

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»

Г.М. Куликов, А.Д. Нахман

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА**

*Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и  
техническому образованию в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по направлениям подготовки: 110800.62 – Агроинженерия,  
190700.62 – Технология транспортных средств,  
270800.62 – Строительство (Бакалавриат),  
270800.68 – Строительство (Магистратура)*



---

Тамбов  
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
2013

УДК 519.711.3 (075.8)  
ББК В161.68я73  
К903

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой компьютерного и математического моделирования  
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»  
*А.А. Арзамасцев*

Заслуженный деятель науки Российской Федерации,  
доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
*А.В. Богословский*

**Куликов, Г.М.**

К903 Математическое моделирование механических колебаний и процессов тепломассопереноса : учебное пособие / Г.М. Куликов, А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 96 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1197-8.

Изложен материал по теме «Ряды и интеграл Фурье. Метод Фурье». Рассмотрен широкий круг приложений метода Фурье к решению задач математической физики.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 110800.62 – Агроинженерия, 190700.62 – Технология транспортных средств, 270800.62 – Строительство (Бакалавриат), 270800.68 – Строительство (Магистратура).

УДК 519.711.3 (075.8)  
ББК В161.68я73

**ISBN 978-5-8265-1197-8**

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2013

## ВВЕДЕНИЕ

---

Важнейшим средством научного познания является моделирование – замещение некоторого объекта  $A$  (оригинала) другим объектом  $M$  (моделью), что позволяет изучить интересующие исследователя свойства оригинала. Другими словами, модель является схемой (как правило, намеренно упрощённой) объекта  $A$ , относительно некоторой системы  $S$  характеристик, если  $M$  имитирует  $A$  по этим характеристикам. Целью моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; модель здесь выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта.

Задачи, решаемые с помощью моделей, основаны на следующей общей схеме представления модели:

$$X \rightarrow W \rightarrow Y.$$

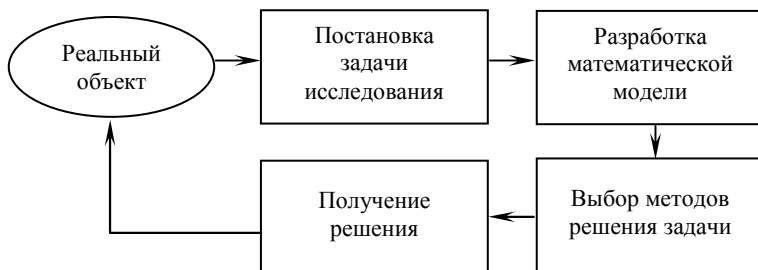
Здесь  $X$  – вектор входных (экзогенных) переменных,  $Y$  – вектор выходных переменных (исходы модели);  $W$  – так называемый оператор модели (оператор модели обеспечивает преобразование входной информации в выходную в соответствии с задачей, решаемой на модели). Возможны следующие три варианта упомянутых задач:

1. *Прямая задача*: известны  $X$  и  $W$ , необходимо найти  $Y$ .
2. *Обратная задача 1*: известны  $Y$  и  $W$ , необходимо найти  $X$ .
3. *Обратная задача 2*: известны  $X$  и  $Y$ , необходимо найти  $W$ .

В последней задаче возможны случаи «чёрного ящика» – оператор системы полностью неизвестен, и «серого ящика» – при известной структуре оператора не известны значения параметров.

Приближённое представление реальных объектов, процессов или систем, выраженное в математических терминах и сохраняющее существенные черты оригинала, называется *математическим моделированием*. Основные свойства объекта (процесса, системы), его параметры, внутреннее и внешние связи в математической модели описываются в количественной форме с помощью логико-математических конструкций. Другими словами, прикладная задача «переводится» на формальный математический язык (построение модели), и решается средствами математики. Полученное решение применяется к изучаемому объекту, т.е. следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной предметной области.

Схема применения математической модели при решении реальных задач имеет, таким образом, следующий вид:



Настоящее пособие посвящено вопросам математического моделирования механических колебаний и процессов теплопереноса. В качестве вектора входных переменных выбирается набор физических характеристик объектов, подверженных механическим колебаниям (струна, стержень), или теплофизических характеристик материалов, в которых происходит теплообмен. Оператор  $W$  модели (дифференциальное уравнение в частных производных с граничными и начальными условиями, накладываемыми на его решение) заранее не задан: построение  $W$  осуществляется на основе соответствующих физических законов и является здесь составной частью процесса математического моделирования. Соответствующие «исходы модели» определяют на основе решения получаемой краевой задачи методом Фурье.

Ввиду специфики рассматриваемых нами моделей первые две главы пособия посвящены общей теории тригонометрических рядов и интегралов Фурье. При этом отметим, что ряды Фурье, сами по себе, служат математической моделью разложения периодического процесса в сумму простейших гармоник. В главе 3 метод Фурье применяется к решению гиперболических уравнений малых поперечных колебаний струны и малых продольных колебаний стержня, а также к решению параболического уравнения, описывающего процессы теплопроводности и диффузии.

# Глава 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

## 1.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Напомним основные положения теории функциональных рядов.

1. Бесконечная сумма членов функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$ , т.е. сумма вида

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1.1.1)$$

называется функциональным рядом. При каждом значении аргумента  $x = x_0$  получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0), \quad (1.1.2)$$

сходящийся или расходящийся. Точка  $x = x_0$  есть точка сходимости ряда (1.1.1), если ряд (1.1.2) оказывается сходящимся, т.е. если существует число  $S$ , равное пределу вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0));$$

$S$  называется суммой ряда (1.1.2).

2. Множество  $D$  всех точек сходимости ряда (1.1.1) называется его областью сходимости. Другими словами, на множестве  $D$  задана функция  $f$ , сопоставляющая каждому  $x$  сумму

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (1.1.3)$$

Запись (1.1.3) называется также разложением функции  $f(x)$  по системе  $\{f_n(x)\}$ .

3. Привычные свойства дифференцируемости, интегрируемости сумм и другие, вообще говоря, не распространяются на бесконечные суммы (ряды). Чтобы они сохранялись, требуется «усилить» требование сходимости ряда. А именно, потребуем, чтобы на множестве  $D = [a, b]$  существовала функция  $f(x)$ , такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \max_{x \in [a, b]} |f(x) - S_n(x)| \right\} = 0, \quad (1.1.4)$$

где  $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$  –  $n$ -я частичная сумма ряда (1.1.1). Если выполнено условие (1.1.4), то ряд (1.1.1) называется равномерно сходящимся на отрезке  $[a, b]$  к сумме  $f(x)$ .

Иначе говоря (вспомним определение предела!), для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  (зависящий только от  $\varepsilon$ ), такой что наибольшее на отрезке  $[a, b]$  значение  $|f(x) - S_n(x)|$  меньше, чем  $\varepsilon$  при всех  $n > N$ . Значит, при любых  $x \in [a, b]$  частичные суммы  $S_n(x)$  «уклоняются» от  $S(x)$  менее, чем на  $\varepsilon$ , если  $n$  достаточно велико; таким образом все графики  $y = S_n(x)$ ,  $n > N$ , находятся в полосе между линиями  $y = f(x) - \varepsilon$  и  $y = f(x) + \varepsilon$  (рис. 1.1.1).

4. Следующая теорема (Вейерштрасса) является простым достаточным условием равномерной сходимости ряда (1.1.1) на отрезке  $[a, b]$ .

Пусть существует числовая последовательность  $\{a_n\}$  такая, что для всех  $x \in [a, b]$

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

и ряд  $\sum_{n=1}^m a_n$  – сходящийся.

Тогда ряд (1.1.1) равномерно сходится к некоторой  $f(x)$  на  $[a, b]$ .

5. Пусть ряд (1.1.1) равномерно сходится к сумме  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и все функции  $f_n(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ . Имеют место свойства:

а) сумма ряда  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ;

б) 
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx \quad (1.1.5)$$

для любого отрезка  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$  (свойство почленной интегрируемости);

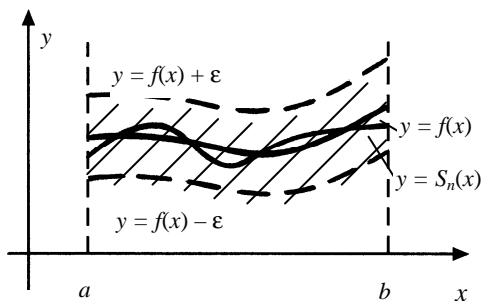


Рис. 1.1.1

в) если, кроме того, все  $f_n(x)$  дифференцируемы и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$  равномерно сходится на  $[a, b]$ , то  $f(x)$  дифференцируема на  $[a, b]$  и

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

(свойство почленной дифференцируемости).

Свойством б) нам предстоит воспользоваться (в параграфе 1.3), поэтому остановимся на его доказательстве.

Во-первых, все интегралы в равенстве (1.1.5) существуют, так как  $f_n(x)$  – непрерывны по условию, а  $f(x)$  – согласно свойству а).

Во-вторых, ряд (1.1.5) числовой, а его сходимость к сумме

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

означала бы, что разность

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \sigma_m \tag{1.1.6}$$

бесконечно мала при  $m \rightarrow \infty$ ; здесь

$$\sigma_m = \sum_{n=1}^m \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx -$$

$m$ -я частичная сумма ряда (1.1.5). Поскольку конечная сумма интегралов (по  $[\alpha, \beta]$ ) есть интеграл суммы функций  $f_n(x)$ , то

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \sigma_m \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \sum_{n=1}^m \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{n=1}^m f_n(x) \right) dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \left( f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right| dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \left( \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right| \right) dx. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Использовано свойство: модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля соответствующей функции. Числовая последовательность

$$\rho_m = \max_{x \in [a, b]} \left| f(x) - \sum_{n=1}^m f_n(x) \right|$$

бесконечно мала (при  $m \rightarrow \infty$ ) на основании определения (1.1.4) равномерной сходимости. Тогда неравенство (1.1.7) означает:

$$0 \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \sigma_m \right| \leq \rho_m \int_{\alpha}^{\beta} dx = (\alpha - \beta) \rho_m,$$

откуда и вытекает, что разность (1.1.6) бесконечно мала вместе с  $\rho_m$ . Свойство б) доказано.

6. Напомним, что степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots, \quad (1.1.8)$$

обладающий хотя бы одной точкой сходимости  $x_0 \neq 0$ , обладает интервалом сходимости (абсолютной сходимости)  $(-R, R)$ ,  $R > 0$ . Радиус  $R$  сходимости ряда (1.1.8) может быть найден, например, в виде

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

При этом на всяком отрезке  $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$  сходимость ряда (1.1.8) равномерная. Следовательно, сумма  $S(x)$  степенного ряда обладает всеми «хорошими» свойствами п. 5; более того  $S(x)$  дифференцируема сколь угодно много раз в интервале сходимости.

Итак, разложения по степенным функциям возможны лишь для «очень хороших» функций  $f(x)$ . Какие же последовательности элементарных функций пригодны для разложения, например разрывных функций (сигналы в электротехнике и т.п.)? Оказывается, система тригонометрических функций

$$\{\cos nx; \sin nx\} n = 0, 1, \dots$$

служит простым и практически всеобъемлющим средством подобных разложений. Эти и другие соображения приводят к рассмотрению тригонометрических рядов, изучаемых в главе I.



## 1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О РАЗЛОЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

1. Математической моделью простейшего периодического процесса (простейшее гармоническое колебание) служит соотношение

$$y = A \sin(\omega t + \gamma), \quad (1.2.1)$$

где  $y$  – величина отклонения точки от положения равновесия;  $A$  – амплитуда колебания;  $\omega$  – круговая частота;  $\gamma$  – начальная фаза. Легко проверить, что  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – период функции (1.2.1), т.е. период колебаний:

$$\begin{aligned} y(t+T) &= A \sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \gamma\right) = A \sin(\omega t + \gamma + 2\pi) = \\ &= A \sin(\omega t + \gamma) = y(t). \end{aligned}$$

Функцию (1.2.1) в дальнейшем называем простейшей гармоникой, её график изображен на рис. 1.2.1.

2. Рассмотрим более сложный процесс – результат наложения нескольких простейших гармоник. Например, в случае наложения двух колебаний, имеем движение, осуществляемое по закону

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2). \quad (1.2.2)$$

Оно будет периодическим в том и только в том случае, если существует  $T > 0$ , для которого

$$T = n_1 \frac{2\pi}{\omega_1} \text{ и } T = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2},$$

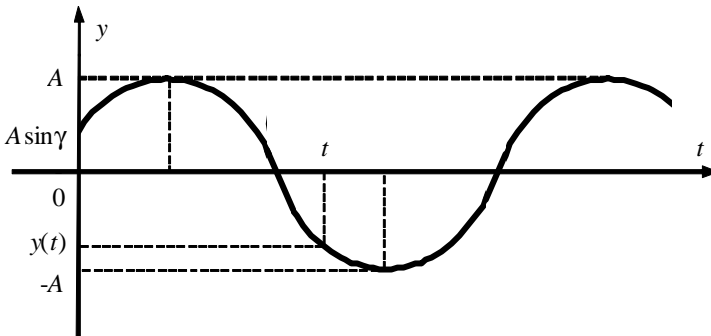


Рис. 1.2.1

где  $n_1$  и  $n_2$  – натуральные числа, откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \text{т.е. } \omega_2 = n_2\omega \text{ и } \omega_1 = n_1\omega$$

с некоторыми  $\omega > 0$ . Следовательно, периодическое движение (1.2.2) происходит по закону

$$y = A_1 \sin(n_1\omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(n_2\omega t + \gamma_2);$$

его период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

В частности, наложением двух простейших гармоник вызвано периодическое движение ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ )

$$y = A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(2\omega t + \gamma_2).$$

Складывая подобным образом  $m$  простейших гармоник вида

$$y_k = A_k \sin(k\omega t + \gamma_k),$$

получаем закон движения

$$y = \sum_{k=1}^m A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$$

с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

3. Возникает обратный вопрос: дано периодическое движение; можно ли его представить в виде суммы простейших гармоник (т.е. как сложное гармоническое колебание).

Оказывается, практически всегда это возможно, если привлечь к рассмотрению бесконечные суммы, т.е. ряды из простейших гармоник. Более точно, если  $f(t)$  – заданная периодическая (с периодом  $T$ ) функция, то речь идёт о представлении вида

$$f(t) = \sum_n A_n \sin(n\omega t + \gamma_n),$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  и сумма, вообще говоря – бесконечная.

4. Сформулируем задачу в несколько ином виде. Для этого обозначим через  $\ell$  полупериод  $\ell = \frac{T}{2}$ , тогда каждая гармоника имеет вид

$$\begin{aligned}
 A_n \sin \left( n \frac{\pi}{\ell} t + \gamma_n \right) &= A_n \sin \gamma_n \cos \frac{\pi}{\ell} n t + A_n \cos \gamma_n \sin \frac{\pi}{\ell} n t = \\
 &= a_n \cos \frac{\pi}{\ell} n t + b_n \sin \frac{\pi}{\ell} n t,
 \end{aligned}$$

где  $a_n = A_n \sin \gamma_n$ ,  $b_n = A_n \cos \gamma_n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ .

Если дополнить сумму постоянным слагаемым, обозначив его через  $\frac{a_0}{2}$ , то речь идёт о представлении  $2\ell$  – периодической функции в виде суммы ряда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi}{\ell} n t + b_n \sin \frac{\pi}{\ell} n t. \quad (1.2.3)$$

Точнее, возникают две задачи: а) каковы коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$  ряда (1.2.3); б) при каких условиях (на функцию  $f$ ) ряд (1.2.3) сходится при всех  $t$  и его сумма совпадает с  $f(t)$ .

Начнём с рассмотрения первой задачи.

### 1.3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ

1. Пусть функция  $f$  имеет период  $2\pi$  (более общий случай изучим ниже) и существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx.$$

Соотношение (1.2.3) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \quad (1.3.1)$$

Идея нахождения коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  состоит в почленном интегрировании (1.3.1) после его умножения на любую из функций вида  $\cos mx$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) и  $\sin mx$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Для самой возможности такого интегрирования предполагаем равномерную (на  $[-\pi, \pi]$ ) сходимость соответствующих рядов (пусть, например, получающиеся  $a_n$  и  $b_n$  удовлетворяют условию сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|),$$

так что применима теорема Вейерштрасса). Получив формулы для  $a_n$  и  $b_n$  при сделанных предположениях, сопоставим затем любой рассматриваемой функции ряд (1.3.1) с найденными коэффициентами.

Итак, приступаем к реализации нашего плана действий.

2. Потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Л е м м а. При любых целых неотрицательных  $n$  и  $m$  имеют место равенства:

$$а) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \text{если } n \neq 0;$$

$$б) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0;$$

$$в) \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \neq 0; \end{cases}$$

$$г) \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \pi, & m = n \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении интегралов. Например, установим соотношение п. в), пользуясь формулой

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)).$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos (m-n)x + \cos (m+n)x) dx = \\ &= \frac{1}{2(m-n)} \sin (m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m+n)} \sin (m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{при } m \neq n, \end{aligned}$$

так как  $\sin k\pi = 0$  для любого целого  $k$ .

В частности, при  $m=0, n \neq 0$  получаем второе утверждение п. а).

Если же  $m=n$ , то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4n} \sin 2nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

чем и завершаем доказательство п. в). Остальные утверждения доказываются аналогично.

3. Почленно проинтегрируем равенство (1.3.1):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx.$$

Согласно утверждению а) леммы получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + 0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (1.3.2)$$

4. Найдём коэффициенты  $a_n$  при  $n = 1, 2, \dots$ . Умножим обе части соотношения (1.3.1) на  $\cos mx$ , где  $m$  – произвольное натуральное число. Затем почленно проинтегрируем по отрезку  $[-\pi, \pi]$ . Получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + \\ &+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Воспользуемся результатами п. а), б), в) леммы п. 2. В правой части равенства (1.3.3) ненулевым будет только интеграл от произведения косинусов при  $n = m$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi,$$

переобозначая  $m$  через  $n$ , получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.4)$$

5. Аналогично п. 4, умножая обе части (1.3.1) на  $\sin mx$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), почленно интегрируя и пользуясь результатами п. а), б), г) леммы, получаем:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3.5)$$

6. Итак, в предложениях п. 1, если разложение функции  $f(x)$  в тригонометрический ряд (1.3.1) возможно, то его коэффициенты имеют вид (1.3.2), (1.3.4), (1.3.5). Теперь каждой интегрируемой (с модулем) на  $[-\pi, \pi]$  и  $2\pi$ -периодической функции  $f(x)$  сопоставим ряд вида (1.3.1), с коэффициентами (1.3.2), (1.3.4), (1.3.5). В этом случае (1.3.1) называется рядом Фурье, а (1.3.2), (1.3.4), (1.3.5) – коэффициентами Фурье.

Заметим, что формула для  $a_0$  есть случай (1.3.4) при  $n = 0$ . Именно по этой причине «нулевой» член был обозначен через  $\frac{a_0}{2}$  (а не через  $a_0$ ): теперь формулы для всех  $a_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  имеют один и тот же вид (1.3.4). Заметим также, что интегралы (1.3.4), (1.3.5) существуют, так как  $f(x)$  интегрируема с модулем, а

$$\begin{aligned} |f(x)\cos nx| &\leq |f(x)|, \\ |f(x)\sin nx| &\leq |f(x)|. \end{aligned}$$

#### 1.4. РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИИ С ПЕРИОДОМ $2\ell$

1. Рассмотрим случай функции  $f(x)$ , интегрируемой с модулем на произвольном отрезке вида  $[-\ell, \ell]$  и  $2\ell$ -периодической. Сопоставим ей тригонометрический ряд вида (1.2.3):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi}{\ell} nx + b_n \sin \frac{\pi}{\ell} nx. \quad (1.4.1)$$

2. Получение формул для коэффициентов Фурье основано на уже изученном случае  $\ell = \pi$ . Положим в (1.4.1)

$$z = \frac{\pi}{\ell} x, \text{ тогда } x = \frac{\ell}{\pi} z; z \in [-\pi, \pi], \text{ если } x \in [-\ell, \ell] \quad (1.4.2)$$

и

$$f\left(\frac{\ell}{\pi} z\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz + b_n \sin nz. \quad (1.4.3)$$

Теперь  $a_n$  и  $b_n$  – коэффициенты (Фурье) ряда вида (1.4.3), сопоставленного  $f$  как функции от  $z$  (стоит заметить, что  $f$   $2\pi$ -периодична по  $z$ ); например,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} z\right) \cos nz \, dz.$$

Возвращаясь к переменной  $x$  (см. (1.4.2)) в этом интеграле и замечая, что  $dz = \frac{\pi}{\ell} dx$ , получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \left( \cos n \frac{\pi}{\ell} x \right) \frac{\pi}{\ell} dx,$$

т.е.

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi}{\ell} nx \, dx; \quad (1.4.4)$$

в частности,

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) dx.$$

3. Аналогичным образом, получаем:

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi}{\ell} nx \, dx. \quad (1.4.5)$$

4. Итак, если разложение (1.4.1) возможно, то его коэффициенты (Фурье)  $a_n$  ( $n=0, 1, \dots$ ) и  $b_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) вычисляются по формулам (1.4.4), (1.4.5).

## 1.5. РЯДЫ ФУРЬЕ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Формулы для вычисления коэффициентов Фурье и сама запись ряда упрощаются, в случае, когда  $f(x)$  чётна или нечётна. Естественно ожидать (и это мы установим), что чётная  $f(x)$  раскладывается в ряд по чётным же функциям, т.е. только по косинусам; нечётная – только по синусам.

1. Пусть  $g(x)$ ,  $x \in [-\ell, \ell]$  интегрируема (с модулем) на этом отрезке. Установим следующее вспомогательное утверждение.

Л е м м а. 1) если  $g(x)$  чётна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx = 2 \int_0^{\ell} g(x) dx.$$

2) если  $g(x)$  нечётна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся очевидным равенством

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx = \int_{-\ell}^0 g(x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx. \quad (1.5.1)$$

Сделаем замену переменных  $X = -x$  в первом интеграле; при этом  $dx = -dX$  и  $X$  изменяется от  $\ell$  до  $0$ .

Если  $g(x)$  чётна, то  $g(x) = g(-X) = g(X)$ . В этом случае

$$\int_{-\ell}^0 g(x) dx = \int_{\ell}^0 g(X) (-dX) = \int_0^{\ell} g(X) dX$$

и правая часть (1.5.1) тогда равна

$$2 \int_0^{\ell} g(x) dx,$$

чем и доказано первое утверждение леммы.

В случае нечётной  $g(x)$  при той же замене переменных

$$g(x) = g(-X) = -g(X)$$

и

$$\int_{-\ell}^0 g(x) dx = \int_{\ell}^0 (-g(X)) (-dX) = - \int_0^{\ell} g(X) dX,$$

а тогда правая часть (1.5.1) имеет вид

$$- \int_0^{\ell} g(x) dx + \int_0^{\ell} g(x) dx = 0;$$

утверждение 2) доказано.

Смысл леммы легко иллюстрируется геометрически.



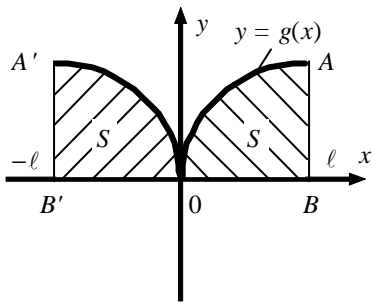


Рис. 1.5.1

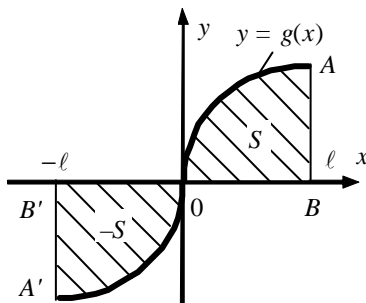


Рис. 1.5.2

Если  $g(x)$  чётна, то

$$\int_{-l}^l g(x) dx = S + S = 2 \int_0^l g(x) dx,$$

где  $S$  – площадь криволинейной трапеции  $OAB$  (рис. 1.5.1); если же  $g(x)$  нечётна, то интеграл равен  $(-S) + S = 0$ , см. рис. 1.5.2.

2. Установим, что для чётной  $2\ell$ -периодической функции  $f(x)$

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (1.5.2)$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi}{\ell} nx dx. \quad (1.5.3)$$

Заметим, что произведение

$$g(x) = f(x) \cos \frac{\pi}{\ell} nx \text{ – чётная функция;}$$

$$q(x) = f(x) \sin \frac{\pi}{\ell} nx \text{ – нечётная функция.}$$

Действительно, например

$$q(-x) = f(-x) \sin \frac{\pi}{\ell} n(-x) = f(x) \left( -\sin \frac{\pi}{\ell} nx \right) = -q(x),$$

т.е.  $q(x)$  нечётна; аналогично проверяется чётность  $g(x)$ .

На основании первого утверждения леммы получаем тогда, что

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi}{\ell} nx dx = \frac{1}{\ell} \cdot 2 \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi}{\ell} nx dx, \quad n = 0, 1, \dots,$$

т.е. соотношения (1.5.3) доказаны; далее, в силу второго утверждения леммы

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi}{\ell} nx dx = 0,$$

т.е. равенство (1.5.2) установлено.

Итак, если  $f(x)$  чётна, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi}{\ell} nx,$$

(ряд по косинусам), где  $a_0$  и  $a_n$  могут быть вычислены по формулам (1.5.3).

В частности, при  $\ell = \pi$  (случай  $2\pi$ -периодической функции)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

3. Аналогично п. 2 доказывается, что для  $2\ell$ -периодической нечётной функции коэффициенты Фурье  $a_0 = 0$ ;  $a_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ );

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi}{\ell} nx dx,$$

т.е. ряд Фурье содержит одни только синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi}{\ell} nx.$$

В частности, нечётная  $2\pi$ -периодическая функция имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx; \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

## 1.6. УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ

1. Рассмотрим вопрос (см. п. 4, б) параграфа 1.2) о сходимости ряда Фурье. Именно, нас интересуют те условия на  $f(x)$ , которые бы обеспечивали сходимость ряда (1.4.1) на отрезке  $[-\ell, \ell]$  и, при этом, чтобы сумма ряда во всех точках  $x \in [-\ell, \ell]$  совпадала с  $f(x)$ .

Как оказывается, выяснение таких условий является довольно сложным делом, поэтому ограничимся только схемой рассуждений.

2. Для простоты записей считаем, что  $f(x)$   $2\pi$ -периодична. Частичные суммы  $N$ -го порядка ряда Фурье

$$S_N(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad N = 1, 2, \dots$$

После подстановки выражений для коэффициентов Фурье принимают вид

$$S_N(f, x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right) + \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \right) \cos nx + \\ + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \right) \sin nx;$$

при этом в формуле для  $a_n$  и  $b_n$  переменную интегрирования нам удобно обозначить через  $t$ . Записывая сумму интегралов в виде одного интеграла, мы получим:

$$S_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos n(t-x) \right) dt, \quad (1.6.1)$$

если использовать формулу косинуса суммы. После тригонометрических преобразований элементарного характера (их мы опускаем) сумма, содержащаяся в скобках, принимает следующий компактный вид (называемый ядром Дирихле):

$$\frac{\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) (t-x)}{2 \sin \frac{1}{2} (t-x)}.$$

В интеграле (1.6.1) теперь делаем замену переменных  $\tau = t - x$ . Интеграл по новому отрезку  $[-\pi - x, \pi - x]$  оказывается равным интегралу по

$[-\pi, \pi]$  (этот факт мы установим ниже в более общей ситуации). Следовательно,

$$S_N(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\tau+x)}{\sin \frac{1}{2}\tau} \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \tau d\tau. \quad (1.6.2)$$

Мы получили очень важную интегральную форму частных сумм ряда Фурье (интеграл Дирихле).

3. Вспомним определение сходимости ряда в точке  $x$ : сходимость к значению  $f(x)$  означает, что (параграф 1.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_N(f, x) - f(x)) = 0.$$

Чтобы получить в интегральном виде записанную в скобках разность, заметим, что

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \tau}{2 \sin \frac{1}{2} \tau} d\tau,$$

поскольку интеграл от ядра Дирихле (по промежутку  $[-\pi, \pi]$ ) равен числу  $\pi$ ; последний факт легко проверяется на основании леммы параграфа 1.3.

Следовательно,

$$S_N(f, x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\tau+x) - f(x)}{2 \sin \frac{1}{2}\tau} \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \tau d\tau. \quad (1.6.3)$$

4. Коэффициенты Фурье  $a_N$  и  $b_N$  всякой  $2\pi$ -периодической интегрируемой (с модулем) функции  $f(x)$  при  $N \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. Не доказывая этот факт, отметим, что его можно было ожидать ввиду необходимого признака сходимости ряда.

Обозначим

$$\varphi_x(\tau) = \frac{f(\tau+x) - f(x)}{2 \sin \frac{1}{2}\tau}.$$

При больших  $N$  интеграл (1.6.3) «почти не отличается» от синус-коэффициента Фурье функции  $\varphi_x(\tau)$ . Следовательно, если при выбранном нами  $x \in [-\pi, \pi]$  функция  $|\varphi_x(t)|$  интегрируема на  $[-\pi, \pi]$ , то раз-

ность  $S_N(f, x) - f(x)$  вместе с синус-коэффициентом для  $\varphi_x(\tau)$  стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ .

Сформулируем результат в виде теоремы (признак Дини).

**Т е о р е м а.** Если при данном  $x$  существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(\tau+x) - f(x)}{\sin \frac{1}{2}\tau} \right| d\tau, \quad (1.6.4)$$

то в точке  $x$  ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1.6.5)$$

сходится и имеет сумму, равную  $f(x)$ .

Заметим, что (1.6.4) – несобственный интеграл, существование которого определяется поведением  $\varphi_x(\tau)$  в окрестности точки  $\tau = 0$ .

5. Поскольку выражение  $\varphi_x(\tau)$  при малых  $\tau$  ведёт себя также, как разностное отношение в определении производной, то существование интеграла (1.6.4) обеспечено условием дифференцируемости в точке  $x$  функции  $f$ .

Итак, ряд Фурье сходится и имеет своей суммой  $f(x)$  в каждой точке  $x \in [-\pi, \pi]$ , в которой  $f(x)$  – дифференцируема.

Интересно отметить, что условие только лишь непрерывности  $f(x)$  в точке  $x$  не гарантирует сходимости ряда Фурье.

б. Широкий класс функций, которые можно «разложить» в ряд Фурье, определяется следующими условиями (Дирихле):

а)  $f(x)$  предполагается  $2\ell$ -периодической и интегрируемой с модулем на  $[-\ell, \ell]$ ;

б)  $f(x)$  непрерывна на  $[-\ell, \ell]$ , а если имеет разрывы, то лишь первого рода и точек разрыва (на  $[-\ell, \ell]$ ) – конечное количество;

в)  $f(x)$  либо не имеет экстремумов на  $[-\ell, \ell]$ , либо имеет конечное их количество.

Обозначим односторонние пределы  $f(x)$  в точке  $x_0 \in (-\ell, \ell)$  следующим образом:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x); \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x);$$

имеет место

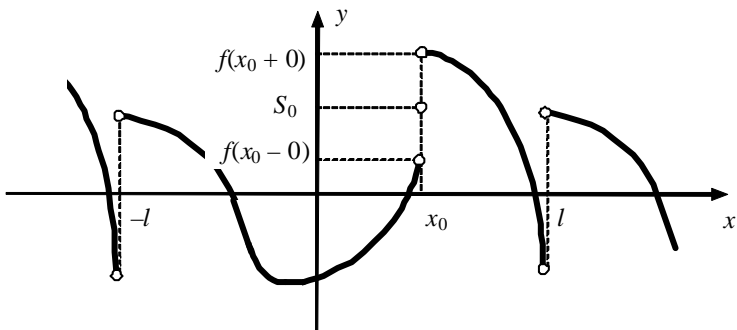


Рис. 1.6.1

**Т е о р е м а Д и р и х л е.** Если  $f(x)$  удовлетворяет условиям Дирихле, то её ряд Фурье (1.4.1) сходится в каждой точке. При этом сумма ряда совпадает с  $f(x)$  во всех точках  $x$ , где  $f(x)$  непрерывна. Во всякой же точке  $x_0$  разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна числу

$$S_0 = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$$

(среднему арифметическому односторонних пределов функции в точке  $x_0$ ).

7. Полезно отметить, что при выполнении условий Дирихле сумму ряда Фурье можно указать и в тех точках (рис. 1.6.1), где сама  $f(x)$  не определена. Заметим также, что признаки Дини и Дирихле сходимости ряда Фурье не вытекают один из другого, но вместе охватывают практически все встречающиеся на практике функции.

## 1.7. ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ФУРЬЕ

1. П р и м е р 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x < 0; \\ b, & 0 < x < \pi; \end{cases} \quad a, b = \text{const}; \quad a \neq b.$$

Р е ш е н и е. 1) Доопределим (графически)  $f(x)$  на всю числовую ось, «сдвигая» на  $2\pi k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ ) основной график (т.е. график, соответствующий  $x \in (-\pi, \pi)$ ), см. рис. 1.7.1.

2) Вычислим коэффициенты Фурье. Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 a dx + \int_0^{\pi} b dx \right) = \frac{1}{\pi} (a\pi + b\pi) = a + b;$$

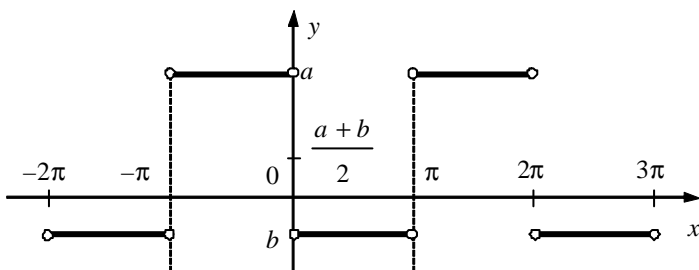


Рис. 1.7.1

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 a \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} b \cos nx \, dx \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{a}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{b}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{a}{n} \cdot 0 + \frac{b}{n} \cdot 0 \right) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 a \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} b \sin nx \, dx \right) = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{a}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{b}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{1}{\pi n} (a(1 - \cos(-n\pi)) + b(\cos n\pi - 1)) = \\
 &= \frac{b-a}{\pi n} (1 - \cos n\pi) = \frac{b-a}{\pi n} (1 - (-1)^n), \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем использованы значения тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}
 \sin 0 &= 0; \quad \cos 0 = 1; \\
 \sin n\pi &= 0; \quad \cos n\pi = (-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

3) Запишем ряд Фурье (см. (1.3.1)):

$$f(x) \sim \frac{a+b}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin nx.$$

Далее, при чётных ( $n = 2k$ ) и нечётных ( $n = 2k - 1$ ) значениях  $n$  получаем соответственно:

$$1 - (-1)^n = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ 2, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{a+b}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(b-a)}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x$$

или

$$f(x) \sim \frac{a+b}{2} + \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

4) Исследуем сходимость полученного ряда Фурье при  $x \in (-\pi, \pi)$ , т.е. на интервале, где была первоначально определена  $f(x)$ . Обратимся к условиям Дирихле. На отрезке  $[-\pi, \pi]$   $f(x)$  имеет три точки разрыва первого рода: концевые точки  $x = \pm\pi$  и  $x = 0$ . Экстремумов у данной функции нет. Следовательно, на основании теоремы п. 6 параграфа 1.6, полученный ряд сходится на  $(-\pi, \pi)$ . Его сумма всюду, кроме точки  $x = 0$ , совпадает с  $f(x)$ ; при  $x = 0$  имеем сумму

$$S = S(0) = \frac{a+b}{2},$$

поскольку  $f(0-0) = a$ ;  $f(0+0) = b$ . Иначе говоря, сумма  $S(x)$  ряда имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x < 0; \\ \frac{a+b}{2}, & x = 0; \\ b, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

**Пример 2.** Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in (0, \pi)$ .

**Решение.** 1) Нам известно (п. 2 параграфа 1.5), что в ряд Фурье по косинусам раскладываются чётные функции; следовательно, доопределяем  $f(x)$  чётным образом (симметрия графика относительно оси  $OY$ ) в смежном интервале  $(-\pi, 0)$ ; далее доопределяем (графическим способом)  $f(x)$  так, чтобы она стала  $2\pi$ -периодической (см. рис. 1.7.2).



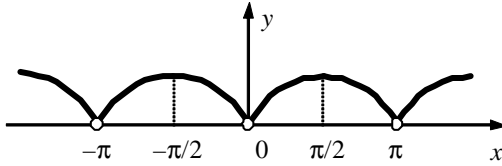


Рис. 1.7.2

2) Вычислим коэффициенты  $a_n$  по формулам (1.5.3):

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(x+nx) + \sin(x-nx)) \, dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) \, dx = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\cos(n+1)x}{n+1} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \Big|_0^{\pi} \right) = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \cos(n+1)\pi}{n+1} - \frac{1 - \cos(n-1)\pi}{n-1} \right) = \frac{1 - (-1)^{n-1}}{\pi} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right) = \\
 &= \frac{2 \left( (-1)^{n-1} - 1 \right)}{(n+1)(n-1)}. \tag{1.7.1}
 \end{aligned}$$

При вычислении использованы формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\cos(n+1)\pi = (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^2 = (-1)^{n-1} = \cos(n-1)\pi.$$

Результат (1.7.1) имеет место при  $n = 0, 2, 3, \dots$ ; в частности, нет необходимости отдельно вычислять  $a_0$ ; при  $n = 0$  получаем из (1.7.1)

$$a_0 = \frac{2(-1-1)}{-1} = 4.$$

Однако при  $n=1$  выражение в правой части (1.7.1) не существует; следовательно, приходится вычислять  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\pi} \right) = 0.$$

Теперь при  $x \in (0, \pi)$

$$\sin x \sim \frac{4}{2} + 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2((-1)^{n-1} - 1)}{n^2 - 1} \cos nx;$$

ненулевыми будут члены при нечётных  $n-1$ , т.е.  $n = 2k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ; следовательно,

$$\sin x \sim 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-2)}{(2k)^2 - 1} \cos 2kx$$

или

$$\sin x = 2 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1}, \quad x \in (0, \pi).$$

3) Знак равенства в последней записи означает, что  $\sin x$  есть сумма полученного ряда Фурье на  $(-\pi, \pi)$ . Это заключение мы сделали на основании теоремы Дирихле, условия которой на  $[-\pi, \pi]$  выполнены (три точки разрыва (устранимого) первого рода:  $x = 0$  и  $x = \pm\pi$ ; две точки экстремума:  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ).

3. П р и м е р 3. Функцию  $f(x) = 2 + x$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(-2; 2)$ .

Р е ш е н и е. 1) Имеем случай (1.4.1) при  $\ell = 2$ . Доопределяем функцию так, чтобы она стала периодической (период  $T = 2\ell = 4$ ), рис.1.7.3.

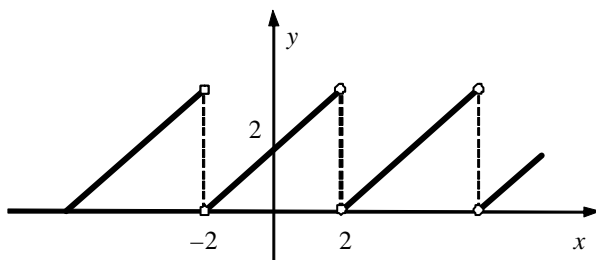


Рис. 1.7.3

2) Вычисляем коэффициенты Фурье, используя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi}{\ell} nx dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2+x) \cos \frac{\pi}{2} nx dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\pi n} (2+x) \sin \frac{\pi}{2} nx \Big|_{-2}^2 - \int_{-2}^2 \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi}{2} nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos \frac{\pi}{2} nx \Big|_{-2}^2 \right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

при  $n = 0$  этот результат «не проходит» (ноль в знаменателе), поэтому вычисляем отдельно  $a_0$ :

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2+x) dx = \frac{1}{2} \left( 2x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{-2}^2 = 4;$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi}{\ell} nx dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (2+x) \sin \frac{\pi}{2} nx dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{\pi n} (2+x) \cos \frac{\pi}{2} nx \Big|_{-2}^2 + \int_{-2}^2 \frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi}{2} nx dx \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \cdot 4 \cos \pi n + \frac{2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi}{2} nx \Big|_{-2}^2 = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Линейная функция  $f(x) = 2 + x$  непрерывна на интервале  $(-2, 2)$  и не имеет на нём экстремумов; разрывы (первого рода) присутствуют в конечных точках  $x = \pm 2$ . Следовательно, по теореме Дирихле,  $f(x)$  есть сумма своего ряда Фурье:

$$2 + x = 2 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{\pi}{2} nx, \quad x \in (-2, 2).$$

## 1.8. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ИНТЕРВАЛЕ $(a, b)$

1. Пусть интервал  $(a, b)$  не симметричен относительно начала координат и модуль  $|f(x)|$  интегрируем на этом интервале. В этом случае также можно ставить задачу о разложении функции в тригонометриче-

ский ряд. Для этого, прежде всего, следует доопределить функцию периодическим образом на всю числовую ось. В качестве полупериода выбираем  $\ell = \frac{b-a}{2}$ ; теперь мы находимся в стандартной ситуации ряда Фурье функции с периодом  $2\ell$  (параграф 1.4). Однако, коэффициенты Фурье вычисляются как интегралы по  $(-\ell, \ell)$ , тогда как нам удобнее интегрировать по  $(a, b)$ , т.е. по интервалу, где первоначально была задана (например, аналитически) данная функция. Этого удаётся достичь благодаря следующему вспомогательному утверждению.

2. Л е м м а. Если  $g(x)$  имеет период  $T = b - a$  и  $\ell = \frac{b-a}{2}$ , то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь известным свойством «аддитивности» определённого интеграла, запишем равенство

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x) dx = \int_{-\ell}^a g(x) dx + \int_a^b g(x) dx + \int_b^{\ell} g(x) dx. \quad (1.8.1)$$

В первом интеграле сделаем замену переменных  $t = x + 2\ell$ , тогда  $g(x) = g(t - 2\ell) = g(t)$  в силу  $2\ell$ -периодичности функции  $g$ ; пределы интегрирования преобразуются к виду

$$t_1 = -\ell + 2\ell = \ell; \quad t_2 = a + 2\ell = a + (b - a) = b.$$

Итак,

$$\int_{-\ell}^0 g(x) dx = \int_{\ell}^b g(t) dt = - \int_b^{\ell} g(t) dt.$$

Подставляя результат в равенство (1.8.1), видим, что первый и последний интеграл «взаимно уничтожаются», после чего и имеем утверждение леммы.

3. В формулах (1.4.4), (1.4.5) подинтегральные функции  $2\ell$ -периодичны, следовательно, интегрирование в них (на основании леммы п. 2) можно производить по интервалу  $(a, b)$ .

Например, для

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi}{\ell} nx dx$$

в силу равенства  $\ell = \frac{b-a}{2}$  получаем:

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi}{b-a} nx dx; \quad (1.8.2)$$

в частности,

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx;$$

аналогично,

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi}{b-a} nx dx. \quad (1.8.3)$$

Итак, функция  $f(x)$ , заданная на  $(a, b)$ , имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{b-a} nx + b_n \sin \frac{2\pi}{b-a} nx,$$

где коэффициенты ряда вычисляются по формулам (1.8.2), (1.8.3).

## 1.9. РЯД ФУРЬЕ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

1. Ряд Фурье (1.3.1) может быть записан в более компактной форме, и коэффициенты могут быть вычислены по одной формуле (вместо трёх формул для  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), если привлечь к рассмотрению функции комплексного переменного. Основным «инструментом» здесь служит формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Из неё, в свою очередь, вытекает, что

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}; \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9.1)$$

2. Рассмотрим ряд Фурье  $2\pi$ -периодической функции  $f(x)$ . Общий член ряда, согласно (1.9.1), принимает вид

$$\begin{aligned}
 a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{1}{2} \left( e^{inx} \left( a_n + \frac{1}{i} b_n \right) + e^{-inx} \left( a_n - \frac{1}{i} b_n \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( e^{inx} (a_n - ib_n) + e^{-inx} (a_n + ib_n) \right), \tag{1.9.2}
 \end{aligned}$$

так как  $\frac{1}{i} = -i$ . При этом (см. (1.3.4), (1.3.5))

$$a_n - ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx - i \sin nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx;$$

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx.$$

Обозначим

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{1.9.3}$$

Теперь

$$\frac{1}{2} (a_n - ib_n) = c_n; \quad \frac{1}{2} (a_n + ib_n) = c_{-n}; \tag{1.9.4}$$

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i \cdot 0 \cdot x} dx = c_0. \tag{1.9.5}$$

3. Запишем ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

в комплексной форме. Согласно (1.9.2), (1.9.4), (1.9.5) имеем:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}).$$

Частичные суммы этого ряда

$$S_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$$

после группировки слагаемых с положительными и отрицательными индексами принимают вид

$$S_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx};$$

при этом во второй сумме переобозначено  $(-n)$  на  $n$ , а затем слагаемые объединены в одну сумму.

Следовательно, ряд Фурье имеет следующую комплексную форму:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где коэффициенты  $c_n$  вычисляются по формуле (1.9.3) при  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

4. Для функции  $f(x)$ , имеющей период  $2\ell$ , ряд Фурье (1.4.1) в комплексной форме будет следующим:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{\ell}nx},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{\pi}{\ell}nx} dx.$$

Этот результат получается рассуждениями, подобными приведённым в п. 2, 3.

## Глава 2. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

### 2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

1. Если функция  $f(x)$  интегрируема с модулем на отрезке  $[-\ell, \ell]$ , то, как показано в параграфе 1.9, её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \quad (2.1.1)$$

где коэффициенты Фурье  $c_n$  вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\omega_n x} dx; \quad \omega_n = \frac{\pi}{\ell} n. \quad (2.1.2)$$

Числа  $\omega_n = \frac{\pi}{\ell} n$  представляют собою частоты простейших гармоник (см. параграф 1.2), а их полный набор называется спектром. Указанное множество дискретно (см. рис. 2.1.1), т.е. состоит из изолированных точек.

2. Запишем коэффициенты Фурье (2.1.2) в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\omega_n x} \frac{\pi}{\ell} dx,$$

где

$$\frac{\pi}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} n - \frac{\pi}{\ell} (n-1) = \omega_n - \omega_{n-1} = \Delta\omega_n -$$

так называемые «конечные разности» чисел  $\omega_n$ . Следовательно,

$$c_n = \hat{f}(\omega_n) \Delta\omega_n, \quad (2.1.3)$$

где введено обозначение

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

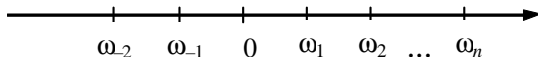


Рис. 2.1.1



3. Если  $f(x)$  равен нулю вне отрезка  $[-\ell, \ell]$ , то

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (2.1.4)$$

Соответствие, сопоставляющее всякой функции  $f(x)$  (для которой  $|f(x)|$  интегрируем на  $[-\ell, \ell]$ ), интеграл вида (2.1.4),  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ , называется преобразованием Фурье функции  $f(x)$ .

При этом интеграл (2.1.4) существует не только для функций, нулевых вне  $[-\ell, \ell]$ , но и для всякой  $f(x)$ , такой что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (2.1.5)$$

4. Вернёмся к рассмотрению ряда Фурье (2.1.1). С помощью формулы (2.1.3) запишем его в виде

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega_n) e^{i\omega_n x} \Delta\omega_n, \quad -\ell \leq x \leq \ell. \quad (2.1.6)$$

Устремим теперь  $\ell$  к  $+\infty$ . В силу условия (2.1.5) преобразование Фурье будет существовать; при  $\ell \rightarrow \infty$  спектр (см. рис. 2.1.1) становится все более «густым», переходя в «непрерывный спектр», заполняющий всю числовую ось. Сумма (2.1.6) по своей структуре является теперь интегральной для функции

$$\hat{f}(\omega) e^{i\omega x}, \quad -\infty < \omega < \infty$$

и «в пределе» переходит в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (2.1.7)$$

5. Рассуждения п. 4 носят «наводящий» характер и приводят к естественной мысли сопоставить любой  $f(x)$ , определённой на всей числовой оси, аналог ряда Фурье, имеющий вид (2.1.7). Указанное соответствие записываем в виде

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Итак, пусть  $f(x)$  удовлетворяет условию (2.1.5). Интеграл (2.1.7) называется её интегралом Фурье.

Разумеется, сам вопрос сходимости этого несобственного интеграла и, тем более, совпадения его значений (при рассматриваемых  $x$ ) со значениями  $f(x)$ , нуждается в дополнительном исследовании.

6. Можно доказать, что если функция  $f(x)$  не только удовлетворяет условию (2.1.5), но также ограничена на всей числовой оси и удовлетворяет условиям Дирихле на каждом конечном отрезке  $[-\ell, \ell]$ , то интеграл Фурье (2.1.7) является сходящимся при всех  $x$ . Его значения совпадают с  $f(x)$  во всех точках  $x$ , где  $f(x)$  непрерывна. В точке разрыва  $x_0$  первого рода значение интеграла Фурье совпадает со значением среднего арифметического односторонних пределов:

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Итак, при сформулированных условиях имеем формулы «взаимного обращения» преобразования Фурье и интеграла Фурье (в точках, где  $f(x)$  непрерывна):

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx;$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

## 2.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

### 1. Интеграл Фурье чётной функции.

Рассмотрим преобразование Фурье чётной функции:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos \omega x - i \sin \omega x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx - \frac{1}{2\pi} i; \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

использовано свойство, что интеграл чётной функции ( $f(x) \cos \omega x$  чётна) по симметричному промежутку равен удвоенному интегралу по полупространству; интеграл же нечётной функции ( $f(x) \sin \omega x$  нечётна) по сим-

метричному промежутку равен нулю; см. лемму п. 1 параграфа 1.5. Далее,  $\hat{f}$  как функция от  $\omega$  чётна (см. (2.2.1)), следовательно, интеграл Фурье (на основании тех же самых свойств) принимает вид

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \cos \omega x d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \sin \omega x dx = 2 \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega x d\omega.$$

Итак, для чётной  $f(x)$ , удовлетворяющей условию (2.1.5), имеем

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx; \quad (2.2.2)$$

$$f(x) \sim 2 \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega x d\omega. \quad (2.2.3)$$

## 2. Интеграл Фурье нечётной функции.

Преобразование Фурье нечётной функции (см. рассуждения п. 1) имеет образ

$$\hat{f}(\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x dx$$

и является нечётной функцией от  $\omega$ . Следовательно, упрощается и запись интеграла Фурье:

$$f(x) \sim 2i \int_0^{\infty} \hat{f}(x) \sin \omega x dx.$$

3. П р и м е р. Пусть  $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 1; \\ 0, & x \notin (-1, 1); \end{cases}$  представить  $f(x)$  в виде

интеграла Фурье.

Р е ш е н и е.  $f(x)$  чётна, следовательно, по формулам (2.2.2) и (2.2.3)

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^1 1 \cdot \cos \omega x dx + \int_1^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x dx \right) = \frac{\sin \omega}{\pi \omega};$$

$$f(x) \sim 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\pi \omega} \cos \omega x d\omega,$$

при этой  $f(x)$ , интегрируемая (с модулем) на  $(-\infty; \infty)$  ограничена и удовлетворяет условиям Дирихле на каждом отрезке вида  $[-\ell, \ell]$ . Будучи непрерывной на  $(-1, 1)$ , в каждой точке этого интервала она совпадает со своим интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega x d\omega.$$

В частности при  $x = 0$ , так как  $f(0) = 1$ , имеем

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} 1 d\omega$$

или

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}. \quad (2.2.4)$$

Мы получили (в качестве одного из приложений интеграла Фурье) значение возникающего в разных разделах математики несобственного «неберущегося» интеграла.

4. Запишем теперь (в общем случае) интеграл Фурье (2.1.7) в тригонометрической форме, аналогичной ряду Фурье. Для этого вспомним, что (2.1.7) понимается как предельное значение для

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\ell}^{\ell} e^{i\omega(x-t)} d\omega; \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

здесь мы воспользовались определением (2.1.4) преобразования Фурье и изменением порядка интегрирования (которое – отметим это без доказательства – возможно в силу условия (2.1.5)). Согласно формуле Эйлера имеем в (2.2.5)

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} e^{i\omega(x-t)} d\omega &= \int_{-\ell}^{\ell} \cos \omega(x-t) d\omega + i \int_{-\ell}^{\ell} \sin \omega(x-t) d\omega = 2 \int_0^{\ell} \cos \omega(x-t) d\omega + 0 = \\ &= 2 \int_0^{\ell} (\cos \omega x \cos \omega t + \sin \omega x \sin \omega t) d\omega, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

применена лемма п. 1 параграфа 1.5. Возвращаясь к равенству (2.2.5), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\ell}^{\ell} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \\ & = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\ell} \left( \cos \omega x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) + \sin \omega x \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \right) d\omega \end{aligned}$$

При  $\ell \rightarrow \infty$  интеграл Фурье принимает, таким образом, вид

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega, \quad (2.2.7)$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt; \quad (2.2.8)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (2.2.9)$$

соответственно, косинус и синус – преобразования Фурье.

Заметим, что интеграл Фурье применяется при построении и анализе математических моделей процессов колебаний и теплопереноса в случае бесконечных сред.

### 2.3. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ И ЭВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Для того, чтобы ввести важные обобщения понятия ряда Фурье, напомним читателю понятия линейного пространства и нормы.

1. Пусть  $\mathcal{L}$  – непустое множество элементов  $X, Y, \dots$ . Оно называется линейным (или векторным) пространством, если в нём каким-либо способом введены операции сложения элементов и умножения на число (линейные операции), удовлетворяющие условиям:

а) Для любых  $X, Y \in \mathcal{L}$  элемент  $U = X + Y$  определён однозначно, при этом:

- 1)  $X + Y = Y + X$  (переместительность сложения).
- 2)  $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$  (сочетательность сложения).
- 3) В  $\mathcal{L}$  существует элемент 0 (ноль), такой что

$$X + 0 = X$$

для любого  $X \in \mathcal{L}$ .

4) Для каждого  $X \in \mathcal{L}$  существует элемент (противоположный элемент), такой что

$$X + (-X) = 0.$$

б) Для любого  $X \in \mathcal{L}$  и любого  $\alpha$  (вообще говоря, комплексного) элемент  $\alpha X \in \mathcal{L}$  определён однозначно и:

1)  $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$  (сочетательность умножения на число).

2)  $1 \cdot X = X$ .

в) Выполняются распределительные законы вида:

1)  $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$ .

2)  $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$ .

Если рассматриваемые в п. б), в) числа  $\alpha, \beta, \dots$  – комплексные, то и  $\mathcal{L}$  называется комплексным линейным пространством, а если действительные – то действительным линейным пространством.

2. Примерами линейных пространств могут служить:

а) пространство  $R^3$  всех «обычных» векторов с линейными операциями, изученными в курсе аналитической геометрии;

б) пространство  $R^n$  всех матриц-строк («векторов») вида  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_j (j = 1, \dots, n)$  – произвольные действительные числа; линейные операции здесь выполняются «покоординатно» (обычным для матриц способом).

Случай а) является частным случаем для б), если каждый вектор отождествить с тройкой его координат; пространство  $R^n$  предполагаем действительным.

Как известно, в  $R^3$  максимально возможное количество линейно-независимых векторов равно трём. Это означает, во-первых, что ни один из выбранных трёх векторов  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  не выражается линейным образом (как результат линейной операции) через остальные два, а во-вторых, любой четвертый вектор  $\vec{d}$  может быть представлен в виде

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$$

с некоторыми действительными коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Подобным образом обстоит дело и в произвольном  $R^n$ . А именно, в  $R^n$  существует  $n$  линейно независимых векторов  $J_1, J_2, \dots, J_n$ , т.е. векторов, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \dots + \lambda_n J_n = 0$$

тогда и только тогда, когда  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ; например, это совокупность  $J_1(1, 0, \dots, 0)$ ,  $J_2(0, 1, \dots, 0)$ , ...,  $J_n(0, 0, \dots, 0, 1)$ . Указанное условие означает (как нетрудно доказать), что никакой из  $J_j$  не выражается линейным образом через остальные. В то же время присоединение ко множеству  $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$  любого вектора  $X \in R^n$  делает новую совокупность линейно зависимой, т.е.

$$X = \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \dots + \mu_n J_n$$

с некоторыми коэффициентами  $\mu_j (j = 1, \dots, n)$ . Число  $n$  называют размерностью пространства  $R^n$ , а множество  $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$  – базисом в  $R^n$ .

В общем случае произвольного линейного пространства  $\mathcal{L}$  число  $n$  называется его размерностью, если существует и равно именно  $n$  максимально возможное количество линейно независимых векторов в  $\mathcal{L}$ , множество же самих этих векторов называется базисом в  $\mathcal{L}$ .

Не всякое линейное пространство имеет конечную размерность. Так, очевидно, что класс  $C_{[a,b]}$  всех непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций (с действительными значениями) образует линейное пространство с обычными операциями сложения функций и умножения их на действительные числа. Можно доказать, что ни одна из функций  $1, x, x^2, \dots, x^m$  не выражается линейным образом через остальные, однако при любом  $m$  к этому множеству можно добавить степенную функцию  $x^{m+1}$  и полученная совокупность будет сохранять свойство линейной независимости.

В подобной ситуации, когда в  $\mathcal{L}$  можно указать как угодно большое количество линейно независимых векторов, говорят, что  $\mathcal{L}$  бесконечномерно.

3. Пусть теперь каждому элементу  $X$  линейного пространства  $\mathcal{L}$  поставлено в соответствие некоторое единственное действительное число  $\|X\|$ , удовлетворяющее условиям (аксиомам):

- 1)  $\|X\| \geq 0$ , причём  $\|X\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $X = 0$ ;
- 2)  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$  для любых  $X, Y \in \mathcal{L}$ ;
- 3)  $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$  для любого числа  $\lambda$ .

Тогда число  $\|X\|$  называется нормой элемента  $X$ , а само  $\mathcal{L}$  – линейным нормированным пространством.

В приведённых выше примерах норма вводится следующим образом: в  $R^n$  полагаем

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2};$$

в частности, для  $R^3$  норма  $\|X\|$  – это модуль (длина) вектора  $X$ ; в  $C_{[a,b]}$  полагаем

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Аксиомы нормы в обоих случаях легко проверяются.

4. Пусть в действительном линейном пространстве  $\mathcal{L}$  каким-либо способом введено скалярное произведение, т.е. каждой паре элементов  $X, Y \in \mathcal{L}$  поставлено в соответствие действительное число  $(X, Y)$ , удовлетворяющее условиям (аксиомам):

а)  $(X, Y) = (Y, X)$ ;

б)  $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$ ;

в)  $(\lambda X, Y) = \lambda(X, Y)$ ;

г)  $(X, X) \geq 0$ , причём  $(X, X) = 0$  тогда и только тогда, когда  $X = 0$ .

В этом случае линейное пространство  $\mathcal{L}$  называется эвклидовым. Так, пространство  $R^n$  становится эвклидовым, если в нём ввести скалярное произведение в виде

$$(X, Y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

5. В эвклидовом пространстве можно ввести норму с помощью равенства

$$\|X\| = \sqrt{(X, X)}. \tag{2.3.1}$$

Аксиома 1) нормы очевидна; аксиома 3) легко проверяется:

$$\|\lambda X\| = \sqrt{(\lambda X, \lambda X)} = \sqrt{\lambda(X, \lambda X)} = \sqrt{\lambda(\lambda X, X)} = \sqrt{\lambda^2(X, X)} = |\lambda| \cdot \|X\|.$$

Для проверки аксиомы 2) нормы потребуется следующее неравенство Коши-Буняковского:

$$|(X, Y)| \leq \|X\| \cdot \|Y\|, \tag{2.3.2}$$



которое мы сейчас и докажем. Очевидно, что для любого действительного числа  $\lambda$ , в силу аксиом а) – г) скалярного произведения,

$$\begin{aligned} 0 \leq (\lambda X + Y, \lambda X + Y) &= \lambda^2 (X, X) + 2\lambda (X, Y) + (Y, Y) = \\ &= \|X\|^2 \lambda^2 + 2(X, Y)\lambda + \|Y\|^2. \end{aligned}$$

Итак, полученный квадратный (относительно  $\lambda$ ) трёхчлен неотрицателен при всех  $\lambda$ . Это возможно тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D = (X, Y)^2 - \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2 \leq 0.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства

$$(X, Y)^2 \leq \|X\|^2 \cdot \|Y\|^2,$$

приходим к утверждению (2.3.2).

Из (2.3.2) вытекает, в частности, что

$$\begin{aligned} \|X + Y\| &= \sqrt{(X + Y, X + Y)} = \sqrt{(X, X) + 2(X, Y) + (Y, Y)} \leq \\ &\leq \sqrt{\|X\|^2 + 2\|X\| \cdot \|Y\| + \|Y\|^2} = \sqrt{(\|X\| + \|Y\|)^2} = \|X\| + \|Y\|. \end{aligned}$$

Этим установлена аксиома 2) нормы (2.3.1).

6. Возникает вопрос, обратный изученному в п. 5. Пусть  $\mathcal{L}$  – линейное нормированное пространство, при каких условиях на введённую в  $\mathcal{L}$  норму  $\mathcal{L}$  является также и евклидовым пространством?

На этот вопрос отвечает

**Т е о р е м а.** Линейное нормированное пространство  $\mathcal{L}$  является евклидовым тогда и только тогда, когда для любых  $X, Y \in \mathcal{L}$  выполняется равенство

$$\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2). \quad (2.3.3)$$

Геометрический смысл (2.3.3) в  $R^3$  хорошо известен: сумма квадратов сторон параллелограмма (построенного на векторах  $X$  и  $Y$  как на сторонах) равна сумме квадратов его диагоналей (которыми станут длины  $X + Y$  и  $X - Y$  соответственно).

Необходимость условия (2.3.3) легко проверяется. Действительно, если  $\mathcal{L}$  – евклидово пространство, то  $\|X\|^2 = (X, X)$ , а значит, пользуясь аксиомами скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} \|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 &= (X+Y, X+Y) + (X-Y, X-Y) = \\ &= (X, X) + 2(X, Y) + (Y, Y) + (X, X) - 2(X, Y) + (Y, Y) = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Обратное утверждение может быть установлено, если скалярное произведение в  $\mathcal{L}$  ввести следующим образом:

$$(X, Y) = \frac{1}{4} (\|X+Y\|^2 - \|X-Y\|^2). \quad (2.3.4)$$

Теперь следует проверить, что для (2.3.4) выполнены все аксиомы скалярного произведения, если имеет место соотношение (2.3.3). Мы установим только а) и г), не приводя громоздкой проверки двух других аксиом (их проверку читатель может найти в рекомендуемой литературе). Во-первых, заметим, что

$$(X, X) = \frac{1}{4} \|2X\|^2 = \|X\|^2$$

(это и должно иметь место в евклидовом пространстве), откуда сразу вытекает г). Легко проверяется и аксиома а) на основе аксиомы 3) нормы:

$$\begin{aligned} (Y, X) &= \frac{1}{4} (\|Y+X\|^2 - \|Y-X\|^2) = \\ &= \frac{1}{4} (\|X+Y\|^2 - |-1|^2 \cdot \|X-Y\|^2) = (X, Y). \end{aligned}$$

7. Угол  $\varphi$  между ненулевыми векторами  $X, Y$  евклидового пространства  $\mathcal{L}$  определим с помощью соотношения

$$\cos \varphi = \frac{(X, Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского (2.3.2) имеем, что  $|\cos \varphi| \leq 1$ , т.е. введённое определение корректно.

Векторы  $X$  и  $Y$  называются ортогональными в  $\mathcal{L}$ , если  $(X, Y) = 0$ , или, что то же самое, для угла  $\varphi$  между ними  $\cos \varphi = 0$ .

8. Если  $\mathcal{L}$  – комплексное линейное пространство, то евклидовым оно становится в случае введения в нём комплекснозначного скалярного произведения, удовлетворяющего аксиомам:

$$\text{a) } (X, Y) = (\overline{Y}, X);$$

$$\text{б) } (X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y);$$

$$\text{в) } (\lambda X, Y) = \lambda(X, Y);$$

г)  $(X, X) \geq 0$ , причём  $(X, X) > 0$ , тогда и только тогда, когда  $X \neq 0$ .

Здесь использован стандартный символ комплексного сопряжения: если  $z = a + bi$ , то  $\bar{z} = a - bi$ .

Примером евклидова комплексного пространства может служить класс  $C^n$  последовательностей вида

$$X = (x_1, \dots, x_n),$$

где все  $x_k (k = 1, \dots, n)$  – комплексные числа, а линейные операции (как и в  $R^n$ ) определяются (выполняются) по координатным образом. Скалярное произведение задаётся в виде

$$(X, Y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k,$$

при этом аксиомы а) – г) проверяются без труда.

Более детально введённые в настоящем параграфе понятия и факты будут изучены далее на примере класса  $\Phi$ .

## 2.4. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

1. В параграфе 1.3 были получены формулы для коэффициентов Фурье. Результат основывался на следующем свойстве системы тригонометрических функций:

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}:$$

интеграл (по отрезку  $[-\pi, \pi]$ ) от произведения двух различных функций равен нулю, а интеграл от квадрата любой из них – ненулевой. Указанное свойство ассоциируется с понятием ортогональности в евклидовом пространстве. В связи с этим введём в рассмотрение класс  $\Phi$  функций  $f$ , интегрируемых с квадратом на некотором отрезке  $[a, b]$ :

$$\Phi = \left\{ f : \int_a^b f^2(x) dx < \infty \right\}.$$

2. Докажем, что  $\Phi$  – линейное пространство с обычными операциями сложения функций и умножения на число. Для этого следует проверить два следующих свойства.

а) Вместе с  $f \in \Phi$  любая  $\lambda f \in \Phi$  ( $\lambda$  – произвольное постоянное число).

Действительно,

$$\int_a^b (\lambda f(x))^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f^2(x) dx < \infty.$$

б) Вместе с любыми  $f_1 \in \Phi$  и  $f_2 \in \Phi$  их сумма  $(f_1 + f_2) \in \Phi$ .

Действительно,

$$(f_1 + f_2)^2 = f_1^2 + 2f_1f_2 + f_2^2,$$

при этом  $2|f_1f_2| \leq f_1^2 + f_2^2$  (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим), откуда (попутно) вытекает интегрируемость модуля произведения.

Значит,

$$(f_1 + f_2)^2 \leq f_1^2 + 2|f_1f_2| + f_2^2 \leq 2(f_1^2 + f_2^2),$$

откуда следует интегрируемость с квадратом суммы  $f_1 + f_2$ .

Аксиомы (свойства) суммы функций и умножения их на число в классе  $\Phi$  (п. 1 параграфа 2.3) легко проверяются.

3. Скалярное произведение в действительном  $\Phi$  введём следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx;$$

интегрируемость модуля произведения установлена в п. 2, аксиомы скалярного произведения легко проверяются. Норма любой  $f \in \Phi$  есть число

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Неравенство Коши-Буняковского принимает вид

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

В комплексном  $\Phi$  ( $f$  и  $g$  – комплекснозначны) по определению полагаем

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

4. В действительном  $\Phi$  система функций  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  называется ортогональной на  $[a, b]$ , если ортогональна любая их пара, т.е.

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad \text{но} \quad \int_a^b \varphi_n^2(x) dx \neq 0, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

В комплексном  $\Phi$  определение ортогональной системы функций выглядит следующим образом:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = 0, \quad m \neq n; \quad \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(x)} dx \neq 0.$$

Нумерация системы функций может начинаться и с  $n = 0$  или может быть принята иная система нумерации.

Пример 1. Система функций (рассматриваемая в  $\Phi$ )

$$\{\dots, e^{-inx}, \dots, e^{-x}, 1, e^x, \dots, e^{inx}, \dots\}$$

ортогональна на  $[-\pi, \pi]$ . Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = 0, \quad n \neq m; \quad (2.4.1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-inx} dx = 2\pi.$$

Соотношение (2.4.1) можно проверить непосредственно или же перейти к тригонометрическим функциям по формуле Эйлера

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx,$$

и использовать результат леммы параграфа 1.3; при этом

$$\overline{e^{inx}} = \cos nx - i \sin nx = \cos(-nx) + i \sin(-nx) = e^{-inx}.$$

## 2.5. РЯДЫ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

1. Выше была установлена аналогия между перпендикулярностью векторов и ортогональностью функций. В аналитической геометрии важной является задача разложения произвольного вектора по ортогональным векторам базиса. Подобным же образом возникает задача о разложении произвольной функции  $f \in \Phi$  по системе  $\{\varphi_n(x)\}$ , ортогональной в  $\Phi$ , т.е. о представлении вида

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots \quad (2.5.1)$$

В случае тригонометрической системы имеем круг вопросов, связанных с тригонометрическими рядами Фурье. В общем же случае предстоит выяснить:

а) какими должны быть коэффициенты  $c_n$  в разложении (2.5.1), если оно возможно на некотором отрезке  $[a, b]$ ;

б) каковы достаточные условия сходимости ряда (2.5.1) в данной точке  $x$ , на отрезке  $[a, b]$  и т.п., и в каких случаях сумма ряда совпадает с  $f(x)$ .

В предположениях сходимости (во всех точках  $x \in [a, b]$ ) ряда (2.5.1) и возможности почленного интегрирования равенства

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (2.5.2)$$

определим вид коэффициентов  $c_n$ . Для этого умножим обе части (2.5.2) на  $\varphi_m(x)$  и почленно проинтегрируем полученное соотношение

$$f(x)\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_m(x).$$

Имеем:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Ненулевым будет только слагаемое при  $n = m$  (в силу ортогональности системы  $\{\varphi_n\}$ ):

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)dx,$$

откуда при  $\alpha_m = \int_a^b \varphi_m^2(x) dx \neq 0$  получаем

$$c_m = \frac{1}{\alpha_m} \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx, \quad (2.5.3)$$

при этом интеграл в правой части (2.5.3) конечен в силу неравенства Коши-Буняковского.

Итак, разложение (2.5.2) возможно с коэффициентами (2.5.3).

2. Наиболее простой вид коэффициенты (2.5.3) имеют при  $\alpha_m \equiv 1$ .

**О п р е д е л е н и е.** Ортогональная система  $\{h_n(x)\}$  называется ортонормированной (на  $[a, b]$ ), если

$$\int_b^a h_n^2(x) dx = 1; \quad n = 1, 2, \dots$$

Переход от системы функций  $\{\varphi_n(x)\}$  к ортонормированной происходит, очевидно, если рассмотреть

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}} \varphi_n(x).$$

Ортогональность  $h_n(x)$  в пространстве  $\Phi$  и нормированность очевидны:

$$\int_a^b h_n(x) h_m(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n \alpha_m}} \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad (n \neq m);$$

$$\int_a^b h_n^2(x) dx = \frac{1}{\alpha_n} \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \frac{1}{\alpha_n} \alpha_n = 1.$$

Итак, разложение

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n h_n(x) \quad (2.5.4)$$

по ортонормированной системе  $\{h_n(x)\}$  возможно с коэффициентами

$$c_n = \int_a^b f(x) h_n(x) dx. \quad (2.5.5)$$

3. П р и м е р. Система  $\left\{ \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} x \right\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\ell = \text{const} > 0$ , ортогональна на отрезке  $[0, \ell]$ . Действительно, при  $n \neq m$  имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ell} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} x \sin\left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left( \cos\left(n - m\right) \frac{\pi}{\ell} x - \cos\left(n + m - 1\right) \frac{\pi}{\ell} x \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\ell \sin\left(n - m\right) \frac{\pi}{\ell} x}{\pi\left(n - m\right)} - \frac{\ell \sin\left(n + m - 1\right) \frac{\pi}{\ell} x}{\pi\left(n + m - 1\right)} \right) \Big|_0^{\ell} = 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_0^{\ell} \sin^2\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left( 1 - \cos\left(2n - 1\right) \frac{\pi}{\ell} x \right) dx = \\ &= \frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{2\pi\left(2n - 1\right)} \sin\left(2n - 1\right) \frac{\pi}{\ell} x \Big|_0^{\ell} = \frac{\ell}{2}. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

4. Рассмотрим теперь произвольную функцию  $f(x)$ , для которой модуль  $|f(x)|$  интегрируем на  $[0, \ell]$  (при этом уже не требуем интегрируемости квадрата функции на  $[0, \ell]$ ). Сопоставим каждой такой функции  $f(x)$  разложение вида

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} x \quad (2.5.7)$$

в ряд по указанной ортогональной системе. В силу (2.5.6) коэффициенты имеют вид

$$c_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} x dx, \quad (2.5.8)$$

при этом они существуют, так как справедливо неравенство

$$\left| f(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell} x \right| \leq |f(x)|.$$



Отметим, что достаточные условия сходимости ряда (2.5.7) к значениям  $f(x)$  – такие же как для рядов Фурье по классической тригонометрической системе (параграф 1.6).

5. Обсудим круг вопросов, связанных со сходимостью (2.5.4). Очевидно, что возможность представления  $f(x)$  в виде суммы ряда (2.5.4) должна быть связана со свойствами ортонормированной системы  $\{h_n(x)\}$  и функции  $f(x)$ . Кроме того, само понятие сходимости ряда к  $f(x)$  можно сформулировать в различных смыслах. Например, это сходимость: а) в данной точке  $x$ ; б) во всех точках отрезка  $[a, b]$ ; в) равномерная сходимость на  $[a, b]$ ; г) сходимость в смысле нормы пространства  $\Phi$  и др. Остановимся на последнем виде сходимости: речь идёт о соотношении

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\| = 0, \quad (2.5.9)$$

где  $S_n(x) = c_1 h_1(x) + c_2 h_2(x) + \dots + c_n h_n(x)$  –  $n$ -я частичная сумма по системе  $\{h_n(x)\}$ , а норма в  $\Phi$  введена в параграфе 2.4.

Если имеет место равенство (2.5.9), то говорят, что ряд (2.5.4) сходится к  $f(x)$  в среднем. Так, в случае, если  $S_n(x)$  значительно отличается (при больших  $n$ ) от  $f(x)$  на «маленьком» множестве (например, в нескольких точках), то равномерная сходимость уже не имеет место, тогда как (2.5.9) сохраняется. Следовательно, сходимость в среднем в ряде случаев предпочтительнее. Кроме того, погрешность от замены значений  $f(x)$  значениями  $S_n(x)$ , вычисляемая в виде

$$\|S_n(x) - f(x)\|$$

связана с известным способом наименьших квадратов, широко применяемым в вычислительной практике.

Ортогональная система  $\{\varphi_n(x)\}$  называется полной в классе  $\Phi$ , если для любой  $f \in \Phi$  ряд Фурье (2.5.1) сходится в среднем к функции  $f$ . Отметим без доказательства, что тригонометрическая система

$$\{1; \sin x, \cos x; \dots; \sin nx, \cos nx; \dots\}$$

полна в пространстве  $\Phi$  (интегрирование производится по отрезку  $[-\pi, \pi]$ ).

# Глава 3. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. МЕТОД ФУРЬЕ

## 3.1. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 2-ГО ПОРЯДКА

Большинство задач физики сводятся к дифференциальным уравнениям с частными производными. Весьма распространёнными в приложениях являются дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Уравнение

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (3.1.1)$$

называется уравнением с частными производными 2-го порядка, где  $u(x, y)$  – неизвестная функция независимых переменных  $x$  и  $y$ .

Уравнение

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y) \quad (3.1.2)$$

является частным случаем (3.1.1) и называется линейным уравнением с частными производными 2-го порядка, где  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$  – функции переменных  $x$  и  $y$ .

Уравнение (3.1.2) называется линейным неоднородным уравнением, если  $f(x, y) \neq 0$  и линейным однородным уравнением, если  $f(x, y) = 0$ .

В частности при  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c = \text{const}$  получаем линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Как показал Эйлер, уравнение (3.1.2) с помощью замены независимых переменных  $x$  и  $y$  может быть приведено к одному из следующих трёх видов (сами формулы, по которым производится замена переменных мы не указываем, с ними читатель может познакомиться в более подробных курсах). Пусть  $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ .

1. Если  $\Delta < 0$ , то, в терминах новых переменных  $\mu$  и  $\nu$ , с новыми коэффициентами  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{c}$  и правой частью  $\tilde{f}$  получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \tilde{b}_1 \frac{\partial u}{\partial \mu} + \tilde{b}_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \tilde{c}u = \tilde{f}(\mu, \nu).$$

Это уравнение называется эллиптическим. Его простейшим частным случаем является уравнение Лапласа ( $\Delta = -1$ ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0. \quad (3.1.3)$$

Уравнение (3.1.3) описывает стационарные физические процессы, т.е. такие, характеристики которых не зависят от времени.

2. Если  $\Delta > 0$ , то приходим к случаю

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \bar{b}_1 \frac{\partial u}{\partial \mu} + \bar{b}_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \bar{c}u = \bar{f}(\mu, \nu).$$

Такое уравнение называется гиперболическим; простейшим примером ( $\Delta = 1$ ) служит

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = 0. \quad (3.1.4)$$

Уравнение (3.1.4) описывает одномерные процессы колебаний, в частности, поперечные колебания струны и продольные колебания стержня.

3. Если  $\Delta = 0$ , то уравнение (3.1.2) приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} + \check{b}_1 \frac{\partial u}{\partial \mu} + \check{b}_2 \frac{\partial u}{\partial \nu} + \check{c}u = \check{f}(\mu, \nu).$$

Это уравнение называется параболическим; простейший случай этого уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} - \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad (3.1.5)$$

которое описывает одномерные процессы теплопроводности и диффузии.

Названия уравнений объясняются следующей аналогией. Как устанавливается в курсе аналитической геометрии, общее уравнение кривой 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

в случае  $\Delta < 0$  представляет собой эллипс, при  $\Delta > 0$  – гиперболу, при  $\Delta = 0$  – параболу (в это рассмотрение включаются и соответствующие «вырожденные» кривые).

Изучим теперь уравнения (3.1.3) – (3.1.5) подробнее.

### 3.2. УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

1. Рассмотрим струну как гибкую упругую нить, подразумевая при этом, что напряжения, возникающие в струне в любой момент времени, направлены по касательной к её мгновенному профилю, т.е. струна не сопротивляется изгибу. Предположим, что струна длины  $\ell$  с жёстко закреплёнными концами в точках  $x = 0$  и  $x = \ell$  совершает в плоскости  $(x, u)$  малые поперечные колебания, которые описываются одной функцией  $u(x, t)$ , характеризующей вертикальное перемещение точки струны с абсциссой  $x$  в момент времени  $t$  (рис. 3.2.1). Так как рассматриваются малые колебания струны, то  $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \beta \approx \sin \beta$  и  $\cos \beta \approx 1$ , где  $\beta$  – угол касательной к кривой  $u(x, t)$  с осью  $x$ . Поэтому натяжение струны не зависит от переменных  $x$  и  $t$ , т.е.  $T(x_M, t) = T(x_N, t) = T$ .

Рассмотрим теперь малый элемент струны  $MN$ . На концах этого элемента, по касательным к струне, действуют силы  $T$ . Пусть координаты точек  $x_M = x$  и  $x_N = x + dx$ , а касательные образуют с осью  $Ox$  углы  $\beta$  и  $\beta + d\beta$ . Проекция сил на ось  $Ou$  есть

$$T \sin(\beta + d\beta) - T \sin \beta \approx T \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) dx.$$

Пусть  $\rho(x)$  – плотность материала струны, тогда масса элемента  $MN$ , будет  $dm = \rho(x)S dx$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения струны. Предположим, что на элемент  $MN$  в поперечном направлении действует внешняя сила, которая считается непрерывно распределённой с плотностью  $F(x, t)$ , рассчитанной на единицу длины.

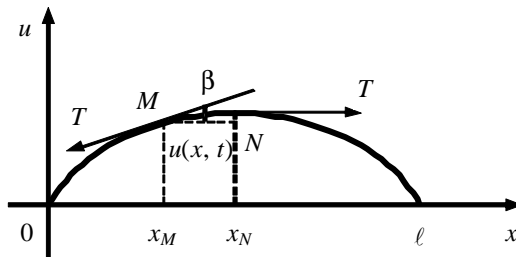


Рис. 3.2.1

Получим уравнение движения элемента  $MN$ . С этой целью внешние силы приравняем силе инерции:

$$\rho(x)Sdx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + F(x, t) dx .$$

Сокращая на  $dx$  и обозначая  $\rho_1(x) = \rho(x)S$ , получим

$$\rho_1(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) , \quad (3.2.1)$$

где  $\rho_1(x)$  – линейная плотность материала струны.

Рассмотрим практически важную задачу о собственных поперечных колебаниях однородной струны. В этом случае  $\rho_1(x) = \rho_1$ ,  $F(x, t) = 0$ , поэтому уравнение колебаний (3.2.1) существенно упрощается и может быть записано в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}} . \quad (3.2.2)$$

Таким образом, получено волновое уравнение (3.1.4), если в нём положить  $t = \mu$ ,  $x = a\nu$ .

Искомая функция  $u(x, t)$  будет удовлетворять также граничным условиям:

$$u(0, t) = 0; \quad u(\ell, t) = 0, \quad (3.2.3)$$

в случае, когда струна жёстко закреплена на концах.

Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия (3.2.3) записываются в виде

$$u(0, t) = \theta_1(t); \quad u(\ell, t) = \theta_2(t), \quad (3.2.4)$$

где  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  – заданные функции времени  $t$ . Возможны и другие типы граничных условий. Например, если на левом конце  $x = 0$  струна жёстко закреплена, а на правом конце  $x = \ell$  действует заданная поперечная сила, изменяющаяся по закону  $\gamma(t)$ , то граничные условия имеют вид

$$u(0, t) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = \gamma(t)/T. \quad (3.2.5)$$

Второе граничное условие непосредственно вытекает из формулы для поперечной силы  $F_u = T \frac{\partial u}{\partial x}$ .

Поскольку процесс поперечных колебаний струны зависит от её начальной формы и распределения скоростей в начальный момент времени  $t = 0$ , то необходимо задать ещё и начальные условия:

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad (3.2.6)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные функции координаты  $x$ .

2. Найдём решение уравнения (3.2.2), удовлетворяющее заданным граничным (3.2.3) и начальным (3.2.6) условиям. Решение задачи получим с помощью метода разделения переменных (метод Фурье), который является одним из наиболее распространённых методов решения уравнений математической физики. Предположим, что решение уравнения (3.2.2), не равное тождественно нулю и удовлетворяющее граничным условиям (3.2.3), можно представить в виде произведения двух функций:

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

где  $X(x)$  – функция, зависящая только от абсциссы  $x$ ;  $T(t)$  – функция, зависящая только от времени  $t$ .

Подставляя  $u(x, t)$  в уравнение (3.2.2) и граничные условия (3.2.3), получим

$$T''X = a^2TX'' \quad (3.2.7)$$

или

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}, \quad (3.2.8)$$

и

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0, \quad (3.2.9)$$

при этом временно исключим из рассмотрения те значения  $x$  и  $t$ , для которых, соответственно,  $X(x) = 0$ ,  $T(t) = 0$ .

Равенство (3.2.8) возможно лишь в том случае, когда его левая часть не зависит от  $t$ , а правая не зависит от  $x$ , т.е. обе части равенства сохраняют постоянное значение

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad (3.2.10)$$

где  $\lambda > 0$  – постоянная величина\*.

---

\* Случай  $\lambda < 0$  не рассматриваем, так как дифференциальное уравнение (3.2.11) имеет общее решение  $X(x) = Ce^{\sqrt{-\lambda}x} + De^{-\sqrt{-\lambda}x}$ , которое ни при каких ненулевых значениях констант  $C$  и  $D$  не удовлетворяет граничным условиям (3.2.9).

Из соотношений (3.2.10) следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0; \quad (3.2.11)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (3.2.12)$$

Фундаментальной системой решений (3.2.11) служит пара функций  $\{\cos \lambda x, \sin \lambda x\}$ . Каждая из них обращает (3.2.7) в тождество в тех точках  $x$ , в которых, соответственно,  $\cos \lambda x = 0$  и  $\sin \lambda x = 0$ , т.е. от ограничения  $X(x) \neq 0$  (введённого при записи уравнения (3.2.7) в форме (3.2.8)) теперь можно освободиться. Общее решение уравнения (3.2.11) представляется в форме

$$X(x) = C \cos \sqrt{\lambda} x + D \sin \sqrt{\lambda} x. \quad (3.2.13)$$

Аналогичны рассуждения для  $T(t)$ ; общее решение (3.2.12) имеем в форме линейной комбинации вида

$$T(t) = A \cos a\sqrt{\lambda} t + B \sin a\sqrt{\lambda} t, \quad (3.2.14)$$

где  $A, B, C, D$  из (3.2.13), (3.2.14) – произвольные постоянные. Подставляя значения  $x = 0$  и  $x = \ell$  в формулу (3.2.13) и учитывая граничные условия (3.2.9), получим

$$X(0) = C = 0; \quad X(\ell) = D \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0.$$

Поскольку функция  $X(x)$  не равна тождественно нулю, то  $D \neq 0$ , поэтому  $\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$ . Решение данного тригонометрического уравнения имеет вид  $\lambda = \lambda_n$ , где

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.2.15)$$

Таким образом, нетривиальные решения краевой задачи (3.2.11), (3.2.9) возможны лишь при значениях  $\lambda = \lambda_n$ . Этим значениям соответствуют функции вида

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.2.16)$$

определяемые с точностью до произвольных множителей  $D_n$ . Этим же значениям  $\lambda_n$  соответствуют решения уравнения (3.2.12), представленные ранее в форме (3.2.14):

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t; \quad (3.2.17)$$

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{\ell} = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho_1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $A_n, B_n$  – произвольные постоянные. Величины  $\omega_n$  называются круговыми собственными частотами колебаний струны, т.е. период колебаний  $\tau_n = 2\pi/\omega_n$ . Собственными же частотами колебаний в механике принято называть другие величины:

$$v_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho_1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.2.18)$$

Частные решения уравнения (3.2.2), удовлетворяющие граничным условиям (3.2.3), с учётом формул (3.2.7), (3.2.16), (3.2.17) и равенств  $D_n = 1$ , можно записать так:

$$u_n(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

В силу того, что дифференциальное уравнение (3.2.2) является линейным и однородным, функция, представленная рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{\ell} x, \quad (3.2.19)$$

будет решением уравнения (3.2.2) и удовлетворяет граничным условиям (3.2.3). Заметим, что ряд (3.2.19) даёт решение уравнения (3.2.2) только в том случае, если сам ряд и ряды, полученные путём двукратного почленного дифференцирования по переменным  $x$  и  $t$ , сходятся.

Решение (3.2.19) должно удовлетворять также начальным условиям (3.2.6), что можно добиться за счёт подбора постоянных  $A_n$  и  $B_n$ . Действительно, подставляя в ряд (3.2.19) значение  $t = 0$  и учитывая первое начальное условие (3.2.6), получим

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (3.2.20)$$

Пусть функция  $\varphi(x)$ , заданная в промежутке  $(0, \ell)$ , такова, что её можно продолжить нечётным образом и разложить на промежутке  $(-\ell, \ell)$  в ряд Фурье по синусам (3.2.20). Коэффициенты Фурье этого ряда определяются по формуле



$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (3.2.21)$$

Почленно дифференцируя ряд (3.2.19) по переменной  $t$ , подставляя во вновь полученный ряд значение  $t = 0$  и учитывая второе начальное условие (3.2.6), находим

$$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x. \quad (3.2.22)$$

Предположим, что функцию  $\psi(x)$ , заданную на промежутке  $(0, \ell)$ , также можно продолжить нечётным образом и разложить на промежутке  $(-\ell, \ell)$  в ряд Фурье по синусам (3.2.22), где

$$B_n = \frac{2}{\ell \omega_n} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx. \quad (3.2.23)$$

Таким образом, решение уравнения колебаний струны (3.2.2), удовлетворяющее заданным граничным (3.2.3) и начальным (3.2.6) условиям, построено. Оно представляется рядом (3.2.19), для коэффициентов которого имеют место формулы (3.2.21), (3.2.23).

Следует обсудить теперь вопрос о сходимости ряда (3.2.19) и о возможности его почленного дифференцирования; было установлено лишь, что его общий член есть решение уравнения (3.2.2) и остаётся открытым вопрос о сохранении этого свойства для бесконечной суммы. Схема рассуждения такова. Сходимость и почленная дифференцируемость (дважды по  $x$  и дважды по  $t$ ) ряда (3.2.19) имеют место, если данный ряд и ряды из соответствующих производных мажорируемы. Мажорантными же, как можно показать, служат ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n| \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |B_n|.$$

Их сходимость будет иметь место, если:

а) производные  $\varphi'(x)$  и  $\varphi''(x)$  непрерывны,  $\varphi'''(x)$  кусочно-непрерывна и

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0; \quad \varphi'(0) = \varphi'(\ell) = 0;$$

б)  $\psi'(x)$  непрерывна,  $\psi''(x)$  кусочно-непрерывна и

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0.$$

Можно показать, что при этих условиях полученное решение краевой задачи (3.2.2), (3.2.3), (3.2.6) оказывается единственным.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  точкам прямолинейной однородной струны длины  $\ell = 0,5$  м, имеющей прямоугольное поперечное сечение размером  $0,25 \times 0,4$  мм, сообщена скорость  $v = 5$  м/с. Натяжение струны  $T = 40$  Н, объёмная плотность материала струны  $\rho = 6,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Определить первые пять частот собственных колебаний и форму струны в момент времени  $t$ , если её концы  $x = 0$  и  $x = \ell$  жёстко закреплены. Сопротивлением среды пренебрегаем.

Итак, требуется найти решение уравнения поперечных колебаний струны (3.2.2), удовлетворяющее заданным граничным (3.2.3) и начальным (3.2.6) условиям:

$$u(0, t) = 0; \quad u(\ell, t) = 0; \quad (3.2.24)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v. \quad (3.2.25)$$

Вначале определим собственные частоты колебаний. Подставляя в формулу (3.2.18) значения параметров  $T = 40$  Н,  $\ell = 0,5$  м,  $\rho_1 = \rho S = 6,4 \cdot 10^{-4}$  кг/м, получим  $v_n = 250n$  ( $n = 1, 2, \dots, 5$ ), т.е.  $v_1 = 250$  с<sup>-1</sup>,  $v_2 = 500$  с<sup>-1</sup>,  $v_3 = 750$  с<sup>-1</sup>,  $v_4 = 1000$  с<sup>-1</sup>,  $v_5 = 1250$  с<sup>-1</sup>.

Решение задачи о собственных поперечных колебаниях однородной струны, удовлетворяющее граничным условиям (3.2.24), ищем в виде (3.2.19), где  $\omega_n = 2\pi v_n = 500n\pi$ . Чтобы найти коэффициенты  $A_n, B_n$  воспользуемся начальными условиями (3.2.25) и формулами для коэффициентов Фурье (3.2.21), (3.2.23). Вводя в формулы (3.2.21), (3.2.23) функции  $\phi(x) = 0, \psi(x) = v$  и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} A_n &= 0; \quad B_n = \frac{2}{\ell \omega_n} \int_0^\ell v \sin \frac{n\pi}{\ell} x dx = \\ &= -\frac{2v}{n\pi \omega_n} \cos \frac{n\pi}{\ell} x \Big|_0^\ell = \begin{cases} \frac{1}{25n^2 \pi^2}, & n = 2k - 1; \\ 0, & n = 2k. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, решение поставленной задачи получено. Запишем его в форме

$$u(x, t) = \frac{1}{25\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \sin \omega_{2k-1} t \sin \frac{\omega_{2k-1}}{250} x,$$

где  $\omega_{2k-1} = 500(2k-1)\pi$ .

3. Теперь рассмотрим более сложную задачу о вынужденных поперечных колебаниях однородной струны. Пусть струна, жёстко закреплённая на левом конце  $x = 0$ , начиная с момента времени  $t = 0$ , совершает вынужденные колебания под действием поперечной силы  $F = P \sin \omega t$ , приложенной к правому концу  $x = \ell$ .

Математическая постановка задачи следующая. Найти решение уравнения поперечных колебаний струны (3.2.2), удовлетворяющее заданным граничным (3.2.5) и начальным (3.2.6) условиям:

$$u(0, t) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = \varepsilon \sin \omega t; \quad (3.2.26)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (3.2.27)$$

где  $\varepsilon = P/T$ .

Решение исходной задачи ищем в виде суммы двух решений:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t). \quad (3.2.28)$$

Вначале решаем задачу без начальных условий:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad v(0, t) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(\ell, t) = \varepsilon \sin \omega t. \quad (3.2.29)$$

Полагая

$$v(x, t) = V(x) \sin \omega t$$

и вводя функцию  $v(x, t)$  в соотношения (3.2.29), приходим к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$V'' + \frac{\omega^2}{a^2} V = 0; \quad (3.2.30)$$

$$V(0) = 0; \quad V'(\ell) = \varepsilon. \quad (3.2.31)$$

Общим решением уравнения (3.2.30) является функция

$$V(x) = c_1 \cos \frac{\omega}{a} x + c_2 \sin \frac{\omega}{a} x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.2.31), получим:

$$c_1 = 0; \quad c_2 = \frac{\varepsilon a}{\omega \cos \frac{\omega \ell}{a}}.$$

Таким образом, искомое решение краевой задачи (3.2.29) имеет форму

$$v(x, t) = \frac{\varepsilon a}{\omega \cos \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t. \quad (3.2.32)$$

Рассмотрим теперь задачу с начальными условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.2.33)$$

$$w(0, t) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}(\ell, t) = 0; \quad (3.2.34)$$

$$w(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\varepsilon a}{\cos \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega x}{a}. \quad (3.2.35)$$

Начальные условия (3.2.35) следуют из начальных условий (3.2.27) и формул (3.2.28), (3.2.32).

Решение уравнения (3.2.33), удовлетворяющее заданным граничным (3.2.34) и начальным (3.2.35) условиям, получим методом разделения переменных. Предположим, что решение уравнения (3.2.33), не равное тождественно нулю и удовлетворяющее граничным условиям (3.2.34), можно представить в виде произведения двух функций

$$w(x, t) = W(x)T(t). \quad (3.2.36)$$

Подставляя  $w(x, t)$  по формуле (3.2.36) в уравнение (2.2.33) и граничные условия (3.2.34), получим:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{W''}{W} = -\lambda; \quad (3.2.37)$$

$$W(0) = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x}(\ell) = 0, \quad (3.2.38)$$

где  $\lambda > 0$  – постоянная величина. Случай  $\lambda < 0$  рассмотрен в задаче о собственных колебаниях струны. Из равенств (3.2.37) следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$W'' + \lambda W = 0; \quad (3.2.39)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \quad (3.2.40)$$

общие решения которых имеют вид

$$W(x) = C \cos \sqrt{\lambda}x + D \sin \sqrt{\lambda}x; \quad (3.2.41)$$

$$T(t) = A \cos a\sqrt{\lambda}t + B \sin a\sqrt{\lambda}t,$$

где  $A, B, C, D$  – произвольные постоянные. Подставляя значения  $x = 0$  и  $x = \ell$  в первую формулу (3.2.41) и учитывая граничные условия (3.2.38), получим:

$$W(0) = C = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x}(\ell) = D\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\ell = 0,$$

откуда

$$\cos \sqrt{\lambda}\ell = 0.$$

Таким образом, нетривиальные решения краевой задачи (3.2.39), (3.2.38) возможны лишь при значениях  $\lambda = \lambda_n$ , где

$$\lambda_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right]^2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.2.42)$$

Найденным значениям  $\lambda_n$  соответствуют функции

$$W_n(x) = D_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.2.43)$$

определяемые с точностью до произвольных множителей  $D_n$ . Этим же значениям  $\lambda_n$  соответствуют решения уравнения (3.2.40):

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t; \quad (3.2.44)$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi a}{2\ell} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $A_n, B_n$  – произвольные постоянные.

Частные решения уравнения (3.2.33), удовлетворяющие граничным условиям (3.2.34) с учётом формул (3.2.36), (3.2.43), (3.2.44) и равенств  $D_n = 1$ , можно записать в форме

$$w_n(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x.$$

Поскольку дифференциальное уравнение (3.2.33) является линейным и однородным, то функция, представленная рядом

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x, \quad (3.2.45)$$

будет решением уравнения (3.2.33) и удовлетворяет граничным условиям (3.2.34).

Решение (3.2.45) должно удовлетворять также начальным условиям (3.2.35). Этого можно добиться за счёт подбора постоянных  $A_n$  и  $B_n$ . Действительно, подставляя в ряд (3.2.45) значение  $t = 0$  и принимая во внимание первое начальное условие (3.2.35), находим  $A_n = 0$ .

Почленно дифференцируя ряд (3.2.45) по переменной  $t$ , подставляя во вновь полученный ряд значение  $t = 0$  и учитывая второе начальное условие (3.2.35), получим

$$-\frac{\varepsilon a}{\cos \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} = \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x. \quad (3.2.46)$$

Функцию  $\sin \frac{\omega x}{a}$  разложим в ряд по функциям  $W_n(x)$  (их ортогональность доказана в параграфе 2.7):

$$\sin \frac{\omega x}{a} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x, \quad (3.2.47)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \frac{\omega x}{a} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} dx = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \left[ \cos \frac{\omega_n - \omega}{a} x - \cos \frac{\omega_n + \omega}{a} x \right] dx = \\ &= \frac{1}{\ell} \left[ \frac{a}{\omega_n - \omega} \sin \frac{\omega_n - \omega}{a} x - \frac{a}{\omega_n + \omega} \sin \frac{\omega_n + \omega}{a} x \right] \Bigg|_0^{\ell} = \\ &= \frac{a}{\ell} \left[ \frac{1}{\omega_n - \omega} - \frac{1}{\omega_n + \omega} \right] \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} \cos \frac{\omega \ell}{a} = \frac{2(-1)^{n+1} \omega a}{\ell (\omega_n^2 - \omega^2)} \cos \frac{\omega \ell}{a}. \end{aligned}$$

Сравнивая ряды (3.2.46), (3.2.47) и приравнивая коэффициенты при  $W_n(x)$ , получим

$$\delta_n = -\frac{\omega_n B_n}{\varepsilon a} \cos \frac{\omega \ell}{a},$$

откуда

$$B_n = \frac{2(-1)^{n+1} \varepsilon \omega a^2}{\ell \omega_n (\omega^2 - \omega_n^2)}. \quad (3.2.48)$$

Окончательно из формул (3.2.28), (3.2.32), (3.3.45), (3.2.48) находим решение задачи о вынужденных поперечных колебаниях струны:

$$u(x, t) = \frac{\varepsilon a}{\omega \cos \frac{\omega \ell}{a}} \sin \frac{\omega x}{a} \sin \omega t + \frac{2\varepsilon \omega a^2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\omega_n (\omega^2 - \omega_n^2)} \sin \omega_n t \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x,$$

которое удовлетворяет заданным граничным (3.2.26) и начальным (3.2.27) условиям. Заметим, что выкладки приведены для случая  $\omega_n \neq \omega$ .

### 3.3. УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

1. Рассмотрим упругий стержень, имеющий длину  $\ell$  и площадь поперечного сечения  $S$ . Координату  $x$  будем отсчитывать вдоль оси стержня и пусть  $0 \leq x \leq \ell$ . Предположим, что стержень совершает малые продольные колебания, которые описываются одной функцией  $u(x, t)$ , характеризующей в момент времени  $t$  продольное перемещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу  $x$  (см. рис. 3.3.1).

Пусть в недеформированном состоянии некоторый элемент стержня  $AB$  длиной  $dx$  занимал положение  $(x, x + dx)$ . В момент времени  $t$  элемент переходит в новое положение  $A'B'$ , изменяя при этом свою длину, которая будет

$$d\ell = [x + dx + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)].$$

Подсчитаем малое относительное удлинение элемента (деформацию) в точке  $x$ :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{d\ell - dx}{dx} = \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx},$$

откуда

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.3.1}$$

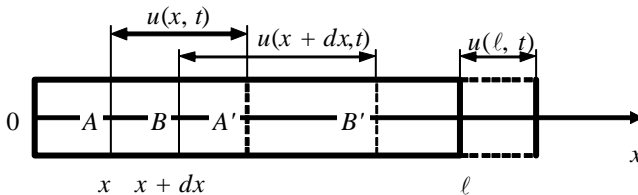


Рис. 3.3.1

В силу закона Гука напряжения  $\sigma(x, t)$  равномерно распределены по поперечному сечению стержня:

$$\sigma(x, t) = E(x)\varepsilon(x, t), \quad (3.3.2)$$

где  $E(x)$  – модуль упругости (модуль Юнга) материала в точке  $x$ . По этой причине сила  $T(x, t)$ , действующая в поперечном сечении стержня, с учётом равенств (3.3.1), (3.3.2) может быть определена так:

$$T(x, t) = S\sigma(x, t) = SE(x)\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.3.3)$$

Рассмотрим элемент стержня  $AB$ . На концах этого элемента действует в продольном направлении сила:

$$SE(x+dx)\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) - SE(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = S\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]dx.$$

Предположим, что на элемент  $AB$  в продольном направлении действует внешняя сила, которая считается непрерывно распределённой с плотностью  $F(x, t)$ , рассчитанной на единицу длины:

$$F(x, t)Sdx.$$

Пусть  $\rho(x)$  – плотность материала стержня, тогда сила инерции элемента стержня  $AB$  равна:

$$\rho(x)S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)dx.$$

Приравнивая силы, действующие на элемент  $AB$ , получим уравнение движения:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t). \quad (3.3.4)$$

Рассмотрим частную задачу о собственных продольных колебаниях однородного стержня в среде, не оказывающей сопротивления колебаниям. В этом случае  $\rho(x) = \rho$ ,  $E(x) = E$ ,  $F(x, t) = 0$ , поэтому уравнение колебаний (3.3.4) существенно упрощается и может быть представлено в форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.3.5)$$



Обратим внимание, что аналогичное уравнение в частных производных уже рассматривалось в п. 3.2. (см. уравнение (3.2.2)) при изучении собственных поперечных колебаний однородной струны.

Сформулируем граничные и начальные условия. Пусть один конец стержня жёстко закреплён, а другой свободен, тогда граничные условия имеют вид

$$u(0, t) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0, \quad (3.3.6)$$

так как

$$T(\ell, t) = SE \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0.$$

Если оба конца стержня свободны от напряжений, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, t) = 0. \quad (3.3.7)$$

В случае, когда концы стержня движутся по заданному закону имеем

$$u(0, t) = \theta_1(t); \quad u(\ell, t) = \theta_2(t), \quad (3.3.8)$$

где  $\theta_1(t)$ ,  $\theta_2(t)$  – заданные функции времени  $t$ . Возможны и другие типы граничных условий.

Что касается начальных условий, то их можно записать в традиционной форме:

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad (3.3.9)$$

где  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  – заданные функции координаты  $x$ .

2. Решение уравнения (3.3.5), удовлетворяющее заданным граничным и начальным условиям (3.3.6) – (3.3.9), можно получить с помощью метода разделения переменных. Этот метод достаточно подробно излагается в п. 3.2 при решении задачи о поперечных колебаниях струны, поэтому дальнейшее изложение проведём по возможности кратко.

Предположим, что решение уравнения (3.3.5), не равное тождественно нулю и удовлетворяющее граничным условиям (3.3.6), можно представить в виде произведения двух функций:

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (3.3.10)$$

где  $X(x)$  – функция, зависящая только от абсциссы  $x$ ;  $T(t)$  – функция, зависящая только от времени  $t$ .

Подставляя  $u(x, t)$  по формуле (3.3.10) в уравнение (3.3.5) и граничные условия (3.3.6), получим

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \lambda > 0; \quad (3.3.11)$$

$$X(0) = 0; \quad X'(\ell) = 0. \quad (3.3.12)$$

Аналогично п. 3.2 находим

$$X(x) = C \cos \sqrt{\lambda} x + D \sin \sqrt{\lambda} x; \quad (3.3.13)$$

$$T(t) = A \cos a\sqrt{\lambda} t + B \sin a\sqrt{\lambda} t. \quad (3.3.14)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.3.12), получим

$$X(0) = C = 0; \quad X'(\ell) = D\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \ell = 0.$$

Поскольку функция  $X(x)$  не равна тождественно нулю, то  $D \neq 0$ , поэтому  $\cos \sqrt{\lambda} \ell = 0$ . Решение данного тригонометрического уравнения имеет вид  $\lambda = \lambda_n$ , где

$$\lambda_n = \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \right]^2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.3.15)$$

Найденным значениям  $\lambda_n$  соответствуют функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.3.16)$$

определяемые с точностью до произвольных множителей  $D_n$ . Этим же значениям  $\lambda_n$  соответствуют решения

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t; \quad (3.3.17)$$

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi a}{2\ell} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где  $A_n, B_n$  – произвольные постоянные;  $\omega_n$  – круговые собственные частоты.

Частные решения уравнения (3.3.5), удовлетворяющие граничным условиям (3.3.6) с учётом формул (3.3.10), (3.3.16), (3.3.17) и равенств  $D_n = 1$  можно записать в форме

$$u_n(x, t) = (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x. \quad (3.3.18)$$

В силу того, что дифференциальное уравнение (3.3.5) является линейным и однородным, функция, представленная рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x, \quad (3.3.19)$$

будет решением уравнения (3.3.5) и удовлетворяет граничным условиям (3.3.6).

Решение (3.3.19) должно удовлетворять также начальным условиям (3.3.9), что можно добиться за счёт подбора постоянных  $A_n$  и  $B_n$ . Подставляя в ряд (3.3.19) значение  $t = 0$  и учитывая первое начальное условие (3.3.9), получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x. \quad (3.3.20)$$

Ряд (3.3.20) представляет собой разложение функции  $\varphi(x)$  в ряд по функциям  $X_n(x)$ , поэтому

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x dx. \quad (3.3.21)$$

Почленно дифференцируя ряд (3.3.19) по  $t$ , подставляя во вновь полученный ряд значения  $t = 0$  и учитывая второе начальное условие (3.3.9), находим

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x. \quad (3.3.22)$$

Ряд (3.3.22) также представляет собой разложение функции  $\psi(x)$  в ряд по функциям  $X_n(x)$ , поэтому

$$B_n = \frac{2}{\ell \omega_n} \int_0^{\ell} \psi(x) \sin \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} x dx. \quad (3.3.23)$$

Таким образом искомое решение (3.3.19), (3.3.21), (3.3.23) получено. Рассуждения, связанные со сходимостью ряда (3.3.19) и его почленной дифференцируемостью, аналогичны приведённым в параграфе 3.2.

### 3.4. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим твёрдое тело, температура которого в точке  $(x, y, z)$  в момент времени  $t$  определяется функцией  $u(x, y, z, t)$ . Совокупность мгновенных значений температуры во всех точках тела называется температурным полем. Температурное поле является скалярным, так как температура – величина скалярная.

Различают стационарное и нестационарное температурные поля.

Нестационарным температурным полем называется такое поле, температура которого изменяется во времени. Если температура в любой точке температурного поля не зависит от времени, т.е. является функцией только координат, то такое поле называется стационарным.

В общем случае температурное поле, в каждой точке которого температура задаётся функцией  $u(x, y, z, t)$ , является пространственным (трёхмерным). Если температура есть функция только двух координат, то поле называется двумерным, т.е.  $u(x, y, t)$ . Если же температура является функцией одной координаты, то поле называется одномерным, т.е.  $u(x, t)$ .

Примером одномерного температурного поля может служить поле неограниченной пластины (пластина, ширина и длина которой велики по сравнению с толщиной) при распространении тепла перпендикулярно к её поверхности (рис. 3.4.1). Одномерное температурное поле возникает так же в прямом стержне постоянного сечения с теплоизолированной боковой поверхностью, когда тепловое воздействие осуществляется через его торцы.

1. Будем рассматривать такие физические процессы и тела, тепловое состояние которых описывается одномерным температурным полем.

Если температура  $u(x, t)$  в различных точках тела неодинакова, то возникают тепловые потоки, действующие из мест с более высокой температурой к местам с более низкой температурой. Согласно опытному закону Фурье, количество тепла  $dQ$ , протекающее через сечение  $x$  с площадью  $S$  за промежутки времени  $[t, t + dt]$ , равно

$$dQ = qSdt, \quad (3.4.1)$$

где  $q = -\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  – плотность теплового потока, равная количеству тепла, протекшему в единицу времени через единицу площади. Коэффициент  $\lambda(x)$  называется коэффициентом теплопроводности и является физической характеристикой материала тела в отношении его способности к передаче тепла (теплопроводности). Его размерность равна Вт/м·К.

Закон Фурье (3.4.1) может быть записан в интегральной форме

$$Q = -S \int_{t_1}^{t_2} \lambda(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt, \quad (3.4.2)$$

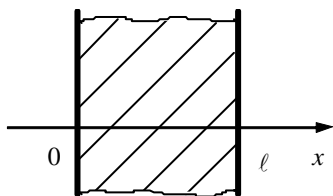


Рис. 3.4.1.

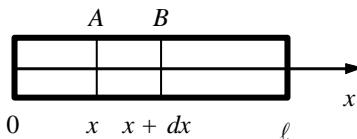


Рис. 3.4.2.

которая позволяет для известного температурного поля  $u(x, t)$  и коэффициента теплопроводности  $\lambda(x)$  определить количество теплоты  $Q$ , протекающее за промежуток времени  $[t_1, t_2]$  через сечение  $x$  с площадью  $S$ .

Рассмотрим элемент стержня  $AB$  (рис. 3.4.2), заключённый между сечениями с координатами  $x$  и  $x + dx$ . Согласно закону Фурье приток тепла в элемент стержня за время  $[t, t + dt]$  будет:

$$dQ = S\lambda(x+dx)\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t)dt - S\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt = S\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)dxdt.$$

Количество тепла, которое необходимо сообщить элементу стержня массой  $dm = \rho(x)Sdx$ , чтобы повысить его температуру на величину  $u(x, t + dt) - u(x, t)$  есть:

$$dQ_1 = c(x)\rho(x)S[u(x, t + dt) - u(x, t)]dx = Sc(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)dxdt,$$

где  $c(x)$  – удельная теплоёмкость (Дж/кг·К);  $\rho(x)$  – объёмная плотность (кг/м<sup>3</sup>).

Внутри стержня могут существовать источники или поглотители тепла. Выделение или поглощение тепла характеризует плотность тепловых источников  $F(x, t)$  в точке с координатой  $x$  и в момент времени  $t$ . В результате действия этих источников в элементе стержня  $AB$  за промежуток времени  $dt$  выделится количество тепла

$$dQ_2 = SF(x, t)dxdt.$$

Подсчитывая баланс тепла для элемента стержня  $AB$  за промежуток времени  $dt$ , получим  $dQ = dQ_1 - dQ_2$ , откуда

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t). \quad (3.4.3)$$

Уравнение (3.4.3) является дифференциальным уравнением с частными производными 2-го порядка параболического типа. Это уравнение наиболее часто встречается при изучении процессов теплопроводности и диффузии и называется уравнением теплопроводности.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (3.4.3).

Если стержень является изотропным и однородным, а интервал изменения температур невелик, то  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$  можно считать постоянными и уравнение (3.4.3) в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.4.4)$$

где  $a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$  – постоянная, называемая коэффициентом температуропроводности ( $\text{м}^2/\text{с}$ );

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho c} F(x, t).$$

Если дополнительно в теле отсутствуют источники тепла, то  $f(x, t) = 0$  и уравнение (3.4.4) записывается в виде

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.4.5)$$

Дифференциальные уравнения (3.4.3) – (3.4.5), описывающие процесс распространения тепла в стержне, не дают однозначных решений, поэтому для нахождения единственного решения, к уравнению теплопроводности необходимо присоединить начальные и граничные условия.

Начальное условие состоит в задании значений функции  $u(x, t)$  в начальный момент времени  $t = 0$ , т.е.

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (3.4.6)$$

В зависимости от температурного режима на границах существуют три основных типа граничных условий.

а) Граничное условие первого рода состоит в задании температуры на границе тела в любой момент времени  $t \geq 0$ . Например, на конце стержня при  $x = 0$  температура задаётся в виде функции

$$u(0, t) = \varphi(t).$$

б) Граничное условие второго рода состоит в задании плотности теплового потока на границе тела в любой момент времени  $t \geq 0$ . Например, на конце стержня  $x = 0$  граничные условия задаются в виде

$$-\lambda \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu(t)$$

или

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = v(t),$$

где  $v(t) = -\frac{\mu(t)}{\lambda}$ . В случае если поверхность тела теплоизолирована, то

граничное условие принимает вид  $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$ .

в) Граничное условие третьего рода соответствует теплообмену по закону Ньютона на поверхности тела с окружающей средой, температура которой  $Q(t)$  известна. Математическая формулировка граничного условия третьего рода имеет вид:

при  $x = 0$ :

$$\lambda \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \alpha [u(0, t) - Q(t)];$$

при  $x = \ell$ :

$$-\lambda \frac{\partial u(\ell, t)}{\partial x} = \alpha [u(\ell, t) - Q(t)],$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплообмена.

Граничные условия при  $x = 0$  и  $x = \ell$  могут быть различных типов, так что число различных задач велико. Изучим некоторые из них.

2. Рассмотрим однородное уравнение теплопроводности с однородными граничными условиями. Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad t \geq 0 \quad (3.4.7)$$

при начальном условии

$$u(0, x) = \varphi(x) \quad (3.4.8)$$

и граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0. \quad (3.4.9)$$

Для решения задачи (3.4.7) – (3.4.9) воспользуемся методом Фурье (метод разделения переменных). Будем искать частные решения уравнения (3.4.7) в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (3.4.10)$$

Подставляя (3.4.10) в (3.4.7), имеем

$$X(x)T'(t) = a^2 T(t) X''(x)$$

или

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

откуда получаем два уравнения:

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0; \quad (3.4.11)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.4.12)$$

Чтобы получить нетривиальное решение уравнения (3.4.7) вида (3.4.10), удовлетворяющее граничным условиям (3.4.9), необходимо найти нетривиальное решение уравнения (3.4.12), удовлетворяющее граничным условиям:

$$X(0) = 0; \quad X(\ell) = 0. \quad (3.4.13)$$

Те значения параметра  $\lambda$ , при которых задача (3.4.12), (3.4.13) имеет нетривиальные решения, называются собственными числами, а сами эти решения – собственными функциями. Для  $\lambda$  возможны три случая.

а) При  $\lambda < 0$  общее решение уравнения (3.4.12) имеет вид

$$X(x) = Ce^{\sqrt{-\lambda}x} + De^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Для нахождения  $C$  и  $D$  из условий (3.4.13) получим систему

$$\begin{cases} C + D = 0; \\ Ce^{\sqrt{-\lambda}\ell} + De^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение  $C = D = 0$ , так как главный определитель системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\ell} & e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} \end{vmatrix} \neq 0;$$

следовательно,  $X(x) \equiv 0$ .

б) При  $\lambda = 0$  общее решение уравнения (3.4.12) имеет вид

$$X(x) = C + Dx.$$



Граничные условия (3.4.13) дают

$$\begin{cases} C + D \cdot 0 = 0; \\ C + D\ell = 0, \end{cases}$$

откуда  $C = D = 0$  и, следовательно,  $X(x) \equiv 0$ .

в) При  $\lambda > 0$  общее решение уравнения (3.4.12) имеет вид

$$X(x) = C \cos \sqrt{\lambda}x + D \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.4.13), получим

$$\begin{cases} C \cdot 1 + D \cdot 0 = 0; \\ C \cos \sqrt{\lambda}\ell + D \sin \sqrt{\lambda}\ell = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует  $C = 0$ , а из второго  $D \sin \sqrt{\lambda}\ell = 0$ . Считаем  $D \neq 0$ , ибо в противном случае  $X(x) \equiv 0$ ; поэтому  $\sin \sqrt{\lambda}\ell = 0$ , т.е.  $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Следовательно, нетривиальные решения задачи (3.4.12), (3.4.13) возможны лишь при значениях  $\lambda = \lambda_n$ , где

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Этим значениям  $\lambda_n$  соответствуют функции (как и ранее полагаем  $D = 1$ )

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

При  $\lambda = \lambda_n$  решение уравнения (3.4.11) имеет вид

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t},$$

где  $A_n$  – произвольные постоянные.

Таким образом, получаем, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (3.4.14)$$

удовлетворяют уравнению (3.4.7) и граничным условиям (3.4.9).

Составим ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (3.4.15)$$

сумма которого также удовлетворяет уравнению (3.4.7) (это установлено ниже) и граничным условиям (3.4.9).

Требую выполнения для (3.4.15) начального условия (3.4.8), получим

$$u(0, t) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (3.4.16)$$

Предположим, что функция  $\varphi(x)$  может быть продолжена нечётным образом на промежуток  $(-\ell, 0)$  и разложена на промежутке  $(-\ell, \ell)$  в ряд Фурье по синусам. Тогда (3.4.16) является разложением  $\varphi(x)$  в ряд Фурье и

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

Обсудим поведение ряда (3.4.15), ряда из производных по переменной  $t$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

и производных (первой и второй) по переменной  $x$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^s \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (s = 1, 2).$$

Мажорантным для каждого из них служит числовой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} M n^2 e^{-\tau n^2} |A_n|,$$

где  $\tau = \left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2 = \text{const}$ ;  $M = \text{const} > 0$ ; при этом

$$A_n \leq \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} |\varphi(x)| dx \leq \text{const}.$$

Таким образом, достаточно установить сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\tau n^2}, \quad \tau > 0,$$

в которой легко убеждаемся, например, на основании признака Даламбера.

Мажорируемость (а значит и равномерная сходимость) каждого из упомянутых функциональных рядов обеспечивает возможность соответствующих почленных дифференцирований, которые нужны при проверке того, что  $u(x, t)$  в виде (3.4.15) удовлетворяет уравнению (3.4.7).

Теперь полностью доказано, что сумма ряда (3.4.15) есть решение краевой задачи (3.4.7) – (3.4.9).

В качестве примера исследуем процесс остывания круглого, с радиусом  $R = 0,02$  м, однородного медного стержня длиной  $\ell = 0,1$  м с теплоизолированной боковой поверхностью и начальной температурой 323 К. На торцах стержня поддерживается температура 273 К.

Для описания нашего процесса рассмотрим уравнение теплопроводности (3.4.6). Внутренние источники тепла в стержне и боковой теплообмен отсутствуют. Температура в стержне изменяется от 323 до 273 К. В этом температурном диапазоне медь имеет следующие физические характеристики:  $c = 383$  Дж/кг·К;  $\rho = 8960$  кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda = 392$  Вт/м·К. Для упрощения математической модели будем считать эти характеристики в нашем температурном диапазоне неизменными, тогда уравнение теплопроводности преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad t \geq 0, \quad (3.4.18)$$

где  $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} = 1,14 \cdot 10^{-4}$  (м<sup>2</sup>/с).

В момент времени  $t = 0$  зададим начальное условие

$$u(x, 0) = 323. \quad (3.4.19)$$

На концах стержня зададим граничные условия

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 273. \quad (3.4.20)$$

Получим математическую модель (3.4.18) – (3.4.20) для определения температурного поля стержня.

Введём новую функцию  $v(x, t)$ , связанную с  $u(x, t)$  соотношением

$$u(x, t) = v(x, t) + 273. \quad (3.4.21)$$

Подставив (3.4.21) в (3.4.18) – (3.4.20), получим задачу с однородными граничными условиями для нахождения функции  $v(x, t)$ :

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 \leq x \leq \ell; \quad t \geq 0; \quad (3.4.22)$$

$$v(x, 0) = 50; \quad (3.4.23)$$

$$v(0, t) = v(\ell, t) = 0. \quad (3.4.24)$$

Решая (3.4.22) – (3.4.24) так же как (3.4.7) – (3.4.9), получим

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell},$$

где

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} 50 \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{-100}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \Big|_0^{\ell} = -\frac{100}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ \frac{200}{n\pi}, & n = 2k - 1; \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Получим решение задачи (3.4.22) – (3.4.24):

$$v(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{\ell}. \quad (3.4.25)$$

Подставив (3.4.25) в (3.4.21), определим аналитическое решение задачи (3.4.18) – (3.4.20):

$$u(x, t) = 273 + \frac{200}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{\ell}. \quad (3.4.26)$$

Вычислим используя (3.4.26), значения температур в точках стержня  $x = 0, \frac{\ell}{4}, \frac{\ell}{2}, \frac{3}{4}\ell, \ell$  в моменты времени  $t = \frac{t_0}{2}, t_0, 2t_0, 10t_0$ , где  $t_0 = 10$  с.

Результаты вычислений сведены в табл. 1.

*Примечание:* Для вычисления  $u(x, t)$  в (3.4.26) брались первые пять ненулевых членов ряда. Округление велось до целых чисел.

Таблица 1

$x, \text{ м}$ \diagdown	0	0,025	0,05	0,075	0,1
5	273	299	309	299	273
10	273	287	293	287	273
20	273	278	280	278	273
100	273	273	273	273	273

Используя полученные результаты, построим графики распределения температуры в стержне в различные моменты времени.

Из табл. 1 и рис. 3.4.3 видно, что температура в стержне с течением времени убывает и стремится к своему предельному значению 273 К. Происходит выравнивание температуры на концах и внутри стержня. Для достаточно больших значений  $t$  температурное поле  $u(x, t)$  становится стационарным. Это видно так же из (3.4.26). При  $t \rightarrow \infty$  множители

$e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)a}{\ell}\right)^2 t}$ , входящие в члены ряда, стремятся к нулю и, так как ряд является сходящимся, вся сумма ряда будет стремиться к нулю, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 273$ .

Используя данные из табл. 1, построим зависимость температуры от времени в заданной точке  $x = \frac{\ell}{2}$ .

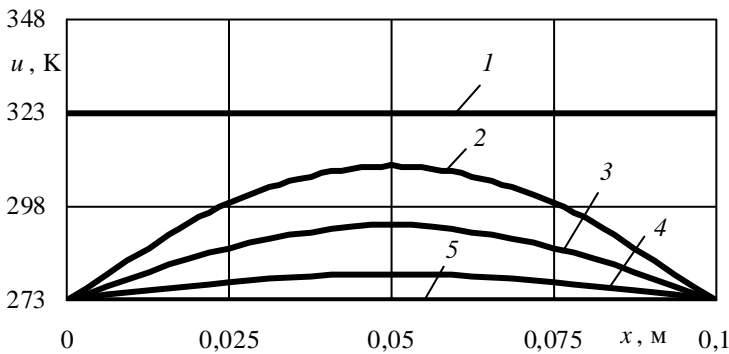


Рис. 3.4.3. Распределение температуры в стержне в различные моменты времени: 1 – при  $t = 0$ ; 2 – при  $t = 5$  с; 3 – при  $t = 10$  с; 4 – при  $t = 20$  с; 5 – при  $t = 100$  с

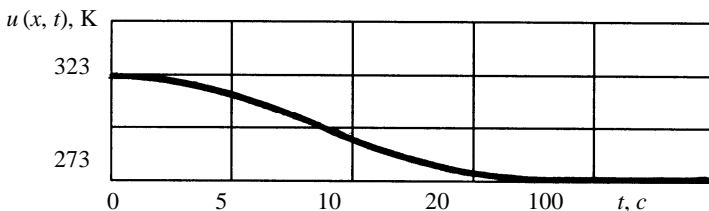


Рис. 3.4.4

Из рис. 3.4.3 видно, что максимальная температура стержня достигается в точке  $x_0 = \frac{\ell}{2}$ . Динамика изменения температуры в этой точке, изображённая на рис. 3.4.4, показывает, что к моменту времени  $t = 100$  с температура в стержне станет равной температуре на его концах.

Определим количество тепла  $Q$ , протекшее через сечение  $x$  стержня за промежуток времени  $(0, t)$ . Из (3.4.26) найдём

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{200}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)a}{\ell}\right)^2 t} \cos \frac{(2k-1)\pi x}{\ell}.$$

Для определения  $Q$  воспользуемся формулой (3.4.2), считая  $\lambda$  постоянной величиной

$$Q = -S\lambda \int_0^t \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt = \frac{200\lambda R^2 \ell}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi x}{\ell}}{(2k-1)^2} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\pi(2k-1)a}{\ell}\right)^2 t} \right]. \quad (3.4.27)$$

Возьмём в качестве приближенного значения  $Q$  первое слагаемое ряда (3.4.27)

$$Q \approx \frac{200\lambda R^2 \ell}{\pi a^2} \cos \frac{\pi x}{\ell} \left[ 1 - e^{-\left(\frac{\pi a}{\ell}\right)^2 t} \right] \quad (3.4.28)$$

и вычислим количество тепла, прошедшее через сечение  $x = 0$  за 20 с от начала процесса охлаждения:

$$Q \approx \frac{200 \cdot 392 \cdot (0,02)^2 \cdot 0,1}{3,14 \cdot 1,14 \cdot 10^{-4}} \cdot \left[ 1 - e^{-20 \cdot \left(\frac{3,14 \cdot \sqrt{1,14 \cdot 10^{-4}}}{0,1}\right)^2} \right] \approx 78,3 \text{ (Дж)}.$$

3. Изучим неоднородное уравнение теплопроводности с однородными начальным и граничными условиями:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t); \quad (3.4.29)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad (3.4.30)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0. \quad (3.4.31)$$

Для решения этой задачи представим  $u(x, t)$  в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \frac{\pi k}{\ell} x. \quad (3.4.32)$$

Чтобы определить  $u(x, t)$  нужно найти в (3.4.32) значение функций  $u_k(t)$ .

Представим функцию  $f(x, t)$ , входящую в (3.4.29), в виде разложения в ряд Фурье по тем же функциям что и  $u(x, t)$ :

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{\pi k}{\ell} x, \quad (3.4.33)$$

где

$$f_k(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\xi, t) \sin \frac{\pi k}{\ell} \xi d\xi.$$

Подставляя (3.4.32) и (3.4.33) в (3.4.29), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{\pi a k}{\ell} \right)^2 u_k(t) + u_k'(t) - f_k(t) \right\} \sin \frac{\pi k}{\ell} x = 0.$$

Полученное уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения будут равны нулю, т.е.

$$u_k'(t) + \left( \frac{\pi a k}{\ell} \right)^2 u_k(t) - f_k(t) = 0. \quad (3.4.34)$$

Подставляя (3.4.32) в начальное условие (3.4.30)

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0) \sin \frac{\pi k}{\ell} x = 0,$$

получим начальное условие для уравнения (3.4.34)

$$u_k(0) = 0. \quad (3.4.35)$$

Решая задачу Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения (3.4.34) с начальным условием (3.4.35), находим

$$u_k(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ak}{\ell}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau. \quad (3.4.36)$$

Подставляя выражение (3.4.36) в формулу (3.4.32), получим решение исходной задачи (3.4.29) – (3.4.31) в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi ak}{\ell}\right)^2(t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \right] \sin \frac{\pi k}{\ell} x. \quad (3.4.37)$$

*Замечание 1.* Если неоднородное уравнение теплопроводности имеет ненулевое начальное условие и однородные граничные условия, т.е.

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t); \quad (3.4.38)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x); \quad (3.4.39)$$

$$v(0, t) = v(\ell, t) = 0, \quad (3.4.40)$$

то его решение ищется в виде

$$v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (3.4.41)$$

где  $u_1(x, t)$  – решение задачи (3.4.7) – (3.4.9), а  $u_2(x, t)$  – решение задачи (3.4.29) – (3.4.31). В этом легко убедиться, подставив (3.4.41) в (3.4.38) – (3.4.40).

*Замечание 2.* Когда на поверхности стержня происходит теплообмен со средой, температура которой принимается равной нулю, то уравнение распространения тепла в однородном стержне имеет вид

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - hu(x, t). \quad (3.4.42)$$

Подстановкой  $u(x, t) = e^{-ht} v(x, t)$  уравнение (3.4.42) сводится к уравнению для  $v(x, t)$ :



$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}.$$

4. Рассмотрим общую первую краевую задачу, состоящую в нахождении решения уравнения:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (3.4.43)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (3.4.44)$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = \psi_1(t); \quad (3.4.45)$$

$$u(\ell, t) = \psi_2(t).$$

Введём новую неизвестную функцию  $v(x, t)$ :

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции  $U(x, t)$ .

Эта функция  $v(x, t)$  будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t);$$

$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - \left[ \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \right]$$

с начальными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x); \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0)$$

и с граничными условиями

$$v(0, t) = \bar{\psi}_1(t); \quad \bar{\psi}_1(t) = \psi_1(t) - U(0, t);$$

$$v(\ell, t) = \bar{\psi}_2(t); \quad \bar{\psi}_2(t) = \psi_2(t) - U(\ell, t).$$

Выберем вспомогательную функцию  $U(x, t)$  таким образом, чтобы

$$\bar{\psi}_1(t) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\psi}_2(t) = 0,$$

для чего достаточно положить

$$U(x, t) = \psi_1(t) + \frac{x}{\ell} [\psi_2(t) - \psi_1(t)].$$

Таким образом, нахождение функции  $u(x, t)$ , дающей решение общей первой краевой задачи, сведено к нахождению функции  $v(x, t)$ , дающей решение рассмотренной выше задачи (3.4.38) – (3.4.40).

### 3.5. УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим среду (газообразную, жидкую, пористую) в которой находится некоторое вещество (газ, жидкость и т.д.). Распределение этого вещества в среде характеризуется значением его концентрации, как функции координат и времени, т.е.

$$u(x, y, z, t) = Q/V,$$

где  $Q$  – масса вещества, содержащегося в объёме  $V = 1 \text{ м}^3$ .

Совокупность мгновенных значений концентрации вещества во всех точках среды образует поле концентраций, для которого, так же как и для поля температур, вводятся понятия стационарности, нестационарности, размерности. Будем рассматривать среды, в которых распределение вещества описывается одномерным полем концентраций, т.е.  $u(x, t)$ . Примером таких сред может служить среда, заполняющая полую прямую трубку (неограниченную пластину), если в любой момент времени концентрация вещества по сечению  $x$  одинакова.

Если концентрация вещества в различных точках среды неодинакова, то в ней происходит перераспределение вещества в соответствии с законом Нернста, согласно которому масса вещества  $dQ$ , протекающая через сечение  $x$  за промежуток времени  $(t, t + dt)$ , равна

$$dQ = W S dt, \tag{3.5.1}$$

$$W = -D(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

где  $D(x)$  – коэффициент диффузии ( $\text{м}^2/\text{с}$ );  $S$  – площадь сечения  $x$ ;  $W$  – плотность диффузионного потока, равная массе вещества, протекающей в единицу времени через единицу площади ( $\text{кг}/\text{м}^2 \cdot \text{с}$ ).

Чтобы определить массу вещества, протекающую за промежуток времени  $[t_1, t_2]$  через сечение  $x$  с площадью  $S$ , закон Нернста (3.5.1) записывается в интегральной форме

$$Q = S \int_{t_1}^{t_2} W dt = -S \int_{t_1}^{t_2} D(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dt. \tag{3.5.2}$$

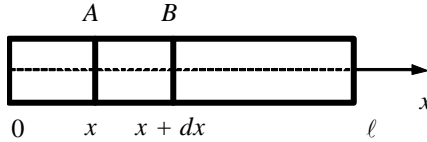


Рис. 3.5.1

Рассмотрим элемент стержня  $AB$ , заключённый между сечениями с координатами  $x$  и  $x+dx$  (рис. 3.5.1).

Согласно закону Нернста масса вещества, поступившего в элемент стержня  $AB$  за время  $[t, t+dt]$ , равна:

$$dQ = SD(x+dx) \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx, t) dt - SD(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt =$$

$$= S \frac{\partial}{\partial x} \left[ D(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] dx dt.$$

С другой стороны, по определению концентрации масса вещества в элементе стержня  $AB$  при изменении концентрации на величину  $u(x, t+dt) - u(x, t)$  равна:

$$dQ_1 = c(x) S dx [u(x, t+dt) - u(x, t)] = Sc(x) \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dt dx,$$

где  $c(x)$  – коэффициент пористости равный отношению объёма пор  $V_{\text{пор}}$  к полному объёму  $V$ , который в рассматриваемой задаче равен:  $Sdx$ , т.е.  $V_{\text{пор}} = c(x) S dx$  (рис. 3.5.2).

Внутри стержня могут быть источники вещества с плотностью  $F(x, t)$  в точке  $x$  и в момент времени  $t$ . В результате действия этих источников в элементе стержня  $AB$  за промежуток времени  $[t, t+dt]$  выделится масса вещества

$$dQ_2 = SF(x, t) dx dt.$$

Составляя уравнение баланса массы и предполагая, что диффузия вещества через стенки стержня отсутствует, получим  $dQ = dQ_1 - dQ_2$ , откуда

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t).$$

(3.5.3)

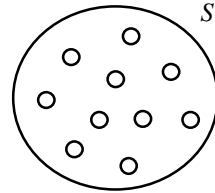


Рис. 3.5.2

Уравнение (3.5.3) является дифференциальным уравнением с частными производными параболического типа и называется уравнением диффузии. Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (3.5.3).

1. Если материал стержня таков, что  $c(x)$ ,  $D(x)$  можно считать постоянными, то уравнение (3.5.3) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (3.5.4)$$

где  $a^2 = D/c$ ;  $f(x, t) = F(x, t)/c$ .

2. Если же дополнительно отсутствуют источники вещества внутри стержня, то уравнение (3.5.4) ещё упрощается:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.5.5)$$

3. Если коэффициент пористости  $c = 1$ , что справедливо для газообразной среды, то уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.5.6)$$

Что касается начального и граничных условий, то они задаются как в п. 3.4.

В качестве примера рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{D}{c}; \quad (3.5.7)$$

$$u(0, t) = u_0; \quad u(\ell, t) = u_\ell;$$

$$u(x, 0) = 0,$$

что соответствует физической задаче о диффузии вещества из окружающей среды в пористую трубку через её открытые концы. Концентрация вещества в окружающей среде на обоих концах поддерживается постоянной и равной  $u_0$ ,  $u_\ell$  (для определённости полагаем  $u_0 < u_\ell$ ). Решение ищем в виде суммы

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

$$w(x, t) = u_0 + \frac{x}{\ell}(u_\ell - u_0), \quad (3.5.8)$$

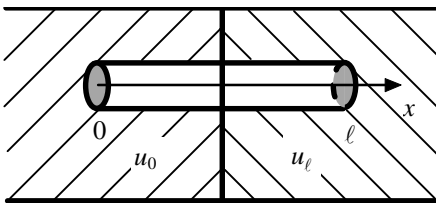


Рис. 3.5.3

поэтому из (3.5.7), (3.5.8) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (3.5.9)$$

$$v(0, t) = v(\ell, t) = 0, \quad v(x, 0) = -\frac{1}{\ell}(u_\ell - u_0)x - u_0.$$

Решение краевой задачи (3.5.9) имеет вид (см. п. 3.4)

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell};$$

$$A_n = -\frac{2}{\ell} \int_0^\ell \left[ \frac{1}{\ell}(u_\ell - u_0)x + u_0 \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx.$$

### 3.6. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

1. Рассмотренные выше математические модели механических колебаний относились к случаю малых колебаний конечной струны и конечного стержня, а изученные процессы теплопереноса (диффузии) – к случаю конечного стержня (конечной полый трубки). Основным инструментом анализа построенных моделей являлись ряды Фурье. При решении задач математической физики для бесконечных сред используются «непрерывные» аналоги коэффициентов и рядов Фурье – преобразование и интеграл Фурье. Речь идёт о математических моделях колебаний бесконечной струны, распространении тепла в бесконечном и полубесконечном стержне, задаче Дирихле в полуплоскости и др.

В настоящем параграфе мы ограничимся рассмотрением уравнения свободных поперечных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.6.1)$$

считая её бесконечной (так что краевые условия не рассматриваются):  $-\infty < x < \infty$ . Начальный профиль струны считаем известным:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (3.6.2)$$

а начальные скорости – для определённости – нулевыми:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \quad (3.6.3)$$

2. Функция  $u = u(x, t)$ , описывающая движение точек струны, имеет «Фурье-образ» (преобразование Фурье  $u$  как функции от  $x$ , зависящей и от параметра  $t$ )

$$\hat{u} = \hat{u}(\omega, t).$$

Преобразование разностного отношения

$$\frac{\Delta_t u}{\Delta t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

в силу свойства линейности (параграф 2.2, п. 1) будет иметь вид

$$\left( \frac{\Delta_t u}{\Delta t} \right)^\wedge = \frac{\hat{u}(x, t + \Delta t) - \hat{u}(x, t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , имеем

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^\wedge = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}.$$

Аналогично,

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)^\wedge = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}. \quad (3.6.4)$$

3. Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения (3.6.1). Согласно п. 2 параграфа 2.2 имеем

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^\wedge = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^\wedge = (i\omega) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^\wedge = (i\omega)(i\omega)u^\wedge = -\omega^2 \hat{u}. \quad (3.6.5)$$

Следовательно, Фурье-образ решения уравнения (3.6.1) с учётом соотношений (3.6.4), (3.6.5) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = -\omega^2 a^2 \hat{u}.$$

При каждом  $\omega$  – это обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Корни характеристического уравнения имеют вид  $\lambda_{1,2} = \pm ia\omega$ , следовательно, получаем общее решение

$$\hat{u} = C(\omega)e^{-ia\omega t} + D(\omega)e^{ia\omega t}. \quad (3.6.6)$$

4. Преобразование Фурье применим также к равенствам (3.6.2), (3.6.3), получим:

$$\begin{aligned} \hat{u}|_{t=0} &= \hat{\phi}(\omega); \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}|_{t=0} &= 0. \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

В силу (3.6.6) при  $t = 0$  и (3.6.7) имеем

$$C(\omega) + D(\omega) = \hat{\phi}(\omega). \quad (3.6.8)$$

В силу равенства

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = (-C(\omega)e^{-ia\omega} + D(\omega)e^{ia\omega})ia\omega$$

при  $t = 0$  и начального условия (3.6.7) имеем

$$0 = (-C(\omega) + D(\omega))ia\omega. \quad (3.6.9)$$

Из (3.6.8) и (3.6.9) вытекает

$$\begin{cases} C(\omega) + D(\omega) = \hat{\phi}(\omega); \\ C(\omega) - D(\omega) = 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C(\omega) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\omega); \\ D(\omega) = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\omega). \end{cases}$$

Теперь (3.6.6) принимает вид

$$\hat{u} = \frac{1}{2}\hat{\phi}(\omega)(e^{-ia\omega} + e^{ia\omega}).$$

Возвращаясь к «прообразу»  $u(x, t)$  в силу свойств 1 и 4 параграфа 2.2 получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\phi(x + at) + \frac{1}{2}\phi(x - at).$$

Это и есть искомое решение краевой задачи, сформулированной в п. 1.

5. В общем случае аналог условия (3.6.3) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad (3.6.10)$$

следовательно, переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\left. \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \right|_{t=0} = \hat{\psi}(\omega).$$

Поэтому решение (3.6.6) удовлетворяет условию (3.6.8) и

$$(-C(\omega) + D(\omega))i a \omega = \hat{\psi}(\omega),$$

т.е. получаем систему уравнений

$$\begin{cases} C(\omega) + D(\omega) = \hat{\phi}(\omega); \\ -C(\omega) + D(\omega) = \frac{1}{i a \omega} \hat{\psi}(\omega), \end{cases}$$

откуда

$$C(\omega) = \frac{1}{2} \left( \hat{\phi}(\omega) + \frac{i}{a \omega} \hat{\psi}(\omega) \right);$$

$$D(\omega) = \frac{1}{2} \left( \hat{\phi}(\omega) - \frac{i}{a \omega} \hat{\psi}(\omega) \right).$$

Остаётся сделать подстановку результатов в формулу (3.6.6):

$$\hat{u} = \frac{1}{2} \hat{\phi}(\omega) (e^{-i a \omega t} + e^{i a \omega t}) + \frac{i}{2 a \omega} \hat{\psi}(\omega) (e^{-i a \omega t} - e^{i a \omega t}).$$

Можно проверить, что второе слагаемое есть преобразование Фурье функции вида (этот факт установлен в рекомендованной литературе)

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau. \quad (3.6.11)$$

Таким образом, решение задачи о колебаниях бесконечной струны получено.

6. Рассмотрим теперь задачу о колебаниях полубесконечной струны, в случае, когда её конец расположен (неподвижно закреплён) в начале координат, а сама струна занимает положение оси  $OX$ . Тогда имеем краевую задачу:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (3.6.12)$$

$$u(0, t) = 0; \quad (3.6.13)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad (3.6.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x). \quad (3.6.15)$$

Поскольку функция (3.6.11) уже удовлетворяет уравнению (3.6.12) при всех  $(x, t)$  и начальным условиям (3.6.14), (3.6.15) при всех  $(x, 0)$ , и, в частности, при  $x \geq 0$  (условие (3.6.15) проверяется путём известного правила дифференцирования интеграла по переменному пределу интегрирования), то постараемся доопределить для  $x < 0$   $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  так, чтобы выполнялось условие (3.6.13). Заметим, что при  $x = 0$  значение  $u(x, 0)$  должно быть равным нулю, т.е.  $\varphi(0) = 0$ . Далее, в силу (3.6.11)

$$0 = u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\tau) d\tau. \quad (3.6.16)$$

Теперь достаточно доопределить функции  $\varphi$  и  $\psi$  нечётным образом при  $x < 0$ , так как тогда  $\varphi(at) + \varphi(-at) = \varphi(at) - \varphi(at) = 0$ , и интеграл нечётной функции  $\psi(\tau)$  по симметричному промежутку равен нулю.

Итак, для заданных при  $x \geq 0$   $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  и доопределённых в случае  $x < 0$  нечётным образом, имеем решение задачи (3.6.12) – (3.6.15) в виде (3.6.11).

7. Выясним физический смысл решения задачи о колебаниях бесконечной струны. Для простоты изложения ограничимся случаем нулевых начальных скоростей (условие (3.6.3)), а функцию  $\varphi(x)$ , описывающую начальный профиль струны, считаем чётной в некотором интервале  $(-\ell, \ell)$  и равной нулю вне этого интервала (рис. 3.6.1).

Рассмотрим первое слагаемое в полученной формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x - at) + \frac{1}{2} \varphi(x + at), \quad (3.6.17)$$

т.е.

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x - at), \quad \text{где } a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} > 0.$$

При возрастании  $t$  график будет, очевидно, перемещаться вправо по оси  $Ox$  со скоростью, равной  $a$ . При каждом фиксированном  $x = x_0$  ординаты точек  $U(x_0, t) = \frac{1}{2}\varphi(x_0 - at)$  и  $U(x_0, 0) = \frac{1}{2}\varphi(x_0)$  будут одинаковыми, т.е. отклонение струны от положения равновесия (равное  $\frac{1}{2}\varphi(x_0)$ ) продвигается вдоль оси абсцисс с постоянной скоростью. Такой процесс называется волной. Второе слагаемое в (3.6.17) соответствует волне, бегущей в обратном направлении. На рисунке 3.6.1 показаны графики функций  $U(x, t)$  в моменты  $t = 0, t = t_1, t = t_2$ . «Продвижение» графиков слева направо соответствует волне, описываемой первым слагаемым в (3.6.17), справа налево – вторым слагаемым.

Теперь можно охарактеризовать положение любой точки струны с фиксированной абсциссой  $x$ . Пусть  $x > l$ . Передний фронт волны, бегущей вправо (точка  $B$ ), достигнет точки  $x$ , пройдя путь  $x - l$ , и, следовательно, затратив время  $t^* = \frac{x - l}{a}$ . Задний фронт волны (точка  $A$ ) должен пройти путь, на  $2l$  больший, т.е.  $x + l$ , чтобы достигнуть положения  $x$  в момент  $t^{**} = \frac{x + l}{a}$ . Следовательно, точка  $x$  участвует в процессе колебаний в течение времени  $t \in \left(\frac{x - l}{a}, \frac{x + l}{a}\right)$ , а затем снова находится в состоянии покоя. Аналогично, точка  $x < -l$  участвует в колебательном процессе при  $t \in \left(\frac{-x - l}{a}, \frac{l - x}{a}\right)$ , соответственно волне, бегущей влево.

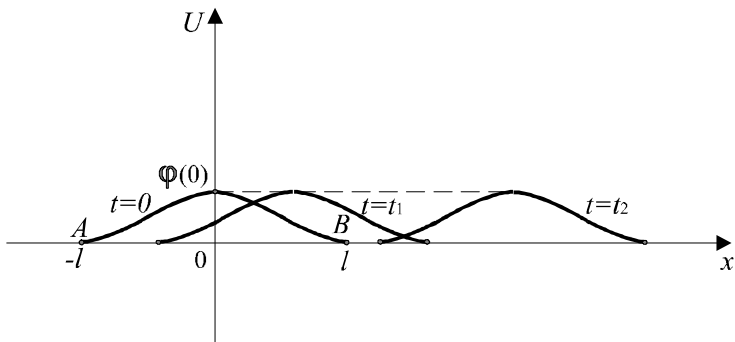


Рис. 3.6.1

Через точку же с абсциссой  $x \in (0, \ell)$  проходят обе волны. Задний фронт бегущей влево волны (точка  $B$ ) достигнет положения  $x$  в момент  $t^* = \frac{\ell - x}{a}$ , а задний фронт волны, распространяющийся вправо – в момент  $t^{**} = \frac{x + \ell}{a}$ . Таким образом, с момента  $t = 0$  до  $t = t^{**}$  точка  $x$  участвует в колебательном процессе (так как  $t^{**} > t^*$  для  $x > 0$ ), а при  $t > t^{**}$  находится в состоянии покоя. Для  $t \in (0, t^*)$  через точку  $x$  проходят сразу обе волны, т.е. точка участвует в «результатирующем» колебании.

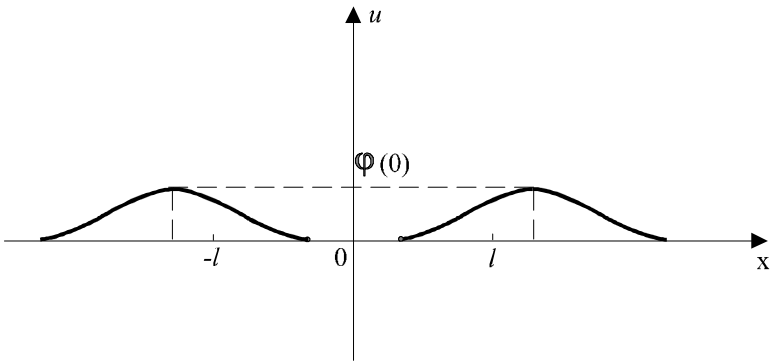


Рис. 3.6.2

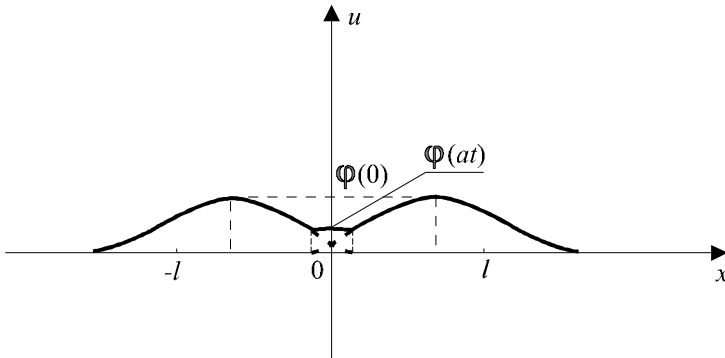


Рис. 3.6.3

Аналогичны рассуждения и для  $x \in (-\ell, 0)$ . На рисунках показаны профили струны в разные моменты времени. Так, если  $t > \frac{\ell}{a}$ , то задние фронты обеих волн прошли через положение начала координат (рис. 3.6.2), при  $t = \frac{\ell}{a}$  в точности совпадают с началом координат, при  $t < \frac{\ell}{a}$  волны на участке  $(-\ell, \ell)$  накладываются друг на друга (рис. 3.6.3).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Компетентностный подход в образовании предполагает, наряду с приобретением учащимися определённого набора знаний и умений, способность к использованию их при решении практико-ориентированных задач. Так, в результате изучения вопросов математического моделирования механических колебаний и процессов тепломассопереноса, студент должен:

- уметь формулировать соответствующую данному физическому процессу краевую задачу;
- получать её решение методом Фурье;
- интерпретировать результат в терминах исходной предметной области, и в частности, производить необходимые расчёты, строить графики и т.п.

Набор компетенций, необходимых для успешной профессиональной деятельности современного инженера, а, следовательно, и модель его профессиональной компетентности, определяется положениями Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) высшего профессионального образования (ВПО). Так, среди формируемых средствами математики компетенций, мы выделяем следующие.

Общекультурные компетенции (ОК):

- исследовательские навыки;
- способность к анализу и синтезу;
- способность применять знания на практике.

Профессиональные компетенции (ПК):

- умение понять поставленную задачу и оценить корректность её постановки;
- умение формулировать результат и увидеть его следствия;
- самостоятельное построение алгоритма и его анализ;
- владение методами математического моделирования при анализе проблем на основе глубоких знаний фундаментальных математических дисциплин и компьютерных наук;
- способность передавать результат проведённых физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженной в терминах предметной области изучавшегося явления.

Предлагаемый в настоящем пособии материал и приобретаемые в результате его освоения навыки математического моделирования, как надеются авторы, в значительной степени будет способствовать формированию указанных компетенций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1989. – 464 с.
2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 623 с.
3. Куликов, Г.М. Уравнения математической физики: Методические указания и контрольные задания / Г.М. Куликов, В.А. Попов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1998. – 36 с.
4. Лыков, А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 600 с.
5. Нахман, А.Д. Дифференциальные уравнения : учебное пособие / А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1999. – 96 с.
6. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – Т. 1. – 456 с.; Т. 2. – 576 с.
7. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
8. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 736 с.
9. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1968. – Т. 2 – 464 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

---

ВВЕДЕНИЕ .....	3
Глава 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ .....	5
1.1. Основные понятия и факты теории функциональных рядов .....	5
1.2. Постановка задачи о разложении периодической функции в тригонометрический ряд .....	9
1.3. Коэффициенты Фурье .....	11
1.4. Ряд Фурье функции с периодом $2\ell$ .....	14
1.5. Ряды Фурье чётных и нечётных функций .....	15
1.6. Условия сходимости ряда Фурье .....	19
1.7. Примеры разложений функций в ряды Фурье .....	22
1.8. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на произвольном интервале $(a, b)$ .....	27
1.9. Ряд Фурье в комплексной форме .....	29
Глава 2. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ. РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ .....	32
2.1. Преобразование Фурье. Интеграл Фурье .....	32
2.2. Тригонометрическая форма интеграла Фурье .....	34
2.3. Линейные нормированные и евклидовы пространства .....	37
2.4. Ортогональные системы функций .....	43
2.5. Ряды по ортогональным функциям .....	46
Глава 3. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. МЕТОД ФУРЬЕ .....	50
3.1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка .....	50
3.2. Уравнение малых поперечных колебаний струны .....	52
3.3. Уравнение малых продольных колебаний стержня .....	63
3.4. Уравнение теплопроводности .....	68
3.5. Уравнение диффузии .....	82
3.6. Уравнение колебаний бесконечной струны .....	85
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	93
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	94

Учебное издание

КУЛИКОВ Геннадий Михайлович,  
НАХМАН Александр Давидович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И  
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА**

Учебное пособие

Редактор Ю.В. С а л ы к и н а  
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Р ы ж к о в а

Подписано в печать 22.05.2013  
Формат 60 × 84/16. 5,58 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 263

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14