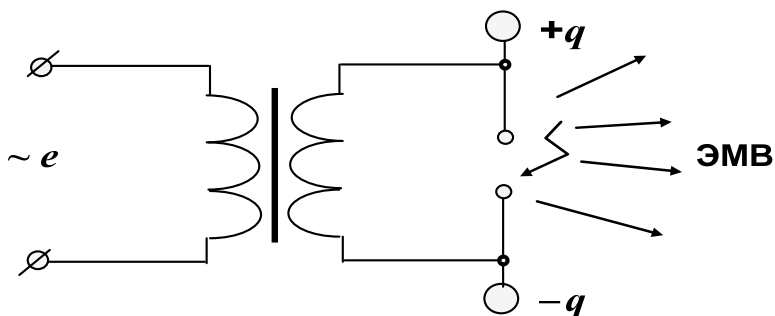


Ю. Н. ПАНАСЮК, А. П. ПУДОВКИН

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ



Тамбов

• Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ» •

2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Ю. Н. ПАНАСЮК, А. П. ПУДОВКИН

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию
в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и
автоматизации в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлениям 211000 «Конструирование и технология
электронных средств», 210400 «Радиотехника»



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2014

УДК 621.385.6 (075)

ББК з845я73-5

П16

Рецензенты :

Кандидат технических наук, доцент,
начальник отдела информационных технологий, телекоммуникаций и
связи ООО «Газпром Межрегионгаз Тамбов»

С. Н. Румянцев

Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры
«Конструирование радиоэлектронных и микропроцессорных систем»
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

О. А. Белоусов

П16 **Панасюк, Ю. Н.**

Электромагнитные поля : учебное пособие для студентов,
обучающихся по направлениям 211000, 210400 / Ю. Н. Панасюк,
А. П. Пудовкин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ»,
2014. – 96 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1266-1.

Рассмотрены основные характеристики статических электрических и магнитных полей, методы описания и характеристики электромагнитных волн на основе системы уравнений Максвелла, характеристики плоских электромагнитных волн в однородных средах и на границе раздела различных сред, свойства электромагнитных волн в направляющих структурах.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 211000 «Конструирование и технология электронных средств», 210400 «Радиотехника» очной и заочной форм обучения.

УДК 621.385.6 (075)

ББК з845я73-5

ISBN 978-5-8265-1266-1

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2014

ВВЕДЕНИЕ

В данное время в радиотехнике продолжается освоение диапазонов УВЧ и СВЧ. В этих диапазонах размеры устройств соизмеримы с длиной волны, поэтому приходится учитывать волновой характер ЭМП. В таком случае теряется понятие электрической цепи, которое позволяло абстрагироваться от существующего в системе электромагнитного поля (ЭМП). Законы теории цепей, справедливые на низких и высоких частотах, перестают действовать. Поэтому при изучении быстропеременных электрических процессов необходим анализ именно ЭМП с учетом его волнового характера и конечной скорости распространения электромагнитных волн (ЭМВ).

Цель данного учебного пособия – познакомить студентов с основами теории ЭМП и подготовить к изучению более сложных дисциплин: «Электродинамика и распространение радиоволн», «Антенны и устройства СВЧ».

Предполагается, что студентами уже пройден курс высшей математики и изучены явления электромагнетизма в курсе общей физики.

1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

1.1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ЗАРЯДОВ. ЗАКОН КУЛОНА

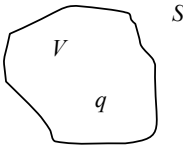


Рис. 1.1. Электрический заряд

Пусть в некотором объёме V , ограниченном поверхностью S , сосредоточен совокупный электрический заряд q (рис. 1.1), так как диаметр электрона как элементарного отрицательного заряда, составляет порядка $5,6 \cdot 10^{-13}$ см, то даже в самом малом объёме, который доступен наблюдателю, содержится большое число элементарных зарядов. Можно считать, что в рассматриваемом объёме V элементарные заряды распределены не дискретно, а непрерывно с *объёмной плотностью*

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \text{ Кл/м}^3. \quad (1.1)$$

Если совокупный заряд q распределён по поверхности S , то говорят о *поверхностной плотности* зарядов

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \text{ Кл/м}^2. \quad (1.2)$$

Иногда бывают заданы законы распределения величин ρ и σ , тогда совокупный заряд q определяется:

$$q = \int_V \rho dV; \quad (1.3)$$

$$q = \int_S \sigma dV. \quad (1.4)$$

В самом простом случае совокупный заряд q характеризуется постоянством во времени, т.е. $dq/dt = 0$ и неподвижностью в пространстве $v = 0$, где v – скорость перемещения совокупного заряда q . Такой заряд создаёт так называемое *электростатическое поле*.

Закон Кулона. Пусть два неподвижных, постоянных во времени точечных заряда разнесены в пространстве (в вакууме) на расстояние r (рис. 1.2). Понятие «точечный заряд» условно. Говоря о точечных зарядах, предполагают, что размеры тел, на которых распределены заряды q и $q_{\text{вн}}$, значительно меньше расстояния r . Взаимодействие между зарядами характеризуется законом Ш. Кулона (1785) в вакууме

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_{\text{вн}}}{r^2} \vec{r}_0, \quad (1.5)$$

где $\epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^{-9}$ [Ф/м] – электрическая постоянная $q_{\text{вн}}$.

Единичный вектор \vec{r}_0 ориентирован от источника силового поля \vec{F} (заряда q к точке наблюдения) к заряду $q_{\text{вн}}$. Если заряд q и $q_{\text{вн}}$ одного знака, то сила \vec{F} , действующая на заряд $q_{\text{вн}}$, будет совпадать с вектором \vec{r}_0 – будет наблюдаться отталкивание зарядов. Если заряды разного знака, они будут притягиваться.

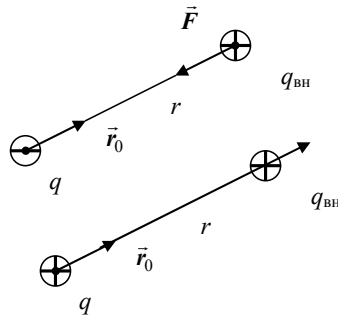


Рис. 1.2. Силовые линии точечных зарядов

1.2. НАПРЯЖЁННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ. ПОТЕНЦИАЛ

Для характеристики силового воздействия поля заряда q вводится понятие напряжённости электростатического поля как силы, действующей на единичный положительный заряд $q_{\text{вн}}$:

$$\vec{E} = \vec{F} / q_{\text{вн}}, \text{ В/м}, \quad (1.6)$$

или с учетом выражения (1.5)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0, \text{ В/м}. \quad (1.7)$$

Свойства поля точечного заряда. Градиент скалярной функции потенциала $\varphi(r)$ – векторная величина, определяемая как (рис. 1.3)

$$\text{grad}\varphi(r) = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k},$$

где $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ – оператор ∇ (набла) в прямоугольной системе координат.

Другими словами, градиент скалярной функции $\varphi(r)$ в любой точке $M(r)$ есть вектор, нормальный к поверхности уровня в данной точке и направлен в сторону наибольшего возрастания функции, численно равный её производной по нормали к эквипотенциальной поверхности

$$\text{grad}\varphi(r) = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{n}_0.$$

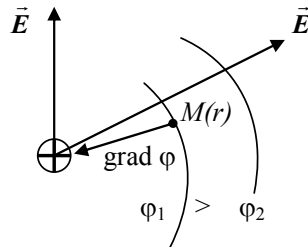


Рис. 1.3. Градиент скалярной функции

2. *Дивергенция* векторной функции $\vec{E}(r)$ – скалярная величина, определяемая как

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{dx} + \frac{\partial E_y}{dy} + \frac{\partial E_z}{dz}. \quad (1.8)$$

Геометрический смысл дивергенции заключается в том, что дивергенция (расходимость) поля есть предел отношения потока векторного поля через замкнутую поверхность, окружающую данную точку M , к объёму V , ограниченному этой поверхностью, когда она стягивается к точке.

Если дивергенция отлична от нуля, то физически это значит, что в рассматриваемой точке имеются источники поля ($\operatorname{div} \vec{E} > 0$) или его стоки ($\operatorname{div} \vec{E} < 0$). Если $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то в рассматриваемой точке поля отсутствуют источники и стоки поля.

3. *Ротор* (вихрь) векторной функции $\vec{E}(r)$ есть векторная величина, определяемая как

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (1.9)$$

Ротор характеризует степень завихрённости векторного поля в точке $M(r)$.

Вихревые линии любого векторного поля обладают тем свойством, что они нигде не начинаются и нигде не кончаются:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = 0.$$

Чтобы определить свойства электростатического поля, описываемого равенством (1.7), необходимо определить дифференциальные характеристики поля в точке: $\operatorname{rot} \vec{E}$, $\operatorname{div} \vec{E}$. Если в каждой точке поля:

$$\operatorname{rot} \vec{E} \begin{cases} = 0 - \text{поле потенциальное;} \\ \neq 0 - \text{поле вихревое;} \end{cases}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} \begin{cases} = 0 - \text{поле соленоидальное, т.е. замкнутое;} \\ \neq 0 - \text{поле несолоноидальное.} \end{cases}$$

Для получения $\operatorname{rot} \vec{E}$ и $\operatorname{div} \vec{E}$ представим выражение (1.7) в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} = f(r) \vec{r}, \quad (1.10)$$

где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

После соответствующих вычислений получим, что для электростатического поля одиночного заряда

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \operatorname{div} \vec{E} = 0. \quad (1.11)$$

Это означает:

1. Из первого равенства следует, что поле потенциальное, вектор \vec{E} является градиентом скалярного поля, называемого *потенциалом* φ электростатического поля:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (1.12)$$

2. В потенциальном поле работа сил поля по перемещению вносимого заряда определяется только разностью потенциалов исходной и конечной точек и не зависит от формы пути.

3. Поле соленоидальное в точках, не принадлежащих области V . Линии напряжённости электростатического поля непрерывны, а это значит, что в этих точках источники поля отсутствуют.

Потенциал электростатического поля. Установлено, что в электростатическом поле имеет место равенство (1.12). Определим выражение для φ . Так как $\vec{E} = f(r)$, то предположим, что и $\varphi = f(r)$, тогда

$$\operatorname{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r}_0, \quad (1.13)$$

где $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Поскольку выражение для \vec{E} известно, приравнявая выражения (1.7) и (1.13) и найдя первообразную, определим φ как

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \text{ В.} \quad (1.14)$$

Знак « \leftarrow » в выражении (1.12) учитывает, что вектор \vec{E} направлен от « $+$ » к « $-$ », а $\operatorname{grad} \varphi$ направлен в сторону увеличения потенциала. Линии равных потенциалов (эквипотенциали) образуют своеобразные энергетические уровни.

1.3. ПОЛЕ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Пусть имеется система, состоящая из N зарядов (рис.1.15). Поле в точке M будет определяться как векторная сумма полей каждого из зарядов

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n, \quad (1.15)$$

а потенциал, соответственно,

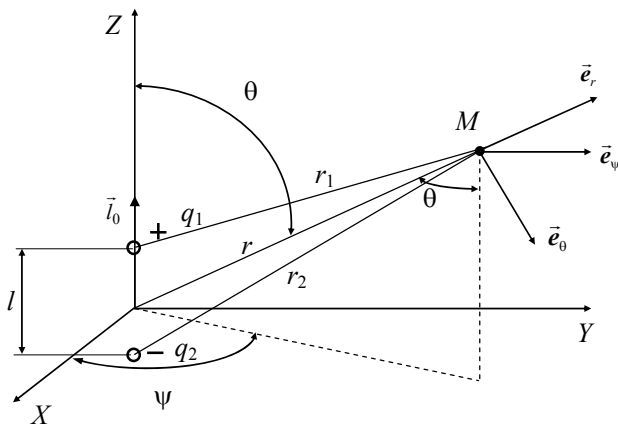


Рис. 1.4. Система зарядов

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n . \quad (1.16)$$

В соответствии с выражением (1.16) определим потенциал в точке M .

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) . \quad (1.17)$$

В сферической системе координат (рис. 1.4) рассмотрим два различных заряда, отстоящих на расстоянии l друг от друга.

Для того чтобы записать выражение для вектора \vec{E} в сферической системе координат, вспомним, что

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dr} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d\varphi}{d\psi} \vec{e}_\psi , \quad (1.18)$$

и учитывая, что $\varphi = f(\theta, r)$, запишем

$$\vec{E} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta), \text{ В/м.} \quad (1.19)$$

1.4. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА, МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Поле объёмных зарядов. Пусть заряды расположены в некотором объёме не дискретно, как было на рис. 1.4, а непрерывно с объёмной плотностью ρ . В этом случае потенциал в точке M , если использовать выражения (1.3) и (1.14), запишется

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV . \quad (1.20)$$

Во всех предыдущих случаях мы рассматривали ситуацию, когда по известному распределению заряда определялось поле – так называемая прямая задача. Иногда необходимо решать обратную задачу – найти закон распределения заряда по заданному полю.

Пусть в объёме V распределён электрический заряд q с объёмной плотностью ρ . Известно электростатическое поле, создаваемое этим зарядом. Определить закон распределения заряда в области V . Окружим V замкнутой поверхностью S . Для этого обратимся к закону Гаусса

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{q}{\varepsilon_0} , \quad (1.21)$$

согласно которому поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность S , охватывающую совокупный заряд q , пропорционален величине этого заряда.

С учётом соотношения (1.3) закон Гаусса можно записать

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV . \quad (1.22)$$

С учётом теоремы Остроградского–Гаусса, которая непосредственно вытекает из определения дивергенции (поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность, ограничивающую объём V , равен расхождению поля из этого объёма), запишем

$$\oint_S \vec{E} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV . \quad (1.23)$$

Приравнивая правые части равенств (1.22) и (1.23), получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV , \quad (1.24)$$

откуда

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 . \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) даёт возможность решать обратную задачу. Если известен закон изменения потенциала φ , уравнение (1.25) принимает вид уравнения Пуассона

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \varphi) = \rho / \varepsilon_0 . \quad (1.26)$$

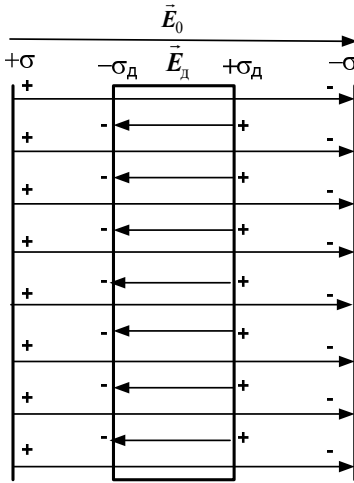


Рис. 1.5. Электрическое поле в диэлектрике

Электростатическое поле в диэлектрике. В соответствии с принципом суперпозиции результирующее поле \vec{E} складывается из внешнего поля \vec{E}_0 и поля поляризационных зарядов \vec{E}_d (рис. 1.5):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_d, \quad E = E_0 - E_d. \quad (1.27)$$

Вектор электрической индукции или вектор электрического смещения, Кл/м²:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + k_3 \varepsilon_0 \vec{E} = \\ &= \varepsilon_0 (1 + k_3) \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_a \vec{E}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

где \vec{P} – вектор электрической поляризации; k_3 – диэлектрическая восприимчивость вещества; $k_3 \varepsilon_0$ – абсолютная восприимчивость; $1 + k_3 = \varepsilon$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды; $\varepsilon_0 = \varepsilon_a$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

С другой стороны:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_0. \quad (1.29)$$

Сравнивая (1.28) и (1.29), находим напряжённость электрического поля в изотропном диэлектрике

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}. \quad (1.30)$$

Поле E_0 определяется формулой

$$E_0 = E_{+\sigma} + E_{-\sigma} = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1.31)$$

Поле E_d определяется формулой

$$E_d = E_{+\sigma_d} + E_{-\sigma_d} = \frac{+\sigma_d}{2\varepsilon_0} + \frac{-\sigma_d}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_d}{\varepsilon_0}. \quad (1.32)$$

1.5. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Электростатическое поле зарядов, распределённых с объёмной плотностью ρ в объёме V , обладает запасом энергии

$$W_3 = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \times \vec{D} dV, \text{ Дж.} \quad (1.33)$$

Объёмная плотность энергии равна

$$w_3 = \frac{dW_3}{dV} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{D}, \text{ Дж/м}^3. \quad (1.34)$$

Для изотропной среды

$$w_3 = \epsilon_a E^2 / 2. \quad (1.35)$$

Контрольные вопросы

1. Что собой представляет электростатическое поле?
2. Сущность закона Кулона.
3. От каких параметров зависит напряжённость электрического поля?
4. От каких параметров зависит потенциал электрического поля?
5. Напряжённость и потенциал поля системы зарядов.
6. Напряжённость и потенциал поля электрического диполя.
7. Поле объёмных зарядов.
8. Электростатическое поле в диэлектрике.
9. Энергия электростатического поля.

2. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

2.1. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ТОКА

Постоянный электрический ток – упорядоченное движение электрически заряженных частиц.

Сила тока – скорость изменения заряда q в объёме V со временем, взятая с обратным знаком:

$$I = -\frac{dq}{dt}. \quad (2.1)$$

Знак « \leftarrow » означает, что ток направлен против движения электронов.

Вектор плотности тока. Так как сила тока I – скаляр, она не даёт исчерпывающей информации об электрическом токе. Введём понятие *вектора плотности электрического тока проводимости* \vec{j} или *плотности тока* (рис. 2.1)

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS}.$$

1. Ориентация \vec{j} совпадает с направлением движения положительных зарядов, т.е. совпадает с вектором \vec{E} внешнего поля.

2. Модуль \vec{j} равен силе тока положительных зарядов, пересекающих единичную поверхность, перпендикулярную направлению их движения (рис. 2.1).

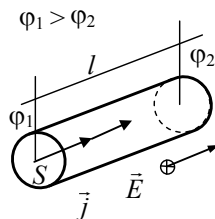


Рис. 2.1. Плотность тока

2.2. ЗАКОН ОМА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Определим связь между вектором плотности \vec{j} и вектором напряжённости \vec{E} . Рассмотрим прямолинейный участок внешней электрической цепи в виде однородного проводника постоянного сечения. Модуль \vec{j} равен $j = I/S$, откуда

$$I = jS. \quad (2.2)$$

Сопротивление проводника R равно $R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S}$, где γ – удельная проводимость.

Тогда

$$I = \frac{U}{R} = (\varphi_1 - \varphi_2) / R = \int_l \vec{E} dl = El = E\gamma S. \quad (2.3)$$

С учетом (2.2) и (2.3) можно записать

$$j = \gamma E, \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (2.4)$$

Эти выражения – **закон Ома** в дифференциальной форме для участка внешней цепи.

Закон Ома для полной цепи. Если имеет место в цепи стороннее электрическое поле $\vec{E}^{\text{стор}}$, которое обусловлено действием внешних причин, не связанных с электрическими зарядами, то в этом случае закон Ома запишется

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}). \quad (2.5)$$

Внешние причины могут быть механического, химического, теплового или иного происхождения.

Выясним характер стороннего поля $\vec{E}^{\text{стор}}$, для чего рассмотрим циркуляцию векторов плотности тока проводимости по контуру l , включающему внутренние и внешние цепи. Проинтегрируем (2.5) по « dl »:

$$\frac{1}{\gamma} \int_l \vec{j} dl = \int_l (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}) dl. \quad (2.6)$$

Поле \vec{E} постоянного тока потенциально ($\text{rot} \vec{E} = 0$, $\vec{E} = -\text{grad} \varphi$), а это значит, что $\int_l \vec{E} dl = 0$. Учтём, что полное сопротивление контура

$$R = R_{\text{вн}} + R_{\text{внеш}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{\gamma} j l = \frac{I}{\gamma S} l = IR = I(R_{\text{вн}} + R_{\text{внеш}}) = \varepsilon, \quad \varepsilon = \int_l \vec{E}^{\text{стор}} dl. \quad (2.7)$$

Этот результат показывает, что циркуляция вектора напряжённости стороннего электрического поля по замкнутому контуру отлична от нуля, из чего следует вывод, что это поле не может быть потенциальным и является вихревым, т.е. $\text{rot} \vec{E}^{\text{стор}} \neq 0$.

Уравнение $\varepsilon = \int_l \vec{E}^{\text{стор}} dl = I(R_{\text{вн}} + R_{\text{внеш}})$ представляет собой **закон**

Ома для полной цепи (закон Ома в интегральной форме).

Уравнение непрерывности (закон сохранения заряда в дифференциальной форме). Изменение заряда в объёме V , ограниченном поверхностью S , определяется силой тока I

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t} \text{ или } I = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.8)$$

Данное выражение устанавливает связь между интегральными характеристиками – силой тока и совокупным электрическим зарядом q в объёме V , ограниченном поверхностью S .

Исходя из определения плотности тока проводимости \vec{j} и теоремы Гаусса–Остроградского, можно записать

$$I = \int_S \vec{j} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV. \quad (2.9)$$

Приравнявая правые части (2.8) и (2.9), получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Тогда

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.10)$$

Дифференциальное уравнение (2.10) в частных производных называется **уравнением непрерывности** и может рассматриваться как математическая формулировка закона сохранения заряда для бесконечно малого объёма.

2.3. ЗАКОН АМПЕРА. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Свойства магнитного поля рассмотрим для случая постоянного тока.

Пусть в вакууме расположены два элемента тока $d\vec{l}$. Под элементом тока понимают тонкий отрезок проводника с током, длина которого значительно меньше расстояния до точки наблюдения, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока \vec{j} (рис. 2.2).

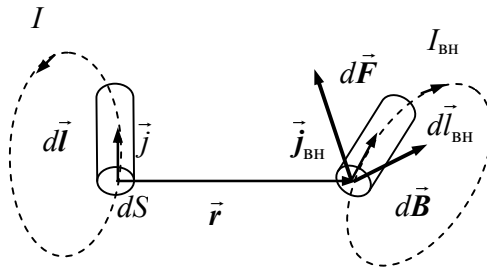


Рис. 2.2. Взаимное влияние двух элементов

Согласно *закону Ампера* первый элемент тока будет действовать на внешний элемент тока с силой

$$d\vec{F} = I_{\text{вн}} d\vec{l}_{\text{вн}} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right] = I_{\text{вн}} d\vec{l}_{\text{вн}} \times d\vec{B}, \quad (2.11)$$

где μ_0 – магнитная проницаемость среды (вакуума); \vec{B} – вектор магнитной индукции согласно закону Био–Савара–Лапласа.

Для контура постоянного тока длиной L и сечением S вектор магнитной индукции в любой точке пространства определяется по формуле

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV. \quad (2.12)$$

Магнитное поле постоянного тока соленоидально – магнитные силовые линии всегда замкнуты, источников магнитного поля, на которые они замыкаются, в пространстве нет. Силовые линии электрического поля начинаются и оканчиваются на электрических зарядах.

2.4. НАПРЯЖЁННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При отсутствии магнитного поля стороннего источника в намагниченных средах магнитное поле создаётся только молекулярными токами \vec{B}_M . При введении в среду внешнего магнитного поля $\vec{B}_{\text{вн}}$ создаётся результирующее поле

$$\vec{B} = \vec{B}_M + \vec{B}_{\text{вн}}. \quad (2.13)$$

Поскольку вакуумное магнитное поле молекулярных токов \vec{B}_M вызвано соленоидальным полем, то и результирующее поле соленоидально:

$$\text{div}\vec{B} = 0, \text{div}\vec{B}_M = 0, \text{div}\vec{B}_{\text{вн}} = 0.$$

Кроме того:

$$\text{rot}\vec{B}_{\text{вн}} = \mu_0 \vec{j}, \text{rot}\vec{B}_M = \mu_0 \vec{j}_M,$$

где \vec{j}_M – вектор плотности молекулярных токов (или вектор плотности магнитных токов), определяемый как

$$\vec{j}_M = \text{rot}\vec{J},$$

где \vec{J} – вектор намагничённости или намагничённость единицы объёма вещества.

Циркуляция вектора \vec{B} равна

$$\text{rot}\vec{B} = \vec{B}_{\text{вн}} + \vec{B}_{\text{м}} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\text{rot}\vec{J}. \quad (2.14)$$

Из выражения (2.14) находим

$$\vec{j} = \text{rot} \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right] = \text{rot}\vec{H}, \quad (2.15)$$

где \vec{H} – вектор напряжённости магнитного поля.

Для изотропных сред справедливо

$$\vec{J} = k_{\text{м}}\vec{H}, \quad (2.16)$$

где $k_{\text{м}}$ – магнитная восприимчивость вещества.

С учётом выражений (2.15) и (2.16) получим

$$\vec{B} = \mu_0(1 + k_{\text{м}})\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H} = \mu_a\vec{H}, \quad (2.17)$$

где $1 + k_{\text{м}} = \mu$ – относительная магнитная проницаемость среды; $\mu\mu_0 = \mu_a$ – абсолютная магнитная проницаемость среды.

Уравнение (2.17) называется материальным, так как описывает макроскопические свойства вещества в магнитном поле.

2.5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ РАМКИ С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Простейшим источником магнитного поля (МП) постоянного тока в природе является электрон, вращающийся с постоянной скоростью вокруг ядра. Орбита электрона образует элементарную рамку.

Элементарная рамка – плоский замкнутый контур, выполненный из тонкого проводника длиной, много меньшей расстояния до точки наблюдения, с постоянным током (рис. 2.3). Поместим рамку в сферическую систему координат (рис. 2.4).

Магнитное поле в точке M ($r \gg 2\pi a$) определится как

$$\vec{H} = \frac{I\pi a^2}{4\pi r^3} (2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta). \quad (2.18)$$

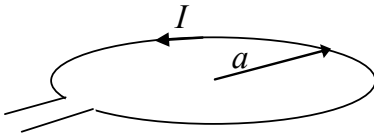


Рис. 2.3. Элементарная магнитная рамка

Данное выражение имеет ту же структуру, что и для электрического диполя, поэтому элементарную рамку ещё называют магнитным диполем. По аналогии с диполем здесь вводится понятие магнитного момента

$$\vec{m} = I\pi a^2\vec{n} = IS\vec{n}, \quad (2.19)$$

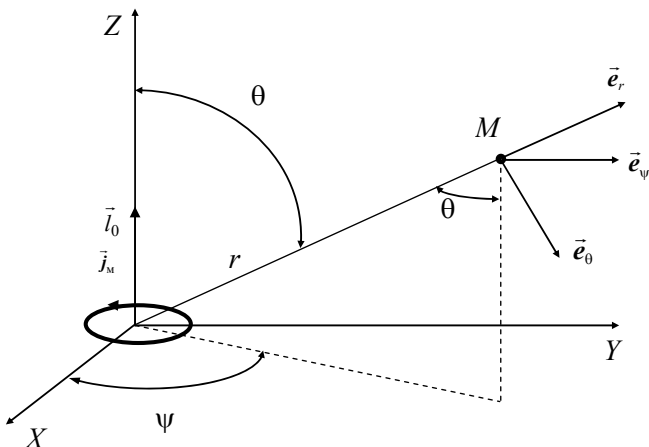


Рис. 2.4. Магнитная рамка в сферической системе координат

где \vec{n} – вектор нормали к плоскости рамки, направление которого определяется как $\vec{a} \times \vec{j}$ (правило буравчика).

2.6. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Магнитное поле обладает запасом энергии

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H} \times \vec{B} dV, \quad \text{Дж}, \quad (2.20)$$

распределённой с плотностью

$$w_M = \frac{dW_M}{dV} = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{B}, \quad \text{Дж/м}^3. \quad (2.21)$$

Для изотропных сред

$$w_M = \frac{\mu_a H^2}{2}, \quad \text{Дж/м}^3. \quad (2.22)$$

Контрольные вопросы

1. Что собой представляет постоянное магнитное поле?
2. Сущность закона Био–Савара–Лапласа.
3. Методика расчёта напряжённости магнитного поля.
4. Методика расчёта индукции магнитного поля.
5. От каких параметров зависит напряжённость магнитного поля?
6. От каких параметров зависит индукция электрического поля?
7. От каких параметров зависит движение электрона в магнитном поле?
8. Методика расчёта энергии магнитного поля.

3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

3.1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

ЭМП – это вид материи, оказывающей силовое воздействие на заряженные частицы, характеризуемый неразрывно связанными друг с другом и меняющимися во времени электрическим и магнитным полями.

Электростатическое поле (ЭП) создаётся неподвижными и неизменными во времени зарядами ($v = 0$, $\partial\rho/\partial t = 0$, $\text{rot}\vec{E} = 0$, $\text{div}\vec{E} = \rho/\epsilon_a$), ЭП и стационарное магнитное поле (МП) постоянного тока ($v = \text{const}$, $\text{rot}\vec{H} = \vec{j}$, $\text{div}\vec{H} = 0$) являются частными случаями электромагнитного поля (ЭМП).

ЭМП заряженных частиц, состояние которых характеризуется скоростью их движения v и величиной заряда, являющегося функцией времени – $v = f(t)$, $d\rho/dt(t)$.

Исходя из уравнения непрерывности $\text{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ и учитывая, что, например, в диэлектрике помимо тока проводимости присутствует также ток смещения, можно получить **первое уравнение Максвелла** (I УМ)

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

устанавливающее связь между переменным во времени электрическим полем и возникающим вокруг него магнитным полем.

Физический смысл: *МП возникает не только при движении зарядов, когда имеет место ток проводимости, но и при наличии изменяющегося во времени электрического поля.*

Второе уравнение Максвелла (II УМ) вытекает из закона ЭМ индукции Фарадея (1831):

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.2)$$

согласно которому, если через поверхность, ограниченную проводящим контуром, проходит меняющийся во времени магнитный поток Φ , то в контуре возникает ЭДС индукции. II УМ имеет вид

$$\text{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Физический смысл: *В ЭМП электрическое поле является вихревым. Причиной ЭП, помимо электрических зарядов, является изменяющееся во времени МП.*

Полная система дифференциальных уравнений Максвелла включает в себя следующие уравнения:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_a}; \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Вспомогательные уравнения: $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$; $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$.

Интегральная форма уравнений Максвелла. Интегральным аналогом первого уравнения Максвелла является так называемый закон полного тока или теорема циркуляции: циркуляция вектора по замкнутому контуру интегрирования равна полному току, протекающему через площадь, охваченную контуром интегрирования:

$$\int_l \vec{H} dl = I_{\Pi} = I + I_{\text{смещ}}. \quad (3.5)$$

Физический смысл I УМ: *Токи смещения $I_{\text{смещ}}$ наравне с токами проводимости I образуют магнитное поле. Закон изменения ЭП во времени определяет закон распределения МП в пространстве.*

Интегральным аналогом второго уравнения Максвелла является закон электромагнитной индукции

$$\int_l \vec{E} dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Физический смысл II УМ: *Переменное магнитное поле образует вихревое электрическое поле. Закон изменения МП во времени определяет закон распределения ЭП в пространстве.*

Интегрируя III УМ по объёму и применяя формулу Остроградского–Гаусса, получим

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV = q. \quad (3.7)$$

Это равенство называется **теоремой Гаусса**: *поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность определяется электрическим зарядом q , содержащимся в объёме V , ограниченном поверхностью S .*

Подобным образом получим интегральную запись IV УМ

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (3.8)$$

выражающую непрерывность линий магнитной индукции.

Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_l \vec{H} d\vec{l} = I_{\Pi} = I + I_{\text{смещ}}; \\ \int_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \\ \int_S \vec{D} d\vec{S} = q; \\ \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Отметим, что уравнения Максвелла в дифференциальной форме справедливы лишь тогда, когда параметры среды либо не зависят от координат, либо являются их непрерывными функциями. Уравнения Максвелла в интегральной форме применимы во всех случаях, включая и те, когда параметры среды, или хотя бы один из них, изменяются скачками.

3.2. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Распространение электромагнитного поля в пространстве определяется решением системы уравнений Максвелла (3.9) применительно к конкретной среде, в которой распространяется электромагнитное поле.

Рассмотрим, как будут выглядеть эти уравнения при условии, что на среду, в которой распространяется электромагнитное поле, накладываются следующие условия:

1. Среда является изотропной. Тогда $\vec{D} \parallel \vec{E}$, $\vec{B} \parallel \vec{H}$, а диэлектрическая проницаемость среды ϵ и магнитная проницаемость μ являются скалярными величинами. Тогда, используя определения $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ и $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, получаем уравнения Максвелла в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial(\epsilon \vec{E})}{\partial t}; \\ \text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\mu \vec{H})}{\partial t}; \\ \epsilon_0 \text{div}(\epsilon \vec{E}) = \rho; \\ \mu_0 \text{div}(\mu \vec{H}) = 0; \text{div}(\mu \vec{H}) = 0. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

2. Среда является однородной. Тогда для всех точек среды диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость не зависят от координат – $\varepsilon = \text{const}(\vec{r})$ и $\mu = \text{const}(\vec{r})$. При этом условии система уравнений Максвелла будет иметь вид

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}; \\ \text{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}; \\ \varepsilon_0 \varepsilon \text{div}\vec{E} = \rho; \\ \mu_0 \text{div}(\mu\vec{H}) = 0; \text{div}(\mu\vec{H}) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

3. Среда не является сегнетоэлектрической. Тогда диэлектрическая проницаемость среды не зависит от времени – $\varepsilon = \text{const}(t)$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}; \\ \text{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial(\mu\vec{H})}{\partial t}; \\ \varepsilon_0 \varepsilon \text{div}\vec{E} = \rho; \\ \mu_0 \text{div}(\mu\vec{H}) = 0; \text{div}(\mu\vec{H}) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

4. Среда не является ферромагнитной или ферритной. Тогда магнитная проницаемость среды не зависит от времени – $\mu = \text{const}(t)$. Тогда получаем

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}; \\ \text{rot}\vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \\ \varepsilon_0 \varepsilon \text{div}\vec{E} = \rho; \\ \mu_0 \text{div}(\mu\vec{H}) = 0; \text{div}(\mu\vec{H}) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

5. Среда не заряженная. Тогда $\rho = 0$, следовательно, в уравнениях (3.10)

$$\text{div}\vec{E} = 0. \quad (3.14)$$

6. Среда не проводит электрический ток (непроводящая). Тогда $\vec{j} = 0$. Тогда уравнения (3.10) примут вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{div}(\vec{H}) = 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Проанализируем систему уравнений (3.15) в целях получения волнового уравнения. Для этого применим операцию rot ко второму уравнению системы (3.15). При этом правая часть этого уравнения преобразуется, согласно свойству векторных операций и двойного векторного произведения, к виду

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \times \vec{E} = -\vec{\nabla}^2 \times \vec{E} = -\Delta \vec{E}, \quad (3.16)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Операция rot , применённая к правой части второго уравнения системы (3.15), приводит к выражению

$$\mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = \mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.17)$$

Подставляем формулы (3.16) и (3.17) во второе уравнение системы (3.15), получаем

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (3.18)$$

Формула (3.18) представляет собой волновое уравнение для напряжённости электрического поля.

Если применить операцию rot к первому уравнению системы (3.15), то получим волновое уравнение для напряжённости магнитного поля

$$\Delta \vec{H} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (3.19)$$

Таким образом, электромагнитная волна представляет собой распространение в пространстве электрического и магнитного полей, которое происходит согласно волновым уравнениям, имеющим вид:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \\ \Delta \vec{H} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Форма этих уравнений совпадает с формой волнового уравнения в механике. При этом коэффициент перед второй производной по времени равен

$$\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon = \frac{1}{V^2}, \quad (3.21)$$

где V – скорость распространения электромагнитных волн. Эта величина получается и при проверке размерности названного коэффициента. Теперь волновые уравнения для электромагнитных волн имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{E} - \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0; \\ \Delta \vec{H} = \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{H} - \mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Из формулы (3.21) найдём скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon}}. \quad (3.23)$$

В вакууме $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, тогда скорость электромагнитных волн в вакууме будет равна $V = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Волновые уравнения (3.22) являются уравнениями в частных производных. Эти уравнения решаются методом Фурье или методом Даламбера. Применение этих методов показывает, что решением таких волновых уравнений являются функции, которые имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \times \vec{r} + \alpha); \\ \vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \times \vec{r} + \alpha), \end{cases} \quad (3.22)$$

где $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ – циклическая частота; T – период колебаний; f – частота колебаний; $\vec{k} = (2\pi/\lambda)\vec{n}_0$ – коэффициент распространения (волновой вектор); $\lambda = VT = V/f$ – длина волны, которая показывает, на какое расстояние распространяется волна за время, равное периоду; \vec{n}_0 – вектор

по модулю равен единице, а по направлению совпадает с направлением распространения волны.

Формулы (3.24) показывают значения векторов напряжённости электрического и магнитного поля в момент времени t в точке, радиус-вектор которой равен \vec{r} . Это уравнение называется уравнением монохроматической волны, которая распространяется в направлении любого радиус-вектора \vec{r} .

Волны характеризуются волновой поверхностью. Волновой поверхностью называется поверхность, все точки которой колеблются в одинаковой фазе, т.е. уравнение волновой поверхности имеет вид

$$\omega t - \vec{k} \times \vec{r} + \alpha = \text{const.} \quad (3.25)$$

Волна называется плоской, если её волновые поверхности представляют собой плоскости. Волна называется сферической, если её волновые поверхности представляют собой сферы.

Кроме понятия волновой поверхности, используется понятие волнового фронта. Волновым фронтом называется последняя волновая поверхность, до которой дошла волна в данный момент времени. Волновой фронт делит всё пространство на две части, в одной из них волна уже распространилась, а в другой – ещё нет.

3.3. ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ

Волны любой природы принято делить на продольные и поперечные волны. Это два предельных случая распространения колебаний.

Волна называется продольной, если направление колебаний материального объекта (частиц, полей) совпадает с направлением распространения волны или с направлением распространения колебаний. Типичным примером продольных волн являются звуковые волны, распространяющиеся в твёрдых, жидких и газообразных телах. Если рассматривать механические волны, то продольные волны связаны с деформацией растяжения и сжатия упругой среды, в которой волны распространяются.

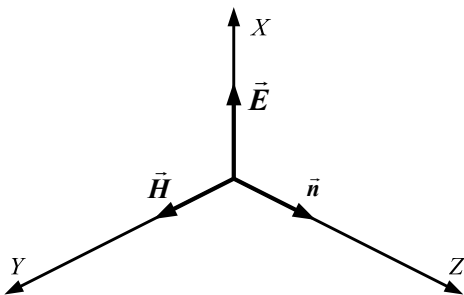


Рис. 3.1. Распространение электромагнитной волны

Волна называется поперечной, если направление колебаний материального объекта (частиц, полей) перпендикулярно направлению распространения волн или направлению распространения колебаний. Если рассматривать механические волны в упругой среде, то такие волны связаны с деформацией сдвига. Такие волны возможны в твёрдых и жидких телах. В качестве примера поперечных волн можно привести волны на поверхности воды, хотя, если учесть все особенности этих волн, то строго поперечными их считать нельзя.

Если электромагнитная волна распространяется в однородной и изотропной среде, не обладающей сегнетоэлектрическими и ферромагнитными свойствами, а также не проводящей электрический ток, так что векторы напряжённости электрического и магнитного полей и единичный вектор направления распространения волны взаимно перпендикулярны $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{n}$, то в указанных условиях электромагнитные волны являются поперечными волнами (рис. 3.1).

В общем случае электромагнитные волны могут быть и продольными, например, если электромагнитная волна распространяется в плазме. В других средах векторы напряжённостей электрического и магнитного полей могут колебаться под углами, не равными 90° . Таким образом, при изучении распространения электромагнитных волн важную роль играют свойства среды, в которой они распространяются.

3.4. ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН. ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

Основным свойством волн любой природы является то, что волна переносит на расстояние энергию. Поэтому найдём плотность энергии, которую несёт электромагнитная волна. Для решения этой задачи запишем первое и второе уравнения из системы (3.15):

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Умножим первое из этих уравнений скалярно на вектор \vec{E} , а второе – на вектор \vec{H} :

$$\begin{cases} \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \\ \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \mu \vec{H} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Теперь вычитаем из второго уравнения формулы (3.27) первое уравнение

$$\vec{H} \times \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \times \text{rot} \vec{H} = - \left(\mu_0 \mu \vec{H} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right). \quad (3.28)$$

Рассмотрим подробно левую часть формулы (3.28)

$$\vec{H} \times \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \times \text{rot} \vec{H} = \vec{H} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \times (\vec{E} \times \vec{H}) = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}). \quad (3.29)$$

Рассмотрим правую часть выражения (3.28)

$$- \left(\mu_0 \mu \vec{H} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 \right). \quad (3.30)$$

Подставляем формулы (3.29) и (3.30) в формулу (3.28)

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{H}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 \right). \quad (3.31)$$

Из электростатики известно, что плотность энергии электрического поля определяется формулой

$$w_э = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{D}. \quad (3.32)$$

При изучении магнитного поля также было получено, что плотность энергии магнитного поля определяется формулой

$$w_м = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{H}^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \times \vec{B}. \quad (3.33)$$

Тогда плотность энергии электромагнитного поля определяется формулой

$$w = w_э + w_м = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{H}^2 = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{D} + \vec{H} \times \vec{B}). \quad (3.34)$$

Подставляем формулу (3.34) в формулу (3.31)

$$\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = - \frac{\partial}{\partial t} w. \quad (3.35)$$

Если среда не проводит электрический ток, то плотность энергии магнитного поля и плотность энергии электрического поля в электромагнитной волне равны

$$w_э = w_м = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{H}^2. \quad (3.36)$$

Из этой формулы следует, что в бегущей электромагнитной волне плотность энергии магнитного поля равна плотности энергии электрического поля. Это естественный вывод, который отражает закон сохранения энергии. В случае если волны распространяются в проводящей среде, это условие выполняться не будет.

С учётом формулы (3.36) плотность энергии электромагнитного поля можно записать в виде

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mu \vec{H}^2 = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 = \mu_0 \mu \vec{H}^2. \quad (3.37)$$

Формула (3.35) показывает, какова скорость плотности энергии волны, распространяющейся в пространстве. В левой части формулы (3.35) содержится величина, которая определяется формулой

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (3.38)$$

Величина $\vec{\Pi}$ называется вектором Умова–Пойнтинга, который направлен по направлению распространения волны, т.е. по направлению вектора \vec{n} (рис. 3.1). Вектор Умова–Пойнтинга определяет плотность потока энергии электромагнитного поля.

Найдём модуль этого вектора

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} = |\vec{E}| \times |\vec{H}| \times \vec{n} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} \times \vec{n} = \frac{\mu_0 \mu \vec{H}^2}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} \times \vec{n} = wV \vec{n}. \quad (3.39)$$

Если ввести обозначение показателя преломления среды $n_{\text{пр}} = \sqrt{\varepsilon \mu}$, тогда вектор Умова–Пойнтинга можно выразить через скорость света

$$\vec{\Pi} = \frac{w c}{n_{\text{пр}}} \vec{n} = \frac{w c}{n_{\text{пр}}} \vec{n}. \quad (3.40)$$

Амплитудная связь между E_m и H_m имеет вид

$$H_m = \frac{k}{\omega \mu_a} E_m = \frac{E_m}{Z}, \quad (3.41)$$

где Z – волновое сопротивление среды:

$$Z = \omega \mu_a / k = \frac{\omega \mu_a}{\omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \quad (3.42)$$

Для вакуума

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120 \pi \approx 377 \text{ Ом.}$$

3.6. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОРОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

На рисунке 3.2 изображена граница раздела двух сред с различными электрическими параметрами. Для примера показано разложение вектора напряжённости электрического поля на тангенциальную (касательную к границе раздела) и нормальную (перпендикулярную к границе раздела) составляющие.

На границе раздела двух сред тангенциальные составляющие векторов напряжённости электрического поля непрерывны $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$, а нормальные составляющие векторов электрического поля претерпевают скачок, определяемый отношением диэлектрических проницаемостей сред:

$$E_{1n} = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}} E_{2n}. \quad (3.43)$$

Направление вектора E на границе раздела двух сред изменяется

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{E_{2\tau} E_{1n}}{E_{2n} E_{1\tau}} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (3.44)$$

На границе раздела (рис. 3.3) двух сред тангенциальные составляющие векторов напряжённости МП непрерывны $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$, а нормальные

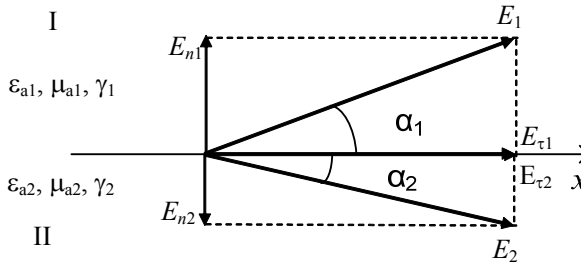


Рис. 3.2. Среды с различными электрическими параметрами

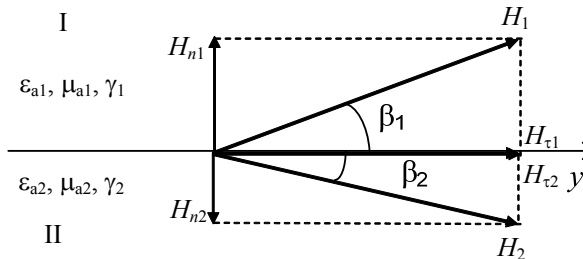


Рис. 3.3. Среды с различными электрическими параметрами

составляющие векторов напряжённости МП претерпевают скачок, определяемый отношением магнитных проницаемостей сред:

$$H_{1n} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}} H_{2n}. \quad (3.45)$$

Направление вектора H на границе раздела двух сред изменяется

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{H_{2\tau} H_{1n}}{H_{2n} H_{1\tau}} = \frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (3.46)$$

3.7. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Под поляризацией ЭМВ понимают ориентацию в пространстве вектора напряжённости электрического поля \vec{E} (рис. 3.4). Плоскость, проходящая через вектор \vec{E} и направление распространения волны (вектор $\vec{\Pi}$), называют плоскостью поляризации, а плоскость, проходящую через векторы \vec{E} и \vec{H} , картинной плоскостью (рис. 3.4).

Если при распространении плоской волны изменение во времени вектора \vec{E} по величине и направлению не приводит к изменению ориентации плоскости поляризации в пространстве, то волна называется линейно поляризованной (рис. 3.5). При этом поляризация называется вертикальной, если плоскость поляризации перпендикулярна плоскости yOz . Поляризация называется горизонтальной, если плоскость поляризации параллельна плоскости yOz .

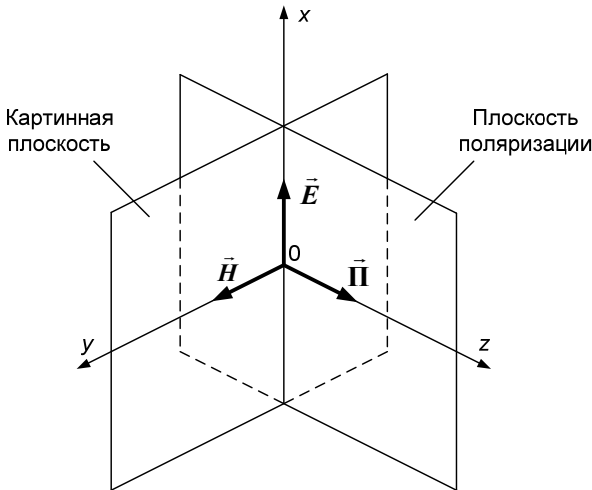


Рис. 3.4. Ориентация в пространстве вектора \vec{E}

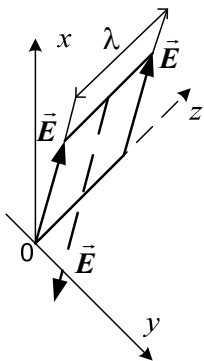


Рис. 3.5. Линейная поляризация

Другие случаи линейной поляризации описывают наклонную поляризацию. Она характеризуется углом наклона относительно плоскости xOy (рис. 3.5).

В тех случаях, когда пространственное положение плоскости поляризации изменяется, поляризация называется вращающейся.

Если вектор \vec{E} остаётся постоянным по величине, но вращается с угловой скоростью в картинной плоскости (перпендикулярной направлению распространения волны), то поляризация называется круговой. При этом волна считается волной правого вращения, если, смотря по направлению распространения волны, вектор \vec{E} поворачивается по часовой

стрелке. В другом случае (вращение против часовой стрелки), волна левой поляризации (рис. 3.6).

Если вектор \vec{E} за период изменяет свою амплитуду совместно с поворотом плоскости поляризации, волна называется эллиптически поляризованной (рис. 3.7).

Для создания различных видов поляризации ЭМВ можно использовать два взаимно перпендикулярные элементарные электрические вибраторы с токами I_1 и I_2 , которые могут отличаться по амплитуде и фазе (рис. 3.8).

Вектор \vec{E} имеет две составляющие E_x и E_y , которые могут иметь разные амплитуды и изменяются с некоторым фазовым сдвигом в зависимости от соотношения между амплитудами и фазами токов вибраторов I_1 и I_2 . Вектор \vec{H} при этом также имеет две составляющие H_x и H_y (на рис. 3.7 не показаны), связанные с E_x и E_y характеристическим

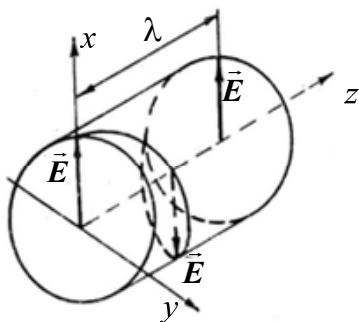


Рис. 3.6. Круговая поляризация

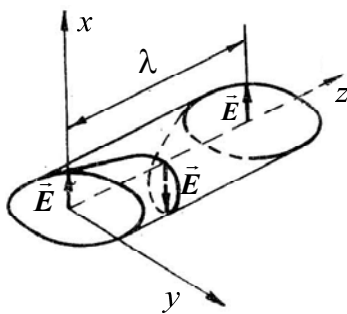


Рис. 3.7. Эллиптическая поляризация

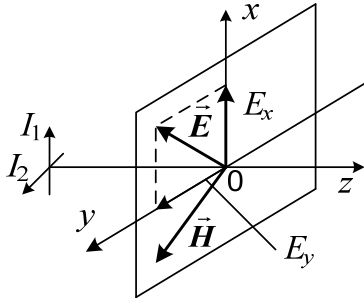


Рис. 3.8. Элементарные электрические вибраторы

сопротивлением. В общем случае выражение для вектора \vec{E} плоской волны в среде без потерь записывается в виде

$$E_x = E_{mx} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x); \quad (3.47)$$

$$E_y = E_{my} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y), \quad (3.48)$$

где φ_x и φ_y – начальные фазы составляющих напряжённости электрического поля E_x и E_y .

Обозначим $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$, тогда суммируя два колебания (3.47) и (3.48), возведя в квадрат обе части, получим

$$\left(\frac{E_y}{E_{my}} \right)^2 - 2 \left(\frac{E_y}{E_{my}} \right) \left(\frac{E_x}{E_{mx}} \right) \cos \varphi + \left(\frac{E_x}{E_{mx}} \right)^2 = \sin^2 \varphi. \quad (3.49)$$

Получили уравнение кривой второго порядка – эллипса, ориентация которого в плоскости xOy , определяется значением угла φ .

Если сдвиг фаз $\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pi/2$ и амплитуды колебаний равны между собой $E_{mx} = E_{my} = E_m$, то получим уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = E_m^2. \quad (3.50)$$

Для создания волны с круговой поляризацией можно использовать сумму двух линейно поляризованных колебаний равных амплитуд со сдвигом фаз $\pi/2$.

Если взять два колебания с разными амплитудами и фазовым сдвигом $\pi/2$, получим уравнение эллипса. Аналогично уравнение эллипса получается, если суммировать два линейно поляризованных колебания с одинаковыми амплитудами и фазовым сдвигом $0 < \varphi < \pi/2$.

Если сдвиг фаз $\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pi$, то получим уравнение прямой

$$\left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)^2 + 2\left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right) + \left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{E_y}{E_{my}} + \frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2 = 0,$$

$$E_x = -\frac{E_{mx}}{E_{my}} E_y. \quad (3.51)$$

Наклон E_x к оси x определяется соотношением амплитуд $\frac{E_{mx}}{E_{my}}$.

3.8. КЛАССИФИКАЦИЯ СРЕД ПО ИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ, ГРАНИЧНАЯ ЧАСТОТА

По своим электрическим свойствам среды характеризуются первичными электрическими параметрами: проводимость среды γ ; абсолютная диэлектрическая проницаемость среды ϵ_a ; абсолютная магнитная проницаемость среды μ_a . В зависимости от соотношений величин γ и ϵ_a среды делят на: диэлектрики; полупроводники; проводники.

Характеристикой среды с проводимостью является комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость среды $\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a(1 - i\gamma/\omega\epsilon_a)$, и для классификации сред надо учитывать соотношение величин γ и $\omega\epsilon_a$. Если $\gamma \geq 10\omega\epsilon_a$ – проводник; $\gamma \leq 0,1\omega\epsilon_a$ – диэлектрик; $0,1\omega\epsilon_a \leq \gamma \leq 10\omega\epsilon_a$ – полупроводник.

Отношение проводимости среды γ к величине $\omega\epsilon_a$ называется тангенсом угла потерь

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\gamma}{\omega\epsilon_a}.$$

Класс среды может быть определён по тангенсу угла потерь: если $\operatorname{tg}\Delta > 10$ – проводник; $\operatorname{tg}\Delta < 0,1$ – диэлектрик; $0,1 < \operatorname{tg}\Delta < 10$ – полупроводник.

На большое число материалов, применяющихся при изготовлении радиокомпонентов, величины тангенса угла потерь приведены в справочной литературе.

Отсюда видно, что класс среды определяется не только первичными электрическими параметрами, но и частотой ЭМВ. Одна и та же среда при различных частотах может проходить весь диапазон классов сред (диэлектрики, полупроводники, проводники).

Иногда вводят понятие граничной частоты $\omega_{\text{гр}}$, т.е. частоты, при которой токи проводимости и смещения равны:

$$|j_{\text{пр}}| = |j_{\text{см}}|;$$

$$|\gamma \dot{E}_m| = \left| \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial t} \right| = |\omega \varepsilon_a \dot{E}_m| \Rightarrow \gamma = \omega \varepsilon_a \Rightarrow \omega_{\text{гр}} = \gamma / \varepsilon_a.$$

При $\omega > \omega_{\text{гр}}$ – диэлектрик ($\omega \geq 10\omega_{\text{гр}}$).

При $\omega \approx \omega_{\text{гр}}$ – полупроводник ($0,1\omega_{\text{гр}} \leq \omega \leq 10\omega_{\text{гр}}$).

При $\omega < \omega_{\text{гр}}$ – проводник ($\omega \leq 0,1\omega_{\text{гр}}$).

Граничная частота позволяет определить класс среды по частоте ЭМВ.

Коэффициент распространения в средах с проводимостью становится комплексной величиной и может быть представлен в алгебраической $\dot{k} = \beta - i\alpha$ и показательной формах

$$\dot{k} = |\dot{k}| e^{-i\psi}, \quad (3.52)$$

причём

$$|\dot{k}| = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}, \quad (3.53)$$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta}, \quad (3.54)$$

поэтому представляется необходимым выразить коэффициент фазы β и коэффициент затухания α через параметры среды ε_a , μ_a , α .

Для коэффициентов затухания и фазы имеют место следующие выражения:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} + 1 \right]; \quad (3.55)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} - 1 \right]. \quad (3.56)$$

В идеальном диэлектрике проводимость $\gamma = 0$. Подставляя $\gamma = 0$ в формулу (3.56), находим $\alpha = 0$,

$$k = \beta = \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}.$$

Среды с потерями. Среды с потерями ($\gamma \neq 0$), в свою очередь, распределяются на диэлектрические, проводящие и среды, занимающие промежуточное положение.

Диэлектрические среды. $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \ll 1$ и тем более $\left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 \ll 1$,

поэтому (3.55) можно упростить, пренебрегая величиной $\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}$. В этом случае коэффициент фазы будет определяться выражением

$$\beta \cong \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}. \quad (3.57)$$

Однако такое же упрощение для нахождения α (3.56) неприемлемо, так как обращает его в нуль, т.е. исключается возможность учёта потерь на протяжённых линиях радиосвязи. Более строгим подходом к реальному учёту потерь в распространяющихся волнах будет использование разложения

$\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2}$ в степенной ряд, в котором достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 + \dots \quad (3.58)$$

С учётом (3.58) формула (3.56) приобретает вид

$$\alpha \cong \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \quad (3.59)$$

Величина фазового сдвига соответственно будет определяться выражением

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{2\omega \varepsilon_a} \cong \frac{\gamma}{2\omega \varepsilon_a}. \quad (3.60)$$

Проводящие среды. $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \gg 1$, $\left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 \gg 1$. В этом случае

выражения (3.55) и (3.56) приобретают вид:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} + 1 \right] = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} ; \quad (3.61)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} - 1 \right] = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} ; \quad (3.62)$$

$$\alpha \cong \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}} ; \quad (3.63)$$

$$|k| \cong \sqrt{\omega \mu_a \gamma} ; \quad (3.64)$$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} \cong \arctg 1 \cong \frac{\pi}{4} . \quad (3.65)$$

Среды, занимающие промежуточное положение (полупроводники). Для полупроводников коэффициенты фазы и затухания определяются по полным формулам (3.55) и (3.56).

Таким образом, при рассмотрении распространения электромагнитных волн в конкретной среде необходимо определить класс среды (диэлектрик, проводник или полупроводник) по величине $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a}$, так как

одна и та же среда с потерями может относиться к разным классам для электромагнитных волн разных частот.

В средах с потерями волновое сопротивление становится комплексной величиной

$$\dot{Z} = \frac{\omega \mu_a}{k} = \frac{\omega \mu_a}{|k|} e^{i\psi} . \quad (3.66)$$

С учётом формул (3.66), (3.56) и (3.59) волновое сопротивление для диэлектрических сред равно

$$Z \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} . \quad (3.67)$$

С учётом формул (3.66), (3.61) и (3.62) волновое сопротивление для проводящих сред равно

$$Z \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}} . \quad (3.68)$$

Напряжённость электрического поля ЭМВ изменяется по закону

$$E_m = E_{m_0} e^{-\alpha z}, \quad (3.69)$$

где z – расстояние, которое проходит ЭМВ.

Затухание волны в децибелах

$$N_{[\text{дБ}]} = 20 \lg \frac{E_{m_n}}{E_{m_k}} = 20 \lg e^{\alpha z}, \quad (3.70)$$

где E_{m_n} и E_{m_k} – напряжённость электрического поля ЭМВ в начальной точке излучения и в точке наблюдения.

3.9. ФАЗОВАЯ И ГРУППОВАЯ СКОРОСТИ, ДЛИНА ВОЛНЫ

Фазовая скорость плоской электромагнитной волны в средах с потерями. Фазовая скорость плоской электромагнитной волны в средах с потерями определяется коэффициентом фазы и зависит от частоты электромагнитных колебаний (рис. 3.9)

$$v_\phi = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\frac{\mu_a \epsilon_a}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} + 1 \right]}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_a \epsilon_a} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a} \right)^2} + 1 \right]}. \quad (3.71)$$

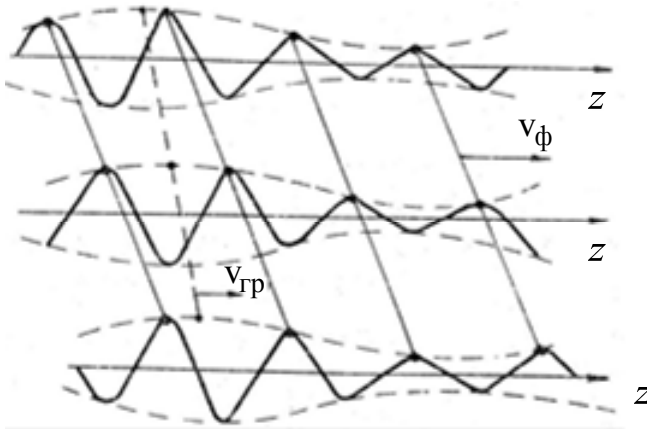


Рис. 3.9. Фазовая и групповая скорости

Зависимость фазовой скорости гармонических волн от их частоты называется дисперсией, поэтому в средах с потерями имеет место дисперсия.

Групповая скорость. В средах с потерями или в других условиях, например, в волноводных линиях передачи, фазовая скорость зависит от частоты электромагнитных колебаний, т.е. имеет место дисперсия. Проходя один и тот же путь, гармонические волны, составляющие единый пакет волн реального сигнала, получают различные фазовые сдвиги, что ведёт к искажению формы самого сигнала. Очевидно, чем уже спектр сигнала, тем меньше разница между фазовыми скоростями гармонических составляющих сигнала, тем меньше его искажение.

Для характеристики перемещения энергии какого-либо сигнала, относящегося к узкополосным сигналам, вводят понятие групповой скорости сигнала, понимая под этим скорость перемещения максимума огибающей этого сигнала (рис. 3.8)

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\beta'(\omega)} = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)}. \quad (3.72)$$

В средах без потерь ($\gamma = 0$) $\beta = k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$, поэтому групповая скорость совпадает с фазовой

$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\beta'(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}. \quad (3.73)$$

В средах с потерями фазовая и групповая скорости не совпадают, но связаны между собой (рис. 3.8). Для установки этой связи продифференцируем выражение (3.72) по частоте

$$\beta \frac{dv_{\phi}}{d\omega} + v_{\phi} \frac{d\beta}{d\omega} = 1 \quad \text{или} \quad \beta \frac{dv_{\phi}}{d\omega} + \frac{v_{\phi}}{v_{\text{гр}}} = 1, \quad (3.74)$$

из которого получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{v_{\phi}}{1 - \beta \frac{dv_{\phi}}{d\omega}}. \quad (3.75)$$

Соотношение (3.75) показывает, что в средах с аномальной дисперсией $\left(\frac{dv_{\phi}}{d\omega} > 0\right)$, к которым относятся однородные изотропные среды с потерями, групповая скорость больше фазовой, в то время как в средах или в условиях с нормальной дисперсией $\left(\frac{dv_{\phi}}{d\omega} < 0\right)$ она меньше фазовой скорости электромагнитных колебаний.

$$\lambda = 2\pi/\beta. \quad (3.76)$$

3.10. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

Явление концентрации электромагнитного поля и вызванного им высокочастотного тока у поверхности проводника получило название поверхностного эффекта.

Полезным проявлением этого эффекта является возможность применения проводников для экранирования различных радиоустройств и защиты человека от электромагнитных излучений. Однако поверхностный эффект приводит к возрастанию активного сопротивления проводника при протекании высокочастотного тока в нём.

При этом речь ведут о глубине проникновения δ ЭМВ в материал, которая определяется как глубина проводника, на которой уровень напряжённости поля уменьшается в e раз от исходного, тогда

$$\delta = 1/\alpha. \quad (3.77)$$

Под действием электрического поля волны в проводнике протекает ток проводимости, причём амплитуда его плотности и амплитуда электрического поля волны убывают по экспоненциальному закону с увеличением расстояния вглубь проводника, в котором $\beta \cong \alpha$:

$$\dot{\mathbf{j}}_m \cong \gamma \bar{\mathbf{E}}_m e^{-\alpha(1+i)\xi}. \quad (3.78)$$

Поверхностное сопротивление

$$\dot{Z}_s = \frac{E_m}{j_{sm}} = \frac{\alpha}{\gamma} + i \frac{\alpha}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} + i \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} = R_s + iX_s. \quad (3.79)$$

Очевидно, что сравнивать потери в проводнике при протекании в нём токов высокой частоты и постоянного тока можно только по величинам погонных сопротивлений для высокочастотных токов и постоянного тока.

Погонное сопротивление постоянному току определяется

$$R_{оп} = \frac{l}{\gamma S}. \quad (3.80)$$

Активное погонное сопротивление проводника при протекании в нём высокочастотных токов

$$R_f = \frac{R_s}{l} = \frac{\sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}}}{l}. \quad (3.81)$$

Для уменьшения погонного сопротивления проводников, применяемых для монтажа радиоаппаратуры, используются высокопроводящие металлы, из которых наиболее употребительна медь. Кроме того, применяются все меры к увеличению поперечного размера l . Это достигается изготовлением и применением многожильных проводов, нанесением сравнительно широких, но тонких полос проводника на диэлектрическую основу плат.

Вредное воздействие электромагнитного поля оценивается энергией нагрева. Поэтому более вредное воздействие оказывают ЭМП более высоких частот. Для защиты организма от вредного воздействия такого поля применяют специальные экранирующие костюмы из медной проволоки. Необходимо помнить, что энергия ЭМП сильно убывает с расстоянием.

3.11. ПАДЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭМВ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Будем считать, что плоскость раздела есть граница раздела двух однородных изотропных сред с параметрами $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \gamma_1$ и $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \gamma_2$. Единичный вектор нормали \vec{n}_0 к плоскости S направлен из второй среды в первую (рис. 3.10).

Первый и второй законы Снеллиуса:

$$\theta_3 = \theta_1; \tag{3.82}$$

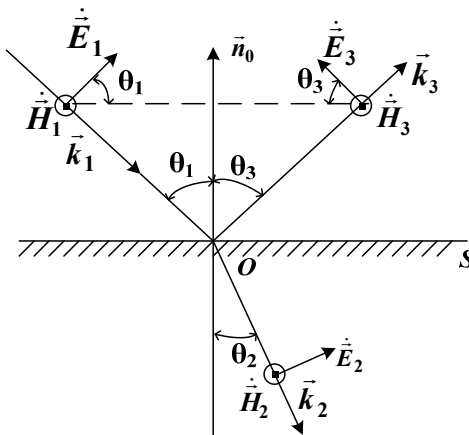


Рис. 3.10. Падение вертикально поляризованной волны на границу раздела двух сред

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{N_1}{N_2}, \quad (3.83)$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ – углы падения, преломления и отражения соответственно; N_1 и N_2 – показатели преломления сред.

В общем случае направление вектора падающей волны $\dot{\vec{E}}_1$ (рис. 3.10) может быть произвольным, но он всегда разложен на составляющую, лежащую в плоскости падения, и составляющую, перпендикулярную ей (или составляющую, лежащую в плоскости S):

1. Вектор $\dot{\vec{E}}_1$ (рис. 3.10) лежит в плоскости падения (считаем волну вертикально поляризованной). Вектор $\dot{\vec{H}}_1$ соответственно перпендикулярен $\dot{\vec{E}}_1$ и, значит, параллелен S .

Коэффициенты Френеля для волн вертикальной поляризации:

$$R_{\parallel} = \frac{N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2}; \quad (3.84)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2},$$

где R_{\parallel} и T_{\parallel} – коэффициенты Френеля для вертикально поляризованной отражённой и преломлённой волн.

2. Вектор $\dot{\vec{E}}_1$ лежит (рис. 3.11) в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (считаем волну горизонтально поляризованной).

Коэффициенты Френеля для волн горизонтальной поляризации:

$$R_{\perp} = \frac{N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}; \quad (3.85)$$

$$T_{\perp} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2},$$

где R_{\perp} и T_{\perp} – коэффициенты Френеля отражённой и преломлённой волн для случая горизонтальной поляризации вектора $\dot{\vec{E}}_1$.

Показатель преломления среды – отношение скорости распространения ЭМВ в свободном пространстве к скорости распространения в среде.

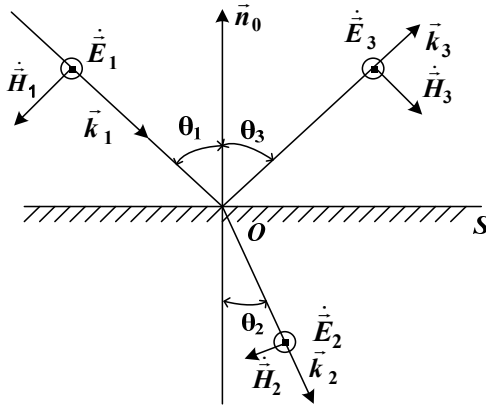


Рис. 3.11. Падение горизонтально поляризованной волны на границу раздела двух сред

Для идеальных диэлектриков $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}$, $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}}$, кроме того, для большинства диэлектриков можно считать $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$, т.е.

$$N = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\varepsilon_a\mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.86)$$

Для идеальных диэлектриков можно записать волновое сопротивление

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}. \quad (3.87)$$

Учитывая (3.86) и (3.87), можно показать, что

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2}, \quad \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (3.88)$$

Амплитуда напряжённости электрического поля

$$E_m(z) = E_{m0}e^{-\alpha z}, \quad (3.89)$$

где E_{m0} – напряжённость поля падающей ЭМВ E_1 непосредственно у границы раздела двух сред; z – расстояние прохождения электромагнитной волны; α – коэффициент затухания

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} - 1 \right]}. \quad (3.90)$$

Плотность потока мощности ЭМВ, падающей на 1 м^2 поверхности раздела:

$$\Pi_{\text{пад}} = \frac{E_{m_1}^2}{2Z_1}, \quad (3.91)$$

где E_{m_1} – амплитуда напряжённости поля падающей волны; Z_1 – волновое сопротивление первой среды.

Плотность потока мощности ЭМВ, отражённой от 1 м^2 поверхности раздела:

$$\Pi_{\text{отр}} = \frac{E_{m_3}^2}{2Z_1}, \quad (3.92)$$

где E_{m_3} – амплитуда напряжённости поля отражённой волны.

Поэтому

$$\frac{\Pi_{\text{отр}}}{\Pi_{\text{пад}}} = R_{\parallel}^2 \quad (3.93)$$

есть квадрат коэффициента Френеля.

Плотность потока мощности ЭМВ, прошедшей во вторую среду через 1 м^2 поверхности:

$$\Pi_{\text{прел}} = \frac{E_{m_2}^2}{2Z_2}, \quad (3.94)$$

где E_{m_2} – амплитуда напряжённости поля преломлённой волны; Z_2 – волновое сопротивление воды. Поэтому

$$\frac{\Pi_{\text{прел}}}{\Pi_{\text{пад}}} = \frac{Z_1}{Z_2} T_{\parallel}^2, \quad (3.95)$$

где T_{\parallel}^2 – квадрат коэффициента преломления Френеля.

3.12. ЯВЛЕНИЕ ПОЛНОГО ПРЕЛОМЛЕНИЯ, УГОЛ БРЮСТЕРА

При определённых условиях может наблюдаться явление полного преломления. Угол падения $\theta_1 = \theta_0$, при котором наблюдается это явление, называется углом Брюстера.

В случае полного преломления (нет отражения) R_{\parallel} и R_{\perp} должны быть равны нулю:

$$N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2 = 0 ; \quad (3.96)$$

$$N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2 = 0 . \quad (3.97)$$

Одновременно эти равенства удовлетворяются не могут. Значит, явление полного преломления может наблюдаться либо при горизонтальной, либо при вертикальной поляризации. Но при условии $N_1 < N_2$ должно быть $\cos \theta_2 > \cos \theta_1$, $\sin \theta_2 < \sin \theta_1$ (из 2-го закона Снеллиуса), поэтому будет выполняться только первое из двух равенств. Следовательно явление полного преломления существует лишь при вертикальной поляризации падающей волны. Угол падения $\theta_1 = \theta_0$, при котором наблюдается это явление, называется углом Брюстера

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{N_2}{N_1} . \quad (3.98)$$

В оптике этот угол называют углом полной поляризации на том основании, что если на границу раздела падает произвольно поляризованная волна под углом, то отражённая волна будет горизонтально поляризованной, так как вертикально поляризованная компонента поля падающей волны полностью проходит во вторую среду. Физическое объяснение представлено на рис. 3.12.

Из выражения (3.96)

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_0 N_2 / N_1 = \cos \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0 = \sin \theta_0 . \quad (3.99)$$

Согласно формулам приведения это может быть, если $\theta_0 + \theta_2 = \pi / 2$. Это позволяет дать простое физическое объяснение. Под действием электрического поля преломлённой волны молекулы диэлектрика 2-й среды становятся источником вторичных ЭМВ. Каждая из молекул представляет собой элементарный электрический диполь (вibrator), момент которого направлен вдоль k_2 , а ось вибратора будет направлена вдоль k_3 . Однако известно, что вдоль своей оси элементарный вибратор (диполь) не излучает.

При горизонтальной поляризации падающей волны, как видно из (3.97) при любом θ_1 $N_2 \cos \theta_2 > N_1 \cos \theta_1$, $R_{\perp} < 0$.

Параллельно поляризованная волна при переходе через угол Брюстера меняет фазу на π . При этом модуль коэффициента Френеля меняется скачком (рис. 3.13).

Перпендикулярно поляризованная волна во всём диапазоне углов падения фазы не меняет. Модуль коэффициента Френеля для отражённой волны плавно возрастает. Фаза коэффициента Френеля при этом составляет π (рис. 3.13).

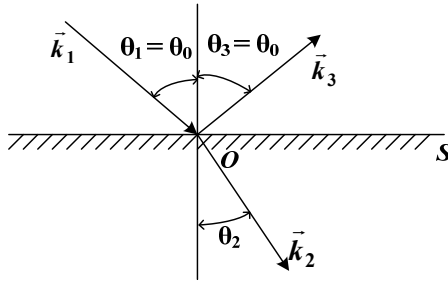


Рис. 3.12. Произвольно поляризованная волна

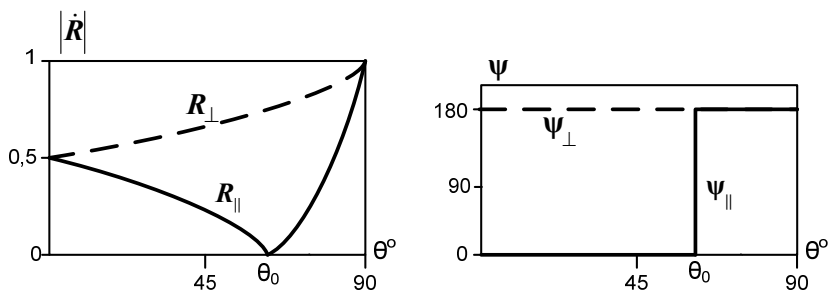


Рис. 3.13. Модуль и фаза коэффициентов Френеля

Поэтому волна с горизонтальной поляризацией чаще используется в тех случаях, когда возможны отражения от поверхности в широком диапазоне углов падения.

3.13. ПОЛНОЕ ВНУТРЕННЕЕ ОТРАЖЕНИЕ, КРИТИЧЕСКИЙ УГОЛ

Рассмотрим случай, когда $N_1 > N_2$ (рис. 3.14).

Обратимся ко 2-му закону Снеллиуса

$$\sin \theta_2 = \frac{N_1}{N_2} \sin \theta_1. \quad (3.100)$$

Вводим критический угол $\theta_{кр} = \theta_1$, при котором $\theta_2 = \pi/2$. Угол преломления будет больше, так как $N_1 > N_2$, поэтому при некотором $\theta_1 = \theta_{кр}$ угол станет равным $\pi/2$, т.е. преломлённая волна будет скользить вдоль поверхности раздела. Это явление поверхностного отражения. Однако при этом коэффициенты преломления $T_{\parallel} \neq 0$ и $T_{\perp} \neq 0$.

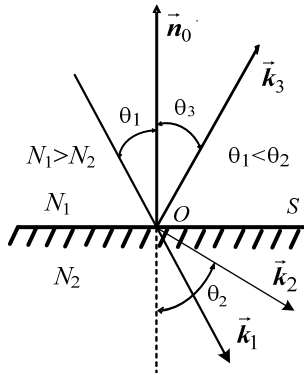


Рис. 3.14. Полное внутреннее отражение

При $\theta_1 > \theta_{кр}$ падающая ЭМВ будет полностью отражаться. Коэффициенты преломления $T_{\parallel} = 0$ и $T_{\perp} = 0$, а коэффициенты отражения $R_{\parallel} = 1$ и $R_{\perp} = 1$.

Данное явление применяется в волоконно-оптических кабелях, в которых распространяется поверхностная волна с отражением от внешней границы волокна. Применением оптических волокон обеспечивается замена электрических кабелей, высокая пропускная способность проводного канала связи, малое затухание, отсутствие электрических напряжений (электропобезопасность).

Нормальное падение плоской ЭМВ на границу раздела двух сред

В этом случае $\theta_1 = 0$ (рис. 3.15). Углы отражения и преломления из законов Снеллиуса также равны нулю. Векторы $\dot{\vec{E}}_1$ и $\dot{\vec{H}}_1$ лежат в плоскости S.

Подставляя $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ в (3.84) и (3.85), получим:

$$T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{2N_1}{N_1 + N_2}; \quad -R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}. \quad (3.101)$$

Учитывая связь между показателями преломления и волновым сопротивлением сред $N_2 / N_1 = Z_1 / Z_2$, можно записать:

$$T_{\perp} = -T_{\parallel} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}; \quad R_{\perp} = -R_{\parallel} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (3.102)$$

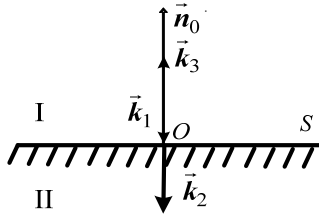


Рис. 3.15. Нормальное падение ЭМВ на границу раздела двух сред

При $Z_2 = Z_1$ отсутствует отражение, т.е. имеет место так называемый «режим согласования сред».

Контрольные вопросы

1. Что собой представляет электромагнитное поле?
2. Граничные условия для векторов электрического поля.
3. Граничные условия для векторов магнитного поля.
4. Методика определения вида поляризации.
5. Методика расчёта вектора Пойтинга.
6. Условие получения линейной поляризации.
7. Условие получения круговой поляризации.
8. Условие получения эллиптической поляризации.
9. Сформулируйте законы Снеллиуса.
10. Что показывают коэффициенты Френеля?
11. Дайте определение показателя преломления среды.
12. Поясните сущность эффекта полного преломления.
13. Каковы условия проявления эффекта полного преломления?
14. Поясните сущность эффекта полного внутреннего отражения. Каковы условия проявления этого эффекта?
15. Что такое поверхностная волна?
16. От чего зависит фазовая скорость распространения ЭМВ?

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭМВ

4.1. ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ПРОЦЕССА ИЗЛУЧЕНИЯ ЭМВ В СВОБОДНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Физическая сущность процесса излучения ЭМВ в свободное пространство вытекает из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (4.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Сами уравнения подводят нас к пониманию того, что ток связанных зарядов может циркулировать в диэлектрике и свободном пространстве в виде тока смещения. При этом в отношении образования магнитного поля ток смещения играет такую же роль, что и ток проводимости. Это означает, что любой диэлектрик и свободное пространство можно условно считать проводником тока смещения.

Из большого разнообразия схем источников тока смещения рассмотрим самую простую схему, состоящую из конденсатора, питаемого источником переменной ЭДС (рис. 4.1). Электрическое поле, формируемое такой системой, изображено на рис. 4.2.

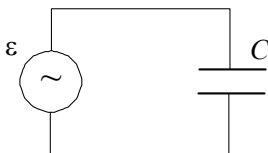


Рис. 4.1. Источник тока смещения

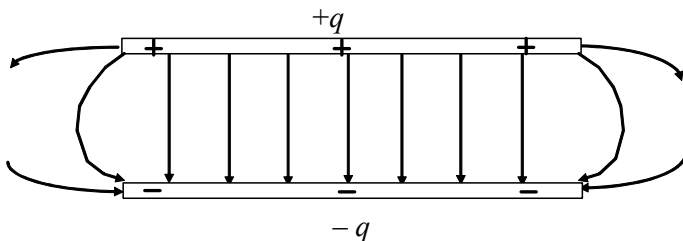


Рис. 4.2. Электрическое поле конденсатора

Считая источник (рис. 4.2), питающий конденсатор, переменным, можем сделать вывод, что и сформированное поле – переменное, которому соответствует ток смещения с плотностью

$$\vec{j}_{\text{см}} = +\epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (4.3)$$

Пространство, окружающее конденсатор, обладает способностью проводить ток смещения, часть которого может ответвляться в окружающее пространство. Часть ответвляющегося тока остаётся связанной с конденсатором, а часть – отрывается от него и уходит в окружающее пространство, образуя свободно распространяющиеся токи смещения. Эти токи, которым соответствует переменное во времени электрическое поле и связанное с ним магнитное поле, формируют излучаемую радиоволну.

Примером излучателя, в котором свободная часть электромагнитного поля значительно больше связанной части, может являться устройство следующего вида: пластины рассмотренного конденсатора развёрнуты на 90° (рис. 4.3). Именно такая макроскопическая модель была рассмотрена Г. Герцем в 1888 г. как излучающая электромагнитные волны система (рис. 4.4).

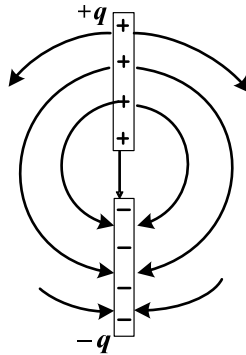


Рис. 4.3. Пластины конденсатора

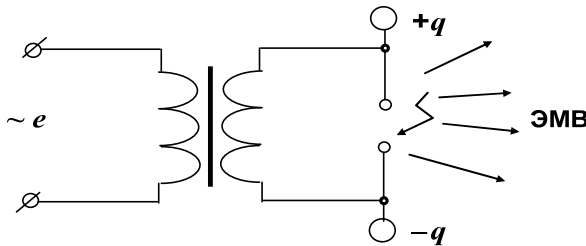


Рис. 4.4. Макроскопическая модель системы, излучающей ЭМВ

4.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВИБРАТОР

Рассмотрим отрезок проводника, вдоль которого течёт ток

$$\dot{I} = I_m e^{i\omega t}. \quad (4.4)$$

Известная существующая связь между токами и зарядами позволяет записать

$$\dot{q} = q_m e^{i\omega t}. \quad (4.5)$$

Если по проводнику конечной длины течёт ток I , то в соответствии с законом непрерывности (или законом сохранения заряда) этот ток порождает на концах проводника заряды q . Связь между I и q выглядит следующим образом

$$I = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial t}; \quad I_m e^{i\omega t} = -i\omega q_m e^{i\omega t}; \quad \rightarrow I_m = -i\omega q_m. \quad (4.6)$$

Это уравнение может быть записано иначе

$$q_m = \pm i \frac{I_m}{\omega}. \quad (4.7)$$

Отметим, что на всём отрезке, кроме его концов, заряды отсутствуют, на концах же сосредоточены равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку заряды.

Элементарный электрический вибратор линейный бесконечно тонкий проводник с неизменным по длине переменным током, длина которого существенно меньше длины волны λ ($l \ll \lambda$) (рис. 4.5). На практике толщина проводника также должна быть во много раз меньше длины волны.

Элементарный электрический вибратор – линейный бесконечно тонкий проводник с неизменным по длине переменным током, длина которого существенно меньше длины волны λ ($l \ll \lambda$) (рис. 4.5). На практике толщина проводника также должна быть во много раз меньше длины волны.

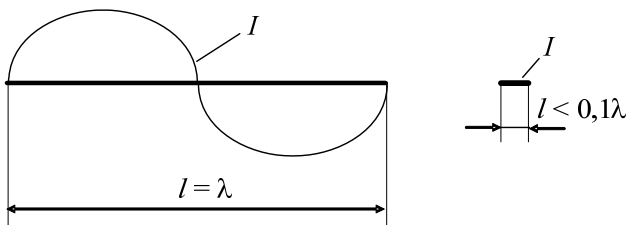


Рис. 4.5. Элементарный электрический вибратор

Обратимся к выражению (4.6). Можно записать его иначе

$$I_m = -i\omega q_m = \omega q_m e^{-i\frac{\pi}{2}}. \quad (4.8)$$

Из выражения (4.8) видно, что фаза тока «отстаёт» от фазы изменения заряда на $\pi/2$.

Элементарными излучателями являются также элементарная рамка (свёрнутый в кольцо вибратор) и поверхностный излучатель (элемент Гюйгенса). Их размеры по любой координате должны быть много меньше длины волны.

В теории антенн элементарный вибратор (ЭВ) представляет собой отрезок провода. Используя это понятие, можно описать большое количество типов антенн.

Электромагнитное поле элементарного электрического вибратора

Пусть в свободное неограниченное однородное изотропное пространство помещён элементарный электрический вибратор (ЭЭВ).

Надо определить поле, которое создаёт ЭЭВ в точке наблюдения M , не содержащей токи и заряды.

Поместим ЭЭВ в прямоугольную систему координат (рис. 4.6).

Уравнения Максвелла для точки M , не содержащей токи и заряды:

$$\text{rot}\dot{H}_m = i\omega\varepsilon_a\dot{E}_m; \quad (4.9)$$

$$\text{rot}\dot{E}_m = -i\omega\mu_a\dot{H}. \quad (4.10)$$

В результате решения уравнений (4.9) и (4.10) составляющие электромагнитного поля элементарного электрического вибратора в сферической системе координат (r, θ, ψ) будут иметь вид:

$$\dot{E}_{m\theta} = -i\frac{I_m l k^2}{4\pi\omega\varepsilon_a} \sin\theta \left(1 - \frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr}\right) \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.11)$$

$$\dot{E}_{mr} = \frac{I_m l k}{2\pi\omega\varepsilon_a} \cos\theta \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \frac{e^{-ikr}}{r^2}; \quad (4.12)$$

$$\dot{H}_{m\psi} = -i\frac{I_m l k}{4\pi} \sin\theta \left(1 - \frac{i}{kr}\right) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (4.13)$$

где I_m – амплитуда тока; l – длина элементарного вибратора; k – волновое число; θ – угол между осью вибратора и направлением на точку наблюдения; r – расстояние до точки наблюдения.

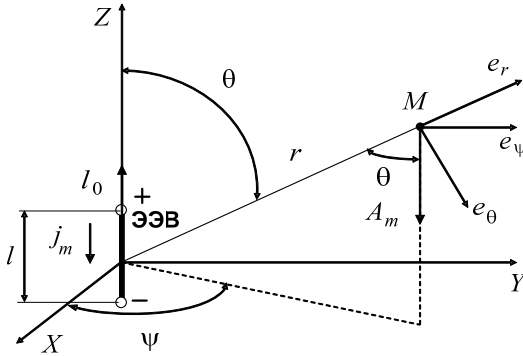


Рис. 4.6. Система координат для ЭМП ЭЭВ

Зоны ЭМП ЭЭВ

$kr \ll 1 \rightarrow r \leq (0,01 \dots 0,05)\lambda$ – ближняя зона.

$kr \approx 1 \rightarrow r \approx (0,05 \dots 1,60)\lambda$ – промежуточная зона.

$kr \gg 1 \rightarrow r \geq (1,6 \dots 2,5)\lambda$ – дальняя зона.

Ближняя зона (зона индукции)

Для ближней зоны $kr \ll 1$. В выражениях (4.11) – (4.13) слагаемые в скобках для компонент ЭМП

$$kr \ll 1, e^{-ikr} \rightarrow 1; \frac{1}{k^2 r^2} \gg \frac{i}{kr}, \frac{i}{kr} \rightarrow 1. \quad (4.14)$$

С учётом (4.14) выражения (4.11) – (4.13) примут вид для компонент ЭМП в ближней зоне:

$$\dot{E}_{m\theta} = -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta \left(-\frac{1}{k^2 r^2} \right) \frac{1}{r} = i \frac{I_m l}{4\pi\omega\epsilon_a r^3} \sin\theta; \quad (4.15)$$

$$\dot{E}_{mr} = \frac{I_m l k}{2\pi\omega\epsilon_a} \cos\theta \left(\frac{i}{kr} \right) \frac{1}{r^2} = i \frac{I_m l}{2\pi\omega\epsilon_a r^3} \cos\theta; \quad (4.16)$$

$$\dot{H}_{m\psi} = -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin\theta \left(-\frac{i}{kr} \right) \frac{1}{r} = \frac{I_m l}{4\pi r^2} \sin\theta. \quad (4.17)$$

Выводы

1. Силовые линии электрического поля \vec{E} синфазны между собой (множитель « i » эквивалентен начальной фазе $\pi/2$).

2. Силовые линии магнитного поля \vec{H} имеют сдвиг по фазе на $\pi/2$ относительно силовых линий электрического поля.

Модуль вектора Пойнтинга, пропорциональный произведению составляющих \vec{E} и \vec{H} , колеблется с двойной частотой, а его среднее значение за период равно нулю (рис. 4.7). Это свидетельствует о том, что энергия в течение четверти периода колебания поля движется от вибратора в пространство, а в следующую четверть периода возвращается обратно, т.е. в ближней зоне ЭМП «привязано» к вибратору и быстро (пропорционально $1/r^2$ и $1/r^3$) убывает с увеличением расстояния.

Можно считать (с учётом сделанных допущений), что энергия в этой зоне не переносится.

3. В ближней зоне наблюдается колебание энергии ЭМП (рис. 4.7).

Поскольку электрическое поле имеет радиальную и азимутальную компоненты, электрическое поле вибратора имеет силовые линии, вытянутые в форме окружностей (рис. 4.8).

Магнитное поле имеет только поперечную меридиональную компоненту. Поле такого вида называется электрическим или E -типа.

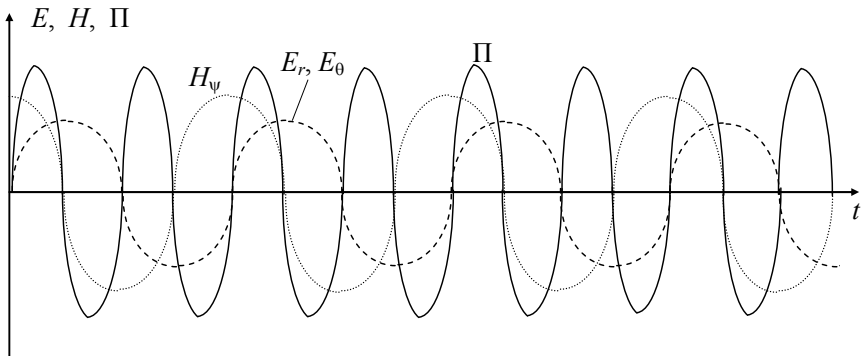


Рис. 4.7. ЭМП в ближней зоне

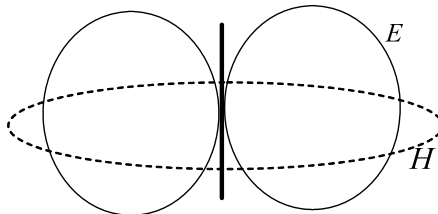


Рис. 4.8. Поле ЭЭВ в ближней зоне

Промежуточная зона

Для промежуточной зоны $kr \approx 1$. В этом случае формулы (4.11) – (4.13) для составляющих ЭМП упростить нельзя. Все слагаемые компонент в этом случае существенны. ЭМП носит сложный характер. В этой зоне переход энергии ЭМП из ближней в дальнюю. Это зона отрыва энергии.

Дальняя зона (зона излучения)

Для дальней зоны $kr \gg 1$. Зона излучения. В этом случае

$$\frac{1}{k^2 r^2} \rightarrow 0, \quad \frac{i}{kr} \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

С учётом (4.18) выражения (4.11) – (4.13) примут вид для компонент ЭМП в дальней зоне:

$$\dot{E}_{m\theta} = -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \sin\theta(1-0-0) \frac{e^{-ikr}}{r} = -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\epsilon_a\omega} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.19)$$

$$\dot{E}_{mr} = \frac{I_m l k}{2\pi\omega\epsilon_a} \cos\theta(1+0) \frac{e^{-ikr}}{r^2} = \frac{I_m l k}{2\pi\epsilon_a\omega} \cos\theta \frac{e^{-ikr}}{r^2}; \quad (4.20)$$

$$\dot{H}_{m\varphi} = -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin\theta(1-0) \frac{e^{-ikr}}{r} = -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.21)$$

Выводы

1. Радиальная составляющая ЭМП \dot{E}_{mr} изменяется в пространстве в r раз быстрее по сравнению с другими составляющими ЭМП (убывает). Поэтому в дальней зоне можно считать $\dot{E}_{mr} = 0$. Остаются только составляющие $H_{m\varphi}$ и $E_{m\theta}$:

$$\dot{E}_{m\theta} = -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\epsilon_a\omega} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.22)$$

$$\dot{H}_{m\varphi} = -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.23)$$

2. Силовые линии $\dot{H}_{m\varphi}$ и $\dot{E}_{m\theta}$ в дальней зоне синфазны (множитель « $-i$ »).

3. В дальней зоне осуществляется перенос ЭМЭ (рис. 4.9).

4. В дальней зоне существует составляющая ЭМП \vec{E}_θ , лежащая в плоскости, образованной точкой наблюдения и осью вибратора (рис. 4.10).

5. В дальней зоне существует составляющая ЭМП \vec{H}_ψ , лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вибратора (рис. 4.10).

Параметры ЭЭВ

1. Мощность и сопротивление излучения. Согласно теореме Умова–Пойнтинга запасённая ЭЭВ энергия расходуется на мощность потерь P_n и мощность излучения P_Σ

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P_n + P_\Sigma. \quad (4.24)$$

Под мощностью излучения понимают количество энергии, которую уносит излучённое поле в единицу времени

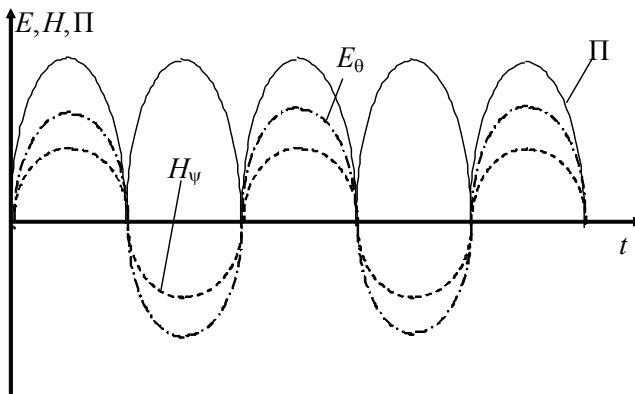


Рис. 4.9. Временная диаграмма поля ЭЭВ в дальней зоне

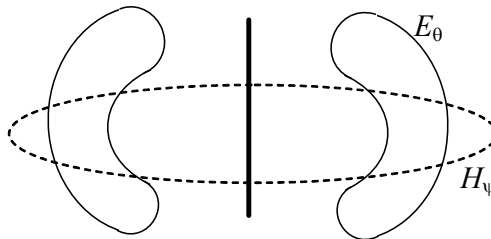


Рис. 4.10. Структура ЭМП ЭЭВ в дальней зоне

$$P_{\Sigma} = \oint \bar{\Pi}_{\text{cp}} dS, \quad (4.25)$$

где dS – элемент поверхности, окружающей ЭЭВ; $\bar{\Pi}_{\text{cp}}$ – среднее значение вектора плотности электромагнитной энергии

$$\bar{\Pi}_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{\Pi} dt = \frac{I_m^2 l^2 k^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_a r^2} \sin^2 \theta \bar{e}_r. \quad (4.26)$$

Для мощности излучения справедливо

$$P_{\Sigma} = \frac{I_m^2 l^2 k^3}{12\pi \omega \epsilon_a}. \quad (4.27)$$

Выражение для мощности излучения можно представить в виде

$$P_{\Sigma} = R_{\Sigma} \frac{I_m^2}{2}, \quad (4.28)$$

где R_{Σ} – сопротивление излучения вибратора

$$R_{\Sigma} = \frac{l^2 k^3}{6\pi \omega \epsilon_a}. \quad (4.29)$$

Для излучателя, находящегося в свободном пространстве:

$$R_{\Sigma} = \frac{l^2 k^3}{6\pi \omega \epsilon_0} = \frac{l^2 k^2 \cdot 2\pi}{6\pi \cdot 2\pi f \epsilon_0 \lambda} = \frac{l^2 k^2 f}{6\pi f \epsilon_0 c} = 20(lk)^2. \quad (4.30)$$

где lk – электрическая длина вибратора.

Понятие сопротивления излучения распространяется на любые устройства, излучающие ЭМВ. Зная сопротивление излучения и ток, можно найти мощность излучения, знание которой необходимо при расчётах линий радиосвязи и т.п.

2. Диаграмма направленности (ДН). *Диаграмма направленности излучателя – пространственное распределение ЭМП и плотности потока мощности в относительных единицах.*

Различают ДН по полю (по напряжённости электрического поля) $F(\theta, \psi)$ и по мощности $F^2(\theta, \psi)$. ДН бывают амплитудные и фазовые.

Амплитудные ДН определяются следующим образом:

$$F(\theta, \psi) = \frac{|\dot{E}_m(\theta, \psi)|}{|\dot{E}_m(\theta, \psi)|_{\max}}; \quad (4.31)$$

$$F^2(\theta, \psi) = \frac{|\dot{E}_m^2(\theta, \psi)|}{|\dot{E}_m^2(\theta, \psi)|_{\max}}. \quad (4.32)$$

Само по себе построение ДН в пространстве является довольно сложной задачей. Поэтому обычно рассматривают сечение поверхности ДН в главных плоскостях.

Так, для ЭЭВ по формулам (4.22) и (4.23) для компонент ЭМП вид сечения ДН в плоскостях будет следующим:

$$F(\theta, \psi)_{\psi=0} = F(\theta) = \sin \theta; \quad (4.33)$$

$$F^2(\theta, \psi)_{\psi=0} = F^2(\theta) = \sin^2 \theta. \quad (4.34)$$

В сферической системе координат эта функция «восьмёрка», в прямоугольной – «синус» (рис. 4.11).

В плоскости, перпендикулярной оси вибратора ($\theta = \pi/2$), ДН имеет вид окружности, радиус которой равен единице (рис. 4.12)

$$F(\theta, \psi)_{\theta=0} = F(\psi) = 1. \quad (4.35)$$

В результате общий вид ДН ЭЭВ имеет вид «бублика» (рис. 4.13).

Ширина диаграммы направленности (ШДН) определяет угловой сектор, в котором концентрируется некоторая определённая часть излучаемой мощности.

Обычно ширина ДН по мощности определяется по уровню 0,5, что соответствует угловому сектору, в котором сосредоточено 50% излучаемой мощности.

Уровень 0,5 по мощности соответствует уровню 0,707 по напряжённости. По рисунку 4.11 имеется возможность определить ширину диаграммы направленности графическим способом на уровне 0,707.

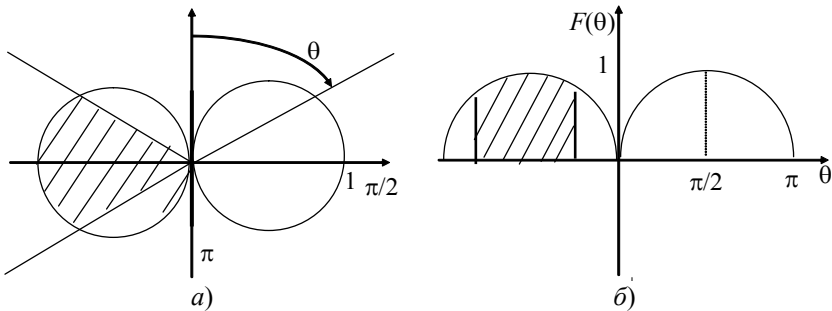


Рис. 4.11. ДН по θ в полярных (а) и прямоугольных (б) координатах

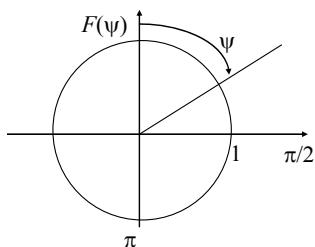


Рис. 4.12. ДН по ψ

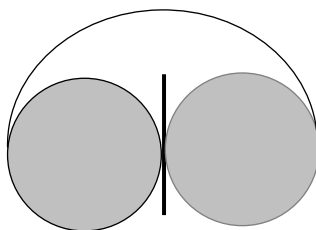


Рис. 4.13. Объёмная ДН ЭЭВ

3. Коэффициент направленного действия (КНД). КНД – отношение плотности потока мощности $P(\theta, \psi)$, создаваемой в этом направлении данной антенной, к плотности потока мощности P_0 , создаваемой в этом же направлении эталонной антенной (ненаправленной) при условии равенства полных мощностей излучения антенн

$$D(\theta, \psi) = \frac{P(\theta, \psi)}{P_0}. \quad (4.36)$$

Когда сравнивают антенны, обычно берут D_0 – КНД в направлении максимумов. Чем больше КНД, тем больше напряжённость поля в направлении максимума излучения при заданной мощности излучения.

$$D_0 = \frac{4\pi}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \sin \theta d\psi d\theta} = 1,5. \quad (4.37)$$

ЭЭВ по сравнению с изотропным излучателем в полтора раза эффективней.

4.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ РАМКИ

Магнитная элементарная рамка

В качестве второго источника ЭМВ рассмотрим рамочную антенну. Она представляет собой виток провода той или иной формы, по которому течёт переменный ток (рис. 4.14). В этом случае вокруг рамки образуется ЭМП, изучение которого и является конечной целью решения задачи.

Для упрощения её решения будем считать, что рамка является элементарной. Математически это означает, что толщина и длина витка рамки существенно меньше длины волны λ . Для рамки круглой формы радиусом a

$$l = 2\pi a \ll \lambda \quad \text{или} \quad l < 0,1\lambda.$$

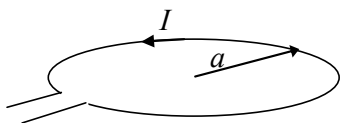


Рис. 4.14. Элементарная магнитная рамка

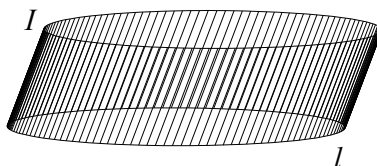


Рис. 4.15. Распределение тока по длине рамки

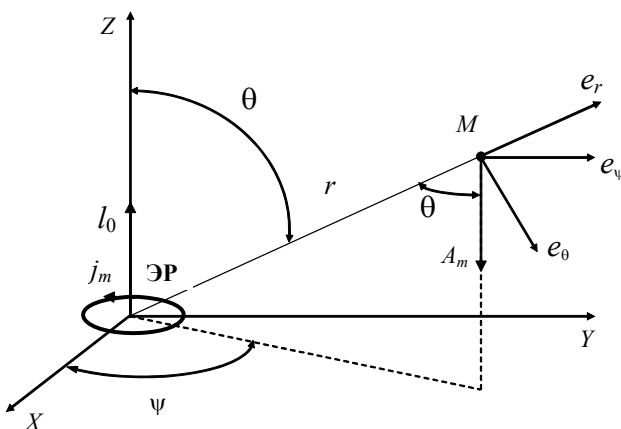


Рис. 4.16. Магнитная рамка в сферической системе координат

В этом случае распределение переменного тока по длине рамки в фиксированный момент времени близко к равномерному (рис. 4.15).

Для нахождения поля элементарной рамки (ЭР) можно было воспользоваться тем же подходом, что и для ЭЭВ. Однако это требует проведения громоздких преобразований, связанных с вычислением операции *ротор* в различных системах координат (чаще сферической) (рис. 4.16).

В дальнейшем для решения задачи нахождения ЭМП элементарной рамки удобно использовать принцип перестановочной двойственности.

Принцип перестановочной двойственности и его применение для нахождения ЭМП элементарной рамки

Известно, что источниками электромагнитного поля являются электрические токи и заряды. Однако структура уравнений Максвелла, их симметричность приводит к мысли о существовании в природе магнитных зарядов и магнитных токов. История даже знает попытки их обнаружить опытным путём.

Несмотря на отсутствие магнитных зарядов и токов, их формальное введение во многих случаях оказывается полезным, позволяя упростить

математические выводы по определению напряжённости электромагнитного поля, т.е. решение какой-то электродинамической задачи может быть найдено не при помощи использования системы уравнений Максвелла, а путём введения формальных перестановок в решение какой-то известной задачи, симметричной в некотором смысле по отношению к первой.

Попытаемся найти обоснование такой симметрии.

Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд полей в изотропной среде без потерь имеет вид

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{j}}_m^{\text{э}} + i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m; \quad (4.38)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m. \quad (4.39)$$

Осуществим формальный переход и представим себе, что нет токов электрических, а есть только токи магнитные, которые наряду с переменным магнитным током ($-j\omega\mu_a \vec{H}$) порождают электрическое поле. Тогда уравнения Максвелла для комплексных амплитуд принимают вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{j}}_m^{\text{M}} - i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m; \quad (4.40)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \varepsilon_a \dot{\vec{E}}_m, \quad (4.41)$$

где $\dot{\vec{j}}_m^{\text{M}}$ – комплексная амплитуда вектора плотности стороннего магнитного тока, определяемая так же, как и в случае электрического тока.

Сравнивая системы уравнений (4.38), (4.39) и (4.40), (4.41), замечаем, что система (4.38), (4.39) может быть получена из системы (4.40), (4.41) путём введения следующих перестановок:

$$\vec{H} \rightarrow \vec{E}; \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{H}; \quad \varepsilon_a \leftrightarrow \mu_a; \quad \vec{j}^{\text{э}} \rightarrow -\vec{j}^{\text{M}}. \quad (4.42)$$

Таким образом, сущность принципа перестановочной двойственности состоит в следующем: если известны решения системы уравнений Максвелла при заданных значениях сторонних электрических токов, то эти решения после проведения соответствующих перестановок будут справедливы и для системы уравнений при соответственно заданных значениях сторонних магнитных токов. Для перехода от одной системы решений к другой необходимо воспользоваться системой (4.42).

Используем этот принцип при расчёте поля элементарной рамки.

ЭМП элементарной рамки. Ранее было получено поле элементарного электрического вибратора. Для определения ЭМП элементарного магнитного вибратора используем перестановки (4.42) в соответствии с принципом перестановочной двойственности.

Выпишем выражения для компонент электромагнитного поля элементарного электрического вибратора в дальней зоне:

$$\dot{E}_{m\theta} = -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\epsilon_a \omega} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (4.43)$$

$$\dot{H}_{m\varphi} = -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.44)$$

Теперь воспользуемся принципом перестановочной двойственности. В систему (4.43), (4.44) подставим (4.42) и получим уравнения для ЭМП элементарной рамки, выраженные для фиктивного магнитного тока:

$$\dot{H}_{m\theta} = +i \frac{I_m^M l k^2}{4\pi\omega\mu_a} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.45)$$

$$\dot{E}_{m\varphi} = -i \frac{I_m^M l k}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.46)$$

Теперь необходимо определить связь между реальным током проводимости I_m и фиктивным магнитным током I_m^M . Для этого заменим элементарную рамку эквивалентным магнитным диполем (так же формально), создающим в данной точке пространства ЭМП такой же величины, что и рамка с электрическим током. Эти два устройства в силу эквивалентности должны обладать одинаковыми магнитными моментами.

Магнитный момент элементарной рамки (модуль)

$$m_0 = \mu_a S I_m, \quad (4.47)$$

где S – площадь рамки.

Магнитный момент магнитного диполя

$$m_0^M = -i \frac{I_m^M l}{\omega}, \quad (4.48)$$

где I_m^M – фиктивный ток.

С учётом уравнений (4.47) и (4.48) связь между I_m и I_m^M выглядит следующим образом:

$$I_m S = -i \frac{I_m^M l}{\omega\mu_a}. \quad (4.49)$$

Тогда

$$I_m^M = -i \frac{I_m S \omega \mu_a}{l}. \quad (4.50)$$

Подставляя (4.50) в уравнения (4.45) и (4.46), можно найти компоненты ЭМП, создаваемого элементарной рамкой в дальней зоне:

$$\dot{H}_{m\theta} = \frac{I_m S k^2}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.51)$$

$$\dot{E}_{m\psi} = -\frac{I_m S k}{4\pi} \omega \mu_a \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.52)$$

Выводы

1. Электрическое и магнитное поля элементарной рамки в дальней зоне убывают пропорционально $1/r$, в пространстве взаимно перпендикулярны, изменяются противофазно. Вектор Пойнтинга за период не изменяет своего знака, следовательно, имеет место излучение (перенос) электромагнитной энергии (рис. 4.17).

2. Силовые линии электрического поля лежат в плоскости, содержащей рамку (рис. 4.18).

3. Силовые линии магнитного поля лежат в плоскости, содержащей ось рамки и точку наблюдения (рис. 4.18).

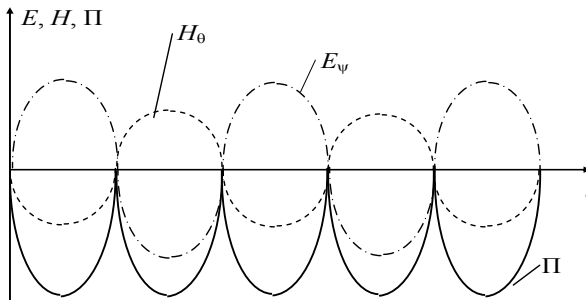


Рис. 4.17. Временная диаграмма поля элементарной магнитной рамки в дальней зоне

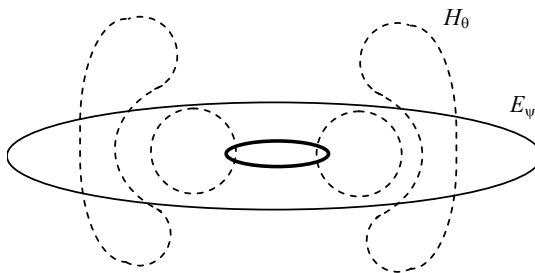


Рис. 4.18. Структура ЭМП элементарной рамки в дальней зоне

Параметры элементарной магнитной рамки

1. Мощность излучения находится аналогично мощности излучения элементарного электрического вибратора:

$$P_{\Sigma} = \frac{\omega k^3 \mu_a}{12\pi} m_m^2 = \frac{120\pi k^4}{12\pi} m_m^2 = 10k^4 I_m^2 S^2. \quad (4.53)$$

Подставляя в (4.53) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, получим

$$P_{\Sigma} = 10I_m^2 \left(\frac{(2\pi)^2 S}{\lambda^2} \right)^2 = 10I_m^2 \left(\frac{(2\pi)^2 \pi r^2}{\lambda^2} \right)^2 = 10I_m^2 \left(\frac{\pi l^2}{\lambda^2} \right)^2 \approx 400I_m^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^4. \quad (4.54)$$

2. Сопротивление излучения

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^4 \approx 800 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^4. \quad (4.55)$$

Элементарный электрический вибратор обладает лучшими излучающими свойствами по сравнению с элементарной рамкой. Из двух излучателей тот лучше, сопротивление излучения которого больше (4.30) и (4.54), так как при равных токах мощность излучения его выше. Поэтому рамочные антенны применяют в качестве приёмных там, где на низких частотах нет возможности использовать громоздкие вибраторные антенны.

3. Диаграмма направленности. ДН элементарной рамки имеет тот же вид, что и ДН элементарного электрического вибратора (рис. 4.19)

$$F(\theta, \psi) = \sin \theta, \quad F^2(\theta, \psi) = \sin^2 \theta. \quad (4.56)$$

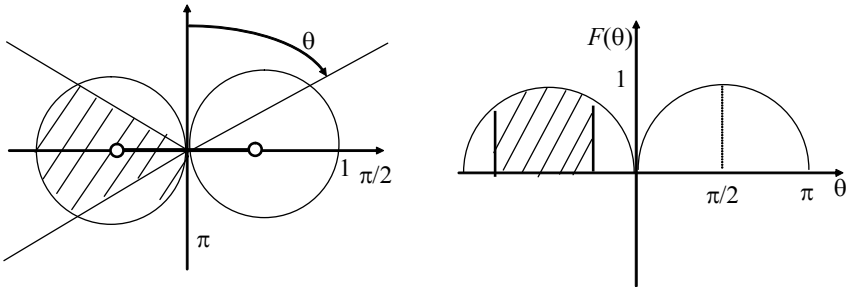


Рис. 4.19. Диаграмма направленности элементарной рамки

4.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ИСТОЧНИКА ГЮЙГЕНСА

Простейшим или элементарным поверхностным излучателем (источником Гюйгенса) является плоский элемент фронта ЭМ волны. Согласно принципу эквивалентных токов магнитная составляющая ЭМП H элемента волновой поверхности будет эквивалентна действию электрического тока j_S , а электрическая составляющая E – действию фиктивного магнитного тока j_M .

Таким образом, источник Гюйгенса можно рассматривать как элементарный излучатель площади, по поверхности которого текут электрический I и магнитный I_M токи (рис. 4.20).

Поместим источник Гюйгенса в начало сферической системы координат и вводим следующие обозначения.

Эквивалентные токи электрический и фиктивный магнитный, протекающие по поверхности, определяются:

$$\dot{I} = j_S dx ; \quad (4.57)$$

$$\dot{I}_M = j_M dy . \quad (4.58)$$

Источник Гюйгенса может быть представлен в виде совокупности двух взаимно перпендикулярных электрического элементарного вибратора длиной dx и током I и фиктивного магнитного вибратора длиной dy с током I_M (рис. 4.20).

Определим составляющие ЭМП, создаваемые источником Гюйгенса в дальней зоне. Поле источника Гюйгенса может быть получено в результате суперпозиции полей взаимно-перпендикулярно расположенных электрического и магнитного элементарных вибраторов.

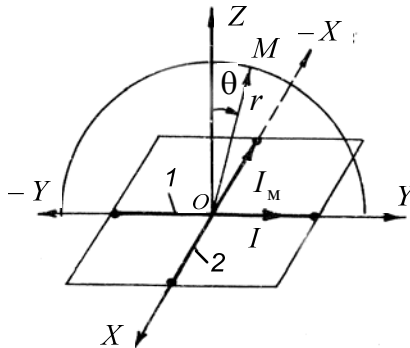


Рис. 4.20. Источник Гюйгенса

Применительно к приведённой на рисунке ориентации электрического и магнитного вибраторов созданные ими напряжённости электрического поля в плоскости ZOY определяются:

$$\dot{E}_\theta^\varepsilon = \pm \frac{i\dot{d}yk^2}{4\pi\omega\varepsilon_a} \cos\theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.59)$$

$$\dot{E}_\theta^M = \pm \frac{i\dot{I}_M dxk}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.60)$$

Граничные условия:

$$\dot{I} = jdx = \dot{H}_\tau dx; \quad (4.61)$$

$$\dot{I}_M = j_M dy = -\dot{E}_\tau dy. \quad (4.62)$$

Подставим (4.61) и (4.62) в (4.59) и (4.60) с учётом

$$\dot{H}_\tau = \frac{\dot{E}_\tau}{Z} = \frac{\dot{E}_\tau \omega \varepsilon_a}{k} \quad (4.63)$$

можно записать

$$\dot{E}_\theta^\varepsilon = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} \cos\theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.64)$$

$$\dot{E}_\theta^M = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.65)$$

Заметим, что знаки «+» и «-» определяют фазовые соотношения между составляющими в зависимости от углового положения точки наблюдения M .

Суммарное электрическое поле в плоскости ZOY находим путём сложения его составляющих

$$\dot{E}_\theta = \dot{E}_\theta^\varepsilon + \dot{E}_\theta^M = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} (1 + \cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.66)$$

Подобным образом можно показать, что в плоскости XOY суммарная составляющая электрического поля равна

$$\dot{E}_\psi = \dot{E}_\psi^\varepsilon + \dot{E}_\psi^M = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} (1 + \cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.67)$$

Для точки M с произвольными координатами составляющие вектора напряжённости электрического поля источника Гюйгенса определяются:

$$\dot{E}_{m\theta} = \pm \frac{i\dot{E}_{m\tau} ds k}{4\pi} (1 + \cos\theta) \sin\psi \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (4.68)$$

$$\dot{E}_{m\psi} = \pm \frac{i\dot{E}_{m\tau} ds k}{4\pi} (1 + \cos \theta) \cos \psi \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (4.69)$$

Составляющие магнитного поля определяются

$$\dot{H}_{m\theta} = -\frac{\dot{E}_{m\psi}}{z}; \quad (4.70)$$

$$\dot{H}_{m\psi} = \frac{\dot{E}_{m\theta}}{z}. \quad (4.71)$$

Таким образом, на основе полей элементарного электрического вибратора и принципа эквивалентных токов найдены компоненты поля элементарного поверхностного излучателя.

Диаграмма направленности, коэффициент направленного действия

Для описания диаграммы направленности источника Гюйгенса по напряжённости электрического поля необходимо определить модуль вектора электрического поля формулам (4.68) и (4.69):

$$|\dot{E}_m| = \sqrt{|\dot{E}_{m\theta}|^2 + |\dot{E}_{m\psi}|^2} = \frac{E_{m\tau} ds k}{4\pi r} (1 + \cos \theta). \quad (4.72)$$

Нормированная ДН имеет вид

$$F(\theta) = \frac{|\dot{E}_m|}{|\dot{E}_m|_{\max}} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta). \quad (4.73)$$

Максимальное значение диаграммы направленности достигается при $\theta = 0$. Изобразим на рис. 4.21 диаграмму направленности источника Гюйгенса в полярных координатах. Она имеет вид кардиоиды.

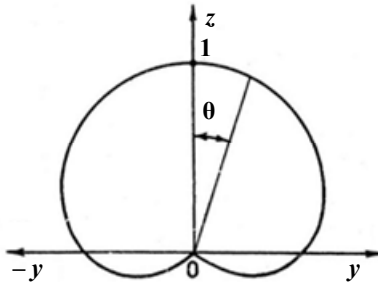


Рис. 4.21. Диаграмма направленности источника Гюйгенса

Определим теперь, насколько элементарный поверхностный излучатель эффективней в направлении максимального излучения, чем изотропный (ненаправленный), т.е. определим его коэффициент направленного действия (КНД).

Выражение для КНД источника Гюйгенса имеет вид

$$D_0 = \frac{4\pi}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \sin \theta d\psi d\theta} = 3. \quad (4.74)$$

Таким образом, источник Гюйгенса в 3 раза более эффективен, чем изотропный излучатель.

Контрольные вопросы

1. Объясните физическую сущность явления излучения.
2. Какой излучатель называют элементарным?
3. Назовите границы ближней, промежуточной и дальней зон вибратора. Каковы свойства поля в каждой из зон?
4. Что такое мощность излучения?
5. В чём суть принципа эквивалентных токов?
6. Что называется сопротивлением излучения?
7. Какова практическая значимость сопротивления излучения?
8. Дайте определение диаграммы направленности?
9. Почему элементарную рамку называют элементарным магнитным диполем?
10. Что собой представляет электромагнитное поле источника Гюйгенса?

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

5.1. НАЗНАЧЕНИЕ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ – ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

Одной из важнейших задач техники сверхвысоких частот (СВЧ) является передача электромагнитных волн (ЭМВ) на некоторые расстояния. При изучении теории излучения электромагнитных волн было показано, что излучатели (антенны) могут обладать направленностью излучения энергии. Тем не менее направленность излучения антенн оказывается совершенно недостаточной, если необходимо передать энергию с высоким коэффициентом полезного действия η от генератора к потребителю, так как значительная часть энергии будет рассеяна в пространстве на других направлениях (рис. 5.1).

Для эффективной передачи энергии с высоким КПД необходимо, чтобы электромагнитная волна, переносящая энергию, не рассеивалась бы в пространстве, а концентрировалась вокруг заданного направления.

Электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль направляющей границы, называются **направляемыми**, а сама направляющая граница (линия) – **линией передачи (ЛП)** или **фидером**. КПД любых линий передачи не может равняться единице, так как в них наблюдается затухание направляемых волн вследствие потерь энергии из-за неидеальности ЛП. Потери энергии ЭМВ характеризуются **коэффициентом затухания α** , который зависит от конструкции линии передачи и свойств среды.

Практически всегда для передачи энергии на небольшие расстояния внутри радиотехнического устройства используются различные виды ЛП. Например, с помощью ЛП осуществляется канализация энергии от передатчика (ПРД) к антенне или от антенны к приемнику (ПРМ).

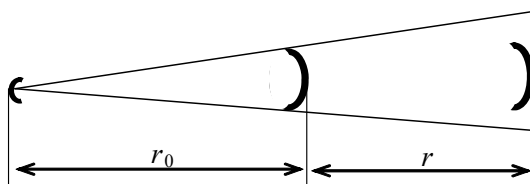


Рис. 5.1. Передача радиоволн антенной

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭМВ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ

В теории линий передачи направляемые ЭМВ классифицируются в зависимости от наличия или отсутствия в них **продольных составляющих электрического либо магнитного векторов**. При этом под продольным направлением подразумевается направление распространения ЭМВ (продольная ось линии передачи – ось Z). Здесь могут быть четыре случая.

1. Оба вектора, электрический и магнитный, перпендикулярны оси ЛП и, следовательно, не имеют продольных составляющих (рис. 5.2), т.е. $H_z = 0$, $E_z = 0$. Вектор Пойнтинга Π направлен вдоль оси Z . Такие волны носят название **поперечных** электромагнитных волн – волн **типа T** или **$ТЕМ$** (Transverse Electromagnetic).

2. Электрический вектор имеет отличную от нуля продольную составляющую $E_z \neq 0$, в то время как магнитное поле волны поперечно, т.е. $H_z = 0$ (рис. 5.3). Вектор Пойнтинга Π лежит в плоскости XOZ и направлен под углом φ относительно оси Z . Такие направляемые волны называются волнами **типа E** (Electric).

3. Продольную составляющую имеет магнитный вектор ($H_z \neq 0$), а электрическое поле поперечно ($E_z = 0$). Вектор Пойнтинга Π лежит в плоскости YOZ и направлен под углом φ относительно оси Z . Такие направляемые волны называются волнами **типа H** (рис. 5.4).

4. В ЛП могут существовать волны, одновременно имеющие продольные составляющие электрического и магнитного полей ($E_z \neq 0$, $H_z \neq 0$). Вектор Пойнтинга Π не лежит в плоскости YOZ или XOZ . Такие волны получили название **смешанных** или **гибридных** (рис. 5.5).

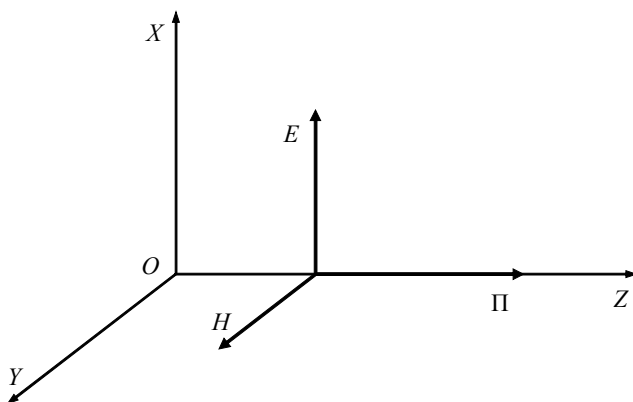


Рис. 5.2. T -волна в ЛП

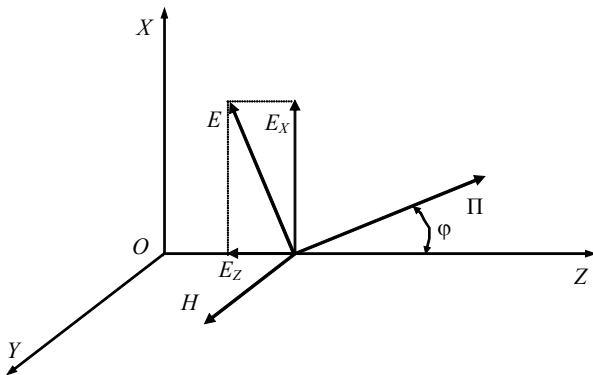


Рис. 5.3. E-волна в ЛП

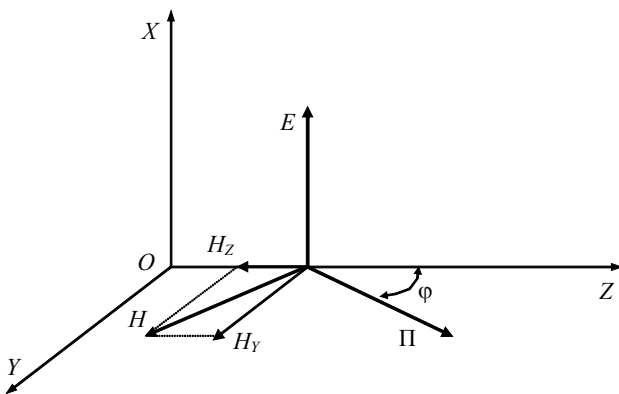


Рис. 5.4. H-волна в ЛП

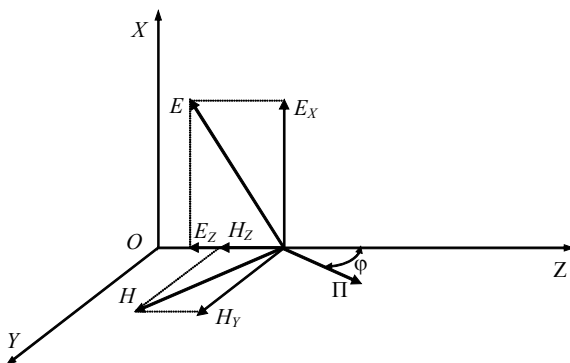


Рис. 5.5. Гибридная волна в ЛП

На основе классификации ЭМВ в линиях передачи проводится классификация самих ЛП.

5.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

В настоящее время применяется большое количество различных типов ЛП. Общими требованиями к ним являются:

- минимальные потери энергии;
- простота конструкции;
- высокая надёжность;
- малые габариты и масса;
- низкая стоимость.

Классификация ЛП выполняется по различным признакам.

1. Если в направлении передачи энергии (вдоль оси Z) ЛП имеет неизменные параметры внутреннего заполнения и геометрические размеры, линия передачи называется **регулярной (продольно однородной)**. В противном случае ЛП называются **нерегулярными (продольно неоднородными)**. Большинство ЛП являются регулярными.

2. Линии передачи подразделяются на линии открытого и закрытого типов. В **открытых** ЛП энергия ЭМП, хотя в основном и сосредоточена в непосредственной близости к её поверхности, распределена во всём пространстве, окружающем линию. В линиях **закрытого** типа энергия ЭМП заключена в пространстве, ограниченном замкнутой металлической поверхностью, представляющей собой электромагнитный экран.

3. По режиму работы ЛП бывают с **бегущей** или **стоячей** волнами. Чтобы получить режим бегущей волны, надо сопротивление нагрузки и **волновое (характеристическое) сопротивление линии** сделать равными, т.е. надо согласовать линию с нагрузкой ($R_H = Z_L$). На СВЧ режим чисто бегущей волны при коэффициенте бегущей волны (КБВ), равном единице, получить обычно невозможно. Практически очень хорошо, если $KBB = 0,8 \dots 0,9$. Ухудшение работы линии при этом незначительно. Во многих случаях довольствуются величиной $KBB = 0,5 \dots 0,7$.

4. По типу волны в ЛП различают линии с T -волной, ЛП с E - и H -волнами и линии с поверхностными (замедленными) волнами.

Конструктивное исполнение ЛП зависит прежде всего от типа ЭМВ в них.

Двухпроводные ЛП часто применяют в коротковолновой радиосвязи для запитки высокоомных антенн (типа VH и BH). Волновое сопротивление двухпроводной ЛП также является большим, что облегчает согласование ЛП с антенной.

Конструкция двухпроводной ЛП и структура T -волны в ней показаны на рис. 5.6.

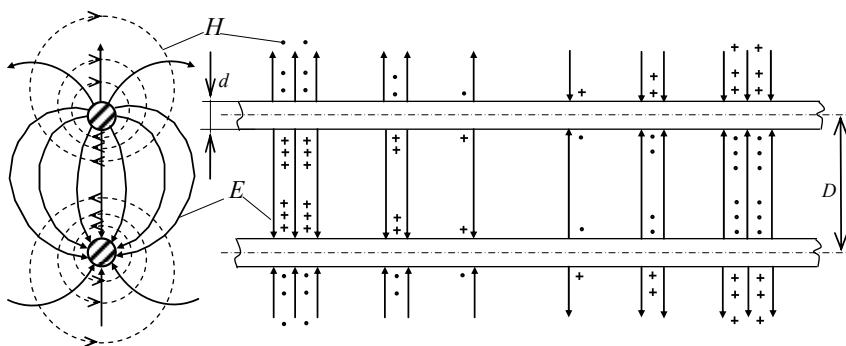


Рис. 5.6. Двухпроводная ЛП

Волновое сопротивление двухпроводной ЛП определяется по формуле

$$Z_{\text{д}} = 120 \ln \frac{2D}{d}, \quad (5.1)$$

где d – диаметр провода; D – расстояние между проводами.

5.4. ВИТАЯ ПАРА

Витая пара (от англ. Twisted Pair) – изолированные проводники, попарно свитые между собой некоторое число раз на определённом отрезке длины, что требуется для уменьшения перекрёстных наводок между проводниками. Такие линии как нельзя лучше подходят для создания симметричных цепей, в которых используется балансный принцип передачи информации симметричная цепь (рис. 5.7). Приёмник и передатчик гальванически развязаны друг от друга согласующими трансформаторами. При этом во вторичные обмотки (сетевые адаптеры) подаётся только разность потенциалов первичной обмотки (непосредственно протяжённой линии). Из-за этого необходимо отметить два важных момента:

1. Токи в любой точке идеальной витой пары равны по значению и противоположны по направлению. Следовательно, векторы напряжённости электромагнитного поля каждого из проводников противоположно направлены, и суммарное электромагнитное излучение отсутствует. Под идеальной витой парой понимается линия, в которой проводники бесконечно плотно прилегают друг к другу, имеют бесконечно малый диаметр, и ток, протекающий через них, стремится к нулю.

2. Метод накладывает некоторые ограничения на протокол передачи (невозможность передачи постоянной составляющей), но значительно более устойчиво к внешним влияниям (по сравнению, например, с несимметричной линией передачи). В результате напряжение наводки на вторичной обмотке будет синфазным, соответственно не передастся на вторичную обмотку (сетевой адаптер).

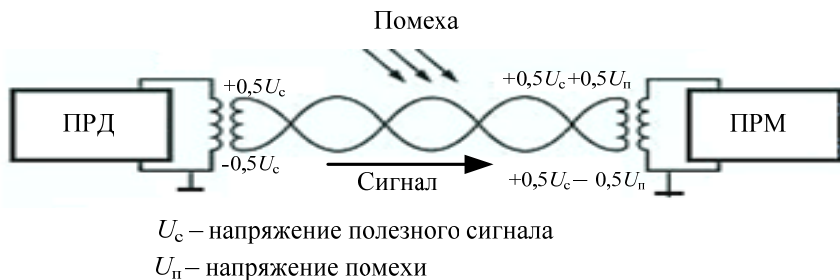


Рис. 5.7. Электрическое соединение витой пары

Электрические параметры витой пары

Электрические свойства витой пары как обычной направляющей системы электромагнитных колебаний характеризуются сопротивлением R , индуктивностью проводников L , ёмкостью C и проводимостью изоляции G .

Активное сопротивление R постоянному току зависит от материала проводника, его геометрических размеров и его температуры. По распространённому стандарту EIA/TIA-568A это значение не должно превышать 19,2 Ом на короткозамкнутом шлейфе длиной в 100 м при температуре 20 °С. С увеличением частоты сигнала активное сопротивление растёт.

Проводимость изоляции G является мерой качества материала и его нанесения на поверхность отдельного проводника. В основном на проводимость изоляции влияют затраты на поляризацию диполей материала диэлектрика.

По стандарту для современных кабелей величина ёмкости составляет не более 5,6 нФ. Особо нужно отметить, что применение экрана вызывает рост ёмкости примерно на 30%, что существенно снижает эксплуатационные свойства такого кабеля.

Индуктивность витой пары ниже, чем несимметричной двухпроводной линии передачи.

Волновое сопротивление рассчитывается по формуле

$$Z_{\text{вп}} = \frac{276}{\sqrt{(\epsilon_{\text{в}} + \epsilon_{\text{и}})/2}} \lg \frac{2d_{\text{и}}}{d}, \quad (5.2)$$

где $\epsilon_{\text{в}}$, $\epsilon_{\text{и}}$ – относительная диэлектрическая проницаемость воздуха и изоляции проводов; $d_{\text{и}}$, d – диаметр провода с изоляцией и без изоляции.

5.5. Т-ВОЛНА В КООКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Коаксиальная ЛП – два соосных проводника с заданными размерами, центрированные диэлектрическими шайбами или сплошным диэлектрическим заполнением. Одножильный или многожильный внутренний проводник окружён слоем высококачественного диэлектрика (полистирол, полиэтилен, фторопласт и т.д.), поверх которого располагается внешний проводник. Внешний проводник может быть выполнен в виде сплошной металлической трубы (рис. 5.8). Такая ЛП называется жёстким коаксиальным фидером. При этом часто внутренний проводник центрируется диэлектрическими шайбами.

В другом конструктивном исполнении внешний проводник выполняется в виде металлической сетки для предохранения от внешних воздействий покрытой защитной диэлектрической оболочкой. Такой фидер становится гибким и называется коаксиальным кабелем. Внутреннее заполнение в этом случае выполняют сплошным (рис. 5.9) из высококачественного диэлектрика.

Свойства и параметры коаксиального фидера определяются его геометрическими размерами D и d (рис. 5.8 и рис. 5.9), электрическими параметрами диэлектрика внутреннего заполнения, внешнего и внутреннего проводников.

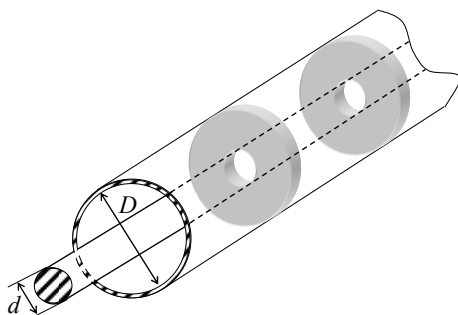


Рис. 5.8. Коаксиальная ЛП с диэлектрическими шайбами

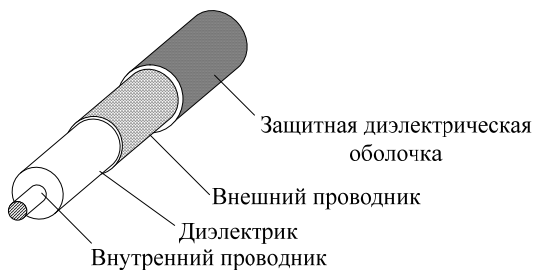


Рис. 5.9. Коаксиальный кабель

Волновое сопротивление коаксиальной ЛП определяется выражением

$$Z_{\kappa} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \ln \frac{D}{d} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{D}{d}, \quad (5.3)$$

где D – внутренний диаметр внешнего проводника; d – диаметр центрального проводника; $\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0$, $\mu_a = \mu\mu_0$ – соответственно абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика внутреннего заполнения ЛП.

Коаксиальным фидерам присваивается условное обозначение, состоящее из четырёх позиций, поставленных через дефис: букв РК – радиочастотный кабель; величины волнового сопротивления в Омах; среднего диаметра диэлектрического заполнения в миллиметрах; двух цифр, одна из которых обозначает материал диэлектрика внутреннего заполнения (1 – полиэтилен, 2 – фторопласт), другая – порядковый номер разработки конкретной типоконструкции фидера.

Например, коаксиальный 75-омный фидер с фторопластовым заполнением, имеющим средний диаметр диэлектрика 7 мм, обозначается РК-75-7-21.

В коаксиальной ЛП могут существовать ЭМВ различных типов: T , E , H и гибридные. Основной является T -волна, остальные считают паразитными.

Для того чтобы в коаксиальной ЛП распространялась только поперечная волна, выбирают геометрические размеры фидера

$$\pi(D + d) < \lambda. \quad (5.4)$$

Для предотвращения излучения геометрические размеры ЛП должны удовлетворять условию

$$\pi(D - d) \ll \lambda. \quad (5.5)$$

Поэтому для передачи больших мощностей из-за опасности пробоя невозможно использовать коаксиальную ЛП в диапазоне частот короче дециметровых волн (ДМВ).

Структура поперечной волны показана на рис. 5.10.

Как следует из рис. 5.10, электрическая составляющая ЭМП имеет только радиальную, а магнитная – только азимутальную компоненты в цилиндрической системе координат r , φ , z :

$$\dot{E}_r = -ik \frac{A}{r} e^{-ikz}; \quad (5.6)$$

$$\dot{H}_{\varphi} = -i\omega\varepsilon_a \frac{A}{r} e^{-ikz}, \quad (5.7)$$

где A – некоторая произвольная постоянная, характеризующая амплитуду.

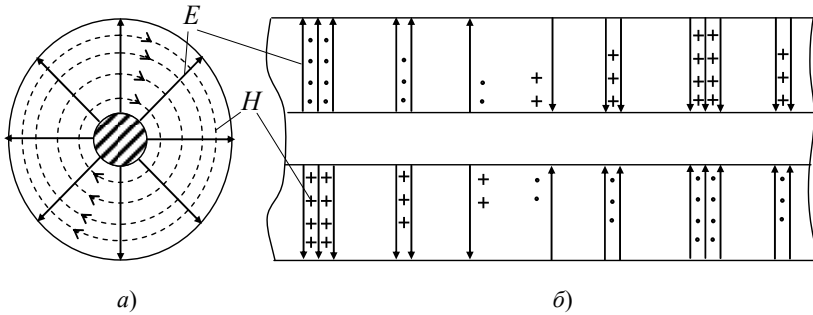


Рис. 5.10. Структура T -волны в поперечном (а) и продольном (б) сечениях коаксиальной ЛП

Коаксиальные ЛП нашли самое широкое применение в технике связи и радиотехническом обеспечении (РТО) для передачи СВЧ-энергии, построения элементов СВЧ-тракта в диапазонах длин волн от дециметровых до дециметровых.

Длина волны в коаксиальной ЛП

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (5.8)$$

где λ – длина волны в свободном пространстве.

Коэффициент затухания в коаксиальной ЛП обусловлен потерями в проводниках α_R , дБ/м, и диэлектрике α_ϵ , дБ/м:

$$\alpha = \alpha_R + \alpha_\epsilon. \quad (5.9)$$

Коэффициент затухания в медных проводниках

$$\alpha_R = \frac{1,898 \cdot 10^{-8} \sqrt{\epsilon f}}{\lg(D/d)} \left(\frac{1}{D} + \frac{1}{d} \right). \quad (5.10)$$

Коэффициент затухания в диэлектрике

$$\alpha_\epsilon = 9 \cdot 10^{-11} f \sqrt{\epsilon} \operatorname{tg} \delta, \quad (5.11)$$

где $\operatorname{tg} \delta$ – тангенс угла потерь

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_a}, \quad (5.12)$$

где γ – проводимость среды; f – частота сигнала.

Предельная мощность, передаваемая по коаксиальному кабелю:

$$P_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2 d^2 \sqrt{\epsilon}}{480} \ln \frac{D}{d}, \quad (5.13)$$

где $E_{\text{пр}} = 30 \dots 50$ кВ/см – пробивное напряжение коаксиального кабеля.

Допустимая мощность, передаваемая по коаксиальному кабелю:

$$P_{\text{доп}} \approx 0,3P_{\text{пр}}. \quad (5.14)$$

Выбор волнового сопротивления в коаксиальной ЛП

Коэффициент затухания в проводнике зависит как от электрических свойств проводника и длины волны, так и от соотношения D/d , т.е. от геометрических размеров. Анализ показывает, что при $D/d = 3,6$ достигается минимум коэффициента затухания коаксиальной ЛП, что соответствует волновому сопротивлению $W_{\text{д}} = 77$ Ом в линии с воздушным заполнением. В то же время для передачи по коаксиальному фидеру большой мощности необходимо соблюдение условия $D/d = 1,65$, что соответствует волновому сопротивлению $W_{\text{д}} = 50$ Ом в линии с воздушным заполнением. Таким образом, для передачи по коаксиальной ЛП электромагнитных колебаний большой мощности необходимо соблюдение условия $D/d = 1,5 \dots 3,0$. Если же за критерий выбора коаксиальной ЛП принять минимум потерь, то $D/d = 3 \dots 6$.

Поэтому в настоящее время промышленность выпускает коаксиальные фидеры со стандартными значениями волновых сопротивлений:

- $W_{\text{д}} = 50$ Ом, для применения в трактах передачи большой мощности (от передатчика к антенне);
- $W_{\text{д}} = 75$ Ом, если основным параметром фидера является минимум потерь (от антенны к приёмнику).

5.6. ПОЛОСКОВЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Недостатки коаксиальной ЛП, связанные с высоким уровнем потерь на излучение, а также в диэлектриках внутреннего заполнения с ростом частоты, ограничивают их применение диапазоном дециметровых волн. На дециметровых, сантиметровых и миллиметровых волнах в последнее время значительное применение получили полосковые ЛП. В большинстве случаев их изготавливают путём нанесения металлических слоёв на диэлектрик с малыми потерями (рис. 5.11). Эти линии являются практически единственно пригодными для применения в интегральных микросхемах (плёночных и полупроводниковых). В этом случае ЛП называют **микророскопскими**.

В несимметричной полосковой ЛП имеются два проводника (рис. 5.11, *а*), один из которых представляет собой металлическую полосу (полосок) постоянных размеров, другой – широкую металлическую пластину (подложку). В симметричной полосковой ЛП имеется три проводника (рис. 5.11, *б*). Полосок в большинстве случаев имеет сложную конфигурацию (топологию) и наносится напылением металла сквозь маску либо выполняется фотохимическим способом.

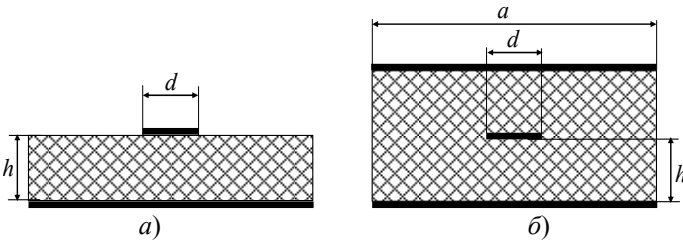


Рис. 5.11. Полосковые линии передачи

В полосковых ЛП толщина диэлектрика составляет $h = 1,5 \dots 5,0$ мм. В большинстве случаев в качестве диэлектрика применяют фторопласт с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2 \dots 7$ и тангенсом угла потерь $\text{tg}\Delta = 10^{-3} \dots 10^{-4}$. В микрополосковых ЛП используют более высококачественные твёрдые хрупкие диэлектрики (кварц, ситалл, кремний), для которых $\epsilon = 2 \dots 7$, $\text{tg}\Delta = 10^{-4}$. Толщина диэлектрика в микрополосковых ЛП $h = 0,5 \dots 1,0$ мм.

Полосковые ЛП в основном применяют не для передачи СВЧ-энергии, а для создания сложных разветвлённых конструкций приёмных, реже – передающих СВЧ-трактов. Так как толщина диэлектрика невелика, уровень мощности, передаваемый в полосковой ЛП, не может быть высоким из-за опасности пробоя диэлектрика.

Волновое сопротивление несимметричной ЛП определяется по формуле

$$Z_{\text{ин}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{d}. \quad (5.15)$$

Полосковые линии передачи занимают промежуточное положение между двухпроводными ЛП и волноводами. Можно считать, что в полосковых ЛП распространяется поперечная ЭМВ, хотя наличие твёрдого диэлектрика несколько искажает структуру поля. Такая ЭМВ называется **квазипоперечной**. Структура ЭМВ несимметричной полосковой ЛП в поперечном сечении показана на рис. 5.12.

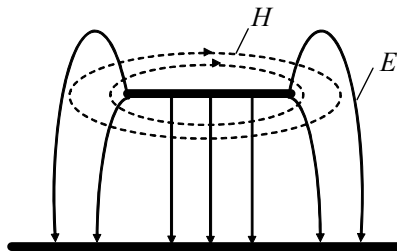


Рис. 5.12. Структура поля в несимметричной полосковой линии передачи

5.7. ВОЛНОВОДНЫЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ. ВОЗБУЖДЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭМВ В ВОЛНОВОДАХ

Хотя коаксиальные линии передачи широко применяются на СВЧ, но всё же они обладают существенными недостатками, особенно заметными в диапазоне сантиметровых волн.

Эти недостатки можно уменьшить применением **волноводов**, представляющих собой полые металлические трубы различных поперечных сечений, внутри которых распространяются электромагнитные волны.

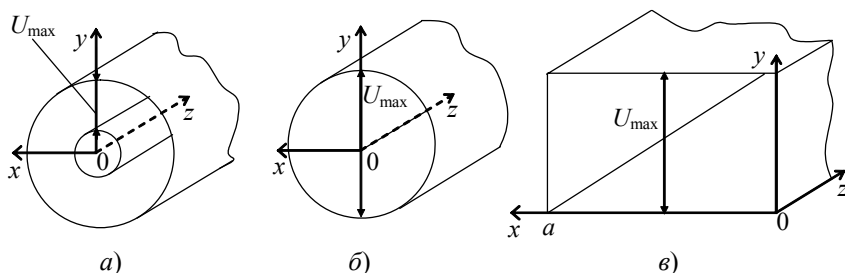
Потери энергии в волноводе меньше, чем в коаксиальной ЛП, так как в нём нет внутреннего провода и изоляторов. Наибольшее напряжение в волноводе получается между противоположными стенками (при прямоугольном поперечном сечении) или диаметрально противоположными точками (если волновод имеет круглое сечение). Расстояние между этими точками больше, чем расстояние между внутренним и внешним проводниками коаксиальной ЛП, поэтому опасность пробоя значительно меньше (рис. 5.13).

Конструкция волноводов проще, чем коаксиальной ЛП. Исходя из уравнений Максвелла, можно показать, что в полном металлическом волноводе не может существовать *T*-волна.

В идеальном случае волновод представляет собой полую трубу из хорошего (идеального) проводника. Будем полагать, что на идеально проводящую плоскость (одна из стенок волновода) под некоторым углом φ падает монохроматическая плоская волна (рис. 5.14). Предположим, что верхнее полупространство (внутреннее заполнение волновода) – идеальный диэлектрик с параметрами ϵ_a, μ_a .

Вектор суммарного поля будет обладать составляющими, равными суммам составляющих векторов падающей и отражённой волн. В частности, составляющая напряжённости электрического поля вдоль оси *z*:

$$\dot{E}_z = (\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}}) \cos \varphi = i \cdot 2 E_0 \cos \varphi e^{-ikz \sin \varphi} \sin(kx \cos \varphi). \quad (5.16)$$



**Рис. 5.13. Наибольшие напряжения в коаксиальной ЛП (а),
круглом (б) и прямоугольном (в) волноводах**

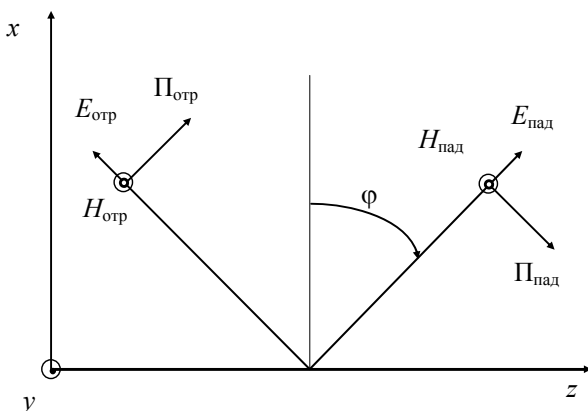


Рис. 5.14. Падение ЭМВ на стенку волновода

Наличие множителя $e^{-ikz \sin \varphi}$ показывает, что результирующее поле представляет собой волну, бегущую вдоль координаты z по направлению вдоль продольной оси волновода. Коэффициент распространения зависит от угла падения φ . Будем называть эту постоянную распространения **продольным волновым числом (продольным коэффициентом распространения)** и обозначать через h :

$$h = k \sin \varphi. \quad (5.17)$$

Сомножитель $\sin(kx \cos \varphi)$ показывает, что поле вдоль поперечной координаты x изменяется по синусоидальному закону. Амплитуда поля в пределах волнового фронта $z = \text{const}$ не постоянна, а образует стоячие волны. Скорость изменения амплитуды определяется коэффициентом

$$g = k \cos \varphi, \quad (5.18)$$

который будем называть **поперечным волновым числом (поперечным коэффициентом распространения)**.

Продольное и поперечное волновые числа связаны соотношением

$$h^2 + g^2 = k^2. \quad (5.19)$$

Итак, важное свойство направляемых волн заключается в том, что данный волновой процесс является неоднородной волной, распространяющейся вдоль координаты z . При этом амплитуда поля вдоль поперечных координат изменяется по закону стоячей волны.

Если поперечную координату ограничить стенкой волновода, например $x = a$ (рис. 5.13, в), то из (5.18) следует, что для ограничения стоячей волны стенками волновода необходимо выполнить условие: $k a \cos \varphi = m \pi$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ – индекс **типа волны**, определяющий количество стоячих полуволн, укладываемых вдоль поперечной координаты x .

Используя выражение $k = 2\pi/\lambda$, получим

$$\cos\varphi = m\lambda/2a. \quad (5.20)$$

Действительно, для любого индекса m при заданном размере a всегда найдётся такая длина волны генератора, называемая **критической длиной волны** данного типа и обозначаемая $\lambda_{кр}$, для которой выполнение условия (5.20) возможно лишь при максимальном значении $\cos\varphi = 1$, т.е.

$$\lambda_{кр} = 2a/m. \quad (5.21)$$

Если теперь выбрать значение $\lambda > \lambda_{кр}$, граничные условия на стенках волновода не могут быть выполнены для данного типа волны ни при каком значении угла падения φ . Физически это означает невозможность существования колебания данного типа в виде бегущей волны в ЛП.

Таким образом, каждый тип колебаний в волноводе может существовать как бегущая волна в области длин волн $\lambda \leq \lambda_{кр}$.

Волны более длинные, чем $\lambda_{кр}$, по волноводу на данном типе колебаний распространяться не могут. Иначе говоря, возможно распространение только тех волн, частота которых выше некоторого нижнего предела, называемого **критической частотой** $f_{кр}$.

На основе полученных выражений можно вывести основные соотношения для параметров распространения ЭМВ в волноводах.

Скорость перемещения поверхности равных фаз вдоль координаты z (**фазовая скорость ЭМВ в волноводе**) определяется продольным волновым числом h и равна

$$v_{фв} = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{k\sin\varphi} = \frac{v_{ф}}{\sin\varphi} = \frac{v_{ф}}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}} = \frac{v_{ф}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (5.22)$$

Фазовая скорость волны в волноводе зависит от частоты ЭМВ, т.е. волновод обладает дисперсией. Эта дисперсия является нормальной, так как с ростом частоты ЭМВ (уменьшением длины волны) фазовая скорость в волноводе уменьшается (5.22).

Аналогично находится **длина волны в волноводе**

$$\lambda_{в} = \frac{v_{фв}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (5.23)$$

Длина волны в волноводе превышает длину волны в свободном пространстве и зависит от типа волны, распространяющейся в волноводе.

Групповая скорость узкополосного радиосигнала в волноводе (скорость перемещения максимума огибающей), характеризующая скорость переноса энергии волны по волноводу, определяется по формуле

$$v_{гр.в} = \frac{1}{\frac{dh}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega}} = v_{\phi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}. \quad (5.24)$$

Важнейший параметр волноводной ЛП – **волновое (характеристическое) сопротивление**. Оно зависит от типа ЭМВ в волноводе и для волн *H*- и *E*-типов определяется соответственно:

$$Z_{вH} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}}; \quad (5.25)$$

$$Z_{вE} = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}, \quad (5.26)$$

где Z_c – волновое сопротивление среды, являющейся внутренним заполнением волновода.

Таким образом, в полом металлическом волноводе распространяются волны не любых частот, а только превышающих некоторую критическую. Это – основной недостаток волноводных ЛП.

Критическая длина волны в волноводе

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}}, \quad (5.27)$$

где m – число полуволн, укладываемых вдоль широкой стенки волновода a ; n – число полуволн, укладываемых вдоль узкой стенки волновода b .

Критическая частота в волноводе

$$f_{кр} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2}. \quad (5.28)$$

Затухание в волноводе, дБ/м:

$$\alpha_{\text{в}} = \frac{R_{\text{ст}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}} = \frac{R_{\text{ст}} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{120\pi b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}}, \quad (5.29)$$

где $R_{\text{ст}}$ – поверхностное сопротивление металла стенок волновода

$$R_{\text{ст}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_a}{\gamma}}. \quad (5.30)$$

Предельная мощность, передаваемая по волноводу:

$$P_{\text{пр}} = \frac{E_{\text{пр}}^2 \text{КБВ} a b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}}{480\pi}, \quad (5.31)$$

где $E_{\text{пр}}$ – предельная напряжённость ЭМП ($E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см); КБВ – коэффициент бегущей волны в волноводе (КБВ = 0,75...1).

Допустимая мощность, передаваемая по волноводу:

$$P_{\text{доп}} = 0,3 P_{\text{пр}}. \quad (5.32)$$

Размер поперечного сечения прямоугольного волновода, обеспечивающего работу только на основном типе волны H_{10} :

$$\frac{\lambda_{\text{max}}}{1,6} \leq a \leq \frac{\lambda_{\text{min}}}{1,1}; \quad (5.33)$$

$$b_{\text{min}} \leq b \leq \frac{\lambda}{2}, \quad (5.34)$$

где λ , λ_{max} и λ_{min} – соответственно рабочая, максимальная и минимальная длины волн; b_{min} – минимальный размер узкой стенки, при котором исключается пробой волновода. Пробой волновода определяется согласно соотношений (5.31) и (5.32).

Волна H_{10} в прямоугольном волноводе

Основной волной в волноводе является волна, имеющая наименьшую критическую частоту или наибольшую критическую длину волны (рис. 5.15).

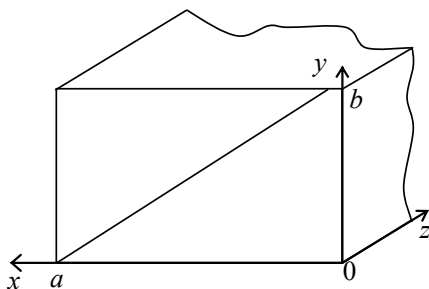


Рис. 5.15. Прямоугольный волновод

При фиксированной частоте электромагнитных колебаний и заданных параметрах внутреннего заполнения волновода основной тип волны требует для передачи волны волновода наименьшего поперечного сечения. Основной волной в прямоугольном волноводе является волна H_{10} .

Критическая длина волны основного типа в прямоугольном волноводе согласно выражению (5.27) составляет $\lambda_{кр} = 2a$ и не зависит от высоты прямоугольного волновода.

Критическая частота для волны H_{10} определяется по выражению (5.28):

$$f_{кр} = \frac{1}{2a\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}. \quad (5.35)$$

Система уравнений, описывающих составляющие поля волны H_{10} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= 0; \\ \dot{E}_y &= \frac{-i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}; \\ \dot{E}_z &= 0; \\ \dot{H}_x &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}; \\ \dot{H}_y &= 0; \\ \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

На основе системы уравнений (5.36) можно построить структуру поля в виде распределения силовых линий по сечениям волновода (рис. 5.16).

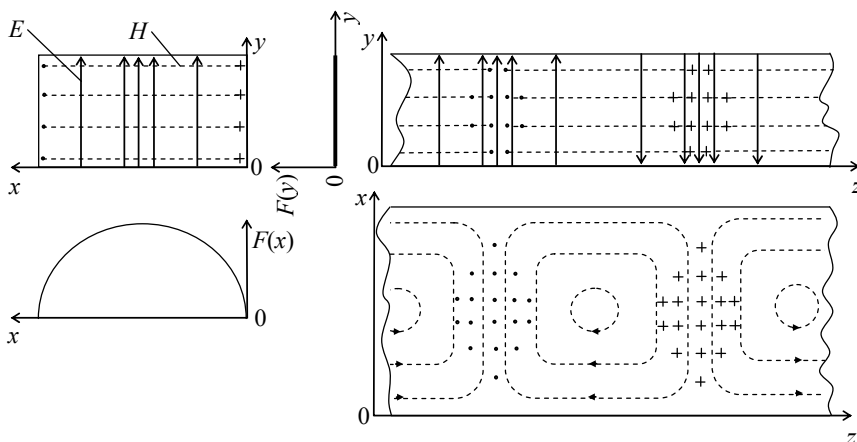


Рис. 5.16. Структура поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе

Графическое изображение структуры всех типов волн строится на основе:

- количества стоячих полуволн, укладываемых вдоль соответствующих координат;
- перпендикулярности силовых линий напряжённости электрического и магнитного полей;
- граничных условий у поверхности идеального проводника для векторов напряжённости электрического и магнитного полей;
- изменение направлений силовых линий электрического и магнитного полей через половину длины волны.

Анализ системы уравнений (5.36) и рис. 5.16 позволяет сделать следующие выводы:

- вдоль широкой стенки волновода укладывается одна стоячая полуволна электрического поля с максимумом при $x = a/2$;
- вдоль узкой стенки волновода (по координате y) изменений поля нет. Высота прямоугольного волновода не влияет на структуру поля волны H_{10} . Она выбирается исходя из требования распространения в волноводе только волны H_{10} , получения малых потерь в реальном волноводе, а также исключения электрического пробоя между его верхней и нижней стенками;
- замкнутые силовые линии магнитного поля лежат в плоскости xOz , так как $H_y = 0$. Между составляющими H_x и H_z имеется сдвиг фаз на $\pi/2$. Иными словами, в сечении волновода, где H_x достигает максимума, проекция H_z в этот момент времени равна нулю. Составляющая H_x равна нулю на боковых стенках волновода ($x = 0$ и $x = a$) и достигает максимума при $x = a/2$. Составляющая H_z максимальна на боковых стенках волновода и равна нулю в середине волновода.

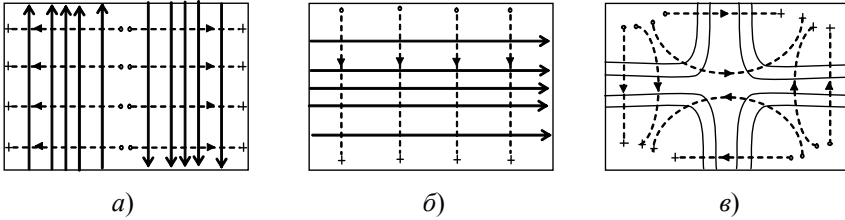


Рис. 5.17. Высшие типы волн в прямоугольном волноводе

Изображённая картина поля волны в волноводе перемещается вдоль него с фазовой скоростью в волноводе. Волна H_{10} нашла широкое применение на практике для передачи электромагнитной энергии в сантиметровом диапазоне.

***H*-волны высших типов**

Все неосновные типы колебаний называются волнами высших типов. В случае передачи электромагнитной энергии в волноводе волной H_{10} они являются паразитными и принимаются специальные меры борьбы с ними.

В некоторых случаях высшие типы волн применяют в облучателях различных антенных систем техники связи и РТО для создания заданного распределения поля по раскрытию апертурной антенны. Из H -волн широкое применение нашли волны H_{20} , H_{01} и H_{11} . На рисунке 5.17, *a*, *b* и *в* приведены соответственно структуры полей H_{20} , H_{01} и H_{11} в поперечном сечении.

Структура поля волны высшего типа в поперечном сечении волновода получается из основной путём m - и n -кратного повторения последней по соответствующей координате. При каждом очередном повторении направления силовых линий электрического и магнитного полей изменяются на обратные. Эти типы волн широко применяются в антенной технике (распределение поля в облучателях).

5.8. ВОЛОКОННО-ОПТИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Использование принципиально нового конструктивного решения техники соединений – многожильных волоконно-оптических кабелей – позволяет значительно уменьшить объём и массу электрических соединений, повысить их радиационную стойкость, исключить влияние перекрёстных помех. Основу волоконно-оптической ЛП составляет оптический кабель – световод, выполненный в виде тонкого стеклянного волокна цилиндрической формы, по которому передаются световые сигналы с длинами волны $0,85...1,60$ мкм, что соответствует диапазону частот $(2,3...1,2) \cdot 10^{14}$ Гц.

Световод имеет двухслойную конструкцию (рис. 5.18) и состоит из сердцевинки и оболочки с разными показателями преломления (n_1 и n_2). Сердцевинка служит для передачи электромагнитной энергии.

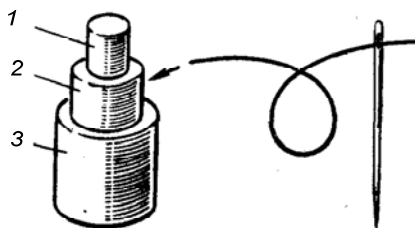


Рис. 5.18. Волоконно-оптический кабель:
1 – сердцевина; 2 – оболочка; 3 – защитное покрытие

Назначение оболочки – создание лучших условий отражения на границе «сердцевина–оболочка» и защита от помех из окружающего пространства.

Сердцевина волокна, как правило, состоит из кварца, а оболочка может быть кварцевая или полимерная.

Снаружи световода располагается защитное покрытие для предохранения его от механических воздействий и нанесения расцветки. Защитное покрытие обычно изготавливается двухслойным: вначале кремнеорганический компаунд (СИЭЛ), а затем – эпоксидакрилат, фторопласт, нейлон, полиэтилен или лак. Общий диаметр волокна 500...800 мкм.

Принцип работы

Передача светового сигнала происходит из-за преломления и многократного полного отражения энергии сигнала при переходе из среды с одним коэффициентом преломления в среду с другим коэффициентом преломления (рис. 5.19). При падении луча на границу раздела двух сред в общем случае появляются преломленная и отраженная волны (рис. 5.19, а). Угол падения θ_1 всегда равен углу отражения θ_3 . Угол преломления θ_2 связан с углом падения следующим соотношением

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 . \quad (5.37)$$

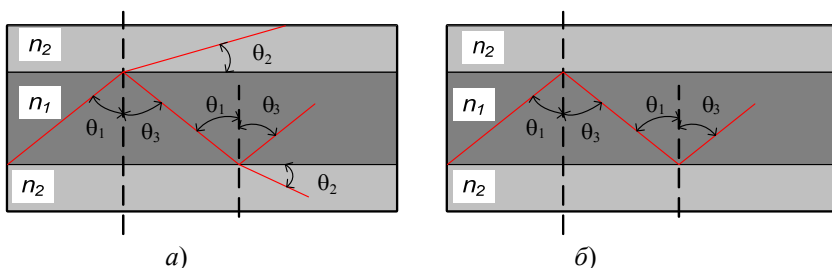


Рис. 5.19. Распространение световой волны на границе раздела двух сред при $n_1 > n_2$

В случае если $n_1 > n_2$, то из (5.37) следует, что $\theta_2 > \theta_1$. При увеличении угла падения на границу раздела двух сред со стороны более плотной, можно достичь состояния, когда преломлённый луч будет скользить по границе раздела сред в оптически менее плотную среду с показателем преломления n_2 .

Угол падения, при котором наблюдается такой эффект, называется предельным углом полного внутреннего отражения (рис. 5.19, б). Для всех углов падения, которые превышают предельный, луч не выйдет за границу раздела двух сред. Это явление называется полным внутренним отражением, оно и положено в основу передачи оптического излучения по световоду.

Типы оптических волокон

1. Одномодовое волокно (рис. 5.20). Согласно законам физики, при достаточно малом диаметре волокна и соответствующей длине волны через световод будет распространяться единственный луч. Вообще сам факт подбора диаметра сердечника под одномодовый режим распространения сигнала говорит о частности каждого отдельного варианта конструкции световода. То есть при употреблении понятий много- и одномодовости следует понимать характеристики волокна относительно конкретной частоты используемой волны. Распространение лишь одного луча позволяет избавиться от межмодовой дисперсии. Именно эта дисперсия имеет наибольшее влияние на пропускную способность канала. Одномодовое волокно исключает возможность распространения нескольких лучей, поэтому межмодовая дисперсия отсутствует, в связи с чем одномодовые световоды на порядки производительнее. На данный момент применяется сердечник с внешним диаметром около 8 микрон. Одномодовая технология более тонкая, дорогая и применяется в настоящее время в телекоммуникациях.

2. Многомодовые волокна подразделяются на ступенчатые и градиентные.

Основное различие между вариантами оптического волокна состоит в свойствах применяемого в них сердечника.

У ступенчатых световодов показатель преломления сердцевинны постоянен (рис. 5.21).

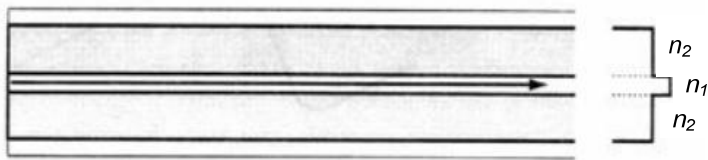


Рис. 5.20. Одномодовое волокно

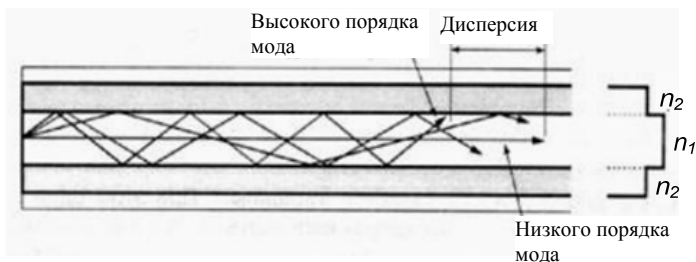


Рис. 5.21. Ступенчатое многомодовое волокно

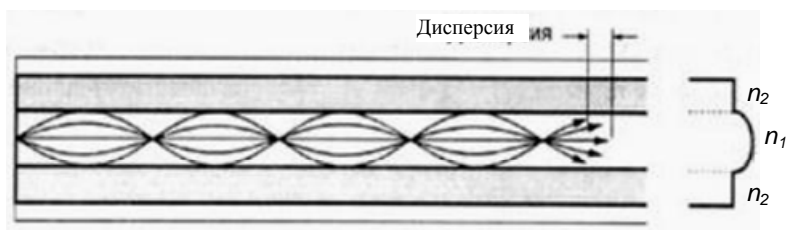


Рис. 5.22. Градиентное многомодовое волокно

Градиентный световод имеет неравномерную плотность материала сердцевины (рис. 5.22).

Основные параметры оптических волокон

1. Затухание. Природа затухания может быть различной: поглощение света; рассеивание излучения; неоднородность световода и т.д.

2. Используемые длины волн. Именно «окна прозрачности» определили длины волн, которые используются в современных оптоволоконных технологиях. Чаще всего это три длины – 850, 1300 и 1500 нм. Наиболее качественной и высокоскоростной связью обладают каналы на основе волн длиной 1500 нм. Однако оконечное оборудование, способное работать на данной длине волны, значительно дороже и предполагает применение только лазерных источников света. Поэтому зачастую возникает проблема оценки экономической целесообразности применения подобных сетей. Рабочая длина волны 850 нм наиболее характерна для многомодовых волокон, тогда как одномодовые волокна применяются для волн длиной на 1500 нм.

3. Длина волны передаваемого по световоду сигнала связана с диаметром сердцевины d . Критическая длина волны и частота передаваемого сигнала по световоду равны:

$$\lambda_{\text{кр}} = d \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}; \quad (5.38)$$

$$f_{\text{кр}} = \frac{c}{\lambda_{\text{кр}}}, \quad (5.39)$$

где c – скорость света.

4. Волновое сопротивление световода зависит от коэффициента преломления n среды распространения сигнала

$$Z_{\text{св}} = \frac{Z_0}{n} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}. \quad (5.40)$$

Достоинства волоконно-оптической технологии

Оптические волокна имеют очень малое (по сравнению с другими средами) затухание светового сигнала в волокне. Лучшие образцы российского волокна имеют затухание 0,22 дБ/км на длине волны 1,55 мкм, что позволяет строить линии связи длиной до 100 км без регенерации сигналов. Для сравнения, лучшее волокно Sumitomo на длине волны 1,55 мкм имеет затухание 0,154 дБ/км. В оптических лабораториях США разрабатываются ещё более «прозрачные», так называемые фтороцирконатные волокна с теоретическим пределом порядка 0,02 дБ/км на длине волны 2,5 мкм. Лабораторные исследования показали, что на основе таких волокон могут быть созданы линии связи с регенерационными участками через 4600 км при скорости передачи порядка 1 Гбит/с.

Недостатки волоконно-оптической технологии

1. Необходимы также оптические коннекторы (соединители) с малыми оптическими потерями и большим ресурсом на подключение-отключение. Точность изготовления таких элементов линии связи должна соответствовать длине волны излучения, т.е. погрешности должны быть порядка доли микрона. Поэтому производство таких компонентов оптических линий связи очень дорогостоящее.

2. Другой недостаток заключается в том, что для монтажа оптических волокон требуется прецизионное, а потому дорогое, технологическое оборудование.

3. Как следствие, при аварии (обрыве) оптического кабеля затраты на восстановление выше, чем при работе с медными кабелями.

Контрольные вопросы

1. Назначение направляющих систем – линий передачи.
2. Как распространяются ЭМВ в линиях передачи?
3. Классификация линий передачи.
4. Особенности построения витой пары.
5. Особенности распространения ЭМВ в коаксиальной линии передачи.
6. Полосковые линии передачи.
7. Волноводные линии передачи.
8. Возбуждение и распространение ЭМВ в волноводах.
9. Волоконно-оптические линии передачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленном учебном пособии рассмотрены физические процессы, происходящие при распространении радиоволн в волноводах, объёмных резонаторах, замедляющих структурах, ферритах, свободном пространстве и вблизи поверхности Земли. Рассмотрены физические законы и явления, описывающие особенности распространения света в оптических волокнах.

Учебное пособие предполагает наличие у читателя знаний математики и общей физики в объёме, соответствующем второму году обучения в университете. Однако изложение построено таким образом, что менее подготовленный читатель усвоит все необходимые понятия. Наряду со строгими решениями уравнений в процессе изложения материала при необходимости применяются менее строгие, но более наглядные методы. Материал снабжён большим количеством рисунков. Данное учебное пособие будет полезно не только студентам, но и инженерно-техническим работникам, работающим в области радиосвязи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петров, Б. М.** Электродинамика и распространение радиоволн : учебник для вузов / Б. М. Петров. – 2-е изд., испр. – Москва : Горячая линия–Телеком, 2007. – 558 с., ил.
2. **Новокшанов, М. Н.** Электродинамика и распространение радиоволн / М. Н. Новокшанов. – Рига : РВВАИУ, 1981. – 563 с.
3. **Фальковский, О. И.** Техническая электродинамика : учебник / О. И. Фальковский. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2009. – 432 с.
4. **Пименов, А. Д.** Техническая электродинамика / А. Д. Пименов. – Москва : Радио и связь, 2005. – 483 с.
5. **Никольский, В. В.** Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – Москва : Наука, 1989. – 543 с.
6. **Максимов, В. М.** Линии передачи СВЧ-диапазона : учебное пособие для вузов / В. М. Максимов. – Москва : САЙНС-ПРЕСС, 2002. – 460 с.
7. **Грудинская, Г. П.** Распространение радиоволн / Г. П. Грудинская. – Москва : Высшая школа, 1975. – 280 с.
8. **Никольский, В. В.** Теория электромагнитного поля / В. В. Никольский. – Москва : Высшая школа, 1961. – 371 с.
9. **Никольский, В. В.** Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – Москва : Наука, 1989. – 544 с.
10. **Вайнштейн, Л. А.** Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. – Москва : Радио и связь, 1988. – 440 с.
11. **Гольдштейн, Л. Д.** Электромагнитные поля и волны / Л. Д. Гольдштейн, Н. В. Зернов. – Москва : Связь, 1971. – 602 с.
12. **Марков, Г. Т.** Возбуждение электромагнитных волн / Г. Т. Марков, А. Ф. Чаплин. – Москва–Ленинград : Энергия, 1967. – 376 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ	4
1.1. Электростатическое поле зарядов. Закон Кулона	4
1.2. Напряжённость электрического поля. Потенциал	5
1.3. Поле системы зарядов. Электрический диполь	7
1.4. Теорема Остроградского–Гаусса, материальные уравнения ...	8
1.5. Энергия электростатического поля	11
2. ПОСТОЯННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ	12
2.1. Постоянный электрический ток. Вектор плотности тока	12
2.2. Закон Ома в дифференциальной форме. Уравнение непрерывности	12
2.3. Закон Ампера. Магнитная индукция	14
2.4. Напряжённость магнитного поля	15
2.5. Магнитное поле рамки с постоянным током	16
2.6. Энергия магнитного поля	17
3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ	18
3.1. Полная система уравнений Максвелла	18
3.2. Волновое уравнение для электромагнитных волн	20
3.3. Продольные и поперечные волны	24
3.4. Плотность энергии электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга	25
3.6. Граничные условия для векторов электромагнитного поля ...	28
3.7. Поляризация электромагнитных волн	29
3.8. Классификация сред по их электрическим свойствам, граничная частота	32
3.9. Фазовая и групповая скорости, длина волны	36
3.10. Поверхностный эффект	38
3.11. Падение плоских ЭМВ на границу раздела двух сред	39
3.12. Явление полного преломления, угол Брюстера	42
3.13. Полное внутреннее отражение, критический угол	44
4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭМВ	47
4.1. Физическая сущность процесса излучения ЭМВ в свободное пространство	47
4.2. Элементарный электрический вибратор	49
4.3. Электромагнитное поле элементарной рамки	57
4.4. Электромагнитное поле источника Гюйгенса	63

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧИ	67
5.1. Назначение направляющих систем – линий передачи	67
5.2. Определение ЭМВ в линиях передачи	67
5.3. Классификация линий передачи	70
5.4. Витая пара	71
5.5. <i>T</i> -волна в коаксиальной линии передачи	73
5.6. Полосковые линии передачи	76
5.7. Волноводные линии передачи. Возбуждение и распространение ЭМВ в волноводах	78
5.8. Волоконно-оптические линии передачи	85
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	91
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	92

Учебное издание

ПАНАСЮК Юрий Николаевич
ПУДОВКИН Анатолий Петрович

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию И. В. Евсеева

ISBN 978-5-8265-1266-1



Подписано в печать 24.04.2014.
Формат 60 × 84 / 16. 5,58 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 211

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru