляющие следующим образом. Из точки A (рис. 1.5), в которой совмещены начала векторов $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, вдоль линии вектора $\vec{\upsilon}_2$ отложим отрезок AC, равный

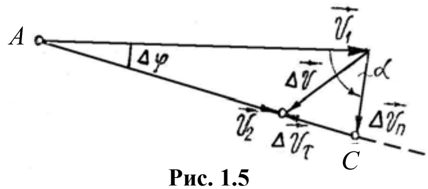


Рис. 1.5

численному значению вектора $\vec{\upsilon}_1$. Тогда, как видно из чертежа, вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ можно представить как геометрическую сумму двух векторов $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$:

$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_\tau + \Delta\vec{\upsilon}_n. \tag{1.19}$$

Вектор $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ характеризует изменение скорости за время Δt по величине, $\Delta\vec{\upsilon}_n$ – по направлению.

Обозначим углы, которые образуют линии векторов $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$ с линией вектора скорости в точке A (т.е. с направлением касательной к траектории в этой точке), соответственно $\Delta\varphi$ и α.

Разделим обе части выражения (1.19) на Δt и перейдём к пределу

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}. \tag{1.20}$$

В пределе, т.е. при $\Delta t \to 0$, угол $\Delta\varphi$ стремится к нулю, а угол α – к $\pi/2$. Следовательно, в пределе составляющая приращения скорости $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ займёт положение касательной, а $\Delta\vec{\upsilon}_n$ – направление, *перпендикулярное касательной*.

Предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется касательным или тангенциальным ускорением:

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}_\tau}{dt}. \tag{1.21}$$

Предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется нормальным или центростремительным ускорением $\vec{a}_n$:

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}_n}{dt}. \tag{1.22}$$

Можно показать, что численное значение тангенциального ускорения равно производной от величины скорости по времени, а численное значение нормального ускорения прямо пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально радиусу кривизны траектории в данной точке:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}; \; a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{1.23}$$

Таким образом, *тангенциальное ускорение* $\vec{a}_\tau$ – вектор, характеризующий изменение скорости *по величине*, направленный по касательной к траектории и численно равный $\dfrac{d\upsilon}{dt}$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ – вектор, характеризующий изменение скорости *по направлению*, направленный по радиусу к центру кривизны траектории и численно равный $\dfrac{\upsilon^2}{R}$.

Предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ есть *полное ускорение* $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{1.24}$$

Таким образом, тангенциальное и нормальное ускорения представляют собой две взаимно перпендикулярные составляющие полного ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.25}$$

Так как вектора $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то численное значение полного ускорения равно

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}. \tag{1.26}$$

Проанализируем некоторые частные случаи движения:

а) $a_\tau = 0$; $a_n = 0$ – равномерное прямолинейное движение;

б) $a_\tau = \text{const}$; $a_n = 0$ – равнопеременное (равнозамедленное или равноускоренное) прямолинейное движение;

в) $a_\tau = 0$; $a_n = \text{const}$ – равномерное движение по окружности;

г) $a_\tau = 0$; $a_n = f(t)$ – равномерное криволинейное движение;

д) $a_\tau = f(t)$; $a_n = f(t)$ – неравномерное криволинейное движение.

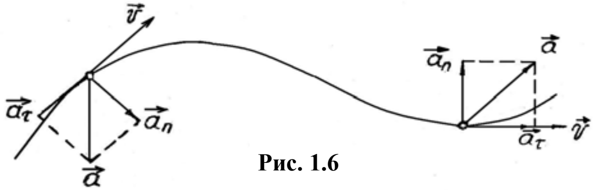


Рис. 1.6

В заключение отметим, что поскольку нормальное ускорение всегда направлено к центру кривизны, а тангенциальное – по касательной к траектории, то полное ускорение всегда обращено внутрь траектории (рис. 1.6).

1.3. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА КИНЕМАТИКИ

Основная задача кинематики – нахождение *положения* движущейся точки, её *скорости* и *ускорения* в любой интересующий момент времени.

Пусть известен вид функций, выражающих зависимость координат движущейся точки от времени:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \tag{1.27}$$

Чтобы найти положение точки в некоторый момент $t = t_1$, достаточно это время подставить в (1.27). Исключив из (1.27) время, находят *траекторию* движения.

Чтобы найти зависимость от времени *компонент скорости* надо продифференцировать по времени функции (1.27). Зная компоненты υ_x, υ_y, υ_z, легко определить величину и направление самой скорости.

Двукратным дифференцированием функций (1.27) мы получим зависимость от времени компонент ускорения.

Возможна обратная задача: по функциям, выражающим зависимость компонент ускорения от времени, можно найти величину и направление скорости, а также координаты точки в заданный момент времени. Эта задача решается обратной операцией – интегрированием: однократное интегрирование даёт зависимость от времени компонент скорости, двукратное – зависимость от времени координат. При этом в формулах появляются постоянные интегрирования. Эти постоянные определяются из так называемых начальных условий.

Начальные условия – это параметры механического состояния в некоторый определённый момент времени (обычно этот момент относят к началу отсчёта времени $t = 0$, отсюда и название – начальные условия). Начальные условия должны быть заданы дополнительно, в противном случае задача становится неопределённой.

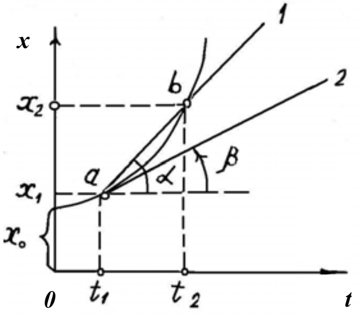


Рис. 1.7

Основная задача кинематики может быть решена *графически*.

Пусть даны графики зависимости координат от времени. Проанализируем один из них, изображённый на рис. 1.7. Из приведённого графика легко определить проекции средней и истинной скоростей на ось *OX*.

Проекция средней скорости за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равна

$$\left(\upsilon_{\text{ср}}\right)_x = \frac{x_1 - x_2}{t_1 - t_2} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Геометрически $\Delta x / \Delta t$ есть тангенс угла наклона *секущей 1*, проведённой через точки *a* и *b*. Следовательно,

$$\left(\upsilon_{\text{ср}}\right)_x = \text{tg}\alpha. \qquad (1.28)$$

Обратим внимание на то, что при нахождении угла наклона секущей отрезки Δx и Δt следует *измерять* не в абсолютных единицах длины, а *в тех масштабных единицах*, которые выбраны вдоль осей *x* и *t*.

Проекция истинной скорости на ось *OX* в момент времени *t* численно равна тангенсу угла наклона касательной *2*, проведённой к графику в точке *a*:

$$\upsilon_x = dx/dt = \text{tg}\beta\,. \qquad (1.29)$$

Определив несколько значений υ_x (достаточных для построения графика), можно построить график $\upsilon_x = f(t)$. Тангенсы углов наклона секущей и касательной на этом графике определят проекции среднего и истинного ускорений на ось *OX*, т.е. $(a_{\text{ср}})_x$ и a_x.

Графически можно решать и *интегральные* задачи. Так, например, по графику ускорения можно найти изменения скорости за данный промежуток времени, по графику скорости – изменение координаты (т.е. расстояние, пройденное вдоль соответствующей оси).

Рисунки 1.8 и 1.9 поясняют это.

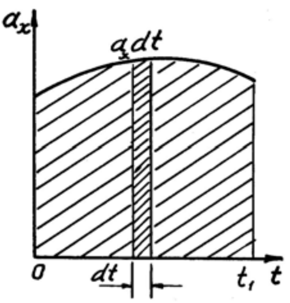


Рис. 1.8

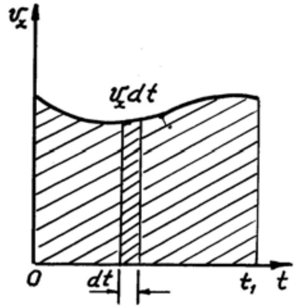


Рис. 1.9

Узкая полоска на рис. 1.8 изображает элементарное изменение (приращения) компоненты скорости υ_x за бесконечно малый промежуток времени dt:

$$d\upsilon_x = a_x dt\ . \tag{1.30}$$

Изменение этого компонента за *конечный* промежуток времени $\Delta t = t_1$ будет численно равно площади криволинейной трапеции, покрытой на чертеже редкой штриховкой:

$$\upsilon_{x1} - \upsilon_{x0} = \int_0^{t_1} a_x dt. \tag{1.31}$$

Совершенно аналогично изменение координаты x за время $\Delta t = t_1$ будет равно площади под кривой $\upsilon_x(t)$ на участке $0 - t_1$ (рис. 1.9):

$$x_1 - x_0 = \int_0^{t_1} \upsilon_x dt. \tag{1.32}$$

В заключение отметим, что графическое интегрирование может быть выполнено значительно точнее, чем графическое дифференцирование.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Уравнение движения точки по прямой имеет вид

$$x = 4 + 2t + t^2 + 0{,}2t^3.$$

Найти: 1) положения точки в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с; 2) среднюю скорость за время, протекшее между этими моментами;

3) мгновенные скорости в указанные моменты времени; 4) среднее ускорение за указанный промежуток времени; 5) мгновенные ускорения в указанные моменты времени.

Решение. 1) Положение точки определяется значениями расстояния x в указанные моменты времени; для нахождения этих расстояний надо в указанное уравнение движения подставить вместо времени t значения заданных моментов времени:

$$x_2 = (4 + 2 \cdot 2 + 2^2 + 0{,}2 \cdot 2^3) = 13{,}6 \text{ м};$$

$$x_5 = (4 + 2 \cdot 5 + 5^2 + 0{,}2 \cdot 5^3) = 64 \text{ м}.$$

2) Значение средней скорости по определению

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\sum \Delta x_i}{\sum \Delta t_i} \quad \text{или} \quad \upsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

где Δx – изменение расстояния x за промежуток времени Δt;

$$\Delta x = x_5 - x_2 = (64 - 13{,}6) = 50{,}4 \text{ м};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (5 - 2) = 3 \text{ с};$$

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{50{,}4}{3} = 16{,}8 \text{ м/с}.$$

3) Общее выражение для мгновенной скорости по определению имеет вид

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = 2 + 2t + 0{,}6t^2 .$$

Подставив в это выражение вместо времени t его заданные значения, получим:

$$\upsilon_2 = (2 + 2 \cdot 2 + 0{,}6 \cdot 2^2) = 8{,}4 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_5 = (2 + 2 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot 5^2) = 27 \text{ м/с}.$$

4) Значение среднего ускорения определим как

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta\upsilon}{\Delta t},$$

где $\Delta\upsilon$ – изменение скорости υ за промежуток времени Δt;

$$\Delta\upsilon = \upsilon_5 - \upsilon_2 = (27 - 8{,}4) = 18{,}6 \text{ м/с};$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (5 - 2) = 3 \text{ с};$$

$$a_{\text{ср}} = \frac{18{,}6}{3} = 6{,}2 \text{ м/с}^2.$$

5) Общее выражение для мгновенного ускорения имеет вид

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2 + 1{,}2t\,.$$

Подставив в это выражение вместо времени t его заданные значения, получим:

$$a_2 = (2 + 1{,}2 \cdot 2) = 4{,}4 \text{ м/с}^2;$$

$$a_5 = (2 + 1{,}2 \cdot 5) = 8{,}0 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Определить зависимость пути от времени, если ускорение тела пропорционально квадрату скорости и направлено в сторону, противоположную ей.

Решение. Учитывая, что по условию ускорение пропорционально квадрату скорости и противоположно ей, запишем это в виде

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon^2\,.$$

Произведём разделение переменных $\frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -kdt$ и проинтегрируем.

После интегрирования имеем $\frac{1}{\upsilon} = kt + C$. При $t = 0$ $\upsilon = \upsilon_0$, значит

$$C = \frac{1}{\upsilon_0} \text{ и } \frac{1}{\upsilon} = kt + \frac{1}{\upsilon_0} = \frac{kt\upsilon_0 + 1}{\upsilon_0}\,.$$

Откуда $\upsilon = \frac{\upsilon_0}{kt\upsilon_0 + 1} = \frac{ds}{dt}$. Выразим ds: $ds = \frac{\upsilon_0}{1 + kt\upsilon_0}dt$ тогда $s = \frac{1}{k}\ln(k\upsilon_0 t + 1) + C_1$. При $t = 0$ $s = s_0$, значит, $C_1 = s_0$. Окончательно будем иметь $s = s_0 + \frac{1}{k}\ln(k\upsilon_0 t + 1)$.

Пример 3. Зависимость пути, пройденного точкой по окружности радиусом $r = 2$ м, от времени выражено уравнением $s = at^2 + bt$. Найти скорость, нормальное, тангенциальное и полное ускорения точки через $t = 0{,}5$ с после начала движения, если $a = 3$ м/с^2, $b = 1$ м/с.

Решение. Прежде всего находим выражение для скорости точки. Известно, что $\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$. Взяв производную по времени от заданного уравнения пути s, получим $\upsilon = 2at + b$. Значение скорости в данный момент времени найдём, если в полученную формулу подставим время t и коэффициенты a и b:

$$\upsilon_t = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + 1 = 4 \text{ м/с.}$$

Теперь найдём общее выражение для тангенциального ускорения. Из теории известно, что $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$. Взяв производную по времени от уравнения скорости, находим $a_\tau = 2a$. С учётом коэффициента a, тангенциальное ускорение $a_\tau = 2 \cdot 3 = 6$ м/с^2.

Полученное выражение для тангенциального ускорения не содержит времени; это значит, что оно постоянно по величине, и движение точки по окружности будет равнопеременным.

Нормальное (центростремительное) ускорение найдём по формуле $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{r}$, подставив выражение для скорости, а затем и численные их значения:

$$a_n = \frac{(2at + b)^2}{r}; \quad a_n = \frac{4^2}{2} = 8 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение будет равно геометрической сумме взаимно перпендикулярных тангенциального и нормального ускорений

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}; \quad a = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение механического движения.
2. Что называется системой отсчёта?
3. Что называется материальной точкой?
4. Как задаётся положение материальной точки в пространстве?

5. Что называется перемещением? путём?

6. Раскройте физический смысл мгновенной скорости и ускорения.

7. Какие изменения скорости характеризуют тангенциальное и нормальное ускорения? Как находят численные значения этих ускорений?

8. Может ли точка, движущаяся по криволинейной траектории, не иметь тангенциального ускорения? Может ли эта точка не иметь нормального ускорения?

9. Как по графику $x = f(t)$ найти составляющую скорости υ_x в заданный момент времени? Как по графику $\upsilon_x = f(t)$ найти изменения координаты x за время Δt ?

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Кинематика изучает лишь пространственно-временные соотношения. В её уравнениях отсутствуют величины, характеризующие *свойства* материальных тел, например масса, и их *взаимодействие* друг с другом, например сила, импульс силы и др.

Зависимость характера движения от свойств тел и от их взаимодействия друг с другом устанавливает *динамика.*

Изучение динамики начнём с динамики материальной точки.

2.1. ПОНЯТИЕ СИЛЫ

Рассмотрим физическое содержание одного из важнейших механических понятий – понятия *силы.*

Опыт показывает, что изменение физических свойств материальных объектов происходит только в процессе внешних или внутренних *взаимодействий.*

Одной из форм взаимодействия является *механическое воздействие.* Механическое воздействие, оказываемое одним телом на другое, проявляется либо в изменении *размеров* и *формы тела*, либо *в изменении скорости*, либо в том и другом одновременно. Воздействуя, например на балку, мы вызываем её изгиб, отталкивая от берега лодку, мы заставляем её двигаться, изменять скорость и т.д.

Понятие *силы* служит для обозначения *величины* и *направления механического воздействия* одного тела на другое.

Сила – это векторная физическая величина, характеризующая механическое воздействие одного тела на другое, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорения.

Как видно из определения, понятие «сила» в механике значительно уже нашего житейского представления о ней. Мы говорим, например о мускульном усилии, о «силе» болевого ощущения, о «силе воли» и т.д.

Между тем эти понятия никакого отношения к физическому понятию «сила» не имеют. Заметим, что даже в самой физике есть термины, связанные со словом «сила», но содержание которых не имеет отношения к понятию «сила» (например, электродвижущая сила, сила света, оптическая сила и т.д.).

Сила – величина *векторная.* Как и всякая другая векторная величина, сила характеризуется не только *численным значением*, но и *направлением в пространстве* (направлением действия). Кроме того, в большинстве случаев о векторе силы можно говорить как о *связанном* векторе и характеризовать *точкой приложения.*

Если действие силы проявляется только в деформациях, его называют *статическим.*

Если действие силы вызывает изменение скорости, его называют *динамическим.*

Так как и деформации, и ускорения доступны количественному измерению, то любое из этих проявлений может быть использовано для сравнения и измерения сил.

Конкретные силы, рассматриваемые физикой, достаточно разнообразны: сила тяжести, вес, реакции опор, силы сухого и вязкого трения, силы упругие, поверхностные, межмолекулярные, реактивная сила и т.д.

Однако по своей природе все они могут быть сведены к одной из так называемых *фундаментальных* сил.

Фундаментальные силы – это силы, характеризующие основные типы взаимодействия между материальными объектами. В настоящее время известны гравитационное, электромагнитное, ядерное или сильное и слабое взаимодействия. Гравитационное взаимодействие характеризует *гравитационные* силы, электромагнитное – *электромагнитные*, ядерное – *ядерные.* Слабое взаимодействие, имеющее место, например при β-распаде атомных ядер, не принято характеризовать с помощью понятия «сила».

Гравитационные силы действуют *между любыми материальными частицами* и зависят от массы частиц и расстояния между ними.

Электромагнитные силы действуют между *заряженными частицами* и зависят от величины электрического заряда частиц, их взаимного расположения и относительной скорости движения. Электромагнитные силы принято делить на *электрические* (обусловлены положением заряженных частиц) и *магнитные* (обусловлены движением заряженных частиц). Наконец, *ядерные силы* действуют между *нуклонами* – частицами, образующими атомное ядро. Особенностью ядерных сил является их необычайная интенсивность и короткий радиус действия (порядка 10^{-15} м).

Действие одного материального тела на другое, по представлениям современной физики, передаётся с *конечной* скоростью через посредство особой непрерывной материи, называемой *физическим полем*. В соответствии с типами взаимодействия известны гравитационное, электромагнитное и ядерное поля.

2.2. ПОНЯТИЕ СВОБОДНОГО ТЕЛА И ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЁТА

Как уже указывалось, в динамике существенную роль играет *выбор системы отсчёта.*

Физические явления протекают, вообще говоря, по-разному в разных системах отсчёта. Естественно поэтому выбирать такие системы, в которых однотипные явления, например механические, протекают *одинаково* и выглядят наиболее *просто.*

Чтобы физические явления выглядели наиболее просто, систему отсчёта следует связывать с так называемым свободным телом.

Свободное (свободно движущееся) *тело* – это тело, *не взаимодействующее* с другими телами; тело, предоставленное самому себе.

Система отсчёта, связанная со свободно движущимся телом, называется инерциальной.

Понятия *свободного тела* и *инерциальной системы отсчёта* являются абстракциями.

Опыт показывает, что в природе нет таких тел, которые бы так или иначе не взаимодействовали друг с другом, были бы абсолютно свободными. Поэтому, строго говоря, свободных тел, а значит, и инерциальных систем отсчёта не существует. Но существует бесчисленное множество реальных систем, которые со сколь угодно большой степенью точности приближаются к инерциальной системе. Например, системы, связанные с определёнными звёздами, будут весьма близки к инерциальным. В меньшей степени инерциальной будет система, связанная с Землёй (эта система не является инерциальной потому, что она испытывает ускорение, обусловленное суточным вращением Земли вокруг своей оси и годичным движением вокруг Солнца). Однако для целого ряда физических экспериментов можно пренебречь неинерциальностью «земной» системы, поскольку вносимые при этом ошибки достаточно малы.

Мысленных инерциальных систем существует бесчисленное множество. Все системы, связанные со свободными телами, инерциальны.

2.3. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

В основе динамики лежат три закона Ньютона (1642 – 1727), сформулированные им в «Математических началах натуральной философии» (1687). Все три закона сформулированы для *инерциальной системы отсчёта.*

В первом законе речь идёт *о движении свободного тела.*

Физическое содержание первого закона динамики было раскрыто Г. Галилеем (1564 – 1642) задолго до того, как Ньютон дал его формулировку.

До Галилея ещё со времён Аристотеля (IV в. до н. э.) в физике господствовало убеждение, что равномерное прямолинейное движение поддерживается силой. В «Метафизике» Аристотеля мы читаем: «Движущееся тело останавливается, как только сила, его толкающая, прекращает своё действие».

Телам приписывалось некое *внутреннее стремление останавливаться*.

Галилей был первым, кто решительно отверг эти ошибочные представления. Он пришёл к выводу, что в реальных условиях «стремление» тел останавливаться обусловлено не их внутренними свойствами, а вторичными, *внешними* причинами.

Галилей понял, что в реальных условиях сила необходима не для того, чтобы поддерживать равномерное прямолинейное движение, а для того, чтобы *компенсировать* уже имеющееся внешнее воздействие, прежде всего силу трения, которая обычно является основной причиной прекращения движения. Галилей на опыте убедился, что если силу трения постепенно уменьшать (до известных пределов этого можно добиться техническими средствами – обработкой поверхностей скольжения, подбором подходящих материалов, смазкой и т.д.), то движение, т.е. скорость тела, будет изменяться всё медленнее и медленнее.

Идя дальше по этому пути, уже *мысленно*, абстрагируясь от реальных условий, Галилей пришёл к выводу, что в отсутствие внешних воздействий движение тела должно сохраняться неизменным сколь угодно долго, т.е. всякое *свободное тело должно двигаться равномерно и прямолинейно* (*или покоиться*).

Движение, которое тело совершает в *отсутствие внешнего воздействия*, называется *инерциальным*, а сам принцип инерциального движения – законом инерции.

Инерциальное движение происходит само по себе, оно является неотъемлемым, естественным состоянием любого освобождённого от внешнего воздействия материального тела и вовсе не нуждается в каких-либо внешних «двигателях».

Напротив, *неинерциальное движение* (движение неравномерное, ускоренное) всегда происходит только при *наличии непрерывного* внешнего воздействия. Неинерциальное движение тотчас же переходит в инерциальное, как только исчезает воздействие сил. Это значит, что если в момент прекращения действия сил тело покоилось, то оно и в последующем будет пребывать в этом состоянии, если же тело двигалось, то в дальнейшем оно будет сохранять величину и направление той скорости, какую имело в момент исчезновения сил.

Таким образом, первый закон динамики утверждает, что в инерциальной системе отсчёта *всякое свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока внешнее воздействие не заставит его изменить это состояние.*

Всё, о чём говорилось выше, требует известного напряжения абстрактной мысли. Дело в том, что непосредственно на опыте мы не можем ни доказать, ни опровергнуть первый закон динамики. Инерциальное движение – это идеальный, предельный случай движения.

В реальных условиях мы можем практически полностью скомпенсировать внешние воздействия и наблюдать почти равномерное прямолинейное движение. Так, компенсируя силу трения, действующую на поезд, тягой электровоза, мы можем заставить его двигаться практически равномерно и прямолинейно. Значит, *в реальных условиях, тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если векторная сумма всех действующих на него сил равна нулю*:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0,$$

или кратко

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \cdot \qquad (2.1)$$

Первый закон Ньютона справедлив только *в инерциальной системе отсчёта*. Это нетрудно понять.

Представим две системы, движущиеся друг относительно друга с ускорением. Пусть тело, свободное от воздействия, движется относительно одной из систем равномерно и прямолинейно. Так как вторая система движется относительно первой с ускорением, то и тело относительно этой, второй, системы будет двигаться с ускорением.

Чтобы в отсутствие внешнего воздействия тело двигалось равномерно и прямолинейно, необходимо, чтобы *свободной от воздействия была сама система отсчёта*. Такую систему мы условились называть *инерциальной*.

Так как первый закон динамики выполняется только в инерциальных системах отсчёта, то само определение инерциальной (или неинерциальной) системы можно дать с точки зрения выполнения этого закона.

Инерциальная система отсчёта – это система, в которой первый закон Ньютона – закон инерции выполняется абсолютно точно. Иначе говоря, это такая система, относительно которой свободное тело движется равномерно и прямолинейно.

Первый закон Ньютона в механике играет весьма важную роль и имеет вполне самостоятельное значение, а не является простым следствием второго закона, как это может показаться на первый взгляд.

В этом законе содержится постулат о существовании инерциальных систем отсчёта, идея об *однородности и изотропности пространства относительно инерциальных систем отсчёта*.

Если тело свободно от внешних воздействий, то ничто не может изменить его скорость относительно таких систем. Пространство, будучи однородным и изотропным, само по себе изменить эту скорость не может.

2.4. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Второй закон Ньютона отвечает на вопрос, каким будет движение тела относительно инерциальной системы отсчёта при *наличии сил.*

Этот закон утверждает: тело под действием силы приобретает ускорение, *пропорциональное* этой силе.

Несмотря на то что второй закон динамики является обобщением опытных фактов, проверить его со всей строгостью непосредственно на опыте, в реальных *земных* условиях невозможно. На опыте этот закон оправдывается лишь приближённо. Почему?

Во-первых, потому, что во всех таких опытах неизбежно присутствуют дополнительные воздействия (трение, сопротивление среды и т.д.), учесть которые оказывается далеко не просто.

Во-вторых, потому, что опыты проводятся на Земле – в неинерциальной системе отсчёта, в системе, которая сама *движется с ускорением*. Результатом этого является то, что *наблюдаемые* ускорения не вполне соответствуют реально действующим силам. Наблюдаемые ускорения обусловлены не только воздействием сил, но и *неинерциальностью системы отсчёта*. Однако если предпринять меры к тому, чтобы ускорения, *обусловленные силами*, были значительно больше ускорений, обусловленных неинерциальностью системы отсчёта, то экспериментальная точность опытов будет вполне удовлетворительной.

Будем воздействовать на одно и то же тело разными силами и всякий раз находить отношение силы к соответствующему ускорению – $\frac{F}{a}$. Опыт покажет, что это отношение для *данного* тела является величиной постоянной. Обозначим эту величину буквой *m:*

$$\frac{F}{a} = m\,. \tag{2.2}$$

Можно убедиться в том, что отношение силы к сообщаемому ею ускорению постоянно для любых других тел (при этом величина его может оказаться разной). Мы приходим к выводу, что отношение $\frac{F}{a}$ зависит только от того, *к какому* телу приложена сила. Следовательно, величина $\frac{F}{a} = m$, называемая *массой*, может *служить мерой вполне определённого динамического свойства тел*, *а именно*, *свойства приобретать под действием данной силы вполне определённое ускорение*, *свойства изменять скорость механического движения не сразу*, *не мгновенно*, *а постепенно.*

Свойство тел изменять величину и направление скорости *постепенно* называется *инерцией*.

Можно сказать, таким образом, что *масса* есть количественная *мера инерции* материальных тел.

Чем больше масса тела, тем меньшее ускорение оно приобретает под действием данной силы, т.е. тем *медленнее* изменяется его скорость.

Масса тела не зависит от температуры тела, его агрегатного состояния, химического состава, электрических, магнитных, упругих и иных свойств. В классической механике масса полагается величиной *аддитивной* (масса составного тела равна сумме масс отдельных его частей) и *не зависящей от скорости* движения. Содержание массы, однако, не исчерпывается одними только динамическими проявлениями. В ряде физических явлений масса служит мерой иных свойств материальных объектов. Поэтому часто массу, фигурирующую во втором законе Ньютона и характеризующую инерционные свойства тел, называют «инертной».

Соотношение (2.2) позволяет по динамическому эффекту, обусловленному силой и ускорением, найти массу тела.

Мы будем, однако, полагать, что масса измерена каким-либо другим способом (это возможно). Тогда соотношение (2.2) можно толковать как зависимость ускорения не только от силы, но и от массы:

$$a = k\frac{F}{m}, \quad (2.3)$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения ускорения, силы и массы. Эти единицы выбирают таким образом, чтобы $k = 1$.

Тогда

$$a = \frac{F}{m}. \quad (2.4)$$

Опыт показывает, что направление ускорения всегда совпадает с направлением силы, вызвавшей это ускорение. Учитывая направления $\vec{a}$ и $\vec{F}$, получаем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.5)$$

Это одна из простейших формулировок второго закона Ньютона.

Ускорение, *приобретаемое телом относительно инерциальной системы отсчёта*, *прямо пропорционально силе*, *действующей на тело*, *зависит от массы тела и направлено в сторону силы*.

Формулу (2.5) можно записать в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.6)$$

Это соотношение используется в качестве определяющего уравнения при установлении единиц измерения силы.

В системе СИ масса измеряется в килограммах (кг), ускорение – в метрах на секунду в квадрате (м/с^2). Единицей силы в системе СИ является ньютон (Н). Ньютон – это такая сила, под действием которой тело массой в 1 кг приобретает ускорение 1 м/с^2:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/с}^2.$$

Силу часто измеряют в килограммах (кг). Килограмм – это такая сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 9,8 м/с^2:

$$1 \text{ кг} = 1 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 = 9{,}8 \text{ Н}.$$

Чтобы перейти от векторной формы записи второго закона к скалярной, векторные величины соотношения (2.6) следует спроектировать на координатные оси выбранной системы координат:

$$ma_x = F_x; \quad ma_y = F_y; \quad ma_z = F_z. \quad (2.7)$$

Опыт показывает, что при взаимодействии материальных тел выполняется *принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиций): если на тело одновременно действует несколько сил, *то действие каждой силы происходит независимо от других*. Это значит, что деформация или ускорение, обусловленные данной силой, будут таковыми, как если бы других сил не было.

Следовательно, в общем случае, когда на тело одновременно действуют несколько сил, под $\vec{a}$ в формуле (2.5) нужно понимать *результирующее* ускорение, под $\vec{F}$ – *геометрическую* сумму всех действующих сил, а не какую-то «особую» силу ускорения:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \cdots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i ;$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i ;$$

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i}{m}, \qquad (2.8)$$

т.е. ускорение, приобретённое телом, прямо пропорционально результирующей всех действующих на тело сил и обратно пропорционально его массе.

Приведём теперь более общую формулировку второго закона Ньютона.

Механическое движение в процессе взаимодействия тел может быть частично или полностью передано от одного тела к другому. Чтобы судить о потенциальных возможностях какого-либо тела в этом отношении, недостаточно знать одну только скорость перемещения – в этом нас убеждает опыт. Сравните, например движения футбольного мяча, летящего со скоростью 20 м/с, и поезда, идущего со скоростью 20 м/с; «запасы» механического движения этих тел различны, несмотря на одинаковую скорость. По-видимому, должна существовать *единая мера* механического движения, *одинаковая* для всех тел. Такая мера действительно существует и называется *импульсом* или *количеством движения*.

Импульс – это векторная физическая величина, характеризующая способность механического движения передаваться от одного тела к другому, численно равная произведению массы тела на его скорость и совпадающая по направлению с направлением скорости:

$$\vec{K} = m\vec{\upsilon} . \qquad (2.9)$$

Заметим, что численное значение импульса и его направление зависят от выбора системы отсчёта, так как от системы отсчёта зависят величина и направление скорости.

Опыт показывает, что изменение импульса тела однозначно связано с величиной и направлением силы, которая на него действует. Пусть в некоторый момент времени t импульс тела был $m\vec{\upsilon}$. Под действием силы $\vec{F}$ (она может быть переменной) за элементарный промежуток времени dt импульс тела изменился на $d(m\vec{\upsilon})$ (в случае переменной силы промежуток времени dt должен быть таким, чтобы сила в течение этого промежутка времени практически *не изменялась*). Разделив изменение импульса на промежуток времени, в течение которого это изменение произошло, мы рассчитаем, на сколько изменился импульс за единицу времени при условии, что во все последующие интервалы времени движение будет изменяться точно такими же темпами, что и в течение промежутка dt. Отношение $\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$ *есть скорость изменения импульса*.

Ньютон установил, что *скорость изменения импульса тела* (производная от импульса по времени) *равна по величине действующей силе и совпадает с ней по направлению*:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}. \tag{2.10}$$

Это соотношение и есть общая форма математической записи второго закона Ньютона. Из этой формулы можно получить тот частный вид математического выражения второго закона, который мы привели выше. Действительно, если масса не изменяется с течением времени, то её можно вынести за знак производной:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}\text{, но } \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}\text{, следовательно, } m\vec{a} = \vec{F}.$$

Создавая свою механику, Ньютон не подозревал, что масса, так же как и пространство, и время, – понятие относительное, зависящее от системы отсчёта, от скорости движения. Поэтому предположение о неизменности массы без каких-либо специальных оговорок молчаливо положено в основу классической механики.

С точки зрения ньютоновской механики выражения второго закона динамики

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}) = \vec{F} \text{ тождественны.}$$

С точки зрения современной физики эти формулы равноправны только для *медленных* (по сравнению со скоростью света) движений, когда изменением массы, обусловленным изменением скорости тела, можно пренебречь.

При скоростях, соизмеримых со скоростью света, эффект возрастания массы будет столь ощутим, что формула (2.6) оказывается непригодной. Для быстрых движений необходимо пользоваться формулой (2.10). Дифференцируя левую часть этого уравнения по правилам дифференцирования сложной функции, получим

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}+\vec{\upsilon}\frac{dm}{dt}=\vec{F}\ . \qquad (2.11)$$

Соотношение (2.10) позволяет сделать вывод о том, что *сила характеризует процесс передачи механического движения от одного тела к другому* и численно равна импульсу, передаваемому за единицу времени.

Математическое выражение второго закона часто приводят ещё в одном виде. Умножим обе части уравнения (2.10) на dt:

$$d(m\vec{\upsilon})=\vec{F}dt\ . \qquad (2.12)$$

Величина $\vec{F}dt$ описывает действие силы во времени и называется *импульсом силы*.

Импульс силы – это вектор, численно равный произведению силы на время её действия и совпадающий по направлению с направлением силы.

В левой части соотношения (2.12) стоит изменение импульса тела за элементарный промежуток времени dt. Таким образом, *изменение импульса тела за время dt равно импульсу действующей на него силы за тот же промежуток*. Это ещё одна из формулировок второго закона Ньютона.

Из формулы (2.12) видно, что второй закон Ньютона – закон дифференциальный. Его можно привести к интегральному виду. Обозначим импульс буквой $\vec{K}$ и перепишем формулу (2.12):

$$d\vec{K}=\vec{F}dt\ . \qquad (2.13)$$

Сложим все элементарные приращения импульса за конечный промежуток времени $\Delta t=t_2-t_1$ и одновременно подсчитаем импульс действующей силы за тот же промежуток. Для этого возьмём определённые интегралы от левой и правой частей соотношения (2.13):

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{K} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \ . \tag{2.14}$$

Если $\vec{F} = \text{const}$, то получим

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{F}\Delta t \ . \tag{2.15}$$

Если $\vec{F} = \vec{F}(t)$, то

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt \ . \tag{2.16}$$

Обратимся к более подробному рассмотрению понятия *инерции.*

Инерция – важнейшее свойство, присущее всем материальным объектам (в том числе и полевой форме материи). Этим свойством тела обладают независимо от того, свободны они или взаимодействуют с другими телами, покоятся или движутся.

Необходимо чётко представлять, в чём проявляется инерция тел в различных условиях: в отсутствии внешнего воздействия и при наличии такового.

Ответ на этот вопрос дают первый и второй законы Ньютона.

В отсутствие внешнего воздействия *инерция* проявляется в том, что тело *сохраняет неизменным* своё состояние движения или покоя.

При *наличии* внешнего воздействия – *сил*, инерция проявляется не в том, что тело стремится сохранить своё состояние движения неизменным (ибо как только нескомпенсированная, даже сколь угодно малая сила начинает действовать, движение тела – величина и направление скорости – тотчас же *изменяются*, возникает ускорение), а в том, что *изменения движения тела происходят постепенно*.

Следовательно, *инерция* – это *свойство* тела *сохранять* имеющееся состояние *движения или покоя* (относительно инерциальной системы отсчёта) *неизменным* при *отсутствии* воздействия и *изменять* это *состояние постепенно* при *наличии* воздействия.

С проявлениями инерции мы сталкиваемся очень часто. Но, к сожалению, объяснения этих проявлений иногда бывают ошибочными. Поэтому мы рассмотрим здесь один пример. Пусть на гладком, без бортиков столике движущегося вагона лежит предмет. При резком торможении поезда этот предмет может соскользнуть со столика. Почему? Потому, отвечают некоторые, «что предмет *сохраняет* свою первоначальную скорость», «продолжает двигаться по инерции». Такое объяснение, в сущности, ошибочно.

В самом деле, почему столик *изменяет* свою скорость, а предмет её *сохраняет*? Могут ответить: «на столик действует тормозящая сила со стороны вагона (столик жёстко скреплён с вагоном). Это верно, но разве на предмет не действует тормозящая сила? *Действует*! Тормозящей силой для предмета является *сила трения*, приложенная к нему со стороны столика (при торможении поезда эта сила направлена в сторону, противоположную движению). Так как на предмет действует неуравновешенная сила, скорость его (относительно полотна дороги) *не может сохраняться*, *она изменяется*! Вся суть в том, что изменение скорости столика и предмета происходят *неодинаково быстро*, иными словами, столик и предмет приобретают *разные* ускорения: столик *большее*, предмет *меньшее*. В результате предмет, *опережая* столик, начнёт скользить по его поверхности в направлении по ходу поезда. Если же сила трения, действующая на предмет, *достаточна* для того, чтобы сообщить предмету *такое* же точно ускорение, какое имеет столик, – никаких относительных перемещений происходить не будет: столик и предмет будут тормозиться или ускоряться как единое целое.

Таким образом, инерционные эффекты объясняются не тем, что одни тела «сохраняют» своё движение (или покой) неизменным, а другие, напротив, изменяют, а тем, что *изменение движения*, *изменение скорости всех взаимодействующих тел происходит неодинаково быстро*: одни тела изменяют своё движение быстрее, другие медленнее. В результате мы наблюдаем относительные перемещения тел.

И ещё одно обстоятельство не следует забывать. Изменение скорости тела зависит не от одной только инерции (*массы*) тела. Оно зависит также от величины силы и времени её воздействия.

2.5. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Особо следует сказать о динамике движения тела, масса которого изменяется за счёт *присоединения* или *отделения частиц*. Например, масса падающей дождевой капли изменяется вследствие испарения молекул или, наоборот, их конденсации, масса ракеты или самолёта изменяется за счёт выбрасывания продуктов сгорания; в принципе, к телам с изменяющейся массой можно отнести автомобиль, тепловоз и т.д.

Движение тела переменной массы в общем случае может изменяться, во-первых, за счёт воздействия *внешних сил*, во-вторых, за счёт *взаимодействия* тела с *отделяющимися* (*или присоединяющимися*) *частицами*. У одних тел решающую роль в изменении скорости играют внешние силы (автомобиль, тепловоз, винтовой самолёт), у других – силы, возникающие при взаимодействии с отделяющимися частицами (реактивный самолёт, ракета).

Закономерности движения тел переменной массы были подробно исследованы И. В. Мещерским и К. Э. Циолковским.

Силы, возникающие при отделении (или присоединении) частиц, называются *реактивными*.

Можно доказать в самом общем случае, что величина и направление реактивной силы, возникающей при отделении (или присоединении) частиц, зависит:

1) от быстроты изменения массы тела $\frac{dm}{dt}$ (в случае присоединения частиц масса тела увеличивается, поэтому $\frac{dm}{dt} > 0$, в случае отделения частиц масса тела уменьшается, поэтому $\frac{dm}{dt} < 0$);

2) от величины и направления скорости $\vec{u}$ (относительно тела), с которой частицы покидают тело или присоединяются к нему:

$$\vec{f}_r = \vec{u}\,\frac{dm}{dt}. \tag{2.17}$$

Как видно из этой формулы, реактивная сила, действующая на тело, *совпадает* по направлению с направлением $\vec{u}$, если частицы *присоединяются*, и *противоположна* этой относительной скорости, если частицы *отделяются*.

Поскольку на тело переменной массы всегда действует не только реактивная сила, но также и внешние силы (например, на ракету действует сила притяжения к Земле, Солнцу, сопротивление атмосферы и т.д.), ускорение такого тела будет определяться результирующей внешних и реактивных сил:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{f}_r, \tag{2.18}$$

где m – масса тела в данный момент времени; $\vec{F}$ – внешняя сила; $\vec{f}_r$ – реактивная сила.

Учитывая (2.17), соотношение (2.18) можно переписать в виде

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\,\frac{dm}{dt}. \tag{2.19}$$

Последнее соотношение носит название уравнения Мещерского. Оно позволяет решать ряд важных прикладных задач механики.

2.6. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

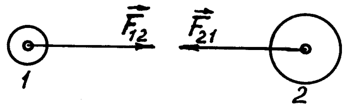


Рис. 2.1

Опыт показывает, что воздействие одного тела на другое никогда не является односторонним. Если тело *1* действует на тело *2* с силой $\vec{F}_{21}$, то в свою очередь тело *2* действует на тело *1* с силой $\vec{F}_{12}$, причём силы взаимодействия равны по величине и противоположны по направлению (рис. 2.1):

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (2.20)$$

В этом и заключается суть третьего закона Ньютона: *силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по величине и противоположны по направлению.*

Одну из сил взаимодействия обычно называют силой «действия», другую – силой «противодействия». Не следует, однако, думать, что «действие» и «противодействие» чем-либо принципиально отличаются друг от друга. Обе силы совершенно равноправны и имеют *одинаковую природу*. Так, если «*действующая*» сила обусловлена упругой деформацией, то сила «*противодействия*» обусловлена также деформацией другого тела, с которым данное тело взаимодействует, если сила «действия» имеет гравитационное происхождение, то «противодействие» вызвано той же причиной и т.д. Любую из сил мы вправе назвать «действующей» и любую – «противодействующей».

Изучая движение какого-либо тела, мы обычно указываем только те силы, которые действуют на *это* тело, и отвлекаемся от сил, приложенных к другим телам. Но эти силы существуют, и забывать о них, вообще говоря, не следует. Они позволяют лучше понять происхождение той или иной силы. Следует всегда помнить, что за каждой силой стоит реальное тело, с которым данное тело взаимодействует. Указывая силу, мы тем самым всегда указываем на *два тела*, которые взаимодействуют друг с другом.

Так как силы действия и противодействия приложены к *разным* телам, то они *не могут уравновесить друг друга*.

Если заменить силы в формуле (2.20) в соответствии со вторым законом Ньютона произведениями масс на ускорения, то третий закон Ньютона будет иметь вид

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 \quad \text{или} \quad \vec{a}_1 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{a}_2, \qquad (2.21)$$

т.е. ускорения, сообщаемые друг другу взаимодействующими телами, обратно пропорциональны их массам и направлены в противоположные стороны.

Из третьего закона Ньютона непосредственно вытекает одно важное следствие: взаимодействие двух тел не может вызвать их перемещение в одном направлении.

Чтобы оба взаимодействующих тела пришли в движение в одном направлении, необходимо, чтобы на одно из тел или на оба одновременно подействовало третье тело.

2.7. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕКОТОРЫХ СИЛ, РАССМАТРИВАЕМЫХ В МЕХАНИКЕ

Дадим краткую характеристику сил, рассматриваемых в механике.

Упругая сила – сила, возникающая при *деформации* тела, т.е. при изменении его формы или объёма, обусловленном действием *внешних* сил.

Если после прекращения действия внешней силы, вызвавшей деформацию, тело *полностью* восстанавливает свою первоначальную форму и размеры, оно называется *упругим*. Упругими называются и деформации, возникающие в таком теле. Упругие тела обладают способностью оказывать сопротивление изменению их формы и объёма. В таких телах возникают внутренние силы, препятствующие дальнейшему смещению частиц деформируемого тела, в результате чего внешние силы оказываются уравновешенными.

Для упругих деформаций справедлив *закон Гука*: упругая сила, возникающая при деформации (например, при сжатии или растяжении), пропорциональна величине деформации:

$$F_x = -kx, \qquad (2.22)$$

где F_x – проекция упругой силы на направление смещения; x – величина смещения (растяжения или сжатия); k – так называемый *коэффициент упругости* – константа, характеризующая и вещество, и «геометрию» тела – его форму, размеры и т.д. Знак «минус» означает, что направление упругой силы всегда противоположно направлению смещения частиц тела (рис. 2.2).

Сила всемирного тяготения $\vec{F}_\gamma$ – сила взаимного *притяжения*, действующая между любыми материальными телами или частицами, обусловлена гравитационным взаимодействием материальных тел.

Если размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними (материальные точки) или имеют сферическую форму и однородны, сила тяготения между ними численно равна

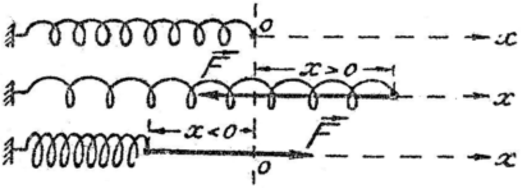


Рис. 2.2

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.23)$$

(закон всемирного тяготения Ньютона), где m_1 и m_2 – массы тел; r – расстояние между телами (в случае шаров – расстояние между центрами шаров); γ – гравитационная постоянная.

Так как размеры обычных тел малы по сравнению с радиусом Земли и Земля по своей форме близка к шару, силу земного тяготения, действующую на тело массой m, можно вычислить по формуле

$$F_\gamma = \gamma \frac{mM_З}{R^2}, \qquad (12.3)$$

где $M_З$ – масса Земли; R – расстояние от тела до центра Земли.

Сила тяжести $\vec{P}$ *– отвесная* составляющая силы земного тяготения (на Луне – лунного тяготения и т.д.).

Сила тяжести во всех точках земной поверхности, кроме полюсов и экватора, *не совпадает* с силой тяготения по *направлению* и во всех точках, кроме полюсов, *меньше* её по величине.

Объяснение. Пусть некоторое тело лежит на поверхности Земли в точке, находящейся на широте φ (рис. 2.3). На тело действует сила тяготения $\vec{F}_\gamma$ и реакция опоры $\vec{N}$ (эта сила обусловлена *упругостью* опоры). Равнодействующая этих сил сообщает телу центростремительное ускорение (тело вследствие вращения Земли вокруг своей оси движется по окружности, лежащей в плоскости, перпендикулярной земной оси). Реакция опоры уравновешивает не силу тяготения $\vec{F}_\gamma$, а её составляющую $\vec{P}$, которая и называется силой тяжести.

Как видно из рис. 2.3, силы $\vec{F}_\gamma$ и $\vec{P}$ не равны по величине и не совпадают по направлению.

Вес тела – это сила, с которой тело давит на горизонтальную опору или натягивает вертикальный подвес.

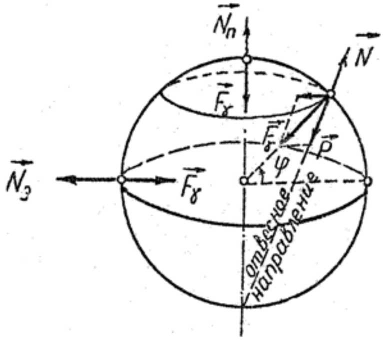


Рис. 2.3

Причиной возникновения этой силы являются упругие деформации, появляющиеся при взаимодействии тела и опоры (деформации тела и опоры могут быть вызваны действием сил тяготения или каких-либо других сил).

Опыт показывает, что любое тело оказывается *деформированным*, если оно движется относительно Земли с ускорением $\vec{a}$, *не равным* ускорению свободного падения $\vec{g}$. Это ускорение, в частности, может быть равно *нулю*, т.е. тело либо покоится относительно Земли, либо равномерно и прямолинейно движется.

Будучи деформированным, стремясь восстановить свою первоначальную форму, тело давит *на опору* с вполне определённой силой, которую и называют весом тела – Q.

Численно значение веса может значительно отличаться от численного значения силы тяжести (мы говорим лишь о *численных* значениях этих сил потому, что они приложены *к разным* телам!). В одних случаях вес может быть *больше* силы тяжести (например, в космических кораблях во время разгона), в других – *меньше* её (например, в самолётах при «проваливании» в воздушные «ямы»).

Вес тела может быть равен *нулю*. Это *особое состояние*, при котором тело не оказывает давления на опору (становится невесомым), называется *невесомостью*. В этом состоянии тело свободно от деформаций. Единственной силой, которая продолжает действовать на тело в состоянии невесомости, является сила тяготения.

Если тело и опора *покоятся* относительно Земли, то *сила тяжести и вес тела численно равны*! Это используется при нахождении силы тяжести тела.

Определив силу, с которой тело растягивает пружину *неподвижного* динамометра или давит на чашку *неподвижных* весов, т.е. его *вес*, мы тем самым найдём и численное значение силы тяжести. Поэтому, когда задают вес тела, например $Q = 10$ Н, то в конечном счёте задают его силу тяжести $P = 10$ Н.

Давление тела на опору приводит к его деформации. Будучи деформированной, опора оказывает действие *на тело*. Это действие проявляется в возникновении так называемой *реакции опоры*, которую принято раскладывать на две составляющие – *нормальную реакцию* *опоры* $\vec{N}$ и *силу трения* $\vec{F}_{тр}$. *Нормальная реакция опоры – это упругая сила*, действующая со стороны опоры на тело в направлении, перпендикулярном плоскости соприкосновения тела и опоры (Если тело подвешено, то реакция подвеса направлена *вдоль* подвеса). Реакция опоры зависит от *степени деформации* опоры.

Если опора *горизонтальна*, то нормальная реакция опоры и вес тела являются по отношению друг к другу силами действия и противодействия. Следовательно, определив из условий движения силу, с которой такая опора действует на тело, мы найдём, с какой силой тело давит на опору, т.е. его вес.

Рассмотрим пример. На тело, помещённое в кабине лифта (рис. 2.4), действует сила тяжести $\vec{P}$ и реакция опоры $\vec{N}$. При движении лифта с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально *вверх*, второй закон динамики для тела запишется в виде

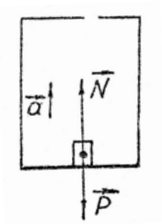


Рис. 2.4

$$N - P = ma\ , \qquad (2.25)$$

откуда сила N, а стало быть, и вес тела Q будут равны

$$|Q| = N = P + ma\ . \qquad (2.26)$$

При *таком* направлении ускорения (не движения, а ускорения!) вес тела оказывается *больше* силы тяжести $(Q > P)$.

Если ускорение направлено вертикально *вниз*, то реакция опоры и вес тела оказываются *меньше* силы тяжести:

$$Q = N = P - ma\ . \qquad (2.27)$$

В состоянии невесомости вес и реакция опоры равны нулю, единственной силой, сообщающей и телу, и опоре ускорение, будет иметь вид $P = ma$, но $P = mg$. Следовательно, в состоянии невесомости тела двигаются с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$.

Силы трения возникают при движении твёрдых тел, жидкостей и газов. Различают *сухое* (или внешнее) и *вязкое* (или внутреннее) трение. Сухое трение возникает при относительном перемещении соприкасающихся *твёрдых* тел, вязкое трение – при движении *жидкостей и газов*. В зависимости от характера перемещения одного твёрдого тела по поверхности другого различают *трение скольжения* и *трение качения*.

Сила трения скольжения возникает при *скольжении* одного тела по поверхности другого. Направлена эта сила по *касательной* к плоскости соприкосновения тел в сторону, противоположную направлению относительного движения.

Сила трения качения – сила, возникающая при *качении* одного тела по поверхности другого.

Сухое трение может возникнуть и между неподвижными телами – так называемое *трение покоя*.

Сила трения покоя (неполная сила трения) возникает тогда, когда внешняя сила, действующая на тело в плоскости соприкосновения, недостаточна для того, чтобы вызвать его скольжение.

Сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению этой *внешней силе*.

Сила трения покоя *максимальна*, когда тело находится *на грани скольжения*.

Численное значение максимальной силы трения покоя определяется *из закона Кулона*:

$$F_{\text{тр}(\max)} = kN \,, \tag{2.28}$$

где k – коэффициент, зависящий от свойств поверхностей соприкосновения и определяемый экспериментально (*коэффициент трения*); N – *сила нормального давления опоры на тело* (нормальная реакция опоры).

Если внешняя сила достигает значения, чуть-чуть превышающего $F_{\text{тр}(\max)}$, начинается скольжение.

Силу трения скольжения при малых скоростях движения можно приближенно вычислить по формуле (2.28).

Существенным отличием вязкого трения от сухого является то, что в жидкостях и газах трение покоя *отсутствует*. Если тело, погруженное в жидкость или газ, покоится, то со стороны жидкости или газа на тело могут действовать только силы, направленные *перпендикулярно* к поверхности соприкосновения.

Сила вязкого трения *зависит от скорости* (при небольших скоростях она пропорциональна первой степени скорости, при больших скоростях – более высоким степеням скорости).

2.8. МЕХАНИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

Механический принцип относительности Галилея отвечает на вопрос: одинаково ли протекают механические процессы (*при одинаковых условиях*) в разных инерциальных системах. Иными словами, влияет ли равномерное и прямолинейное движение системы на ход механических процессов, происходящих внутри системы?

Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо сравнить *вид основных законов механики* в разных инерциальных системах. Если окажется, что законы механики *не изменяют* своего вида при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, то это и будет означать, что механические явления протекают во всех инерциальных системах одинаково.

Для того чтобы осуществить переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой, мы должны знать *правила*, по которым осуществляется преобразование координат и времени, а также правила сложения скоростей, ускорений, сил и т.д. Преобразования координат и времени, в основе которых лежат *классические представления о пространстве и времени*, называются *преобразованиями Галилея*.

Рассмотрим две инерциальные декартовы системы координат O и O'. Будем полагать условно, что одна из систем покоится (система O), а другая (O') равномерно и прямолинейно движется относительно первой со скоростью $\vec{\upsilon}$. Из соображений простоты будем считать, что в начальный момент времени ($t = 0$) начала координат обеих систем и направления соответствующих осей совпадают (рис. 2.5).

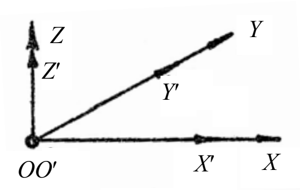


Рис. 2.5

Движение системы O' происходит вдоль оси X неподвижной системы без поворота осей Y' и Z' (во время движения системы O' оси Z и Z', Y и Y' остаются *параллельными* друг другу).

Найдём связь между координатами одной и той же материальной точки M в этих двух системах. Пусть положение точки относительно движущейся системы в некоторый момент времени определяется радиус-вектором $\vec{r}\,'$, относительно неподвижной – $\vec{r}$ (рис. 2.6), перемещение системы O' относительно системы O за промежуток времени t, прошедший от начального момента до рассматриваемого, определяет радиус-вектор $\vec{R}$.

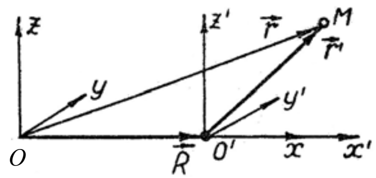


Рис. 2.6

По правилам векторного сложения

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}\,'. \tag{2.29}$$

Перемещение подвижной системы

$$\vec{R} = \vec{\upsilon} t \ . \tag{2.30}$$

Тогда $\vec{r} = \vec{\upsilon} t + \vec{r}\,'$, откуда

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{\upsilon} t \ . \tag{2.31}$$

Спроектировав все векторы соотношения (2.31) на оси координат, мы найдём связь между компонентами векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}\,'$:

$$\begin{aligned} x' &= x - \upsilon t \ ; \\ y' &= y \ ; \\ z' &= z \ . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Так как $\upsilon_x = \upsilon$, к этим формулам следует добавить формулу преобразования времени. Классическая механика, как уже говорилось, полагает, что время *абсолютно*. Это значит, что показания двух часов, связанных с системами O и O' и выверенных (*синхронизированных*) для начального момента, должны быть *одинаковыми* для любых последующих моментов:

$$t' = t \ . \tag{2.33}$$

Соотношения (2.31) – (2.33) называются *преобразованиями Галилея*.

Из преобразований Галилея вытекает *закон сложения скоростей* в классической механике.

Продифференцируем (2.31) по времени:

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\upsilon} \,,$$

где $\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{U}'$ – скорость точки *относительно движущейся системы координат*; $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U}$ – скорость точки *относительно «неподвижной» системы*.

Учитывая обозначения, получаем

$$\vec{U}' = \vec{U} - \vec{\upsilon} \ . \tag{2.34}$$

Для проекций:

$$\begin{aligned} U'_x &= U_x - \upsilon \ ; \\ U'_y &= U_y \ ; \\ U'_z &= U_z \ . \end{aligned} \tag{2.35}$$

Обращаем внимание на то, что в основе формул (2.34) и (2.35) лежит предположение, что *время в обеих системах течёт одинаково быстро*:

$$dt' = dt \ . \tag{2.36}$$

Из преобразований Галилея вытекает также, что расстояние между точками (длины отрезков), относительные скорости, ускорения, промежутки времени, силы *не изменяют своих численных значений* при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, т.е. являются абсолютными, неизменными, или, как говорят, *инвариантными* по отношению к преобразованиям Галилея.

Убедимся в этом.

а) Пусть некоторый стержень покоится относительно системы O'. Обозначим длину стержня в этой системе

$$l_0 = x_2' - x_1' \tag{2.37}$$

(стержень параллелен оси x'). Относительно системы O этот стержень движется со скоростью υ. Отметив координаты концов стержня в системе O в один и тот же момент времени, мы найдём его длину в системе, относительно которой он движется. Пусть эти координаты будут x_1 и x_2, тогда длина стержня в этой системе будет равна

$$l = x_2 - x_1 \ . \tag{2.38}$$

Выразим x_1' и x_2' через x_1 и x_2 по (2.32) и найдём разность $x_1' - x_2'$:

$$l_0 = x_2' - x_1' = (x_2 - \upsilon t) - (x_1 - \upsilon t) = x_2 - x_1 = l \ ; \quad l_0 = l \ . \tag{2.39}$$

Мы видим, что *длина* стержня при переходе от «неподвижной» инерциальной системы к движущейся *не изменяется*. Совершенно аналогично можно было бы показать, что не изменяются при таком переходе и относительные скорости.

б) Убедимся теперь в том, что второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея.

Пусть в «неподвижной» системе на материальную точку действует сила $\vec{F}$ и сообщает ей ускорение $\vec{a}$. Второй закон Ньютона в системе O имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{F} \ . \tag{2.40}$$

Найдём вид второго закона Ньютона в движущейся инерциальной системе.

Рассматриваемые в механике силы зависят либо от относительного расположения взаимодействующих тел (например, силы тяготения), либо от относительной скорости их движения (магнитные силы), либо от времени.

Так как при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой ни взаимные расстояния, ни относительные скорости, ни промежутки времени не изменяются, то *не изменяются* при этих переходах и *силы*:

$$\vec{F}' = \vec{F} \,. \tag{2.41}$$

В проекциях:

$$F'_x = F_x;$$
$$F'_y = F_y;$$
$$F'_z = F_z \,. \tag{2.42}$$

Не изменяется и ускорение. В этом легко убедиться, продифференцировав формулу сложения скоростей (2.34), учитывая при этом, что скорость $\vec{\upsilon}$ постоянна:

$$\frac{d\vec{U}'}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} \,.$$

Слева стоит ускорение тела в движущейся системе ($\vec{a}'$), справа – ускорение этого же тела в «неподвижной» системе ($\vec{a}$):

$$\vec{a}' = \vec{a} \,. \tag{2.43}$$

В проекциях:

$$a'_x = a_x;$$
$$a'_y = a_y;$$
$$a'_z = a_z \,. \tag{2.44}$$

Что касается массы, то классическая механика «априори» полагает, что эта величина остаётся неизменной в любой системе отсчёта.

Следовательно,

$$m' = m \,. \tag{2.45}$$

Мы видим, что при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе и силы взаимодействия, и ускорения, и масса не изменяются.

Следовательно, второй закон Ньютона в системе O' имеет вид

$$m'\vec{a}' = \vec{F}' \,, \tag{2.46}$$

полностью совпадающий с тем же законом в системе O.

Таким образом, мы доказали, что второй закон Ньютона инвариантен по отношению к преобразованиям Галилея.

Можно убедиться в том, что и другие соотношения механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея.

Так как уравнения механики имеют одинаковый вид в разных инерциальных системах, то все механические явления в этих системах должны протекать одинаковым образом. Иначе говоря, равномерное прямолинейное движение системы *не оказывает влияния на ход механических процессов* и его невозможно обнаружить из механических опытов. Так, находясь в каюте корабля, идущего равномерно и прямолинейно, мы не сможем, не выглянув в иллюминатор, не слыша гула работающей машины, определить, движется корабль или нет. Все механические процессы будут протекать в этом случае так, как если бы корабль был неподвижен.

Таким образом, *никакими механическими опытами, проведёнными в инерциальной системе отсчёта, невозможно установить, движется ли эта система равномерно и прямолинейно или покоится.* Такова одна из формулировок механического принципа относительности Галилея.

2.9. ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Пусть теперь одна из рассматриваемых нами систем, например движущаяся, *неинерциальна*; пусть ускорение этой системы относительно инерциальной равно $\vec{a}_0$.

Если ускорение тела в «неподвижной» системе равно $\vec{a}$, то в движущейся, неинерциальной системе оно будет отлично от $\vec{a}$. В самом деле, продифференцируем формулу сложения скоростей Галилея, полагая $\vec{\upsilon}$ переменной величиной:

$$\frac{d\vec{U}'}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} - \frac{d\upsilon}{dt}, \quad \text{или} \quad \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0, \qquad (2.47)$$

следовательно, $\vec{a}' \neq \vec{a}$.

Что же касается сил взаимодействия между телами, то при переходе от инерциальной системы к неинерциальной они остаются *неизменными*

$$\vec{F}' = \vec{F}.$$

Таким образом, несмотря на то что в обеих системах отсчёта (и в инерциальной, и в неинерциальной) на тело действует *одна и та же* сила, ускорение его относительно этих *систем* оказывается *разным*. В неинерциальной системе

$$\vec{F}' \neq m'\vec{a}' . \qquad (2.48)$$

Иными словами, в неинерциальных системах отсчёта нарушается прямо пропорциональная зависимость ускорения от действующей силы. *Наблюдаемые ускорения не «соответствуют» силам*! В неинерциальных системах перестаёт быть справедливым и принцип инерции: движение свободного тела в таких системах перестаёт быть равномерным и прямолинейным. Как быть? В принципе, мы могли бы при описании движения в неинерциальных системах отсчёта вообще отказаться от «обычной» механики Ньютона. Но тогда нам пришлось бы создавать для каждой неинерциальной системы «свою» механику, поскольку законы движения, установленные для одной неинерциальной системы, были бы несправедливы в другой.

Можно, однако, попытаться «приспособить» «обычную» механику к неинерциальным системам. Но при этом придётся отказаться от некоторых положений, лежащих в основе обычной механики.

В основе «обычной» механики, *механики инерциальных систем*, лежат два принципа:

1) *Ускорения тел обусловлены только силами* (при этом существует *однозначная* зависимость между этими величинами, определяемая вторым законом Ньютона).

2) *Силы обусловлены только взаимодействием тел друг с другом*.

Сохранить оба эти принципа в неинерциальных системах отсчёта невозможно.

Так, если мы постулируем, что *ускорения* в неинерциальных системах обусловлены *только силами*, то мы должны признать (если хотим на основе «обычных» законов Ньютона объяснить наблюдаемые факты), что *силы необязательно обусловлены взаимодействием тел друг с другом*.

Если же мы постулируем, что *силы* обусловлены только взаимодействием тел, то будем вынуждены отказаться от утверждения, что ускорения вызываются только силами.

Положим в основу механики неинерциальных систем первый принцип – *ускорения всегда обусловлены силами* и откажемся от второго. Тогда при описании движения в неинерциальных системах придётся вводить *дополнительные силы*, происхождение которых нельзя объяснить непосредственным действием на данное тело других тел. Появление этих сил обусловлено исключительно неинерциальностью выбранной системы отсчёта. Эти силы получили название *сил инерции*.

Сформулируем первый и второй законы Ньютона в неинерциальной системе отсчёта и отметим некоторые особенности сил инерции.

В неинерциальной системе отсчёта тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, если векторная сумма «обычных» сил, обусловленных взаимодействием, и сил инерции равна нулю:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0\,. \tag{2.49}$$

Ускорение, с которым тело движется относительно неинерциальной системы отсчёта, прямо пропорционально векторной сумме «обычных» сил и сил инерции, и обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a}\,' = \frac{\vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}}{m}\,, \tag{2.50}$$

где $\vec{F}$ – сумма сил, действующих на данное тело со стороны других тел; $\vec{F}_{\text{ин}}$ – сумма сил инерции.

Заменим $\vec{a}\,'$ в соответствии с формулой (2.47):

$$(\vec{a} - \vec{a}_0)m = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}\,,$$

откуда сила инерции

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0\,, \tag{2.51}$$

где $\vec{a}_0$ – ускорение, с которым неинерциальная система движется относительно инерциальной.

Таким образом, сила инерции *пропорциональна массе тела*, на которое она действует, и *ускорению*, с которым движется система отсчёта. Направление силы инерции *противоположно* направлению ускорения системы отсчёта.

Так как силы инерции не обусловлены взаимодействием тел, то к ним неприменим третий закон Ньютона. И ещё одна примечательная особенность характерна для сил инерции: в данной неинерциальной системе отсчёта *силы инерции сообщают всем телам одинаковые ускорения*. (Речь идёт о системах, движущихся поступательно)

Введение сил инерции вовсе не является принципиально необходимым. Любое движение можно рассматривать по отношению к инерциальной системе. Однако часто бывает проще описать движение по отношению к неинерциальной системе. В этом случае (и только в этом!) прибегают к силам инерции с тем, чтобы сохранить внешнюю форму законов движения. Проиллюстрируем сказанное простейшим примером.

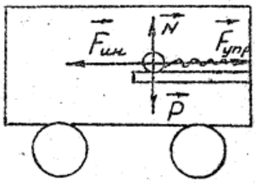


Рис. 2.7

Пусть неинерциальной системой отсчёта будет вагон ускоренно движущегося поезда. «Неподвижной» инерциальной системой отсчёта будем считать Землю (при этом, разумеется, мы на время «забудем» о том, что в действительности Земля вращается). В вагоне имеется гладкая горизонтальная полка, на которой лежит шар, скреплённый с передней стенкой вагона пружиной (рис. 2.7). При ускоренном движении вагона пружина будет растянута и на шар, кроме взаимно уравновешивающихся сил тяжести $\vec{P}$ и реакции опоры $\vec{N}$, будет действовать нескомпенсированная упругая сила растянутой пружины.

Опишем движение шара относительно инерциальной системы – Земли и относительно неинерциальной системы – вагона.

Относительно инерциальной системы – Земли шар движется *с ускорением* $\vec{a}$. Это ускорение шару сообщает упругая сила деформированной пружины. Всё происходит в полном согласии с законами динамики.

Относительно неинерциальной системы – вагона шар *покоится*, несмотря на то что на него действует упругая сила. Чтобы с позиций механики объяснить равновесие шара относительно вагона, мы вынуждены считать, что кроме упругой силы $\vec{F}$, обусловленной взаимодействием шара и пружины, на шар действует равная ей по величине и противоположная по направлению сила инерции $\vec{F}_{\text{ин}}$, которая и компенсирует действие силы $\vec{F}$:

$$\vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0 .$$

Таким образом, вводя силы инерции, мы имеем возможность описывать движение тел в неинерциальных системах отсчёта с помощью тех же уравнений движения, какими мы пользуемся при описании движения в инерциальных системах.

В заключение отметим, что мы указали на некоторые особенности сил инерции, действующих на тела в системах, движущихся поступательно.

В зависимости от характера движения неинерциальной системы отсчёта выражение сил инерции будет иметь разный вид. Так, например, во *вращающихся* системах отсчёта силы инерции зависят не только от массы тела, но и *от расстояния* от тела до центра вращения (такие силы инерции называются *центробежными*), а также *от скорости*, с которой тело движется относительно неинерциальной системы (эти силы инерции называются *кориолисовыми*).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вратарь, бросая мяч, действует на него с постоянной силой в течение 0,1 с. Рука его движется вперёд на расстояние 1 м. Масса мяча 600 г. Считая мяч материальной точкой, определить ускорение мяча и силу, действующую на него.

Решение. Выбираем ось x в направлении движения мяча. Тогда проекция вектора силы будет равна $F_x = ma_x$. Так как на мяч действует постоянная сила, а начальная скорость равна нулю, то уравнение движения имеет вид $x = \frac{a_x t^2}{2}$. Из этого выражения находим ускорение $a_x = \frac{2x}{t^2}$, а затем и силу $F_x = \frac{2mx}{t^2}$. Произведём вычисления: $a_x = \frac{2 \cdot 1}{0{,}1^2} = 200$ м/с^2; $F_x = \frac{2 \cdot 0{,}6 \cdot 1}{0{,}1^2} = 120$ Н.

Пример 2. На тело действует сила, пропорциональная времени $F = kt$. Найти уравнение движения тела при условии, что при $t = 0$ тело имеет начальную скорость υ_0.

Решение. Запишем второй закон динамики в виде $F = m\frac{d\upsilon}{dt}$. По условию $F = kt$. Приравняем правые части $m\frac{d\upsilon}{dt} = kt$, откуда $d\upsilon = \frac{k}{m}tdt$. Проинтегрируем последнее выражение $\upsilon = \frac{k}{m}\left(\frac{t^2}{2} + C\right)$.

Найдём постоянную интегрирования. При $t = 0$ $\upsilon_0 = \frac{k}{m}C$, $C = \frac{m}{k}\upsilon_0$, тогда $\upsilon = \upsilon_0 + \frac{k}{2m}t^2 = \frac{dx}{dt}$. Из этого выражения

$$dx = \upsilon_0 dt + \frac{k}{2m}t^2 dt\ ;$$

интегрируя от 0 до t, имеем

$$x = \upsilon_0 t + \frac{k}{6m}t^3\ .$$

Пример 3. Два шара массами $m_1 = 2{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг движутся друг другу навстречу со скоростями $\upsilon_1 = 6$ м/с и $\upsilon_2 = 2$ м/с. Определить скорость шаров после неупругого прямого удара.

Решение. Неупругие шары не восстанавливают после удара свою первоначальную форму. Следовательно, не возникают силы, способные оттолкнуть шары друг от друга. Это приводит к тому, что шары после удара движутся совместно с одинаковой скоростью u. Определим эту скорость по закону сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u} \ .$$

В проекции на ось x с учётом направления движения шаров

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u \ ,$$

откуда $u = \dfrac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$.

После подстановки данных получим

$$u = \frac{2{,}5 \cdot 6 - 1{,}5 \cdot 2}{2{,}5 + 1{,}5} = 3 \text{ м/с.}$$

Пример 4. Вычислить дополнительную силу трения между колёсами автомобиля и дорогой, необходимую для движения его под вертикальным дождём со скоростью 12 м/с. Масса дождевой капли $m = 0{,}1$ г. Ежесекундно на 1 м^2 поверхности автомобиля падает $a = 3 \cdot 10^4$ капель дождя. Поверхность автомобиля, смачиваемая дождём, равна $S = 8$ м^2.

Решение. В применении к дождевым каплям изменение их количества движения равно

$$Md\upsilon = M\,(\upsilon_2 - \upsilon_1) \ ,$$

где υ_1 – скорость капли в момент удара о крышу (при вертикальном падении проекция скорости υ_1 на направление движения автомобиля равна нулю); υ_2 – конечная скорость капли (горизонтальная, равная скорости автомобиля υ).

Общая масса капель, падающих на автомобиль, равна $M = aSm\Delta t$.

Изменение количества движения капель $Md\upsilon = M\upsilon = aSm\Delta t\upsilon$ равно импульсу силы, действующей на автомобиль, которую можно принять равной силе трения, т.е. $F\Delta t = aSm\Delta t\upsilon$, откуда $F = maS\upsilon$.

После подстановки данных имеем

$$F = 0{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{4} \cdot 8 \cdot 12 = 288 \text{ Н.}$$

Пример 5. Ракета, масса которой в начальный момент $m_0 = 1{,}5$ кг, запущена вертикально вверх. Определить ускорение, с которым движется ракета через $t = 5$ с после старта, если скорость расхода горючего $\mu = 0{,}2$ кг/с, а относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 80$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Запишем уравнение Мещерского в общепринятом виде

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F + u\frac{dm}{dt},$$

где $m = m_0 - \mu t$ – масса ракеты в момент времени t; $\frac{d\upsilon}{dt} = a$ – ускорение ракеты, которое определяется результирующей внешних сил F и реактивных сил $f_{\text{р}} = u\frac{dm}{dt}$ (u – скорость продуктов сгорания, $\frac{dm}{dt} = \mu$ – расход горючего).

Тогда уравнение Мещерского примет вид

$$(m_0 - \mu t)\,a = F - u\mu,$$

здесь внешняя сила $F = (m_0 - \mu t)\,g$ – сила тяжести, действующая на ракету в момент t.

Получаем, что $a = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t} + g$; $a = –22{,}2$ м/с^2.

Пример 6. Определить жёсткость системы двух пружин при последовательном и параллельном их соединении (рис. 1). Жёсткость пружин $k_1 = 2 \cdot 10^3$ Н/м и $k_2 = 6 \cdot 10^3$ Н/м.

Решение: *а*) Рассмотрим случай последовательного соединения пружин. На каждую из них вдоль оси действует одна и та же сила F.

Деформации, полученные пружинами, будут в соответствии с законом Гука равны: для первой пружины $\Delta x_1 = \frac{F}{k_1}$, для второй – $\Delta x_2 = \frac{F}{k_2}$. Для системы пружин как одного целого применим закон Гука в виде $F = k\Delta x$, где k – жёсткость системы двух пружин; Δx – их результирующая деформация.

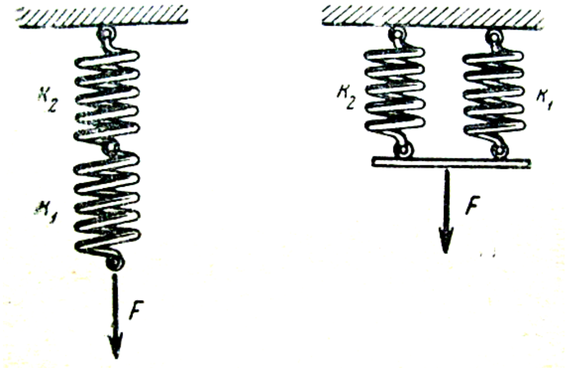


Рис. 1

Заменим Δx через Δx_1 и Δx_2, т.е.

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \quad \text{или} \quad \frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Таким образом, коэффициент жёсткости системы двух последовательно соединённых пружин равен $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

Подставляя числовые значения, получим

$$k = \frac{(2\cdot 10^3)\cdot(6\cdot 10^3)}{2\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3} = 1{,}5\cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

б) Рассмотрим параллельное соединение пружин.

В этом случае силу F можно рассматривать как равнодействующую двух параллельных сил F_1 и F_2, действующих на каждую из пружин. Под действием этих сил пружины получают одинаковую деформацию $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$. С учётом замечаний имеем $F = F_1 + F_2$ или $k\Delta x = k_1\Delta x + k_2\Delta x$, откуда $k = k_1 + k_2$.

Подставив числовые значения жёсткости, получим

$$k = 2\cdot 10^3 + 6\cdot 10^3 = 8\cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

Пример 7. Для осуществления телевизионной связи необходимо иметь спутник, вращающийся по круговой орбите в плоскости экватора с запада на восток. Определить работу, необходимую для вывода на орбиту радиусом $R_{\text{орб}} = 4{,}23 \cdot 10^7$ м спутника массой $m = 2 \cdot 10^3$ кг, если его линейная скорость на орбите $\upsilon_{\text{орб}} = 3{,}08 \cdot 10^3$ м/с, а период обращения $T = 24$ ч.

Решение. Эта работа будет состоять из работы по преодолению силы тяжести и работы, необходимой для изменения кинетической энергии спутника, т.е.

$$A = A_{\text{тяг}} + \Delta E_{\text{к}} .$$

Работа силы, направленной против силы тяготения, на элементарном перемещении вдоль радиуса Земли равна

$$dA = \gamma \frac{mM_{\text{З}}}{r^2} dr .$$

При поднятии спутника с поверхности Земли ($R_{\text{З}}$) до высоты, определяемой радиусом орбиты ($R_{\text{орб}}$), будет проделана работа

$$A_{\text{тяг}} = \int\limits_{R_{\text{З}}}^{R_{\text{орб}}} \frac{\gamma m M_{\text{З}}}{r^2} dr = \gamma m M_{\text{З}} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{R_{\text{З}}}^{R_{\text{орб}}} = \gamma m M_{\text{З}} \frac{R_{\text{орб}} - R_{\text{З}}}{R_{\text{орб}} R_{\text{З}}} .$$

Подставив числовые значения, получим

$$A_{\text{тяг}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 5{,}96 \cdot 10^{24} \frac{4{,}23 \cdot 10^7 - 6{,}37 \cdot 10^6}{6{,}37 \cdot 10^6 \cdot 4{,}23 \cdot 10^7} = 10{,}6 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

Работа по изменению кинетической энергии будет равна разности их значений на высоте орбиты – $E_{\text{орб}}$ и на поверхности Земли – $E_{\text{З}}$, т.е.

$$A = \Delta E_{\text{к}} = E_{\text{орб}} - E_{\text{З}} = \frac{m\upsilon_{\text{орб}}^2}{2} - \frac{m\upsilon_{\text{З}}^3}{2} = \frac{m}{2} \left(\upsilon_{\text{орб}}^2 - \frac{4\pi^2 R_{\text{З}}^2}{T^2} \right).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{2 \cdot 10^3}{2} \left[(3{,}08 \cdot 10^3)^2 - \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2}{(24 \cdot 3600)^2} \right] = 0{,}93 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

Таким образом, полная работа по выведению спутника на орбиту будет равна

$$A = A_{\text{тяг}} + \Delta E_{\text{к}} = 10{,}6 \cdot 10^{10} + 0{,}93 \cdot 10^{10} = 11{,}53 \cdot 10^{10} \text{ Дж.}$$

Пример 8. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы забросить тело на Луну? Считать, что в процессе движения взаимное положение Луны и Земли не меняется.

Решение. В процессе перемещения тела на него первоначально действуют две силы тяготения: со стороны Земли – $F_З$ и со стороны Луны – $F_Л$. Затем, по мере приближения к Луне, найдётся такая точка, в которой результирующая сил тяготения будет равна нулю. После этого тело будет перемещаться под действием притяжения со стороны Луны. Поэтому минимальной работой, которую нужно совершить на Земле, будет работа по перемещению тела с поверхности Земли в точку, где результирующая сила тяготения равна нулю, т.е.

$$A = \int_{R_З}^{r_0} (F_З - F_Л)\,dr = -\gamma m \int_{R_З}^{r_0} \left[\frac{M_З}{r^2} - \frac{M_Л}{(H-r)^2} \right] dr\ ,$$

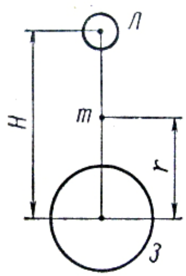


Рис. 2

где r_0 – расстояние от центра Земли до точки, в которой результирующая сил тяготения равна нулю; H – расстояние между центрами Земли и Луны; $m, M_З, M_Л$ – соответственно массы тела, Земли и Луны; γ – гравитационная постоянная; r – расстояние от центра Земли до точки, в которой находится тело (рис. 2).

Проинтегрировав, получим

$$A = -\gamma m \left(\frac{M_З}{r_0} - \frac{M_З}{R_З} + \frac{M_Л}{H - R_З} - \frac{M_Л}{H - r_0} \right),$$

где r_0 находится из условия $\dfrac{\gamma m M_З}{r_0^2} = \dfrac{\gamma m M_Л}{(H - r_0)^2}$ и равно

$$r_0 = \frac{M_З - \sqrt{M_З M_Л}}{M_З - M_Л} H\ .$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое сила? В чём проявляется статическое и динамическое действие силы?
2. Какое тело называют свободным?
3. Какая система отсчёта называется инерциальной?

4. Сформулируйте первый закон Ньютона.
5. Приведите все известные вам формулировки второго закона Ньютона.
6. Что такое импульс тела и что такое импульс силы?
7. Что такое масса?
8. Что такое инерция? (разъяснить на конкретном примере).
9. Сформулируйте третий закон Ньютона.
10. Что такое сила тяжести и вес тела?
11. Что такое невесомость?
12. Какие априорные положения лежат в основе преобразований Галилея?
13. Сформулируйте принцип относительности Галилея.
14. Сформулируйте первый и второй законы Ньютона для неинерциальной системы.
15. Дайте характеристику силам инерции.

3. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

3.1. ПОНЯТИЕ ОБ ЭНЕРГИИ

Опыт показывает, что различные формы движения материи способны к *взаимным превращениям*. Так, упорядоченное механическое движение может превратиться в хаотическое молекулярное движение, электромагнитное движение может превратиться в механическое и т.д.

Опытом установлено, что все взаимные превращения различных форм движения материи происходят в строго определённых *количественных соотношениях*. Движение бесследно не исчезает. «Исчезновение» одной формы движения всегда сопровождается «возникновением» эквивалентного количества движения другой формы – подтверждается одно из основных положений материалистической философии – положение о *неучтожимости движения*.

Изучение закономерностей превращения одних форм движения в другие с *количественной точки зрения* убеждает в том, что должна объективно существовать *единая мера* различных форм движения материи, *одинаковая для всех форм движения и типов взаимодействия*. Причём эта мера должна характеризовать *любую* форму движения (в том числе и механическое движение!) с точки зрения *принципиальных возможностей превращения данной формы движения в другую*.

Может ли служить такой универсальной мерой импульс $m\vec{\upsilon}$, введённый нами при изучении механического движения? Нетрудно убедиться, что эта величина не может служить такой мерой.

Действительно, представим движение с трением. Если тело движется равномерно и прямолинейно, то его скорость, а, стало быть, и импульс не изменяются ни по величине, ни по направлению. Значит ли это, что механическое движение данного тела не передаётся в процессе перемещения окружающим телам, не превращается в качественно новые формы движения? Нет, не значит. Опыт показывает, что при движении с трением всегда происходит превращение упорядочного механического движения в неупорядочное молекулярное движение (доказательством этого превращения служит увеличение интенсивности движения атомов и молекул соприкасающихся тел, о чём мы судим по нагреванию тел).

Следовательно, импульс тела никак не характеризует ту часть механического движения, которая превращается в другие виды.

Импульс может служить мерой лишь той части механического (не любого, а именно *механического*) движения, которая в процессе взаимодействия сохраняется в *механической форме*. Иначе говоря, величина $m\vec{\upsilon}$ определяет, какое количество механического движения не «способно» в рамках данной системы отсчёта к превращению в другие виды движения. Поиски *такой* всеобщей меры, посредством которой можно было бы измерить различные формы движения и взаимодействия, привели к открытию одного из важнейших физических понятий – понятия *энергии* и одного из самых фундаментальных законов природы – *закона сохранения и превращения энергии*.

Состояние тела или системы тел, частиц и т.д. определяется рядом физических величин, называемых *параметрами состояния*. Параметры состояния характеризуют некоторые *существенные свойства* системы.

Значения параметров состояния в рассматриваемые моменты времени определяются из уравнений, описывающих *процессы*, происходящие в системе. Сравнение параметров состояния для различных моментов времени даёт возможность видеть, насколько быстро протекает во времени тот или иной процесс.

Перечислим некоторые физические величины, являющиеся параметрами состояния.

Мы уже отмечали, что механическое состояние материальной точки определяется координатами (x, y, z) и проекциями вектора скорости на координатные оси $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$; так называемое термодинамическое состояние системы определяется молярным объёмом V, давлением p и абсолютной температурой T, состояние электромагнитного поля – векторами напряжённости $\vec{E}$ и индукции $\vec{B}$ (точнее, их проекциями на координатные оси: $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$).

Энергия, как единая мера различных форм движения материи, представляет собой физическую величину, *зависящую от параметров состояния* системы.

Энергия (в широком смысле слова) – *единая мера различных форм движения и типов взаимодействия материальных объектов*, являющаяся однозначной, непрерывной, конечной, дифференцируемой функцией параметров состояния системы:

$$E = E(x,\, y,\, z,\, \upsilon_x,\, \upsilon_y,\, \upsilon_z\,,\, p\,,\, V\,,\, T\,,\, E_x,\, E_y,\, E_z,\, B_x,\, B_y,\, B_z)\,. \quad (3.1)$$

В любой системе могут происходить изменения, обусловленные *участием системы в различных формах движения* (в системах могут происходить, например механические перемещения тел, различные молекулярные, электромагнитные, ядерные и другие процессы). Обычно изменения, обусловленные различными формами движения, рассматривают раздельно. В связи с этим разумно и энергию, определяемую соотношением (3.1), рассматривать «по частям», иначе говоря, *каждой форме движения приписывать определённый вид энергии*. Энергию, зависящую от параметров механического состояния, называют *механической*; энергию, зависящую от параметров термодинамического состояния, – *внутренней* и т.д.

Обратим внимание на то, что механическая энергия зависит от двух векторных параметров: параметра $\vec{r}$, определяющего *положение* тела относительно другого тела, с которым оно взаимодействует, и параметра $\vec{\upsilon}$, определяющего *интенсивность движения* тела в пространстве:

$$E = E\,(\vec{r}\,, \vec{\upsilon}\,). \quad (3.2)$$

Представляется возможным разбить механическую энергию на два слагаемых, каждое из которых зависит только от одного параметра:

$$E\,(\vec{r}\,, \vec{\upsilon}\,) = E\,(\vec{r}\,) + E\,(\vec{\upsilon}\,). \quad (3.3)$$

Часть механической энергии, зависящая от скорости движения тела в пространстве, называется кинетической энергией:

$$E(\vec{\upsilon}) = E_{\text{к}}\,. \quad (3.4)$$

Часть механической энергии, зависящая от относительного расположения взаимодействующих тел или их частей, называется потенциальной энергией:

$$E(\vec{r}) = E_{\text{п}}\,. \quad (3.5)$$

Изменение любого вида энергии, передача её от одних материальных объектов к другим происходит в процессе *взаимодействия*.

Изменение энергии системы означает изменение её движения, изменение её параметров состояния.

Существуют два принципиально различных способа изменения энергии. Один из них называется *работой*, другой – *теплопередачей*.

Роль этих способов в изменении разных видов энергии неодинакова.

Внутренняя энергия, например, может изменяться и за счёт работы, и за счёт теплопередачи. Механическая же энергия макроскопических тел может изменяться *только за счёт работы*.

Поскольку мы рассматриваем пока закономерности механической формы движения, обратимся к более подробному рассмотрению механической энергии и работы.

3.2. МЕХАНИЧЕСКАЯ РАБОТА

Работа представляет собой *процесс*, связанный с *упорядоченными перемещениями* взаимодействующих макроскопических тел. Это процесс, в ходе которого *изменяются параметры состояния тела или системы*. Это процесс передачи движения, *передачи энергии* от одного тела к другому («вода, падая на лопасти гидротурбины, совершает работу» – это лишь иной способ сказать, что вода передаёт своё движение, свою энергию лопастям и валу турбины). Это процесс, в ходе которого происходит *превращение одного вида энергии в другой*.

Подчеркнём: *превращение одного вида энергии в другой*, одной формы движения в другую – важнейший *признак работы*. Когда мы говорим, что при движении автомобиля силы трения совершают работу, то это снова лишь иной способ сказать, что энергия движения автомобиля *как целого*, т.е. его механическая энергия, превращается в энергию беспорядочного молекулярного движения – во внутреннюю энергию.

Наконец, можно сказать, что работа – это *пространственная характеристика действия силы*.

Для того чтобы совершалась работа, необходимо, чтобы на тело действовала сила, вызывающая либо перемещение тела как целого, либо смещение отдельных его частей.

Численное значение элементарной работы равно произведению силы на перемещение точки приложения силы и на косинус угла между направлением действия силы и направлением перемещения:

$$dA = F dr \cos\alpha . \qquad (3.6)$$

Записанная формула представляет собой количественное *определение работы*. Именно эта, а не какая-либо другая величина, оказывается однозначно связанной с функцией параметров состояния – энергией.

Из векторной алгебры известно, что величина $Fdr\cos\alpha$ есть численное значение скалярного произведения вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$: $Fdr\cos\alpha = \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Следовательно, численное значение работы равно *скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения*:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} . \tag{3.7}$$

Произведение $F\cos\alpha$ можно рассматривать как проекцию вектора силы на направление перемещения (рис. 3.1):

$$F\cos\alpha = F_r .$$

Тогда

$$dA = F_r dr . \tag{3.8}$$

Можно спроектировать вектор перемещения на направление силы: $dr\cos\alpha = dr_F$.

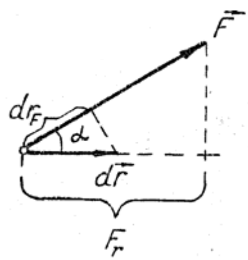


Рис. 3.1

В этом случае

$$dA = Fdr_F . \tag{3.9}$$

Формула (3.6) позволяет вычислить работу, совершаемую силой на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$. Бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ по абсолютной величине равно бесконечно малой длине пути dS . Поэтому уравнение (3.6) можно переписать в форме

$$dA = FdS\cos\alpha = F_S dS . \tag{3.10}$$

Формулы (3.6) – (3.10) – *дифференциальные*. Они справедливы и для постоянных, и для переменных сил. Чтобы вычислить работу, совершаемую *переменной* силой на конечном произвольном пути S_{12}, надо сначала рассчитать работу на каждом из бесконечно малых участков dS этого пути, а затем сложить все элементарные работы. Это суммирование сведётся к интегрированию:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{S_{12}} FdS\cos\alpha . \tag{3.11}$$

Если величина и направление силы не изменяются, а движение происходит по прямолинейному пути, то интегрирование приведёт к простой формуле

$$A_{12} = F_S S = FS\cos\alpha\,. \tag{3.12}$$

Работа – величина *алгебраическая*. Это означает, что она может быть и положительной, и отрицательной. Если $0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($\cos\alpha > 0$), то работа, совершаемая силой, положительна (силу, совершающую положительную работу, иногда называют движущей). Если $\frac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$ ($\cos\alpha < 0$), то работа силы отрицательна (такую силу называют силой *сопротивления*).

Сила, действующая на тело, не совершает работы, если:

а) тело покоится ($dS = 0$);

б) направление силы перпендикулярно направлению перемещения ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\cos\alpha = 0$).

Так, если человек стоит с тяжёлым грузом в руках, то, несмотря на напряжение мышц, он не совершает механической работы. Более того, он не совершит работы, если перенесёт этот груз на некоторое расстояние по *горизонтальному* пути. Мы видим, что понятие работы в механике значительно уже нашего обыденного представления о ней. Не всякое усилие и не всякая деятельность есть «работа» в механическом смысле.

Если на тело действует несколько сил, то из принципа независимости действия сил вытекает, что работа равнодействующей силы (полная работа) равна алгебраической сумме работ всех составляющих сил:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n)\cdot d\vec{r} = \vec{F}_1\cdot d\vec{r} + \vec{F}_2\cdot d\vec{r} + \ldots + \vec{F}_n\cdot d\vec{r} =$$
$$= dA_1 + dA_2 + \ldots + dA_n\,. \tag{3.13}$$

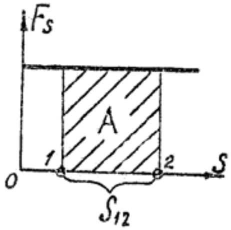


Рис. 3.2

Работа может быть представлена графически на диаграмме $F_S - S$. Вдоль оси абсцисс откладывается путь, вдоль оси ординат – проекция силы на направление пути. Если проекция силы на направление S постоянна ($F_S = \text{const}$), то графиком её будет прямая, параллельная оси S (рис. 3.2), а работа, совершённая силой на пути S_{12} (она равна в этом случае

$A_{12} = F_S S_{12}$), изобразится площадью *прямоугольника*, покрытого штриховкой.

Если проекция силы на направление S изменяется, графиком F_S будет некоторая кривая (рис. 3.3). Работа в этом случае изобразится площадью криволинейной трапеции (она будет равна интегральной сумме бесконечно узких полосок, изображающих элементарные работы на отдельных малых перемещениях): $A_{12} = \int\limits_1^2 F_S dS$.

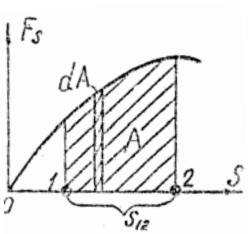


Рис. 3.3

Для характеристики *быстроты* совершения работы вводится величина, называемая *мощностью*.

Мощностью называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой за единицу времени.

Введём понятия:

– средней мощности

$$N_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}; \tag{3.14}$$

– мгновенной мощности

$$N = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \tag{3.15}$$

Выразим элементарную работу через силу и перемещение $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ и подставим в формулу мощности $N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt}$, но $\frac{d\vec{r}}{dt}$ есть мгновенная скорость движения $\vec{\upsilon}$. Следовательно, мгновенная мощность оказывается равной скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на вектор скорости $\vec{\upsilon}$:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon},$$

или

$$N = F\upsilon \cos\alpha. \tag{3.16}$$

Единицей работы в системе СИ является *джоуль*. Джоуль (Дж) – это работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения): 1 Дж = 1 Н · 1 м.

Единица мощности в системе СИ – ватт. Ватт (Вт) – это такая мощность, при которой совершается работа в 1 Дж за 1 с.

Распространённой внесистемной единицей работы является килограммометр (кГм). Соответствующая единица мощности – кГм/с.

3.3. РАБОТА И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Покажем теперь, что работа силы, действующей на тело, однозначно связана с *изменением энергии* этого тела.

Пусть на тело, движущееся в горизонтальной плоскости *без трения*, в течение некоторого времени действовала переменная сила, которая изменила скорость этого тела от υ_1 до υ_2, причём во время движения тело не выходило из указанной горизонтальной плоскости (это ограничение означает, что высота тела над поверхностью Земли остаётся неизменной).

Выясним, на что затрачивается работа этой силы.

Подсчитаем сначала работу, совершаемую силой на бесконечно малом отрезке пути dS (рис. 3.4). Согласно (3.10) она равна $dA = F_S dS$, где F_S (или F_τ) – касательная составляющая силы. Касательная составляющая силы сообщает телу тангенциальное ускорение a_S. По второму закону Ньютона $F_S = ma_S$ (в скалярном виде).

Мы знаем, что численное значение тангенциального ускорения равно производной от скорости по времени: $a_S = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, тогда

$$dA = m\frac{d\upsilon}{dt}dS .$$

Но $\dfrac{dS}{dt} = \upsilon$ есть численное значение скорости в произвольный момент времени *t*. Следовательно:

$$dA = m\upsilon d\upsilon . \qquad (3.17)$$

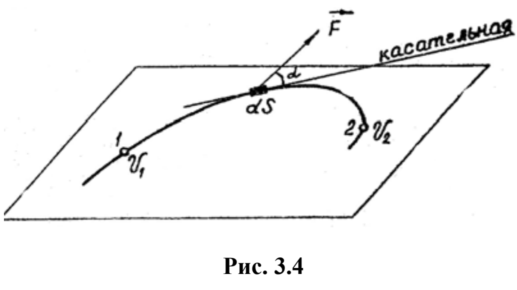


Рис. 3.4

Чтобы найти полную работу, совершаемую силой на всём пути от точки *1* (начальное состояние) до точки *2* (конечное состояние), надо сложить все элементарные работы, т.е. проинтегрировать выражение (3.17):

$$\int_1^2 dA = \int_1^2 m\upsilon d\upsilon .$$

Начальное состояние характеризуется скоростью υ_1, конечное – υ_2, поэтому пределы интегрирования 1 – 2 можно представить как $\upsilon_1 - \upsilon_2$:

$$A_{12} = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{2}\Bigg|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} . \qquad (3.18)$$

Мы видим, что работа силы, изменяющей *величину* скорости тела, равна *разности* двух значений физической величины $\frac{m\upsilon^2}{2} + C$, где C – некоторая произвольная постоянная. Величина $\frac{m\upsilon^2}{2} + C$ является *функцией состояния* тела, так как её изменение *не зависит от пути перехода* тела из начального состояния *1* в конечное состояние *2*, от способов, посредством которых достигнуто изменение скорости от значения υ_1 до значения υ_2. Иными словами, изменение этой величины не зависит от того, каковы были промежуточные состояния, быстро или медленно изменялась скорость тела, какая сила – постоянная или переменная – действовала на него, по какой траектории – прямолинейной или криволинейной – происходило движение и т.д. Если скорость тела массой m изменилась от υ_1 до υ_2, то это значит, что силы, действующие на тело, совершили за это время работу, величина и знак которой определяются разностью $\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$. По изменению величины $\frac{m\upsilon^2}{2} + C$ можно судить о величине произведённой работы и, наоборот, по совершённой работе можно судить об изменении величины $\frac{m\upsilon^2}{2} + C$.

Функцию механического состояния, зависящую от скорости движения тела, называют *кинетической энергией*:

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + C = E_к . \qquad (3.19)$$

Константа C должна быть определена. Из физических соображений ясно, что кинетическая энергия равна *нулю*, если равна нулю скорость тела υ. Отсюда следует, что $C = 0$. Следовательно,

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (3.20)$$

Используя введённое обозначение, соотношение (3.18) можно переписать:

$$E_{к2} - E_{к1} = A_{12}, \qquad (3.21)$$

где $E_{к1}$ – кинетическая энергия тела в начальном состоянии; $E_{к2}$ – кинетическая энергия тела в конечном состоянии; A_{12} – работа, совершаемая силой, действующей на тело, в процессе перехода его из начального состояния в конечное.

Обозначим $E_{к2} - E_{к1} = \Delta E_к$, тогда

$$\Delta E_к = A_{12}. \qquad (3.22)$$

В общем случае изменение скорости тела может быть обусловлено совместным действием *нескольких сил*. В этом случае под A_{12} в выражении (3.22) следует понимать *алгебраическую сумму работ*, совершаемых всеми силами:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} (A_i)_{12}. \qquad (3.23)$$

Если скорость изменяется на бесконечно малую величину, то

$$dE_к = dA. \qquad (3.24)$$

Таким образом, *приращение кинетической энергии тела при его переходе из одного состояния в другое равно алгебраической сумме работ*, *совершаемых всеми силами*, *действующими на него в процессе этого перехода*. Это утверждение носит название *теоремы об изменении кинетической энергии*, а соотношения (3.22) и (3.24) есть математические выражения (интегральное и дифференциальное) этой теоремы.

Из формулы (3.22) видно, что если работа силы, действующей на тело, *положительна*, то кинетическая энергия тела *возрастает* ($\Delta E_к > 0$), тело получает энергию от тех тел, которые являются «источником» силы, если эта работа *отрицательна*, то энергия *уменьшается* ($\Delta E_к < 0$), тело *отдаёт* энергию окружающим телам.

Обладая кинетической энергией, тело способно совершить работу, т.е. способно отдать эту энергию другим телам – заставить их двигаться, изменять скорость, деформироваться и т.д. В этом смысле говорят об энергии как о *способности тела совершать работу*. Максимум работы, которую может совершить тело в данной системе отсчёта благодаря тому, что оно перемещается, обладает скоростью, определяется запасом его кинетической энергии, т.е. величиной $\frac{m\upsilon^2}{2}$.

3.4. РАБОТА И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Энергией тело обладает не только тогда, когда оно перемещается в пространстве, но и тогда, когда оно *взаимодействует* с другими телами. Силы взаимодействия, в принципе, могут вызывать перемещение тела, и тогда оно оказывается способным отдать своё движение другим телам, – иными словами, совершить работу. Но пока тело «неподвижно», его движение (энергия) внешне никак не проявляется, оно существует «скрыто», «втуне», поэтому можно говорить лишь о *потенциальных возможностях* этого тела передать свою энергию другим телам.

Энергию, которой обладает тело вследствие того, что оно взаимодействует с другими телами, и зависящую от взаимного расположения тел или их частей, называют *потенциальной*.

Потенциальной энергией обладает, например тело, поднятое над Землёй, сжатая или растянутая пружина, заряженное тело, находящееся в электростатическом поле, и т.д. Следует, однако, подчеркнуть, что не всякое состояние и не всякое взаимодействие можно характеризовать потенциальной энергией. Состояние взаимодействующих тел можно характеризовать потенциальной энергией, если между ними действуют силы, величина и направление которых зависят только от *относительного расположения* тел (от координат) и не зависит от величины и направления скорости, иными словами, если эти силы *не зависят от времени* и не являются следствием движения. Мы убедимся в последующем, что таковыми являются, например силы тяготения (тяжести), упругие силы, силы электростатического взаимодействия зарядов.

Найдём работу, которую совершает сила тяжести, действующая на некоторое тело при его перемещении по произвольному пути из точки *1*, находящейся на высоте h_1 над поверхностью Земли, в точку *2*, находящуюся на высоте h_2 (рис. 3.5). Перемещение может осуществляться как угодно – с постоянной или переменной скоростью – это не скажется на величине работы, совершаемой силой тяжести. Элемен-

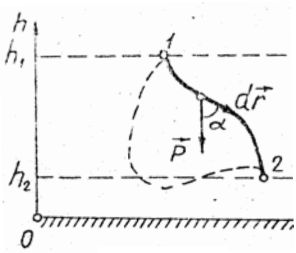


Рис. 3.5

тарная работа, совершаемая силой тяжести на бесконечно малом перемещении $d\vec{r}$, равна

$$dA = Pdr\cos\alpha . \qquad (3.25)$$

Полная работа

$$A_{12} = \int_1^2 Pdr\cos\alpha .$$

Так как величина и направление силы тяжести в любой точке траектории остаются неизменными (что справедливо в случае, когда масштабы перемещения значительно меньше радиуса Земли: $h_1 << R_З$, $h_2 << R_З$), то её можно вынести из-под знака интеграла:

$$A_{12} = P\int_1^2 dr\cos\alpha .$$

Произведение $dr\cos\alpha$ есть проекция вектора перемещения $d\vec{r}$ на направление h. Эта проекция *отрицательна* (так как направление оси h и направление вектора $d\vec{r}$ образуют *тупой угол*):

$$dr\cos\alpha = -dh .$$

Таким образом,

$$A_{12} = P\int_{h_1}^{h_2} -dh = -Ph\Big|_{h_1}^{h_2} = Ph_1 - Ph_2 = mgh_1 - mgh_2 . \qquad (3.25)$$

Работа, совершаемая силой тяжести при изменении высоты тела *над поверхностью Земли*, *зависит только от начального и конечного положений* тела относительно Земли и не зависит от формы пути, по которому происходило перемещение из начальной точки *1* в конечную точку *2*. Это значит, что если бы движение происходило по другой траектории, например по траектории, изображённой на рис. 3.5 пунктиром, то работа силы тяжести всё равно была бы равна разности $mgh_1 - mgh_2$.

Силы, работа которых *не зависит от формы пути*, называются *консервативными*.

Силы, работа которых *зависит от формы пути*, называются *неконсервативными*.

Сила тяжести является, следовательно, консервативной силой.

Каждое из слагаемых выражения (3.25) должно быть представлено в виде $mgh + C$.

Величина $mgh + C$ является *функцией состояния* взаимодействующих тел (тела массы m и Земли). Она является таковой потому, что её изменение не зависит от промежуточных состояний, от пути перехода тела из начального положения в конечное.

Следовательно, величину $mgh + C$ мы вправе назвать потенциальной энергией поднятого над Землёй тела:

$$E_{\text{п}} = mgh + C\,. \tag{3.26}$$

Численное значение потенциальной энергии может быть определено лишь с точностью до некоторой произвольной постоянной C. Величина этой константы зависит от начала отсчёта координат (в нашем случае от начала отсчёта высоты h) и от выбора так называемого *нулевого уровня потенциальной энергии*.

Выбор нулевого уровня потенциальной энергии – это выбор точки или уровня (поверхности), где *потенциальная энергия тела условно полагается равной нулю*.

Выбор начала отсчёта координат произволен. Столь же произволен и выбор нулевого уровня потенциальной энергии. В принципе, его можно выбирать где угодно. Однако, практически этот уровень стремятся выбрать так, чтобы константа C обратилась в *нуль*.

Условимся в случае поднятого над Землёй тела высоты отсчитывать от поверхности Земли, а потенциальную энергию тела считать равной нулю, когда оно лежит на этой поверхности, т.е. на высоте $h = 0$. Подставив в (3.26) $E_{\text{п}} = 0$ и $h = 0$, найдём, что $C = 0$.

При таком выборе нулевого уровня потенциальная энергия тела, поднятого на высоту h, равна

$$E_{\text{п}} = mgh \tag{3.27}$$

(формула верна для высоты $h \ll R_{\text{З}}$, где $R_{\text{З}}$ – радиус Земли).

Неопределённость численного значения потенциальной энергии не имеет принципиального значения, поскольку мы всегда имеем дело не с самой энергией, а с её *изменениями*. При нахождении разности энергий произвольная постоянная *исключается*.

Потенциальная энергия может иметь как *положительное*, так и *отрицательное* численные значения.

Потенциальная энергия тела *отрицательна*, если при его перемещении из данной точки на нулевой уровень консервативные силы,

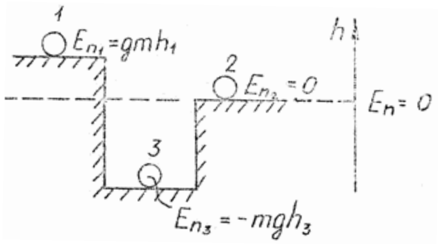


Рис. 3.6

действующие на него, совершают *отрицательную работу*. Рисунок 3.6 поясняет это.

Говоря об энергии – и кинетической, и потенциальной, следует иметь в виду, что энергия всегда характеризует *систему*, состоящую, по крайней мере, из двух тел, ибо лишено смысла говорить о движении или взаимодействии данного тела, если не указано другое тело, относительно которого данное тело движется или с которым оно взаимодействует.

Итак, мы можем записать окончательно:

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2} = -\Delta E_п . \tag{3.28}$$

Работа, совершаемая силой тяжести при изменении относительного расположения тела и Земли, равна убыли потенциальной энергии этой системы.

Если сила тяжести совершает *положительную* работу ($A_{12} > 0$), то потенциальная энергия тела *уменьшается* ($E_{п2} < E_{п1}$). В этом случае говорят, что тело совершает работу за счёт убыли потенциальной энергии.

При изменении высоты тела над поверхностью Земли на бесконечно малую величину dh :

$$dA = -dE . \tag{3.29}$$

Мы рассмотрели потенциальную энергию, зависящую от взаимного расположения различных *макроскопических* тел.

Рассмотрим теперь потенциальную энергию, зависящую от взаимного расположения частей одного и того же тела.

В качестве такого тела рассмотрим упругую пружину.

Опыт показывает: для того чтобы сжать (или растянуть) пружину, необходимо приложить внешнюю силу. Эта внешняя сила в процессе деформации пружины совершает работу. В результате потенциальная энергия пружины увеличивается.

Освобождённая от внешнего воздействия пружина восстанавливает свою форму. При этом потенциальная энергия, запасённая пружиной в процессе деформации, превращается в другие виды энергии. Мерой энергии, превратившейся в другие виды, является величина работы, совершённой упругой силой. Вычислим работу, которую совершает упругая сила, при изменении удлинения (деформации) пружины от величины x_1 до величины x_2 ($x_1 < x_2$). Вычислим сначала работу на бесконечно малом перемещении dx (так как упругая сила – величина переменная)

$$dA = F_x dx,$$

где F_x – проекция упругой силы на ось x.

По закону Гука $F_x = -kx$. Следовательно,

$$dA = -kxdx. \tag{3.30}$$

Полная работа при изменении длины пружины на конечную величину Δx равна

$$A_{12} = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \tag{3.31}$$

Полученная работа не зависит от того, как произошло изменение длины пружины. *Упругая сила*, так же как сила тяжести, *консервативна*, а разность $\frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$ есть разность двух значений (начального и конечного) потенциальной энергии пружины:

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2}, \tag{3.32}$$

где $E_{п1} = \frac{kx_1^2}{2} + C$ и $E_{п2} = \frac{kx_2^2}{2} = C$, C – константа, зависящая от выбора состояния пружины, при котором её потенциальную энергию можно считать равной нулю. Обычно считают равной нулю потенциальную энергию недеформированной пружины ($x = 0$). Тогда $C = 0$ и, следовательно,

$$E_п = \frac{kx^2}{2}. \tag{3.33}$$

Мы рассмотрели потенциальную энергию одного из видов деформации – *линейного растяжения или сжатия*. Заметим, что формулы потенциальной энергии других видов упругой деформации (кручения, сдвига, изгиба и т.д.) будут иметь точно такой же вид, если под k понимать коэффициент жёсткости тела по отношению к конкретному виду деформации, а под x – меру этой деформации (например, угол закручивания, стрелу прогиба и т.д.).

Вид формул, выражающих потенциальную энергию взаимодействия, обусловленного другими консервативными силами, зависит от *природы* этих сил и *характера их зависимости от координат* (с некоторыми из этих формул мы в последующем ознакомимся).

Тело одновременно может обладать и кинетической, и потенциальной энергией. Следовательно, в общем случае полная механическая энергия тела складывается из кинетической и потенциальной энергии:

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} . \tag{3.34}$$

Энергия, так же как и работа, в системе СИ измеряется в джоулях.

3.5. СВЯЗЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ С СИЛОЙ

Между потенциальной энергией системы взаимодействующих тел и консервативной силой, обусловливающей наличие этой энергии, существует вполне определённая связь. Установим эту связь.

Если в каждой точке пространства на тело действует консервативная сила, то говорят, что оно находится в *потенциальном поле*.

При изменении положения тела в этом поле потенциальная энергия тела изменяется, при этом консервативная сила совершает вполне определённую работу. Выразим эту работу обычным образом.

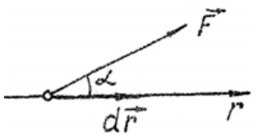


Рис. 3.7

Будем полагать, что тело переместилось в произвольном направлении $\vec{r}$ на бесконечно малое расстояние $d\vec{r}$ (рис. 3.7). Тогда

$$dA = F dr \cos\alpha = F_r dr , \tag{3.35}$$

где $F_r = F\cos\alpha$ – проекция вектора силы на направление $\vec{r}$. Но

$$dA = -dE_{\text{п}} . \tag{3.36}$$

Приравнивая правые части выражений (3.35) и (3.36), получим $F_r \ dr = -dE_{\text{п}}$, откуда

$$F_r = -\frac{dE_{\text{п}}}{dr} . \tag{3.37}$$

$\dfrac{dE_{\text{п}}}{dr}$ есть производная потенциальной энергии по направлению r ; эта величина показывает, *насколько быстро изменяется потенциальная энергия вдоль этого направления*.

Таким образом, *проекция силы* на произвольное направление равна по величине и противоположна по знаку *производной от потенциальной энергии по этому направлению*.

Выясним смысл знака «минус». Если в направлении r потенциальная энергия возрастает $\left(\dfrac{dE_п}{dr} > 0\right)$, то согласно (3.37) $F_r < 0$. Это значит, что направление силы $\vec{F}$ образует с направлением r *тупой угол*, следовательно, составляющая этой силы, действующая вдоль r, противоположна направлению r. И наоборот, если $\dfrac{dE_п}{dr} < 0$, то проекция $F_r > 0$, угол между силой $\vec{F}$ и направлением r *острый*, составляющая этой силы, действующая вдоль r, совпадает с направлением r.

В общем случае потенциальная энергия может изменяться не только в направлении r, но и в любом другом направлении. Можно рассматривать, например, изменения $E_п$ вдоль осей x, y, z декартовой системы координат.

Тогда

$$F_x = -\frac{\partial E_п}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z} \tag{3.38}$$

(значок $\dfrac{\partial}{\partial x}$ означает, что берётся *частная* производная).

Зная проекции силы F_x, F_y, F_z, легко найти вектор силы:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = F_z\vec{k}\ . \tag{3.39}$$

Учитывая (3.38), будем иметь

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{3.40}$$

Вектор, стоящий в правой части соотношения (3.40), называется *градиентом* величины $E_п$ и обозначается $\mathrm{grad}\, E_п$. Следовательно,

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\, E_п\ . \tag{3.41}$$

Консервативная сила, действующая на тело, равна по величине и противоположна по направлению градиенту потенциальной энергии этого тела. Градиент потенциальной энергии – это вектор, указы-

вающий направление быстрейшего возрастания потенциальной энергии и численно равный изменению энергии, приходящемуся на единицу длины этого направления.

При перемещении тела в *направлении* действия консервативной силы $\vec{F}$ совершается *максимальная* работа (так как $\cos(\vec{F},^\wedge d\vec{r}) = 1$). Но $dA = -dE_{п}$. Следовательно, направление силы $\vec{F}$ указывает направление быстрейшего *уменьшения потенциальной энергии*.

3.6. ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Потенциальная энергия является *функцией координат*. В некоторых простейших случаях она зависит только от одной координаты (например, в случае поднятого над Землёй тела $E_{п}$ зависит только от высоты h). Зависимость потенциальной энергии системы от той или иной координаты может быть представлена *графически*.

График, изображающий зависимость потенциальной энергии от соответствующей координаты, называют *потенциальной кривой*.

Проанализируем одну из возможных потенциальных кривых (рис. 3.8). Кривая $E_{п}(x)$, изображённая на рисунке, показывает, как изменяется потенциальная энергия системы частиц, если одна из частиц перемещается вдоль оси x, а все остальные остаются на своих местах. Каждая точка графика даёт возможность определить $E_{п}$ системы, соответствующую координате частицы x.

По наклону потенциальной кривой можно судить о величине и направлении силы, действующей на частицу вдоль соответствующего направления. Величина и знак проекции этой силы на рассматриваемое направление определяется величиной и знаком тангенса угла

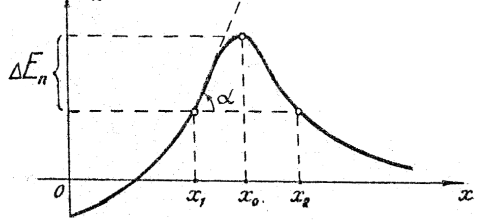


Рис. 3.8

наклона касательной к кривой $E_п$ в соответствующих точках; в нашем случае

$$F_x = -\frac{dE_п}{dx} = -\mathrm{tg}\alpha\,, \tag{3.42}$$

так как $\frac{dE_п}{dx} = \mathrm{tg}\alpha$.

Таким образом, чем *круче* идёт потенциальная кривая, тем *больше сила*, действующая на частицу вдоль соответствующего направления. На восходящих участках потенциальной кривой тангенсы углов наклона касательных положительны, следовательно, проекция силы *отрицательна*. Это значит, что направление силы, действующей *вдоль данной оси*, *противоположно* направлению этой оси, сила препятствует удалению частицы из системы (см. рис. 3.8, точка x_1).

В точках же, соответствующих *нисходящим* участкам потенциальной кривой, проекции силы *положительны*, сила способствует движению частицы вдоль данного направления (точка x_2). В точках, в которых $\mathrm{tg}\alpha = 0$, сила на частицу не действует (точка x_0).

Если же при удалении одной из частиц (в любом направлении) потенциальная энергия системы резко *возрастает* (потенциальная кривая «взмывает» вверх), то говорят о существовании *потенциального барьера*. Говорят о *высоте* барьера и его ширине в соответствующих местах. Так, если частица находится в точке с координатой x_1 (см. рис. 3.8), то её потенциальная энергия равна $E_{п1}$, высота потенциального барьера для неё $\Delta E_п$, ширина барьера $\Delta x = x_2 - x_1$. Если потенциальный барьер встречается на пути частицы при её движении, как в положительном, так и в отрицательном направлении выбранной оси, то говорят, что частица находится в *потенциальной яме*. Форма и глубина потенциальной ямы зависит от природы сил взаимодействия и конфигурации системы.

Приведём некоторые примеры. На рисунке 3.9 изображена потенциальная кривая тела, поднятого над Землёй.

Как известно, потенциальная энергия такого тела зависит только от одной координаты – высоты h: $E_п = Ph$. Проекция силы тяжести на ось h равна $P_h = -\frac{dE_п}{dh} = -P$.

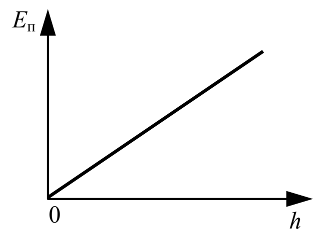


Рис. 3.9

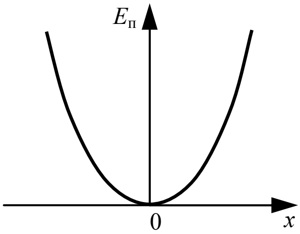


Рис. 3.10

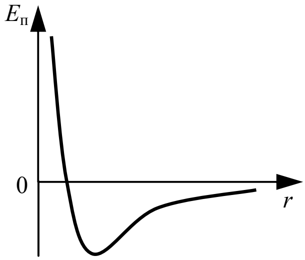


Рис. 3.11

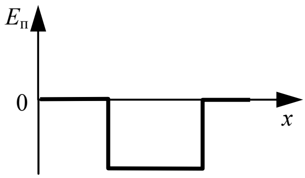


Рис. 3.12

Знак «минус» означает, что направление силы тяжести противоположно направлению оси h.

На рисунке 3.10 изображена потенциальная кривая тела, скреплённого с пружиной и совершающего колебания. Как видно из рисунка, такое тело находится в потенциальной яме с симметричными стенками. Потенциальная энергия этого тела и проекция силы, действующей на него, равны соответственно:

$$E_п = \frac{kx^2}{2}, \quad F_x = -\frac{dE_п}{dx} = -kx \,.$$

Кривая, изображённая на рис. 3.11, характерна для взаимодействия атомов и молекул в твёрдом теле. Особенностью этой кривой является то, что она асимметрична; один край её крутой, другой – пологий.

Наконец, кривая на рис. 3.12 характеризует, в первом приближении, потенциальную энергию свободных электронов в металле. Стенки этой ямы почти вертикальны. Это значит, что сила, действующая на электроны на границе металла, весьма велика.

Гладкое горизонтальное дно ямы означает, что на электроны внутри металла сила не действует.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить работу по сжатию пружины железнодорожного вагона на 5 см, если под действием силы $F_0 = 3 \cdot 10^4$ Н пружина сжимается на $x_0 = 1$ см.

Решение. Пренебрегая массой пружины, можно считать, что при её сжатии действует только переменная сила давления, равная по величине упругой силе, определяемой по закону Гука $|F| = kx$. Работу этой силы при сжатии пружины на 5 см надо определить. Считая на малом перемещении dx силу постоянной, определим элементарную работу как

$$dA = Fdx = kxdx .$$

Здесь коэффициент жёсткости пружины равен $k = \frac{F_0}{x_0}$.

Всю работу найдём, взяв интеграл от dA в пределах от $x_1 = 0$ до $x_2 = 5$ см:

$$A = \int dA = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{kx^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} = \frac{F_0 x_2^2}{2x_0} .$$

После вычислений будем иметь

$$A = \frac{3 \cdot 10^4 (5 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 1 \cdot 10^{-2}} = 3750 \text{ Дж.}$$

Пример 2. Самолёт массы $m = 3$ т для взлёта должен иметь скорость $\upsilon = 360$ км/ч и длину разбега $S = 600$ м. Какова должна быть минимальная мощность мотора, необходимая для взлёта самолёта? Коэффициент трения k колёс о землю равен 0,2. Движение при разгоне самолёта считать равноускоренным.

Решение. В задаче требуется определить *мгновенную* мощность мотора *в момент взлёта* самолёта. Она и будет являться той минимальной мощностью, при которой самолёт может ещё набрать скорость, необходимую для взлёта:

$$N_{\min} = F_{\text{тг}} \upsilon .$$

Силу тяги $F_{\text{тг}}$ определим из уравнения (второй закон динамики)

$$ma = F_{\text{тг}} - f_{\text{тр}} = F_{\text{тг}} - kmg .$$

Ускорение найдём из уравнения равнопеременного движения $\upsilon^2 = 2aS$;

$$a = \frac{\upsilon^2}{2S} .$$

С учётом сделанных замечаний минимальная мощность равна

$$N_{\min} = m\left(\frac{\upsilon^2}{2S} + kg\right)\upsilon \approx 3000 \text{ кВт.}$$

Пример 3. Скорость реактивного самолёта на некотором участке меняется с расстоянием по закону $\upsilon = D + Bs$. Найти работу за промежуток времени (t_1, t_2), если масса самолёта *m*. В момент времени t_1 скорость равна υ_1.

Решение. Примем, что работа равна разности кинетических энергий в моменты времени t_2 и t_1, т.е. $A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}$. Необходимо определить закон изменения скорости со временем. Ускорение самолёта $a = \frac{d\upsilon}{dt} = B\frac{ds}{dt} = B\upsilon$. Откуда $\frac{d\upsilon}{\upsilon} = Bdt$. После интегрирования и потенцирования последнего выражения получим, что скорость в момент времени t_2 равна $\upsilon_2 = \upsilon_1 e^{B(t_2 - t_1)}$.

Таким образом, работа за заданный промежуток времени равна

$$A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \frac{m\upsilon_1^2}{2}[e^{2B(t_2 - t_1)} - 1].$$

Пример 4. Тело массой *m* под действием постоянной силы ветра движется прямолинейно, причём зависимость пройденного пути от времени меняется по закону $s = At^2 + Bt + C$. Найти работу силы ветра за промежуток времени от 0 до *t*.

Решение. Работа силы ветра при малом перемещении тела равна $dA = F_s ds$, где перемещение найдём как производную от пути по времени, т.е. $ds = (2At + B)dt.$ Сила по второму закону динамики равна

$$F_s = ma = m\frac{d^2 s}{dt^2} = 2mA.$$

Полная работа за промежуток времени от 0 до *t* равна интегралу от dA:

$$A = \int dA = \int_0^t 2mA(2At + B)dt = \int_0^t 4mA^2 tdt + \int_0^t 2mABdt = 2mAt(At + B).$$

Пример 5. Шар массой $m_1 = 2$ кг движется со скоростью $\upsilon_1 = 5$ м/с навстречу шару массой $m_2 = 3$ кг, движущемуся со скоростью $\upsilon_2 = 10$ м/с. Найти величину и объяснить причину изменения кинетической энергии системы шаров после неупругого центрального удара.

Решение. Энергия системы шаров до удара

$$E_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}.$$

После неупругого удара шары будут двигаться с одинаковой скоростью u, которую найдём, применяя закон сохранения импульса:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)u,$$

откуда

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Энергия системы шаров после удара

$$E_2 = (m_1 + m_2)\frac{u^2}{2}.$$

Убыль кинетической энергии после удара

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - (m_1 + m_2)\frac{(m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}.$$

Изменение кинетической энергии расходуется на деформацию и в конечном счёте на нагревание шаров:

$$\Delta E = \frac{2 \cdot 3(5 + 10)^2}{2(2 + 3)} = 135 \text{ Дж}.$$

Пример 6. Автомобиль массой $m = 100$ кг, движущийся по горизонтальному участку пути со скоростью $\upsilon = 30$ км/ч, развивает мощность, равную $N = 22$ кВт. Какую мощность должен развивать автомобиль при движении его в гору с уклоном 10° с той же скоростью?

Определить крутизну спуска (угол наклона), по которому автомобиль будет идти со скоростью 30 км/ч, при выключенном моторе.

Решение: 1) Мощность автомобиля при движении в гору будет определяться силой тяги и скоростью движения:

$$N_1 = F_{\text{тг}}\upsilon = (F_{\text{тр}} + F_{\text{ск}})\upsilon.$$

Сила трения определяется как $F_{\text{тр}} = kP_n$, где сила нормального давления на наклонной плоскости $P_n = mg\cos\alpha$. Если считать коэффициент трения одинаковым на всём пути движения, то на горизонтальном участке он равен $k = \dfrac{F'_{\text{тр}}}{mg}$. Сила трения может быть найдена из соотношения (при равномерном горизонтальном движении) $N = F'_{\text{тр}}\upsilon$, т.е. $F'_{\text{тр}} = \dfrac{N}{\upsilon}$ и $k = \dfrac{N}{mg\upsilon}$. Тогда сила трения на наклонной плоскости

$$F_{\text{тр}} = kP_n = \frac{Nmg\cos\alpha}{mg\upsilon} = \frac{N}{\upsilon}\cos\alpha .$$

Скатывающая сила равна $F_{\text{ск}} = mg\sin\alpha$. С учётом сделанных замечаний мощность автомобиля, движущегося в гору, будет равна

$$N_1 = \left(\frac{N}{\upsilon}\cos\alpha + mg\sin\alpha\right)\upsilon = N\cos\alpha + mg\upsilon\sin\alpha .$$

Подставим данные задачи

$$N_1 = 22\ 000 \cdot 0{,}98 + 100 \cdot 9{,}8 \cdot 8{,}3 \cdot 0{,}17 = 23\ 084 \approx 23{,}1 \text{ кВт.}$$

2) При движении под гору при выключенном двигателе сила тяги равна нулю. Действуют только скатывающая сила $F_{\text{ск}} = mg\sin\alpha$ и сила трения $F_{\text{тр}} = kP_n = \dfrac{N}{\upsilon}\cos\alpha$. С учётом их направления

$$mg\sin\alpha - \frac{N}{\upsilon}\cos\alpha = 0 ,$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{N}{mg\upsilon};\ \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{22\ 000}{100 \cdot 9{,}8 \cdot 8{,}3} = \operatorname{arctg}2{,}7 \approx 15°.$$

Таким образом, крутизна спуска равна 15°.

Пример 7. Тяжёлый шарик соскальзывает без трения по наклонному жёлобу, образующему «мёртвую петлю» радиусом *R*. С какой высоты шарик должен начать движение, чтобы не оторваться от жёлоба в верхней точке траектории?

Решение. Дана задача о неравномерно переменном движении материальной точки по окружности. Причём в процессе движения изменяется положение тела по высоте. Такие задачи решаются с применением закона сохранения энергии и составлением уравнения по второму закону динамики для направления нормали. Так как для замкнутой системы энергия остается неизменной, то запишем это в виде $E_1 = E_2$.

Примем за начальное положение шарика начало движения, за конечное – положение в верхней точке траектории. Уровень отсчёта высоты установим от поверхности стола.

Энергия шарика в первом положении $E_1 = mgh$, во втором положении $E_2 = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mg2R$. Следовательно, $mgh = \dfrac{m\upsilon^2}{2} + mg2R$, откуда

$$\upsilon^2 + 4gR - 2gh = 0 . \qquad (1)$$

Для определения h необходимо знать скорость шарика в верхней точке. При этом учтём, что в верхней точке петли на шарик в общем случае действуют вниз две силы – сила тяжести P и сила реакции со стороны опоры N. Под действием этих сил шарик движется по окружности, т.е.

$$P + N = \frac{m\upsilon^2}{R} .$$

При спуске с достаточно большой высоты шарик приобретает такую скорость, что в каждой точке петли давит на жёлоб с некоторой силой P_n. По третьему закону Ньютона жёлоб действует на шарик с такой же по величине силой N в противоположную сторону и отжимает его на дугу окружности радиусом R.

По мере уменьшения начальной высоты скорость шарика уменьшается и при некотором значении h становится такой, что он пролетает верхнюю точку петли, лишь касаясь жёлоба. Для такого предельного случая $N = 0$, и уравнение второго закона динамики примет вид

$$P + 0 = \frac{m\upsilon^2}{R} \quad \text{или} \quad mg = \frac{m\upsilon^2}{R} ,$$

откуда

$$\upsilon^2 = gR . \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1) и решая последнее уравнение относительно h, получим $h = 2{,}5R$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется энергией? Что называется кинетической энергией? Что называется потенциальной энергией?
2. Что такое работа? Как вычисляется работа постоянной и переменной силы?
3. Что такое мощность?
4. Какова связь между механической работой и кинетической энергией?
5. Докажите, что сила тяжести является консервативной силой.
6. Какова связь между работой консервативных сил и потенциальной энергией?
7. Что такое нулевой уровень потенциальной энергии? Как он выбирается?
8. Какова связь между потенциальной энергией тела и консервативной силой, действующей на него?
9. Что такое потенциальная яма и потенциальный барьер?

4. МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

4.1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Абсолютно твёрдым телом называется тело, деформациями которого в данной задаче можно пренебречь. При движении абсолютно твёрдое тело выступает как единое целое.

Любое сколь угодно сложное движение твёрдого тела может быть сведено к сумме двух простейших движений – поступательного и вращательного.

Поступательным движением твёрдого тела называется такое движение, при котором *любая прямая*, проведённая в теле, сохраняет неизменное направление в пространстве, т.е. *перемещается параллельно самой себе*.

По *форме* траектории поступательное движение может быть как прямолинейным, так и криволинейным (например, каждая точка кабины «колеса обозрения» (рис. 4.1) движется по криволинейной траектории – по окружности).

Поступательное движение твёрдого тела называется плоским, если любая точка или частица тела во время движения описывает плоскую *траекторию*.

При поступательном движении все точки твёрдого тела за один и тот же промежуток времени совершают *одинаковые* (равные по вели-

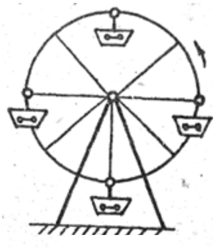


Рис. 4.1

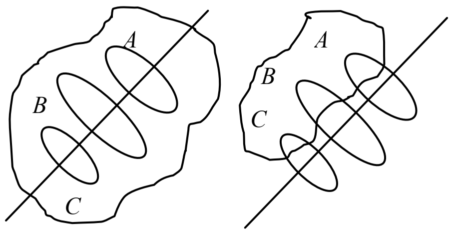


Рис. 4.2

чине и направлению) перемещения. Следовательно, при поступательном движении скорости и ускорения всех точек тела в любой момент времени также одинаковы. Поэтому, чтобы описать поступательное движение абсолютно твёрдого тела, достаточно определить движение одной из его точек.

Вращательным движением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой *осью вращения*.

Ось вращения может проходить сквозь тело или лежать за его пределами (рис. 4.2). Если ось вращения проходит сквозь тело, то те точки тела, которые лежат на этой оси, во время движения тела остаются в покое.

Вращательное движение вокруг неподвижной оси всегда является плоским движением.

4.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

При вращательном движении твёрдого тела все его точки двигаются по окружностям (рис. 4.3). При этом радиус-векторы, проведённые из центров соответствующих окружностей к точкам тела, за равные промежутки времени поворачиваются на один и тот же угол. Угол поворота $\Delta\varphi$ любого из радиус-векторов определяет *угловой путь*, пройденный телом за данный промежуток времени Δt. При этом *угол* $\Delta\vec{\varphi}$ является *аксиальным вектором*, направленным вдоль оси вращения с учётом правила правого винта.

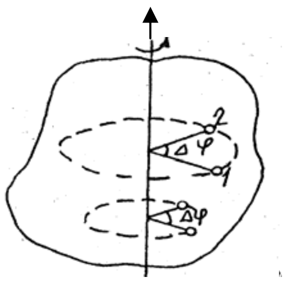


Рис. 4.3

Быстроту *изменения* углового пути с течением времени характеризует *угловая скорость*. По аналогии с линейной скоростью вводят среднюю и истинную угловые скорости. Средняя угловая скорость с учётом того, что угол $\vec{\varphi}$ является вектором, тоже есть вектор

$$\vec{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \tag{4.1}$$

Истинная (мгновенная) угловая скорость

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{4.2}$$

Оба вектора направлены вдоль оси вращения (рис. 4.4, *а*, *б*).

Быстроту *изменения угловой скорости* характеризует *угловое ускорение* – среднее и мгновенное. Среднее угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}. \tag{4.3}$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{4.4}$$

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ – вектор, направление которого либо совпадает с направлением угловой скорости (при *ускоренном* вращении), либо *противоположно* ему (при *замедленном* вращении) рис. 4.4, *б* и *в*.

Угловой путь $\vec{\varphi}$, угловая скорость $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ при равнопеременном вращении связаны между собой формулами, по внешнему виду напоминающими формулы прямолинейного равнопеременного движения (в скалярном виде):

$$\omega_t = \omega_0 \pm \varepsilon t; \tag{4.5}$$

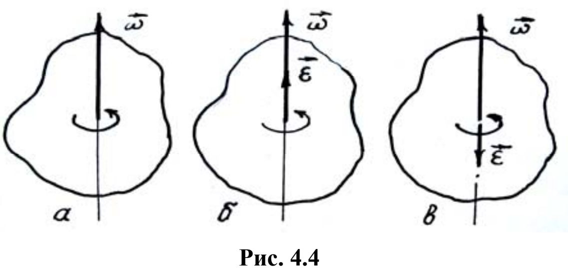


Рис. 4.4

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}\ ; \qquad (4.6)$$

$$\omega_t^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi\ , \qquad (4.7)$$

где ω_t – угловая скорость в данный момент времени; ω_0 – начальная угловая скорость.

Угловой путь в системе СИ измеряется в радианах (рад), угловая скорость – в радианах в секунду (рад/с), угловое ускорение – в радианах в секунду за секунду (рад/с^2).

Кроме угловых характеристик, движение *каждой* точки вращающегося тела характеризуют обычные линейные величины: линейный путь S, линейная скорость υ, линейные ускорения – тангенциальное a_τ и нормальное a_n.

Установим связь между линейными и угловыми характеристиками. Как известно, дуга окружности связана с радиусом этой окружности соотношением $ds = rd\varphi$, где $d\varphi$ – центральный угол, образованный радиусами, проведёнными к концам дуги.

Угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{r}\dfrac{ds}{dt}$, но $\dfrac{ds}{dt} = \upsilon$.

Следовательно, $\omega = \dfrac{\upsilon}{r}$, откуда

$$\upsilon = \omega r\ . \qquad (4.8)$$

Аналогично

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{a_\tau}{r}\ ,$$

где $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ – тангенциальное ускорение точки, откуда

$$a_\tau = \varepsilon r\ . \qquad (4.9)$$

И, наконец, нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r\ . \qquad (4.10)$$

Равномерное вращение тела вокруг оси характеризуется ещё периодом обращения T, частотой обращения ν и числом оборотов n.

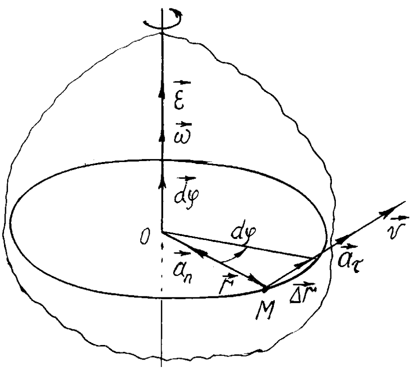


Рис. 4.5

Период обращения – это промежуток времени, в течение которого тело совершает один оборот. Угол поворота за это время равен 2π. Следовательно,

$$\omega = \frac{\varphi}{T} = \frac{2\pi}{T}. \qquad (4.11)$$

Частота обращения – число оборотов, совершаемых за единицу времени – ν или *n*:

$$\nu = n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \qquad (4.12)$$

откуда

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi n\,. \qquad (4.13)$$

Векторное изображение названных величин показано на рис. 4.5.

4.3. ЦЕНТР ИНЕРЦИИ (ЦЕНТР МАСС) ТВЁРДОГО ТЕЛА

Разбив твёрдое тело на отдельные малые элементы, мы можем рассматривать его как систему материальных точек, взаимное расположение которых не изменяется.

На каждый элемент тела могут воздействовать, во-первых, другие элементы этого же тела, во-вторых, внешние тела. Назовём силы взаимодействия элементов друг с другом *внутренними*, силы, действующие со стороны внешних тел – *внешними*. Обозначим массу *i*-го элемента через dm_i, его ускорение через $\vec{a}_i$. По второму закону Ньютона

$$dm_i\vec{a}_i = d\vec{f}_i + d\vec{F}_i, \qquad (4.14)$$

где $d\vec{f}_i$ – результирующая всех внутренних сил, действующих на элемент dm_i; $d\vec{F}_i$ – результирующая всех внешних сил, действующих на элемент dm_i.

Проинтегрируем выражение (4.14) по всем элементам dm_i. Учтём при этом, что сумма всех внутренних сил равна нулю (в эту сумму попарно войдут все силы действия и противодействия между элементами, равные между собой по третьему закону Ньютона). Тогда

$$\int_0^m dm_i \vec{a}_i = \vec{F} , \tag{4.15}$$

где $\vec{F} = \int d\vec{F}_i$ – результирующая всех внешних сил, действующая на всё тело в целом.

При *поступательном* движении твёрдого тела все его элементы приобретают *одинаковые* ускорения. Следовательно,

$$\int_0^m dm_i \vec{a}_i = m\vec{a} , \tag{4.16}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} .$$

Таким образом, *поступательное движение твёрдого тела может быть заменено движением одной материальной точки, масса которой равна массе тела*.

При непоступательном движении ускорения отдельных элементов *dm разные*, поэтому ускорение $\vec{a}_i$ при интегрировании выражения (4.15) выносить из-под знака интеграла нельзя. Однако и в этом случае интеграл, стоящий в левой части соотношения (4.15), можно заменить произведением массы тела на ускорение некоторой точки *C*, определяемой из уравнения

$$m\vec{a}_c = \int_0^m dm_i \vec{a}_i . \tag{4.17}$$

Точка *C*, определяемая условием (4.17), называется *центром инерции* или *центром масс тела*. В однородном поле тяготения эта точка совпадает с центром тяжести тела.

Таким образом,

$$m\vec{a}_c = \vec{F} . \tag{4.18}$$

Центр инерции твёрдого тела движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, если бы к ней были приложены все внешние силы, действующие на тело.

Радиус-вектор центра масс $\vec{r}_c$ твёрдого тела (системы материальных точек) определяется по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i , \tag{4.19}$$

где $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса тела (системы точек); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор каждой точки.

Если результирующая внешних сил равна нулю $(\vec{F}=0)$, то и ускорение центра инерции равно *нулю*. Внутренние силы не могут изменить скорость движения центра масс: в отсутствие внешних сил он либо движется равномерно и прямолинейно, либо покоится.

Понятие центра масс применимо не только к отдельным телам, но и к целой совокупности взаимодействующих тел, например к частям разорвавшегося снаряда, к двойным звёздам, к солнечной системе и т.д.

4.4. МОМЕНТ СИЛЫ. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ. ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Вращательное действие силы (сообщение телу *углового* ускорения) зависит не только *от величины силы*, но и от того, в каком *направлении* она действует и к *какой точке* тела приложена. Величиной, которая учитывает все эти *факторы*, является *момент силы*. Дадим определение момента силы относительно *оси* (существует определение момента относительно *точки*).

Пусть на твёрдое тело, имеющее неподвижную ось вращения, в произвольном направлении действует сила $\vec{F}$ (рис. 4.6, *а*). Разложим эту силу на две составляющие: $\vec{F}_\perp$, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и $\vec{F}_\parallel$ – параллельную оси вращения.

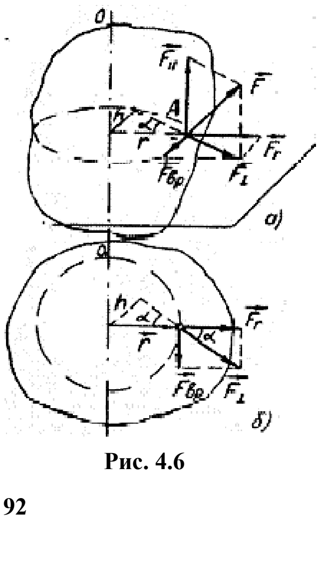


Рис. 4.6

Сила $\vec{F}_\parallel$ вращательного движения вызвать не может, она лишь деформирует тело (стремится сдвинуть его вдоль оси).

Вращательное действие оказывает только составляющая $\vec{F}_\perp$. *Моментом силы* $\vec{F}$ относительно оси называется физическая величина, численно равная произведению величины составляющей этой силы $\vec{F}_\perp$, действующей в плоскости, перпендикулярной оси вращения, на плечо этой составляющей, т.е. на кратчайшее расстояние h от оси вращения до линии её действия (рис. 4.6, *б*):

$$M = hF_{\perp} = r\sin\alpha F_{\perp} = rF_{\perp}\sin\alpha, \qquad (4.20)$$

где r – расстояние от оси вращения до точки приложения силы.

Если сила действует в *плоскости*, *перпендикулярной оси вращения*, то момент этой силы равен произведению самой силы на плечо:

$$M = hF = r\sin\alpha F\ . \qquad (4.21)$$

Вращательное действие в конечном счёте вызывает только составляющая $F_{\text{вр}} = F_{\perp}\sin\alpha$, поэтому её можно назвать *вращательной составляющей*. Составляющая $\vec{F}_r$ направлена перпендикулярно к оси вращения и стремится её деформировать, вращения не вызывает (рис. 4.6, *б*).

Момент силы относительно оси – вектор, направленный *вдоль* этой *оси*. Направление момента совпадает с направлением поступательного движения правого буравчика, если ось буравчика совпадает с осью вращения тела, а рукоятка поворачивается по направлению силы (рис. 4.7). Произведение $rF_{\perp}\sin\alpha$ есть численное значение векторного произведения радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого от оси вращения к точке приложения силы $\vec{F}_{\perp}$, и силы $\vec{F}_{\perp}$. Следовательно,

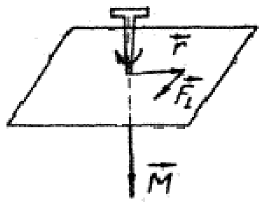


Рис. 4.7

$$\vec{M} = [\vec{r}\cdot\vec{F}_{\perp}]\ . \qquad (4.22)$$

Установим связь между моментом сил, действующих на вращающееся твёрдое тело, и угловым ускорением этого тела.

Выделим в рассматриваемом теле элемент dm_i. Радиус окружности, по которой движется этот элемент, обозначим через $\vec{r}_i$. Пусть сила, действующая на этот элемент в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела, равна $d\vec{F}_i$. Разложим эту силу на две составляющие: касательную $d\vec{F}_{i\tau}$ и нормальную $d\vec{F}_{in}$ (рис. 4.8). Первая из них сообщает выделенному элементу касательное ускорение $\vec{a}_{i\tau}$, вторая – нормальное $\vec{a}_{in}$. По второму закону Ньютона

$$dm_i a_{i\tau} = dF_{i\tau}\ . \qquad (4.23)$$

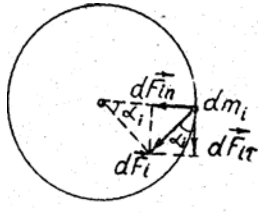


Рис. 4.8

Как видно из рис. 4.8 $dF_{i\tau} = dF_i\cos\alpha_i$. Тангенциальное и угловое ускорения связаны соотношением: $a_{i\tau} = \varepsilon r_i$; подставим в (4.23): $dm_i \varepsilon r_i = dF_i \cos\alpha_i$; умножим обе части этого равенства на r_i:

$$\varepsilon dm_i r_i^2 = r_i dF_i \cos\alpha_i . \qquad (4.24)$$

В правой части этого выражения стоит сила dF_i, так как $r_i \cos\alpha_i = h$ – плечо силы. Следовательно,

$$\varepsilon dm_i r_i^2 = dM_i . \qquad (4.25)$$

Чтобы оценить действие *всех* сил, приложенных к телу, необходимо проинтегрировать уравнение (4.25) по всем элементам тела:

$$\int dM_i = \varepsilon \int_0^m dm_i r_i^2 . \qquad (4.26)$$

Интеграл $\int dM_i$ представляет собой полный вращательный момент всех внешних сил, действующих на тело, – M.

Величина, численно равная произведению массы элемента dm_i на квадрат расстояния от этого элемента до оси вращения r_i^2, называется *моментом инерции* этого элемента относительно оси, а интеграл $\int_0^m dm_i r_i^2$ называется моментом инерции I всего тела относительно этой оси:

$$I = \int_0^m dm_i r_i^2 . \qquad (4.27)$$

Момент инерции характеризует *инерционные* свойства *вращающихся* тел: чем больше момент инерции тела, тем труднее изменить его угловую скорость. Момент инерции различных тех зависит от распределения масс относительно оси вращения. Расчёт моментов инерции – довольно сложная математическая задача.

Приведём выражения моментов инерции некоторых тел: тонкий обруч (цилиндр) радиусом r: $I = mr^2$; сплошной однородный диск (цилиндр) радиусом r: $I = \frac{1}{2} mr^2$ (в обоих случаях оси вращения совпадают с осями цилиндров); однородный шар радиусом r: $I = \frac{2}{5} mr^2$ (относительно оси, проходящей через центр шара). Если ось вращения тела не проходит через центр масс, то применяют теорему *Штейнера*: $I = I_0 + ma^2$, где I_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; a – расстояние между осями; m – масса тела.

Таким образом, $M = I\varepsilon$, откуда

$$\varepsilon = \frac{M}{I}. \tag{4.28}$$

Учитывая, наконец, векторный характер момента силы и углового ускорения, запишем

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}. \tag{4.29}$$

Угловое ускорение, приобретаемое вращающимся твёрдым телом, прямо пропорционально результирующему моменту всех внешних сил, зависит от его момента инерции и направлено в сторону момента силы.

Это и есть ***основной закон*** динамики вращательного движения твёрдого тела.

Второй закон Ньютона для материальной точки мы привели в нескольких формах, в частности, в форме $d(m\vec{\upsilon}) = \vec{F}dt$. Аналогично можно представить основной закон и для вращательного движения:

$$d(I\vec{\omega}) = \vec{M}dt, \tag{4.30}$$

где $I\vec{\omega}$ (обозначается как $\vec{L}$) – *момент импульса* твёрдого тела (момент количества движения); $\vec{L}$ – момент импульса, вектор, численно равный произведению момента инерции тела на угловую скорость и направленный в сторону угловой скорости; $\vec{M}dt$ – импульс момента силы.

Изменение момента импульса вращающегося тела равно импульсу вращательного момента, действующего на это тело.

Изменение момента импульса за конечный промежуток времени при I = const равно

$$dL = I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt. \tag{4.31}$$

Если $\vec{M} = \text{const}$ (момент силы не изменяется с течением времени), то

$$I\vec{\omega}_2 - I\vec{\omega}_1 = \vec{M}\Delta t\ . \qquad (4.32)$$

Таковы основные соотношения динамики вращательного движения твёрдого тела.

4.5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Кинетическая энергия вращения твёрдого тела складывается из кинетических энергий отдельных элементов. Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия элемента dm_i, находящегося на расстоянии r_i от оси, равна

$$\frac{dm_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{dm_i r_i^2}{2}\omega^2\ , \qquad (4.33)$$

так как $\upsilon_i = \omega r_i$.

Кинетическая энергия всего тела

$$E_{\text{к}} = \int_0^m \frac{dm_i r_i^2}{2}\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\int_0^m dm_i r_i^2\ .$$

Интеграл $\int_0^m dm_i r_i^2$ есть момент инерции тела: $\int_0^m dm_i r_i^2 = I$, поэтому

$$E_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (4.34)$$

Мы видим, что кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, выражается так же, как и кинетическая энергия поступательного движения, только вместо массы фигурирует момент инерции, а вместо линейной скорости – угловая.

Найдём *работу*, совершаемую приложенным к телу вращательным моментом при повороте тела на некоторый угол вокруг неподвижной оси.

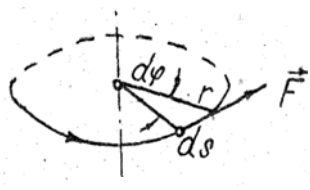


Рис. 4.9

Пусть сила F, создающая вращательный момент, действует по касательной к окружности, которую описывает при вращении тела точка приложения этой силы (рис. 4.9).

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения силы переместится на расстояние ds (ds – длина дуги окружности).

Работа силы F при этом повороте будет равна

$$dA = Fds \tag{4.35}$$

(направление силы и направление перемещения *совпадают*). Из геометрических соотношений $ds = rd\varphi$. Тогда работа $dA = Frd\varphi$. Но $rF = M$ есть момент силы F относительно оси вращения. Следовательно,

$$dA = Md\varphi. \tag{4.36}$$

Работа силы, действующей на твёрдое тело при вращении его вокруг неподвижной оси, равна произведению момента этой силы относительно оси вращения на угол поворота тела.

При повороте тела на конечный угол $\Delta\varphi$ работа будет равна сумме элементарных работ:

$$A_{1,2} = \int_1^2 dA_i = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_i d\varphi_i. \tag{4.37}$$

Если момент $M = \text{const}$, то работа, совершаемая при повороте тела на угол $\Delta\varphi$, будет равна

$$A_{1,2} = M\Delta\varphi. \tag{4.38}$$

Покажем, что если к телу приложен вращательный момент, то *работа* сил, создающих этот момент, будет *равна приращению кинетической энергии вращательного движения* этого тела.

По основному закону динамики вращательного движения

$$M = I\varepsilon = I\frac{d\omega}{dt}. \tag{4.39}$$

Подставим (4.39) в (4.36): $dA = I\dfrac{d\omega}{dt}d\varphi$, но $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$ есть угловая скорость. Следовательно,

$$dA = I\omega d\omega. \tag{4.40}$$

Полная работа

$$A_{1,2} = I\int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}, \tag{4.41}$$

что и требовалось доказать.

В общем случае движение твёрдого тела может быть представлена как суперпозиция поступательного движения центра инерции и вращательного движения вокруг соответствующей оси.

Пусть скорость движения центра инерции тела – $\vec{\upsilon}_c$ и тело вращается вокруг оси, проходящей через центр инерции. Тогда полная кинетическая энергия тела, обусловленная его участием в этих видах движения, будет равна

$$E_{\text{к}} = E_{\text{к. поступ}} + E_{\text{к. вращ}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (4.42)$$

Первое слагаемое определяет кинетическую энергию поступательного движения, второе – кинетическую энергию вращательного движения.

В заключение приведём таблицу, в которой сопоставляются величины, играющие аналогичную роль в поступательном и вращательном движениях.

Поступательное движение	Вращательное движение
1. Линейный путь S (м)	1. Угловой путь φ (рад)
2. Линейная скорость $\vec{\upsilon}$ (м/с)	2. Угловая скорость $\vec{\omega}$ (рад/с)
3. Линейное ускорение $\vec{a}$ (м/с^2)	3. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ (рад/с^2)
4. Масса m (кг)	4. Момент инерции относительно оси I (кг·м^2)
5. Сила $\vec{F}$ (Н)	5. Момент силы $\vec{M}$ (Н·м)
6. Импульс $m\vec{\upsilon}$ (кг·м/с)	6. Момент импульса $I\vec{\omega}$ (кг·м^2/с)
7. Импульс силы $\vec{F}dt$ (Н·с)	7. Импульс момента силы $\vec{M}dt$
8. Второй закон Ньютона $\vec{a} = \vec{F}/m$	8. Основной закон динамики $\vec{\varepsilon} = \vec{M}/I$
9. Работа $dA = Fds$ (Дж)	9. Работа $dA = Md\varphi$ (Дж)
10. Кинетическая энергия $E_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}$ (Дж)	10. Кинетическая энергия $E_{\text{к}} = \frac{I\omega^2}{2}$ (Дж)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Маховик, вращавшийся с постоянной угловой скоростью $\omega_0 = 10$ об/с, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика снова сделалось равномерным, но уже с угловой скоростью $\omega = 6$ об/с.

Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность торможения t, если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Решение. Угловое ускорение ε маховика связано с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями соотношением

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi}.$$

Но так как $\varphi = 2\pi N$, то

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{4\pi N}.$$

Выразим ω, ω_0 и N в единицах системы СИ: $\omega_0 = 10$ об/с = = 10·2π рад/с = 20π рад/с, $\omega = 6$ об/с = 6·2π рад/с = 12π рад/с, $N = 50$ об.

Подставив числовые значения в выражение для ε, получим

$$\varepsilon = \frac{(144 - 400)\pi^2}{4\pi \cdot 50} = -4 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение получилось отрицательным, так как маховик вращался замедленно.

Для определения продолжительности торможения используем формулу, связывающую угол поворота φ со средней угловой скоростью $\omega_{\text{ср}}$ вращения и временем t:

$$\varphi = \omega_{\text{ср}} t \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t,$$

откуда

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0 + \omega} = \frac{4\pi N}{\omega_0 + \omega}.$$

Подставив числовые значения, найдём

$$t = \frac{4\pi N}{20\pi + 12\pi} = \frac{4 \cdot 50}{32} = 6{,}25 \text{ с.}$$

Пример 2. Два шара массой m и $2m$ (m = 10 г) закреплены на тонком, невесомом стержне длиной l = 40 см так, как это указано на рис. 1 в двух случаях. Определить момент инерции J системы относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его конец в этих двух случаях. Размерами шаров пренебречь.

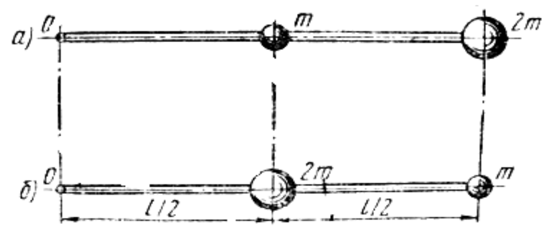


Рис. 1

Решение. Для определения момента инерции воспользуемся теоремой Штейнера

$$J = J_0 + Ma^2,$$

где J_0 – момент инерции системы шаров относительно оси, проходящей через центр масс – точку C; M – масса всей системы; a – расстояние между заданной осью, проходящей через точку O, и осью, проходящей через центр масс.

Положение центра масс определим по формуле

$$r_c = \frac{1}{M}\left(\sum m_i r_i\right),$$

где m_i – масса i-й части системы; r_i – положение этой массы относительно заданной оси O.

Случай а. Находим положение центра масс

$$r_c = \frac{1}{m + 2m}(ml/2 + 2ml) = \frac{5}{6}l,$$

здесь r_c – расстояние a между осями, т.е. $a = \frac{5}{6}l$.

Расстояние шара массой $2m$ от центра масс равно $l-\frac{5}{6}l=\frac{l}{6}$; расстояние шара массой m от центра масс равно $\frac{l}{2}-\frac{l}{6}=\frac{l}{3}$. С учётом этих замечаний момент инерции системы относительно оси, проходящей через центр масс, равен

$$J_0=2m\left(\frac{l}{6}\right)^2+m\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{ml^2}{18}+\frac{ml^2}{9}=\frac{ml^2}{6}.$$

Момент инерции системы относительно заданной оси, проходящей через точку O, равен

$$J_1=J_0+Ma^2=\frac{ml^2}{6}+3m\left(\frac{5l}{6}\right)^2=\frac{ml^2}{6}+\frac{75ml^2}{36}=\frac{9ml^2}{4}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$J_1=\frac{9\cdot 10\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}4^2}{4}=3{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{кг·м}^2.$$

Случай б. Находим положение центра масс (расстояние a)

$$r_c=\frac{1}{3m}\left(2m\frac{l}{2}+ml\right)=\frac{2l}{3},\quad \text{т.е. } a=r_c=\frac{2l}{3}.$$

Положение шара массой $2m$ относительно центра масс

$$\frac{2l}{3}-\frac{l}{2}=\frac{l}{6}.$$

Положение шара массой m относительно центра масс

$$l-\frac{2l}{3}=\frac{l}{3}.$$

Момент инерции системы шаров относительно оси, проходящей через центр масс:

$$J_0=2m\left(\frac{l}{6}\right)^2+m\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{ml^2}{6}.$$

Момент инерции относительно заданной оси O

$$J_2 = \frac{ml^2}{6} + 3m\left(\frac{2l}{3}\right)^2 = \frac{ml^2}{6} + \frac{12ml^2}{9} = \frac{3ml^2}{2}.$$

Численное значение момента инерции равно

$$J_2 = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}4^2}{2} = 2{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ кг·м}^2.$$

Пример 3. Определить момент инерции сплошного шара массой m = 10 кг и радиусом R = 0,1 м относительно оси, проходящей через центр тяжести.

Решение. При определении момента инерции шара воспользуемся тем, что момент инерции однородного диска относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно его плоскости, равен

$$J = \frac{mr^2}{2},$$

где m – масса диска; r – радиус диска.

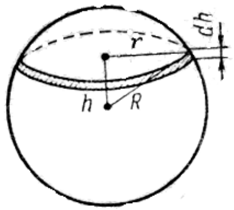


Рис. 2

Поэтому будем разбивать шар на диски толщиной dh, расположенные перпендикулярно оси, проходящей через центр масс (рис. 2).

Выделим один из таких дисков радиусом r. Его момент инерции равен

$$dJ = \frac{mr^2}{2} = \rho\pi r^2 dh \frac{r^2}{2} = \frac{\pi\rho}{2} r^4 dh.$$

Из рисунка следует, что $r^2 = R^2 - h^2$, тогда

$$r^4 = (R^2 - h^2)^2 = R^4 - 2R^2h^2 + h^4$$

и момент инерции всего шара

$$J = 2\int_0^R dJ = \pi\rho\int_0^R (R^4 - 2R^2h^2 + h^4)dh = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho R^2 = \frac{2}{5}mR^2.$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$J = \frac{2}{5} 10 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}04 \text{ кг·м}^2.$$

Пример 4. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 0{,}2$ м и массой $m = 50$ кг раскручен до частоты вращения $n_1 = 8$ с$^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через $t = 50$ с. Найти момент M сил трения.

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твёрдого тела в виде

$$M_z = J_z \varepsilon,$$

где M_z – момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси z, совпадающей с геометрической осью маховика; J_z – момент инерции маховика в виде сплошного диска (определяется как $\dfrac{mR^2}{2}$); ε – угловое ускорение.

Угловое ускорение определим как $\varepsilon = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t}$, где $\omega_2 = 0$, $\omega_1 = 2\pi n_1$.

Тогда момент M сил трения будет равен

$$M_z = \pi m R^2 (0 - n_1) / t.$$

Подставим числовые значения величин и произведём вычисления

$$M_z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}2^2 (0 - 8)}{50} = -1 \text{ Н·м}.$$

Знак «минус» показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 5. Маятник Максвелла представляет собой массивный диск, ось которого подвешена на двух накрученных на неё нитях (рис. 3). Если маятник отпустить, то он будет совершать возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном вращении диска вокруг оси.

Определить ускорение поступательного движения маятника, полагая, что момент инерции оси равен нулю.

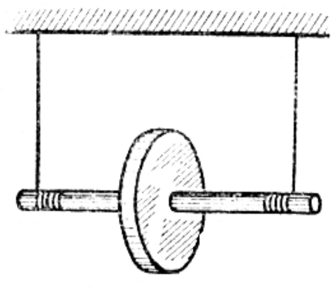


Рис. 3

Решение. Если маятник опустится и пройдёт путь x, то потенциальная энергия, равная mgx, перейдёт в кинетическую энергию поступательного и вращательного движений, т.е.

$$mgx = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $J = \frac{mr^2}{2}$ – момент инерции диска (m – его масса, r – радиус диска); $\omega = \frac{\upsilon}{r}$ – угловая скорость вращения диска, выраженная через линейную скорость крайних точек диска.

Учитывая замечания, имеем

$$mgx = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mr^2\upsilon^2}{2 \cdot 2r^2} = \frac{3m\upsilon^2}{4},$$

откуда $\upsilon = 2\sqrt{\frac{g}{3}}x^{\frac{1}{2}}$.

Ускорение поступательного движения есть производная по времени от скорости, т.е.

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{3}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{dt},$$

но так как $\frac{dx}{dt}$ есть скорость υ, равная $\upsilon = 2\sqrt{\frac{g}{3}}x^{\frac{1}{2}}$, то ускорение будет равно

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{3}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}2\sqrt{\frac{g}{3}}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какое тело является абсолютно твёрдым?
2. Какое движение твёрдого тела называется поступательным?
3. Какое движение твёрдого тела называется вращательным?
4. Что называется угловой скоростью вращательного движения? Как определяется направление угловой скорости?
5. Что такое угловое ускорение? Как выражается среднее и истинное угловое ускорение? Каково направление углового ускорения?

6. В каких единицах измеряется угловой путь, угловая скорость, угловое ускорение?

7. Какова связь между соответствующими линейными и угловыми характеристиками вращательного движения?

8. Что называется центром инерции твёрдого тела?

9. Что называется моментом силы относительно оси?

10. Какая физическая величина является мерой инерционных свойств вращающихся тел? От чего она зависит и как рассчитывается?

11. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения. Запишите математическое выражение этого закона.

12. Как выражается кинетическая энергия вращения твёрдого тела?

13. Как выражается работа при вращении твёрдого тела?

14. Какова связь между кинетической энергией вращательного движения и работой вращательного момента, действующего на тело?

5. ВСЕМИРНОЕ ТЯГОТЕНИЕ

5.1. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

В природе исключительную роль играют *силы тяготения*. Закон, которому они подчиняются, – закон всемирного тяготения – открыт Ньютоном в 1687 г.

Согласно этому закону *любые две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению масс этих точек, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними и направленной по прямой, соединяющей эти точки* (рис. 5.1).

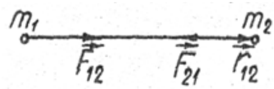


Рис. 5.1

Численное значение силы тяготения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{5.1}$$

где m_1 и m_2 – массы материальных точек; r – расстояние между точками; γ – гравитационная постоянная (размерный коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора единиц измерения, F, m и r).

Чтобы придать закону тяготения векторный вид, проведём от первой точки ко второй радиус-вектор $\vec{r}_{12}$ и умножим правую часть (5.1) на единичный вектор этого направления $\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$. Тогда сила, действующая на второе тело со стороны первого $\vec{F}_{21}$, будет равна

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \, ,$$

здесь знак «минус» означает, что направления радиус-вектора $\vec{r}_{12}$ и силы $\vec{F}_{21}$ противоположны.

Силы тяготения подчиняются третьему закону Ньютона: они равны по величине и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \, .$$

Силы тяготения – *всепроникающие силы*: от них нельзя экранироваться, их нельзя усилить или ослабить. Материальная среда, в которой находятся взаимодействующие тела, на величину и направление силы тяготения никакого влияния не оказывает.

Формула (5.1) позволяет найти силу гравитационного взаимодействия между *материальными точками*.

Чтобы рассчитать силу тяготения между телами, размеры которых соизмеримы с расстояниями между ними, поступают следующим образом. Оба тела разбивают на столь малые элементы, что каждый такой элемент можно считать материальной точкой. Выбирают в первом теле произвольный элемент и определяют *результирующую* силу, действующую на него со стороны *всех* элементов второго тела, иначе говоря, определяют *силу, с которой второе тело в целом притягивает к себе этот выделенный элемент*. Затем проделывают то же самое для остальных элементов первого тела, после чего находят полную геометрическую сумму сил, найденная сумма и будет представлять собой силу, с которой второе тело действует на первое. С такой же по величине, но противоположной по направлению силой первое тело действует на второе. Расчёт показывает, что математическое выражение для силы тяготения, действующей между *однородными* шарами, шарами с плотностью, зависящей от r (r – расстояние от центра шара), между сферическими слоями будет совпадать с (5.1), если под r понимать расстояние между центрами этих тел (рис. 5.2). Закон тяготения справедлив также для тел, одно из которых – однородный шар, а другое – материальная точка (с этим случаем мы имеем дело, например, при расчёте силы, с которой Земля притягивает к себе находящиеся на её поверхности тела).

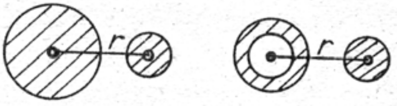


Рис. 5.2

В формулу закона тяготения входит *масса*. Масса уже фигурировала в уравнениях механики, в частности, в выражении второго закона Ньютона. Там она характеризовала *инерционные свойства* тел и называлась «инертной».

Роль массы в законе тяготения *иная*. Здесь она определяет силу гравитационного взаимодействия материальных тел, т.е. является мерой их гравитационных свойств. Эту массу, в отличие от «инертной», называют «*гравитационной*» или «тяжёлой».

Различать гравитационную и инертную массу в настоящее время нет необходимости. Многими, весьма тонкими экспериментами (Бессель, Этвеш, Крылов и др.) установлено, что инертная и гравитационная массы с точностью до 10^{-8} совпадают. Это, в сущности, одна и та же физическая величина, по-разному проявляющая себя в различных физических явлениях. С одной стороны, масса – это *мера инерционных свойств*, *с другой – мера гравитационных свойств*.

Гравитационная постоянная γ является универсальной константой, не зависящей от природы взаимодействующих тел. Эта величина численно равна *силе*, с которой притягиваются друг к другу две материальные точки *единичной массы*, расположенные на единичном расстоянии друг от друга: если $|m_1| = |m_2| = 1$, $|r| = 1$, то $|\gamma| = |F|$.

Численное значение γ было впервые определено У. Кавендишем в 1797 г.: $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Это значит, что два точечных тела (или шара) массой по 1 кг каждый, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н.

Необычайно малая величина γ указывает на то, что гравитационное взаимодействие становится заметным только в случае очень *больших масс*. В механике таких объектов, как атомы и молекулы, гравитационные силы практически не играют никакой роли.

Движение же таких макроскопических тел, как звёзды, Солнце, планеты, Луна, спутники (после того, как выключены двигатели) полностью управляется силами тяготения.

5.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Так как силы тяготения зависят только от взаимного расположения тел, то любая система тел обладает вполне определённой потенциальной энергией тяготения.

Найдём потенциальную энергию взаимодействия двух *точечных* тел. Для этого сначала рассчитаем работу, совершаемую силами тяготения при изменении взаимного расположения этих тел. Пусть массы тел равны соответственно m_1 и m_2. Будем считать, что одно из тел (m_1)

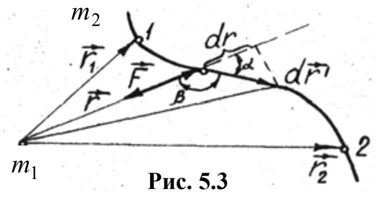


Рис. 5.3

неподвижно, а другое (m_2) перемещается по произвольному пути. Начальное и конечное положения перемещающегося тела определяют радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, проведённые из точки, где находится тело m_1 (рис. 5.3).

Элементарная работа, совершаемая силой тяготения при перемещении тела m_2 на $d\vec{r}\,'$, равна

$$dA = Fdr'\cos\beta = -Fdr\cos\alpha \tag{5.2}$$

(так как $\cos\beta = -\cos\alpha$).

Сила тяготения равна $F = \gamma\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$, $dr'\cos\alpha = dr$ – есть проекция вектора перемещения $d\vec{r}\,'$ на направление радиальной прямой (прямой, соединяющей тела), иначе говоря, изменение *расстояния* между телами. Следовательно,

$$dA = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}dr. \tag{5.3}$$

Взяв интеграл от выражения (5.3) в пределах от r_1 до r_2, найдём работу сил тяготения при перемещении тела m_2 из точки *1* в точку *2*:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = -\int_{r_1}^{r_2}\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = \gamma\frac{m_1 m_2}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \gamma\frac{m_1 m_2}{r_2} - \gamma\frac{m_1 m_2}{r_1} = \left(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r_1}\right) - \left(-\gamma\frac{m_1 m_2}{r_2}\right). \tag{5.4}$$

Как видно из этой формулы, работа сил тяготения зависит только от *изменения расстояния между телами*, но не зависит от величины и направления вектора перемещения $d\vec{r}\,'$.

Мы убедились так же, что работа силы тяготения не зависит от формы пути.

Следовательно, силы тяготения – *консервативные* силы, поэтому правую часть (5.4) следует рассматривать как разность начального и конечного значений потенциальной энергии:

$$A_{12} = E_{\text{п}_1} - E_{\text{п}_2}, \tag{5.5}$$

где $E_{п_1} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1} + C$; $E_{п_2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2} + C$, C – произвольная постоянная, зависящая от выбора нулевого уровня потенциальной энергии. Определим C.

Условимся считать потенциальную энергию рассматриваемых тел равной нулю, когда они находятся на таком расстоянии друг от друга, что силами взаимодействия между ними можно пренебречь, т.е. когда $r = \infty$: $E_п(\infty) = 0$.

При таком выборе нулевого уровня $0 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\infty} + C$, откуда $C = 0$.

Следовательно,

$$E_п = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (5.6)$$

Взаимная потенциальная энергия тяготения *отрицательна* и возрастает с увеличением расстояния. На рисунке 5.4 приведён график потенциальной энергии двух материальных точек.

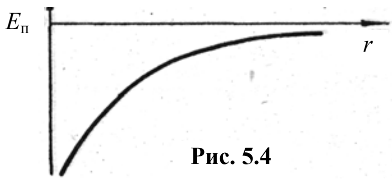


Рис. 5.4

5.3. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЁННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

В XVIII–XIX веках в физике господствовала идеалистическая теория *дальнодействия*. Согласно этой теории действие одного тела на другое передаётся *мгновенно* – с бесконечно большой скоростью, без всякого участия промежуточной материальной среды.

По современным материалистическим представлениям действие на расстоянии мыслится как процесс распространения изменений особой формы материи, связанной с взаимодействующими объектами и называемой полем[1] (теория *близкодействия*).

Гравитационное взаимодействие осуществляется через посредство *гравитационного поля* или *поля тяготения*.

Каждое тело создаёт в окружающем пространстве своё собственное гравитационное поле.

---

[1] Термин «поле» употребляется также для описания *физического состояния* обычных сред (например, волновое поле, поле температур и т.д.) и для характеристики пространственного распределения какой-либо величины (например, поле вектора скорости).

Исследование свойств гравитационного поля осуществляется с помощью «пробного тела» (иногда говорят о «пробной массе», понимая под этим тело, обладающее вполне определённой массой).

Измеряя величину и направление силы, которая действует на пробное тело в данной точке поля, оценивая его потенциальную энергию, можно судить об интенсивности и свойствах поля в рассматриваемой точке.

Пробное тело должно быть *точечным* и не должно обладать слишком большой массой (в противном случае исследуемое поле будет сильно искажаться полем пробного тела).

Как показывает опыт, сила, действующая в данной точке поля на пробные тела различной массы, прямо пропорциональна массе этих тел. Но если *рассчитать* силу, действующую на тело *единичной* массы (для этого достаточно найти отношение $\frac{F}{m}$), то эта сила будет зависеть только от свойств поля в данной точке и поэтому может служить его характеристикой. Эта векторная величина называется *напряжённостью*.

Напряжённость гравитационного поля – векторная физическая величина, характеризующая *силовое действие* гравитационного поля на вносимые в него материальные тела и *численно равная* силе, с которой поле действует на *точечное* тело *единичной массы*, помещённое в данную точку:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}. \tag{5.7}$$

Направление вектора напряжённости совпадает с направлением *силы*, действующей на пробное тело.

Как видно из формулы (5.7), напряжённость гравитационного поля измеряется в таких же единицах, что и ускорение.

Если во всех точках поля вектор напряжённости имеет одно и то же численное значение и одинаково направлен, то такое поле называется *однородным*.

Найдём напряжённость в произвольной точке гравитационного поля Земли. Так как Земля в первом приближении – шар, силу взаимодействия её с пробным телом можно найти по формуле Ньютона (5.7). Тогда численное значение напряжённости

$$G = \frac{F}{m} = \frac{\gamma m M_З}{m(R_З + h)^2} = \gamma \frac{M_З}{(R_З + h)^2}, \tag{5.8}$$

где $M_З$ – масса Земли; $R_З$ – радиус Земли; h – расстояние от поверхности Земли до точки наблюдения (рис. 5.5).

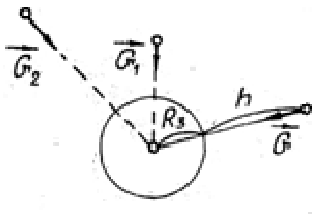


Рис. 5.5

Мы видим, что гравитационное поле Земли в целом *неоднородно*.

Учитывая, однако, что *центр* этого поля (центр Земли) отстоит от поверхности Земли на расстоянии 6400 км, можно с достаточной степенью точности считать, что вблизи поверхности Земли (например, в масштабах лаборатории) гравитационное поле Земли *однородно*.

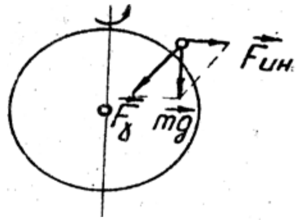


Рис. 5.6

По своему смыслу напряжённость гравитационного поля и ускорение, которое приобретает тело под действием силы тяготения, – одно и то же, если ускорение отсчитывается относительно инерциальной системы отсчёта[2]. В земных условиях, однако, отсчёт ведётся относительно системы, связанной с Землей. Земля же, как известно, не является инерциальной системой. Поэтому ускорение свободного падения[3] $\vec{g}$, наблюдаемое относительно Земли, обусловлено как силой тяготения, так и центробежной силой инерции[4] (рис. 5.6). Если вращением Земли пренебречь, то можно поставить знак равенства между ускорением «свободного» падения $\vec{g}$ и напряжённостью гравитационного поля Земли $\vec{G}$:

$$\vec{g} = \vec{G}\,. \tag{5.9}$$

Учитывая (5.8), найдём, что численное значение g равно

$$g = \gamma \frac{M_З}{(R_З + h)^2}\,. \tag{5.10}$$

[2] Кроме того, необходимо полагать, что инертная и гравитационная массы равны.

[3] Если тело движется вертикально вниз с ускорением, обусловленным действием одной только силы тяготения, то говорят, что оно свободно падает.

[4] Напомним, что силы инерции вводятся для описания движения в *неинерциальных системах* отсчёта. *Центробежная* сила инерции вводится тогда, когда система отсчёта вращается.

Это соотношение показывает, что ускорение, испытываемое телами различной массы, *одинаково* (если эти тела одинаково удалены от центра Земли).

Если тело находится вблизи поверхности Земли (h практически равно *нулю*), то

$$g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}. \tag{5.11}$$

Выразив из (5.11) массу Земли и подставив её в (5.10), получим

$$g = \left(\frac{R_З}{R_З + h} \right)^2 g_0. \tag{5.12}$$

Гравитационное поле можно описать с *энергетической точки зрения*. Для этого вновь воспользуемся точечным пробным телом.

В каждой точке гравитационного поля пробное тело обладает вполне определённой потенциальной энергией. Эта энергия зависит не только от величин, определяющих поле (от положения точки наблюдения и от массы тела, создающего поле), но и от массы пробного тела.

Вычислим отношение потенциальной энергии пробного тела к его массе: $\frac{E_п}{m}$. Легко видеть, что это отношение *не зависит от массы пробного тела* и характеризует исключительно *свойства поля*. Эта величина характеризует энергетическое *состояние* поля в той точке, куда помещено пробное тело, и называется *потенциалом*.

Потенциал данной точки гравитационного поля – скалярная физическая величина, характеризующая *энергетическое состояние* поля в этой точке и *численно равная потенциальной энергии* пробного тела *единичной* массы, внесённого в эту точку:

$$\varphi = \frac{E_п}{m}. \tag{5.13}$$

Две материальные точки массой M и m обладают взаимной потенциальной энергией (5.6), равной

$$E_п = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

Подставив это выражение в (5.13), мы найдём, что потенциал поля, созданного материальной точкой (или шаром), равен

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r}. \tag{5.14}$$

В частности, потенциал поля тяготения Земли в произвольной точке (вне Земли) равен

$$\varphi = -\gamma \frac{M_З}{R_З + h}. \tag{5.15}$$

Заметим, что потенциал, так же как и потенциальная энергия, определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной *C*. Выбор нулевого уровня потенциала осуществляется произвольно. Формулы (5.14), (5.15) записаны в предположении, что нулевой уровень потенциала выбран в бесконечности.

Из (5.13) следует, что тело массой m, помещённое в точку поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией

$$E_п = m\varphi. \tag{5.16}$$

Работа сил тяготения равна *убыли* потенциальной энергии:

$$A_{12} = E_{п_1} - E_{п_2} = m(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{5.17}$$

Таким образом, *работа сил гравитационного поля* при перемещении тела массой m равна *произведению массы этого тела на разность потенциалов начальной и конечной точек пути*.

Если тело удаляется из точки с потенциалом φ_1 в бесконечность, где, по соглашению, потенциал поля равен нулю, то работа сил поля будет равна

$$A_{1\infty} = m(\varphi_1 - 0) = m\varphi_1. \tag{5.18}$$

Отсюда следует $\varphi_1 = \dfrac{A_{1\infty}}{m}$, т.е. потенциал численно равен *работе*, совершаемой силами гравитационного поля при перемещении точечного тела единичной массы из данной точки в бесконечность (или просто на нулевой уровень, так как в общем случае нулевой уровень потенциала может быть выбран где угодно).

Гравитационное поле можно изобразить *графически* либо с помощью *линий вектора напряжённости*, либо с помощью *поверхностей равного потенциала*. Линия вектора напряжённости (силовая линия или просто линия поля) – линия, касательная в каждой точке которой, совпадает с направлением вектора напряжённости в этой же точке (рис. 5.7).

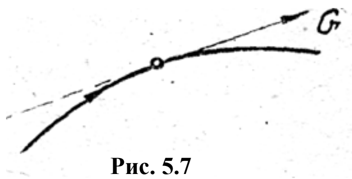


Рис. 5.7

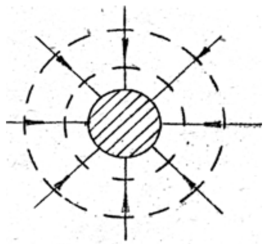


Рис. 5.8

Линии гравитационного поля обычно проводят с такой густотой, чтобы она была пропорциональна напряжённости в соответствующих местах.

Поверхность равного потенциала (эквипотенциальная поверхность) – поверхность, все точки которой имеют один и тот же потенциал.

Работа сил тяготения при перемещении тела по одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю (так как потенциалы начальной и конечной точек пути одинаковы):

$$dA = md\varphi = 0 \ .$$

Но с другой стороны: $dA = Fdr\cos(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr})$, где $F \neq 0$ $dr \neq 0$.

Следовательно, $\cos(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}) = 0$. Отсюда следует, что угол между линией вектора напряжённости и элементом эквипотенциальной поверхности *прямой*, т.е. *линии вектора напряжённости всюду перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям*. На рисунке 5.8 изображены линии вектора напряжённости и эквипотенциальные поверхности (вернее, не сами поверхности, а их сечения плоскостью чертежа) поля тяготения, создаваемого телом сферической формы.

5.4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИЛ ТЯГОТЕНИЯ И СИЛ ИНЕРЦИИ

Силы тяготения и силы инерции обладают одной общей особенностью: они сообщают телам *независимо от массы одинаковые ускорения*.

Представим, что два наблюдателя находятся внутри двух космических кораблей, один из которых *покоится* на стартовой площадке (площадка находится на Земле), а другой движется с ускорением, равным ускорению свободного падения на Земле (9,8 м/с^2), в такой области межзвёздного пространства, где *действием сил тяготения можно* *пренебречь*. Оба наблюдателя выпускают из рук по предмету. В неподвижном корабле предмет будет падать на пол кабины потому, что на него *действует сила тяготения* Земли. В движущемся корабле предмет упадёт на «пол» вследствие того, что на него действует *сила инерции* («пол» кабины, двигаясь с ускорением, «нагоняет» предмет). Если в каждом из кораблей одновременно падают *два* предмета, то оба они испытывают совершенно *одинаковые ускорения*.

Несмотря на то что корабли находятся в принципиально разных физических условиях, механические явления в них протекают совершенно *одинаково*. В корабле, движущемся с ускорением, всё происходит так, как если бы он *покоился в гравитационном поле* с напряжённостью $-\vec{g}$ ($\vec{g}$ – ускорение корабля). И невозможно указать эксперимент, который ответил бы на вопрос: находится ли корабль в состоянии ускоренного движения или же покоится в поле тяготения.

Сказанное означает, что *силы инерции* и *силы тяготения* в известном смысле *эквивалентны* друг другу. Аналогия между поведением тел в гравитационном поле и в неинерциальных системах отсчёта, движущихся поступательно, носит название *принципа эквивалентности*.

Заметим, что этот принцип имеет местный, «локальный» характер: он справедлив только для областей пространства, в пределах которых гравитационное поле *однородно* (если поле неоднородно, то напряжённость его в отдельных точках будет различной и силы инерции не будут эквивалентны силам тяготения).

Принцип эквивалентности нашёл своё отражение в общей теории относительности А. Эйнштейна.

5.5. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

1. *Вычисление массы Земли*

Ускорение «свободного» падения g_0, измеренное относительно Земли, весьма мало отличается от напряжённости поля тяготения Земли G в том же месте: $g_0 \approx G$. Но $G = \gamma \dfrac{M_З}{R_З^2}$ (вблизи поверхности Земли).

Значит,

$$g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}. \tag{5.19}$$

Из (5.19)

$$M_З = \frac{g_0 R_З^2}{\gamma}. \tag{5.20}$$

Подставляя сюда значения $g_0 = 9{,}81$ м/с, $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 и $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, получим $M_З \approx 5{,}96 \cdot 10^{24}$ кг.

2. *Определение массы Солнца*

Будем считать, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите. Роль центростремительной силы при этом движении играет сила тяготения:

$$\frac{M_З\upsilon^2}{r} = \gamma\frac{M_З M_С}{r^2}, \tag{5.21}$$

где $M_З$ – масса Земли; r – радиус земной орбиты; $M_С$ – масса Солнца; υ – линейная скорость Земли.

Из (5.21)

$$M_С = \frac{r\upsilon^2}{\gamma}. \tag{5.22}$$

Из астрономических наблюдений $\upsilon = 29{,}76$ км/с; $r = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м, отсюда масса Солнца получается равной $M_С = 1{,}97 \cdot 10^{30}$ кг.

3. *Вычисление первой космической скорости*

Первой космической скоростью называется скорость, которую необходимо сообщить телу в направлении, параллельном земной поверхности, чтобы оно превратилось в искусственный спутник Земли, обращающийся по круговой орбите в непосредственной близости от земной поверхности.

Центростремительное ускорение спутнику сообщает сила тяготения:

$$\frac{m\upsilon^2}{R_З} = \gamma\frac{mM_З}{R_З^2}, \tag{5.23}$$

откуда $\upsilon_I = \sqrt{\gamma\frac{M_З}{R_З}}$.

Учитывая, что $g_0 = \gamma\frac{M_З}{R_З^2}$, получим $\upsilon_I = \sqrt{g_0 R_З}$. Подставив $g_0 =$ 9,81 м/с, $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, найдём $\upsilon_I = 7{,}9$ км/с.

Аналогично определяется первая космическая скорость для любой другой планеты или спутника планеты. Например, первая космическая скорость для Луны равна 1,7 км/с.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти изменение ускорения силы тяжести тела на глубине h от поверхности Земли. На какой глубине ускорение силы тяжести составит 0,3 от ускорения силы тяжести на поверхности Земли? Плотность материала Земли считать постоянной. Считать, что со стороны вышележащего слоя тело не испытывает никакого притяжения.

Решение. Обозначим массу тела через m, его расстояние от центра Земли через R_1, ускорение силы тяжести на глубине h через g_1. Тогда вес Q тела на глубине h будет равен $Q = mg_1$. С другой стороны, учитывая гравитационное воздействие,

$$Q = F_1 = \gamma \frac{mM_1}{R_1^2},$$

где M_1 – масса Земли в объёме шара радиусом R_1,

$$M_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho,$$

ρ – средняя плотность Земли, получим $mg_1 = \gamma m \frac{4}{3}\pi R_1 \rho$.

На поверхности Земли вес тела

$$Q_1 = P = mg = \gamma \frac{mM}{R^2} = \gamma m \frac{4}{3}\pi R \rho.$$

Если возьмём отношение веса тела на глубине к весу тела на поверхности Земли, то получим

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R} = \frac{R-h}{R} = 1 - \frac{h}{R}.$$

Из этого выражения найдём, что $h = \left(1 - \frac{g_1}{g}\right)R.$ По условию задачи $\frac{g_1}{g} = 0{,}3$, тогда $h = 0{,}7R.$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте закон всемирного тяготения».
2. Что такое гравитационная постоянная?

3. Являются ли силы тяготения консервативными силами? Докажите.

4. Что такое гравитационное поле?

5. Что называется напряжённостью гравитационного поля?

6. Докажите, что ускорение свободного падения не зависит от массы падающих тел.

7. Что такое потенциал гравитационного поля?

8. Что называется линией вектора напряжённости?

9. В чём состоит эквивалентность сил тяготения и сил инерции?

10. Что такое первая космическая скорость? Выведите формулу этой скорости.

6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

6.1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА, МОМЕНТА ИМПУЛЬСА И МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

В основе физики и всего естествознания в целом лежат фундаментальные *законы сохранения материи и движения*. Важно понять, что все эти законы (законы сохранения импульса, момента импульса, энергии, электрического заряда и др.) справедливы *не всегда*, не во всякой системе тел, а только при соблюдении вполне определённых *условий*. Чтобы понять, при каких условиях справедлив тот или иной закон сохранения, нам придётся ввести некоторые предварительные понятия.

Совокупность тел (или частиц), рассматриваемых в данной задаче, образует *физическую систему*.

На каждое из тел системы могут действовать как *внутренние*, так и *внешние* силы (первые действуют со стороны других тел системы, вторые – со стороны внешних тел).

Система тел (*или частиц*) *называется замкнутой или изолированной*, *если на неё не действуют внешние силы*. Понятие замкнутой системы является абстракцией. Строго говоря, таких систем в природе не существует. Однако может случиться, что действие одних внешних сил уравновешивается или почти уравновешивается действием других внешних сил.

Если *результирующая* всех внешних сип, действующих на *каждое тело* системы, равна *нулю* или пренебрежимо мала, по сравнению с результирующей всех внутренних сил, то такую систему можно считать *замкнутой*.

Примеры почти изолированных систем:

1) солнечная система в целом (действие звёд мало);

2) бильярдные шары на горизонтальном столе (сила тяготения, действующая на каждый из шаров, почти уравновешивается реакцией стола, сила трения качения невелика).

Если *результирующая* внешних сил *не равна нулю*, то система является *незамкнутой*.

Какой бы ни была система, геометрическая *сумма всех внутренних сил системы* всегда равна *нулю* (так как в эту сумму входят *попарно* все *силы действия* и все *силы противодействия*).

$$\sum_{i,k=1}^{n}\vec{F}_{i,k}+\sum_{k,i=1}^{n}\vec{F}_{k,i}=0\,. \qquad (6.1)$$

Рассматривая вопрос о работе, мы установили, что силы могут быть *консервативными и неконсервативными* (работа первых *не зависит* от форм пути, последних – *зависит*).

Физическая система, в которой действуют только консервативные силы, называется *консервативной* или *потенциальной*.

Система, в которой кроме консервативных действуют ещё и неконсервативные силы, называется *неконсервативной* или *непотенциальной*.

Примеры консервативных систем: Земля–Солнце (действуют только силы тяготения); Земля–тело в отсутствие сопротивления воздуха (действуют силы тяготение); ядро атома–электрон (действуют электростатические силы и силы тяготения).

Установим условия, при которых импульс отдельного тела или системы тел сохраняется.

Назовём *импульсом системы геометрическую сумму импульсов всех тел*, входящих в эту систему. Условия сохранения импульса отдельного тела непосредственно вытекает из второго закона Ньютона:

$$d(m\vec{\upsilon})=\vec{F}dt\,. \qquad (6.2)$$

Если на тело не действуют силы или результирующая всех сил, *действующих на тело*, *равна нулю*, *то импульс тела сохраняется неизменным*:

$$d(m\vec{\upsilon})=0 \quad \text{и} \quad m\vec{\upsilon}=\text{const}\,. \qquad (6.3)$$

Рассмотрим *систему тел* (рис. 6.1). Пусть в системе три взаимодействующих движущихся тела. Обозначим импульсы этих тел в некоторый произвольный момент времени t соответственно:

$$m_1\vec{\upsilon}_1=\vec{K}_1;\; m_2\vec{\upsilon}_2=\vec{K}_2;\; m_3\vec{\upsilon}_3=\vec{K}_3\,.$$

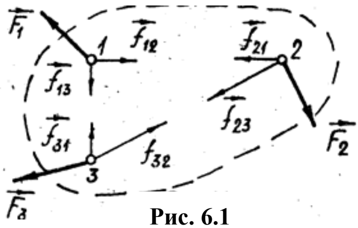


Рис. 6.1

Изменение импульса каждого из тел обусловлено действием внешних и внутренних сил (см. рис. 6.1):

$$d\vec{K}_1 = (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1)\,dt\,; \quad (6.4)$$

$$d\vec{K}_2 = (\vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2)\,dt\,; \quad (6.5)$$

$$d\vec{K}_3 = (\vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3)\,dt\,, \quad (6.6)$$

здесь малыми буквами f обозначены внутренние силы; большими F – внешние силы, например, $\vec{f}_{12}$ – это сила, которая действует на первое тело со стороны второго тела; $\vec{F}_1$ – результирующая всех внешних сил, действующих на первое тело.

Найдём *изменение импульса системы*, для чего геометрически сложим левые и правые части уравнений (6.4) – (6.6). При сложении учтём, что $\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0$ и $\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32} = 0$ и т.д. (по третьему закону Ньютона).

Тогда получим

$$d(\vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3) = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)\,dt\,,$$

или кратко

$$d\vec{K} = \vec{F}dt\,, \quad (6.7)$$

где $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + \vec{K}_3$ – импульс системы; $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ – результирующая всех внешних сил.

Если система является изолированной, то $\vec{F} = 0$, и, следовательно, $d\vec{K} = 0$, откуда

$$\vec{K} = \text{const}\,. \quad (6.8)$$

Импульс (количество движения) *замкнутой системы тел есть величина постоянная*. Это и есть формулировка закона сохранения импульса (количества движения) системы.

Если система обменивается движением с внешней средой, т.е. не является изолированной, изменение её импульса за время dt равно импульсу результирующей силы, действующей на систему, т.е. имеет место соотношение (6.7). Полученный результат легко обобщить на систему, состоящую из любого числа тел.

Обратим внимание на то, что уравнения (6.4) – (6.6) *составлены для одного и того же интервала времени dt*, а $\vec{f}_{12}, \vec{f}_{21}, ..., \vec{F}_1, \vec{F}_2$ ... – это силы, действующие на тела в *один и тот же момент времени t*. Соотношение (6.8) означает следующее: в замкнутой системе тел векторная сумма импульса всех тел *до и после взаимодействия равны*:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + ... + m_n\vec{\upsilon}_n = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2 + ... + m_n\vec{U}_2\,, \tag{6.9}$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{U}_i\,, \tag{6.10}$$

где $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_n$ – скорости тел после их взаимодействия.

Закон сохранения импульса можно формулировать и применять не только для полного вектора импульса, но и для его компонент (составляющих). *Если в данном направлении внешние силы не действуют или компенсируются, то составляющая импульса вдоль этого направления не изменяется*.

Рассмотрим, при каких условиях сохраняется *момент импульса* отдельного тела и системы тел.

Геометрическую сумму моментов импульса всех тел системы назовём *моментом импульса системы*.

Условия сохранения момента импульса отдельного тела вытекают из основного уравнения динамики вращательного движения:

$$d(I\vec{\omega}) = \vec{M}dt\,. \tag{6.11}$$

Если результирующий момент всех внешних сил равен нулю, то момент импульса тела остаётся величиной постоянной.

Если $\vec{M} = 0$, то

$$d(I\vec{\omega}) = 0 \quad \text{и} \quad I\vec{\omega} = \text{const}\,. \tag{6.12}$$

Рассмотрим *систему* взаимодействующих между собой и с внешней средой вращающихся тел.

Пусть в системе три тела. В произвольный момент времени *t* моменты импульсов этих тел равны соответственно:

$$I_1\vec{\omega}_1 = \vec{L}_1;\ I_2\vec{\omega}_2 = \vec{L}_2;\ I_3\vec{\omega}_3 = \vec{L}_3\,.$$

Изменение момента импульса каждого из тел обусловлено действием как внутренних, так и внешних вращательных моментов.

Тогда согласно основному закону динамики вращательного движения (изменение момента импульса тела равно импульсу момента действующих сил):

$$d\vec{L}_1 = (\vec{M}_{12} + \vec{M}_{13} + \vec{M}_1^{\text{внеш}})\,dt\;; \tag{6.13}$$

$$d\vec{L}_2 = (\vec{M}_{21} + \vec{M}_{23} + \vec{M}_2^{\text{внеш}})\,dt\;; \tag{6.14}$$

$$d\vec{L}_3 = (\vec{M}_{21} + \vec{M}_{32} + \vec{M}_3^{\text{внеш}})\,dt\;, \tag{6.15}$$

здесь $\vec{M}_{12}$ – вращательный момент, действующий на первое тело со стороны второго; $\vec{M}_1^{\text{внеш}}$ – полный вращательный момент, действующий на первое тело со стороны внешних тел (то же для второго и третьего тел).

Найдём изменения момента импульса системы за время dt, для чего почленно сложим уравнения (6.13) – (6.15). При сложении учтём, что $\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}$, $\vec{M}_{23} = -\vec{M}_{32}$ и т.д. (по третьему закону Ньютона), получим

$$d\,(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3) = (\vec{M}_1^{\text{внеш}} + \vec{M}_2^{\text{внеш}} + \vec{M}_3^{\text{внеш}})\,dt\;,$$

где $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = \vec{L}$ – момент импульса системы; $\vec{M}_1^{\text{внеш}} + \vec{M}_2^{\text{внеш}} +$ $+\vec{M}_3^{\text{внеш}} = \vec{M}^{\text{внеш}}$ – результирующий момент внешних сил.

Тогда имеем

$$d\vec{L} = \vec{M}^{\text{внеш}}dt\,. \tag{6.16}$$

Если на тела системы внешние вращательные моменты не действуют $\left(\vec{M}^{\text{внеш}} = 0\right)$, то

$$d\vec{L} = 0 \quad \text{и} \quad \vec{L} = \text{const}\,. \tag{6.17}$$

Таким образом, *момент импульса замкнутой системы тел есть величина постоянная*.

Если система не является замкнутой, *то изменение момента импульса этой системы равно импульсу внешнего вращательного момента*, *действующего на систему*, т.е. имеет место соотношение (6.16).

Полученный вывод можно обобщить на систему, состоящую из любого числа тел.

В замкнутой системе тел может происходить передача вращательного движения от одного тела к другому, но так, что геометрическая сумма моментов импульса всех тел все время остаётся постоянной:

$$I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + ... + I_n\vec{\omega}_n = I_1\vec{\omega}'_1 + I_2\vec{\omega}'_2 + ... + I_n\vec{\omega}'_2 \,. \tag{6.18}$$

Сформулируем *закон сохранения механической энергии*. Если тело *перемещается*, то оно обладает кинетической энергией. Мы знаем, что изменение кинетической энергии может быть обусловлено работой как консервативных, так и неконсервативных сил:

$$dE_{\text{к}} = dA^{\text{конс}} + dA^{\text{неконс}}, \tag{6.19}$$

в этом выражении $dA^{\text{конс}}$ – элементарная работа, совершаемая всеми консервативными силами; $dA^{\text{неконс}}$ – элементарная работа, совершаемая всеми неконсервативными силами.

$$\text{Если } dA^{\text{конс}} = 0 \text{ и } dA^{\text{неконс}} = 0, \text{ то } dE_{\text{к}} = 0 \text{ и } E_{\text{к}} = \text{const}\,.$$

т.е. *кинетическая энергия тела не изменится*, *если работа*, *совершаемая всеми приложенными к нему силами*, *равна нулю*.

Как известно, работа, совершаемая консервативной силой, равна *убыли потенциальной энергии*: $dA^{\text{конс}} = -dE_{\text{п}}$.

Учитывая это, соотношение (6.19) можно переписать:

$$dE_{\text{к}} = dA^{\text{неконс}} - dE_{\text{п}} \quad \text{или} \quad dE_{\text{к}} + dE_{\text{п}} = dA^{\text{неконс}},$$

но $dE_{\text{к}} + dE_{\text{п}} = d(E_{\text{к}} + E_{\text{п}}) = dE$, где $E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$ – полная механическая энергия, а dE – её изменение. Следовательно,

$$dE = dA^{\text{неконс}}\,. \tag{6.20}$$

Таким образом, *изменение полной механической энергии тела обусловлено работой только неконсервативных сил*. Если на тело не действуют неконсервативные силы ($dA^{\text{неконс}} = 0$), то полная механическая энергия этого тела сохраняется неизменной[5].

$$dE = 0 \quad \text{и} \quad E = \text{const}\,. \tag{6.21}$$

---

[5] В сущности, правильнее было бы говорить о сохранении полной энергии системы двух тел: данного тела и того тела, с которым оно взаимодействует посредством консервативной силы, ибо потенциальная энергия может быть только взаимной.

Этот вывод можно обобщить на систему, состоящую из любого числа взаимодействующих тел. Только в случае системы тел необходимо иметь в виду следующее: неконсервативные силы, действующие на тела системы, могут быть и внутренними, и внешними.

Поэтому для того, чтобы сохранялась механическая энергия системы тел, необходимо, чтобы система была *замкнутой* (не действуют внешние неконсервативные силы) и *консервативной* (не действуют внутренние неконсервативные силы)[6].

Таким образом, *полная механическая энергия замкнутой консервативной системы есть величина постоянная*:

$$E_{\text{п}} + \sum_{i=1}^{n} E_{\text{к}_i} = \text{const},$$

где $E_{\text{п}}$ – потенциальная энергия системы как целого; $E_{\text{к}_i}$ – кинетическая энергия i-го тела; $\sum_{i=1}^{n} E_{\text{к}_i}$ – кинетическая энергия системы.

В замкнутой консервативной системе могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно, причём убыль кинетической энергии всегда равна приращению потенциальной энергии, и наоборот.

Если внутри замкнутой системы действуют *неконсервативные* силы, то механическая энергия такой системы постепенно *уменьшается*, превращаясь в другие, немеханические формы энергии. Мерой этого превращения является *работа*, совершаемая неконсервативными силами.

Замкнутые неконсервативные системы, механическая энергия которых убывает, называются диссипативными[7].

Представим, к примеру, движение парашютиста после того, как он раскрыл парашют. Это движение является, в первом приближении, равномерным. Так как $\vec{\upsilon}$ = const, кинетическая энергия парашютиста во время движения не изменяется: $E_{\text{к}}$ = const.

Потенциальная энергия парашютиста уменьшается: парашютист приближается к Земле. Следовательно, полная механическая энергия замкнутой системы Земля–парашютист–атмосфера уменьшается. Эта энергия рассеивается в атмосфере, превращаясь в энергию хаоти-

---

[6] Консервативные силы, определяющие наличие потенциальной энергии системы, всегда следует считать внутренними силами.

[7] От лат. dissipatio – рассеяние.

ческого движения молекул воздуха. Мерой этого превращения является работа сил сопротивления воздуха, действующих на парашютиста во время его движения.

В принципе, любая реальная механическая система диссипативна, ибо в любой системе всегда действуют какие-либо неконсервативные силы, например силы трения, сопротивления, силы пластической деформации и т.д.

Однако следует помнить, что в любой замкнутой системе убыль механической энергии в точности равна приращению энергии других, немеханических форм движения, т.е. полная энергия различных форм движения в такой системе сохраняется неизменной.

В заключение отметим, что диссипативные системы не следует отождествлять с просто неконсервативными системами, ибо механическая энергия первых может только *убывать*, а энергия последних может и *убывать*, *и возрастать* за счёт притока энергии извне.

6.2. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ФИЗИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

Явление отдачи

Закон сохранения импульса позволяет объяснить *явление отдачи*. Это явление имеет место и при взаимодействии макроскопических тел (выстрел из орудия, реактивное движение), и при взаимодействии микрообъектов (например, распад атомных ядер).

Рассмотрим, к примеру, α-распад. При α-распаде ядра радиоактивного элемента выбрасывают α-частицы – ядра атомов гелия. Если до распада основное ядро покоилось, то суммарный импульс продуктов распада должен остаться равным нулю:

$$M\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_2 = 0\,, \tag{6.21}$$

здесь M и $\vec{\upsilon}_1$ – масса и скорость вновь образовавшегося ядра; m и $\vec{\upsilon}_2$ – масса и скорость α-частицы.

При этом α-частица и ядро разлетаются в прямо противоположные стороны: $M\vec{\upsilon}_1 = -m\vec{\upsilon}_2$. Скорости ядра и α-частицы обратно пропорциональны их массам:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{m}{M}\,. \tag{6.22}$$

Заметим, что на явлении отдачи ядер был осуществлён один из первых экспериментов по обнаружению *нейтрино* – самой «неуловимой» из элементарных частиц.

Явление «*непрерывной отдачи*» лежит в основе *реактивного движения*.

Реактивный двигатель (ракета) – единственный летательный аппарат, *не нуждающийся* при своём движении в *опоре*. Изменение скорости реактивного двигателя осуществляется без участия внешних сил (если не учитывать действие сил тяготения, от которых, как известно, нельзя избавиться).

Рассмотрим, от чего зависит скорость, приобретаемая ракетой во время разгона.

Вследствие непрерывного истечения продуктов сгорания – масса ракеты постепенно *уменьшается*, а её скорость *возрастает*.

Пусть в некоторый момент времени t масса ракеты и её скорость относительно Земли равны соответственно M и $\vec{\upsilon}$. Импульс ракеты в этот момент времени $M\vec{\upsilon}$. Если за время dt масса выброшенных продуктов сгорания равна dM, то масса ракеты в момент временя $t + dt$ станет равной $(M – dM)$, а её импульс $(M – dM)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon})$, $d\vec{\upsilon}$ – приращение скорости ракеты за время dt. Импульс выброшенных газов в момент времени $t + dt$:

$$dM(\vec{U} + \vec{\upsilon}),$$

где $\vec{U}$ – скорость истечения газов относительно ракеты; $(\vec{U} + \vec{\upsilon})$ – скорость газов относительно Земли.

В соответствии с законом сохранения импульса импульсы системы до и после взаимодействия равны

$$M\vec{\upsilon} = (M - dM)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}) + dM(\vec{U} + \vec{\upsilon}). \tag{6.23}$$

Спроектируем все векторы этого соотношения на направление $\vec{\upsilon}$:

$$M\upsilon = (M - dM)(\upsilon + d\upsilon) + dM(-U + \upsilon) \tag{6.24}$$

(скорость $\vec{U}$ *противоположна* направлению $\vec{\upsilon}$, поэтому её проекция на направление $\vec{\upsilon}$ отрицательна). Раскроем скобки:

$$M\upsilon = M\upsilon - dM\upsilon + Md\upsilon - dMd\upsilon - dMU + dM\upsilon.$$

Пренебрегая бесконечно малой величиной второго порядка $dMd\upsilon$, получим $Md\upsilon - dMU = 0$.

Разделим переменные: $d\upsilon = U\dfrac{dM}{M}$.

Учтём, что dM – изменение массы ракеты *отрицательно*;

$$d\upsilon = -U\frac{dM}{M} \qquad (6.25)$$

(dM теперь – абсолютная величина изменения массы ракеты). Знак «минус» означает, что *уменьшению массы* ракеты соответствует *возрастание её скорости*.

Полагая, что скорость истечения продуктов сгорания относительно ракеты постоянна, нетрудно проинтегрировать написанное уравнение. Если масса ракеты на старте (υ = 0) была M_0, а в момент, когда скорость достигла значения υ, стала равной M, то интегрирование даёт

$$\int_0^{\upsilon} d\upsilon = -U\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}; \quad \upsilon = U\ln\frac{M_0}{M}. \qquad (6.26)$$

Полученное соотношение называется формулой Циолковского, а величина $\frac{M_0}{M}$ – числом Циолковского.

При скорости истечения газов $\upsilon > 2000$ м/с и $\frac{M_0}{M} = 10$ скорость ракеты получается порядка 4,8 км/с. Дальнейший рост числа Циолковского приводит к довольно медленному увеличению скорости ракеты. Поэтому технически целесообразным оказывается создание ракетных «поездов» – многоступенчатых ракет.

Неупругие столкновения

Столкновение (*соударение*) – такое *сближение* двух или нескольких тел, при котором между телами имеет место *кратковременное*, но весьма *сильное взаимодействие*, *при этом скорости меняются на конечные величины за этот очень малый промежуток времени*.

При этом вовсе необязательно, чтобы тела непосредственно соприкасались (хотя в некоторых случаях это имеет место).

Примеры соударений: удар бильярдных шаров, столкновения молекул и атомов, попадание пули в мишень и т.д.

Так как время взаимодействия при столкновениях мало, а силы, возникающие при этом, весьма велики, то действием всех постоянных сил (сил тяготения, например) можно пренебречь и рассматривать соударяющиеся тела как *замкнутую систему*. Как известно, только в *замкнутой* системе выполняются законы *сохранения*.

Различают *упругие* и *неупругие* столкновения. Предельными, идеализированными случаями столкновений являются столкновения *абсолютно упругие и абсолютно неупругие*.

Если после столкновения внутреннее состояние тел *изменяется*, если тела *не восстанавливают* свою первоначальную форму, если столкновение сопровождается *превращением кинетической энергии* тел в другие виды, то столкновение называется *неупругим*.

Столкновение тел называется *абсолютно неупругим*, если по его завершении тела двигаются как единое целое. Примеры: столкновение шаров из мягкого воска, столкновение двух разноимённых ионов, сопровождающееся образованием молекулы, захват свободного электрона положительным ионом и т.д.

Рассмотрим абсолютно неупругое столкновение более подробно. Пусть абсолютно неупругое столкновение происходит между двумя телами массами m_1 и m_2, движущимися со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. По закону сохранения импульса

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{U} + m_2\vec{U}\,, \tag{6.27}$$

откуда скорость тел после столкновения

$$\vec{U} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{6.28}$$

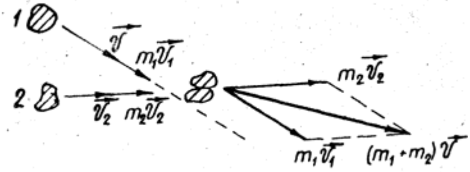


Рис. 6.2

Как видно из этой формулы, движение тел после столкновения происходит *вдоль диагонали параллелограмма*, построенного на векторах $m_1\vec{\upsilon}_1$ и $m_2\vec{\upsilon}_2$ как на сторонах (рис. 6.2).

Если до столкновения линии скоростей $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ лежали вдоль прямой, соединяющей центры масс тел, то столкновение называется *центральным*, в противном случае – нецентральным.

В случае центрального соударения при переходе от векторной формы записи соотношения (6.28) к скалярной векторы импульсов разумно проектировать на направление, совпадающее с направлением вектора скорости одного из тел, например первого. Тогда

$$U = \frac{m_1\upsilon_1 \pm m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\,,$$

где знак «+» относится к случаю, когда тела до столкновения *двигались в одном* направлении, «–» – когда тела двигались *навстречу* друг другу.

Найдём, какая часть кинетической энергии превращается при центральном абсолютно неупругом столкновении в другие виды энергии.

Суммарная кинетическая энергия тел до столкновения равна $E_{к1} = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}$, после столкновения $E_{к2} = \frac{(m_1 + m_2)U^2}{2}$.

В случае центрального столкновения $U = \frac{m_1\upsilon_1 \pm m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$. Тогда

$E_{к2} = \frac{m_1^2\upsilon_1^2 \pm 2m_1m_2\upsilon_1\upsilon_2 + m_2^2\upsilon_2^2}{2(m_1 + m_2)}$.

Убыль кинетической энергии системы

$$E_{к1} - E_{к2} = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\upsilon_1 \mp \upsilon_2)^2 . \qquad (6.29)$$

Таким образом, часть кинетической энергии, превращающаяся в другие виды при абсолютно неупругом центральном соударении, зависит от *соотношения масс тел и их относительной скорости* ($\upsilon_1 \mp \upsilon_2$).[8]

Рассмотрим один частный случай: $\upsilon_1 >> \upsilon_2$, но m_1 << m_2 (это имеет место с точки зрения *классической электронной теории* металлов при столкновении электронов проводимости в металле с узлами кристаллической решётки).

Разделим числитель и знаменатель в выражении (6.29) на m_2:

$$E_{к1} - E_{к2} = \frac{1}{2}\frac{m_1}{1 + \frac{m_1}{m_2}}(\upsilon_1 \pm \upsilon_2)^2 .$$

Так как $\upsilon_1 >> \upsilon_2$ и $m_1 << m_2$, то величиной υ_2 по сравнению с υ_1 и дробью $\frac{m_1}{m_2}$ по сравнению с единицей можно пренебречь. Тогда

[8] Знак «–» в окончательной формуле (6.29) относится к случаю, когда тела до столкновения двигались в одном направлении, «+» – когда тела двигались навстречу друг другу.

$$E_{к1} - E_{к2} \approx \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}. \qquad (6.30)$$

Таким образом, при абсолютно неупругом столкновении быстрой частицы малой массы с *медленной* (или покоящейся) частицей *большой массы* практически *вся* кинетическая энергия быстрой частицы преобразуется в другие виды энергии.

Упругие столкновения

Столкновение называется *абсолютно упругим*, если по его завершении тела *полностью восстанавливают* свою первоначальную *форму* и в их внутреннем состоянии *не происходит* каких-либо *изменений*, если сохраняется суммарная механическая энергия тел.

Столкновения обычных, макроскопических тел в реальных условиях всегда бывают в той или иной степени неупругими, ибо они всегда сопровождаются нагреванием тел, образованием акустических волн и т.д., т.е. превращением части механической энергии тел в другие виды. Однако в некоторых случаях столкновения макроскопических тел можно с достаточной степенью точности считать абсолютно упругими (например, столкновение шаров из слоновой кости или закалённой стали).

Особо важную роль упругие столкновения играют в *физике атомных явлений*. Так, столкновения молекул газа друг с другом и со стенками сосуда, в который газ заключён, можно уподобить соударениям абсолютно упругих шаров. Упруго рассеиваются α-частицы при прохождении через тонкие плёнки вещества (опыты Резерфорда), рентгеновские кванты при взаимодействии с электронами и т.д.

Рассмотрим *абсолютно упругое центральное столкновение двух шаров*. Пусть массы шаров m_1 и m_2. Шары двигаются один вслед за другим (первый шар догоняет второй) и перед столкновением имеют скорости $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$. Во время столкновения шары *деформируются*, силы упругой деформации изменяют скорости шаров. Обозначим скорости шаров после столкновения $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$.

Полагая, что шары образуют замкнутую систему, применим к ним закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2. \qquad (6.31)$$

Пусть массы шаров таковы, что и после соударения они продолжают двигаться в том же направлении, в каком двигались до столкновения. Тогда соотношение (6.31) в проекциях запишется так

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1U_1 + m_2U_2. \qquad (6.32)$$

Детальный анализ деформации шаров в процессе упругого столкновения весьма сложен. Но этот анализ, в принципе, и не нужен. Так как шары полностью восстанавливают свою первоначальную форму, и в их внутреннем состоянии не происходит изменений, то закон сохранения энергии сводится к сохранению *кинетической энергии*:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1U_1^2}{2}+\frac{m_2U_2^2}{2}\,. \tag{6.33}$$

Решая уравнения (6.32) и (6.33) совместно (это следует проделать самостоятельно), получим

$$U_1=\frac{\upsilon_1(m_1-m_2)+2m_2\upsilon_2}{m_1+m_2}\,; \tag{6.34}$$

$$U_2=\frac{\upsilon_2(m_2-m_1)+2m_1\upsilon_1}{m_1+m_2}\,. \tag{6.35}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) *Массы шаров равны*: $m_1 = m_2 = m$. Тогда $U_1 = \upsilon_2$ и $U_2 = \upsilon_1$. Шары просто обмениваются своими скоростями.

Если до столкновения второй шар покоился ($\upsilon_2 = 0$), то после столкновения он начинает двигаться со скоростью первого шара $U_2 = \upsilon_1$, а первый шар останавливается $U_1 = 0$.

б) *Масса второго шара значительно больше массы первого* $m_2 >> m_1$. Разделим числитель и знаменатель соотношений (6.34) и (6.35) на m_2:

$$U_1=\frac{\left(\dfrac{m_1}{m_2}-1\right)\upsilon_1+2\upsilon_2}{\dfrac{m_1}{m_2}+1} \quad \text{и} \quad U_2=\frac{\left(1-\dfrac{m_1}{m_2}\right)\upsilon_2+2\dfrac{m_1}{m_2}\upsilon_1}{\dfrac{m_1}{m_2}+1}\,.$$

Отношением $\dfrac{m_1}{m_2}$ можно пренебречь, тогда

$$U_1\approx-\upsilon_1+2\upsilon_2 \quad \text{и} \quad U_2\approx\upsilon_2\,.$$

Вывод: при упругом центральном столкновении шара малой массы с шаром большой массы скорость шара большей массы практически *не изменяется*. Если $\upsilon_2 = 0$ (массивный шар покоится), то $U_1\approx-\upsilon_1$, т.е. шар малой массы при упругом ударе отскакивает от массивного неподвижного шара со скоростью, почти равной по величине и противоположной по направлению той скорости, с которой он ударяется. При этом лёгкий шар практически *не передаёт* свою кинетическую энергию массивному шару.

Полученный вывод можно применить к упругому удару шара о неподвижную стенку, перпендикулярную направлению движения шара (с этим случаем мы сталкиваемся, например, при расчёте давления, оказываемого молекулами газа на стенки сосуда).

Найдём изменение импульса шара при таком упругом отражении:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = m_1 U_1 - m_1 \upsilon_1 = -m_1 \upsilon_1 - m_1 \upsilon_1 = -2 m_1 \upsilon_1 .$$

Такой же по величине, но противоположной по знаку импульс получит стенка.

в) Шары двигаются *в одном направлении*. $m_1 << m_2$, но $\upsilon_1 >> \upsilon_2$, тогда $U_1 = -\upsilon_1 + 2\upsilon_2 = -(\upsilon_1 - 2\upsilon_2)$.

Малый шар отскакивает от большего со скоростью, *меньшей* первоначальной на величину $2\upsilon_2$.

Нечто подобное происходит в цилиндре с газом при *расширении газа*. Молекулы, ударяющиеся об удаляющийся поршень, *теряют* свою скорость и, следовательно, кинетическую энергию. Эти «потери» проявляются в *охлаждении* газа.

г) Шары двигаются *навстречу* друг другу. $m_1 << m_2$, но $\upsilon_1 >> \upsilon_2$, тогда, $U_1 = -\upsilon_1 - 2\upsilon_2 = -(\upsilon_1 + 2\upsilon_2)$, проекция скорости υ_2 на положительно выбранное направление отрицательна.

Малый шар отскакивает от большого со скоростью, *превышающей* ту, с которой он ударяется о большой шар на величину $2\upsilon_2$.

Нечто подобное происходит в цилиндре с газом при *сжатии* газа. Молекулы, ударяющиеся о *надвигающийся* поршень, увеличивают свою скорость и кинетическую энергию, что проявляется в *нагревании газа*.

Расчёт второй космической скорости (*для Земли*)

Вторая «земная» космическая скорость υ_{II} – это скорость, которую необходимо сообщить телу *относительно Земли*, чтобы оно преодолело поле земного тяготения, т.е. оказалось способным удалиться от Земли на бесконечно большое расстояние.

Пренебрегая действием на тело Солнца, Луны, планет, звёзд и т.д. и полагая, что в системе Земля–тело отсутствуют неконсервативные силы (а таковые в действительности имеются – это силы сопротивления атмосферы), мы можем считать эту систему замкнутой и консервативной. В такой системе полная механическая энергия есть величина постоянная.

Если нулевой уровень потенциальной энергии выбрать в бесконечности, то полная механическая энергия тела в любой точке траектории будет равна нулю (по мере удаления тела от Земли кинетическая энергия, сообщенная ему на старте, будет превращаться в потенциальную. В бесконечности, где потенциальная энергия тела равна нулю, обратится в нуль и кинетическая энергия $E_к = 0$. Следовательно, полная энергия $E = E_п + E_к = 0$).

Приравняв полную энергию тела на старте (на поверхности Земли) и в бесконечности, мы можем вычислить вторую космическую скорость. На старте тело обладает положительной кинетической энергией $E_к = \frac{m\upsilon_{II}^2}{2}$ и *отрицательной* потенциальной энергией $E_п = -\gamma \frac{mM_З}{R_З}$,

где m – масса тела; $M_З$ – масса Земли; υ_{II} – скорость тела на старте (искомая космическая скорость); $R_З$ – радиус Земли (предполагаем, что необходимую космическую скорость тело приобретает в непосредственной близости от поверхности Земли).

Полная энергия тела

$$\frac{m\upsilon_{II}^2}{2} + \left(-\gamma \frac{mM_З}{R_З}\right) = 0\,, \tag{6.36}$$

откуда

$$\upsilon_{II} = \sqrt{2\gamma \frac{M_З}{R_З}}\,. \tag{6.37}$$

Массу Земли можно выразить через ускорение свободного падения g_0 (вблизи поверхности Земли): $g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$.

Подставив это выражение в (6.37), получим окончательно

$$\upsilon_{II} = \sqrt{2g_0R_З} = \upsilon_I\sqrt{2}\,, \tag{6.38}$$

так как $\sqrt{g_0R_З}$ есть первая космическая скорость.

Условия равновесия механической системы

Пусть на некоторое тело действует только консервативная сила. Это значит, что данное тело вместе с телами, с которыми оно взаимодействует, образует *замкнутую консервативную систему*. Выясним, при каких условиях рассматриваемое тело будет находиться в состоянии равновесия (сформулируем эти условия с *энергетической точки зрения*).

Условия равновесия с точки зрения *динамики* нам известны: тело находится в равновесии, если его скорость и геометрическая сумма всех действующих на него сил равны *нулю*:

$$\vec{\upsilon} = 0\,; \tag{6.39}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0\,. \tag{6.40}$$

Пусть консервативная сила, действующая на тело, такова, что потенциальная энергия тела зависит только от одной координаты, например x. График этой зависимости приведён на рис. 6.3. Из связи потенциальной энергии с силой следует, что в состоянии равновесия производная от потенциальной энергии по x равна нулю:

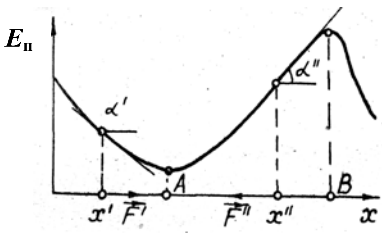


Рис. 6.3

$$F_x = -\frac{dE_п}{dx} = 0 \tag{6.41}$$

т.е. в состоянии равновесия тело обладает экстремальным запасом потенциальной энергии. Убедимся в том, что потенциальная энергия в состоянии устойчивого равновесия *минимальная*, а в состоянии неустойчивого равновесия – *максимальная*.

Устойчивое равновесие системы характеризуется тем, что при отклонении системы из этого состояния возникают силы, *возвращающие* систему в первоначальное состояние.

При отклонении из состояния неустойчивого равновесия возникают силы, стремящиеся отклонить систему ещё *дальше* от первоначального положения. Отклоним тело из положения *A влево* (см. рис. 6.3). При этом появится сила $\vec{F}'$, проекция которой на ось x равна

$$F_x' = -\frac{dE_п}{dx}. \tag{6.42}$$

Производная $\dfrac{dE_п}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$ в точке x' отрицательна (угол α' тупой).

Из (6.42) следует, что $\vec{F}' > 0$; направление силы $\vec{F}'$ *совпадает* с направлением оси x, т.е. сила направления *к положению равновесия А*. Тело самопроизвольно, без дополнительного воздействия вернётся в положение равновесия. Следовательно, состояние *А* – состояние *устойчивого* равновесия. Но в этом состоянии, как видно из графика, потенциальная энергия *минимальна*.

Отклоним тело из положения *В* также влево. Проекция силы $\vec{F}''$ на ось x $F''_x = -\dfrac{dE_п}{dx}$ получается *отрицательной* ($\dfrac{dE_п}{dx} = \mathrm{tg}\alpha > 0$, так как угол α'' острый).

Это значит, что направление силы $\vec{F}''$ *противоположно* положительному направлению оси x, т.е. сила $\vec{F}''$ направлена *от положения равновесия*. Состояние *В*, в котором потенциальная энергия максимальна, *неустойчиво*.

Таким образом, в состоянии *устойчивого* равновесия потенциальная энергия системы *минимальна*, в состоянии *неустойчивого* равновесия – *максимальна*.

Если известно, что потенциальная энергия некоторой системы *минимальна*, то это ещё не значит, что система находится в равновесии. Необходимо ещё, чтобы в этом состоянии система не обладала кинетической энергией

$$E_к = 0\,. \tag{6.43}$$

Итак, система находится в состоянии устойчивого равновесия, если $E_к = 0$, а $E_п$ минимальна. Если $E_к = 0$, а $E_п$ максимальна, то система находится в неустойчивом равновесии.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Человек сидит на скамье Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота обращения $\nu_1 = 0{,}5$ об/с. Момент инерции тела человека относительно оси вращения $J_0 = 1{,}6$ кг·м^2. В вытянутых в стороны руках человек держит две гири массой $m = 2$ кг каждая. Расстояние между гирями $l_1 = 1{,}6$ м.

Сколько оборотов в секунду будет делать скамейка с человеком, если он скрестит руки и расстояние l_2 между гирями станет равным 0,4 м? Моментом инерции скамейки пренебречь.

Решение. Человек, держащий гири (рис. 1), составляет вместе со скамейкой изолированную механическую систему, поэтому момент импульса $J\omega$ этой системы должен иметь постоянное значение.

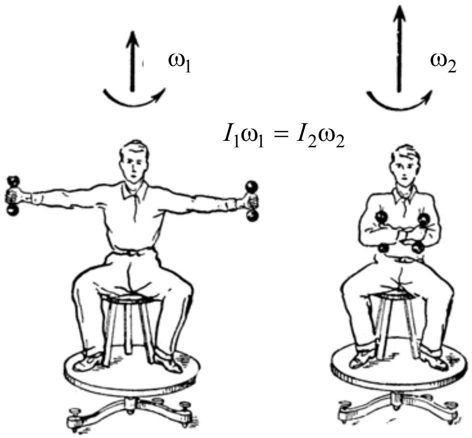


Рис. 1

Следовательно, для нашего случая

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 и ω_1 – момент инерции человека и угловая скорость скамейки и человека с вытянутыми руками; J_2 и ω_2 – момент инерции тела человека и угловая скорость скамейки и человека с опущенными руками.

Отсюда $\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1$, заменив угловую скорость через частоту ν ($\omega = 2\pi\nu$), получим

$$\nu_2 = \frac{J_1}{J_2}\nu_1.$$

Момент инерции системы, рассматриваемой в данной задаче, равен сумме момента инерции тела человека J_0 и момента инерции гирь в руках человека, который можно определить по формуле момента инерции материальной точки $J = mr^2$.

Следовательно,

$$J_1 = J_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2, \quad J_2 = J_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2,$$

где m – масса каждой из гирь; l_1 и l_2 – первоначальное и конечное расстояния между ними.

С учётом сделанных замечаний имеем

$$\nu_2 = \frac{J_1}{J_2}\nu_1 = \frac{J_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2}{J_0 + 2m\left(\frac{L_2}{2}\right)^2}\nu_1.$$

Подставляя численные значения величин, найдём

$$\nu_2 = \frac{1{,}6 + 2\cdot 2\left(\frac{1{,}6}{2}\right)^2}{1{,}6 + 2\cdot 2\left(\frac{0{,}4}{2}\right)^2}\cdot 0{,}5 = 1{,}189 \text{ об/с}.$$

Пример 2. Стержень длиной l = 1,5 м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (рис. 2). В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $\upsilon_0 = 500$ м/с, и застревает в стержне.

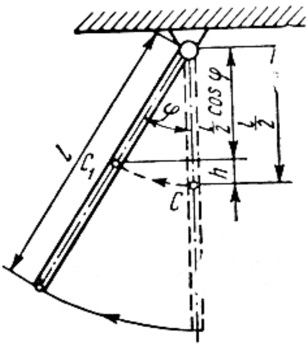


Рис. 2

На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Решение. Удар пули следует рассматривать как неупругий: после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с некоторой угловой скоростью ω и сообщает ему некоторую кинетическую энергию $E_к = \frac{J\omega^2}{2}$, где $J = \frac{Ml^2}{3}$ – момент инерции стержня относительно оси вращения. Затем стержень поворачивается на некоторый угол, причём его центр тяжести поднимается на некоторую высоту $h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$.

В отклонённом положении стержень будет обладать потенциальной энергией $E_п = Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi)$.

Потенциальная энергия получена за счёт кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии, т.е.

$$Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{J\omega^2}{2}, \quad \text{откуда } \cos\varphi = 1-\frac{J\omega^2}{Mgl} = 1-\frac{l\omega^2}{3g}.$$

Для определения угловой скорости ω воспользуемся законом сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$ и поэтому момент импульса стержня $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня, имея линейную скорость υ_0, и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси. Начальный импульс пули $L_{02} = m\upsilon_0 r$, где $r = \frac{l}{2}$ – расстояние точки попадания пули от оси вращения.

В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля – линейную скорость υ, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения.

Так как $\upsilon = \omega r$, то конечный момент импульса пули

$$L_2 = m\upsilon r = mr^2\omega.$$

Применив закон сохранения момента импульса, можно записать

$$m\upsilon_0 r = J\omega + mr^2\omega,$$

откуда

$$\omega = \frac{m\upsilon_0 r}{J + mr^2} = \frac{m\upsilon_0 r}{\frac{Ml^2}{3} + mr^2}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\omega = \frac{0{,}01\cdot 500\cdot 0{,}75}{\frac{1}{3}10(1{,}5)^2 + 0{,}01(0{,}75)^2} = 0{,}5 \text{ с}^{-1}.$$

После этого находим

$$\cos\varphi = 1-\frac{1{,}5\cdot(0{,}5)^2}{3\cdot 9{,}8} = 0{,}87, \quad \varphi = 9°20'.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какая система тел называется замкнутой?
2. Какая система взаимодействующих тел называется консервативной?
1. При каких условиях сохраняется импульс отдельного тела?
2. Сформулируйте закон сохранения импульса для системы тел.
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса (для отдельного тела и системы тел).
4. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
5. Какие системы называются диссипативными?
6. Что называется столкновением тел?
7. Какое столкновение называется абсолютно неупругим и какое абсолютно упругим?
10. Какие законы выполняются при абсолютно неупругом и абсолютно упругом столкновениях тел, образующих замкнутую систему?
11. Что такое вторая космическая скорость? Выведите формулу для этой скорости.
12. Сформулируйте условия равновесия механической системы.

7. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

7.1. ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ. ЗАКОН АРХИМЕДА

Жидкостями называются вещества, имеющие *определённый объём* и принимающие *форму* того сосуда, в котором они находятся.

Раздел механики, в котором изучаются равновесие и движение жидкостей, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твёрдыми телами, называется гидромеханикой.

Гидромеханика обычно имеет дело с несжимаемыми жидкостями – жидкостями, плотность которых всюду одинакова и не меняется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от неё, будут действовать на каждый её элемент ΔS с силами которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS, так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение.

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется *давлением p жидкости*:

$$p = \Delta F / \Delta S.$$

Единицей давления является паскаль (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределённой по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2 (1 Па = 1 Н/м^2).

Давление при равновесии жидкостей подчиняется закону Паскаля: *давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям и передаётся ею одинаково по всему объёму*.

При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда.

Если жидкость несжимаема, то её плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес столба $P = \rho g S h$, а давление на его основание

$$p = P / S = \rho g S h / S = \rho g h, \tag{7.1}$$

т.е. давление изменяется линейно с высотой. Давление $\rho g h$ называется *гидростатическим давлением*.

Согласно (7.1) сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая законом Архимеда: *на тело, погруженное в жидкость, действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости*:

$$F_A = \rho g V , \tag{7.2}$$

где ρ – плотность жидкости; V – объём погруженного в неё тела.

7.2. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ ЖИДКОСТИ

Движение жидкостей называется *течением*, а совокупность частиц движущейся жидкости – *потоком*. Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 7.1). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения, и меньше там, где жидкость течёт медленнее.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют *трубкой тока*. Течение жидкости называется *установившимся* (стационарным), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей со временем не изменяются.

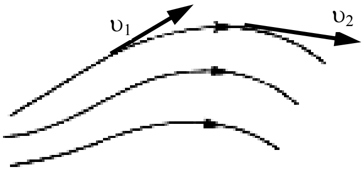


Рис. 7.1

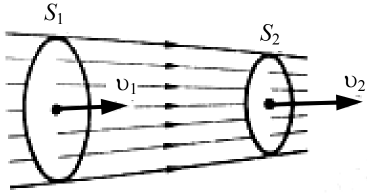


Рис. 7.2

Выберем произвольно в какой-либо трубке тока два сечения S_1 и S_2, перпендикулярные направлению скорости (рис. 7.2).

За время Δt через сечение S проходит объём жидкости $S\upsilon\Delta t$, следовательно, за 1 с через сечение S_1 пройдёт объём жидкости $S_1\upsilon_1$, а через сечение S_2 объём жидкости $S_2\upsilon_2$. Предполагается, что скорости υ_1, υ_2 в сечениях не изменяются с течением времени. Учитывая, что жидкость несжимаема, через оба сечения за 1 с пройдёт одинаковый объём жидкости, т.е.

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 = \text{const}. \tag{7.3}$$

Выражение (7.3) называется *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости.

7.3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 (рис. 7.3). Пусть в месте сечения S_1 скорость течения υ_1, давление p_1 и высота, на которой расположено это сечение, – h_1. Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения υ_2, давление p_2 и высота сечения h_2. За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечения S_1 к сечению S_1' и от S_2 к S_2'.

По закону сохранения энергии, изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеальной несжимаемой жидкости равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_1 - E_2 = A, \tag{7.4}$$

где E_1 и E_2 – полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 соответственно.

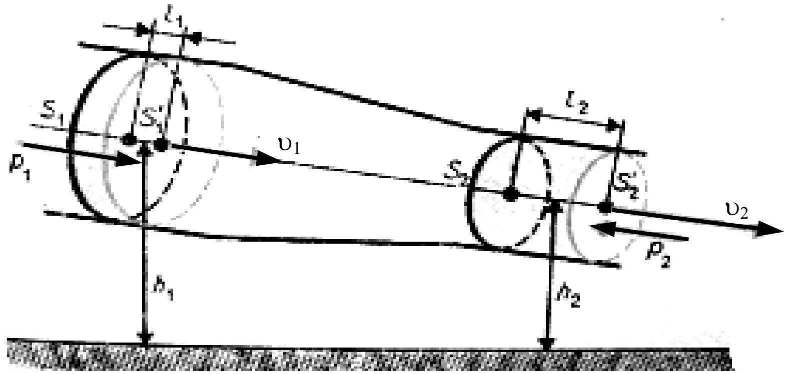


Рис. 7.3

С другой стороны, A – это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключённой между сечениями S_1 и S_2, за рассматриваемый промежуток времени Δt. Для перенесения массы m от S_1 до S_1' жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = \upsilon_1 \Delta t$ и от S_2 к S_2' – на расстояние $l_2 = \upsilon_2 \Delta t$. При этом l_1 и l_2 настолько малы, что значения скорости, давления и высоты в соответствующих сечениях не меняются. Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \qquad (7.5)$$

где $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = -p_2 S_2$ (направлена противоположно течению жидкости, см. рис. 7.3).

Полные энергии E_1 и E_2 будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$E_1 = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1, ; \qquad (7.6)$$

$$E_2 = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2. \qquad (7.7)$$

Подставив (7.6) и (7.7) в (7.2) и приравнивая (7.2) и (7.3), получим

$$\frac{m\upsilon_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t = \frac{m\upsilon_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t. \qquad (7.8)$$

Согласно уравнению неразрывности жидкости (7.3), объём жидкости, протекающий через сечения S_1 и S_2, остаётся постоянным, т.е.

$$\Delta V = S_1 \upsilon_1 \Delta t = S_2 \upsilon_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (7.8) на ΔV, получим

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где ρ – плотность жидкости.

Но так как сечения выбирались произвольно, то можно записать

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \qquad (7.9)$$

Выражение (7.9) называется *уравнением Бернулли* в честь швейцарского физика Д. Бернулли. Это уравнение есть выражение закона сохранения энергии применительно к стационарному течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей с малой вязкостью.

Величина p в формуле (7.9) называется статическим давлением, величина $\dfrac{\rho\upsilon^2}{2}$ – динамическим давлением, $\rho g h$ – гидростатическим давлением, $p + \dfrac{\rho\upsilon^2}{2}$ – полным давлением.

Из уравнения Бернулли (7.9) и уравнения неразрывности (7.3) для горизонтальной трубки тока следует, что при течении жидкости по трубке переменного сечения статическое давление будет больше там, где скорость меньше, а сечение больше и, наоборот, статическое давление меньше в сечениях с большей скоростью. Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы переменного сечения ряд манометров (рис. 7.4).

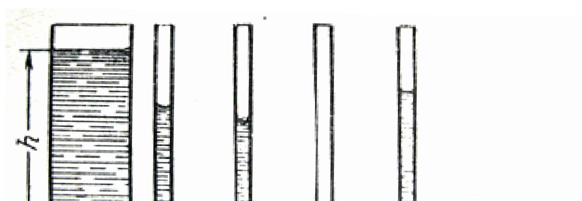


Рис. 7.4

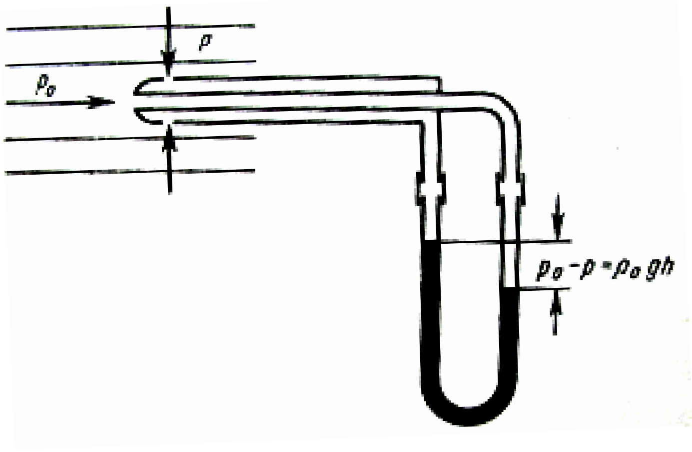


Рис. 7.5

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости, то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито–Прандтля (рис. 7.5). С помощью одной из трубок измеряется полное давление (p_0), с помощью другой – статическое (p).

Манометром измеряют разность давлений:

$$p_0 - p = \rho_0 g h\,, \tag{7.10}$$

где ρ_0 – плотность жидкости в манометре.

С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \rho \upsilon^2 / 2\,. \tag{7.11}$$

Из формул (7.10) и (7.11) получаем искомую скорость потока жидкости:

$$\upsilon = \sqrt{2\rho_0 g h / \rho}.$$

Уменьшение статического давления в сечениях, где скорость потока больше, положено в основу работы водоструйного насоса (рис. 7.6).

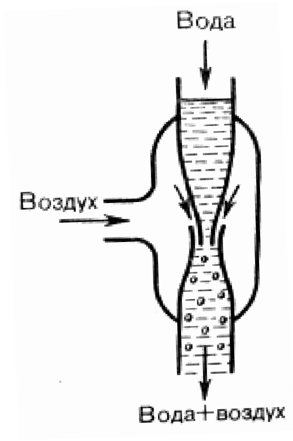


Рис. 7.6

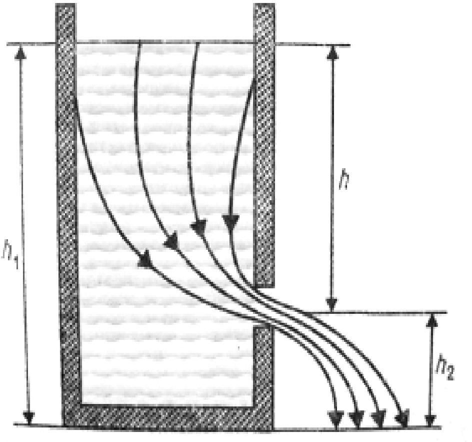


Рис. 7.7

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим сосуд (рис. 7.7) с отверстием в боковой стенке. Запишем уравнение Бернулли для двух сечений (на уровнях h_1 и h_2):

$$\frac{\rho\upsilon_1^2}{2}+\rho g h_1+p_1=\frac{\rho\upsilon_2^2}{2}+\rho g h_2+p_2,$$

а так как p_1 и p_2 равны атмосферному давлению, то уравнение примет вид $\frac{\upsilon_1^2}{2}+gh_1=\frac{\upsilon_2^2}{2}+gh_2$.

Из уравнения неразрывности (7.3) следует, что $\upsilon_2/\upsilon_1=S_1/S_2$, и если $S_1 \gg S_2$, то членом $\upsilon_1^2/2$ можно пренебречь и

$$\upsilon_2^2=2g(h_1-h_2)=2gh,$$

откуда

$$\upsilon_2=\sqrt{2gh}\,. \qquad (7.12)$$

Это выражение получило название *формулы Торричелли*.

7.4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА К ДВИЖУЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

а) *Реакция текущей жидкости на стенки изогнутой трубы.*

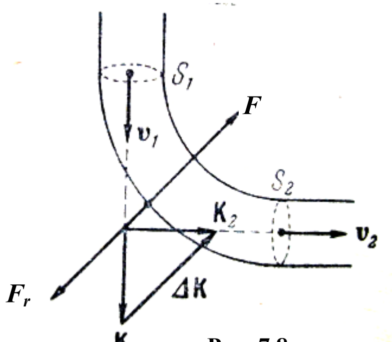


Рис. 7.8

Рассмотрим изогнутую трубу постоянного сечения S (рис. 7.8). При установившемся стационарном потоке в силу неразрывности струи скорость υ в каждом сечении будет одинакова. Рассмотрим объём участка трубы, ограниченного сечениями S_1 и S_2. За время Δt в этот объём будет втекать через сечение S_1 количество жидкости $S\upsilon\Delta t$, обладающее импульсом $\vec{K}_1 = \rho S\upsilon\Delta t\vec{\upsilon}_1$. Одновременно из этого объёма через сечение S_2 будет вытекать такое же количество жидкости, обладающее импульсом $\vec{K}_2 = \rho S\upsilon\Delta t\vec{\upsilon}_2$. Таким образом, стенки трубы сообщают жидкости приращение импульса $\Delta\vec{K} = \vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \rho S\upsilon\Delta t(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)$. Это приращение импульса за единицу времени будет равно силе, с которой стенки трубы действуют на жидкость $\vec{F} = \Delta\vec{K}/\Delta t = \rho S\upsilon(\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1)$.

По третьему закону Ньютона с такой же силой жидкость будет действовать на стенки трубы

$$\vec{F}_r = -\vec{F} = \rho S\upsilon(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2). \qquad (7.13)$$

Силу $\vec{F}_r$ называют *реакцией* текущей жидкости на стенки трубы.

б) *Реакция вытекающей струи.*

Струя жидкости, вытекающая из отверстия в сосуде (рис. 7.9), уносит с собой за время Δt импульс $\Delta\vec{K} = \rho S\upsilon\Delta t\vec{\upsilon}$ (S – площадь отверстия, $\vec{\upsilon}$ – скорость истечения струи). Этот импульс сообщается вытекающей жидкости сосудом, который от жидкости за то же время Δt получит импульс, равный $-\Delta\vec{K}$, т.е. будет испытывать действие силы

$$\vec{F}_r = -\frac{\Delta\vec{K}}{\Delta t} = -\rho S\upsilon\vec{\upsilon}. \qquad (7.14)$$

Эта сила называется *реакцией* вытекающей струи. Если сосуд поставить на тележку, то под действием силы $\vec{F}_r$ он придёт в движение в направлении, противоположном направлению струи.

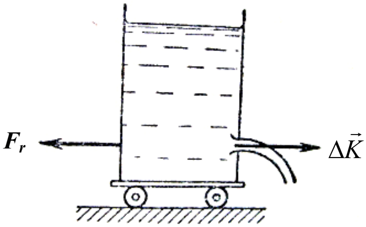


Рис. 7.9

Воспользовавшись выражением (7.14), найдём величину силы $\vec{F}_r$ для скорости истечения жидкости из отверстия:

$$\vec{F}_r = \rho S \upsilon^2 = 2\rho g h S \, . \qquad (7.15)$$

Сила реакции в 2 раза больше силы гидростатического давления $\rho g h S$. Это объясняется тем, что возникающее при вытекании струи движение жидкости в сосуде приводит к перераспределению давления, причём давление вблизи стенки, лежащей против отверстия, оказывается несколько бóльшим, чем вблизи стенки, в которой сделано отверстие.

На реакции вытекающей струи основано действие реактивных двигателей, ракет, турбин и др.

7.5. СИЛЫ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ (ВЯЗКОСТЬ)

Вязкость (внутреннее трение) – свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоёв жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоёв. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Для выяснения закономерностей, которым подчиняются силы внутреннего трения, рассмотрим следующий опыт. В жидкость погружены две параллельные друг другу пластины (рис. 7.10), линейные размеры которых значительно превосходят расстояние d между ними. Нижняя пластина удерживается на месте, верхняя приводится в движение с постоянной скоростью υ_0 силой $\vec{F}$, в отсутствии ускорения эта сила уравновешивается равной ей по величине противоположно направленной силой трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны жидкости.

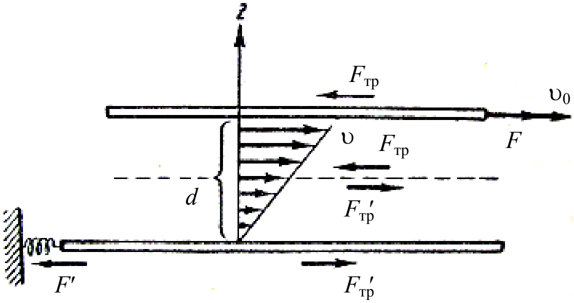


Рис. 7.10

Варьируя скорость пластины υ_0, площадь пластин S и расстояние между ними d, можно получить, что

$$F_{тр} = \eta \frac{\upsilon_0}{d} S, \tag{7.16}$$

где η – коэффициент, зависящий от природы и состояния жидкости и называемый *коэффициентом внутреннего трения* или *динамической вязкостью*.

Если исследовать скорость частиц жидкости в разных слоях, то оказывается, что она изменяется в направлении z, перпендикулярном к пластинам, по закону

$$\upsilon(z) = \frac{\upsilon_0}{d} z. \tag{7.17}$$

Частицы жидкости, непосредственно соприкасающиеся с пластинами, как бы прилипают к ним и имеют такую же скорость, что и пластины.

Из (7.17) имеем

$$\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\upsilon_0}{d}. \tag{7.18}$$

Учитывая (7.18), формуле (7.16) для силы внутреннего трения можно придать вид

$$F_{тр} = \eta \frac{d\upsilon}{dz} S. \tag{7.19}$$

Выражая в (7.19) силу через импульс, получим формулу для динамической вязкости

$$\eta = \frac{\Delta K}{S\dfrac{d\upsilon}{dz}\Delta t}, \qquad (7.20)$$

который показывает, *какой импульс передаётся из слоя в слой за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно вектору градиента скорости при единичном его значении*.

Единицей вязкости в системе СИ является Па·с = Н·с/м^2.

Измеряется коэффициент вязкости многими методами, одним из которых является *метод Стокса*, основанный на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

Например, на шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы:

– сила тяжести $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$ (ρ – плотность материала шарика);

– сила Архимеда $F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж g$ ($\rho_ж$ – плотность жидкости);

– сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом: $F = 6\pi\eta r\upsilon$ (r – радиус шарика; υ – его скорость).

При равномерном движении шарика $P = F_A + F$ или $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_ж g + 6\pi\eta r\upsilon$, откуда

$$\eta = \frac{2(\rho - \rho_ж) g r^2}{9\upsilon}. \qquad (7.21)$$

Измеряя скорость равномерного движения шарика, определяем коэффициент вязкости.

7.6. ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется *ламинарным* (слоистым), если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и *турбулентным* (вихревым), если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях её движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течёт, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остаётся неподвижным. Скорости последующих слоёв тем больше, чем больше их расстояние от поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой *числом Рейнольдса*:

$$\mathrm{Re} = \frac{<\upsilon> d\rho}{\eta} = \frac{<\upsilon> d}{\nu},$$

где $\nu = \eta/\rho$ – *кинематическая вязкость*; ρ – плотность жидкости; $<\upsilon>$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} < 1000$) наблюдается ламинарное течение. Переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области $1000 < \mathrm{Re} < 2000$. При Re = 2300 (для гладких труб) течение – турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей в трубах разных сечений одинаков.

7.7. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ

На тело, движущееся в жидкости, действуют две силы (их равнодействующая R), одна из которых Q направлена в сторону, противоположную движению тела (в сторону потока), – *лобовое сопротивление*, а вторая P перпендикулярна этому направлению – *подъёмная сила* (рис. 7.11).

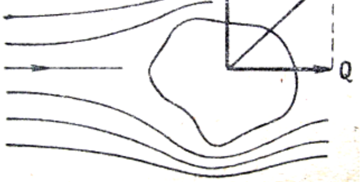


Рис. 7.11

Если тело симметрично и его ось симметрии совпадает с направлением скорости, то на него действует только лобовое сопротивление, подъёмная же сила в этом случае равна

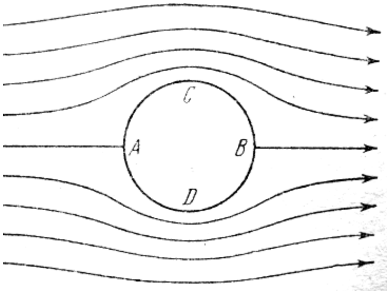


Рис. 7.12

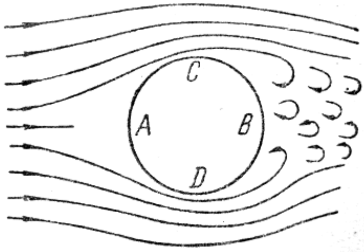


Рис. 7.13

нулю. Можно доказать, что в идеальной жидкости равномерное движение происходит без лобового сопротивления. Если рассмотреть движение цилиндра в такой жидкости (рис. 7.12), то картина линий тока симметрична как относительно прямой, проходящей через точки A и B, так и относительно прямой, проходящей через точки C и D, т.е. результирующая сила давления на поверхность цилиндра будет равна нулю.

Иначе обстоит дело при движении тел в вязкой жидкости. Вследствие вязкости среды в области, прилегающей к поверхности тела, образуется пограничный слой частиц, движущихся с меньшими скоростями. В результате тормозящего действия этого слоя возникает вращение частиц и движение жидкости в пограничном слое становится вихревым. Если тело не имеет обтекаемой формы, то пограничный слой жидкости отрывается от поверхности тела. За телом возникает течение жидкости, направленное противоположно набегающему потоку. Оторвавшийся пограничный слой, следуя за этим течением, образует вихри, вращающиеся в противоположные стороны (рис. 7.13).

Лобовое сопротивление зависит от формы тела и его положения относительно потока, что учитывается безразмерным коэффициентом сопротивления C_x, определяемым экспериментально:

$$Q = C_x \frac{\rho\upsilon^2}{2} S, \tag{7.22}$$

где ρ – плотность среды; υ – скорость движения тела; S – наибольшее поперечное сечение тела.

Составляющую Q можно значительно уменьшить, подобрав тело такой формы, которая не способствует образованию завихрения.

По формуле, аналогичной (7.22), определяется и подъёмная сила P.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Вода подаётся в фонтан из большого цилиндрического бака (рис. 1) и бьёт из отверстия фонтана сечением S_2 со скоростью $\upsilon_2 = 12$ м/с.

Найти: 1) скорость υ_1 понижения уровня воды в баке, если диаметр бака $D = 2$ м, а диаметр отверстия фонтана $d = 2$ см; 2) давление p_1, под которым вода подаётся в фонтан; 3) высоту h_1 уровня воды в баке и высоту h_2 струи, выходящей из фонтана.

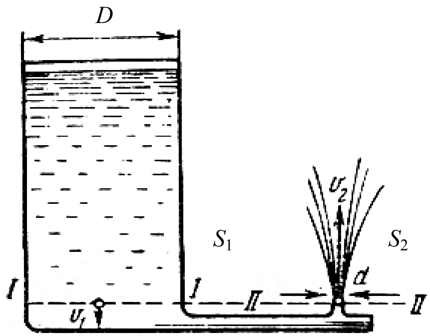


Рис. 1

Решение. 1) Проведём сечение S_1 в баке на уровне сечения S_2 фонтана. Так как сечение S_1 много больше сечения S_2, то высоту h_1 уровня воды в баке можно считать для малого промежутка времени постоянной, а поток установившимся. Для установившегося потока справедливо условие неразрывности струи $\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2$.

Из этого условия следует, что объём воды V_1, протекающий за 1 с через сечение S_1 должен быть равен объёму воды V_2, протекающей через сечение S_2:

$$V_1 = V_2 \quad \text{или} \quad \frac{\pi D^2}{4} l_1 = \frac{\pi d^2}{4} l_2,$$

где l_1 и l_2 – длины цилиндрических столбов жидкости, протекающей за 1 с через сечения S_1 и S_2.

Так как длины l_1 и l_2 численно равны скоростям течения υ_1 и υ_2 в сечениях S_1 и S_2, то можно записать $D^2 \upsilon_1 = d^2 \upsilon_2$, откуда

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 \left(\frac{d}{D} \right)^2.$$

Подставив в это равенство числовые значения заданных величин, найдём

$$\upsilon_1 = 12\left(\frac{0{,}02}{2}\right)^2 = 0{,}0012 \text{ м/с}.$$

2) Давление p_1, под которым вода подаётся в фонтан, найдём по уравнению Бернулли, которое для горизонтальной трубки тока имеет вид

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2},$$

где p_1 и p_2 – статические давления в сечениях S_1 и S_2; $\frac{\rho\upsilon_1^2}{2}$ и $\frac{\rho\upsilon_2^2}{2}$ – динамические давления в этих сечениях; ρ – плотность жидкости.

Учитывая, что p_2 равно нулю (p_2 – избыточное давление над атмосферным), из уравнения Бернулли получим

$$p_1 = \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} - \frac{\rho\upsilon_1^2}{2}.$$

Подставив числовые значения величин, получим

$$p_1 = \frac{10^3 12^2}{2} - \frac{10^3(0{,}0012)^2}{2} = 7{,}2\cdot10^4 \text{ Н/м}^2.$$

Вторым слагаемым, ввиду его малости, пренебрегли.

1) Зная давление p_1, можно найти высоту уровня воды в баке по формуле $p_1 = \rho g h_1$ (гидростатическое давление столба жидкости), откуда

$$h_1 = \frac{p_1}{\rho g}.$$

Подставив числовые значения, будем иметь

$$h_1 = \frac{7{,}2\cdot10^4}{10^3\cdot 9{,}8} = 7{,}35 \text{ м}.$$

Зная скорость υ_2, с которой вода выбрасывается фонтаном, можно найти высоту h_2, на которую она будет выброшена:

$$h_2 = \frac{\upsilon_2^2}{2g}, \quad h_2 = \frac{12^2}{2\cdot 9{,}8} = 7{,}35 \text{ м}.$$

Отметим, что высота уровня воды в баке равна высоте, на которую поднимается фонтан воды (по правилу сообщающихся сосудов), если пренебречь сопротивлением воздуха.

Пример 2. Определить время истечения несжимаемой жидкости из открытого цилиндрического сосуда высотой $H = 4{,}9$ м, если диаметр небольшого отверстия в дне сосуда в 60 раз меньше диаметра сосуда.

Решение. Объём убыли воды за малый промежуток времени dt с одной стороны равен

$$dV = Sdh, \text{ а с другой } dV = S_1 \upsilon dt,$$

где S – сечение сосуда; S_1 – сечение отверстия.

Но так как $\upsilon^2 = 2gh$, то

$$Sdh = S_1\sqrt{2gh}dt,$$

откуда

$$dt = \frac{Sdh}{S_1\sqrt{2gh}} \quad \text{или} \quad dt = \frac{S}{S_1\sqrt{2g}}\frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Проинтегрировав последнее выражение в пределах от 0 до H, получим

$$t = \frac{S\cdot 2\sqrt{H}}{S_1\sqrt{2g}} = \frac{D^2}{d^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставив числовые значения, получим $t = 60^2\sqrt{\frac{2\cdot 4{,}9}{9{,}8}} =$ 3600 с = 1 ч.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
2. Что называют линией тока? Трубкой тока?
3. Что характерно для установившегося течения жидкости?
4. Каков физический смысл уравнения неразрывности жидкости и как его вывести?
5. Выведите уравнение Бернулли.
6. Как в потоке жидкости измерить статистическое давление? Динамическое давление? Полное давление?
7. Каков физический смысл динамической вязкости?
8. Какое течение жидкости называется ламинарным? Турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?
9. Поясните (с выводом) практическое применение метода Стокса.
10. Каковы причины возникновения лобового сопротивления тела, движущегося в жидкости? Может ли оно быть равным нулю?

8. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

8.1. ПОНЯТИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Среди разнообразных движений и процессов, совершающихся в природе и технике, весьма распространёнными являются *колебания*.

Колебания – это любое движение, любой физический процесс, характеризующийся той или иной *повторяемостью во времени*.

Волнение моря, качание маятника часов, вибрации корпуса корабля, биение человеческого сердца, звук, радиоволны, свет, переменные токи и т.д. – всё это колебания.

В процессе колебаний значения физических величин, определяющих состояние системы, через равные или неравные промежутки времени повторяются.

Колебания называются периодическими, если значения изменяющихся физических величин повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени T, через который значение изменяющейся физической величины повторяется (по величине и направлению, если это величина векторная; по величине и знаку, если она скалярная), называется периодом колебаний этой величины.

Число полных колебаний ν, совершаемых колеблющейся величиной за единицу времени, называется частотой колебаний этой величины:

$$T\nu = 1 \quad \text{или} \quad \nu = \frac{1}{T}.$$

Любое колебание обусловлено тем или иным воздействием на колеблющуюся систему. В зависимости от характера воздействия, вызывающего колебания, различают следующие периодические колебания:

а) свободные или собственные;
б) вынужденные;
в) автоколебания;
г) параметрические.

Свободные или *собственные колебания – это колебания*, происходящие в системе, предоставленной самой себе после выведения её из состояния устойчивого равновесия. Пример: колебания груза на пружине.

Вынужденные колебания – это колебания, обусловленные внешними периодическими воздействиями. Пример: электромагнитные колебания в антенне телевизора.

Автоколебания – собственные колебания, поддерживаемые внешним источником энергии, включение которого в нужные моменты времени осуществляет сама колеблющаяся система. Пример: колебания маятника часов.

Включение источника энергии (сжатой пружины) производит устройство, связанное с маятником часов.

Параметрические колебания – это колебания, в процессе которых происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы. Пример: раскачивание качелей. Приседая в крайних положениях и выпрямляясь в среднем положении, человек, находящийся на качелях, изменяет момент инерции.

Различные по своей природе колебания обнаруживают много общего: они подчиняются одним и тем же закономерностям, описываются одними и теми же уравнениями, исследуются одними и теми же методами. Это даёт возможность создать единую теорию колебаний.

Рассмотрение теории колебаний в полном объёме требует знаний специальных разделов математики. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь элементарных основ этой теории.

8.2. КИНЕМАТИКА МЕХАНИЧЕСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Простейшими из периодических колебаний являются *гармонические колебания* – колебания, при которых колеблющиеся физические величины изменяются с течением времени *по закону синуса или косинуса*. Этот вид колебаний важно знать, во-первых, потому, что многие реальные колебания весьма близки к гармоническим; во-вторых, потому, что периодические негармонические колебания можно представить как результат наложения того или иного числа гармонических колебаний.

Изучение закономерностей гармонического движения естественно начать с механических колебаний материальной точки.

Механические гармонические колебания – это *такое прямолинейное*, *неравномерное*, *периодическое движение*, при котором по закону синуса или косинуса изменяются с течением времени параметры механического состояния (координаты и скорость) материальной точки. Если точка совершает гармонические колебания вдоль оси x (рис. 8.1), то кинетический закон её движения будет отражаться формулой

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{8.1}$$

где x – координата, или смещение, материальной точки в момент времени t (началу координат соответствует среднее положение колеблющейся точки – так называемый центр колебаний); A – наибольшее отклонение точки от среднего положения (*амплитуда колебаний*).

Аргумент

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \tag{8.2}$$

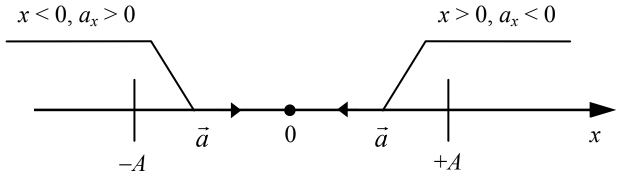


Рис. 8.1

стоящий под знаком косинуса в формуле (8.1), называется *фазой колебаний* в момент времени t. Как видно из (8.2), в процессе колебаний фаза монотонно возрастает. За одно полное колебание она получает приращение, равное 2π. Мгновенное значение фазы характеризует *состояние* колеблющейся точки, поскольку каждому значению фазы отвечает вполне определённая координата. Величина $\omega_0 t$ определяет приращение фазы за промежуток времени t, величина φ_0 – значение фазы в начальный момент времени (*начальная фаза*). Коэффициент ω_0 – характеристический параметр колебаний, называемый *циклической* (или круговой) частотой. Циклическая частота определяет быстроту изменения фазы с течением времени. Действительно, из (8.2) следует, что

$$\omega_0 = \frac{\varphi - \varphi_0}{t}. \tag{8.3}$$

Циклическая частота показывает, как часто повторяются одни и те же состояния колеблющейся системы.

На рисунке 8.2 изображён график зависимости фазы некоторого колебания от времени. Из рисунка видно, что наклон графика определяется величиной ω_0. Чем круче идёт график, тем быстрее изменяется фаза, тем чаще повторяются одни и те же состояния.

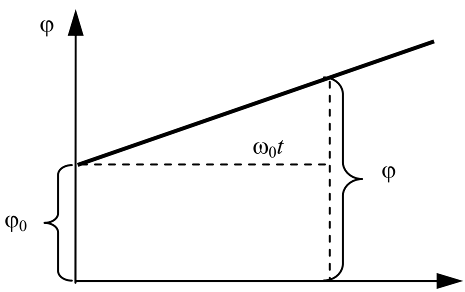


Рис. 8.2

Пользуясь формулой (8.3), легко установить связь между частотой ω_0 и периодом T. За один период T фаза увеличивается на 2π. Подставив $t = T$ и $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$ в формулу (8.3), получим

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{8.4}$$

или

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{8.5}$$

Так как $\frac{1}{T}$ – частота колебаний ν, то

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{8.6}$$

Как видно из этой формулы, циклическая частота показывает, сколько полных колебаний совершается за 2π с.

Из формулы (8.1) видно, что гармоническое колебание является движением *финитным* (пространственно ограниченным): в процессе колебаний материальная точка не выходит за пределы некоторого ограниченного отрезка (см. рис. 8.1). За одно полное колебание в каждой точке траектории, кроме самых крайних, колеблющаяся точка бывает дважды: один раз двигаясь в одном направлении, другой раз – в противоположном. Заметим, что при неколебательном движении каждую точку траектории тело проходит, двигаясь только в одном направлении.

Продифференцируем (8.1) по времени. Первая производная от x по t даёт выражение для проекции на ось x скорости, вторая – для проекции ускорения:

$$\upsilon_x = \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right); \tag{8.7}$$

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) \tag{8.8}$$

(производные по времени в теории колебаний принято обозначать точкой над дифференцируемой величиной: одна точка обозначает первую производную, две – вторую).

Как следует из (8.7) и (8.8), при гармонических колебаниях проекции скорости и ускорения на ось x изменяются с течением времени по гармоническому закону с той же частотой ω_0, с какой происходят колебания координаты. Амплитуда колебаний скорости равна $\omega_0 A$, амплитуда колебаний ускорения $\omega_0^2 A$. Скорость опережает смещение по фазе на $\dfrac{\pi}{2}$ (или, что то же самое, отстаёт на $\dfrac{3}{2}\pi$, так как $\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)$), ускорение опережает смещение на π (или отстаёт на π, так как $\cos(\alpha+\pi)=\cos(\alpha-\pi)$).

Если колебания двух каких-либо физических величин смещены по фазе на $(2k+1)\pi$, где k – любое целое число, то говорят, что они происходят *в противофазе*. Можно сказать, следовательно, что колебания координаты x и проекции ускорения a_x при гармоническом движении происходят в противофазе. Это означает, что когда смещение максимально, максимальна и абсолютная величина ускорения, когда $x=0$, то и $a_x=0$, знак координаты x и знак проекции ускорения на ось x в любой момент времени противоположны. При отклонении точки от центра колебаний вправо $x>0$, но $a_x<0$, при отклонении влево $x<0$, но $a_x>0$, т.е. ускорение всегда направлено к центру колебаний (см. рис. 8.1).

Графики $x=x(t)$; $\upsilon_x=\upsilon_x(t)$; $a_x=a_x(t)$ приведены на рис. 8.6, *а – в*.

Смещение в системе *СИ* измеряется в *метрах*, фаза – в *радианах*, циклическая частота – в *радианах в секунду*, период – в *секундах*, частота – в *герцах*.

Радиан в секунду – циклическая частота таких колебаний, при которых фаза за 1 с возрастает на 2π. Герц – частота таких колебаний, при которых за 1 с совершается одно полное колебание (или, что то же самое, фаза возрастает на 2π).

8.3. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ. УПРУГИЕ И КВАЗИУПРУГИЕ СИЛЫ

Выясним, какими силами обусловлены гармонические колебания. Пусть материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси x. По второму закону Ньютона

$$\vec{F}=m\vec{a}, \tag{8.9}$$

в проекциях на ось x

$$F_x=ma_x. \tag{8.10}$$

По (8.8)

$$a_x = \ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (8.11)$$

Подставив это выражение в (8.10), получим

$$F_x = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi_0). \qquad (8.12)$$

Как и следовало ожидать, сила, вызывающая гармонические колебания, должна изменяться с течением времени также по гармоническому закону. Выражение (8.12) позволяет найти значение проекции этой силы на ось x для любого момента времени. Как видно из формул (8.11) и (8.12), фазы проекций ускорения и силы в любой момент времени совпадают. График $F_x = F_x(t)$ изображён на рис. 8.6, *г*.

Введём обозначение

$$m\omega_0^2 = k. \qquad (8.13)$$

Кроме того, учтём, что $A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = x.$ Тогда формула (8.12) будет выглядеть так

$$F_x = -kx. \qquad (8.14)$$

Из того, что проекция силы и координата x противоположны по знаку, следует, что эта сила всегда направлена к положению равновесия. Условию (8.14) удовлетворяют *упругие силы*. Закон Гука, выражающий зависимость между возникающей в теле упругой силы и величиной деформации, выражается точно такой же формулой, как и (8.14).

Гармонические колебания могут быть вызваны также силами, которые не являются упругими по своей природе. Силы, не являющиеся упругими по своей природе, но подобные упругим по характеру зависимости от координат, называются *квазиупругими*.

Доказано также, что какой бы ни была зависимость силы, действующей на тело, от координат, тело будет совершать колебания, весьма близкие к гармоническим, если его смещение от положения устойчивого равновесия мало. Любые малые колебания являются гармоническими. Груз на пружине или на нити, вагон на рельсах, корабль на воде, фундамент здания, ветви деревьев и т.д. – все эти системы будут совершать гармонические колебания, если амплитуды этих колебаний малы (строго говоря, бесконечно малы).

То, что колебания являются гармоническими, имеет простое объяснение. Пусть сила $\vec{F}$ зависит от x по произвольному закону и при $x = 0$ обращается в нуль. Тогда кривая $F_x = F_x(x)$ проходит через начало координат (рис. 8.3).

Бесконечно малый отрезок этой кривой в окрестности $x = 0$ можно считать отрезком прямой линии (границы этого отрезка на рис. 8.3 обозначены точками), следовательно, в небольшом интервале значений x силу $\vec{F}_x$ можно считать пропорциональной x. А такая сила вызывает гармонические колебания.

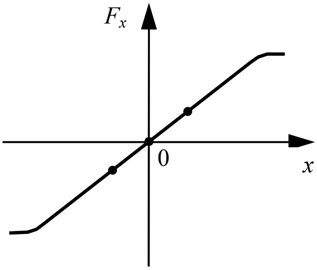


Рис. 8.3

Так как силы, возникающие при отклонении механической системы от положения устойчивого равновесия, всегда стремятся вернуть эту систему в первоначальное состояние, их часто называют *возвращающими* или *восстанавливающими*.

Введём понятие *гармонического осциллятора*. Это понятие потребуется при изложении некоторых последующих разделов.

Гармоническим осциллятором называется любая физическая система, совершающая гармонические колебания. Так, каждый атом твёрдого тела можно рассматривать как трёхмерный (имеющий три степени свободы) гармонический осциллятор, поскольку атом удерживается в положении равновесия некоторой квазиупругой силой. Если колебания осциллятора происходят вдоль одной прямой, осциллятор называется *линейным* или одномерным (с одной степенью свободы). Пример: груз на пружине, совершающий вертикальные колебания.

Всё, что было сказано о гармонических колебаниях, справедливо лишь при условии, что колебания системы совершаются беспрепятственно, т.е. *в отсутствие* трения.

Рассмотрим некоторые примеры собственных колебаний, совершающихся в отсутствие трения под действием одних только упругих или квазиупругих сил.

Собственные колебания груза на пружине

Будем полагать, что вся масса m рассматриваемой системы (рис. 8.4) сосредоточена в грузе; пружина обладает идеальной упругостью и, следовательно, закон Гука для неё в точности выполняется. Ось x направим вертикально вниз. Координату груза, когда он находится в состоянии равновесия, примем равной нулю. Как видно из рис. 8.4, смещению груза вверх соответствуют отрицательные координаты, смещению вниз – положительные.

Составим дифференциальное уравнение колебаний груза. Дифференциальное уравнение механического движения вообще – это, в сущности, математическое выражение второго закона Ньютона, формула,

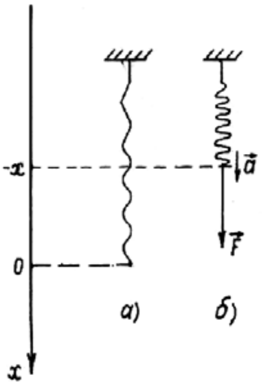


Рис. 8.4

связывающая массу тела, действующую на него силу и ускорение, приобретаемое телом под действием этой силы. Однократное интегрирование этого уравнения даёт зависимость от времени скорости, двукратное – координат (последняя зависимость называется интегральным законом движения).

Колебания груза на пружине в отсутствие трения происходит под действием упругой силы. Для изображённого на рис. 8.4, *б* положения имеем $F_x = -kx$.

Величина k называется *жёсткостью пружины*. Жёсткость численно равна упругой силе, возникающей в пружине при единичном растяжении или сжатии её. Жёсткость пружины зависит от материала пружины и её геометрии – формы, диаметра витков, густоты витков, длины пружины и т.д.

Сила $\vec{F}_x$ сообщает грузу ускорение $\vec{a}_x$.

По второму закону Ньютона $ma_x = F_x$ или $m\ddot{x} = -kx$, или $m\ddot{x} + kx = 0$. Разделив обе части последнего уравнения на m и введя обозначение $\dfrac{k}{m} = {\omega_0}^2$ (в соответствии с (8.13)), получим искомое дифференциальное уравнение собственных гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (8.15)$$

Общее решение этого линейного однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right), \qquad (8.16)$$

где A и φ_0 – амплитуда колебаний и начальная фаза соответственно.

По (8.5) найдём период колебаний груза $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, но $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

Следовательно,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (8.17)$$

Частота колебаний

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (8.18)$$

Итак, чем больше масса груза и чем меньше жёсткость пружины, тем медленнее происходят колебания. Существенно отметить, что период и частота колебаний не зависят от амплитуды.

Амплитуда A и *начальная фаза* φ_0 собственных незатухающих-гармонических колебаний *зависят от начальных условий* – параметров состояния в начальный момент времени: от x_0 и υ_0. Положив $t = 0$ в формулах (8.16) и (8.7), получим выражения для A и φ_0:

$$x_0 = A\cos\varphi_0, \quad \upsilon_0 = -\omega_0 A\sin\varphi_0,$$

откуда

$$A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{\upsilon_0}^2}{{\omega_0}^2}} \tag{8.19}$$

и

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = -\frac{\upsilon_0}{x_0\omega_0}. \tag{8.20}$$

Колебания математического маятника

Математический маятник (рис. 8.5) представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити.

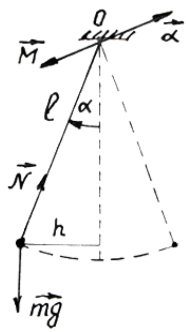


Рис. 8.5

Реальным приближением к математическому маятнику может служить небольшой шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Отклонение маятника от положения равновесия будем характеризовать углом α (см. рис. 8.5). Формула, выражающая зависимость этого угла от времени, и будет представлять собой закон движения маятника.

При отклонении маятника от положения равновесия возникает вращательный момент $\vec{M}$, модуль которого равен $mgl\sin\alpha$, где m – масса маятника, l – его длина. Направление этого момента таково, что он стремится вернуть маятник в положение равновесия, т.е. по своему действию он аналогичен квазиупругой силе. Поэтому так же, как координате x и проекции силы F_x приписываются противоположные знаки, противоположные знаки следует приписать вращательному моменту M и угловому смещению α. Следовательно, выражение для вращательного момента будет иметь вид

$$M = mgl\sin(-\alpha). \tag{8.21}$$

Вращательный момент, действующий на маятник, сообщит маятнику угловое ускорение ε. По основному уравнению динамики вращательного движения $J\varepsilon = M$, где J – момент инерции маятника, равный ml^2. Угловое ускорение равно второй производной от углового смещения по времени: $\varepsilon = \ddot{\alpha}$. Учитывая это, можно записать

$$ml^2\ddot{\alpha} = M \, . \tag{8.22}$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. При малых углах $\sin(-\alpha)$ можно заменить на $(-\alpha)$: $\sin(-\alpha) = -\alpha$.

Тогда вращательный момент будет равен

$$M = -mgl\alpha \, .$$

Подставив это выражение в основное уравнение движения (8.22), получим

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl\alpha \quad \text{или} \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \, . \tag{8.23}$$

Обозначив $\dfrac{g}{l} = \omega_0^2$, найдём искомое дифференциальное уравнение движения маятника:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0 \, . \tag{8.24}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \, , \tag{8.25}$$

т.е. малые колебания математического маятника являются гармоническими. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \, , \tag{8.26}$$

частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \, . \tag{8.27}$$

8.4. ИМПУЛЬС И ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Найдём выражение для импульса и энергии линейного гармонического осциллятора, совершающего колебания вдоль оси x.

Выражение для проекции импульса на ось x получим, умножив массу осциллятора m на проекцию скорости по (8.7):

$$P_x = m\upsilon_x = -m\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \qquad (8.28)$$

Проекция импульса гармонического осциллятора изменяется по гармоническому закону. Её амплитудное значение $m\omega_0 A$. График $P_x = P_x(t)$ изображён на рис. 8.6, *д*.

В процессе колебаний происходят периодические превращения кинетической энергии осциллятора в потенциальную энергию и обратно.

Кинетическая энергия осциллятора

$$E_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m}{2}\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,, \qquad (8.29)$$

где $k = m\omega_0^2$ – коэффициент упругой или квазиупругой силы.

Потенциальная энергия осциллятора

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \qquad (8.30)$$

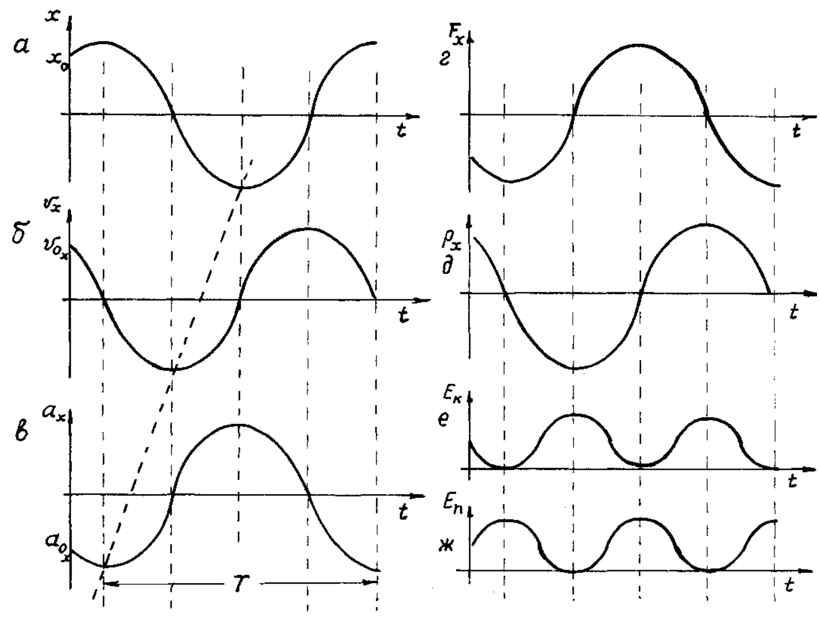


Рис. 8.6

Как видно из формул (8.29) и (8.30), и потенциальная, и кинетическая энергия гармонического осциллятора – величины положительные. Их изменения происходят с частотой, превышающей частоту самих колебаний в 2 раза. Графики $E_к = E_к(t)$ и $E_п = E_п(t)$ осциллятора изображены на рис. 8.6, *е*, *ж*. *Полная энергия осциллятора*

$$E = E_к + E_п = \frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{kA^2}{2}. \quad (8.31)$$

оказывается пропорциональной квадрату амплитуды и *не зависит от времени*. Так оно и должно быть, ибо гармонический осциллятор – система консервативная.

8.5. ЗАТУХАЮЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В реальных условиях механические колебания всегда происходят в какой-либо среде. Взаимодействие колеблющейся системы со средой приводит к рассеянию (диссипации) энергии колебаний в окружающем пространстве (механическая энергия колебаний превращается во внутреннюю энергию среды). В результате колебания постепенно затухают.

Действие среды может быть учтено введением в дифференциальное уравнение колебаний дополнительной *силы сопротивления*. В отсутствие сухого трения и при небольших скоростях (это отвечает малым колебаниям) сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости:

$$\vec{F}_{сопр} = -r\vec{\upsilon}, \quad (8.32)$$

где r – коэффициент сопротивления (численно равен силе сопротивления, действующей на тело при единичной скорости движения).

Знак минус означает, что направления силы сопротивления и скорости противоположны.

Из (8.32) следует

$$(F_{сопр})_x = -r\upsilon_x = -r\dot{x}.$$

При наличии сопротивления ускорение материальной точки, совершающей колебания, обусловлено действием двух сил: возвращающей (упругой или квазиупругой) и силы сопротивления. По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр}.$$

В проекциях:

$$ma_x = (F_{упр})_x + (F_{сопр})_x \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$$

Разделив обе части этого уравнения на m, перенеся все слагаемые в левую часть и введя обозначения

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{и} \quad \frac{r}{m} = 2\beta ,$$

получим дифференциальное уравнение собственных затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{8.33}$$

Решение этого уравнения при $\beta^2 < \omega_0^2$ имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) , \tag{8.34}$$

где A_0 – амплитуда колебаний в начальный момент времени; φ_0 – начальная фаза (обе эти величины зависят от начальных условий); ω – циклическая частота затухающих колебаний; β – коэффициент затухания – величина, характеризующая быстроту затухания.

Как видно из (8.34), затухающие колебания не являются гармоническими: амплитуда этих колебаний убывает по экспоненциальному закону

$$A = A_0 e^{-\beta t} . \tag{8.35}$$

На рисунке 8.7 приведён график затухающих колебаний. График не выходит за пределы огибающих $\pm A_0 e^{-\beta t}$.

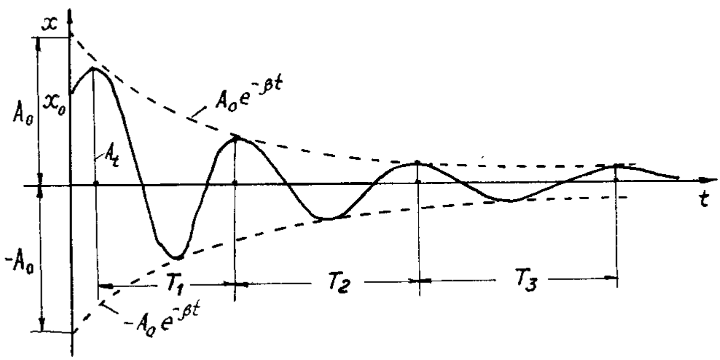


Рис. 8.7

Зная, как уменьшается с течением времени амплитуда затухающих колебаний, можно найти закон уменьшения энергии этих колебаний.

По (8.31)

$$E = \frac{kA^2}{2}.$$

Подставим вместо A соответствующее выражение по (8.35):

$$E = \frac{k}{2}(A_0 e^{-\beta t})^2 = \frac{kA_0^2}{2} e^{-2\beta t},$$

но $\frac{kA_0^2}{2}$ – начальная энергия колебаний E_0. Учитывая это, получим

$$E = E_0 e^{-2\beta t}. \qquad (8.36)$$

Таким образом, энергия затухающих колебаний уменьшается также по экспоненциальному закону.

Циклическая частота ω затухающих колебаний системы связана с циклической частотой собственных незатухающих колебаний этой системы ω_0 соотношением:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \qquad (8.37)$$

Величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \qquad (8.38)$$

называют *условным периодом* затухающих колебаний (период затухающих колебаний называется условным потому, что такие колебания, строго говоря, не являются периодическими).

Условный период затухающих колебаний – наименьший промежуток времени T, за который система дважды проходит через положение равновесия, двигаясь в одном и том же направлении, или, что то же самое, промежуток времени, за который отклонения в одну и ту же сторону дважды достигают максимума.

Период затухающих колебаний больше периода колебаний такой же системы в отсутствие сопротивления. Это понятно: силы сопротивления тормозят движение, в результате чего система возвращается к равновесию медленнее.

Отношение двух последующих амплитуд, т.е. амплитуд в моменты времени t и $t+T$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} \tag{8.39}$$

называется *декрементом затухания*. Натуральный логарифм этого отношения называется *логарифмическим декрементом* затухания:

$$\lambda = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T\ . \tag{8.40}$$

Логарифмический декремент затухания характеризует затухание колебаний за период, коэффициент затухания – за единицу времени.

Важной характеристикой затухающих колебаний является также так называемое *время релаксации* τ – время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Из условия $\dfrac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e$ получаем

$$\tau = \frac{1}{\beta}\ . \tag{8.41}$$

Таким образом, коэффициент затухания – это величина, обратная времени релаксации.

За время τ система совершит $N = \dfrac{\tau}{T}$ колебаний. Подставив в это соотношение вместо τ и T соответствующие выражения по (8.41) и (8.40), получим

$$N = \frac{1\beta}{\beta\lambda} = \frac{1}{\lambda}\ . \tag{8.42}$$

Из этой формулы видно, что логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний, совершаемых системой за время релаксации.

Примеры логарифмических декрементов: кварцевая пластина – $10^{-4}...10^{-5}$; камертон – 10^{-3}; математический маятник – $10^{-1}...10^{-2}$.

При увеличении сопротивления период затухающих колебаний становится всё больше и больше. При $\beta = \omega_0$ он обращается в бесконечность. Это означает, что движение перестаёт быть периодическим. Система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний (такое движение называется *апериодическим*). Вообще движение перестаёт быть колебательным при любом β, удовлетворяющем условию $\beta \geq \omega_0$.

8.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И РЕЗОНАНС

Если на систему, кроме упругой или квазиупругой силы и силы сопротивления, действует также внешняя периодическая сила, система будет совершать вынужденные колебания. Пусть внешняя сила (будем называть эту силу вынуждающей) изменяется по гармоническому закону

$$F = F_0 \cos \Omega t\,, \tag{8.43}$$

где F_0 – амплитуда силы; Ω – циклическая частота изменений этой силы.

При наличии вынуждающей силы дифференциальное уравнение колебаний имеет следующий вид:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t$$

или

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t\,, \tag{8.44}$$

где $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ – циклическая частота собственных незатухающих колебаний; $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ – вынуждающая сила, отнесённая к единице массы.

Общее решение этого неоднородного линейного дифференциального уравнения складывается из двух частей: общего решения соответствующего однородного уравнения, определяющего собственные затухающие колебания:

$$x_1 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{8.45}$$

и частного решения, характеризующего вынужденные колебания:

$$x_2 = A \cos(\Omega t + \alpha_0)\,. \tag{8.46}$$

Результирующее решение системы в любой момент времени равно сумме $x_1 + x_2$:

$$x = x_1 + x_2 = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\Omega t + \alpha_0)\,. \tag{8.47}$$

Таким образом, при наличии вынуждающей силы в системе одновременно возникают и собственные, и вынужденные колебания.

Собственные колебания постепенно затухают и по истечении некоторого времени (называемого временем установления колебаний) становятся пренебрежимо малыми по сравнению с вынужденными колебаниями. В системе устанавливаются вынужденные колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы:

$$x = A\cos(\Omega t + \alpha_0)\,. \tag{8.48}$$

Амплитуда вынужденных колебаний и величина α_0, определяющая сдвиг фаз между координатой и вынуждающей силой, в отличие от амплитуды и фазы собственных колебаний, не зависят от начальных условий. Соответствующий расчёт показывает, что для данной колебательной системы, определяемой параметрами ω_0 и β, амплитуда вынужденных колебаний зависит от массы системы, от амплитуды и частоты вынуждающей силы, а фаза α_0 – от частоты вынуждающей силы:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\,; \tag{8.49}$$

$$\mathrm{tg}\alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\,. \tag{8.50}$$

Проанализируем уравнение (8.49).

Рассмотрим случай, когда затухание мало. Для этого случая при $\Omega << \omega_0$ в подкоренном выражении всеми слагаемыми, кроме ω_0, можно пренебречь, тогда

$$A_{\text{стат}} \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}\,. \tag{8.51}$$

При малых частотах вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний практически равна величине *статического* смещения, которое вызвала бы сила F_0.

Если $\Omega >> \omega_0$, то

$$A \approx \frac{F_0}{m\Omega^2}\,, \tag{8.52}$$

При $\Omega \to \infty$

$$A_\infty \to 0\,.$$

При некотором значении Ω подкоренное выражение минимально, следовательно, амплитуда максимальна. Найдём частоту Ω (она называется резонансной), соответствующую максимуму амплитуды.

Для этого продифференцируем подкоренное выражение по Ω и приравняем производную нулю:

$$2(\omega_0^2-\Omega_{\text{рез}}^2)(-2\Omega_{\text{рез}})+8\beta^2\Omega_{\text{рез}}=0\,,$$

откуда

$$\Omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2} \tag{8.53}$$

(отрицательное значение корня следует отбросить – частота не может быть отрицательной).

Подставив $\Omega_{\text{рез}}$ в подкоренное выражение (8.49), получим

$$A_{\max}=\frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\,. \tag{8.54}$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторой характерной для данной системы частоте называется *резонансом*.

Кривая зависимости $A=A(\Omega)$ называется резонансной кривой. На рисунке 8.8 изображены резонансные кривые, соответствующие различным β $(\beta_3<\beta_2<\beta_1,\ \beta_0=0)$.

Как видно из формулы (8.54), высота максимума резонансной кривой тем больше, чем меньше затухания β. Кроме того, чем меньше β, тем «острее» максимум резонансной кривой. В идеальном случае – в отсутствие сопротивления – амплитуда вынужденных колебаний обращается в бесконечность.

В области резонанса создаются наиболее благоприятные условия для поступления в систему энергии от внешнего источника.

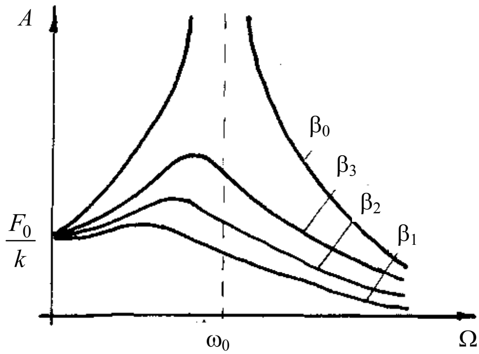


Рис. 8.8

8.7. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Часто бывает так, что материальная точка одновременно участвует в нескольких колебательных движениях. Сложить два или несколько колебаний – значит найти закон, которому подчиняется результирующее движение, найти траекторию этого движения.

Сложение колебаний в общем случае производится аналитически, но в ряде случаев может быть осуществлено геометрически, с помощью так называемого *вектора амплитуды*.

Вектор амплитуды $\vec{A}$ – это вектор, модуль которого равен амплитуде рассматриваемого колебания.

Если вектор амплитуды привести во вращение вокруг точки *0*, взятой на оси *x*, с угловой скоростью ω_0 (рис. 8.9), то проекция конца этого вектора на ось *x* будет совершать гармонические колебания с циклической частотой ω_0:

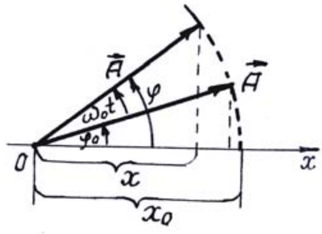


Рис. 8.9

$$x = A\cos\varphi = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где φ_0 – угол, образованный вектором амплитуды и осью *x* в начальный момент времени.

Таким образом, с помощью вектора амплитуды можно построить геометрическую модель гармонических колебаний, в которой особые характеристики гармонического движения A, φ и ω_0 получают простой геометрический смысл.

Сложение двух гармонических колебаний одинаковой циклической частоты, происходящих вдоль одной прямой

Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $A_1 \neq A_2$; $\varphi_{01} \neq \varphi_{02}$.

Складываемые колебания описываются уравнениями:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}); \tag{8.55}$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{02}). \tag{8.56}$$

Так как колебания происходят вдоль одной прямой (вдоль оси x), то результирующее смещение в любой момент времени равно алгебраической сумме смещений x_1 и x_2:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{01}) + A_2\cos(\omega t + \varphi_{02}). \tag{8.57}$$

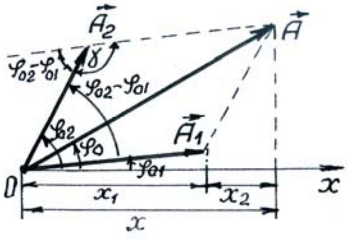


Рис. 8.10

Выполним это сложение геометрически, с помощью векторов амплитуды $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. На рисунке 8.10 изображены положения векторов амплитуды в начальный момент времени. Вектор результирующей амплитуды $\vec{A}$ равен геометрической сумме векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$.

Проекции конца вектора $\vec{A}$ определяет результирующее смещение в начальный момент времени. Так как оба вектора, $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, вращаются в процессе колебаний с одной и той же угловой скоростью ω_0, с такой же скоростью будет вращаться и вектор результирующей амплитуды. Следовательно, результирующее колебание представляет собой гармоническое колебание той же частоты и происходит вдоль той же прямой. Из рисунка 8.10 видно, что

$$x = x_1 + x_2 = A\cos\varphi_0 ,$$

для произвольного момента времени

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) , \tag{8.58}$$

где A и φ_0 – амплитуда и начальная фаза результирующего колебания.

Из $\Delta 0 A_2 A$ по теореме косинусов получаем

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\gamma$$

или

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}) . \tag{8.59}$$

Так как $\cos\gamma = -\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$,

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}} . \tag{8.60}$$

Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз ($\varphi_{02} - \varphi_{01}$) слагаемых колебаний. Если $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, ...,$ то $\cos 2k\pi = 1$ и $A = A_1 + A_2$, т.е. если разность фаз равна чётному числу π, колебания усиливают друг друга. Если $\varphi_{02} - \varphi_{01} = (2k+1)\pi$, то $\cos(2k+1)\pi = -1$ и $A = |A_2 - A_1|$, т.е. если разность фаз равна нечётному числу π, колебания максимально ослабляют друг друга. В зависимости от разности фаз амплитуда колебания может принимать любые значения, лежащие в интервале

$$A_1 + A_2 \ge A \ge \left| A_2 - A_1 \right| .$$

Сложение двух гармонических колебаний со слегка отличающимися частотами, происходящих вдоль одной прямой

Пусть $\omega_1 \ne \omega_2$, причём $\left|\omega_1 - \omega_2\right| << \omega_1$ (или ω_2),

$$A_1 = A_2 = A \quad \text{и} \quad \varphi_{01} = \varphi_{02} = 0 .$$

Уравнения слагаемых колебаний:

$$x_1 = A\cos\omega_1 t ;$$
$$x_2 = A\cos\omega_2 t .$$

Как и в предыдущем случае,

$$x = x_1 + x_2 = A(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t). \tag{8.61}$$

Так как $\omega_1 \ne \omega_2$, векторы амплитуды складываемых колебаний будут вращаться с неодинаковыми угловыми скоростями. Это приведёт к тому, что вектор результирующей амплитуды будет пульсировать по величине. Последнее видно из формулы (8.59), если в неё вместо $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ подставить $\omega_2 t - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t$: так как эта величина монотонно возрастает, вектор амплитуды результирующего колебания будет периодически изменяться.

Применив формулы для суммы косинусов, преобразуем (8.61):

$$x = \left| 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right| \cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t . \tag{8.62}$$

Множитель, выделенный вертикальными чертами, изменяется с течением времени гораздо медленнее, чем второй множитель.

За время, в течение которого второй множитель совершит полное колебание, первый почти не изменится (так как по условию $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} << \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$). Это позволяет рассматривать колебание (8.62) как гармоническое колебание с частотой $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, амплитуда которого изменяется по периодическому закону

$$\left|2A\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right|. \qquad (8.63)$$

(взят модуль этого выражения, так как амплитуда – величина положительная). Гармонические колебания с периодически изменяющейся амплитудой называются *биениями*.

Найдём частоту пульсаций амплитуды или частоту биений. Так как период абсолютного значения косинуса равен π, то частота пульсаций определится из соотношения $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\left(\frac{1}{\nu}\right)=\pi,$ откуда

$$\nu=\frac{\omega_1-\omega_2}{2\pi}=\frac{2\pi\nu_1-2\pi\nu_2}{2\pi}=\nu_1-\nu_2\,, \qquad (8.64)$$

где ν_1 и ν_2 – частоты слагаемых колебаний.

Мы видим, что чем меньше отличаются частоты слагаемых колебаний, тем меньше частота биений. На рисунке 8.11 изображён график биений.

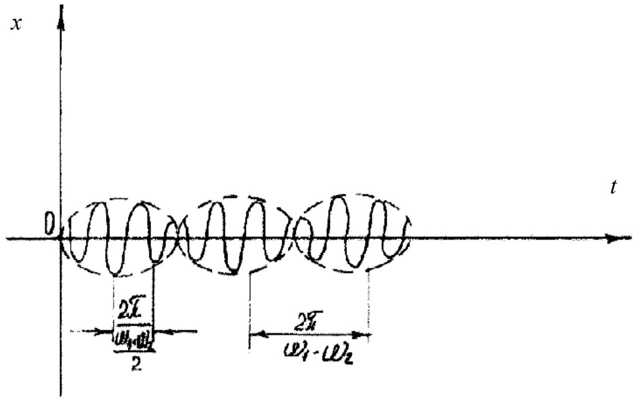


Рис. 8.11

Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух колебаниях, происходящих вдоль координатных осей x и y, причём $\omega_1=\omega_2=\omega$, $A_1\neq A_2$, $\varphi_{01}=\varphi_{02}=0$:

$$x=A_1\cos\omega t\,;$$
$$y=A_2\cos\omega t. \qquad (8.65)$$

Для нахождения траектории результирующего движения из этих уравнений нужно исключить время. Разделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{y}{x} = \frac{A_2}{A_1} \text{ или } y = \frac{A_2}{A_1} x . \tag{8.66}$$

Траектория – прямая, проходящая через начало координат и наклонённая к оси x под углом, тангенс которого равен $\frac{A_2}{A_1}$ (рис. 8.12, *а*).

Точка будет совершать гармоническое колебание вдоль этой прямой

$$S = A\cos\omega t ,$$

где $A = \left|\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\right|$ – амплитуда колебания.

Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $A_1 \neq A_2$; $\varphi_{01} = 0$, $\varphi_{02} = \pi$, $(\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pi)$:

$$x = A_1 \cos\omega t ;$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \pi) = -A_2 \cos\omega t.$$

Разделив одно уравнение на другое, получим уравнение прямой с отрицательным тангенсом угла наклона (рис. 8.12, *б*)

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x . \tag{8.67}$$

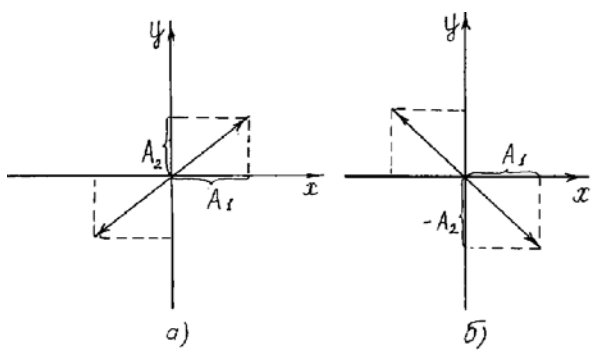


Рис. 8.12

Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $A_1 \neq A_2$; $\varphi_{01} = 0$; $\varphi_{02} = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\varphi_{02} - \varphi_{01} = \dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$x = A_1 \cos\omega t\,;$$

$$y = A_2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -A_2 \sin\omega t.$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{x}{A_1} = \cos\omega t\,;$$

$$\frac{y}{A_2} = -\sin\omega t,$$

возведём в квадрат и почленно сложим:

$$\frac{x^2}{A_1{}^2} + \frac{y^2}{A_2{}^2} = 1. \qquad (8.68)$$

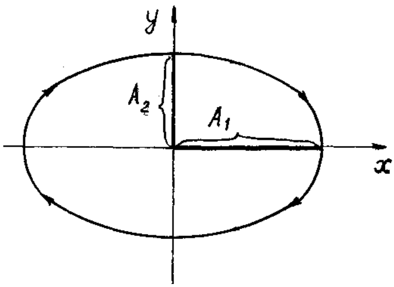


Рис. 8.3

Полученное уравнение есть уравнение эллипса, приведённое к координатным осям. Полуоси этого эллипса равны соответствующим амплитудам колебаний A_1 и A_2 (рис. 8.3). При $A_1 = A_2$ эллипс вырождается в окружность. Если разность фаз слагаемых колебаний равна $\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\varphi_{02} - \varphi_{01} = \dfrac{\pi}{2}\right)$, то движение точки по эллипсу (или по окружности) будет происходить по часовой стрелке.

Действительно, в момент времени $t = 0$ точка имеет координаты:

$$x = A_1 \cos 0 = A_1\,;$$

$$y = A_2 \sin 0 = 0\,.$$

В последующем x уменьшается, а y становится отрицательным. Это соответствует движению по часовой стрелке. Нетрудно убедиться в том, что если $\varphi_{02} - \varphi_{01} = -\dfrac{\pi}{2}$ (или $\dfrac{3}{2}\pi$, что то же самое), движение происходит против часовой стрелки.

При всех других разностях фаз (но при $\omega_1 = \omega_2$) получаются эллипсы, не приведённые к осям x и y.

При сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний с неодинаковыми циклическими частотами результирующее движение будет происходить по сложным траекториям, называемым фигурами Лиссажу. Форма фигур Лиссажу зависит от соотношения частот складываемых колебаний и разности их начальных фаз.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Материальная точка массой m = 5 г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0{,}5$ с$^{-1}$. Амплитуда колебаний A = 3 см.

Определить: 1) скорость υ в момент времени, когда смещение x = 1,5 см; 2) максимальную силу $F_{\max}$, действующую на точку, 3) полную энергию колеблющейся точки.

Решение: 1) Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; A – амплитуда колебания; $\omega t + \varphi$ – фаза колебания, φ – начальная фаза, ω – круговая (циклическая) частота, t – время.

Формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi).$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из этих выражений время. Для этого возведём оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе на $A^2\omega^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1\,.$$

Решив последнее уравнение относительно υ, найдём

$$\upsilon = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}\,.$$

Подставив в это выражение числовые значения величин, получим

$$\upsilon = \pm 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5\sqrt{9\cdot 10^{-4} - 2{,}25\cdot 10^{-4}} = \pm 8{,}2\cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Знак «плюс» соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x. Знак «минус» соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x.

2) Силу, действующую на точку, найдём по второму закону Ньютона $F = ma$, где a – ускорение точки, которое получим, если возьмём производную по времени от скорости:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad a = -4\pi^2\nu^2 A\cos(\omega t + \varphi).$$

Получаем

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA\cos(\omega t + \varphi).$$

Максимальное значение силы $F_{\max} = 4\pi^2\nu^2 mA.$

Подставив числовые значения величин, найдём

$$F_{\max} = 4\cdot 9{,}87\cdot 0{,}25\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}03 = 1{,}49\cdot 10^{-3} \text{ Н}.$$

3) Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени. В том числе она равна максимальной кинетической энергии, когда потенциальная равна нулю, т.е.

$$E = T_{\max} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2},$$

где $\upsilon_{\max} = -A\omega = -2\pi\nu A$, тогда

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 A^2.$$

После подстановки числовых значений получим

$$E = 2\cdot 9{,}87\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}25\cdot 9\cdot 10^{-4} = 2{,}21\cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое колебания? Какие колебания называются свободными, гармоническими?
2. Дайте определение амплитуды колебаний, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебаний.
3. В чём заключается идея метода вращающегося вектора амплитуды?

4. Выведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки как функции времени.

5. От чего зависит амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?

6. Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергий при гармонических колебаниях.

7. Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание?

8. Что называется гармоническим осциллятором, пружинным, физическим, математическим маятниками?

9. Выведите формулу для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.

10. Что такое приведённая длина физического маятника?

11. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.

12. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Когда получается окружность, прямая?

13. Что такое биения? Чему равна частота биений, период?

14. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их.

15. Как изменяется частота собственных колебаний с увеличением массы колеблющегося тела?

16. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?

17. Почему частота затухающих колебаний должна быть меньше частоты собственных колебаний системы?

18. Что такое коэффициент затухания, декремент затухания, логарифмический декремент затухания?

19. При каких условиях наблюдается апериодическое движение?

20. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение.

21. От чего зависит амплитуда вынужденных колебаний? Запишите выражение для амплитуды и фазы при резонансе.

22. Нарисуйте, проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения и скорости. В чём их отличие?

23. Чему равен сдвиг фазы между смещением и вынуждающей силой при резонансе?

24. Что называется резонансом? Какова его роль?

9. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

9.1. ПОНЯТИЕ О МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЛНАХ

Если какую-либо частицу или совокупность частиц упругой среды привести в колебание, то эти колебания не останутся локализованными в том месте, где они возбуждены, а благодаря взаимодействию между частицами будут распространяться с некоторой конечной скоростью по всем направлениям.

Процесс распространения механических колебаний в упругой среде называется *механической волной*.

Существенно подчеркнуть, что волна переносит колебательное движение, энергию этого движения, но не сами частицы среды. Частицы среды лишь совершают колебания около положений равновесия, причём соседние частицы, даже самые ближайшие, колеблются с некоторым сдвигом по фазе. Наличие сдвига фаз объясняется *инерцией* частиц. Чтобы вывести из положения равновесия любую из частиц, требуется некоторое время. Поэтому частицы, находящиеся на разных расстояниях от источника волны, приходят в колебания неодновременно.

Различают поперечные и продольные волны.

Волна называется *поперечной*, если колебания частиц среды происходят вдоль направлений, перпендикулярных к направлению распространения волны. Пример: колебания струны. Поперечные волны могут распространятся в тех средах, в которых возникают упругие силы при деформации сдвига. Такими свойствами обладают только твёрдые тела. Волна называется *продольной*, если колебания частиц среды происходят вдоль направлений, параллельных направлению распространения волны. Пример: звуковые волны. Продольные волны могут распространяться в таких средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия или растяжения. Такими средами являются любые тела – твёрдые, жидкие, газообразные.

На рисунке 9.1 показано расположение частиц среды в поперечной (*а*) и продольной (*б*) волнах (выделены частицы, которые в невозмущённой среде располагались воль одной прямой, на одинаковых расстояниях друг от друга).

Основными параметрами волны являются: 1) фазовая скорость υ; 2) частота колебаний ν; 3) период колебаний T; 4) циклическая частота; 5) длина волны λ.

Фазовая скорость и скорость распространения волны – это скорость, с которой перемещается в пространстве та или иная фаза колебания. Фазовая скорость зависит от плотности среды и её упругих свойств.

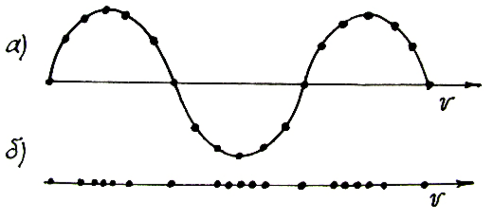


Рис. 9.1

Частота колебаний – число полных колебаний, совершаемых любой из частиц среды, в которой распространяется волна, за единицу времени.

Период колебаний – промежуток времени, в течение которого любая из частиц совершает одно полное колебание.

Циклическая частота – число полных колебаний совершаемых за 2π секунд.

Длина волны – расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковых фазах (точнее, со сдвигом фаз, равным 2π; но добавление к фазе 2π не оказывает на неё влияния).

Нетрудно показать, что длина волны равна тому расстоянию, на которое волна распространяется за время, равное периоду:

$$\lambda = \upsilon T\,. \tag{9.1}$$

Во всякой волне можно выделить бесчисленное множество так называемых волновых поверхностей. *Волновая поверхность* – это геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Волновые поверхности принято проводить через равновесные положения частиц, колеблющихся в одинаковых фазах. Отсюда следует, что волновые поверхности неподвижны. В зависимости от формы волновой поверхности различают плоские, сферические, цилиндрические, эллиптические и другие волны.

Поверхность, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц, ещё не пришедших в колебания, называется *фронтом волны*. Фронт волны в отличие от волновых поверхностей перемещается со скоростью, равной скорости распространения волны.

Нормаль, восставленная к фронту волны в данной точке, указывает, в каком *направлении распространяется* волна в этой точке.

Связь между основными параметрами волны устанавливается формулами:

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \lambda\frac{\omega}{2\pi}\,; \tag{9.2}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (9.3)$$

Величину $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ называют *волновым числом*. Выразив λ через ω и υ по (9.2), можно записать

$$k = \frac{\omega}{\upsilon}. \qquad (9.4)$$

9.2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение волны – это формула, позволяющая найти смещение любой частицы среды, в которой распространяется волна, для любого заданного момента времени:

$$S = S(x, y, z, t), \qquad (9.5)$$

где S – смещение произвольной частицы от положения равновесия; x, y, z – декартовы координаты равновесного положения этой частицы; t – время.

Формула (9.5) должна быть периодической функцией как координат, так и времени. Это следует из того, что *все* частицы, охваченные волновым движением, совершают периодические колебания, и все частицы, отстоящие друг от друга на расстоянии λ, колеблются одинаковым образом.

Будем полагать, что частицы среды колеблются по гармоническому закону, волна плоская и распространяется в направлении оси x. В этом случае волновые поверхности будут перпендикулярны к оси x, и так как все частицы, принадлежащие одной и той же волновой поверхности, колеблются одинаково, смещение любой из частиц будет зависеть только от x и t:

$$S = S(x, t). \qquad (9.6)$$

Выделим две волновые поверхности так, чтобы одна проходила через начало координат (поверхность «*0*»), другая – через произвольную точку с координатой x (поверхность «*x*») – рис. 9.1. Пусть колебания частиц, принадлежащих волновой поверхности «*0*», происходят по закону

$$S_0 = A\cos\omega t. \qquad (9.7)$$

Колебания частиц, принадлежащих поверхности «x», начнутся позже, так как требуется некоторое время для того, чтобы волна прошла расстояние x, отделяющее поверхности «0» и «x». Это время, очевидно, равно $\tau = \frac{x}{\upsilon}$, где υ – скорость распространения волны.

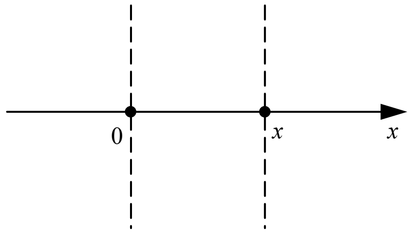


Рис. 9.1

Следовательно, колебания частиц поверхности «x» будут отставать от колебаний частиц поверхности «0» на τ:

$$S = A\cos\omega(t - \tau)$$

или

$$S = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right). \tag{9.8}$$

Это уравнение и есть уравнение плоской гармонической волны, распространяющейся в направлении оси x. Величина S определяет смещение от положения равновесия любой из частиц с координатой x в момент времени t. Предполагается, что амплитуда колебаний всех частиц одинакова. Для плоской волны это справедливо, если энергия волны не поглощается средой.

Уравнения плоской волны можно записать также в виде

$$S = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}x\right)$$

или, учитывая (9.8):

$$S = A\cos(\omega t - kx)\ . \tag{9.9}$$

Уравнение волны, распространяющейся в направлении, противоположном оси x, имеет вид

$$S = A\cos(\omega t + kx)\ . \tag{9.10}$$

График зависимости смещения от t при некотором фиксированном x приведён на рис. 9.2, *а*; график зависимости смещения от x при некотором фиксированном t – на рис. 9.2, *б*.

Уравнение плоской волны есть решение соответствующего дифференциального уравнения, называемого *волновым*.

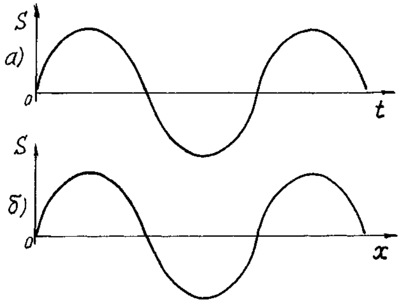


Рис. 9.2

Волновое уравнение связывает вторые частные производные от смещения по координатам со вторыми частными производными от смещения по времени. Продифференцируем уравнения волны (9.9) дважды по времени:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx)\,, \quad (9.11)$$

затем дважды по координате:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx)\,. \quad (9.12)$$

Сопоставляя уравнения (9.11) и (9.12), получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\,.$$

Учитывая, что $\frac{k^2}{\omega^2} = \frac{1}{\upsilon^2}$, найдём искомое волновое уравнение плоской гармонической волны

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\,. \quad (9.13)$$

В случае если волна распространяется в произвольном направлении, в левой части волнового уравнения появляются слагаемые, содержащие вторые частные производные по y и z:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}\,. \quad (9.14)$$

Решением этого уравнения в зависимости от дополнительных условий может быть уравнение плоской, сферической и других волн.

9.3. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ

Распространение волн в упругой среде это распространение деформаций в ней.

Пусть упругому стержню сечением S за время Δt сообщили импульс, равный

$$F\Delta t \ . \tag{9.15}$$

К концу этого промежутка времени сжатие охватит участок длиной l (рис. 9.3).

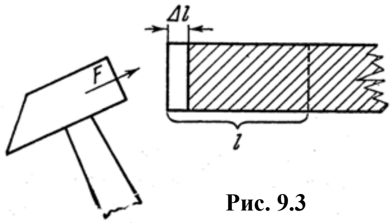


Рис. 9.3

Тогда величина $\dfrac{l}{\Delta t} = \upsilon$ будет определять скорость распространения сжатия вдоль стержня, т.е. скорость волны. Скорость распространения самих частиц в стержне равна $U = \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$. Изменение импульса за это время $\Delta K = K_2 - K_1 = mU - 0 = mU$, где масса стержня, охваченная деформацией, равна $m = \rho Sl$. Выражение (9.15) примет вид

$$F\Delta t = \rho SlU \ . \tag{9.16}$$

Учитывая, что по закону Гука

$$F = ES\frac{\Delta l}{l}, \tag{9.17}$$

где E – модуль упругости.

Приравняем силы, выраженные из (9.16) и (9.17), получим $\dfrac{\rho SlU}{\Delta t} = ES\dfrac{\Delta l}{l}$, откуда $\dfrac{E}{\rho} = \left(\dfrac{l}{\Delta t}\right)^2 = \upsilon^2$.

Скорость распространения продольных волн в упругой среде

$$\upsilon = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{9.18}$$

Аналогично можно получить выражение скорости для поперечных волн

$$\upsilon_{\text{попер}} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \tag{9.19}$$

где N – модуль сдвига.

9.4. ЭНЕРГИЯ ВОЛНЫ

Пусть волна распространяется вдоль оси x со скоростью υ. Тогда смещение колеблющихся точек относительно положения равновесия

$$S = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right). \tag{9.20}$$

Энергия участка среды (с объёмом ΔV и массой m), в которой распространяется эта волна, будет складываться из кинетической и потенциальной энергий, т.е. $W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}}$.

При этом $W_{\text{к}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$, где $\upsilon = A\omega\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)$, т.е.

$$W_{\text{к}} = \frac{1}{2}\rho\Delta V A^2\omega^2\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right). \tag{9.21}$$

В свою очередь потенциальная энергия этого участка равна работе по его деформации

$$W_{\text{п}} = A = \frac{1}{2}Fdl = \frac{1}{2}ES\frac{dl^2}{l}.$$

Умножив и разделив правую часть этого выражения на l, получим

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}E\left(\frac{dl}{l}\right)^2 lS,$$

где $\frac{dl}{l}$ можно заменить на относительную деформацию $\frac{dS}{dx}$. Тогда потенциальная энергия примет вид

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{2}E\left(\frac{dS}{dx}\right)^2\Delta V = \frac{1}{2}E\left[\frac{A\omega}{\upsilon}\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right]^2\Delta V =$$

$$= \frac{1}{2}E\frac{A^2\omega^2}{\upsilon^2}\cos^2\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\Delta V. \tag{9.22}$$

Сравнивая (9.21) и (9.22), замечаем, что обе энергии изменяются в одинаковых фазах, одновременно принимают максимальное и минимальное значения. При колебаниях в среде энергия из одного участка может переходить в другой, но полная энергия элемента объёма ΔV не остаётся постоянной:

$$W = W_{к} + W_{п} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \Delta V \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\left[\frac{E}{\upsilon^2} + \rho\right]. \qquad (9.23)$$

Учитывая, что для продольной волны в упругой среде $\upsilon = \sqrt{E/\rho}$ и $\frac{E}{\upsilon^2} = \rho$, получаем, что полная энергия

$$W = \rho A^2 \omega^2 \Delta V \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right). \qquad (9.24)$$

пропорциональна квадратам амплитуды и частоты, а также плотности среды, в которой распространяется волна.

Введём понятие *плотности энергии* – ε. Для элементарного объёма ΔV эта величина равна

$$\varepsilon = \frac{W}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right). \qquad (9.25)$$

Среднее значение плотности энергии $\overline{\varepsilon}$ для времени одного периода будет равно $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2$, так как среднее значение $\cos^2 \varphi$ за это время равно 1/2.

Учитывая, что энергия не остаётся в данном элементе среды, а переносится волной от одного элемента к другому, можно ввести понятие *потока энергии*, численно равного энергии, переносимой через единицу поверхности за единицу времени. Так как энергия $W = \overline{\varepsilon}\upsilon t S$, то среднее значение потока энергии

$$\overline{\Pi} = \frac{W}{t} = \overline{\varepsilon}\upsilon S. \qquad (9.26)$$

Плотность потока сквозь поперечное сечение определяется как $\overline{U} = \frac{\overline{\Pi}}{S} = \overline{\varepsilon}\upsilon$, а так как скорость есть величина векторная, то и плотность потока – тоже вектор

$$\vec{U} = \overline{\varepsilon}\vec{\upsilon}, \qquad (9.27)$$

получивший название – «вектор Умова».

9.5. ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН. СТОЯЧИЕ ВОЛНЫ

Волна, проходящая через границу раздела двух сред, частично проходит через неё, частично отражается. Этот процесс зависит от соотношения плотностей сред.

Рассмотрим два предельных случая:

1) *вторая среда менее плотная* (т.е. упругое тело имеет свободную границу);

2) *вторая среда более плотная* (в пределе отвечает неподвижно закреплённому концу упругого тела).

В первом случае левый конец стержня связан с источником колебаний, правый – свободен (рис. 9.4, *а*). Когда деформация достигнет правого конца, он в результате возникшего слева сжатия получит ускорение вправо. При этом в силу отсутствия среды справа это движение не вызовет никакого дальнейшего сжатия. Деформация слева будет уменьшаться, а скорость движения – расти. При $x = 0$ $\upsilon = \max$. В силу инерции конца стержня движение в момент исчезновения деформации не прекратится. Оно будет продолжаться с замедлением, вызывая деформацию растяжения, которая будет распространяться справа налево.

В точке отражения *за приходящим сжатием* следует *уходящее растяжение*, как и в свободно распространяющейся волне. Это значит, что при отражении волны от менее плотной среды никакого изменения фазы её колебаний в точке отражения не происходит.

Во втором случае, когда правый конец упругого стержня *закреплён неподвижно*, дошедшая до него *деформация* сжатия *не может* привести этот конец *в движение* (рис. 9.4, *б*). Возникшее сжатие начнёт распространяться влево. При гармонических колебаниях источника за деформацией сжатия будет следовать деформация растяжения. А при отражении от закреплённого конца за сжатием в приходящей волне будет следовать опять-таки деформация сжатия в отражённой волне.

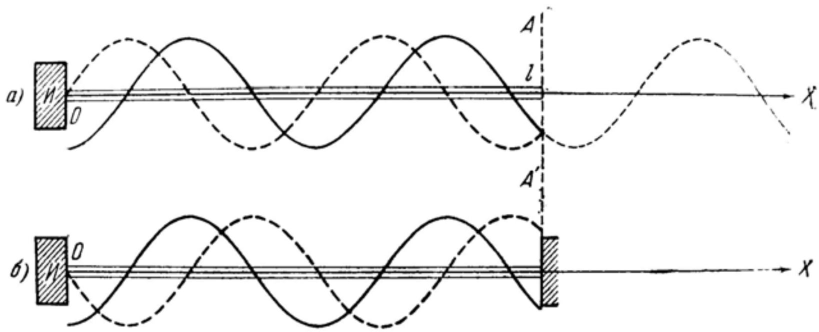


Рис. 9.4

То есть процесс происходит так, как будто в точке отражения теряется полволны, другими словами, фаза колебаний меняется на противоположную (на π). Во всех промежуточных случаях картина отличается только тем, что амплитуда отражённой волны будет меньше, ибо часть энергии уходит во вторую среду.

При непрерывной работе источника волн волны, идущие от него, будут складываться с отражёнными. Пусть их амплитуды одинаковы, а начальные фазы равны нулю. При распространении волн вдоль оси x их уравнения:

$$S_{\text{пр}} = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos(\omega t - kx);$$

$$S_{\text{об}} = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos(\omega t + kx). \qquad (9.28)$$

В результате сложения колебания будут происходить по закону

$$S = S_{\text{пр}} + S_{\text{об}} = 2A\cos kx\cos\omega t = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T}.$$

В этом уравнении два первых сомножителя представляют собой амплитуду результирующего колебания $B(x)$, зависящую от положения точек на оси x:

$$B(x) = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 2A\cos kx.$$

Получили уравнение, называемое уравнением стоячей волны:

$$S = B(x)\cos 2\pi\frac{t}{T} = B(x)\cos\omega t. \qquad (9.29)$$

Точки, для которых амплитуда колебаний максимальна $(B(x) = 2A)$, называются пучностями волны; точки, для которых амплитуда минимальна $(B(x) = 0)$, называются узлами волны.

Определим *координаты пучностей*. При этом $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 1$, т.е. должно выполняться условие $2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi$ при $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, откуда координаты пучностей $x = \pm k\frac{\lambda}{2} = \pm 2k\frac{\lambda}{4}$. Расстояние между соседними пучностями – k и $k+1$ равно

$$x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2},$$

т.е. половине длины волны.

Определим *координаты узлов*. При этом $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda} = 0$, т.е. должно выполняться условие $2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$ при $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, откуда координаты узлов $x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}$. Расстояние между соседними узлами равно половине длины волны, а между узлом и пучностью $(2k+1)\frac{\lambda}{4} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$ – четверти волны. Так как $\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$ при переходе через нуль, т.е. узел, меняет значение с $+1$ на -1, то смещение точек или их амплитуды по разные стороны от узла имеют одинаковые значения, но разные направления. Так как $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ имеет одинаковое значение в данный момент времени для всех точек волны, то все точки, находящиеся между двумя узлами, колеблются в одинаковых фазах, а по обе стороны узла в противоположных фазах.

Эти признаки являются отличительными признаками стоячей волны от бегущей, у которой все точки имеют одинаковые амплитуды, но колеблются в разных фазах.

Примеры решения задач

Пример 1. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $\upsilon = 15$ м/с. Период колебания точек шнура $T = 1{,}2$ с, амплитуда $A =$ 2 см.

Определить: 1) длину волны λ, 2) фазу φ колебаний, смещение y, скорость υ и ускорение a точки, отстоящей на расстоянии $x = 45$ м от источника волн в момент времени $t = 4$ с, 3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1 = 20$ м и $x_2 = 30$ м.

Решение: 1) Длиной волны называется наименьшее расстояние между точками волны, колебания которых отличаются по фазе на 2π. Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период, и находится как $\lambda = \upsilon T$.

Подставив числовые значения, получим $\lambda = 15 \cdot 1{,}2 = 18$ м.

2) Фаза колебаний, смещение, скорость и ускорение точки могут быть найдены с помощью уравнения волны

$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right),$$

где y – смещение колеблющейся точки; x – расстояние точки от источника волн; υ – скорость распространения волн.

Фаза колебаний равна

$$\varphi = \omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \text{ или } \varphi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\varphi = \frac{2\pi}{1{,}2}\left(4 - \frac{45}{15}\right) = \frac{\pi}{0{,}6} = 1{,}67\pi.$$

Смещение точки определим, подставив в уравнение волны числовые значения амплитуды и фазы:

$$y = 2\cos 1{,}67\pi = 2\cos 300° = 2\cos(-60°) = 2\cdot 0{,}5 = 1 \text{ см}.$$

Скорость υ точки является первой производной от смещения по времени, поэтому

$$\upsilon = \frac{dy}{dt} = -A\omega\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) \quad \text{или} \quad \upsilon = -\frac{2\pi A}{T}\sin\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\upsilon = -\frac{2\cdot 3{,}14\cdot 2}{1{,}2}\sin 300° = -10{,}4\sin(-60°) = -10{,}4\cdot(-0{,}86) = 9 \text{ см/с}.$$

Ускорение есть первая производная от скорости по времени, поэтому

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right).$$

После подстановки числовых значений найдём

$$a = -0{,}02\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{1{,}2}\right)^2\cos 300° = -0{,}548\cos(-60°) = -0{,}548\cdot 0{,}5 = -0{,}274 \text{ м/с}^2.$$

3) Разность фаз колебаний $\Delta\varphi$ двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками (разностью хода волны) соотношением

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1).$$

Подставив числовые значения, получим

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{18}(30-20) = 1{,}1\pi\,.$$

Вопросы для самопроверки

1. Как объяснить распространение колебаний в упругой среде? Что такое волна?
2. Что называется поперечной волной, продольной волной? Когда они возникают?
3. Что такое волновой фронт, волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число, фазовая и групповая скорости?
6. В чём заключается физический смысл вектора Умова?
7. Какая волна является бегущей, гармонической, плоской, сферической?
8. Каковы уравнения этих волн?
9. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания прямой и отражённой волн в узлах взаимно гасятся. Означает ли это, что исчезает энергия?
10. Две волны, распространяющиеся навстречу друг другу, отличаются только амплитудами. Образуют ли они стоячую волну?
11. Чем стоячая волна отличается от бегущей?
12. Чему равно расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны, двумя соседними пучностями, соседними пучностью и узлом?

10. АКУСТИКА. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

10.1. ПРИРОДА ЗВУКА И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Колебания упругой среды с частотой в диапазоне 16…20 000 Гц, воспринимаемые органами слуха, называются *звуком*.

Колебания с частотой больше 20 000 Гц называются ультразвуковыми или *ультразвуком*. Колебания с частотой меньше 16 Гц – *инфразвуком*.

Любые тела, совершающие механические колебания с такой частотой, являются источниками звука.

Физическим характеристикам звуковых колебаний соответствуют определённые физиологические понятия.

Так, *частоте* колебаний ν соответствует *высота* звука.

Силе звука I, физической характеристике интенсивности звуковых колебаний, соответствует *громкость* звука.

Интенсивность звука может быть охарактеризована различными величинами: скоростью колебаний, звуковым давлением, напряжениями, амплитудой колебаний и др. Однако *целесообразнее* интенсивность звука *характеризовать* по энергии, переносимой звуковыми волнами. Такая характеристика была предложена в 1877 г. Н. А. Умовым.

Ранее было показано, что полная энергия колебаний остаётся постоянной, равной $W = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$. Выделим из фронта бегущей волны элементарную площадку dS. За время dt волна распространится на расстояние υdt, перпендикулярное к этому фронту, и образует объём $\upsilon dtdS$. Если плотность энергии среды равна ε, то энергия всех частиц, входящих в элементарный объём, равна $\varepsilon\upsilon dtdS$. Тогда в единицу времени через единичную площадку фронта волны будет переноситься *поток энергии* $\vec{I} = \varepsilon\vec{\upsilon}$.

Вектор $\vec{I}$ направлен в сторону распространения волны и носит название «вектор Умова». Величина вектора $\vec{I}$ называется *силой* звука.

Нормальное человеческое ухо способно воспринимать звуки, сила которых превышает некоторое минимальное значение, различное для различных частот $I_{\min} = f(\nu)$ (рис. 10.1).

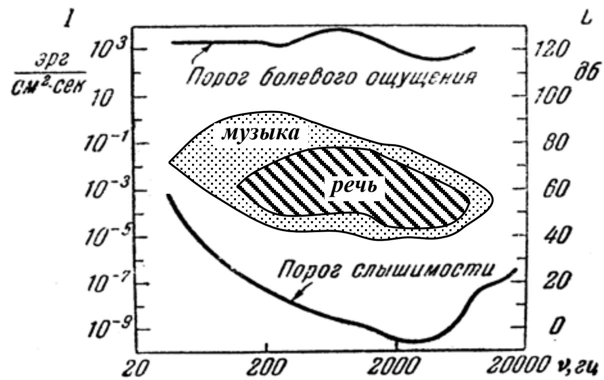


Рис. 10.1

Величина $I_{\min}$ называется *порогом слышимости* звука. Так, для частоты $\nu = 10^3$ Гц порог слышимости $I_{\min} = 10^{-12}$ Вт/м^2 (или 10^{-9} эрг/(см^2·с)). При силе звука $I = 1\ldots10$ Вт/м^2 возникает болевое ощущение.

В столь широком диапазоне чувствительности ухо не может различать малые приросты громкости звука. Поэтому часто используют не силу звука I, а *уровень силы звука*, $L = \lg\dfrac{I}{I_0}$, измеряется в белах, или в единицах, в десять раз меньше – децибелах $\left(L = 10\lg\dfrac{I}{I_0}\right)$.

Всякий реальный звук представляет собой не простое гармоническое колебание, а является наложением гармонических колебаний с определённым набором частот. Этот набор называется *акустическим спектром*, который может быть сплошным или линейчатым.

Сплошным акустическим спектром обладают *шумы*. Колебания с линейчатым спектром обладают определённой *тональностью*. Высота тонального звука определяется основной (наименьшей) частотой.

Относительная интенсивность обертонов определяет звуковую окраску или тембр звука.

10.2. ЭФФЕКТ ДОППЛЕРА ДЛЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН

Рассмотрим вопрос о том, изменяются ли частоты колебаний, принимаемые каким-либо приёмником, в зависимости от того, перемещаются или нет источник и приёмник колебаний. Обозначим скорость движения источника колебаний через U, скорость приёмника колебаний через υ, а скорость распространения самих колебаний в среде – $V_{\text{в}}$.

Пусть приёмник колебаний и их источник покоятся относительно среды, т.е. $\upsilon = 0$, $U = 0$.

При прохождении колебаний мимо приёмника он регистрирует колебания, которые определяются их частотой

$$\nu' = \frac{V_{\text{в}}}{\lambda} = \frac{V_{\text{в}}}{V_{\text{в}}T} = \nu,$$

т.е. число колебаний, регистрируемых приёмником, равно числу колебаний, излучаемых источником.

Приёмник колебаний движется относительно среды со скоростью υ, источник – неподвижен: $U = 0$.

В этом случае приёмник зарегистрирует большее число волн, так как он движется им навстречу, а это эквивалентно тому, как если бы волны шли со скоростью $V_{\text{в}} + \upsilon$ и их число стало

$$\nu' = \frac{V_{\text{в}} + \upsilon}{\lambda} = \frac{V_{\text{в}} + \upsilon}{V_{\text{в}} T} = \left(1 + \frac{\upsilon}{V_{\text{в}}}\right)\nu .$$

Если регистрирующий прибор будет удаляться, то $\upsilon < 0$ и тогда $\nu' < \nu$, а при $|\upsilon| = |V_{\text{в}}|$ $\nu' = 0$. Это означает, что прибор движется вместе с волной и число воспринимаемых (проходящих мимо) волн равно нулю.

Источник колебаний движется относительно среды со скоростью U, регистрирующий прибор неподвижен – $\upsilon = 0$. Пусть $U > 0$, источник колебаний приближается к прибору. Учитывая, что скорость распространения волн зависит от свойств среды, и за время T волна распространится на расстояние λ, а источник переместится на расстояние UT, длина волны окажется равной не λ, а

$$\lambda' = \lambda - UT = V_{\text{в}} T - UT = (V_{\text{в}} - U)T .$$

Число регистрируемых волн

$$\nu' = \frac{V_{\text{в}}}{\lambda'} = \frac{V_{\text{в}}}{(V_{\text{в}} - U)T} = \frac{V_{\text{в}}}{V_{\text{в}} - U}\nu,$$

т.е. число регистрируемых колебаний увеличилось. При удалении источника $U < 0$, число регистрируемых колебаний уменьшится.

При одновременном перемещении источника колебаний и регистрирующего прибора $(U \neq 0, \upsilon \neq 0)$ будет регистрироваться количество колебаний, равное

$$\nu' = \frac{V_{\text{в}} \pm \upsilon}{V_{\text{в}} \mp U}\nu ,$$

где верхние знаки применяются при взаимном сближении, а нижние – при удалении источника и приёмника колебаний.

Это изменение частоты колебаний получило название эффекта Допплера.

Примеры решения задач

Пример 1. Источник звука частотой $\nu =$ 18 000 Гц приближается к неподвижно установленному резонатору, настроенному на акустическую волну $\lambda_{\text{рез}}$ = 1,75 см.

Какой скоростью должен обладать источник звука, чтобы возбуждаемые им звуковые волны вызывали колебания резонатора? Температура воздуха 17 °С.

Решение. Согласно эффекту Допплера частота звука, воспринимаемая наблюдателем, зависит от скорости движения источника звука и скорости движения наблюдателя. Эта зависимость выражается формулой

$$\nu' = \frac{V_\text{в} + \upsilon}{V_\text{в} - U}\nu,$$

где ν – частота звуковых волн, излучаемых источником; $V_\text{в}$ – скорость звука в данной среде; U – скорость движения источника звука; υ – скорость движения наблюдателя; ν' – частота волн, воспринимаемых наблюдателем.

Учитывая, что наблюдатель остаётся неподвижным, т.е. $\upsilon = 0$, получим

$$\nu' = \frac{V_\text{в}}{V_\text{в} - U}\nu, \quad \text{откуда } U = V_\text{в}\left(1 - \frac{\nu}{\nu'}\right).$$

В этом выражении неизвестны числовые значения скорости звука $V_\text{в}$ и частоты ν'.

Скорость звука в газах зависит от природы газа и от температуры и определяется по формуле

$$V_\text{в} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}},$$

где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_v}$ – отношение удельных теплоёмкостей газа; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура газа; M – молярная масса.

Чтобы волны, приходящие к резонатору, вызвали его колебания, частота воспринимаемых резонатором волн ν' должна совпадать с собственной частотой резонатора $\nu_\text{рез}$, т.е.

$$\nu' = \nu_\text{рез} = \frac{V_\text{в}}{\lambda_\text{рез}},$$

где $\lambda_\text{рез}$ – длина волны собственных колебаний резонатора.

С учётом сделанных замечаний будем иметь

$$U = V_{\text{в}}\left(1 - \frac{\nu\lambda_{\text{рез}}}{V_{\text{в}}}\right) = V_{\text{в}} - \nu\lambda_{\text{рез}}$$

или

$$U = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} - \nu\lambda_{\text{рез}},$$

что после подстановки числовых значений даст

$$U = \sqrt{\frac{1{,}4 \cdot 8{,}32 \cdot 290}{29 \cdot 10^{-3}}} - 1{,}8 \cdot 10^{4} \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-2} = 36 \text{ м/с.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое звуковые волны? Звуковые волны в воздухе продольные или поперечные? Почему?
2. Может ли звук распространяться в вакууме?
3. От чего зависит громкость, высота, тембр звука?
4. Что такое эффект Допплера? Чему будет равна частота колебаний, воспринимаемых покоящимся приёмником, если источник колебаний от него удаляется, приближается?
5. Какое влияние оказывает скорость ветра на эффект Допплера?
6. Как определить частоту звука, воспринимаемую приёмником, если источник звука и приёмник движутся?

11. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Классическая механика базировалась на вполне определённых взглядах на пространство и время. Эти взгляды носили априорный характер, т.е. они постулировались до и независимо от опыта.

Экспериментальное исследование свойств пространства и времени началось в конце XIX столетия в связи с решением вопроса о природе света. Логическим завершением этих исследований явилась теория относительности, созданная А. Эйнштейном в 1905 – 1916 гг.

Теория относительности включает в себя специальную (частную) и общую теории. Первая рассматривает свойства пространства и времени в инерциальных системах отсчёта в отсутствие полей тяготения, вторая – свойства пространства и времени в неинерциальных системах при наличии полей тяготения.

Ниже будут рассмотрены некоторые элементы специальной теории относительности.

11.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ О ПРОСТРАНСТВЕ, ВРЕМЕНИ И ДВИЖЕНИИ

В основе классической механики лежат следующие представления о пространстве, времени и движении.

Пространство, *в котором происходят все физические явления и процессы*, *абсолютно*. Абсолютное пространство – это некое неподвижное, безграничное, пустое «вместилище» материи. «Абсолютное пространство по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему и остаётся всегда одинаковым и неподвижным» (И. Ньютон «Математические начала натуральной философии»).

Свойство абсолютного пространства не зависят от того, есть в нём материальные тела или нет, движутся эти тела или покоятся.

Абсолютное пространство *трёхмерно*. Это значит, что оно имеет *три измерения* и для определения положения каждой его точки необходимо задать три числа, три координаты.

Абсолютное пространство *непрерывно*. Координаты, определяющие положение отдельных его точек, могут принимать любые согласованные значения. (Координаты должны быть согласованы в том смысле, что они должны образовать *вектор*. Как известно, не всякая тройка чисел образует вектор.)

Абсолютное пространство *эвклидово*. Это значит, что геометрические свойства абсолютного пространства, его метрика описываются геометрией Эвклида. Определить метрику пространства – значит указать способ задания расстояния между произвольными точками этого пространства. Формула, выражающая квадрат расстояния между какими-либо двумя точками, называется фундаментальной квадратичной формой. Фундаментальная форма эвклидова пространства имеет вид

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2,$$
$$\Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1,\ \Delta z = z_2 - z_1, \qquad (11.1)$$

где $x_1, y_1, z_1 -$ декартовы координаты одной точки; $x_2, y_2, z_2 -$ декартовы координаты другой точки; $\Delta r -$ расстояние между этими точками.

Расстояние между отдельными точками пространства измеряются с помощью *масштабов* (линеек), изготовленных из твёрдых тел. Постулируется (без опытной проверки): если два масштаба имеют одинаковую длину в одной системе отсчёта, то они будут иметь одинаковую длину, равную исходной, и во всех других системах, независимо от того, где будут находиться масштабы и как двигаться.

Абсолютное пространство *однородно*: в нём нельзя выделить особых, привилегированных точек, которые могли бы послужить началом привилегированных систем координат.

Абсолютное пространство *изотропно*: в нём не существует особых, привилегированных направлений, все его направления равноправны. То, что абсолютное пространство однородно и изотропно, означает, что оно является пространством «плоским», неискривлённым. (Искривлённое пространство (таковым является, например, пространство, в котором имеется поле тяготения) описывается иной, неэвклидовой геометрией.)

Время абсолютно. Время – это некое абсолютное «вместилище» событий, абсолютная длительность, не зависящая от тел. «Абсолютное, истинное или математическое время само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью» (Ньютон).

Абсолютное время – это время, не зависящее от выбора пространственной системы координат; время, протекающее единообразно, с одной и той же быстротой во всех системах отсчёта; время, любое мгновение которого наступает одновременно во всех системах отсчёта, во всех точках Вселенной.

Абсолютное время *одномерно*, для его определения необходимо задать одно единственное число – временную координату t.

Время *непрерывно*: два его мгновения могут быть сколь угодно близки друг к другу.

Абсолютное время *однородно*: в нём нельзя выделить особого мгновения, которое могло бы послужить началом привилегированной системы отсчёта времени.

В отличие от абсолютного пространства абсолютное время *анизотропно*: оно не обладает способностью движения сначала в одном направлении, а затем в противоположном: время монотонно течёт только в одном направлении – от прошлого к будущему.

Измерение времени осуществляется с помощью *часов*. Роль часов может играть любой периодически повторяющийся процесс. Постулируется: если двое одинаковых часов однажды синхронизированы (выверены), то их показания в последующем будут одинаковыми, независимо от того, где будут находиться часы и как двигаться.

Абсолютное время и абсолютное пространство не взаимосвязаны. Это означает, что вполне допустимо описание физических явлений в чисто пространственном аспекте (т.е. только в пространстве, *вне времени*).

Наряду с движением *относительным*, т.е. движением тел друг относительно друга, существует движение *абсолютное* – движение по отношению к абсолютному пространству. Это движение, правда, нельзя засечь механическими опытами (это следует из механического принципа относительности Галилея), но не исключено, что его удастся обнаружить какими-либо другими, немеханическими опытами. (Обратим внимание на то, что абсолютное пространство Ньютона не содержит абсолютно неподвижного материального тела, к которому можно было бы привязать абсолютные координатные оси. Лишь через два столетия после Ньютона физика пыталась отнести абсолютное движение к абсолютно неподвижному материальному телу – эфиру.)

Свойства пространства и времени естественным образом отражаются в экспериментально установленных законах движения материи. Так, *однородность пространства* находит своё отражение в законе инерции, обобщением которого является *закон сохранения импульса*. Действительно, если пространство однородно, если все его точки равноправны, то поведение движущегося свободного тела в одной точке траектории, по которой оно движется, ничем не будет отличаться от поведения в другой точке – пространство как таковое не может изменить скорость и импульс тела, следовательно, тело сохраняет приобретённый импульс.

Благодаря однородности пространства равноправны с механической точки зрения все свободные тела и, следовательно, все инерциальные системы отсчёта.

Однородность времени проявляется в *сохранении энергии*. Время само по себе не может вызвать изменение физического состояния замкнутой системы. Энергия замкнутой системы тел с течением времени не изменяется.

Анизотропность времени проявляется в том, что процессы, самопроизвольно развивающиеся в замкнутых системах, имеют вполне определённую *направленность* (об этом речь пойдёт в разделе «Термодинамика»).

Таким образом, не пространство и время как таковые, а взаимодействие тел друг с другом изменяет их состояние, их движение, изменяет направленность протекающих в природе процессов.

Инерциальных систем отсчёта существует бесконечное множество. Если какая-либо из систем инерциальна, то инерциальными будут любые другие системы, движущиеся по отношению к этой системе равномерно и прямолинейно.

11.2. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

«Все механические явления при одинаковых условиях протекают неотличимо одинаково во всех инерциальных системах отсчёта».

«Не выходя за пределы движущейся системы, нельзя зарегистрировать её прямолинейное и равномерное движение». «При описании механического движения все инерциальные системы отсчёта равноправны». Все эти утверждения, являющиеся следствием однородности пространства, – формулировки классического принципа относительности Галилея.

Принцип относительности Галилея формулируют так же, как требование инвариантности (неизменности) законов механического движения относительно преобразований Галилея. Напомним о том, что преобразованиями называются формулы, связывающие координаты и время некоторого события (событием называется любое явление, характеризующееся местом свершения (координатами) и временем свершения) в двух инерциальных системах отсчёта, находящихся в относительном движении.

В основе преобразований Галилея лежат классические представления о пространстве и времени. Как было показано ранее, преобразования Галилея имеют вид:

а) *переход от системы* O *к системе* O' $(O \to O')$:

$$x' = x - \vartheta t;$$
$$y' = y;$$
$$z' = z;$$
$$t' = t;$$

б) *переход от системы* O' *к системе* O $(O' \to O)$:

$$x = x' + \vartheta t;$$
$$y = y';$$
$$z = z';$$
$$t = t', \qquad (11.2)$$

где x, y, z, t и x', y', z', t' – координаты и время одного и того же точечного события в системах O и O'.

Преобразования записаны для случая, когда система O условно считается «неподвижной», система O' – «движущейся»; движение системы O' происходит со скоростью $\vec{\vartheta} = \text{const}$ в направлении оси x без поворота осей y' и z'; в момент времени $t = t' = 0$ начала координат и направления всех координатных осей совпадают (рис. 11.1).

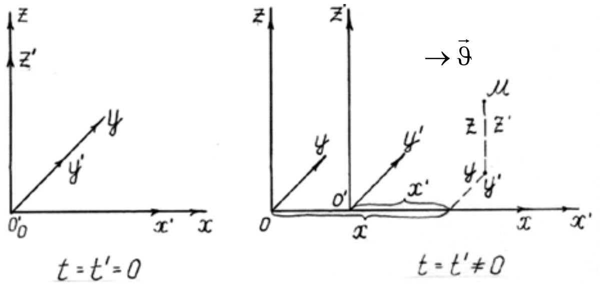


Рис. 11.1

Далее всюду без особых оговорок, символ «O» будет обозначать «неподвижную» инерциальную систему, символ «O'» – «движущуюся» инерциальную систему.

Кавычки в словах «неподвижная» и «движущаяся», отражающие условность деления этих систем на движущуюся и покоящуюся, будут опускаться. Во всех случаях будет рассматриваться простейший случай относительного движения систем – в направлении оси x.

Из преобразований (11.2) вытекает правило сложения скоростей в классической механике. Для простейшего случая, когда материальная точка движется параллельно оси x, это правило таково:

$$\begin{array}{ll} \textit{переход } O \to O' & \textit{переход } O' \to O: \\ u' = u - \vartheta; & u = u' + \vartheta, \end{array} \qquad (11.3)$$

где u – скорость точки в системе O; u' – скорость точки в системе O'.

Таблица 11.1

Относительные (неинвариантные) величины и соотношения	Абсолютные (инвариантные) величины и соотношения
Координаты (пространственное положение тел)	Масса
Траектория движения	Ускорение
Скорость тела относительно системы отсчёта	Сила
Начальные условия (координаты и скорость тела в начальный момент времени)	Законы Ньютона
Механическая энергия	Ход времени и промежутки времени
Импульс	Расстояние между точками
Момент импульса	Относительная скорость (скорость двух тел друг относительно друга)
Скорость света	Одновременность событий Геометрическая форма тела (конфигурация системы) Максимальная скорость распространения взаимодействий (равна бесконечности)

Из принципа относительности Галилея и правила сложения скоростей (11.3) следует, что *взаимодействие тел на расстоянии должно распространяться мгновенно* (принцип дальнодействия). Действительно, если бы скорость распространения взаимодействия была конечной, то, как видно из формулы (11.3), она была бы разной в разных системах отсчёта. Следовательно, можно было бы различать эти системы, что противоречит принципу относительности Галилея.

Пользуясь преобразованиями Галилея, можно показать, что целый ряд понятий, величин и соотношений механики зависят от выбора системы отсчёта, т.е. являются *относительными*; другие же величины и соотношения не зависят от выбора системы отсчёта – являются *абсолютными*, инвариантными. Инвариантность некоторых величин относительно преобразований Галилея была рассмотрена ранее. В таблице 11.1 неинвариантные величины и соотношения перечислены в одном столбце, инвариантные – в другом.

11.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

То, что классическая механика признаёт существование абсолютного движения в принципе, но вместе с тем отвергает возможность обнаружить его механическими опытами, настораживает. Естественно поэтому, что при первом же удобном случае были предприняты попытки обнаружить абсолютное движение тел другими, немеханическими методами. Это было сделано в конце XIX столетия с помощью *оптических опытов*.

Волновая теория света (выдвинута Х. Гюйгенсом) в XVII в. основывалась на представлении о существовании материального светового носителя – *эфира*. Первоначально эфир мыслился как некая механическая среда, заполняющая всё пространство, «пропитывающая» все тела (механический эфир). Свет по Гюйгенсу – *упругие поперечные волны механического эфира*. (Чтобы свет действительно мог распространяться в эфире в виде механических волн, эфир должен обладать исчезающе малой плотностью и невообразимо большой упругостью.)

Создание Д. К. Максвеллом электромагнитной теории света (вторая половина XIX столетия) привело к представлению об электромагнитном эфире. Электромагнитный эфир в теории Максвелла – всепроникающая, неподвижная (вне тел) электромагнитная среда. Свет по Максвеллу – *поперечные колебания электромагнитного эфира*.

Возникает вопрос: взаимодействуют ли движущиеся тела с эфиром? Увлекают ли находящийся в них эфир? Если увлекают, то насколько – полностью или частично? Были выдвинуты различные гипотезы.

По Герцу Г. Р. (Германия) эфир увлекается полностью, по А. Физо (Франция) – частично, по Г. А. Лоренцу (Голландия) – не увлекается вовсе.

Остановимся на последнем предположении – на модели неподвижного эфира.

Если эфир абсолютно неподвижен, его можно рассматривать как абсолютную систему отсчёта; тогда движение тел относительно эфира – абсолютное движение. Существование эфира, а следовательно, и абсолютного движения будет доказано, если удастся на опыте обнаружить движение тел относительно эфира. Такими телами могут быть, к примеру, источники света. Так как свет – колебания эфира, то скорость света относительно самого эфира не зависит от того, движется источник света в эфире или нет. Относительно же источника скорость света должна быть разной в зависимости от того, движется или покоится в эфире этот источник: если источник покоится, свет, испущенный этим источником, относительно источника должен распространяться с одной и той же скоростью *по всем направлениям*, если же источник движется, скорость света в разных направлениях должна быть разной. Образно говоря, при движении тел в эфире должен возникать «эфирный ветер».

Обозначим: $\vec{c}$ – скорость света относительно эфира (скорость света относительно абсолютной системы отсчёта); $\vec{\vartheta}$ – скорость источника света относительно эфира (абсолютная скорость источника, скорость движущейся инерциальной системы, скорость «эфирного ветра»); $\vec{u}'$ – скорость света относительно источника (скорость света относительно движущейся системы отсчёта). Тогда (если только классическое правило сложения скоростей Галилея для света справедливо) должно быть: $\vec{u}' = \vec{c} - \vec{\vartheta}$.

Проверка справедливости этого соотношения, определение u' и ϑ – дело эксперимента.

Опыт по определению абсолютного движения Земли впервые осуществил А. А. Майкельсон (США) в 1881 г. Идея этого опыта состояла в следующем.

Два луча света посылались в двух взаимно перпендикулярных направлениях: один – в направлении орбитального движения Земли, другой – перпендикулярно к этому направлению (рис. 11.2). Определялись скорости света u_1' и u_2' (относительно Земли) вдоль этих направлений. Так как в направлении орбитального движения Земли источник света двигался, а в направлении, перпендикулярном ему, – был неподвижен, то ожидалось, что скорости u_1' и u_2' будут различными (скорость u_1' должна быть меньше u_2', так как эфир движется навстречу Земле).

Что же оказалось в действительности?

В действительности оказалось, что скорости u_1' и u_2' одинаковы, и, следовательно, никакого «эфирного ветра» не существует.

Несостоятельными оказались и гипотезы полностью и частично увлекающегося эфира. Они также противоречили опытным фактам.

Таким образом, все попытки обнаружить на опыте абсолютную систему отсчёта потерпели крах. В итоге физика была вынуждена отказаться от некоторых своих положений, казавшихся ей устоявшимися и очевидными.

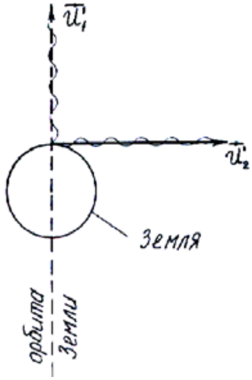


Рис. 11.2

Так как абсолютное движение тел невозможно обнаружить ни механическим, ни оптическим (электродинамическими) опытами (Другие типы взаимодействия к началу XX столетия известны не были.), его вообще не существует. Понятия абсолютного движения и абсолютного покоя лишены смысла. Можно говорить лишь об относительном движении и об относительном покое тел.

Отсутствие «эфирного ветра» в любых системах отсчёта лишает смысла само понятие эфира как реальной материальной среды. Не существует, следовательно, неподвижных в абсолютном смысле привилегированных систем отсчёта.

Свет независимо от состояния движения источника распространяется по всем направлениям и во всех системах отсчёта изотропно – с одной и той же скоростью. Правило сложения скоростей, установленное классической механикой, для света не выполняется! Скорость света не складывается ни с какой другой скоростью. Свет проходит с одной и той же скоростью и мимо «неподвижного» тела, и мимо тела, движущегося навстречу свету, и мимо тела, которое свет догоняет.

11.4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ПОСТУЛАТЫ ЭЙНШТЕЙНА)

Новая теория пространства и времени – специальная теория относительности – принимает без изменения некоторые положения старой теории, а именно:

а) положение о справедливости геометрии Эвклида в пространстве, свободном от полей тяготения;

б) закон инерции;

в) принцип относительности (в обобщённой форме).

То, что специальная теория относительности сохраняет в качестве одного из основных своих положений принцип инерции, означает, что она так же, как и классическая теория, основывается на представлениях об однородности пространства. Но в отличие от старой теории, рассматривающей идею об однородности пространства в отрыве от идеи об однородности времени (доказательством этого служит полная самостоятельность в классической физике законов сохранения импульсов и энергии), теория относительности объединяет эти две идеи в одну – в идею об однородности единого пространственного-временного мира.

Обобщённую формулировку принципа относительности называют *первым постулатом теории Эйнштейна*. Вот некоторые его равноправные формулировки: «никакими физическими опытами, проведёнными внутри инерциальной системы отсчёта, невозможно установить, покоится ли эта система или равномерно и прямолинейно движется»; «не существует особых, привилегированных, абсолютных инерциальных систем отсчёта; все инерциальные системы равноправны»; «законы природы инвариантны относительно перехода от одной системы отсчёта к другой».

К перечисленным положениям добавляется принцип постоянства скорости света (*второй постулат специальной теории относительности*): «скорость тела в вакууме не зависит от скорости движения источника, она одинакова во всех инерциальных системах отсчёта».

Принцип постоянства скорости света иначе называют принципом существования предельной скорости распространения взаимодействий. Теория относительности, опираясь *на опыт*, отвергла утверждение классической механики о возможности существования взаимодействий, распространяющихся с бесконечно большой скоростью (классическая механика полагала, например, что гравитационное взаимодействие тел передаётся мгновенно, с бесконечно большой скоростью). Теория относительности утверждает, что скорость распространения любых взаимодействий *конечна* (примерно 300 000 км/с – с такой скоростью распространяются в вакууме электромагнитное, гравитационное и ядерное взаимодействия). В настоящее время есть все основания думать, что существование предельной скорости распространения взаимодействий связано непосредственно со свойствами пространства и времени, а не с физической природой взаимодействия.

11.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Преобразования Галилея несовместимы с постулатами Эйнштейна. Так, к примеру, из преобразований Галилея следует, что скорость распространения света в разных системах отсчёта должна быть разной, в то время как по второму постулату она должна быть одинаковой во всех системах.

Преобразования, в основе которых лежат постулаты специальной теории относительности, называются *преобразованиями Лоренца*.

Какими должны быть эти преобразования (с точки зрения вида зависимости между «штриховыми» и «нештриховыми» величинами)? Из полного равноправия всех инерциальных систем отсчёта, из однородности пространства и времени следует, что зависимость между «штриховыми» и «нештриховыми» величинами может быть только *линейной*. Любая другая зависимость означала бы неравноправие системы. Что означала бы, к примеру, квадратичная зависимость между x' и x? То, что прямые формулы перехода содержали бы степени, а обратные – корни. Одно это уже означает, что системы чем-то отличаются друг от друга. Правильные преобразования не должны изменять характер движения тел: равномерное прямолинейное движение должно остаться таковым во всех инерциальных системах. А это возможно только в том случае, если преобразования координат и времени – линейны.

Так как и галилеевы, и лоренцевы преобразования – линейные, отличие их друг от друга заключается только в том, что у них разные коэффициенты пропорциональности:

– по Галилею

$$x' = x - \vartheta t;$$
$$x = x' + \vartheta t' \qquad (11.4)$$

(коэффициент пропорциональности равен единице);

– по Лоренцу

$$x' = \alpha(x - \vartheta t);$$
$$x = \alpha(x' + \vartheta t). \qquad (11.5)$$

Коэффициент пропорциональности α должен отражать принцип постоянства скорости света. Пусть x' и x обозначают расстояния, на которые сместится за некоторое время фронт световой волны вдоль «иксовых» осей в системах O и O'. Тогда $x' = ct'$ и $x = ct$. Подставив в формулы (11.5) вместо x' и x соответственно ct' и ct, получим:

$$ct' = \alpha(ct - \vartheta t);$$
$$ct = \alpha(ct' + \vartheta t').$$

Исключив из этих уравнений t' и t (проделайте это самостоятельно), найдём α:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}. \qquad (11.6)$$

Подставив выражение для α в (11.5), найдём формулы, связывающие x' и x:

переход $O \to O'$:

$$x' = \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}; \qquad (11.7^*)$$

переход $O' \to O$:

$$x = \frac{x' + \vartheta t'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}. \qquad (11.7)$$

Аналогично для координат y' и y можно записать:

$$y' = \beta y \quad \text{и} \quad y = \beta y'.$$

Перемножим обе формулы:

$$y'y = \beta^2 yy'.$$

Сократив обе части этого равенства на yy', найдём, что $\beta = \pm 1$. Знак «плюс» соответствует одинаковому направлению осей y' и y, знак « минус» – противоположному. В рассматриваемом случае системы O' и O имеют одинаковые направления осей, так что $\beta = 1$ и, следовательно,

$$y' = y \quad \text{и} \quad y = y'. \qquad (11.8)$$

И, наконец, координаты z и z' преобразуются по закону:

$$z' = z \quad \text{и} \quad z = z'. \qquad (11.9)$$

Для того чтобы найти связь между t' и t, решим уравнения (11.7*) и (11.7) совместно. Сделав в уравнении

$$x = \frac{x' + \vartheta t'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$$

подстановку $x' = \dfrac{x - \vartheta t}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}$, получим

$$x = \frac{x - \vartheta t}{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}} + \frac{\vartheta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Приведём к общему знаменателю обе части этого уравнения:

$$x - \frac{\vartheta^2}{c^2} x = x - \vartheta t + \vartheta t' \sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}},$$

откуда

$$t' = \frac{t - \dfrac{\vartheta}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}. \qquad (11.10^*)$$

Аналогично для t получается выражение

$$t = \frac{t' + \dfrac{\vartheta}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}. \qquad (11.10)$$

Формулы (11.7*) – (11.10) называются преобразованиями Лоренца.

При $\vartheta << c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Преобразования Галилея, следовательно, – не что иное, как предельный случай более общих преобразований, случай, пригодный для медленных по сравнению со скоростью света движений.

При $\vartheta > c$ преобразования Лоренца теряют физический смысл (скорости, превышающие скорость света в вакууме, невозможны).

Особое внимание следует обратить на формулы преобразования времени. В этих формулах нашло свое отражение одно из самых важных открытий теории относительности: время носит не абсолютный, а относительный характер, *оно зависит от выбора пространственной системы отсчёта*. Пространство и время существуют в неразрывном единстве, они неотделимы друг от друга. *Пространственно-временные величины относятся только к материальным объектам*. Без этого они лишены всякого физического смысла.

Скорости, соизмеримые со скоростью света, называются *релятивистскими*. Формулы и соотношения, в которых величина $\frac{\vartheta^2}{c^2}$ играет существенную роль, также следует называть релятивистскими.

11.6. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Из преобразований Лоренца вытекает ряд следствий, совершенно необычных с точки зрения представлений классической механики и нашего житейского опыта. Рассмотрим некоторые из этих следствий.

Изменение размеров движущихся тел (*лоренцево сокращение*)

Пусть некоторый стержень, расположенный параллельно осям x' и x, покоится относительно системы O' (рис. 11.3).

Обозначим длину стержня в системе O' через l_0 и назовём её собственной длиной стержня. Если координаты концов стержня в этой системе x_1' и x_2', то

$$l_0 = x_2' - x_1'. \qquad (11.11)$$

Относительно системы O стержень движется со скоростью ϑ (с такой скоростью система O' движется относительно O). Чтобы найти длину стержня l в системе O (длину движущегося стержня), надо определить координаты его концов в один и тот же момент времени t, зафиксированный по часам системы O (Часы системы O или O' – часы, неподвижные относительно этой системы). Пусть эти координаты равны соответственно x_1 и x_2, тогда

$$l = x_2 - x_1\,. \qquad (11.12)$$

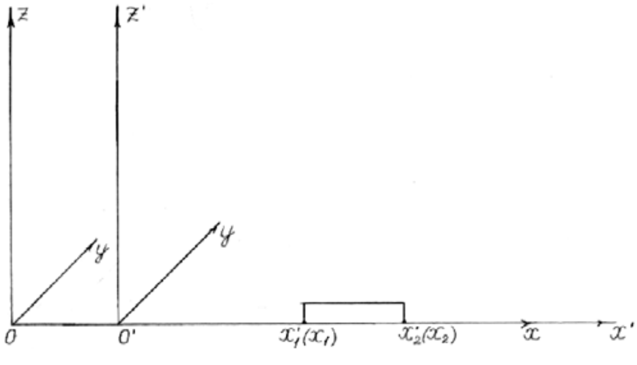


Рис. 11.3

Чтобы найти связь между l и l_0, надо использовать ту из формул преобразования координат, в которую входят x', x и t, т.е. (11.7). Согласно этой формуле:

$$x_2' = \frac{x_2 - \vartheta t}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}; \quad x_1' = \frac{x_1 - \vartheta t}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Вычитая, получим

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Но в соответствии с (11.11) и (11.12) $x_2' - x_1' = l_0$, а $x_2 - x_1 = l$. Следовательно:

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad l = l_0\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}. \tag{11.13}$$

Таким образом, длина стержня l, измеренная в системе, в которой стержень движется, оказывается меньше длины l_0, измеренной в системе, относительно которой он покоится. Происходит сокращение длины, называемое лоренцевым сокращением.

Длины l_0 и l можно понимать так же, как длины одного и того же стержня, измеренные в одной и той же системе отсчёта в двух случаях:

1) когда стержень покоится относительно системы отсчёта (собственная длина l_0);

2) когда он движется относительно неё со скоростью ϑ (длина l).

При движении тел сокращаются только продольные размеры; размеры, перпендикулярные к направлению движения, остаются неизменными (легко видеть из преобразований координат, что разности $y_2' - y_1'$ и $y_2 - y_1$, $z_2' - z_1'$ и $z_2 - z_1$, определяющие поперечные размеры тела в системе *O*′ и *O*, одинаковы).

Обратим внимание на то, что лоренцево сокращение – эффект чисто кинематический: никакими внутренними напряжениями в телах это сокращение не сопровождается. Лоренцево сокращение, далее, является относительным, взаимным. Поясним сказанное. Возьмём два стержня *A* и *B* одинаковой длины l_0. Приведём их в движение с относительной скоростью ϑ. Пусть с каждым из стержней движется наблюдатель. Попросим этих наблюдателей измерить длину «своего» и «чужого» стержня. Первый наблюдатель (движущийся со стержнем *A*) скажет после измерения, что длина «его» стержня равна l_0, а «чужого» – $l_0\sqrt{1-\dfrac{\vartheta^2}{c^2}}$, т.е. для него стержень *A* длиннее *B*.

Второй наблюдатель, напротив, найдёт длину «своего» стержня (*B*), равной l_0, а «чужого» (*A*) – $l_0\sqrt{1-\dfrac{\vartheta^2}{c^2}}$, т.е. для этого наблюдателя стержень *A* будет короче *B*. Кто же прав? Правы оба наблюдателя, ибо результаты измерения зависят от выбора системы отсчёта, в которой производятся измерения.

Так как размеры тел в направлении, перпендикулярном к скорости, не изменяются, то объём тела в системе *O* (объём движущегося тела *V*) связан с объёмом в системе *O′* (объём неподвижного тела V_0) соотношением

$$V = V_0\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}\,. \tag{11.14}$$

Таким образом, теория относительности приходит к выводу, что понятия длины, площади и объёма являются не абсолютными, как это считала классическая механика, а относительными. Утверждение, что расстояние между какими-либо двумя точками равно *l*, – бессмысленно, если не указана система отсчёта, к которой эта величина отнесена. Бессмысленно так же спрашивать, какая длина «истинная», какая – «кажущаяся». Все длины, полученные в разных системах отсчёта, одинаково реальны, одинаковы истинны. Трудность понимания относительного характера длины или объёма – исключительно в нашей консервативной привычке считать эти понятия абсолютными.

Относительность временных интервалов

Из преобразований Лоренца следует, что время течёт по-разному в различных системах отсчёта. Если это так, то продолжительность одного и того же процесса в разных системах отсчёта должна быть разной.

Пусть в точке (x', y', z') некоторого тела, неподвижного относительно системы *O′*, происходит какой-либо физический процесс. С телом жёстко скреплены часы T' (эти часы одновременно являются часами системы O', так как тело покоится в этой системе). За ходом процесса, происходящего в теле, следит наблюдатель, находящийся в системе O. У наблюдателя есть свои часы T (эти часы можно считать часами системы O, поскольку наблюдатель неподвижен относительно этой системы). С точки зрения наблюдателя часы T будут неподвижными, часы T' – движущимися. Наблюдатель фиксирует по этим двум часам начало и конец процесса. Началу и концу процесса по часам T' соответствуют моменты t_1' и t_2', по часам T – t_1 и t_2. Продолжительность процесса по часам T' равна

$$\Delta t_0 = t_2' - t_1', \tag{11.15}$$

по часам T

$$\Delta t = t_2 - t_1. \tag{11.16}$$

Чтобы сопоставить Δt_0 и Δt, надо из двух формул преобразования времени (11.15) и (11.16) выбрать ту, в которую входят x', t' и t. Такой формулой является (11.10). По этой формуле

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{\vartheta}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad t_1 = \frac{t_1' + \frac{\vartheta}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Вычитая, найдём

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}$$

или, учитывая (11.15) и (11.16),

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad \Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}. \tag{11.17}$$

Так как $\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}} < 1$, то

$$\Delta t_0 < \Delta t.$$

Таким образом, наблюдатель, связанный с системой O, зафиксирует, что продолжительность процесса в системе O' меньше, чем в O.

Движущиеся часы идут медленнее неподвижных, они отстают от неподвижных часов: за время, пока какая-либо из стрелок неподвижных часов T совершит один полный оборот, такая же стрелка часов T' совершит только часть оборота.

Замедление хода времени в движущихся системах отсчёта отражается на всех без исключения процессах. Если, к примеру, наблюдать со стороны за космическим кораблем, движущимся равномерно с очень большой скоростью, то первое, что бросится в глаза, – это замедленный характер всего происходящего в корабле. Движение космонавта, его пульс, дыхание, быстрота реакции и т.д. – всё будет выглядеть замедленным. Но если космонавту сообщить (по радио, например), что он стал чересчур медлительным, что у него совершенно ненормальный пульс, скажем всего 10 ударов в минуту, то он с этим не согласится. Он возьмёт свои часы и найдёт, что за его, космическую минуту пульс сделает нормальное число ударов (60). И всё остальное космонавт найдёт совершенно нормальным, обычным; словом, ничто происходящее на корабле не подскажет ему, что его время течёт медленнее и что его корабль движется (в противном случае можно было определить абсолютную скорость корабля). Замедление времени в корабле может обнаружить только наблюдатель, находящийся в другой системе отсчёта, по отношению к которой корабль движется. То, что сторонний наблюдатель и космонавт, наблюдая за одним и тем же процессом (биение сердца космонавта, например), производя измерения, придут к разным выводам, означает, что ход времени в той или иной физической системе (на космическом корабле, в частности) воспринимается по-разному разными наблюдателями; результат измерения времени зависит от системы отсчёта, в которой время измеряется.

Если бы, в свою очередь, космонавт взялся считать чужой пульс по своим часам, то он нашел бы этот пульс тоже неравномерным: за 1 минуту (по часам космонавта) пульс ударил бы не 60 раз, а только 10. Сверяя свои и чужие часы, космонавт обнаружил бы замедление хода чужих часов. Такое «странное», на первый взгляд, поведение часов совершенно естественно, оно выражает один и тот же факт: в любой системе отсчёта движущиеся часы идут медленнее неподвижных. Замедление времени, как и сокращение длин, носит относительный, а не абсолютный характер. Именно в этой относительности сокращение длин и замедление времени проявляется полное равноправие всех инерциальных систем отсчёта.

Время Δt_0, измеренное часами, скреплёнными с телом, называется *собственным временем* этого тела. Время Δt, измеренное часами, скреплёнными с системой отсчёта, относительно которой движется тело, называется *координатным временем этого тела*. Как видно из формулы (11.17), собственное время всегда меньше или, по крайней мере, равно координатному (первое относится к случаю, когда тело в рассматриваемой системе отсчёта движется, второе – когда оно покоится).

Собственное время инвариантно относительно преобразований Лоренца. Действительно, это время фиксируется в системе отсчёта, связанной только с самим телом, следовательно, оно не зависит от выбора системы, относительно которой движется тело.

Замедление хода времени в движущихся системах отсчёта подтверждено экспериментально. Рассмотрим одно из таких подтверждений.

Среди элементарных частиц есть частицы, называемые μ-мезонами, или кратко, мюонами. Это нестабильные, быстро распадающиеся частицы, занимающие по массе промежуточное положение между электронами и протонами. В естественных условиях мюоны рождаются в космических лучах на высоте порядка 20 км над Землёй, но они могут быть получены и искусственно в лаборатории.

Координатное время жизни покоящегося мюона в среднем равно $2{,}2\cdot 10^{-6}$ с (это время, естественно, фиксируется по «земным» часам, установленным в лаборатории). Представим, что в лаборатории получены два мюона: один – покоящийся, другой – движущийся со скоростью, близкой к скорости света. Одинаковую ли продолжительность жизни зафиксируют лабораторные часы у этих двух мюонов? Нет, не одинаковую, утверждает теория относительности. Движущийся мюон проживет гораздо дольше, и это действительно так. В этом убеждает нас сама природа. Экспериментально обнаружено, что некоторые из быстрых мюонов, образующихся в верхних слоях атмосферы, достигают поверхности Земли, пролетая за время своей жизни расстояние почти в два десятка километров. Как это им удаётся? Ведь если бы координатное время жизни быстрого космического мюона было таким же, как и медленного или покоящегося, т.е. порядка $2{,}2\cdot 10^{-6}$ с, то, даже двигаясь со скоростью света, мюон не смог бы преодолеть расстояние, превышающее 660 м. $(c\Delta t_0 = 3\cdot 10^8\ \text{м/с}\cdot 2{,}2\cdot 10^{-6}\ \text{с} = 660\ \text{м})$ и, следовательно, никогда не достиг бы поверхности Земли. То, что мюоны достигают поверхности Земли, доказывает, что в земной системе отсчёта их время жизни значительно больше, чем $2{,}2\cdot 10^{-6}$ с (при $\vartheta = 0{,}9995\ c$ оно составляет $7{,}3\cdot 10^{-5}$ с), поэтому за отведённые им доли земной секунды мюоны успевают преодолеть расстояние почти в 20 км. Заметим, что для наблюдателя, движущегося вместе с мюоном, это расстояние будет порядка 600 м (оно оказывается много меньше 20 км вследствие лоренцева сокращения).

11.7. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПОНЯТИЯ ОДНОВРЕМЕННОСТИ

Пусть в системе O' в двух разных точках, «иксовые» координаты которых x_1' и x_2', в момент времени t' одновременно происходят два физических события, не связанные друг с другом причинно-следственными отношениями. Событие, происходящее в точке x_1', назовём событием 1, событие в точке x_2' – событием 2. Одновременны ли эти события для наблюдателя, находящегося в системе O? В системе O этим событиям соответствуют моменты времени

$$t_1 = \frac{t' + \frac{\vartheta}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{t' + \frac{\vartheta}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Из этих формул видно, что $t_1 \neq t_2$ (так как $x_1' \neq x_2'$). В системе O события происходят не одновременно, а по прошествии промежутка времени Δt:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\vartheta\left(x_2' - x_1'\right)}{c^2\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}. \tag{11.18}$$

В зависимости от знака разности ($x_2' - x_1'$) промежуток времени Δt может быть как положительным, так и отрицательным. Следовательно, событие 1, происходящее в системе O' одновременно с событием 2, в системе O может как опережать, так и отставать от события 2.

Таким образом, и понятие одновременности – относительно. С точки зрения классической физики одновременность – абсолютна: события, одновременные в одной инерциальной системе, одновременны во всех других инерциальных системах.

Несколько слов о взглядах классической механики и теории относительности на причинно-следственные отношения между физическими событиями.

Причинная связь между двумя событиями, происходящими в отдалённых точках пространства, состоит в следующем. Событие, происходящее в одной точке (например, выстрел из пушки), вызывает отправление некоторого сигнала (в общем случае сигналом следует считать всё то, посредством чего одно тело оказывает воздействие на другое, снаряда в нашем случае), который, прибыв в другую точку, вызывает в ней второе событие (взрыв, образование воронки). Связь между причиной (выстрел) и следствием (взрыв) состоит в движении сигнала, связывающего события.

Классическая механика считала, что два события, выступающие друг по отношению к другу как причина и следствие, могут быть одновременными не только тогда, когда они происходят в одной и той же точке пространства, но и тогда, когда они происходят в отдалённых точках. Это утверждение основывается на представлении о мгновенной передаче сигналов. Действительно, если сигнал распространяется с бесконечной скоростью, то два события, связанные таким сигналом, будут одновременными во всех системах отсчёта. Это правило следует из (11.18). Если бы c (скорость сигнала) была равна бесконечности, то

$$\Delta t = \frac{\vartheta\left(x_2' - x_1'\right)}{c^2\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}} = 0.$$

В этом случае можно было бы говорить о чисто пространственных причинных связях, рассматривать пространство вне времени, независимо от времени.

Но как установила теория относительности, взаимодействия распространяются с конечной скоростью. Поэтому два события, происходящие в разных точках пространства, могут быть связаны причинной связью только в том случае, если время между этими событиями не меньше времени, необходимого свету для того, чтобы пройти расстояние между точками, где произошли события. Такие события будут *неодновременными* в любой системе отсчёта, в любой системе отсчёта причина будет предшествовать следствию.

События, связанные причинно-следственными отношениями, могут быть одновременными только в том случае, если они происходят в одной и той же точке пространства. Действительно, если события в системе O' происходят одновременно и в одной и той же точке $\left(x_1' = x_2'\right)$, то они будут одновременными и в системе O, и во всех других инерциальных системах, потому оба события будут совершаться абсолютно одновременно.

11.8. ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКЕ

В теории относительности классический закон сложения скоростей Галилея заменяется релятивистским законом Эйнштейна.

Пусть некоторое тело движется вдоль оси x. Обозначим скорость этого тела относительно системы O через $\vec{u}$, относительно системы O' –

через $\vec{u}'$. Так как скорости $\vec{u}$ и $\vec{u}'$ направлены вдоль осей x и x', то $u'_x = u'$, а $u_x = u$ (проекции $\vec{u}'$ и $\vec{u}$ на другие оси равны нулю). Свяжем u'_x и u_x или, что то же самое в нашем случае, u' и u.

$$u' = u'_x = \frac{dx'}{dt'}; \quad u = u_x = \frac{dx}{dt}. \tag{11.19}$$

Найдём дифференциалы dx' и dt'. По (11.7*) и (11.10*)

$$x' = \frac{x - \vartheta t}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}; \quad t' = \frac{t - \frac{\vartheta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

dx' и dt' равны соответственно

$$dx' = \frac{dx - \vartheta dt}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad dt' = \frac{dt - \frac{\vartheta}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Значит, $u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - \vartheta dt}{dt - \frac{\vartheta}{c^2}dx}$. Разделив числитель и знаменатель правой части этого равенства на dt, получим

$$u' = \frac{\frac{dx}{dt} - \vartheta}{1 - \frac{\vartheta}{c^2}\frac{dx}{dt}}.$$

Но $\frac{dx}{dt}$ есть u. Учитывая это, получим окончательно:

для перехода $O \to O'$: *для перехода* $O' \to O$:

$$u' = \frac{u - \vartheta}{1 - \frac{\vartheta}{c^2}u}; \qquad u = \frac{u' + \vartheta}{1 + \frac{\vartheta}{c^2}u'}. \tag{11.20}$$

Из (11.20) следует, что если скорость тела относительно некоторой системы отсчёта не превышает скорость света в вакууме, то она не может превысить скорость света и в любой другой системе, движущейся по отношению к исходной со скоростью, меньшей c (по теории относительности ни одно материальное тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме). Пусть скорость тела, движущегося вдоль оси x относительно системы O', равна $\frac{4}{5}c\left(u'=\frac{4}{5}c\right)$, а скорость самой системы $O'-\frac{3}{4}c\left(\vartheta=\frac{3}{4}c\right)$. Найдём скорость тела относительно системы O. По классическому правилу сложения скоростей скорость тела в системе O равна

$$u=u'+\vartheta=\frac{4}{5}c+\frac{3}{4}c=\frac{31}{20}c,$$

т.е. больше c; по релятивистскому правилу

$$u=\frac{u'+\vartheta}{1+\dfrac{\vartheta}{c^2}u'}=\frac{\dfrac{4}{5}c+\dfrac{3}{4}c}{1+\dfrac{\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{4}c^2}{c^2}}=\frac{31}{32}c,$$

т.е. меньше c.

Рассмотрим предельный случай. Пусть наблюдатель в системе O' видит, как распространяется свет: $u'=c.$ Какой будет скорость света в системе O? Подставив $u'=c$ в формулу (11.20) , получим

$$u=\frac{c+\vartheta}{1+\dfrac{\vartheta}{c^2}c}=c.$$

Так оно и должно быть, ибо предположение о постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчёта положено в саму основу преобразований Лоренца и, следовательно, релятивистского закона сложения скоростей.

Классическая механика широко пользуется понятием абсолютного твёрдого тела. Теория относительности отвергает существование таких тел даже как некоторой идеализации. Действительно, если бы расстояния между частицами некоторого тела были неизменными, то смещение любой из частиц, например А (рис. 11.4), вызвало бы *одновременное* смещение всех других частиц.

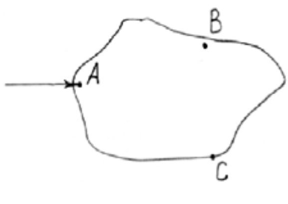


Рис. 11.4

Но это означало бы, что силовое взаимодействие между частицами передаётся мгновенно, с бесконечно большой скоростью. По теории относительности это невозможно. Поскольку воздействие частиц друг на друга передаётся с конечной скоростью, частицы приходят в движение не одновременно, а с некоторым запозданием. А это означает, что расстояния между частицами изменяются – тело деформируется. Следовательно, его нельзя назвать абсолютно твёрдым.

11.9. ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Первый закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Лоренца. (Если физические величины или законы инвариантны относительно преобразований Лоренца, будем называть их *релятивистски-инвариантными*.) Действительно, если тело движется без ускорения в системе O' (скорость $\vec{u} = \text{const}$), то его скорость останется неизменной и в системе O (это видно из формулы (11.20)).

Второй закон Ньютона не инвариантен относительно преобразований Лоренца, если массу полагать величиной неизменной.

Эйнштейн показал, что масса является функцией не только внутренних свойств тела, но и состояния движения. Она зависит от скорости тела относительно выбранной системы отсчёта по закону

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}}, \tag{11.21}$$

где m_0 – масса тела, измеренная в системе, по отношению к которой тело покоится (масса покоя); m – масса движущегося тела (релятивистская масса); ϑ – скорость тела относительно системы отсчёта.

Величину $\Delta m = m - m_0 = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta^2}{c^2}}} - 1\right)$ принято называть массой движения или движущейся массой. Как видно из формулы (11.21) при $\vartheta \to c$ $m \to \infty$. Это значит, что при $\vartheta \to c$ инертность тела беспредельно возрастает. Чтобы сообщить такому телу отличное от нуля ускорение, к нему необходимо приложить бесконечно большую силу. Между тем любое реальное воздействие конечно. Следовательно, ни одному телу, обладающему массой покоя, не может быть сообщена скорость, равная скорости света. Со скоростью c могут двигаться лишь частицы, не обладающие массой покоя, частицы, которым «запрещено» покоиться в любых системах отсчёта. Такие частицы существуют. Это световые кванты – фотоны и нейтрино.

Второй закон Ньютона оказывается релятивистски-инвариантным, если под m понимать величину, определяемую соотношением (11.21). Правильным релятивистски-инвариантным выражением второго закона Ньютона будет следующее:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}\vec{\vartheta}\right)=\vec{F}$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{\vartheta}\right)=\vec{F}, \qquad (11.22)$$

где m – релятивистская масса тела.

При $\vartheta << c$ $m = m_0$ и выражение второго закона Ньютона принимает привычный для нас вид

$$\frac{d}{dt}\left(m_0\vec{\vartheta}\right)=\vec{F}.$$

Релятивистский импульс, в отличие от классического, не является линейной функцией скорости:

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{\vartheta}}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}}. \qquad (11.23)$$

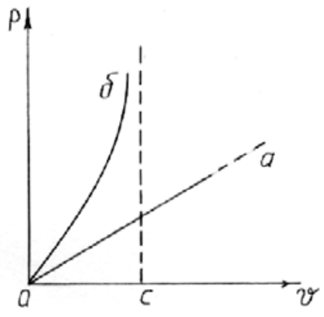


Рис. 11.5

На рисунке 11.5 изображены графики зависимости импульса тела от скорости по классическим представлениям (график *а*) и представлениям теории относительности (график *б*).

При $\vartheta << c$ формула 11.23 переходит в классическое выражение для импульса

$$\vec{p}=m_0\vec{\vartheta}.$$

11.10. ЗАКОН ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

Эйнштейном открыт важнейший для современной физики закон пропорциональности массы и энергии.

Пусть на первоначально покоящееся тело массой m_0 в течение некоторого времени действовала сила $\vec{F}$. Для простоты будем полагать, что направление силы во время движения тела не изменилось. Это означает, что направления силы, перемещения и скорости в любой момент времени будут совпадать. Под действием приложенной силы тело будет двигаться со всё возрастающей скоростью. Кинетическая энергия тела будет увеличиваться, её приращение будет равно работе силы, действующей на тело:

$$dE_{\text{к}} = dA. \tag{11.24}$$

По определению элементарная работа равна $dA = Fdr\cos 0 = Fdr$. Значит, $dE_{\text{к}} = Fdr$.

По второму закону Ньютона

$$F = \frac{d}{dt}(m\vartheta),$$

где m – релятивистская масса (зависит от ϑ, и значит от t).

Продифференцируем $(m\vartheta)$ по времени:

$$F = \vartheta\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vartheta}{dt}.$$

Таким образом,

$$dE_{\text{к}} = Fdr = \vartheta dm\frac{dr}{dt} + md\vartheta\frac{dr}{dt} = \vartheta^2 dm + m\vartheta d\vartheta,$$

так как $\dfrac{dr}{dt}$ есть ϑ.

В соответствии с (11.21)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{\vartheta^2}{c^2}}} = m_0\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Найдём приращение массы, соответствующее увеличению скорости на $d\vartheta$ (дифференциал от m):

$$dm = m'd\vartheta = \left(-\frac{m_0}{2}\right)\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-\frac{2\vartheta}{c^2}\right)d\vartheta = \frac{m_0\vartheta d\vartheta}{c^2\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m\ \vartheta d\vartheta}{c^2-\vartheta^2}.$$

Учитывая выражение для dm, найдём, что

$$dE_к = \vartheta^2\frac{m\vartheta d\vartheta}{c^2-\vartheta^2} + m\vartheta d\vartheta = m\vartheta d\vartheta\left(\frac{\vartheta^2+c^2-\vartheta^2}{c^2-\vartheta^2}\right) = c^2 dm. \quad (11.25)$$

Проинтегрируем (11.25). Изменению скорости тела от 0 до ϑ соответствуют изменения: кинетической энергии – от 0 до $E_к$, массы – от m_0 до m. Следовательно,

$$\int_0^{E_к} dE_к = c^2\int_{m_0}^{m} dm.$$

Проинтегрировав, получим релятивистское выражение для кинетической энергии тела

$$E_к = mc^2 - m_0c^2 \quad \text{или} \quad E_к = \Delta mc^2, \quad (11.26)$$

где $\Delta m = m - m_0$.

Нетрудно показать, что это выражение отлично от классического выражения для кинетической энергии $\dfrac{m\vartheta^2}{2}$.

$$E_к = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{\vartheta^2}{c^2}}} - m_0c^2 = m_0c^2\left[\left(1-\frac{\vartheta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right].$$

Разлагая $\left(1-\dfrac{\vartheta^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ в ряд по формуле бинома Ньютона, получим

$$E_к = m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\vartheta^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{\vartheta^4}{c^4}+\ldots-1\right) = \frac{m_0\vartheta^2}{2}+\frac{3\vartheta^4}{8c^4}+\ldots\ . \quad (11.27)$$

Таким образом, релятивистское выражение для кинетической энергии отличается от классического тем, что содержит дополнительные слагаемые $-\dfrac{3}{8}\dfrac{\vartheta^4}{c^2}$ и т.д.

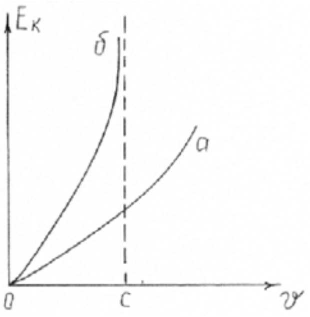


Рис. 11.6

На рисунке 11.6 приведены графики зависимости кинетической энергии от скорости в классической (график *а*) и релятивистской механике (график *б*).

Если $\vartheta \ll c$, вторым и всеми последующими членами ряда (11.27) можно пренебречь и тогда $E_к = \dfrac{m_0\vartheta^2}{2}$.

Как видно из выражения (11.26) кинетическая энергия тела равна разности величин mc^2 и m_0c^2, которые по своему смыслу могут быть только энергией. Величину

$$E_0 = m_0c^2 . \qquad (11.28)$$

Эйнштейн назвал энергией покоя, а величину

$$E = mc^2 \qquad (11.29)$$

полной энергией тела.

(Формально $E_0 = m_0c^2 + \text{const}$ и $E = mc^2 + \text{const}$. Но $\text{const} \equiv 0$, в противном случае эти соотношения противоречили бы основному тезису диалектического материализма о том, что движение без материи немыслимо. Выражение $m = 0$ означает отсутствие какого бы то ни было материального объекта и, следовательно, отсутствие движения, энергии. Если $m = 0$, то и $E = 0$. Отсюда следует, что $\text{const} = 0$.)

Из (11.26) видно также, что сообщение телу кинетической энергии $E_к$ сопровождается увеличением его массы на

$$\Delta m = \frac{E_к}{c^2}.$$

В рассматриваемом нами случае изменение массы тела было обусловлено передачей ему кинетической энергии макроскопического движения. Согласно теории относительности *любое изменение полной энергии тела сопровождается изменением его массы*:

$$\Delta m = \Delta \frac{E}{c^2}.$$

И наоборот, всякое изменение массы сопровождается изменением энергии:

$$\Delta E = \Delta m c^2.$$

Какой бы ни была форма энергии, с ней всегда связана масса $m = \frac{E}{c^2}$. Какой бы ни была масса, с ней всегда связана энергия $E = mc^2$. Соотношение $E = mc^2$ выражает один из самых фундаментальных законов природы – закон взаимосвязи, пропорциональности энергии и массы: *полная энергия тела равна произведению его релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме*.

Полная энергия включает в себя кинетическую энергию тела как целого, а также энергию всех форм движения и взаимодействия молекул, атомов, элементарных частиц, из которых построено тело.

Замечание. В полную энергию и энергию покоя не входит потенциальная энергия, которой обладает тело во внешнем потенциальном поле.

Теория относительности открыла новую грань физического содержания массы. В релятивистской механике масса служит не только мерой инерционных и гравитационных свойств материальных объектов (вещества и поля), но является мерой полной энергии, которой обладает тот или иной объект в рассматриваемой системе отсчёта.

Предостерегаем от неправильного, идеалистического толкования соотношения $E = mc^2$. Нельзя думать, что масса превращается в энергию (подтекст в его наихудшем варианте: в движение) или наоборот. Это соотношение означает, что любой материальный объект обладает массой и энергией, причём масса и энергия пропорциональны друг другу: чем больше масса, тем больше энергия и наоборот. Масса и энергия характеризуют разные свойства материи, поэтому ни о каком их взаимном превращении не может быть и речи.

11.11. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И ЭНЕРГИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

В классической физике существуют независимо друг от друга законы сохранения – закон *сохранения массы* и закон *сохранения энергии*.

Так как в теории относительности полная энергия неразрывно связана с массой, то в релятивистской механике имеет место лишь один закон сохранения, который можно называть и законом сохранения энергии, и законом сохранения массы. Если на тело внешние силы не действуют, его релятивистская масса и, следовательно, полная энергия сохраняются.

$$m = \frac{E}{c^2} = \text{const} \qquad (11.30)$$

или

$$E = mc^2 = \text{const}\,. \qquad (11.31)$$

В случае изолированной системы невзаимодействующих частиц

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{0i}}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta_i^{\,2}}{c^2}}} = \text{const} \qquad (11.32)$$

или

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_{0i} c^2}{\sqrt{1 - \frac{\vartheta_i^{\,2}}{c^2}}} = \text{const}, \qquad (11.33)$$

где m_i – релятивистская масса i-й частицы; E_i – полная энергия i-й частицы.

В случае системы взаимодействующих частиц необходимо дополнительно учесть энергию взаимодействия частиц (так называемую энергию связи). Если система взаимодействующих частиц является изолированной, то её энергия (энергия покоя всех частиц плюс их кинетическая энергия, плюс энергия связи) сохраняется:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i + E_{\text{св}} = \text{const}, \qquad (11.34)$$

где $E_{\text{св}}$ – энергия связи всех частиц системы.

Разделив (11.34) на c^2, получим

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i + \frac{E_{\text{св}}}{c^2} = \text{const}\,, \qquad (11.35)$$

где m – масса всей системы; $\sum_{i=1}^{n} m_i$ – сумма релятивистских масс отдельных её частиц; $\frac{E_{\text{св}}}{c^2} = \Delta m$ – масса, соответствующая энергии связи (в атомной физике эта величина получила название *дефекта массы*).

Таким образом, *полная масса замкнутой системы есть величина постоянная*. Из (11.35) отчётливо видно, что масса не является величиной *аддитивной*: масса системы не равна сумме масс составляющих её частей. Так, например, масса покоя ядра любого атома всегда меньше суммы масс покоя частиц, входящих в её состав. Чтобы расчленить ядро на соответствующие его частицы, требуется затратить энергию, равную энергии связи.

Закон сохранения энергии в релятивистской форме стал одним из основных положений современной ядерной физики повседневно находит экспериментальное подтверждение. В частности, экспериментально доказано, что энергия покоя может полностью переходить в энергию движения, т.е. частицы с ненулевой массой покоя, обладающие сравнительно небольшой энергией движения, могут превращаться в частицы с нулевой массой покоя и с очень большой энергией движения (так называемая аннигиляция частиц – превращение частиц в кванты электромагнитного излучения). И наоборот, соответственно (рождение частиц из γ-квантов).

11.12. ЧЕТЫРЁХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ИНВАРИАНТНОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА

Немецкий математик Г. Минковский в 1908 г. дал геометрическую интерпретацию теории относительности. Минковский исходил из идеи абстрактного четырёхмерного «пространства», в котором каждой точке соответствуют четыре координаты: три пространственные и одна – временная.

С пространственно-временным представлением движения мы, в сущности, знакомы на примере графиков движения. Так, если материальная точка движется вдоль оси x (рис. 11.7, *а*), то графиком её движения будет некоторая кривая (рис. 11.7, *б*). Всё множество точек плоскости t, x образует двумерное «пространство» движений вдоль оси x. Каждой точке такого «пространства» соответствуют две координаты: одна пространственная (в обычном смысле), другая – временная. Как видим, движение в двумерном «пространстве» изображается двумерной пространственно-временной кривой.

Представим теперь, что точка движется равномерно по окружности в плоскости x, y (рис. 11.8, *а*).

Пространственно-временная кривая такого движения будет представлять собой цилиндрическую спираль (рис. 11.8, *б*). Множество соответствующих значений x, y, t образуют трёхмерное «пространство» плоского движения. Каждой точке такого «пространства» соответствуют три координаты: две – пространственные, одна – временная.

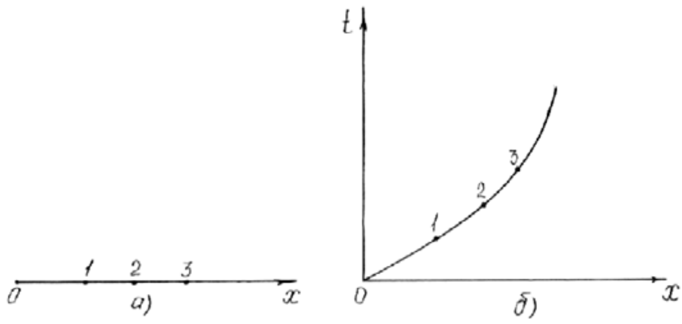
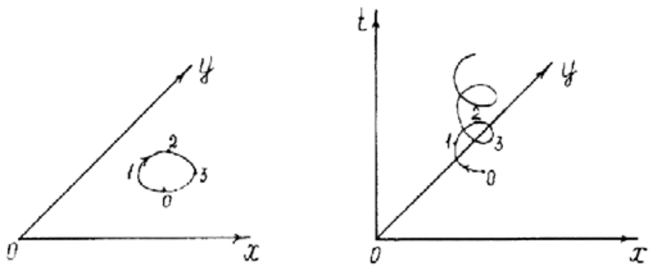


Рис. 11.7



а) *б*)

Рис. 11.8

Вообразим, наконец, что точка движется по произвольной пространственной траектории (рис. 11.9).

К сожалению, пространственно-временной график такого движения нельзя ни построить на бумаге, ни даже сконструировать в виде пространственной модели (так как четвёртую временную ось провести или построить так, чтобы она одновременно была перпендикулярна ко всем трём осям x, y, z, невозможно). Невозможность представить наглядно четырёхмерную кривую не должна, однако, особенно смущать. В физике немало других величин и понятий, которые также нельзя представить в виде наглядных образов. Но это не делает их менее объектив-

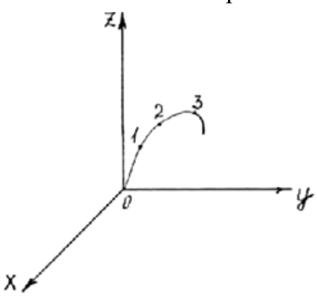


Рис. 11.9

ными. Все подобные величины отражают действительные свойства реальных объектов, они входят в соответствующие формулы и уравнения, их можно вычислить.

Введя в соответствующие формулы наряду с тремя пространственными координатами четвёртую – время, отказавшись от наглядности, Минковский предложил движение в пространственно-временном аспекте, в четырёхмерном пространстве – времени. Подчеркнём: четырёхмерное представление реальных движений – не искусственный приём, а лишь геометрическое выражение одной идеи теории относительности о взаимосвязи пространства и времени.

Точка, которой соответствуют четыре координаты, три – пространственные (в обычном смысле) и одна – временная, называется *мировой точкой*. Каждой мировой точке отвечает событие – *пребывание* частицы в определённой пространственной точке в определённый момент времени. Многообразие мировых точек образует четырёхмерный пространственно-временной «мир» или пространство Минковского. Всякой частице в пространстве Минковского соответствует линия, называемая *мировой линией*. Мировая линия покоящейся частицы представляет собой прямую, параллельную оси времени (пространственные координаты такой частицы не изменяются, изменяется только временная координата).

Мировая линия произвольно движущейся частицы наклонена под определённым углом ко всем четырём осям. В простейшем случае, когда частица движется вдоль какой-либо из осей, например x, мировую линию можно изобразить и на чертеже. На рисунке 11.10 изображены мировые линии четырёх частиц:

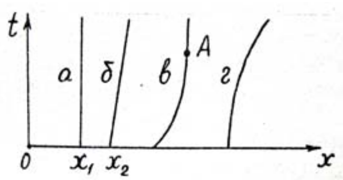


Рис. 11.10

а) частица покоится в точке x_1;

б) частица вышла из точки x_2 и движется вдоль оси x с постоянной скоростью;

в) частица движется замедленно, точка A соответствует остановке;

г) частица движется ускоренно.

Инвариантом галилеевых преобразований является расстояние между точками обычного трёхмерного пространства, т.е. величина

$$\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \qquad (11.36)$$

где Δx, Δy, Δz – координатные разности.

Можно показать, что инвариантом лоренцевых преобразований является не обычное расстояние Δr, а отрезок мировой линии, т.е. «расстояние» между точками четырёхмерного пространства-времени – так называемый *пространственно-временной интервал*. Если координаты одного события x_1, y_1, z_1, t_1, другого – x_2, y_2, z_2, t_2, то интервалом между этими событиями называется величина, определяемая соотношением

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2}\ , \tag{11.37}$$

где $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta y = y_2 - y_1$; $\Delta z = z_2 - z_1$; $\Delta t = t_2 - t_1$, а c – скорость света в вакууме.

Как видно, интервал связывает положение и время одного события с положением и временем другого события, т.е. характеризует «удалённость» событий не просто в пространстве и не только во времени, а в пространстве-времени.

Пространственно-временной интервал – один из важнейших инвариантов теории относительности.

В заключение приведём список относительных и абсолютных величин и соотношений в релятивистской механике (табл. 11.2).

Таблица 11.2

Относительные (неинвариантные) величины и соотношения	Абсолютные (инвариантные) величины и соотношения
Координаты (пространственное положение тел) Траектория движения Скорость тел, обладающих массой покоя Энергия Импульс Момент импульса Релятивистская масса Ход времени и промежутки времени Одновременность событий Расстояние между точками Геометрическая форма тел (конфигурация системы)	Максимальная скорость распространения взаимодействий (скорость света в вакууме) Скорость частиц, не обладающих массой покоя Масса покоя отдельной частицы (при условии, если частица не аннигилирует) Собственная длина тела Собственное время Пространственно-временной интервал

Таковы некоторые выводы специальной теории относительности.

Непреходящее значение теории относительности состоит в том, что она разрушила учение классической физики об абсолютном характере пространства и времени, установила их относительный характер, открыла непрерывную связь между пространством и временем. *Пространство и время образуют единую форму существования материи*.

Оценивая значение теории относительности, не следует, однако, впадать в философский релятивизм («всё в мире относительно»). Теория относительности отнюдь не отрицает существование абсолютных величин и понятий. Она устанавливает лишь, что ряд понятий и величин, считавшихся в классической физике абсолютными, в действительности являются относительными.

Не следует думать, что с появлением теории относительности классическая физика полностью утратила своё значение. Релятивистские эффекты для обычных макроскопических тел и обычных скоростей движения – столь тонкие эффекты, что оказываются далеко за пределами практической точности. Поэтому в большинстве отраслей техники классическая физика «работает» столь же хорошо, как и прежде.

Примеры решения задач

Пример 1. На сколько процентов изменится продольный размер протона и электрона после прохождения ими разности потенциалов $U = 10^6$ В?

Решение. В соответствии с релятивистской формулой продольный размер частицы $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$, где $\beta = \upsilon / c$. Относительное изменение продольных размеров $\dfrac{\Delta l}{l_0} = \dfrac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2}$.

В обоих случаях кинетическая энергия частиц равна $qU = 1$ МэВ. Из релятивистской формулы найдём значение кинетической энергии

$$T = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = qU.$$

Откуда $\sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{m_0c^2}{qU + m_0c^2}$. С учётом этого замечания получим

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_0 - l}{l_0} = 1 - \sqrt{1-\beta^2} = \frac{qU}{qU + m_0c^2}.$$

Из таблиц имеем для электрона $m_0c^2 = 0{,}512$ МэВ, для протона $m_0c^2 = 939$ МэВ. Подставив числовые значения в расчётную формулу, получим:

$$\left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)_\text{e} = \frac{1}{1+0{,}512} = 0{,}661 = 66{,}1\%; \quad \left(\frac{\Delta l}{l_0}\right)_\text{p} = \frac{1}{1+939} \approx 0{,}001 = 0{,}1\%.$$

Пример 2. При каких значениях $\beta = \upsilon / c$ собственное время частиц отличается на $k = 10^{-3}, 10^{-2}, 5 \cdot 10^{-1}$ от времени по неподвижным часам?

Решение. Если собственное время частицы обозначить τ_0', а тот же промежуток времени по неподвижным часам τ, то это время будет $\tau = \dfrac{\tau_0'}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Относительное изменение времени

$$k = \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\tau - \tau_0'}{\tau} = 1 - \sqrt{1-\beta^2}\ .$$

Откуда получим $1-\beta^2 = (1-k^2)$ или $\beta^2 = 2k - k^2$.

Окончательно $\beta = \sqrt{2k - k^2}$.

Для первых двух случаев можно принять $\beta = \sqrt{2k}$. Тогда $\beta_1 = 0{,}0447$; $\beta_2 = 0{,}141$; $\beta_3 = 0{,}866$.

Пример 3. Какую разность потенциалов должны пройти электрон и протон, чтобы их собственное время стало в $k = 10$ раз меньше лабораторного?

Решение. Обозначим собственное время частицы как τ_0', тогда лабораторное время $\tau = \dfrac{\tau_0'}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Так как $k = \dfrac{\tau}{\tau_0'}$, то $\tau = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

При прохождении разности потенциалов U частица приобретает кинетическую энергию qU. По релятивистской формуле эта энергия равна

$$m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = m_0c^2(k-1), \quad \text{откуда } U = \frac{m_0c^2}{q}(k-1).$$

Подставив в эту формулу табличные данные и произведя вычисления, получим для электрона $U = 4{,}61$ МВ, для протона $U = 8450$ МВ.

Пример 4. Протон и α-частица проходят одинаковую ускоряющую разность потенциалов U, после чего масса протона составила треть массы α-частицы. Определить разность потенциалов.

Решение. Полная энергия частицы пропорциональна её массе $E = mc^2$. Поэтому можно записать $E_{\text{p}} = E_{\alpha}/3$. Полная энергия складывается из энергии покоя частицы m_0c^2 и кинетической энергии qU.

Учитывая, что заряд протона равен е, а α-частицы – 2е, запишем соотношение для полных энергий в виде

$$m_{0\text{p}}c^2 + \text{e}U = (m_{0\alpha}c^2 + 2\text{e}U)/3.$$

Приведя подобные члены, получаем $\dfrac{\text{e}U}{3} = \left(\dfrac{m_{0\alpha}}{3} - m_{0\text{p}}\right)c^2$, откуда

$$U = \frac{(m_{0\alpha} - 3m_{0\text{p}})c^2}{\text{e}}, \quad U = 912 \text{ МВ}.$$

Пример 5. Масса движущегося протона m в 1,5 раза больше его массы покоя m_0. Определить полную и кинетическую энергии этого протона.

Решение. Полная энергия релятивистской частицы равна

$$E = E_0 + T = m_0c^2 + T = mc^2,$$

где $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя протона; T – его кинетическая энергия.

С учётом данных задачи

$$mc^2 = 1{,}5m_0c^2 = 1{,}5E_0.$$

В таблицах находим, что $E_0 = 938$ МэВ, тогда полная энергия протона будет равна 1407 МэВ, а кинетическая 1407 – 938 = 469 МэВ.

Пример 6. Используя формулы преобразований Лоренца, выведите релятивистский закон сложения скоростей.

Решение. В системе (штрихованная), движущейся со скоростью ϑ (переносная скорость) относительно неподвижной системы (не штрихованная), обозначим скорость движения тела как $u' = \dfrac{dx'}{dt'}$ (относительная скорость). Тогда абсолютная скорость будет равна $u = \dfrac{dx}{dt}$, где x и t отсчитываются в неподвижной (не штрихованной) системе.

В преобразованиях Лоренца x и t записываются как

$$x = \frac{x' + \vartheta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}; \quad t = \frac{t' + x'\dfrac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Возьмём от них производные

$$dx = \frac{dx' + \vartheta dt'}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}} = dt' \frac{\dfrac{dx'}{dt'} + \vartheta}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}} = dt' \frac{u' + \vartheta}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}};$$

$$dt = \frac{dt' + dx'\dfrac{\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}} = dt' \frac{1 + \dfrac{u'\vartheta}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{\vartheta^2}{c^2}}}.$$

Тогда абсолютная скорость в неподвижной (не штрихованной) системе будет равна

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{u' + \vartheta}{1 + \dfrac{u'\vartheta}{c^2}}.$$

Вопросы для самопроверки

1. В чём физическая сущность механического принципа относительности?
2. В чём заключается правило сложения скоростей в классической механике?
3. Каковы причины возникновения специальной теории относительности (СТО)?
4. В чём заключаются основные постулаты СТО?

5. Зависит ли от скорости движения системы отсчёта скорость тела? Скорость света?

6. Запишите и прокомментируйте преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?

7. Какой вывод о пространстве и времени можно сделать на основе преобразований Лоренца?

8. Одновременны ли события в штрихованной системе, если в нештрихованной системе они происходят в одной точке и одновременны? В нештрихованной системе события разобщены, но одновременны. Ответ обоснуйте.

9. Какие следствия вытекают из СТО для размеров тел и длительности событий в разных системах отсчёта? Ответ обоснуйте.

10. В чём заключается релятивистский закон сложения скоростей? Как показать, что он находится в согласии с постулатами Эйнштейна?

11. Как определяется интервал между событиями? Доказать, что он является инвариантным при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

12. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?

13. В чём заключается закон сохранения релятивистского импульса?

14. Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике? При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?

15. Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. В чём его физическая сущность? Приведите примеры его экспериментального подтверждения.

16. Какие Вам известны величины, сохраняющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Закончив изучение материала предложенного пособия, мы видим, что физические основы механики являются базой не только для разделов курса физики, но и ряда других дисциплин, таких как теоретическая механика, сопротивление материалов, гидравлика, электротехника и др.

Поэтому время и усилия, потраченные на усвоение основ механики, с успехом окупятся в дальнейшей учёбе студента и работе инженера.

Авторы понимают, что представленная работа имеет недостатки, поэтому они будут благодарны за советы и замечания, которые возникнут у читателей.

Авторы также благодарны рецензентам пособия: доктору технических наук, профессору, директору Тамбовского филиала ФГБОУ ВПО «МГУ КИ» В. М. Тютюннику; доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки Российской Федерации, заведующему кафедрой общей физики ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г. Р. Державина» В. А. Федорову за сделанные замечания и советы, без которых данная работа не вышла бы в свет.

В случае заинтересованности или необходимости более глубокого изучения того или иного явления, описанного в данном пособии, необходимо пользоваться фундаментальными учебниками или монографиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Савельев, И. В.** Курс общей физики : учебное пособие для вузов. – В 3 т. Т. 1: Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. – 4-е изд. стер. – СПб. : Лань, 2005.
2. **Зисман, Г. А.** Курс общей физики / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – М. : Наука, 1972. – Т. 1.
3. **Детлаф, А. А.** Курс физики : учебное пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 4-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 2002. – 718 с.
4. **Трофимова, Т. И.** Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – 7-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2001. – 541 с.
5. **Чертов, А. Г.** Задачник по физике : учебное пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2006. – 640 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Средняя скорость

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Среднее ускорение

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}.$$

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r}.$$

Полное ускорение

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного поступательного движения:

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at;$$

$$s = s_0 + \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

Угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного вращательного движения:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении:

$$s = \varphi R; \quad \upsilon = \omega R;$$

$$a_\tau = \varepsilon R; \quad a_n = \omega^2 R.$$

Импульс (количество движения)

$$\vec{K} = \vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Второй закон Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Закон сохранения импульса (для замкнутой системы)

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \text{const}.$$

Сила трения скольжения

$$\vec{F}_{\text{тр}} = f\vec{N}.$$

Работа переменной силы на участке траектории *1 – 2* $A = \int\limits_1^2 F\cos\alpha ds.$	Скорость шаров после абсолютно неупругого удара $\vec{U} = \dfrac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}.$
Мгновенная мощность $N = \dfrac{dA}{dt} = \vec{F}\vec{\upsilon}.$	Момент инерции системы (тела) $J = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$
Кинетическая энергия $T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}.$	Моменты инерции полого и сплошного цилиндров относительно оси симметрии: $J = mR^2;\ J = \dfrac{mR^2}{2}.$
Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли $\Pi = mgh.$	Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара: $J = \dfrac{mR^2}{2}.$
Потенциальная энергия упругодеформированного тела $\Pi = \dfrac{kx^2}{2}.$	Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину: $J = \dfrac{ml^2}{12};$ $J = J_c + ma^2.$
Полная энергия механической системы $E = T + \Pi.$	Напряжённость поля тяготения $\vec{g} = \vec{F}/m.$
Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы) $T + \Pi = E = \text{const}.$	Потенциал поля тяготения $\varphi = \dfrac{\Pi}{m}.$
Скорость шаров после абсолютно упругого удара: $\upsilon_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2};$ $\upsilon_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$	Взаимосвязь между потенциалом и напряжённостью $\vec{g} = -\text{grad}\varphi.$

Кинетическая энергия вращающегося тела относительно неподвижной оси $T_{\text{вр}} = \dfrac{J_z \omega^2}{2}$.	Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости $S\upsilon = \text{const}.$
Момент силы относительно точки $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right].$	Уравнение Бернулли $\dfrac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}.$
Момент силы относительно неподвижной оси $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]_Z.$	Уравнение гармонического колебания $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi);$ $\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi\nu.$
Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки $\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{\upsilon}]$.	Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний величины x $x'' + \omega_0^2 x = 0.$
Момент импульса твёрдого тела относительно неподвижной оси $L_z = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i m_i \upsilon_i = J_z \omega.$	Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l / g}.$
Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела $\vec{M}_z = J_z \vec{\varepsilon};\ \vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}.$	Период колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{J / mgl}$.
Закон сохранения момента импульса: $\vec{L} = \text{const};$ $J_1\omega_1 = J_2\omega_2 = \text{const}.$	Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний величины x $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0.$
Закон всемирного тяготения $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}.$	Логарифмический декремент затухания $\lambda = \ln\dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$

Сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$.	Уравнение стоячей волны $S = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}$.
Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний величины x $x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t$.	Полная энергия продольной волны в упругой среде $W = \rho A^2\omega^2\Delta V\cos^2\omega(t - x/\upsilon)$.
Длина волны $\lambda = \upsilon T$.	
Уравнение плоской волны $S(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.	Вектор Умова–Пойтинга $\vec{U} = \bar{\varepsilon}\cdot\vec{\upsilon}$.
Волновое уравнение $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$.	Уровень силы звука $L = \lg\frac{I}{I_0}$.
Фазовая скорость $\upsilon = \omega/k$.	
Групповая скорость $u = d\omega/dk$.	Эффект Допплера в акустике $\nu' = \frac{V_{\text{в}} \pm \upsilon}{V_{\text{в}} \mp U}\nu$.
Релятивистское замедление течения времени $\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-(\vartheta/c)^2}}$.	Релятивистский импульс $\vec{p} = m\vec{\vartheta} = \frac{m_0\vec{\vartheta}}{\sqrt{1-(\vartheta/c)^2}}$.
Релятивистское сокращение (вдоль направления движения) длины стержня $l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-(\vartheta/c)^2}}$.	Полная энергия частицы $mc^2 = m_0c^2 + E_{\text{к}}$.
Релятивистский закон сложения скоростей: $u' = \frac{u-\vartheta}{1-u\vartheta/c^2}$; $u = \frac{u'+\vartheta}{1+u'\vartheta/c^2}$.	Взаимосвязь массы и энергии $E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(\vartheta/c)^2}}$.
Масса релятивистской частицы $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\vartheta/c)^2}}$.	Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

БАРСУКОВ Владимир Иванович
ДМИТРИЕВ Олег Сергеевич

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию М. Н. Рыжкова

ISBN 978-5-8265-1441-2

Подписано в печать 18.08.2015.
Формат 60 × 84/16. 14,42 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 351

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14.
Тел./факс (4752) 63-81-08, 63-81-33.
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru