В.И. Фомин

ПОЧТИ ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Спектр
Издательский дом

Москва, 2013

УДК 517.937
ББК В161.61
Ф762

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
директор Института физики, математики и информатики
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»
Е.С. Жуковский

Доктор физико-математических наук, профессор
кафедры «Информационные системы»
ФГБОУ ВПО «Тверской государственный технический университет»
С.М. Дзюба

Фомин В.И.

Ф762 Почти вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Издательский дом «Спектр», 2013. – 128 с. – 400 экз. – ISBN 978-5-4442-0038-4.

Содержит изложение результатов исследований автора по применению метода малых стабилизирующих возмущений при построении ограниченных в точке вырождения решений вырождающихся линейных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве.

Предназначена для специалистов в области дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, уравнений математической физики, а также для аспирантов и студентов старших курсов вузов.

УДК 517.937
ББК В161.61

ISBN 978-5-4442-0038-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Среди дифференциальных уравнений определенный интерес представляют уравнения с малым положительным параметром ε при производных искомой функции, переходящие при $\varepsilon = 0$ в вырождающиеся дифференциальные уравнения того же порядка, что и исходные уравнения. Такие уравнения, как показано в работах М. Лайтхилла, Цянь Сюэ-сеня и ряда других авторов (см. [14]), используются при построении математических моделей некоторых физических процессов, в частности, при решении ряда задач гидродинамики, а также при нахождении решений вырождающихся дифференциальных уравнений: вырождающееся уравнение возмущается малым положительным параметром ε, находится решение возмущенного уравнения, а затем с помощью предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ находится решение исходного вырождающегося уравнения (см., например, [16, с. 482]). Условимся в целях краткости называть такие уравнения почти вырождающимися дифференциальными уравнениями.

Природа поведения решения почти вырождающегося дифференциального уравнения при $\varepsilon \to 0$ может быть различной. Например, в скалярном случае решение $x_\varepsilon(t) = -1/a + [(t+\varepsilon)/\varepsilon]^a (x_0 + 1/a)$ уравнения $(t+\varepsilon)x'_\varepsilon(t) = a\,x_\varepsilon(t) + 1$, $0 \le t < \infty$, с начальным условием $x_\varepsilon(0) = x_0$, $x_0 \ne -1/a$, в случае $a < 0$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к стационарному решению $x_0(t) = -1/a$ предельного ($\varepsilon = 0$) уравнения $t\,x'(t) = a\,x(t) + 1$, $0 < t < \infty$; в случае $a > 0$ решение $x_\varepsilon(t)$ при каждом $t > 0$ неограничено при $\varepsilon \to 0$. В связи с этим актуальна задача отыскания условий, обеспечивающих сходимость решения почти вырождающегося дифференциального уравнения при $\varepsilon \to 0$ к решению соответствующего предельного уравнения. Такая задача была изучена в скалярном случае в работе [11], в конечномерном случае в работах [5], [12], в банаховом пространстве для линейного дифференциального уравнения второго порядка в работах [32] – [40].

В главах I, II данной книги находятся условия, при которых решение задачи Коши

$$\varphi(t+\varepsilon)\,x'_\varepsilon(t) = Ax_\varepsilon(t) + f(t), \quad 0 \le t < \infty,$$
$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}$$

сходится при $\varepsilon \to 0$ к ограниченному в точке вырождения $t = 0$ решению предельного уравнения

$$\varphi(t)\,x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad 0 < t < \infty$$

(здесь A – линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E; $f(t) \in C([0,\infty); E)$; $\varphi(t) \in C((0,\infty);(0,\infty))$, $\varphi(+0)=0$).

В третьей главе аналогичная задача решается для уравнения с переменным оператором и вырождающимся коэффициентом степенного вида.

Везде в книге под решением уравнения понимается его сильное решение, т.е. непрерывно дифференцируемая на соответствующем множестве изменения аргумента функция, удовлетворяющая данному уравнению.

Нумерация теорем, лемм, замечаний и формул внутри каждой главы книги двойная. Если в некоторой главе дается ссылка на утверждение или формулу из другой главы, то используется тройная нумерация. Например, ссылка вида (I.1.14) означает ссылку на формулу (1.14) из главы I.

Г л а в а I

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

§ 1. Уравнение с вырождающимся коэффициентом степенного вида

В банаховом пространстве E изучается вырождающееся в точке $t=0$ уравнение

$$t^{\alpha}x'(t)=A\,x(t)+f(t)\,,\quad 0<t<\infty\,, \tag{1.1}$$

где $x(t)$ – искомая функция со значениями в E; $A\in L(E)$, $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $f(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$, $C\big([0,\infty);E\big)$ – линейное пространство непрерывных функций, действующих из $[0,\infty)$ в E; $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$.

Уравнение (1.1) называется также сингулярным дифференциальным уравнением, ибо из его записи в виде

$$x'(t)=\frac{1}{t^{\alpha}}A\,x(t)+\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\,,\quad 0<t<\infty\,,$$

следует, что $t=0$ является сингулярной точкой данного уравнения.

Будем называть уравнение (1.1) сильно вырождающимся в случае $\alpha\ge 1$ и слабо вырождающимся в случае $0<\alpha<1$.

Везде в главе I под решением уравнения (1.1) понимается его сильное решение, т.е. функция $x(t)\in C^{1}\big((0,\infty);E\big)$, где $C^{1}\big((0,\infty);E\big)$ – линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций, действующих из $(0,\infty)$ в E, удовлетворяющая данному уравнению.

Рассмотрим стабилизирующее, т.е. устраняющее вырожденность, возмущение уравнения (1.1), заменив в нем вырождающийся в нуле коэффициент t^{α} на $(t+\varepsilon)^{\alpha}$, где ε – малый положительный параметр, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=\text{const}$, $\varepsilon_0>0$. Возмущенное уравнение можно рассматривать уже для $0\le t<\infty$ и ставить для него задачу Коши:

$$(t+\varepsilon)^{\alpha}x'_{\varepsilon}(t)=Ax_{\varepsilon}(t)+f(t)\,,\ 0\le t<\infty\,, \tag{1.2}$$

$$x_{\varepsilon}(0)=x_{\varepsilon,0}\,. \tag{1.3}$$

Под решением задачи (1.2), (1.3) понимается функция $x_\varepsilon(t) \in C^1\left([0,\infty); E\right)$, удовлетворяющая уравнению (1.2) и начальному условию (1.3).

Найдем решение $x_\varepsilon(t)$ задачи (1.2), (1.3) а затем с помощью предельного перехода $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t)$, $0 < t < \infty$, укажем ограниченное в точке вырождения $t = 0$ решение $x_0(t)$ уравнения (1.1).

Приведем вначале некоторые факты, используемые неоднократно в дальнейшем без дополнительных ссылок.

Пусть $H \in L(E)$. Рассмотрим операторную экспоненту, порожденную оператором H:

$$e^{Ht} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H^k t^k}{k!}, \; t \in (-\infty, \infty). \tag{1.4}$$

Операторы (1.4) образуют однопараметрическую группу [3, с. 41], т.е.

$$e^{Ht} e^{H\tau} = e^{H(t+\tau)}, \;\; -\infty < t, \;\; \tau < \infty;$$

$$e^{Ht}\Big|_{t=0} = I,$$

где I – единичный оператор.

Всякий оператор $H \in L(E)$ непрерывен [18, с.119].

Известно [3, с. 41], что для всякого $H \in L(E)$ справедливо включение

$$e^{Ht} \in C^1\left(\mathbb{R}; L(E)\right) \tag{1.5}$$

и

$$\left(e^{Ht}\right)' = H e^{Ht}.$$

Пусть $\Phi = \Phi\left([0,\infty); L(E)\right)$ – множество оператор-функций $A(t)$ действительного переменного $t \in [0,\infty)$ со значениями в $L(E)$. Рассмотрим семейство сильно непрерывных по $t \in [0,\infty)$ на пространстве E оператор-функций $A(t)$:

$$\Phi_E^0 = \left\{ A(t) \in \Phi \mid A(t)x \in C\left([0,\infty); E\right) \text{ при каждом } x \in E \right\}$$

и семейство сильно непрерывно дифференцируемых по $t \in [0,\infty)$ на пространстве E оператор-функций $A(t)$:

$$\Phi_E^1 = \left\{ A(t) \in \Phi \mid A(t)\, x \in C^1\left([0,\infty); E\right) \text{ при каждом } x \in E \right\}.$$

Из включения (1.5) следует, что при каждом $H \in L(E)$

$$e^{Ht} \in \Phi_E^1,$$

следовательно, в силу включения $\Phi_E^1 \subset \Phi_E^0$,

$$e^{Ht} \in \Phi_E^0.$$

Если $A(t) \in \Phi_E^0$, $g(t) \in C\left([0,\infty); E\right)$, то $A(t)g(t) \in C\left([0,\infty); E\right)$ [8, с. 21].

Если $A_1(t), A_2(t) \in \Phi_E^0$, то $A_1(t)\, A_2(t) \in \Phi_E^0$ [8, с. 21].

Если $A(t) \in \Phi_E^1$, $g(t) \in C^1\left([0,\infty); E\right)$, то $A(t)g(t) \in C^1\left([0,\infty); E\right)$ и справедлива формула [8, с. 22]

$$\left[A(t)g(t)\right]' = A'(t)g(t) + A(t)g'(t).$$

Всякий оператор $H \in L(E)$ замкнут [18, с. 162].

Для замкнутого оператора *B*, действующего в банаховом пространстве *E*, справедливы формулы

$$[B\, g(t)]' = B\, g'(t),$$

$$\int_0^\infty B\, g(t)\, dt = B \int_0^\infty g(t)\, dt$$

при условии, что каждая из частей этих формул определена корректно [8, с. 28].

Если $H \in L(E)$, то [7, с. 223]

$$\| H x \| \le \| H \| \cdot \| x \|, \quad x \in E.$$

Для любых $H_1, H_2 \in L(E)$ справедливо неравенство [7, с. 224]

$$\| H_1 H_2 \| \le \| H_1 \| \cdot \| H_2 \|.$$

Если $g(t) \in C\left([a,b]; E\right)$, то [18, с. 265]

$$\left\| \int_a^b g(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \| g(t) \|\, dt.$$

В дальнейшем понадобится также частный случай формулы дифференцирования интеграла по параметру:

$$\left[\int_0^{\beta(\eta)} g(\tau,\eta)\,d\tau\right]' = \int_0^{\beta(\eta)} [g(\tau,\eta)]'_\eta\,d\tau + \beta'(\eta)\,g(\beta(\eta),\eta) \qquad (1.6)$$

при условии, что подынтегральная функция $g(\tau,\eta)$ и ее производная $[g(\tau,\eta)]'_\eta$ непрерывны по (τ,η).

Укажем оценку роста нормы операторной экспоненты, которая будет неоднократно использована в дальнейшем.

Пусть $A \in L(E)$, $\nu = \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}$, где $\sigma(A)$ – спектр оператора A. Тогда

$$\left\| e^{At} \right\| \le M_\delta\, e^{\nu_\delta t},\ 0 \le t < \infty, \qquad (1.7)$$

где M_δ – постоянная, $M_\delta > 0$; $\nu_\delta = \nu + \delta$, δ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Действительно, известно [3, с. 42], что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln\left\| e^{At} \right\|}{t} = \nu .$$

По определению предела, для любого сколь угодно малого фиксированного $\delta > 0$ найдется $\Delta = \Delta(\delta) > 0$, такое, что для любого $t > \Delta$ выполняются неравенства

$$\nu - \delta < \frac{\ln\left\| e^{At} \right\|}{t} < \nu + \delta ,$$

откуда, в частности, получаем

$$\left\| e^{At} \right\| < e^{(\nu+\delta)t},\ t > \Delta . \qquad (1.8)$$

При $0 \le t \le \Delta$

$$\left\| e^{At} \right\| = \left[\, \left\| e^{At} \right\| e^{-(\nu+\delta)t} \right] e^{(\nu+\delta)t},$$

откуда следует оценка

$$\left\| e^{At} \right\| \le K_\delta\, e^{(\nu+\delta)t},\ \ 0 \le t \le \Delta , \qquad (1.9)$$

где

$$K_\delta = \max_{0 \le t \le \Delta} \left[\, \left\| e^{At} \right\| e^{-(\nu+\delta)t} \right].$$

Из неравенств (1.8), (1.9) получаем оценку вида (1.7) с $M_\delta = \max\{1,\ K_\delta\}$.

Замечание 1.1. В дальнейшем в оценке (1.7) число δ берется настолько малым, что $\nu_\delta < 0$ в случае $\nu < 0$ и $\nu_\delta < -c$ в случае $\nu < -c$, где $c > 0$.

Теорема 1.1. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (1.2), (1.3) при $\alpha > 1$ имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = \exp\left\{ A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}} \right) \right] \right\} x_{\varepsilon,0} +$$

$$+ \int_0^t \exp\left\{ A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\varepsilon)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}} \right) \right] \right\} \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^\alpha}\, ds\,. \quad (1.10)$$

При $\nu < 0$ и выполнении условия

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \le L_0 \varepsilon^{-H}\,, \quad (1.11)$$

где $L_0 = \mathrm{const}$, $L_0 > 0$; H – произвольное фиксированное сколь угодно большое положительное число, справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t)\,,\ t \in (0, \infty)\,, \quad (1.12)$$

где

$$x_0(t) = \int_0^t \exp\left\{ A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \right\} \frac{f(s)}{s^\alpha}\, ds\,. \quad (1.13)$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Это решение ограничено при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Теорема 1.1 справедлива в силу лемм 1.1 – 1.4, изложенных ниже.

Лемма 1.1. Задача (1.2), (1.3) при $\alpha > 1$ имеет решение вида (1.10).

Доказательство. Пусть

$$t = \frac{\varepsilon}{\left[1 - (\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}\tau\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \varepsilon\,.$$

Тогда

$$\tau = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}} \right)$$

и $0 \le \tau < \dfrac{1}{(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}}$ при $0 \le t < \infty$. Далее,

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\left[1-(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}\tau\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \varepsilon\right) ::= u_\varepsilon(\tau)\,;$$

$$x'_\varepsilon(t) = \left[u_\varepsilon(\tau)\right]'_t = \frac{du_\varepsilon(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{(t+\varepsilon)^\alpha}\,u'_\varepsilon(\tau)\,;$$

$$f(t) = f\left(\frac{\varepsilon}{\left[1-(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}\tau\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}} - \varepsilon\right) ::= g_\varepsilon(\tau)\,;$$

$x_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(0)$ и задача (1.2), (1.3) принимает вид

$$u'_\varepsilon(\tau) = Au_\varepsilon(\tau) + g_\varepsilon(\tau)\,,\ 0 \le \tau < \frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon^{\alpha-1}}\,, \tag{1.14}$$

$$u_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\,. \tag{1.15}$$

Задача (1.14), (1.15) – это стандартная задача Коши вида

$$u'(\tau) = H\,u(\tau) + g(\tau)\,,\ 0 \le \tau < \infty\,, \tag{1.16}$$

$$u(0) = u_0\,, \tag{1.17}$$

где $H \in L(E)$, $g(\tau) \in C\big([0,\infty);E\big)$.

Известно [3, с.105], что задача (1.16), (1.17) имеет единственное решение

$$u(\tau) = e^{H\tau}u_0 + \int_0^\tau e^{H(\tau-\mu)}g(\mu)\,d\mu\,. \tag{1.18}$$

Следовательно, задача (1.14), (1.15) имеет решение вида

$$u_\varepsilon(\tau) = e^{A\tau}x_{\varepsilon,0} + \int_0^\tau e^{A(\tau-\mu)}g_\varepsilon(\mu)\,d\mu\,. \tag{1.19}$$

После замены переменной

$$\mu = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(s+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)$$

в интеграле в правой части формулы (1.19) и возвращения к прежней переменной t формула (1.19) принимает вид (1.10). Лемма 1.1 доказана.

В дальнейшем неоднократно потребуется соотношение вида

$$\lim_{\xi \to +0} \left[\frac{1}{\xi^q} e^{-\frac{r}{\xi^p}} \right] = 0 \; ; \; p, q, r > 0 \, . \tag{1.20}$$

Докажем соотношение (1.20). Положим

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\xi^q} e^{-\frac{r}{\xi^p}} \, .$$

Для справедливости равенства (1.20) достаточно показать, что

$$\lim_{\xi \to +0} \ln \psi(\xi) = -\infty \, . \tag{1.21}$$

Имеем

$$\ln \psi(\xi) = -\frac{r}{\xi^p} - q \ln \xi = -q \ln \xi \left[1 + \frac{\dfrac{r}{\xi^p}}{q \ln \xi} \right] . \tag{1.22}$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\xi \to +0} \frac{\dfrac{r}{\xi^p}}{q \ln \xi} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{\xi \to +0} \frac{-r p \dfrac{1}{\xi^{p+1}}}{q \cdot \dfrac{1}{\xi}} = \lim_{\xi \to +0} \frac{-r p}{q \xi^p} = -\infty \, . \tag{1.23}$$

Заметим, что

$$\lim_{\xi \to +0} (-q \ln \xi) = +\infty \, . \tag{1.24}$$

Из соотношений (1.22) – (1.24) следует равенство (1.21). Справедливость соотношения (1.20) установлена.

Лемма 1.2. При любом фиксированном $\alpha > 1$ и выполнении условия $\nu < 0$ функция (1.13) определена для любого $t \in (0, \infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу сильной непрерывности операторной экспоненты и непрерывности функции $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = \exp\left\{ A\left[\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \right\} \frac{f(s)}{s^{\alpha}}, \qquad (1.25)$$

представляющая собой композицию операторной и векторной функций, непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[h,t]$, h – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем, что

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0. \qquad (1.26)$$

Положим

$$N(t) = \max_{0 \le s \le t} \| f(s) \|.$$

Используя оценку (1.7), считая в ней $\nu_\delta < 0$ (см. замечание 1.1), получаем при $s \in (0,t]$

$$\| g_0(s,t) \| \le \left\| \exp\left\{ A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \right\} \right\| \cdot \frac{\| f(s) \|}{s^{\alpha}} \le$$

$$\le M_\delta\, N(t) \frac{1}{s^{\alpha}} \exp\left[\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right]. \qquad (1.27)$$

Итак,

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta\, N(t) \exp\left(\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) h(s), \qquad (1.28)$$

где

$$h(s) = \frac{1}{s^{\alpha}} \exp\left(\frac{\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{s^{\alpha-1}} \right).$$

В силу соотношения (1.20)

$$\lim_{s \to +0} h(s) = 0. \qquad (1.29)$$

Из соотношений (1.28), (1.20) следует равенство (1.26), используя которое, доопределим функцию $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0. \qquad (1.30)$$

Итак, точка $s=0$ является устранимой точкой разрыва подынтегральной функции $g_0(s,t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^t g_0(s,t)\,ds$, т.е. существование функции (1.13).

Запишем оценку (1.27) в виде

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta\, N(t)\, v(s,t),$$

где

$$v(s,t) = \frac{1}{s^\alpha} \exp\left[\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right].$$

Тогда

$$\int\limits_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds \le M_\delta\, N(t) \int\limits_0^t v(s,t)\, ds\,. \tag{1.31}$$

Далее,

$$\int\limits_0^t v(s,t)\, ds = -\frac{1}{\nu_\delta} \int\limits_0^t \exp\left[\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] d\left[\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] =$$

$$= -\frac{1}{\nu_\delta} \exp\left[\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \Bigg|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{\nu_\delta} + \frac{1}{\nu_\delta} \lim_{s \to +0} \exp\left[\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] = -\frac{1}{\nu_\delta}\,.$$

Получили равенство

$$\int\limits_0^t v(s,t)\, ds = -\frac{1}{\nu_\delta}\,. \tag{1.32}$$

В силу соотношений (1.31), (1.32)

$$\int\limits_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds \le \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t).$$

Тогда, используя неравенство

$$\left\| \int_0^t g_0(s,t)\, ds \right\| \le \int_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds ,$$

получаем оценку

$$\| x_0(t) \| \le \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t) \ , \tag{1.33}$$

из которой следует ограниченность функции (1.13) при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, т.е. $\sup\limits_{t\in[0,\infty)} N(t) = C < \infty$, то из неравенства (1.33) следует ограниченность функции (1.13) на $(0,\infty)$. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. При $\alpha > 1$, $\nu < 0$ и выполнении условия (1.11) справедлив предельный переход (1.12), где $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ задаются соответственно формулами (1.10), (1.13).

Доказательство. Покажем вначале, что при каждом $t \in (0,\infty)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[H_\varepsilon(t)\, x_{\varepsilon,0} \right] = 0 \,, \tag{1.34}$$

где

$$H_\varepsilon(t) = \exp \left\{ A \left[\frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}} \right) \right] \right\}. \tag{1.35}$$

Имеем

$$\| H_\varepsilon(t)\, x_{\varepsilon,0} \| \le \| H_\varepsilon(t) \| \cdot \| x_{\varepsilon,0} \| \,. \tag{1.36}$$

Используя оценку (1.7), считая в ней $\nu_\delta < 0$ (см. замечание 1.1), получаем

$$\| H_\varepsilon(t) \| \le M_\delta \exp \left[\frac{\nu_\delta}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}} \right) \right] =$$

$$= M_\delta \exp \left(\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}} \right) \exp \left(\frac{\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right) \le$$

$$\le M_\delta \exp \left(\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \exp \left(\frac{\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right).$$

Итак,

$$\| H_\varepsilon(t) \| \le M_\delta \exp\left(\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\exp\left(\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right). \qquad (1.37)$$

В силу неравенств (1.11), (1.36), (1.37) справедлива оценка

$$\| H_\varepsilon(t)\, x_{\varepsilon,0} \| \le M_\delta \exp\left(\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\frac{L_0}{\varepsilon^H}\exp\left(\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right). \qquad (1.38)$$

В силу равенства (1.20) получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon^H}\exp\left(\frac{\nu_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)\right] = 0. \qquad (1.39)$$

Из соотношений (1.38), (1.39) следует равенство (1.34).

В силу соотношения (1.34) для доказательства предельного перехода (1.12) осталось показать, что при любом фиксированном $t \in (0,\infty)$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\, ds = \int_0^t g_0(s,t)\, ds, \qquad (1.40)$$

т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left[g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)\right] ds = 0, \qquad (1.41)$$

где

$$g_\varepsilon(s,t) = \exp\left\{A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\varepsilon)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right]\right\}\frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^\alpha},$$

а $g_0(s,t)$ задается формулой (1.25). Напомним, что функция $g_0(s,t)$ доопределена по непрерывности в нуле: $g_0(0,t) = 0$ (см. равенство (1.30)). В силу неравенства

$$\left\| \int_0^t \left[g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)\right] ds \right\| \le \int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \|\, ds$$

для справедливости равенства (1.41) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \|\, ds = 0. \qquad (1.42)$$

В силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла [19, с. 748] для справедливости соотношения (1.42) достаточно показать, что подынтегральная функция

$$\psi_\varepsilon(s,t) = \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \|, \; s \in [0,t],$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(s,t) = 0, \; s \in [0,t]; \tag{1.43}$$

$$\psi_\varepsilon(s,t) \le C(t, \varepsilon_0), \; s \in [0,t], \; \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{1.44}$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(s,t) = g_0(s,t), \; s \in [0,t], \tag{1.45}$$

что будет означать справедливость соотношения (1.43). При $s \in (0,t]$ равенство (1.45) выполняется в силу непрерывности функции $g_\varepsilon(s,t)$ по переменной ε на промежутке $[0, \varepsilon_0]$, в частности, в точке $\varepsilon = 0$.
Докажем справедливость предельного перехода (1.45) при $s = 0$. Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(0,t) = 0, \tag{1.46}$$

ибо $g_0(0,t) = 0$ (см. равенство (1.30)). Имеем

$$g_\varepsilon(0,t) = H_\varepsilon(t) \frac{f(0)}{\varepsilon^\alpha},$$

где $H_\varepsilon(t)$ задается формулой (1.35). Используя оценку (1.37), получаем

$$\| g_\varepsilon(0,t) \| \le M_\delta \| f(0) \| \exp\left(\frac{-\nu_\delta}{\alpha - 1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \exp\left(\frac{\nu_\delta}{\alpha - 1} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right). \tag{1.47}$$

В силу соотношения (1.20) правая часть неравенства (1.47) при $\varepsilon \to 0$ сходится к нулю, откуда следует справедливость равенства (1.46). Выполнимость условия (1.43) доказана.

Найдем оценку вида (1.44). Запишем разность $g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon \left[h(\kappa, s, t) \right]'_\kappa d\kappa, \tag{1.48}$$

где

$$h(\kappa,s,t)=\exp\left\{A\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\kappa)^{\alpha-1}}\right)\right]\right\}\frac{f(s)}{(s+\kappa)^{\alpha}}.$$

Найдем $\left[h(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}$. Для этого запишем $h(\kappa,s,t)$ в более кратком виде

$$h(\kappa,s,t)=\exp\left[A\,\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{f(s)}{(s+\kappa)^{\alpha}},$$

где

$$\varphi(\kappa,s,t)=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\kappa)^{\alpha-1}}\right).$$

Имеем

$$\left[h(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}=A\exp\left[A\,\varphi(\kappa,s,t)\right]\left[\varphi(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}\frac{f(s)}{(s+\kappa)^{\alpha}}+$$

$$+\exp\left[A\,\varphi(\kappa,s,t)\right]\left[\frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha}}\right]'_{\kappa}f(s)$$

или с учетом того, что

$$\left[\varphi(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}=-\frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha}}+\frac{1}{(t+\kappa)^{\alpha}},$$

$$\left[\frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha}}\right]'_{\kappa}=-\frac{\alpha}{(s+\kappa)^{\alpha+1}},$$

получаем формулу

$$\left[h(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}=W_1+W_2+W_3,$$

где

$$W_1=-A\exp\left[A\,\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{f(s)}{(s+\kappa)^{2\alpha}},$$

$$W_2=A\exp\left[A\,\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{f(s)}{(t+\kappa)^{\alpha}(s+\kappa)^{\alpha}},$$

$$W_3=-\exp\left[A\,\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{\alpha\,f(s)}{(s+\kappa)^{\alpha+1}}.$$

Тогда равенство (1.48) принимает вид

$$g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon W_1\, d\kappa + \int_0^\varepsilon W_2\, d\kappa + \int_0^\varepsilon W_3\, d\kappa,$$

откуда получаем

$$\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \le \int_0^\varepsilon \|W_1\|\, d\kappa + \int_0^\varepsilon \|W_2\|\, d\kappa + \int_0^\varepsilon \|W_3\|\, d\kappa. \quad (1.49)$$

Используя оценку (1.7), считая в ней $\nu_\delta < 0$, получаем

$$\|W_1\| \le \|A\| \cdot \|\exp[A\varphi(\kappa,s,t)]\| \frac{\|f(s)\|}{(s+\kappa)^{2\alpha}} \le$$

$$\le M_\delta \|A\|\, N(t) \exp[\nu_\delta\, \varphi(\kappa,s,t)] \frac{1}{(s+\kappa)^{2\alpha}}$$

или, учитывая равенство

$$\exp[\nu_\delta\, \varphi(\kappa,s,t)] = \exp\left[\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{(t+\kappa)^{\alpha-1}}\right] \exp\left[\frac{\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}\right]$$

и неравенство

$$\exp\left[\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{(t+\kappa)^{\alpha-1}}\right] \le \exp\left(\frac{-\nu_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right),$$

имеем

$$\|W_1\| \le P_1(t) \frac{1}{(s+\kappa)^{2\alpha}} \exp\left[-\frac{k}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}\right], \quad (1.50)$$

где

$$P_1(t) = M_\delta \|A\|\, N(t) \exp\left(\frac{k}{t^{\alpha-1}}\right); \; k = \frac{-\nu_\delta}{\alpha-1}.$$

Заметим, что $k > 0$. В силу неравенства (1.50)

$$\int_0^\varepsilon \|W_1\|\, d\kappa \le P_1(t) \int_0^\varepsilon \exp\left[-\frac{k}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}\right] \frac{d\kappa}{(s+\kappa)^{2\alpha}}. \quad (1.51)$$

Проведя в интеграле в правой части неравенства (1.51) замену переменной

$$\tau = \frac{k}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}$$

и используя обозначение

$$m_1 = \frac{1}{(\alpha-1)\, k^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}},$$

получаем

$$I_1(\varepsilon, s) ::= \int_0^{\varepsilon} \exp\left[-\frac{k}{(s+\kappa)^{\alpha-1}} \right] \frac{d\kappa}{(s+\kappa)^{2\alpha}} =$$

$$= m_1 \int_{\frac{k}{(s+\varepsilon)^{\alpha-1}}}^{\frac{k}{s^{\alpha-1}}} \tau^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} e^{-\tau} d\tau \le m_1 \int_0^{\infty} \tau^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} e^{-\tau} d\tau =$$

$$= m_1 \int_0^{\infty} \tau^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}-1} e^{-\tau} d\tau = m_1 \Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1} \right),$$

где $\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1} \right)$ – значение гаммы-функции

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \; a > 0,$$

при $a = \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}$. Итак,

$$I_1(\varepsilon, s) \le m_1 \Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1} \right). \tag{1.52}$$

В силу неравенств (1.51), (1.52) справедлива оценка

$$\int_0^{\varepsilon} \| W_1 \| \, d\kappa \le m_1 \Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1} \right) P_1(t). \tag{1.53}$$

Заметим, что

$$W_2 = -\left(\frac{s+\kappa}{t+\kappa} \right)^{\alpha} W_1. \tag{1.54}$$

Тогда, учитывая неравенство $s \le t$, получаем в силу (1.54)

$$\|W_2\| = \left(\frac{s+\kappa}{t+\kappa}\right)^{\alpha} \|W_1\| \le \|W_1\|,$$

следовательно,

$$\int_0^{\varepsilon} \|W_2\|\, d\kappa \le \int_0^{\varepsilon} \|W_1\|\, d\kappa. \qquad (1.55)$$

В силу неравенств (1.53), (1.55)

$$\int_0^{\varepsilon} \|W_2\|\, d\kappa \le m_1\, \Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\right) P_1(t). \qquad (1.56)$$

Проведя такие же рассуждения, как при получении неравенства (1.53), приходим к оценке вида

$$\int_0^{\varepsilon} \|W_3\|\, d\kappa \le m_3\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) P_3(t), \qquad (1.57)$$

где $m_3 = \dfrac{1}{(\alpha-1)\, k^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$; $P_3(t) = \alpha\, M_\delta\, N(t) \exp\left(\dfrac{k}{t^{\alpha-1}}\right)$.

Из соотношений (1.49), (1.53), (1.56) (1.57) следует выполнимость условия (1.44) с константой $C(t,\varepsilon_0)$, равной сумме правых частей неравенств (1.53), (1.56), (1.57).

Равенство (1.40) доказано. Из соотношений (1.34), (1.40) вытекает справедливость предельного перехода (1.12). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. При любом фиксированном $\alpha > 1$ и выполнении условия $\nu < 0$ функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (1.13), является решением уравнения (1.1).

Доказательство. Запишем $x_0(t)$ в виде

$$x_0(t) = \int_0^t g_0(s,t)\, ds,$$

где $g_0(s,t)$ задается формулой (1.25). В силу равенства (1.30) функция $g_0(s,t)$ непрерывна по (s,t). Покажем, что

$$\lim_{s \to +0} \left[\, g_0(s,t)\right]'_t = 0. \qquad (1.58)$$

При $s \in (0, t]$ получаем

$$\left[g_0(s,t) \right]'_t = \frac{1}{t^\alpha} \, A \exp \left\{ A \left[\frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \right\} \frac{f(s)}{s^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{t^\alpha} A g_0(s,t) \, . \qquad (1.59)$$

Из соотношений (1.30), (1.59) следует равенство (1.58). Доопределим производную $\left[g_0(s,t) \right]'_t$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t) \right]'_t \Big|_{s=0} = \lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t) \right]'_t = 0 \, . \qquad (1.60)$$

В силу равенства (1.60) производная $\left[g_0(s,t) \right]'_t$ непрерывна по (s,t). Следовательно, при нахождении производной $x'_0(t)$ можно применить формулу (1.6):

$$x'_0(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t) \right]'_t \, ds + g_0(t,t) \, .$$

Учитывая равенство $g_0(t,t) = \dfrac{f(t)}{t^\alpha}$, формулу (1.59) и замкнутость оператора *A*, получаем

$$x'_0(t) = \frac{1}{t^\alpha} \, A \int_0^t g_0(s,t) \, ds + \frac{f(t)}{t^\alpha} \, ,$$

откуда следует, что $t^\alpha x'_0(t) = A x_0(t) + f(t)$. Лемма 1.4 доказана.

Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (1.2), (1.3) при $\alpha = 1$ имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = \exp\left(A \ln \frac{t + \varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} + \int_0^t \exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right) \frac{f(s)}{s+\varepsilon} \, ds \, . \qquad (1.61)$$

При $\nu < -1$ и выполнении условия

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\nu_\delta} \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0 \qquad (1.62)$$

справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t)\ ,\ t \in (0, \infty)\ , \qquad (1.63)$$

где

$$x_0(t) = \int_0^t \exp\left(A \ln \frac{t}{s} \right) \frac{f(s)}{s}\, ds\ . \qquad (1.64)$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1) при $\alpha = 1$. Это решение ограничено при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Замечание 1.2. Для выполнимости условия (1.62) достаточно, чтобы для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*] \subset (0, \varepsilon_0]$, где ε_* – произвольное сколь угодно малое положительное число, не превосходящее ε_0, выполнялось неравенство

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \le L_0\, \varepsilon^{\nu_\delta + \rho}\ ,$$

где $L_0 = \mathrm{const}$, $L_0 > 0$; ρ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Теорема 1.2 справедлива в силу лемм 1.5 – 1.8, изложенных ниже.

Лемма 1.5. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (1.2), (1.3) при $\alpha = 1$ имеет решение вида (1.61).

Доказательство. Заменой переменной $t = \varepsilon e^\tau - \varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к задаче вида

$$u'_\varepsilon(\tau) = A u_\varepsilon(\tau) + g_\varepsilon(\tau),\ 0 \le \tau < \infty\ , \qquad (1.65)$$

$$u_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\ , \qquad (1.66)$$

где $u_\varepsilon(\tau) ::= x_\varepsilon\left(\varepsilon e^\tau - \varepsilon\right)$, $g_\varepsilon(\tau) ::= f\left(\varepsilon e^\tau - \varepsilon\right)$.

Задача (1.65), (1.66) – это стандартная задача Коши вида (1.16), (1.17). Применяя формулу (1.18), получаем решение задачи (1.65), (1.66):

$$u_\varepsilon(\tau) = e^{A\tau} x_{\varepsilon,0} + \int_0^\tau e^{A(\tau - \mu)} g_\varepsilon(\mu)\, d\mu\ . \qquad (1.67)$$

После замены переменной $\mu = \ln \dfrac{s + \varepsilon}{\varepsilon}$ в интеграле в правой части формулы (1.67) и возвращения к прежней переменной t формула (1.67) принимает вид (1.61). Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. При выполнении условия $\nu < -1$ функция (1.64) определена для любого $t \in (0, \infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу сильной непрерывности операторной экспоненты и непрерывности функции $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = \exp\left(A \ln \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} \tag{1.68}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[h, t]$, h – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем, что

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0. \tag{1.69}$$

Используя оценку (1.7), считая в ней $\nu_\delta < -1$ (см. замечание 1.1), получаем при $s \in (0, t]$:

$$\| g_0(s,t) \| \le \left\| \exp\left(A \ln \frac{t}{s}\right) \right\| \frac{\| f(s) \|}{s} \le M_\delta N(t) \exp\left(\nu_\delta \ln \frac{t}{s}\right) \frac{1}{s} =$$

$$= M_\delta N(t) t^{\nu_\delta} s^{-1-\nu_\delta} \underset{s \to +0}{\longrightarrow} 0, \tag{1.70}$$

ибо $-1 - \nu_\delta > 0$. Из (1.70) следует соотношение (1.69). Учитывая равенство (1.69), доопределим функцию $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0. \tag{1.71}$$

Таким образом, точка $s = 0$ является устранимой точкой разрыва подынтегральной функции $g_0(s,t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла $\int_0^t g_0(s,t)\, ds$, т.е. существование функции (1.64).

Из соотношения (1.70) видно, что

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta N(t) t^{\nu_\delta} s^{-1-\nu_\delta}.$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| ds \le M_\delta N(t) t^{\nu_\delta} \int_0^t s^{-1-\nu_\delta} ds = \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t).$$

Следовательно, в силу неравенства

$$\left\| \int_0^t g_0(s,t)\, ds \right\| \le \int_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds$$

справедлива оценка

$$\| x_0(t) \| \le \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t)\,, \tag{1.72}$$

из которой видна ограниченность функции (1.64) при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то из неравенства (1.72) следует ограниченность функции (1.64) на $(0,\infty)$. Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. При $\nu < -1$ и выполнении условия (1.62) справедлив предельный переход (1.63), где $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ задаются соответственно формулами (1.61), (1.64).

Доказательство. Покажем вначале, что при каждом $t \in (0,\infty)$

$$\exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\,. \tag{1.73}$$

Применяя оценку (1.7), считая в ней $\nu_\delta < -1$, и используя условие (1.62), получаем

$$\left\| \exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le \left\| \exp\left(A \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right\| \| x_{\varepsilon,0} \| \le$$

$$\le M_\delta \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\nu_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \| = M_\delta (t+\varepsilon)^{\nu_\delta} \varepsilon^{-\nu_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\,,$$

откуда следует соотношение (1.73).

В силу соотношения (1.73) для доказательства предельного перехода (1.63) осталось показать, что при любом фиксированном $t \in (0,\infty)$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t g_\varepsilon(s,t)\, ds = \int_0^t g_0(s,t)\, ds\,, \tag{1.74}$$

для чего, в свою очередь, достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \|\, ds = 0\,, \tag{1.75}$$

где

$$g_\varepsilon(s,t) = \exp\left(A\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{s+\varepsilon},$$

а $g_0(s,t)$ задается формулой (1.68). Запишем разность $g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon \left[h(\kappa,s,t)\right]'_\kappa d\kappa, \tag{1.76}$$

где

$$h(\kappa,s,t) = \exp\left(A\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{s+\kappa}.$$

Найдем $\left[h(\kappa,s,t)\right]'_\kappa$:

$$\left[h(\kappa,s,t)\right]'_\kappa = A\exp\left(A\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\left(\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)'_\kappa \frac{f(s)}{s+\kappa} -$$

$$-\exp\left(A\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2}$$

или с учетом того, что

$$\left(\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)'_\kappa = -\frac{t-s}{(t+\kappa)(s+\kappa)}, \tag{1.77}$$

получаем формулу

$$\left[h(\kappa,s,t)\right]'_\kappa = W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = -A\exp\left(A\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{t-s}{t+\kappa}\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2};$$

$$W_2 = -\exp\left(A\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2}.$$

Тогда равенство (1.76) принимает вид

$$g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon W_1\, d\kappa + \int_0^\varepsilon W_2\, d\kappa,$$

откуда получаем

$$\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \le \int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa + \int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \, .$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \, ds \le \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \right] ds + \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \right] ds \, . \quad (1.78)$$

Используя оценку (1.7), считая в ней $\nu_\delta < -1$, получаем

$$\| W_1 \| \le \| A \| \left\| \exp\left(A \ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right) \right\| \frac{t-s}{t+\kappa} \, \frac{\| f(s) \|}{(s+\kappa)^2} \le$$

$$\le M_\delta \| A \| \, \frac{N(t)}{t} \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\nu_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \, .$$

Тогда

$$\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \le M_\delta \| A \| \, \frac{N(t)}{t} \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\nu_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \, d\kappa \, . \quad (1.79)$$

Далее,

$$\int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\nu_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \, d\kappa = -\int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\nu_\delta} d\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right) =$$

$$= -\frac{1}{1+\nu_\delta} \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{1+\nu_\delta} \Bigg|_0^\varepsilon = \frac{1}{-1-\nu_\delta} \left(\frac{s+\kappa}{t+\kappa} \right)^{-1-\nu_\delta} \Bigg|_0^\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{-1-\nu_\delta} \left[\left(\frac{s+\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-1-\nu_\delta} - \left(\frac{s}{t} \right)^{-1-\nu_\delta} \right] . \quad (1.80)$$

В силу соотношений (1.79), (1.80) справедливо неравенство

$$\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \le P_1(t) \left[\left(\frac{s+\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-1-\nu_\delta} - \left(\frac{s}{t} \right)^{-1-\nu_\delta} \right],$$

где

$$P_1(t) = \frac{M_\delta \| A \|}{-1-\nu_\delta} \, \frac{N(t)}{t} \, .$$

Тогда

$$\int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_1\| \, d\kappa \right] ds \le P_1(t) \int_0^t \left[\left(\frac{s+\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-1-\nu_\delta} - \left(\frac{s}{t} \right)^{-1-\nu_\delta} \right] ds \,. \quad (1.81)$$

Далее,

$$\int_0^t \left(\frac{s+\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-1-\nu_\delta} ds = \frac{t+\varepsilon}{-\nu_\delta} \left(\frac{s+\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-\nu_\delta} \Bigg|_0^t = \frac{t+\varepsilon}{-\nu_\delta} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-\nu_\delta} \right]; \quad (1.82)$$

$$\int_0^t \left(\frac{s}{t} \right)^{-1-\nu_\delta} ds = \frac{t}{-\nu_\delta} \left(\frac{s}{t} \right)^{-\nu_\delta} \Bigg|_0^t = \frac{t}{-\nu_\delta} \,. \quad (1.83)$$

Используя соотношения (1.81) – (1.83), получаем

$$\int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_1\| \, d\kappa \right] ds \le \frac{P_1(t)}{-\nu_\delta} \left\{ (t+\varepsilon) \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-\nu_\delta} \right] - t \right\} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \,,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_1\| \, d\kappa \right] ds = 0 \,. \quad (1.84)$$

Далее,

$$\|W_2\| \le \left\| \exp\left(A \ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right) \right\| \frac{\|f(s)\|}{(s+\kappa)^2} \le$$

$$\le M_\delta \, N(t) \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\nu_\delta} \frac{1}{(s+\kappa)^2} \le M_\delta \, N(t) t^{\nu_\delta} (s+\kappa)^{-2-\nu_\delta} \,,$$

следовательно,

$$\int_0^{\varepsilon} \|W_2\| \, d\kappa \le M_\delta \, N(t) t^{\nu_\delta} \int_0^{\varepsilon} (s+\kappa)^{-2-\nu_\delta} \, d\kappa \,. \quad (1.85)$$

Далее,

$$\int_0^{\varepsilon} (s+\kappa)^{-2-\nu_\delta} \, d\kappa = \frac{1}{-1-\nu_\delta} (s+\kappa)^{-1-\nu_\delta} \Big|_0^{\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{-1-\nu_\delta} \left[(s+\varepsilon)^{-1-\nu_\delta} - s^{-1-\nu_\delta} \right]. \quad (1.86)$$

В силу соотношений (1.85), (1.86) справедливо неравенство

$$\int_0^{\varepsilon} \|W_2\| \, d\kappa \le P_2(t) \left[(s+\varepsilon)^{-1-\nu_\delta} - s^{-1-\nu_\delta} \right],$$

где

$$P_2(t) = \frac{M_\delta}{-1-\nu_\delta} N(t) \, t^{\nu_\delta} .$$

Тогда

$$\int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_2\| \, d\kappa \right] ds \le P_2(t) \int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\nu_\delta} - s^{-1-\nu_\delta} \right] ds =$$

$$= \frac{1}{-\nu_\delta} P_2(t) \left[(t+\varepsilon)^{-\nu_\delta} - \varepsilon^{-\nu_\delta} - t^{-\nu_\delta} \right] \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 ,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_2\| \, d\kappa \right] ds = 0 . \qquad (1.87)$$

В силу соотношений (1.78), (1.84), (1.87) справедлив предельный переход (1.75), откуда следует равенство (1.74). Из соотношений (1.73), (1.74) вытекает справедливость предельного перехода (1.63). Лемма 1.7 доказана.

Лемма 1.8. При выполнении условия $\nu < -1$ функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (1.64), является решением уравнения (1.1) при $\alpha = 1$.

Доказательство. Запишем $x_0(t)$ в виде

$$x_0(t) = \int_0^t g_0(s,t) \, ds ,$$

где $g_0(s,t)$ задается формулой (1.68). В силу равенства (1.71) функция $g_0(s,t)$ непрерывна по (s,t). Покажем, что

$$\lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t) \right]_t' = 0 . \qquad (1.88)$$

При $s \in (0,t]$ получаем

$$\left[g_0(s,t) \right]_t' = \frac{1}{t} A \exp\left(A \ln \frac{t}{s} \right) \frac{f(s)}{s} = \frac{1}{t} A g_0(s,t) . \qquad (1.89)$$

Из соотношений (1.71), (1.89) следует равенство (1.88). Доопределим производную $\left[g_0(s,t)\right]'_t$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t\Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0}\left[g_0(s,t)\right]'_t = 0. \qquad (1.90)$$

В силу равенства (1.90) производная $\left[g_0(s,t)\right]'_t$ непрерывна по (s,t). Следовательно, при нахождении $x_0'(t)$ можно применить формулу (1.6):

$$x_0'(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]'_t\, ds + g_0(t,t).$$

Учитывая равенство $g_0(t,t) = t^{-1}f(t)$, формулу (1.89) и замкнутость оператора *A*, получаем

$$x_0'(t) = \frac{1}{t}\, A\int_0^t g_0(s,t)\, ds + \frac{f(t)}{t},$$

откуда следует, что $t\,x_0'(t) = A\,x_0(t) + f(t)$. Лемма 1.8 доказана.

Теорема 1.2 доказана.

Рассмотрим случай слабой вырождаемости уравнения (1.1), т.е. случай $0 < \alpha < 1$. Для нахождения ограниченных в точке вырождения решений уравнения (1.1) рассмотрим задачу вида

$$t^{\alpha}x'(t) = Ax(t) + f(t),\ 0 < t < \infty, \qquad (1.91)$$

$$\lim_{t\to+0} x(t) = x_0,\ x_0 \in E. \qquad (1.92)$$

Теорема 1.3. При $0 < \alpha < 1$ задача (1.91), (1.92) имеет решение

$$x(t) = \exp\left(A\,\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)x_0 + \int_0^t \exp\left(A\,\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f(s)}{s^{\alpha}}\, ds. \qquad (1.93)$$

Если $\nu = \max\left\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda\in\sigma(A)\right\} < 0$ и функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то решение (1.93) ограничено на $(0,\infty)$.

Доказательство. Заменой

$$t = \left[(1-\alpha)\tau\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

уравнение (1.91) сводится к уравнению без вырождения:

$$u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau)\,,\ 0 < \tau < \infty\,,$$

где

$$u(\tau) ::= x\left(\left[(1-\alpha)\tau\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right);\ \ g(\tau) ::= f\left(\left[(1-\alpha)\tau\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau)\,,\ 0 \le \tau < \infty\,,$$

$$u(0) = x_0\,.$$

Используя формулу (1.18), получаем

$$u(\tau) = \exp(A\tau)\,x_0 + \int_0^t \exp\left[A(\tau-\rho)\right] g(\rho)\,d\rho\,.$$

Возвращаясь при $0 < \tau < \infty$ к переменной t, получаем формулу (1.93). Используя непрерывность решения $u(\tau)$, имеем

$$\lim_{t\to+0} x(t) = \lim_{\tau\to+0} u(\tau) = u(0) = x_0\,,$$

т.е. решение (1.93) удовлетворяет начальному условию (1.92).

Оценим решение (1.93) по норме:

$$\|x(t)\| \le \left\|\exp\left(A\,\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right\|\cdot\|x_0\| + \int_0^t \left\|\exp\left(A\,\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\right\| \frac{\|f(s)\|}{s^{\alpha}}\,ds\,.$$

Применяя оценку (1.7), получаем

$$\|x(t)\| \le M_\delta \exp\left(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha}\,t^{1-\alpha}\right)\|x_0\| +$$

$$+ M_\delta\,N(t)\int_0^t \exp\left(\nu_\delta\,\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{ds}{s^{\alpha}}\,. \qquad (1.94)$$

Заметим, что

$$\int_0^t \exp\left(\nu_\delta \frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{ds}{s^\alpha}=\frac{1}{-\nu_\delta}\exp\left(\nu_\delta \frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{1}{-\nu_\delta}\left[1-\exp\left(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right)\right]. \qquad (1.95)$$

В силу соотношений (1.94), (1.95)

$$\|x(t)\|\le M_\delta \exp\left(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right)\|x_0\|+\frac{M_\delta}{-\nu_\delta}N(t)\left[1-\exp\left(\frac{\nu_\delta}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right)\right]. \quad (1.96)$$

Если $\nu<0$, то $\nu_\delta<0$ (см. замечание 1.1). Тогда в силу оценки (1.96)

$$\|x(t)\|\le M_\delta\|x_0\|+\frac{M_\delta}{-\nu_\delta}N(t),\ 0<t<\infty. \qquad (1.97)$$

Из неравенства (1.97) видно, что если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то решение (1.93) ограничено на $(0,\infty)$. Теорема 1.3 доказана.

Замечание 1.3. Если $f(t)\equiv f$, $0\le t<\infty$, и оператор A обратим, то решение (1.93) можно записать в виде

$$x(t)=-A^{-1}f+\exp\left(A\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\left(x_0+A^{-1}f\right). \qquad (1.98)$$

Действительно, в этом случае

$$\int_0^t \exp\left(A\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f}{s^\alpha}\,ds=\left|\mu=\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|=\int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\exp(A\mu)\,f\,d\mu=$$

$$=\int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\exp(A\mu)\,A(A^{-1}f)\,d\mu=\int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}A\exp(A\mu)(A^{-1}f)\,d\mu=$$

$$=\int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\left[\exp(A\mu)(A^{-1}f)\right]'d\mu=\exp(A\mu)(A^{-1}f)\Big|_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}}=$$

$$=\exp\left(A\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)(A^{-1}f)-A^{-1}f\,.$$

Итак,

$$\int_0^t \exp\left(A\,\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f}{s^{\alpha}}\,ds = -A^{-1}f+\exp\left(A\,\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)(A^{-1}f)\,. \quad (1.99)$$

В силу равенства (1.99) решение (1.93) принимает вид (1.98).

Замечание 1.4. Если $f(t)\equiv f$, $0\le t<\infty$, и оператор A обратим, то задача (1.91), (1.92) с начальным значением $x_0=-A^{-1}f$ имеет стационарное решение $x(t)=-A^{-1}f$.

§ 2. Уравнение с вырождающимся коэффициентом общего вида

В банаховом пространстве E изучается вырождающееся в точке $t=0$ уравнение

$$\varphi(t)\,x'(t)=A\,x(t)+f(t)\,,\ 0<t<\infty\,, \quad (2.1)$$

где $x(t)$ – искомая функция со значениями в E; $A\in L(E)$; $f(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$; $\varphi(t)\in C\big((0,\infty);(0,\infty)\big)$, $\varphi(+0)=0$.

Рассматривается также задача Коши для возмущенного уравнения:

$$\varphi(t+\varepsilon)x_\varepsilon'(t)=Ax_\varepsilon(t)+f(t)\,,\ 0\le t<\infty\,, \quad (2.2)$$

$$x_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0}\,, \quad (2.3)$$

где ε – малый положительный параметр, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=\mathrm{const}$, $\varepsilon_0>0$.

Пусть:

1) существует конечный предел

$$\lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t^{\alpha}}=K\,, \quad (2.4)$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\ge 1$; $K=\mathrm{const}$, $K>0$;

2) $\nu<0$ в случае $\alpha>1$; $\nu<-K$ в случае $\alpha=1$, где $\nu=\max\big\{\mathrm{Re}\,\lambda\ |\ \lambda\in\sigma(A)\big\}$, K – константа из условия 1);

3) выполняется неравенство

$$\big\|x_{\varepsilon,0}\big\|\le L\,\varepsilon^{-\beta}\,,\ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]\subset(0,\varepsilon_0]\,, \quad (2.5)$$

где ε_* – сколь угодно малое положительное число, меньшее ε_0; $L = \text{const}$, $L > 0$, β – положительное число, удовлетворяющее условию $\beta \le \alpha$ (здесь α – константа из условия 1)).

Будем называть уравнение (2.1) сильно вырождающимся, если выполняется условие 1).

Введем следующие обозначения:

$$I_\varepsilon(s,t) = \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}; \quad I_0(s,t) = \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}.$$

Теорема 2.1. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (2.2), (2.3) имеет решение

$$I_\varepsilon(t) = \exp\bigl(A\, I_\varepsilon(0,t)\bigr)\, x_{\varepsilon,0} + \int_0^t \exp\bigl(A\, I_\varepsilon(s,t)\bigr) \frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}\, ds. \qquad (2.6)$$

При выполнении условий 1) – 3) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(t) = I_0(t), \; t \in (0, \infty), \qquad (2.7)$$

где

$$I_0(t) = \int_0^t \exp\bigl(A\, I_0(s,t)\bigr) \frac{f(s)}{\varphi(s)}\, ds. \qquad (2.8)$$

Предельная функция $I_0(t)$ является решением уравнения (2.1); это решение ограничено при $t \to +0$; если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $I_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Эта теорема справедлива в силу доказываемых ниже лемм 2.1 – 2.5.

Лемма 2.1. При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задача (2.2), (2.3) имеет решение вида (2.6). Если $\nu < 0$ и функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то это решение ограничено на $[0, \infty)$.

Доказательство. Заметим, что $I_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}$, т.е. $I_\varepsilon(t)$ удовлетворяет начальному условию (2.3). Применяя формулу для производной операторной экспоненты, правило дифференцирования сложной функции и формулу для производной от интеграла с переменным верхним пределом, получаем

$$\left[\exp\bigl(A\, I_\varepsilon(0,t)\bigr)\, x_{\varepsilon,0}\right]' = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)} A \exp\bigl(A\, I_\varepsilon(0,t)\bigr) x_{\varepsilon,0}. \qquad (2.9)$$

Подынтегральная функция

$$g_\varepsilon(s,t)=\exp\bigl(A\,I_\varepsilon(s,t)\bigr)\,\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)} \qquad (2.10)$$

и ее производная

$$[\,g_\varepsilon(s,t)\,]'_t=\frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\,A\exp\bigl(A\,I_\varepsilon(s,t)\bigr)\,\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)} \qquad (2.11)$$

непрерывны по (s,t). Следовательно, можно применить формулу (1.6):

$$\left[\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds\right]'=\int_0^t[\,g_\varepsilon(s,t)\,]'_t\,ds+g_\varepsilon(t,t)$$

или в силу (2.11) и равенства $g_\varepsilon(t,t)=\dfrac{f(t)}{\varphi(t+\varepsilon)}$

$$\left[\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds\right]'=\frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\left[A\int_0^t\exp\bigl(A\,I_\varepsilon(s,t)\bigr)\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}\,ds+f(t)\right]. \qquad (2.12)$$

В силу соотношений (2.9), (2.12)

$$I'_\varepsilon(t)=\frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\,[\,A\,I_\varepsilon(t)+f(t)]$$

или $\varphi(t+\varepsilon)\,I'_\varepsilon(t)=A\,I_\varepsilon(t)+f(t)$, т.е $I_\varepsilon(t)$ является решением уравнения (2.2). Показано, что функция $I_\varepsilon(t)$ является решением задачи (2.2), (2.3).

Пусть $\nu<0$ и функция $f(t)$ ограничена на $[\,0,\infty)$. Покажем, что решение $I_\varepsilon(t)$ ограничено на $[\,0,\infty)$. Получаем

$$\|\,I_\varepsilon(t)\,\|\le\|\exp\bigl(A\,I_\varepsilon(0,t)\bigr)\|\cdot\|\,x_{\varepsilon,0}\,\|+\int_0^t\|\,g_\varepsilon(s,t)\,\|ds\,. \qquad (2.13)$$

В силу оценки (1.7)

$$\|\exp\bigl(A\,I_\varepsilon(0,t)\bigr)\|\le M_\delta\exp\bigl(\nu_\delta\,I_\varepsilon(0,t)\bigr),$$

где $\nu_\delta<0$ (см. замечание 1.1). Следовательно,

$$\|\exp\bigl(A\,I_\varepsilon(0,t)\bigr)\|\le M_\delta\,. \qquad (2.14)$$

Используя оценку (1.7), получаем

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) \| ds \le \int_0^t M_\delta \exp\big(\nu_\delta I_\varepsilon(s,t)\big) \frac{\| f(s) \|}{\varphi(s+\varepsilon)} ds \le$$

$$\le M_\delta N(t) \int_0^t \exp\big(\nu_\delta I_\varepsilon(s,t)\big) \frac{ds}{\varphi(s+\varepsilon)} = \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t) \exp\big(\nu_\delta I_\varepsilon(s,t)\big)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t) \big[1 - \exp\big(\nu_\delta I_\varepsilon(0,t)\big)\big] < \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) . \tag{2.15}$$

Из соотношения (2.15) следует оценка

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) \| ds < \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) . \tag{2.16}$$

В силу соотношений (2.13), (2.14), (2.16) имеем

$$\| I_\varepsilon(t) \| \le M_\delta \| x_{\varepsilon,0} \| + \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) . \tag{2.17}$$

По условию функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, т.е.

$$\sup_{t\in[0,\infty)} N(t) = C < \infty . \tag{2.18}$$

Следовательно, в силу оценки (2.17) решение $I_\varepsilon(t)$ ограничено на $[0,\infty)$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Пусть выполнено условие 1) и $\nu < 0$. Тогда функция (2.8) определена при любом $t \in (0,\infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $I_0(t)$ ограничена на $(0,\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = \exp\big(A\, I_0(s,t)\big) \frac{f(s)}{\varphi(s)} \tag{2.19}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[h, t]$, h – произвольное сколь угодно малое положительное число. Тогда несобственный интеграл

$$I_0(t) = \int_0^t g_0(s,t)\, ds \tag{2.20}$$

сходится, если сходится несобственный интеграл

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds \, . \tag{2.21}$$

Покажем сходимость интеграла (2.21). Используя оценку (1.7), в которой в силу условия $\nu < 0$ можно считать $\nu_\delta < 0$, имеем

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| ds \le \int_0^t M_\delta \exp\left(\nu_\delta \, I_0(s,t)\right) \frac{\| f(s) \|}{\varphi(s)} \, ds \le$$

$$\le M_\delta \, N(t) \int_0^t \exp\left(\nu_\delta \, I_0(s,t)\right) \frac{ds}{\varphi(s)} \; = \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) \exp\left(\nu_\delta \, I_0(s,t)\right)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) \left[1 - \lim_{s \to +0} \exp\left(\nu_\delta \, I_0(s,t)\right) \right] = \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) \, ,$$

так как в силу условия 1) при любом фиксированном $t \in (0, \infty)$ $\lim\limits_{s \to +0} I_0(s,t) = \infty$, следовательно,

$$\lim_{s \to +0} \exp\left(\nu_\delta \, I_0(s,t)\right) = 0 \, . \tag{2.22}$$

Получена оценка

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| ds \; \le \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) \, . \tag{2.23}$$

Из неравенства (2.23) следует сходимость интеграла (2.21) и, тем самым, сходимость интеграла (2.20), а также оценка вида

$$\| I_0(t) \| \le \frac{M}{-\nu_\delta} N(t) \, , \; t \in (0, \infty) \; . \tag{2.24}$$

Из неравенства (2.24) видно, что функция $I_0(t)$ ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, т.е. выполняется условие (2.18), то в силу (2.24) $I_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$. Лемма 2.2 доказана.

Замечание 2.1. Из условия 1) следует, что при любом фиксированном $t \in (0, \infty)$ в случае $\alpha > 1$

$$I_0(s,t) \sim \frac{1}{K(\alpha - 1)} \, \frac{1}{s^{\alpha - 1}} \, ; \tag{2.25}$$

в случае $\alpha = 1$

$$I_0(s,t) \sim \frac{1}{K} \ln \frac{1}{s} \tag{2.26}$$

при $s \to +0$.

Действительно, применяя правило Лопиталя и используя соотношение (2.4), получаем в случае $\alpha > 1$

$$\lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\dfrac{1}{K(\alpha-1)} \dfrac{1}{s^{\alpha-1}}} = K(\alpha-1) \lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\dfrac{1}{s^{\alpha-1}}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= K(\alpha-1) \lim_{s \to +0} \frac{-\dfrac{1}{\varphi(s)}}{-\dfrac{1}{s^{2\alpha-2}} (\alpha-1) s^{\alpha-2}} = K \lim_{s \to +0} \frac{s^{\alpha}}{\varphi(s)} = K \cdot \frac{1}{K} = 1;$$

в случае $\alpha = 1$

$$\lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\dfrac{1}{K} \ln \dfrac{1}{s}} = K \lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\ln \dfrac{1}{s}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= K \lim_{s \to +0} \frac{-\dfrac{1}{\varphi(s)}}{s \cdot \left(-\dfrac{1}{s^2} \right)} = K \lim_{s \to +0} \frac{s}{\varphi(s)} = K \cdot \frac{1}{K} = 1.$$

Лемма 2.3. При выполнении условий 1), 2) подынтегральная функция (2.19) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0, \; t \in (0, \infty). \tag{2.27}$$

Доказательство. При любом фиксированном $t > 0$ и любом $s \in (0, t]$ получаем в силу оценки (1.7)

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta \, N(t) \, \frac{1}{\varphi(s)} \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(s,t) \bigr), \tag{2.28}$$

где $\nu_\delta < 0$. В силу неравенства (2.28) для справедливости соотношения (2.27) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{\varphi(s)} \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(s,t) \bigr) \right] = 0. \tag{2.29}$$

В силу условия $\varphi(+0)=0$ и соотношения (2.22) выражение под знаком предела в формуле (2.29) представляет собой при $s \to +0$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$. В силу условия 1) имеем $\varphi(s) \sim K\, s^{\alpha}$ при $s \to +0$. Следовательно,

$$\lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{\varphi(s)} \exp\left(\nu_\delta\, I_0(s,t)\right) \right] = \frac{1}{K} \lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} \exp\left(\nu_\delta\, I_0(s,t)\right) \right]. \quad (2.30)$$

В силу соотношения (2.30) для справедливости равенства (2.29) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \left[\frac{1}{s^{\alpha}} \exp\left(\nu_\delta\, I_0(s,t)\right) \right] = 0\,. \quad (2.31)$$

Для справедливости соотношения (2.31) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \ln \kappa(s,t) = -\infty\,, \quad (2.32)$$

Где

$$\kappa(s,t) = \frac{1}{s^{\alpha}} \exp\left(\nu_\delta\, I_0(s,t)\right).$$

Имеем

$$\lim_{s \to +0} \ln \kappa(s,t) = \lim_{s \to +0} \left[\left(\alpha + \nu_\delta \frac{I_0(s,t)}{\ln \frac{1}{s}} \right) \ln \frac{1}{s} \right]. \quad (2.33)$$

Заметим, что

$$\lim_{s \to +0} \ln \frac{1}{s} = \infty\,. \quad (2.34)$$

При $\alpha > 1$, используя эквивалентность (2.25) и правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\ln \frac{1}{s}} = \frac{1}{K(\alpha-1)} \lim_{s \to +0} \frac{\frac{1}{s^{\alpha-1}}}{\ln \frac{1}{s}} = \left| \begin{array}{c} \gamma = \frac{1}{s} \\ s \to +0 \\ \gamma \to \infty \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{K(\alpha-1)} \lim_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma^{\alpha-1}}{\ln \gamma} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{1}{K} \lim_{\gamma \to \infty} \frac{\gamma^{\alpha-2}}{\frac{1}{\gamma}} = \frac{1}{K} \lim_{\gamma \to \infty} \gamma^{\alpha-1} = \infty\,.$$

Итак, при $\alpha > 1$

$$\lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\ln \frac{1}{s}} = \infty \,. \tag{2.35}$$

Из соотношений (2.33) – (2.35) следует соотношение (2.32) в случае $\alpha > 1$.

При $\alpha = 1$ в силу эквивалентности (2.26) получаем

$$\lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\ln \frac{1}{s}} = \frac{1}{K} \lim_{s \to +0} \frac{\ln \frac{1}{s}}{\ln \frac{1}{s}} = \frac{1}{K} \,.$$

Следовательно,

$$\lim_{s \to +0} \left(1 + \nu_\delta \frac{I_0(s,t)}{\ln \frac{1}{s}} \right) = 1 + \frac{\nu_\delta}{K} \,. \tag{2.36}$$

По условию доказываемой леммы в случае $\alpha = 1$ выполняется неравенство $\nu < -K$, поэтому можно считать, что $\nu_\delta < -K$ (см. замечание 1.1). Следовательно,

$$1 + \frac{\nu_\delta}{K} < 0 \,. \tag{2.37}$$

Из формул (2.33), (2.34), (2.36), (2.37) следует соотношение (2.32) в случае $\alpha = 1$. Лемма 2.3 доказана.

Используя соотношение (2.27), доопределим функцию $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0 \,,\ t \in (0,\infty) \,. \tag{2.38}$$

Лемма 2.4. При выполнении условий 1) – 3) справедлив предельный переход (2.7).

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Покажем вначале, что

$$\exp\bigl(A\, I_\varepsilon(0,t)\bigr)\, x_{\varepsilon,0} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \,. \tag{2.39}$$

В силу неравенства (1.7) справедлива оценка

$$\left\| \exp\bigl(A\, I_\varepsilon(0,t)\bigr)\, x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_\delta \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\bigl(\nu_\delta\, I_\varepsilon(0,t)\bigr) \tag{2.40}$$

с $\nu_\delta < 0$.

Заметим, что

$$I_\varepsilon(0,t) = I_0(\varepsilon,t) + I_0(t,t+\varepsilon)\ . \tag{2.41}$$

В силу соотношений (2.40), (2.41)

$$\left\| \exp\bigl(A\ I_\varepsilon(0,t)\bigr)\, x_{\varepsilon,0} \ \right\| \le$$

$$\le\ M_\delta \exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(t,t+\varepsilon)\bigr)\Bigl[\ \left\| \ x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(\varepsilon,t)\bigr)\ \Bigr]. \tag{2.42}$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(t,t+\varepsilon)\bigr) = 1\,. \tag{2.43}$$

В силу условия (2.5) при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\left\| \ x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(\varepsilon,t)\bigr) \le L\,\varepsilon^{\alpha-\beta}\,\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(\varepsilon,t)\bigr). \tag{2.44}$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \beta<\alpha, \\ 1 & \text{при} \quad \beta=\alpha. \end{cases} \tag{2.45}$$

В силу равенства (2.31)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{1}{\varepsilon^\alpha}\exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(\varepsilon,t)\bigr)\right] = 0 \tag{2.46}$$

(в качестве переменной s выступает переменная ε). Из соотношений (2.42) – (2.46) следует предельный переход (2.39).

В силу соотношения (2.39) для доказательства предельного перехода (2.7) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t g_\varepsilon(s,t)\ ds = \int_0^t g_0(s,t)\ ds\,, \tag{2.47}$$

где $g_\varepsilon(s,t)$ и $g_0(s,t)$ выражаются формулами (2.10) и (2.19). Для справедливости равенства (2.47) достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \bigl\| \, g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \bigr\|\ ds = 0\,. \tag{2.48}$$

Как и при доказательстве леммы 1.3, для справедливости соотношения (2.48) достаточно показать, что подынтегральная функция

$$\psi_\varepsilon(s,t) = \bigl\| \, g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \bigr\|,\ \ s\in[\,0,t\,]\,,$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon(s,t) = 0\,,\ s \in [\,0,t\,]\,; \tag{2.49}$$

$$\psi_\varepsilon(s,t) \le C\,(t,\varepsilon_0)\,,\ s \in [\,0,t\,]\,,\ \varepsilon \in (\,0,\varepsilon_0\,]\,. \tag{2.50}$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(s,t) = g_0(s,t)\,,\ s \in [\,0,t\,]\,, \tag{2.51}$$

что будет означать справедливость соотношения (2.49). При $s \in (\,0,t\,]$ равенство (2.51) выполняется в силу непрерывности функции $g_\varepsilon(s,t)$. Покажем справедливость (2.51) при $s = 0$. В силу соотношений (1.7), (2.41)

$$\|\, g_\varepsilon(0,t)\,\| = \left\| \exp\bigl(A\ I_\varepsilon(0,t)\bigr)\frac{f(0)}{\varphi(\varepsilon)} \right\| \le M_\delta \exp\bigl(\nu_\delta\ I_\varepsilon(0,t)\bigr)\frac{\|\, f(0)\,\|}{\varphi(\varepsilon)} =$$

$$= M_\delta\,\|\, f(0)\,\|\, \exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(t,t+\varepsilon)\bigr)\left[\frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(\varepsilon,t)\bigr)\right]. \tag{2.52}$$

В силу соотношений (2.29), (2.43) правая часть неравенства (2.52) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(0,t) = 0\,. \tag{2.53}$$

В силу равенств (2.38), (2.53)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(0,t) = g_0(0,t)\,,$$

что означает справедливость соотношения (2.51) при $s = 0$.

Покажем, что справедлива оценка вида (2.50).

Имеем

$$\psi_\varepsilon(s,t) \le \|\, g_\varepsilon(s,t)\| + \|\, g_0(s,t)\|\,. \tag{2.54}$$

В силу оценки (1.7) получаем для любых $s \in [\,0,t\,]$, $\varepsilon \in (\,0,\varepsilon_0\,]$ неравенство

$$\|\, g_\varepsilon(s,t)\| \le M_\delta\ N(t)\frac{1}{\varphi(s+\varepsilon)}\exp\bigl(\nu_\delta\ I_\varepsilon(s,t)\bigr)\,, \tag{2.55}$$

где $\nu_\delta < 0$.

Пусть

$$\kappa_\varepsilon(s,t) = \frac{1}{\varphi(s+\varepsilon)}\exp\bigl(\nu_\delta\ I_\varepsilon(s,t)\bigr)\,.$$

Положим $s+\varepsilon=\xi$. Тогда $\xi\to+0$ при $s\to+0$, $\varepsilon\to 0$. Из этой замены получаем $\varepsilon=\xi-s$. Тогда

$$I_\varepsilon(s,t)=\int_s^t\frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}=\int_s^t\frac{d\tau}{\varphi(\tau+\xi-s)}=\left|\begin{array}{c} z=\tau+\xi-s \\ \tau=s,\ z=\xi \\ \tau=t,\ z=t+\varepsilon \end{array}\right|=$$

$$=\int_\xi^{t+\varepsilon}\frac{dz}{\varphi(z)}=I_0(\xi\,,\,t+\varepsilon)$$

и функция $\kappa_\varepsilon(s,t)$ принимает вид

$$\kappa_\varepsilon(s,t)=\frac{1}{\varphi(\xi)}\exp\big(\nu_\delta\, I_0(\xi\,,\,t+\varepsilon)\big).$$

При достаточно малых s и ε выполняется неравенство $\xi<t$. Тогда

$$\kappa_\varepsilon(s,t)=\left[\frac{1}{\varphi(\xi)}\exp\big(\nu_\delta\, I_0(\xi\,,\,t)\big)\right]\exp\big(\nu_\delta\, I_0(t,t+\varepsilon)\big)$$

и в силу соотношений (2.29), (2.43)

$$\lim_{\substack{s\to+0\\ \varepsilon\to 0}}\kappa_\varepsilon(s,t)=\lim_{\xi\to+0}\left\{\left[\frac{1}{\varphi(\xi)}\exp\big(\nu_\delta\, I_0(\xi\,,\,t)\big)\right]\exp\big(\nu_\delta\, I_0(t,t+\varepsilon)\big)\right\}=0\,.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{s\in[\,0,t\,]\\ \varepsilon\in(\,0,\varepsilon_0\,]}}\kappa_\varepsilon(s,t)=K(t,\varepsilon_0)<\infty\,. \tag{2.56}$$

В силу соотношений (2.55), (2.56)

$$\|\,g_\varepsilon(s,t)\|\le M_\delta\, N(t)\, K(t,\varepsilon_0)\,;\ s\in[\,0,t\,],\ \varepsilon\in(\,0,\varepsilon_0\,]\,. \tag{2.57}$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (2.54). При любом $s\in(\,0,t\,]$ для $\|\,g_0(s,t)\|$ справедлива оценка (2.28).

Пусть

$$\kappa(s,t)=\frac{1}{\varphi(s)}\exp\big(\nu_\delta\, I_0(s,t)\big).$$

В силу соотношения (2.29)

$$\lim_{s\to+0}\kappa(s,t)=0\,,$$

следовательно,

$$\sup_{s\in(0,t]} \kappa(s,t) = K(t) < \infty\,. \qquad (2.58)$$

В силу соотношений (2.28), (2.58)

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta\, N(t)\, K(t)\,,\ s\in(0,t]\,. \qquad (2.59)$$

В силу равенства (2.38) $g_0(0,t)=0$. Тогда $\| g_0(0,t)\| = \| 0 \| = 0$ и вместо неравенства (2.59) можно записать оценку вида

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta\, N(t)\, K(t)\,,\ s\in[0,t]\,. \qquad (2.60)$$

В силу соотношений (2.54), (2.57), (2.60)

$$\psi_\varepsilon(s,t) \le M_\delta\, N(t)\left[K(t,\varepsilon_0)+K(t)\right],\ s\in[0,t]\,,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]\,.$$

Получена оценка вида (2.50). Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. При выполнении условий 1), 2) предельная функция $I_0(t)$ является решением уравнения (2.1).

Доказательство. В силу соотношения (2.38) подынтегральная функция (2.19) непрерывна по (s,t). Далее,

$$[\, g_0(s,t)\,]'_t = \frac{1}{\varphi(t)}\ A \exp\bigl(A\ I_0(s,t)\bigr)\frac{f(s)}{\varphi(s)} = \frac{1}{\varphi(t)}\ A g_0(s,t)\,.$$

В силу соотношений (1.7), (2.29)

$$\left\| [\, g_0(s,t)\,]'_t \right\| \le \frac{1}{\varphi(t)}\,\| A \| M_\delta \exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(s,t)\bigr)\frac{\| f(s) \|}{\varphi(s)} \le$$

$$\le \frac{1}{\varphi(t)}\,\| A \| M_\delta\, N(t)\left[\frac{1}{\varphi(s)}\exp\bigl(\nu_\delta\, I_0(s,t)\bigr)\right] \underset{s\to+0}{\to} 0\,. \qquad (2.61)$$

В силу соотношения (2.61)

$$\lim_{s\to+0}\ [\, g_0(s,t)\,]'_t = 0\,. \qquad (2.62)$$

Используя равенство (2.62), доопределим производную $[\, g_0(s,t)\,]'_t$ по непрерывности в нуле:

$$[\, g_0(s,t)\,]'_t \Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0} [\, g_0(s,t)\,]'_t = 0\,. \qquad (2.63)$$

В силу соотношения (2.63) производная $[\, g_0(s,t)\,]'_t$ непрерывна по (s,t). Следовательно, можно применить формулу (1.6):

$$I_0'(t) = \int_0^t [\, g_0(s,t)\,]'_t \; ds + g_0(s,t)\big|_{s=t} =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\varphi(t)} \; A\, g_0(s,t)\,ds + \frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\varphi(t)} \left[A \int_0^t g_0(s,t)\,ds + f(t) \right] =$$

$$= \frac{1}{\varphi(t)} \left[A I_0(t) + f(t) \right].$$

Получили формулу

$$I_0'(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \left[A I_0(t) + f(t) \right].$$

Тогда $\varphi(t)\, I_0'(t) = A I_0(t) + f(t)$, т.е. функция $I_0(t)$ является решением уравнения (2.1). Лемма 2.5 доказана.

Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.2. При $f(t) \equiv f$, $0 \le t < \infty$, решение задачи (2.2), (2.3) можно записать в виде

$$I_\varepsilon(t) = -A^{-1} f + \exp\big(A\, I_\varepsilon(0,t)\big)\Big(x_{\varepsilon,0} + A^{-1} f\,\Big)$$

и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(t) = I_0(t)$, $0 < t < \infty$, где $I_0(t) = -A^{-1} f$ – стационарное решение уравнения

$$\varphi(t)\, x'(t) = A x(t) + f \,, \; 0 < t < \infty .$$

Будем называть уравнение (2.1) слабо вырождающимся, если выполнено следующее условие:

а) существует конечный предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{t^\alpha} = K \,,$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$; $K = \mathrm{const}$, $K > 0$.

Для нахождения ограниченных в точке вырождения решений уравнения (2.1) в случае его слабой вырождаемости рассмотрим задачу вида

$$\varphi(t) x'(t) = A x(t) + f(t)\,, \; 0 < t < \infty \,, \tag{2.64}$$

$$\lim_{t \to +0} x(t) = x_0 \,, \; x_0 \in E \,. \tag{2.65}$$

Из условия а) следует, что для любого $t > 0$

$$I_0(0,t)=\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}<\infty\,. \tag{2.66}$$

Действительно, при любом фиксированном $t>0$ имеем в силу условия a)

$$H(t)=\sup_{0<\tau\le t}\frac{\tau^{\alpha}}{\varphi(\tau)}<\infty\,.$$

Тогда

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}=\int_0^t \frac{\tau^{\alpha}}{\varphi(\tau)}\frac{d\tau}{\tau^{\alpha}}\le H(t)\int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\alpha}}=H(t)\left.\frac{\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^t=H(t)\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}<\infty\,.$$

Из полученной оценки

$$I_0(0,t)\le H(t)\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

следует, что

$$\lim_{t\to+0} I_0(0,t)=0\,. \tag{2.67}$$

Теорема 2.2. При выполнении условия a) задача (2.64), (2.65) имеет решение

$$x(t)=\exp\bigl(A\,I_0(0,t)\bigr)\,x_0+\int_0^t \exp\bigl(A\,I_0(s,t)\bigr)\,\frac{f(s)}{\varphi(s)}\,ds\,. \tag{2.68}$$

Если $\nu=\max\{\operatorname{Re}\lambda\mid\lambda\in\sigma(A)\}<0$ и функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то решение (2.68) ограничено на $(0,\infty)$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в силу соотношения (2.66) функция $x(t)$ определена корректно. Тот факт, что функция (2.68) является решением уравнения (2.64), устанавливается непосредственной подстановкой этой функции в данное уравнение. Покажем, что $x(t)$ удовлетворяет начальному условию (2.65). В силу соотношения (2.67)

$$\lim_{t\to+0}\exp\bigl(A\,I_0(0,t)\bigr)\,x_0=x_0\,, \tag{2.69}$$

следовательно, осталось показать, что

$$\lim_{t\to+0} I_0(t)=0\,, \tag{2.70}$$

где $I_0(t)$ – второе слагаемое в правой части формулы (2.68). Используя оценку (1.7), получаем

$$\| I_0(t) \| \le M_\delta \, N(t) \int_0^t \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(s,t)\bigr) \frac{ds}{\varphi(s)} . \tag{2.71}$$

Заметим, что

$$\int_0^t \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(s,t)\bigr) \frac{ds}{\varphi(s)} = \frac{1}{-\nu_\delta} \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(s,t)\bigr)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{1}{-\nu_\delta} \bigl[1 - \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(0,t)\bigr)\bigr]. \tag{2.72}$$

В силу соотношений (2.71), (2.72)

$$\| I_0(t) \| \le \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t) \bigl[1 - \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(0,t)\bigr)\bigr]. \tag{2.73}$$

В силу равенства (2.67) правая часть неравенства (2.73) сходится к нулю при $t \to +0$, откуда следует соотношение (2.70). В силу соотношений (2.69), (2.70) функция (2.68) удовлетворяет начальному условию (2.65). Далее, используя оценку (1.7) и неравенство (2.73), получаем

$$\| x(t) \| \le M_\delta \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(0,t)\bigr) \| x_0 \| + \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t) \bigl[1 - \exp\bigl(\nu_\delta \, I_0(0,t)\bigr)\bigr]. \tag{2.74}$$

Если $\nu < 0$, то за счет выбора δ можно считать $\nu_\delta < 0$. Тогда из неравенства (2.74) имеем

$$\| x(t) \| \le M_\delta \| x_0 \| + \frac{M_\delta}{-\nu_\delta} N(t), \; 0 < t < \infty . \tag{2.75}$$

Из оценки (2.75) вытекает, что если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, т.е. выполняется соотношение (2.18), то решение (2.68) ограничено на $(0,\infty)$. Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.3. Если $f(t) \equiv f$, $0 \le t < \infty$ и оператор A обратим, то решение (2.68) можно записать в виде

$$x(t) = -A^{-1} f + \exp\bigl(A \, I_0(0,t)\bigr)\bigl(x_0 + A^{-1} f\bigr).$$

Замечание 2.4. В случае обратимости оператора A задача (2.64), (2.65) с начальным значением $x_0 = -A^{-1} f$ имеет стационарное решение $x(t) = -A^{-1} f$.

Глава II

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

§ 1. Уравнение с вырождающимся коэффициентом степенного вида

В банаховом пространстве E изучается вырождающееся в точке $t=0$ уравнение

$$t^{\alpha} x'(t) = A x(t) + f(t), \; 0 < t < \infty, \tag{1.1}$$

с неограниченным линейным оператором $A: D(A) \subset E \to E$; $f(t) \in C\big([0,\infty); E\big)$; $\alpha \in (0,\infty)$.

Везде в главе II под решением уравнения (1.1) понимается его сильное решение, т.е. функция $x(t) \in C^1\big((0,\infty); E\big)$, удовлетворяющая данному уравнению.

Рассмотрим задачу Коши для возмущенного уравнения:

$$(t+\varepsilon)^{\alpha} x_{\varepsilon}'(t) = A x_{\varepsilon}(t) + f(t), \; 0 \le t < \infty, \tag{1.2}$$

$$x_{\varepsilon}(0) = x_{\varepsilon,0}, \; x_{\varepsilon,0} \in D(A), \tag{1.3}$$

где ε – малый положительный параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, $\varepsilon_0 > 0$.

Под решением задачи (1.2), (1.3) понимается функция $x_{\varepsilon}(t) \in C^1\big([0,\infty); E\big)$, удовлетворяющая уравнению (1.2) и начальному условию (1.3).

Пусть:

1) A – производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса C_0, т.е. полугруппы, сильно непрерывной при $t>0$ и удовлетворяющей условию

$$\lim_{t \to +0} U(t)x = x, \; x \in E; \tag{1.4}$$

2) $f(t) \in D(A)$, $0 \le t < \infty$; $A f(t) \in C\big([0,\infty); E\big)$.

Заметим, что в силу условия (1.4) можно считать

$$U(0) = I. \tag{1.5}$$

Укажем некоторые факты, которые будут использованы в дальнейшем. В силу условия 1) имеем [6, с. 17]

$$U(t)x \in D(A), \; \forall x \in D(A), \; \forall t \in [0,\infty); \tag{1.6}$$

$$U'(t)x = AU(t)x,\ x \in D(A); \tag{1.7}$$

$$AU(t)x = U(t)Ax,\ x \in D(A); \tag{1.8}$$

$$\overline{D(A)} = E,\ A - \text{замкнут}. \tag{1.9}$$

Пусть ω – тип полугруппы $U(t)$ класса C_0:

$$\omega = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln\|U(t)\|}{t}.$$

Справедлива оценка [1, с. 211]

$$\|U(t)\| \le M_\delta \exp(\omega_\delta t),\ 0 \le t < \infty, \tag{1.10}$$

где $M_\delta = \text{const}$, $M_\delta > 0$; $\omega_\delta = \omega + \delta$, δ – произвольное сколь угодно малое положительное число.

Замечание 1.1. В дальнейшем в оценке (1.10) число δ берется настолько малым, что $\omega_\delta < 0$ в случае $\omega < 0$ и $\omega_\delta < -c$ в случае $\omega < -c$, где $c > 0$.

Теорема 1.1. При выполнении условий 1), 2) задача (1.2), (1.3) при любом фиксированном $\alpha > 1$ и любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right] x_{\varepsilon,0} +$$

$$+ \int_0^t U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\varepsilon)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right] \frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^\alpha}\, ds. \tag{1.11}$$

При $\omega < 0$ и выполнении условия

$$\|x_{\varepsilon,0}\| \le L_0\, \varepsilon^{-H}, \tag{1.12}$$

где $L_0 = \text{const}$, $L_0 > 0$; H – произвольное фиксированное сколь угодно большое вещественное положительное число, справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t),\ t \in (0, \infty), \tag{1.13}$$

где

$$x_0(t) = \int_0^t U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right] \frac{f(s)}{s^\alpha}\, ds. \tag{1.14}$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Это решение ограничено при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0,\infty)$.

Теорема 1.1 справедлива в силу лемм 1.1 – 1.4, изложенных ниже.

Лемма 1.1. При выполнении условий 1), 2) задача (1.2), (1.3) при любом фиксированном $\alpha > 1$ и любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение вида (1.11).

Доказательство. Как и при доказательстве леммы I.1.1, задача (1.2), (1.3) сводится с помощью замены переменной к задаче вида (I.1.14), (I.1.15), т.е. к стандартной задаче Коши вида (I.1.16), (I.1.17). Известно [6, с. 24], что задача (I.1.16), (I.1.17) с оператором *H*, являющимся производящим оператором полугруппы $V(t)$ класса C_0, имеет единственное решение

$$u(\tau) = V(\tau) u_0 + \int_0^\tau V(\tau - \mu) g(\mu)\, d\mu . \tag{1.15}$$

Следовательно, задача (I.1.14), (I.1.15) имеет решение вида

$$u_\varepsilon(\tau) = U(\tau) x_{\varepsilon,0} + \int_0^\tau U(\tau - \mu) g_\varepsilon(\mu)\, d\mu . \tag{1.16}$$

После замены переменной

$$\mu = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(s+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right]$$

в интеграле в правой части формулы (1.16) и возвращения к прежней переменной t формула (1.16) принимает вид (1.11). Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. При любом фиксированном $\alpha > 1$ и выполнении условия $\omega < 0$ функция (1.14) определена для любого $t \in (0,\infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0,\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу сильной непрерывности полугруппы $U(\bullet)$ и непрерывности функции $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = U\left[\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]\frac{f(s)}{s^\alpha}, \tag{1.17}$$

представляющая собой композицию сильно непрерывной оператор-функции и непрерывной векторной функции, непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[h,\, t]$, где h – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем, что

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0\,. \tag{1.18}$$

Используя оценку (1.10), считая в ней $\omega_\delta < 0$ (см. замечание 1.1), получаем при $s \in (0, t]$

$$\| g_0(s,t) \| \le \left\| U\left[\frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \right\| \frac{\| f(s) \|}{s^\alpha} \le$$

$$\le M_\delta\, N(t) \frac{1}{s^\alpha} \exp\left[\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right]. \tag{1.19}$$

Итак,

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta\, N(t) \exp\left(\frac{-\omega_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) h(s)\,, \tag{1.20}$$

где

$$h(s) = \frac{1}{s^\alpha} \exp\left(\frac{\omega_\delta}{\alpha-1} \frac{1}{s^{\alpha-1}} \right).$$

В силу равенства (I.1.20)

$$\lim_{s \to +0} h(s) = 0\,. \tag{1.21}$$

Из соотношений (1.20), (1.21) следует равенство (1.18).

Используя равенство (1.18), доопределим функцию $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0\,. \tag{1.22}$$

Итак, точка $s = 0$ является устранимой точкой разрыва подынтегральной функции $g_0(s,t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^t g_0(s,t)\, ds$, т.е. существование функции (1.14). Запишем оценку (1.19) в виде

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta\, N(t) v(s,t)\,, \tag{1.23}$$

где

$$v(s,t) = \frac{1}{s^{\alpha}} \exp\left[\frac{\omega_{\delta}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right].$$

Имеем

$$\int_0^t v(s,t)\,ds = -\frac{1}{\omega_{\delta}} \int_0^t \exp\left[\frac{\omega_{\delta}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right] d\left[\frac{\omega_{\delta}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\omega_{\delta}} \exp\left[\frac{\omega_{\delta}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]\Bigg|_0^t =$$

$$= -\frac{1}{\omega_{\delta}} + \frac{1}{\omega_{\delta}} \lim_{s\to+0} \exp\left[\frac{\omega_{\delta}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right] = -\frac{1}{\omega_{\delta}}.$$

Получили равенство

$$\int_0^t v(s,t)\,ds = -\frac{1}{\omega_{\delta}}. \tag{1.24}$$

В силу соотношений (1.23), (1.24)

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds \le \frac{M_{\delta}}{-\omega_{\delta}} N(t),$$

следовательно, справедлива оценка

$$\| x_0(t) \| \le \frac{M_{\delta}}{-\omega_{\delta}} N(t), \tag{1.25}$$

из которой видно, что функция (1.14) ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то из неравенства (1.25) следует ограниченность функции (1.14) на $(0,\infty)$. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда при любом фиксированном $\alpha > 1$, $\omega < 0$ и выполнении неравенства (1.12) справедлив предельный переход (1.13), где $x_{\varepsilon}(t)$, $x_0(t)$ задаются соответственно формулами (1.11), (1.14).

Доказательство. Покажем вначале, что при каждом $t \in (0,\infty)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[H_{\varepsilon}(t)\, x_{\varepsilon,0}\right] = 0, \tag{1.26}$$

где

$$H_\varepsilon(t) = U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right]. \qquad (1.27)$$

Имеем

$$\left\| H_\varepsilon(t)\, x_{\varepsilon,0} \right\| \le \left\| H_\varepsilon(t) \right\| \left\| x_{\varepsilon,0} \right\|. \qquad (1.28)$$

Используя оценку (1.10), считая в ней $\omega_\delta < 0$, получаем

$$\left\| H_\varepsilon(t) \right\| \le M_\delta \exp\left[\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right] =$$

$$= M_\delta \exp\left(\frac{-\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\exp\left(\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right) \le$$

$$\le M_\delta \exp\left(\frac{-\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\exp\left(\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right).$$

Итак,

$$\left\| H_\varepsilon(t) \right\| \le M_\delta \exp\left(\frac{-\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\exp\left(\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right). \qquad (1.29)$$

В силу соотношений (1.12), (1.28), (1.29)

$$\left\| H_\varepsilon(t)\, x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_\delta \exp\left(\frac{-\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\frac{L_0}{\varepsilon^H}\exp\left(\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right). \qquad (1.30)$$

В силу равенства (I.1.20) справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon^H}\exp\left(\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right)\right] = 0. \qquad (1.31)$$

Из соотношений (1.30), (1.31) следует равенство (1.26).

В силу равенства (1.26) для доказательства предельного перехода (1.13) осталось показать, что при любом фиксированном $t \in (0,\infty)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\, ds = \int_0^t g_0(s,t)\, ds, \qquad (1.32)$$

т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left[\, g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\right] ds = 0\,, \tag{1.33}$$

где

$$g_\varepsilon(s,t)=U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\varepsilon)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha-1}}\right)\right]\frac{f(s)}{(s+\varepsilon)^{\alpha}}\,,$$

а функция $g_0(s,t)$ задается формулой (1.17). Напомним, что $g_0(s,t)$ доопределена по непрерывности в нуле: $g_0(0,t)=0$ (см. формулу (1.22)). Для справедливости равенства (1.33) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left\| g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\right\| ds = 0\,. \tag{1.34}$$

Как и при доказательстве леммы I.1.3, для справедливости соотношения (1.34) достаточно показать, что подынтегральная функция

$$\psi_\varepsilon(s,t)=\left\| g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\right\|,\ s\in[\,0,t\,]\,,$$

удовлетворяет условиям вида (I.1.43), (I.1.44).

Покажем, что выполняется условие вида (I.1.45), что будет означать справедливость соотношения вида (I.1.43). При $s\in(\,0,t\,]$ равенство вида (I.1.45) выполняется в силу непрерывности функции $g_\varepsilon(s,t)$ по переменной ε на промежутке $[\,0,\varepsilon_0\,]$, в частности, в точке $\varepsilon=0$.Покажем справедливость предельного перехода вида (I.1.45) при $s=0$. Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(0,t)=0\,, \tag{1.35}$$

ибо $g_0(0,t)=0$ (см. формулу (1.22)). Имеем

$$g_\varepsilon(0,t)=H_\varepsilon(t)\frac{f(0)}{\varepsilon^{\alpha}}\,,$$

где $H_\varepsilon(t)$ задается формулой (1.27). Используя оценку (1.29), получаем

$$\left\| g_\varepsilon(0,t)\right\| \le M_\delta \left\| f(0)\right\| \exp\left(\frac{-\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\,\exp\left(\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right). \tag{1.36}$$

Из соотношений (1.31), (1.36) следует равенство (1.35). Выполнимость условия вида (I.1.43) доказана.

Найдем оценку вида (I.1.44). Запишем разность $g_{\varepsilon}(s,t)-g_0(s,t)$ в виде

$$g_{\varepsilon}(s,t)-g_0(s,t)=\int_0^{\varepsilon}\left[h(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}d\kappa, \qquad (1.37)$$

где

$$h(\kappa,s,t)=U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\kappa)^{\alpha-1}}\right)\right]\frac{f(s)}{(s+\kappa)^{\alpha}}.$$

Найдем $\left[h(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}$. Для этого запишем $h(\kappa,s,t)$ в более кратком виде:

$$h(\kappa,s,t)=U\left[\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{f(s)}{(s+\kappa)^{\alpha}},$$

где

$$\varphi(\kappa,s,t)=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(s+\kappa)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\kappa)^{\alpha-1}}\right).$$

Применяя соотношения (1.6), (1.7) а также правило дифференцирования композиции оператор-функции и векторной функции и проведя такие же выкладки, как при доказательстве леммы I.1.3, получаем формулу

$$\left[h(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa}=W_1+W_2+W_3, \qquad (1.38)$$

где

$$W_1=-AU\left[\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{f(s)}{(s+\kappa)^{2\alpha}};$$

$$W_2=AU\left[\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{f(s)}{(t+\kappa)^{\alpha}(s+\kappa)^{\alpha}};$$

$$W_3=-U\left[\varphi(\kappa,s,t)\right]\frac{\alpha f(s)}{(s+\kappa)^{\alpha+1}}.$$

Используя соотношения (1.37), (1.38), получаем неравенство

$$\|g_{\varepsilon}(s,t)-g_0(s,t)\|\le\int_0^{\varepsilon}\|W_1\|d\kappa+\int_0^{\varepsilon}\|W_2\|d\kappa+\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|d\kappa. \qquad (1.39)$$

В силу условия 2) и формулы (1.8) выражения W_1, W_2 можно записать в виде

$$W_1 = -U\left[\varphi(\kappa, s, t)\right]\frac{A\, f(s)}{(s+\kappa)^{2\alpha}};$$

$$W_2 = U\left[\varphi(\kappa, s, t)\right]\frac{A\, f(s)}{(t+\kappa)^{\alpha}(s+\kappa)^{\alpha}}.$$

Пусть

$$M(t) = \max_{0 \le s \le t}\left\| A\, f(s)\right\|. \qquad (1.40)$$

Применяя оценку (1.10), считая в ней $\omega_\delta < 0$, и проведя те же выкладки, что и при доказательстве леммы I.1.3, получаем неравенство

$$\int_0^\varepsilon \left\|W_1\right\| d\kappa \le m_1\,\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\right)P_1(t), \qquad (1.41)$$

где

$$m_1 = \frac{1}{(\alpha-1)\,k^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}};\quad P_1(t) = M_\delta\, M(t)\exp\left(\frac{k}{t^{\alpha-1}}\right);\quad k = \frac{-\omega_\delta}{\alpha-1};$$

$\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\right)$ – значение гаммы-функции $\Gamma(a)$ при $a = \frac{2\alpha-1}{\alpha-1}$.

Заметим, что

$$W_2 = -\left(\frac{s+\kappa}{t+\kappa}\right)^{\alpha} W_1.$$

Тогда, учитывая неравенство $s \le t$, получаем

$$\left\|W_2\right\| = \left(\frac{s+\kappa}{t+\kappa}\right)^{\alpha}\left\|W_1\right\| \le \left\|W_1\right\|,$$

следовательно,

$$\int_0^\varepsilon \left\|W_2\right\| d\kappa \le \int_0^\varepsilon \left\|W_1\right\| d\kappa$$

а, значит, в силу неравенства (1.41)

$$\int_0^\varepsilon \left\|W_2\right\| d\kappa \le m_1\,\Gamma\left(\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}\right)P_1(t). \qquad (1.42)$$

Проведя такие же рассуждения, как при получении неравенства (1.41), приходим к оценке вида

$$\int_0^{\varepsilon} \| W_3 \| \, d\kappa \le m_3 \, \Gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right) P_3(t) \,, \tag{1.43}$$

где

$$m_3 = \frac{1}{(\alpha-1)\, k^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}} \,; \; P_3(t) = \alpha \, M_\delta \, N(t) \exp\left(\frac{k}{t^{\alpha-1}} \right); \; k = \frac{-\omega_\delta}{\alpha-1} \,.$$

Из соотношений (1.39), (1.41) – (1.43) следует выполнимость условия вида (I.1.44) с $C(t, \varepsilon_0)$, равной сумме правых частей неравенств (1.41) – (1.43). Равенство (1.32) доказано. Из соотношений (1.26), (1.32) вытекает справедливость предельного перехода (1.13). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда при любом фиксированном $\alpha > 1$ и выполнении условия $\omega < 0$ функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (1.14), является решением уравнения (1.1).

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Придадим ему приращение $\Delta t > 0$. Тогда

$$x_0(t+\Delta t) = \int_0^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{f(s)}{s^\alpha} \, ds =$$

$$= \int_0^{t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{f(s)}{s^\alpha} \, ds +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{f(s)}{s^\alpha} \, ds =$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \left[\frac{f(s)}{s^\alpha} - \frac{f(t)}{t^\alpha} \right] ds +$$

$$+ \int_t^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{f(t)}{t^\alpha} \, ds +$$

$$+ U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \int_0^{t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{f(s)}{s^\alpha} \, ds =$$

$$
= \int_t^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]\left[\frac{f(s)}{s^{\alpha}}-\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\right]ds+
$$

$$
+U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]x_0(t)+
$$

$$
+\int_t^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\,ds\,.
$$

Здесь мы воспользовались полугрупповым свойством

$$
U(t_1+t_2)=U(t_1)U(t_2)\,;\quad 0<t_1,\ t_2<\infty\,, \tag{1.44}
$$

в силу которого

$$
U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]=
$$

$$
=U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right].
$$

Используя полученное представление для $x_0(t+\Delta t)$, имеем

$$
\frac{x_0(t+\Delta t)-x_0(t)}{\Delta t}=
$$

$$
=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]\left[\frac{f(s)}{s^{\alpha}}-\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\right]ds+
$$

$$
+\frac{1}{\Delta t}\left[U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]-I\right]x_0(t)+
$$

$$
+\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\,ds\,. \tag{1.45}
$$

Используя оценку (1.10) с $\omega_\delta<0$, получаем

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \left[\frac{f(s)}{s^{\alpha}} - \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \right] ds \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} \left\| U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \right\| \left\| \frac{f(s)}{s^{\alpha}} - \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \right\| ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t} M_{\delta} \int_{t}^{t+\Delta t} \exp\left[\frac{\omega_{\delta}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}} \right) \right] \left\| \frac{f(s)}{s^{\alpha}} - \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \right\| ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t} M_{\delta} \left(\max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{s^{\alpha}} - \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \right\| \right) \int_{t}^{t+\Delta t} ds =$$

$$= M_{\delta} \max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{s^{\alpha}} - \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \right\| \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0 \qquad (1.46)$$

в силу непрерывности функции $f(s)$.

Исследуем поведение второго слагаемого в правой части формулы (1.45) при $\Delta t \to 0$. Покажем, что

$$x_0(t) \in D(A). \qquad (1.47)$$

Для справедливости включения (1.47) достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл вида

$$V_{\alpha}(t) = \int_{0}^{t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{A f(s)}{s^{\alpha}} ds, \qquad (1.48)$$

ибо в силу условия 2), соотношения (1.8) и замкнутости оператора A (см. соотношение (1.9))

$$\int_{0}^{t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{A f(s)}{s^{\alpha}} ds =$$

$$= \int_{0}^{t} A U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{f(s)}{s^{\alpha}} ds = A x_0(t).$$

Для сходимости интеграла (1.48) достаточно, чтобы сходился интеграл

$$W_{\alpha}(t) = \int_{0}^{t} \left\| U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right) \right] \frac{A f(s)}{s^{\alpha}} \right\| ds. \qquad (1.49)$$

Покажем сходимость интеграла (1.49). Используя оценку (1.10) с $\omega_\delta < 0$, получаем

$$W_\alpha(t) \le \int_0^t \left\| U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]\right\| \frac{\|A f(s)\|}{s^\alpha} ds \le$$

$$\le M_\delta M(t) \int_0^t \exp\left[\frac{\omega_\delta}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right] \frac{ds}{s^\alpha}.$$

Тогда, учитывая равенство (1.24), имеем

$$W_\alpha(t) \le \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} M(t),$$

где $M(t)$ определяется формулой (1.40). Сходимость интеграла (1.49) установлена. Справедливость включения (1.47) показана. Положим

$$h(\Delta t) = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right).$$

Заметим, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{t^\alpha}. \qquad (1.50)$$

Действительно, применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{\alpha-1} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}}{\Delta t} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\alpha-1)(t+\Delta t)^{-\alpha}}{1} = \frac{1}{t^\alpha}.$$

Учитывая соотношения (1.5), (1.7), (1.47), (1.50), получаем

$$\frac{U\big(h(\Delta t)\big) - I}{\Delta t}\, x_0(t) = \frac{U\big(h(\Delta t)\big) - U\big(h(0)\big)}{h(\Delta t)}\, \frac{h(\Delta t)}{\Delta t}\, x_0(t) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} U'\big(h(0)\big)\frac{1}{t^\alpha}\, x_0(t) = U'(0)\frac{1}{t^\alpha}\, x_0(t) = \frac{1}{t^\alpha} A x_0(t).$$

Итак,

$$\frac{1}{\Delta t}\left[U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right] - I\right] x_0(t) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{t^\alpha} A x_0(t). \qquad (1.51)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t} U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\,ds \underset{\Delta t\to 0}{\to} \frac{f(t)}{t^{\alpha}}, \qquad (1.52)$$

т.е.

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left[U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]-\mathrm{I}\right]\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\,ds \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0\,. \ (1.53)$$

Используя теорему о среднем значении [19, с. 113], получаем

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left[U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]-I\right]\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\,ds\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left\|\left[U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]-I\right]\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\right\|\,ds=$$

$$=\left\|\left[U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s_*^{\alpha-1}}-\frac{1}{(t+\Delta t)^{\alpha-1}}\right)\right]-I\right]\frac{f(t)}{t^{\alpha}}\right\|\underset{\Delta t\to 0}{\to} 0$$

в силу (1.5) и сильной непрерывности $U(\bullet)$ (здесь $s_*\in[t,t+\Delta t]$), откуда следует соотношение (1.53).

Из соотношений (1.45), (1.46), (1.51), (1.52) следует, что функция $x_0(t)$ дифференцируема в точке t справа и ее правосторонняя производная имеет вид

$$\overset{+}{x_0'}(t)=\frac{1}{t^{\alpha}}Ax_0(t)+\frac{1}{t^{\alpha}}\,f(t)\,. \qquad (1.54)$$

Функция $Ax_0(t)=V_{\alpha}(t)$ непрерывна. Это следует из сильной непрерывности полугруппы $U(\bullet)$, непрерывности $Af(s)$ и того, что при любом $t\in(0,\infty)$ в силу оценки (1.10) с $\omega_{\delta}<0$

$$\left\|U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]\frac{Af(s)}{s^{\alpha}}\right\|\le\left\|U\left[\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]\right\|\frac{\|Af(s)\|}{s^{\alpha}}\le$$

$$\le M_{\delta}\,M(t)\frac{1}{s^{\alpha}}\,\exp\left[\frac{\omega_{\delta}}{\alpha-1}\left(\frac{1}{s^{\alpha-1}}-\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right)\right]\underset{s\to+0}{\to} 0$$

в силу соотношения (1.21). Значит, в силу равенства (1.54) производная $\overset{+}{x}_0'(t)$ непрерывна. Следовательно [8, с. 167], функция $x_0(t)$ непрерывно дифференцируема и справедлива формула

$$x_0'(t) = \frac{1}{t^\alpha} A x_0(t) + \frac{1}{t^\alpha} f(t),$$

из которой следует, что $t^\alpha x_0'(t) = A x_0(t) + f(t)$, т.е. функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Лемма 1.4 доказана.

Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2. При выполнении условий 1), 2) задача (1.2), (1.3) при $\alpha = 1$ и любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) x_{\varepsilon,0} + \int_0^t U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right) \frac{f(s)}{s+\varepsilon}\, ds. \qquad (1.55)$$

При $\omega < -1$ и выполнении условия

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\omega_\delta} \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0 \qquad (1.56)$$

справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t), \; t \in (0, \infty), \qquad (1.57)$$

где

$$x_0(t) = \int_0^t U\left(\ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s}\, ds. \qquad (1.58)$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1) при $\alpha = 1$. Это решение ограничено при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Замечание 1.2. Для выполнимости условия (1.56) достаточно, чтобы для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*] \subset (0, \varepsilon_0]$, где ε_* – произвольное сколь угодно малое положительное число, не превосходящее ε_0, выполнялось неравенство

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \le L_0\, \varepsilon^{\omega_\delta + \rho},$$

где $L_0 = \text{const}$, $L_0 > 0$; ρ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Теорема 1.2 справедлива в силу лемм 1.5 – 1.8, изложенных ниже.

Лемма 1.5. При выполнении условий 1), 2) задача (1.2), (1.3) при $\alpha = 1$ и любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение вида (1.55).

Доказательство. Как и при доказательстве леммы I.1.5, задача (1.2), (1.3) сводится с помощью замены переменной $t = \varepsilon e^{\tau} - \varepsilon$ к задаче вида (I.1.65), (I.1.66), т.е. к стандартной задаче Коши вида (I.1.16), (I.1.17). Применяя формулу (1.15), получаем решение вида (1.16). После замены переменной $\mu = \ln \dfrac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$ в интеграле в правой части формулы (1.16) и возвращения к прежней переменной t формула (1.16) принимает вид (1.55). Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. При выполнении условия $\omega < -1$ функция (1.58) определена для любого $t \in (0, \infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу сильной непрерывности полугруппы $U(\bullet)$ и непрерывности функции $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = U\left(\ln \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} \tag{1.59}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[h, t]$, где h – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем, что

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0 . \tag{1.60}$$

Используя оценку (1.10), считая в ней $\omega_\delta < -1$, получаем при $s \in (0, t]$

$$\| g_0(s,t) \| \le \left\| U\left(\ln \frac{t}{s}\right) \right\| \frac{\| f(s) \|}{s} \le M_\delta \, N(t) \exp\left(\omega_\delta \ln \frac{t}{s}\right) \frac{1}{s} =$$

$$= M_\delta \, N(t) t^{\omega_\delta} s^{-1-\omega_\delta} \underset{s \to +0}{\longrightarrow} 0 , \tag{1.61}$$

ибо $-1 - \omega_\delta > 0$. Из соотношения (1.61) следует равенство (1.60). Используя это равенство, доопределим функцию $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0 . \tag{1.62}$$

Итак, точка $s=0$ является устранимой точкой разрыва функции $g_0(s,t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^t g_0(s,t)\,ds$, т.е. существование функции $x_0(t)$.

Далее, используя соотношение (1.61), получаем

$$\int\limits_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds \le M_\delta \, N(t) t^{\omega_\delta} \int\limits_0^t s^{-1-\omega_\delta} ds =$$

$$= M_\delta \, N(t) t^{\omega_\delta} \left. \frac{s^{-\omega_\delta}}{-\omega_\delta} \right|_0^t = \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \, .$$

Получено неравенство

$$\int\limits_0^t \| g_0(s,t) \| \, ds \le \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \, ,$$

из которого следует оценка

$$\| x_0(t) \| \le \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \, . \qquad (1.63)$$

Из неравенства (1.63) видно, что функция (1.58) ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то в силу неравенства (1.63) $x_0(t)$ ограничена на $(0,\infty)$. Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда при выполнении условия $\omega < -1$ и соотношения (1.56) справедлив предельный переход (1.57), где $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ задаются соответственно формулами (1.55), (1.58).

Доказательство. Покажем вначале, что при каждом $t \in (0,\infty)$

$$U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \, . \qquad (1.64)$$

Применяя оценку (1.10) и используя условие (1.56), получаем

$$\left\| U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le \left\| U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right\| \| x_{\varepsilon,0} \| \le$$

$$\le M_\delta \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\omega_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \| = M_\delta (t+\varepsilon)^{\omega_\delta} \varepsilon^{-\omega_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \| \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \, ,$$

откуда следует соотношение (1.64). Как и при доказательстве леммы I.1.7, для справедливости предельного перехода (1.57) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \, ds = 0 \,, \tag{1.65}$$

где

$$g_\varepsilon(s,t) = U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right) \frac{f(s)}{s+\varepsilon} \,,$$

а $g_0(s,t)$ задается формулой (1.59). Запишем разность $g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon \left[h(\kappa, s, t) \right]'_\kappa d\kappa \,, \tag{1.66}$$

где

$$h(\kappa, s, t) = U\left(\ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right) \frac{f(s)}{s+\kappa} \,.$$

Используя условие 2), соотношение (1.7) и проведя такие же выкладки, как при доказательстве леммы I.1.7, получаем формулу

$$\left[h(\kappa, s, t) \right]'_\kappa = W_1 + W_2 \,, \tag{1.67}$$

где

$$W_1 = -AU\left(\ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right) \frac{t-s}{t+\kappa} \frac{f(s)}{(s+\kappa)^2} \,;$$

$$W_2 = -U\left(\ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right) \frac{f(s)}{(s+\kappa)^2} \,.$$

Используя соотношения (1.66), (1.67), получаем неравенство

$$\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \le \int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa + \int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \,.$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \, ds \le \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \right] ds + \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \right] ds \,. \tag{1.68}$$

В силу условия 2) и формулы (1.8) выражение W_1 можно записать в виде

$$W_1 = -U\left(\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{t-s}{t+\kappa}\,\frac{A\,f(s)}{(s+\kappa)^2}\,.$$

Используя оценку (1.10), считая в ней $\omega_\delta < -1$, и проведя те же выкладки, что и при доказательстве леммы I.1.7, получаем

$$\int_0^t\left[\int_0^\varepsilon \|W_1\|\,d\kappa\right]ds \le \frac{P_1(t)}{-\omega_\delta}\left\{(t+\varepsilon)\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-\omega_\delta}\right]-t\right\}\underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\,, \quad (1.69)$$

где

$$P_1(t) = \frac{M_\delta}{-1-\omega_\delta}\,M(t)\,,$$

$M(t)$ задается формулой (1.40). Из соотношения (1.69) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left[\int_0^\varepsilon \|W_1\|\,d\kappa\right]ds = 0\,. \quad (1.70)$$

Аналогично получаем

$$\int_0^t\left[\int_0^\varepsilon \|W_2\|\,d\kappa\right]ds \le \frac{P_2(t)}{-\omega_\delta}\int_0^t\left[(t+\varepsilon)^{-\omega_\delta}-\varepsilon^{-\omega_\delta}-t^{-\omega_\delta}\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\,, \quad (1.71)$$

где

$$P_2(t) = \frac{M_\delta}{-1-\omega_\delta}\,N(t)\,t^{\omega_\delta}\,.$$

В силу соотношения (1.71)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left[\int_0^\varepsilon \|W_2\|\,d\kappa\right]ds = 0\,. \quad (1.72)$$

Из соотношений (1.68), (1.70), (1.72) следует соотношение (1.65). Лемма 1.7 доказана.

Лемма 1.8. При выполнении условий 1), 2) и неравенства $\omega < -1$ функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (1.58), является решением уравнения (1.1) при $\alpha = 1$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Придадим ему приращение $\Delta t > 0$. Тогда

$$x_0(t+\Delta t) = \int\limits_0^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^{t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds + \int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\left[\frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right]ds +$$

$$+ \int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\frac{f(t)}{t}\,ds +$$

$$+ U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{t}\right)\int\limits_0^{t} U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds =$$

$$= \int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\left[\frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right]ds + U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{t}\right)x_0(t) +$$

$$+ \int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\frac{f(t)}{t}\,ds\,.$$

Здесь мы воспользовались равенством

$$U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right) = U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{t}\right)U\left(\ln\frac{t}{s}\right),$$

справедливым в силу полугруппового свойства (1.44).
Используя полученное представление для $x_0(t+\Delta t)$, имеем

$$\frac{x_0(t+\Delta t) - x_0(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\left[\frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right]ds +$$

$$+ \frac{U\left(\ln\dfrac{t+\Delta t}{t}\right) - I}{\Delta t}\,x_0(t) + \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\frac{f(t)}{t}\,ds\,. \qquad (1.73)$$

Используя оценку (1.10) с $\omega_\delta < -1$, получаем

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\left[\frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right] ds \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} \left\| U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\right\| \left\| \frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right\| ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t} \int\limits_t^{t+\Delta t} M_\delta \left(\frac{t+\Delta t}{s}\right)^{\omega_\delta} \left\| \frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right\| ds \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t} M_\delta \left(\max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right\| \right) \int\limits_t^{t+\Delta t} ds =$$

$$= M_\delta \max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{s} - \frac{f(t)}{t}\right\| \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad (1.74)$$

в силу непрерывности функции $f(s)$.

Выясним поведение второго слагаемого в правой части формулы (1.73) при $\Delta t \to 0$. Покажем, что

$$x_0(t) \in D(A). \qquad (1.75)$$

Для справедливости включения (1.75) достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл вида

$$V_1(t) = \int\limits_0^t U\left(\ln\frac{t}{s}\right) \frac{A f(s)}{s}\, ds, \qquad (1.76)$$

ибо в силу условия 2), соотношения (1.8) и замкнутости оператора A

$$\int\limits_0^t U\left(\ln\frac{t}{s}\right) \frac{A f(s)}{s}\, ds = \int\limits_0^t A U\left(\ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s}\, ds = A x_0(t).$$

Для сходимости интеграла (1.76) достаточно, чтобы сходился интеграл

$$W_1(t) = \int\limits_0^t \left\| U\left(\ln\frac{t}{s}\right) \frac{A f(s)}{s}\right\| ds. \qquad (1.77)$$

Покажем сходимость интеграла (1.77). Используя оценку (1.10) с $\omega_\delta < -1$, получаем

$$W_1(t) \le \int_0^t \left\| U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\right\| \frac{\|A\,f(s)\|}{s}\,ds \le$$

$$\le M_\delta\,M(t)\int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{\omega_\delta}\frac{ds}{s} = M_\delta\,M(t)\,t^{\omega_\delta}\,\frac{s^{-\omega_\delta}}{-\omega_\delta}\Bigg|_0^t = \frac{M_\delta}{-\omega_\delta}\,M(t)\,,$$

где $M(t)$ задается формулой (1.40). Справедливость включения (1.75) установлена. Положим

$$h(\Delta t) = \ln\frac{t+\Delta t}{t}\,.$$

Заметим, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{1}{t}\,. \qquad (1.78)$$

Учитывая соотношения (1.5), (1.7), (1.75), (1.78), получаем

$$\frac{U\left(\ln\dfrac{t+\Delta t}{t}\right)-I}{\Delta t}\,x_0(t) = \frac{U\big(h(\Delta t)\big)-U\big(h(0)\big)}{h(\Delta t)}\,\frac{h(\Delta t)}{\Delta t}\,x_0(t) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} U'\big(h(0)\big)\frac{1}{t}\,x_0(t) = U'(0)\frac{1}{t}x_0(t) = \frac{1}{t}A\,x_0(t)\,.$$

Итак,

$$\frac{U\left(\ln\dfrac{t+\Delta t}{t}\right)-I}{\Delta t}\,x_0(t) \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{t}A\,x_0(t)\,. \qquad (1.79)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)\frac{f(t)}{t}\,ds \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{f(t)}{t}\,. \qquad (1.80)$$

В силу равенства

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\frac{f(t)}{t}\,ds$$

для справедливости (1.80) достаточно показать, что

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left[U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)-I\right]\frac{f(t)}{t}\,ds \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0\,. \tag{1.81}$$

Используя теорему о среднем значении, получаем

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left[U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)-I\right]\frac{f(t)}{t}\,ds\right\|\le$$

$$\le\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t}^{t+\Delta t}\left\|\left[U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s}\right)-I\right]\frac{f(t)}{t}\right\|ds=$$

$$=\left\|\left[U\left(\ln\frac{t+\Delta t}{s_*}\right)-I\right]\frac{f(t)}{t}\right\|\underset{\Delta t\to 0}{\to} 0$$

в силу (1.5) и сильной непрерывности $U(\bullet)$ (здесь $s_*\in[t,t+\Delta t]$), откуда следует соотношение (1.81).

Из соотношений (1.73), (1.74), (1.79), (1.80) следует, что функция $x_0(t)$ дифференцируема в точке t справа и ее правосторонняя производная имеет вид

$$\overset{+}{x_0'}(t)=\frac{1}{t}Ax_0(t)+\frac{1}{t}\,f(t)\,. \tag{1.82}$$

Функция $Ax_0(t)=V_1(t)$ непрерывна. Это следует из сильной непрерывности полугруппы $U(\bullet)$, непрерывности $Af(s)$ и того, что при любом $t\in(0,\infty)$ в силу оценки (1.10) с $\omega_\delta<-1$

$$\left\|U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{Af(s)}{s}\right\|\le\left\|U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\right\|\frac{\|Af(s)\|}{s}\le$$

$$\le M_\delta\,M(t)\left(\frac{t}{s}\right)^{\omega_\delta}\frac{1}{s}=M_\delta\,M(t)\,t^{\omega_\delta}s^{-1-\omega_\delta}\underset{s\to+0}{\to}0\,.$$

Тогда в силу равенства (1.82) производная $\overset{+}{x_0'}(t)$ непрерывна. Следовательно (см. доказательство леммы 1.4), функция $x_0(t)$ непрерывно дифференцируема и справедлива формула

$$x_0'(t)=\frac{1}{t}Ax_0(t)+\frac{1}{t}\,f(t)\,,$$

из которой следует, что $t\,x_0'(t) = A\,x_0(t) + f(t)$, т.е. функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1) при $\alpha = 1$. Лемма 1.8 доказана.

Теорема 1.2 доказана.

Рассмотрим случай слабой вырождаемости уравнения (1.1), т.е. случай $0 < \alpha < 1$. Для нахождения ограниченных в точке вырождения $t = 0$ решений уравнения (1.1) рассмотрим задачу вида

$$t^{\alpha} x'(t) = Ax(t) + f(t),\ 0 < t < \infty, \tag{1.83}$$

$$\lim_{t \to +0} x(t) = x_0,\ x_0 \in D(A). \tag{1.84}$$

Теорема 1.3. При выполнении условий 1), 2) задача (1.83), (1.84) при $0 < \alpha < 1$ имеет решение

$$x(t) = U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) x_0 + \int_0^t U\left(\frac{t^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \frac{f(s)}{s^{\alpha}}\, ds. \tag{1.85}$$

Если тип ω полугруппы $U(t)$ отрицателен и функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то решение (1.85) ограничено на $(0, \infty)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы I.1.3, заменой переменной

$$t = \left[(1-\alpha)\tau\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

уравнение (1.83) сводится к уравнению без вырождения:

$$u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau),\ 0 < \tau < \infty.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$u'(\tau) = Au(\tau) + g(\tau),\ 0 \le \tau < \infty;$$
$$u(0) = x_0.$$

Согласно формуле (1.15) эта задача имеет единственное решение

$$u(\tau) = U(\tau)\, x_0 + \int_0^t U(\tau - \mu)\, g(\mu)\, d\mu.$$

Возвращаясь при $0 < \tau < \infty$ к переменной t, получаем формулу (1.85). Используя непрерывность решения $u(\tau)$, имеем

$$\lim_{t \to +0} x(t) = \lim_{\tau \to +0} u(\tau) = u(0) = x_0,$$

т.е. решение (1.85) удовлетворяет начальному условию (1.84).

Далее,

$$\| x(t) \| \le \left\| U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \right\| \| x_0 \| + \int_0^t \left\| U\left(\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \right\| \frac{\| f(s) \|}{s^{\alpha}}\, ds .$$

Пусть $\omega < 0$. Тогда, применяя оценку (1.10) с $\omega_\delta < 0$, получаем

$$\| x(t) \| \le M_\delta \exp\left(\frac{\omega_\delta}{1-\alpha}\, t^{1-\alpha}\right) \| x_0 \| +$$

$$+ M_\delta\, N(t) \int_0^t \exp\left(\omega_\delta \frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \frac{ds}{s^{\alpha}} . \tag{1.86}$$

Заметим, что

$$\int_0^t \exp\left(\omega_\delta \frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) \frac{ds}{s^{\alpha}} = \frac{1}{-\omega_\delta} \exp\left(\omega_\delta \frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{1}{-\omega_\delta}\left[1-\exp\left(\frac{\omega_\delta}{1-\alpha}\, t^{1-\alpha}\right)\right] < \frac{1}{-\omega_\delta} . \tag{1.87}$$

В силу соотношений (1.86), (1.87)

$$\| x(t) \| < M_\delta \| x_0 \| + \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) ,\ 0 < t < \infty . \tag{1.88}$$

Из неравенства (1.88) видно, что если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то решение (1.85) ограничено на $(0,\infty)$.

Теорема 1.3 доказана.

Замечание 1.3. Если $f(t) \equiv f$, $0 \le t < \infty$, $f \in R(A)$ и оператор A обратим, то решение (1.85) можно записать в виде

$$x(t) = -A^{-1} f + U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\left(x_0 + A^{-1} f\right). \tag{1.89}$$

Действительно, в этом случае, используя соотношения (1.7), (1.8), имеем

$$\int_0^t U\left(\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f}{s^\alpha}\,ds = \left|\mu = \frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right| = \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} U(\mu)\ f\,d\mu =$$

$$= \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} U(\mu)\ A(A^{-1}f)\,d\mu = \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} AU(\mu)(A^{-1}f)\,d\mu =$$

$$= \int_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \left[U(\mu)(A^{-1}f)\right]' d\mu = U(\mu)(A^{-1}f)\Big|_0^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} = U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)A^{-1}f - A^{-1}f\ .$$

Получили равенство

$$\int_0^t U\left(\frac{t^{1-\alpha}-s^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)\frac{f}{s^\alpha}\,ds = -A^{-1}f + U\left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)A^{-1}f\ ,$$

в силу которого решение (1.85) принимает вид (1.89).

Замечание 1.4. Если $f(t)\equiv f$, $0\le t<\infty$; $f\in R(A)$ и оператор A обратим, то задача (1.83), (1.84) с начальным значением $x_0=-A^{-1}f$ имеет стационарное решение $x(t)=-A^{-1}f$.

§ 2. Уравнение с вырождающимся коэффициентом общего вида

В банаховом пространстве E изучается вырождающееся в точке $t=0$ уравнение

$$\varphi(t)\,x'(t) = A\,x(t) + f(t)\,,\ 0<t<\infty\,, \tag{2.1}$$

с неограниченным линейным оператором $A: D(A)\subset E\to E$; $f(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$; $\varphi(t)\in C\big((0,\infty);(0,\infty)\big)$, $\varphi(+0)=0$.

Рассмотрим задачу Коши для возмущенного уравнения:

$$\varphi(t+\varepsilon)x'_\varepsilon(t) = Ax_\varepsilon(t) + f(t)\,,\ 0\le t<\infty\,, \tag{2.2}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\,,\ x_{\varepsilon,0}\in D(A)\,, \tag{2.3}$$

где ε – малый положительный параметр, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=\text{const}$, $\varepsilon_0>0$.

Пусть:

1) A – производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса C_0;

2) $f(t) \in D(A)$, $0 \leq t < \infty$; $A\,f(t) \in C\big([0,\infty); E\big)$;

3) существует конечный предел

$$\lim_{t \to +0} \frac{\varphi(t)}{t^{\alpha}} = K\,, \tag{2.4}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$; $K = \text{const}$, $K > 0$;

4) $\omega < 0$ в случае $\alpha > 1$, $\omega < -K$ в случае $\alpha = 1$, где ω – тип полугруппы $U(t)$, K – константа из условия 3);

5) выполняется неравенство

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \leq L\,\varepsilon^{-\beta}, \ \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_*] \subset (0,\varepsilon_0]\,, \tag{2.5}$$

где ε_* – сколь угодно малое положительное число, меньшее ε_0; $L = \text{const}$, $L > 0$; β – положительное число, удовлетворяющее условию $\beta \leq \alpha$ (здесь α – константа из условия 3)).

При выполнении условия 3) будем называть уравнение (2.1) сильно вырождающимся. Если условие 3) выполняется при $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, то уравнение (2.1) называется слабо вырождающимся.

Пусть

$$I_{\varepsilon}(s,t) = \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau+\varepsilon)}\,; \quad I_0(s,t) = \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\,.$$

Теорема 2.1. При выполнении условий 1) – 3) задача (2.2), (2.3) имеет решение

$$I_{\varepsilon}(t) = U\big(I_{\varepsilon}(0,t)\big)\,x_{\varepsilon,0} + \int_0^t U\big(I_{\varepsilon}(s,t)\big)\,\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}\,ds\,. \tag{2.6}$$

При выполнении условий 4), 5) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_{\varepsilon}(t) = I_0(t)\,,\ t \in (0,\infty)\,, \tag{2.7}$$

где

$$I_0(t) = \int_0^t U\big(I_0(s,t)\big)\,\frac{f(s)}{\varphi(s)}\,ds\,. \tag{2.8}$$

Предельная функция $I_0(t)$ является решением уравнения (2.1); это решение ограничено при $t \to +0$; если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $I_0(t)$ ограничено на $(0,\infty)$.

Теорема 2.1 справедлива в силу лемм 2.1 – 2.5, изложенных ниже.

Лемма 2.1. При выполнении условий 1) – 3) функция (2.6) является решением задачи (2.2), (2.3). Если $\omega < 0$ и $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то это решение ограничено на $[0,\infty)$.

Доказательство. Заметим, что $I_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}$, т.е. $I_\varepsilon(t)$ удовлетворяет начальному условию (2.3). Применяя правило дифференцирования сложной функции, формулу для производной от интеграла с переменным верхним пределом и соотношение (1.7), получаем

$$\left[U\left(I_\varepsilon(0,\,t)\right)x_{\varepsilon,0}\right]' = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\,A\,U\left(I_\varepsilon(0,\,t)\right)x_{\varepsilon,0}\,. \tag{2.9}$$

Рассмотрим подынтегральную функцию

$$g_\varepsilon(s,t) = U\left(I_\varepsilon(s,t)\right)\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}\,. \tag{2.10}$$

В силу непрерывности функции $I_\varepsilon(s,t)$ по переменным s и t как интеграла с переменным пределом, сильной непрерывности полугруппы $U(\bullet)$ и непрерывности функции $f(s)/\varphi(s+\varepsilon)$ функция $g_\varepsilon(s,t)$ непрерывна по s и t как композиция операторной и векторной функций. Тогда, используя равенство (1.7), получаем

$$[\,g_\varepsilon(s,t)\,]'_t = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\,A\,U\left(I_\varepsilon(s,t)\right)\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)} \tag{2.11}$$

или в силу (1.8)

$$[\,g_\varepsilon(s,t)\,]'_t = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\,U\left(I_\varepsilon(s,t)\right)\frac{A\,f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}\,. \tag{2.12}$$

В силу сильной непрерывности $U(\bullet)$ и непрерывности $A\,f(s)$ из (2.12) следует, что $[\,g_\varepsilon(s,t)\,]'_t$ непрерывна по s и t. Используя формулу (I.1.6), соотношение (2.11) и замкнутость оператора A (см. соотношение (1.9)), получаем

$$\left[\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds\right]' = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\left[A\int_0^t U\left(I_\varepsilon(s,t)\right)\frac{f(s)}{\varphi(s+\varepsilon)}\,ds + f(t)\right]. \tag{2.13}$$

В силу соотношений (2.9), (2.13)

$$I'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varphi(t+\varepsilon)}\left[A\, x_\varepsilon(t) + f(t)\right].$$

Тогда $\varphi(t+\varepsilon)\, I'_\varepsilon(t) = A\, x_\varepsilon(t) + f(t)$, т.е $I_\varepsilon(t)$ является решением уравнения (2.2). Итак, функция (2.6) является решением задачи (2.2), (2.3).

Пусть $\omega < 0$ и $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$. Покажем, что решение $I_\varepsilon(t)$ ограничено на $[0,\infty)$. Имеем

$$\| I_\varepsilon(t) \| \le \| U(I_\varepsilon(0,t)) \| \; \| x_{\varepsilon,0} \| + \int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) \| ds . \tag{2.14}$$

Применяя оценку (1.10), считая ней $\omega_\delta < 0$, получаем

$$\| U(I_\varepsilon(0,t)) \| \le M_\delta \exp(\omega_\delta\, I_\varepsilon(0,t)) \le M_\delta . \tag{2.15}$$

Далее,

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) \| ds \le \int_0^t \| U(I_\varepsilon(s,t)) \| \frac{\| f(s) \|}{\varphi(s+\varepsilon)}\, ds \le$$

$$\le M_\delta\, N(t) \int_0^t \exp(\omega_\delta\, I_\varepsilon(s,t)) \frac{ds}{\varphi(s+\varepsilon)} =$$

$$= \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \exp(\omega_\delta\, I_\varepsilon(s,t)) \Big|_0^t =$$

$$= \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \left[1 - \exp(\omega_\delta\, I_\varepsilon(0,t))\right] < \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) .$$

Получили неравенство

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) \| ds < \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) . \tag{2.16}$$

В силу соотношений (2.14) – (2.16) справедлива оценка

$$\| I_\varepsilon(t) \| \le M_\delta \, \| x_{\varepsilon,0} \| + \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) ,$$

из которой видно, что если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то решение $I_\varepsilon(t)$ ограничено на $[0,\infty)$. Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия 1) – 3) и $\omega < 0$. Тогда функция (2.8) определена при любом $t \in (0, \infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $I_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу сильной непрерывности $U(\bullet)$ и непрерывности $f(s)$, $\varphi(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = U\big(I_0(s,t)\big)\,\frac{f(s)}{\varphi(s)} \tag{2.17}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[h, t]$, где h – произвольное сколь угодно малое положительное число. Тогда для сходимости несобственного интеграла

$$I_0(t) = \int_0^t g_0(s,t)\, ds \tag{2.18}$$

достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds\,. \tag{2.19}$$

Из условия 3) следует, что при любом фиксированном $t \in (0, \infty)$

$$I_0(0,t) = \infty\,. \tag{2.20}$$

Применяя оценку (1.10) с $\omega_\delta < 0$, получаем

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| ds \le \int_0^t \big\| U\big(I_0(s,t)\big) \big\|\,\frac{\| f(s) \|}{\varphi(s)}\, ds \le$$

$$\le M_\delta\, N(t) \int_0^t \exp\big(\omega_\delta\, I_0(s,t)\big)\frac{ds}{\varphi(s)} = \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t)\, \exp\big(\omega_\delta\, I_0(s,t)\big)\Big|_0^t =$$

$$= \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t)\left[1 - \lim_{s \to +0} \exp\big(\omega_\delta\, I_0(s,t)\big)\right] = \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t)\,,$$

так как в силу соотношения (2.20) $\lim\limits_{s \to +0} \exp\big(\omega_\delta\, I_0(s,t)\big) = 0$.

Итак, справедливо неравенство

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| ds \le \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t)\,,$$

из которого следуют сходимость интеграла (2.19) и, тем самым, сходимость интеграла (2.18), а также оценка

$$\| I_0(t) \| \le \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t)\,,\ t \in (0,\infty)\,, \tag{2.21}$$

из которой следует ограниченность $I_0(t)$ при $t \to +0$. Если $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то в силу неравенства (2.21) $I_0(t)$ ограничена на $(0,\infty)$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. При выполнении условий 1) – 4) подынтегральная функция (2.17) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0\,,\ t \in (0,\infty)\,. \tag{2.22}$$

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу оценки (1.10)

$$\| g_0(s,t) \| \le M_\delta\ N(t)\ \kappa_0(s,t)\,, \tag{2.23}$$

где

$$\kappa_0(s,t) = \frac{1}{\varphi(s)} \exp\bigl(\omega_\delta\, I_0(s,t)\bigr)\,.$$

Поэтому для справедливости соотношения (2.22) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \kappa_0(s,t) = 0\,. \tag{2.24}$$

В силу условия (2.4)

$$\lim_{s \to +0} \kappa_0(s,t) = \frac{1}{K} \lim_{s \to +0} \chi(s,t)\,,$$

где

$$\chi(s,t) = \frac{1}{s^\alpha} \exp\bigl(\omega_\delta\, I_0(s,t)\bigr).$$

Поэтому для справедливости равенства (2.24) достаточно показать, что

$$\lim_{s \to +0} \chi(s,t) = 0 \tag{2.25}$$

или что

$$\lim_{s \to +0} \ln \chi(s,t) = -\infty\,. \tag{2.26}$$

Имеем

$$\lim_{s \to +0} \ln \chi(s,t) = \lim_{s \to +0} \left[\left(\alpha + \omega_\delta \frac{I_0(s,t)}{\ln(1/s)} \right) \ln \frac{1}{s} \right]. \tag{2.27}$$

Пусть $\alpha > 1$. Тогда из условия 3) следует, что для любого фиксированного $t > 0$ при $s \to +0$ справедливо соотношение (I.2.25), в силу которого

$$\lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\ln(1/s)} = \infty . \tag{2.28}$$

В силу условия 4) можно считать, что $\omega_\delta < 0$, и соотношение (2.26) следует из равенств (2.27), (2.28). Равенство (2.22) в случае $\alpha > 1$ доказано.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда из условия 3) следует, что для любого фиксированного $t > 0$ при $s \to +0$ справедливо соотношение (I.2.26), в силу которого

$$\lim_{s \to +0} \frac{I_0(s,t)}{\ln(1/s)} = \frac{1}{K},$$

следовательно,

$$\lim_{s \to +0} \left(1 + \omega_\delta \frac{I_0(s,t)}{\ln(1/s)} \right) = 1 + \frac{\omega_\delta}{K} . \tag{2.29}$$

По условию 4) имеем $\omega < -K$. Тогда за счет выбора δ можно считать, что $\omega_\delta < -K$, следовательно,

$$1 + \frac{\omega_\delta}{K} < 0 . \tag{2.30}$$

Из соотношений (2.27), (2.29), (2.30) следует справедливость соотношения (2.26), а вместе с тем и равенства (2.22) при $\alpha = 1$. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. При выполнении условий 1) – 5) справедлив предельный переход (2.7), где $I_\varepsilon(t)$, $I_0(t)$ задаются соответственно формулами (2.6), (2.8).

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Покажем вначале, что

$$U\big(I_\varepsilon(0,t)\big)\, x_{\varepsilon,0} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 . \tag{2.31}$$

В силу оценки (1.10)

$$\left\| U\big(I_\varepsilon(0,t)\big)\, x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_\delta \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\!\big(\omega_\delta\, I_\varepsilon(0,t)\big). \tag{2.32}$$

Заметим, что

$$I_\varepsilon(0,t) = I_0(\varepsilon,t) + I_0(t,t+\varepsilon) . \tag{2.33}$$

В силу соотношений (2.32), (2.33)

$$\left\| U\left(I_\varepsilon(0,t)\right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le$$

$$\le M_\delta \exp\left(\omega_\delta I_0(t,t+\varepsilon)\right)\left[\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\left(\omega_\delta I_0(\varepsilon,t)\right)\right]. \qquad (2.34)$$

Заметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \exp\left(\omega_\delta I_0(t,t+\varepsilon)\right) = 1. \qquad (2.35)$$

В силу неравенства (2.5) при достаточно малых ε

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\left(\omega_\delta I_0(\varepsilon,t)\right) \le L\varepsilon^{\alpha-\beta} \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \exp\left(\omega_\delta I_0(\varepsilon,t)\right). \qquad (2.36)$$

В силу соотношения (2.25) и условия $\beta \le \alpha$ правая часть неравенства (2.36) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left[\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \exp\left(\omega_\delta I_0(\varepsilon,t)\right)\right] = 0. \qquad (2.37)$$

Из соотношений (2.34), (2.35), (2.37) следует соотношение (2.31).

В силу соотношения (2.31) для доказательства предельного перехода (2.7) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t g_\varepsilon(s,t)\, ds = \int_0^t g_0(s,t)\, ds. \qquad (2.38)$$

Используя соотношение (2.22), доопределим функцию $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s\to +0} g_0(s,t) = 0. \qquad (2.39)$$

Для справедливости (2.38) достаточно доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \left\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \right\| ds = 0. \qquad (2.40)$$

Как и при доказательстве леммы I.1.3, для справедливости соотношения (2.40) достаточно показать, что подынтегральная функция

$$\psi_\varepsilon(s,t) = \left\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \right\|,\ s \in [0,t],$$

удовлетворяет условиям вида (I.1.43), (I.1.44). Покажем, что выполняется условие вида (I.1.45), что будет означать справедливость соотношения вида (I.1.43). При $s \in (0,t]$ равенство вида (I.1.45) выполняется в силу непрерывности функции $g_\varepsilon(s,t)$ по переменной ε на промежутке $[0, \varepsilon_0]$, в частности, в точке $\varepsilon = 0$. Покажем справедливость предельного перехода вида (I.1.45) при $s = 0$. Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(0, t) = 0\,, \tag{2.41}$$

ибо $g_0(0,t) = 0$ (см. формулу (2.39)). В силу соотношений (1.10), (2.33)

$$\| g_\varepsilon(0,t) \| = \left\| \frac{1}{\varphi(\varepsilon)} U\big(I_\varepsilon(0, t)\big) f(0) \right\| \le$$

$$\le M_\delta \| f(0) \| \exp\big(\omega_\delta I_0(t, t+\varepsilon)\big) \left[\frac{1}{\varphi(\varepsilon)} \exp\big(\omega_\delta I_0(\varepsilon, t)\big) \right]. \tag{2.42}$$

В силу соотношений (2.24), (2.35) правая часть неравенства (2.42) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, откуда следует справедливость соотношения (2.41). Выполнимость условия вида (I.1.43) доказана.

Покажем, что справедлива оценка вида (I.1.44).

Имеем

$$\psi_\varepsilon(s,t) \le \| g_\varepsilon(s,t) \| + \| g_0(s,t) \|\,. \tag{2.43}$$

В силу оценки (1.10) для любых $s \in [0, t]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

$$\| g_\varepsilon(s,t) \| \le M_\delta\, N(t)\, \kappa_\varepsilon(s,t)\,, \tag{2.44}$$

где

$$\kappa_\varepsilon(s,t) = \frac{1}{\varphi(s+\varepsilon)} \exp\big(\omega_\delta I_\varepsilon(s,t)\big).$$

Положим $s + \varepsilon = \xi$. Тогда $\xi \to +0$ при $s \to +0$, $\varepsilon \to 0$. Из этой замены следует, что $\varepsilon = \xi - s$. Тогда

$$I_\varepsilon(s,t) = \int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau + \xi - s)} = \int_\xi^{t+\varepsilon} \frac{dz}{\varphi(z)}$$

и функция $\kappa_\varepsilon(s,t)$ принимает вид

$$\kappa_\varepsilon(s,t) = \frac{1}{\varphi(\xi)} \exp\big(\omega_\delta I_0(\xi, t+\varepsilon)\big).$$

При достаточно малых s и ε выполняется неравенство $\xi < t$. Тогда

$$\kappa_\varepsilon(s,t) = \left[\frac{1}{\varphi(\xi)} \exp\big(\omega_\delta I_0(\xi, t)\big) \right] \exp\big(\omega_\delta I_0(t, t+\varepsilon)\big)$$

и в силу соотношений (2.24), (2.35)

$$\lim_{\substack{s\to +0\\ \varepsilon\to 0}} \kappa_\varepsilon(s,t) = \lim_{\xi\to +0}\left[\frac{1}{\varphi(\xi)}\exp(\omega_\delta I_0(\xi\,,t))\exp(\omega_\delta I_0(t,t+\varepsilon))\right]=0\,.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{s\in[0,t]\\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}} \kappa_\varepsilon(s,t)=K(t,\varepsilon_0)<\infty\,. \tag{2.45}$$

В силу соотношений (2.44), (2.45)

$$\left\| g_\varepsilon(s,t)\right\| \le M_\delta\, N(t)\, K(t,\varepsilon_0)\,,\ s\in[0,t]\,,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]\,. \tag{2.46}$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (2.43). При любом $s\in(0,t]$ для $\left\| g_0(s,t)\right\|$ справедлива оценка (2.23). Из равенства (2.24) следует, что

$$\sup_{s\in(0,t]} \kappa_0(s,t)=K(t)<\infty\,. \tag{2.47}$$

В силу неравенств (2.23), (2.47)

$$\left\| g_0(s,t)\right\| \le M_\delta\, N(t) K(t)\,,\ s\in(0,t]\,. \tag{2.48}$$

Согласно равенству (2.39) $g_0(0,t)=0$. Тогда $\left\| g_0(0,t)\right\| = \left\| 0\right\| = 0$ и вместо неравенства (2.48) можно записать оценку вида

$$\left\| g_0(s,t)\right\| \le M_\delta\, N(t) K(t)\,,\ s\in[0,t]\,. \tag{2.49}$$

В силу соотношений (2.43), (2.46), (2.49) следует оценка

$$\psi_\varepsilon(s,t)\le M_\delta\, N(t)\left[K(t,\varepsilon_0)+K(t)\right],$$

т.е. оценка вида (I.1.44). Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. При выполнении условий 1) – 5) функция $I_0(t)$, задаваемая формулой (2.8), является решением уравнения (2.1).

Доказательство. Покажем, что $I_0(t)$ непрерывно дифференцируема. Возьмем произвольное фиксированное $t>0$. Придадим приращение $\Delta t>0$. В силу полугруппового свойства (1.44)

$$U\left(I_0(s,t+\Delta t)\right)=U\left(I_0(t,t+\Delta t)\right)U\left(I_0(s,t)\right).$$

Тогда

$$\frac{I_0(t+\Delta t)-I_0(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\left[\frac{f(s)}{\varphi(s)}-\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right]ds+$$

$$+\frac{U\left(I_0(t,t+\Delta t)\right)-I}{\Delta t}\, I_0(t)+\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} U\left(\int_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(t)}{\varphi(t)}\,ds\,. \tag{2.50}$$

Применяя оценку (1.10), считая в ней $\omega_\delta < 0$, получаем

$$\left\| \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} U\left(\int_s^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \left[\frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right] ds \right\| \le$$

$$\le \frac{M_\delta}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \exp\left(\omega_\delta \int_s^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \left\| \frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\| ds \le$$

$$\le \frac{M_\delta}{\Delta t} \left[\max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\| \right] \int_t^{t+\Delta t} ds =$$

$$= M_\delta \max_{t \le s \le t+\Delta t} \left\| \frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right\| \underset{\Delta t \to 0}{\to} 0 \qquad (2.51)$$

в силу непрерывности функции $f(s)/\varphi(s)$. Из соотношения (2.51) следует, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} U\left(\int_s^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \left[\frac{f(s)}{\varphi(s)} - \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right] ds \right] = 0 . \qquad (2.52)$$

Выясним поведение второго слагаемого в правой части равенства (2.50) при $\Delta t \to 0$. Покажем, что

$$I_0(t) \in D(A) . \qquad (2.53)$$

Для справедливости включения (2.53) достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл вида

$$V(t) = \int_0^t U\left(I_0(s,t)\right) \frac{A f(s)}{\varphi(s)} ds , \qquad (2.54)$$

ибо в силу условия 2), соотношения (1.8) и замкнутости оператора A справедливо равенство $V(t) = A I_0(t)$. Для сходимости интеграла (2.54) достаточно показать сходимость интеграла

$$W(t) = \int_0^t \left\| U\left(I_0(s,t)\right) \frac{A f(s)}{\varphi(s)} \right\| ds . \qquad (2.55)$$

Используя оценку (1.10) с $\omega_\delta < 0$, обозначение (1.40) и неравенство (2.23), получаем

$$W(t) \le M_\delta M(t) \int_0^t \kappa_0(s,t)\, ds = \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} M(t) \exp\left(\omega_\delta I_0(s,t)\right)\Big|_0^t = \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} M(t) ,$$

откуда следует сходимость интеграла (2.55). Справедливость включения (2.53) показана. Положим

$$h(\Delta t) = I_0(t,\ t+\Delta t)\,.$$

Используя (1.5), (1.7), (2.53), получаем

$$\frac{U\left(I_0(t,t+\Delta t)\right)-I}{\Delta t}\ I_0(t) = \frac{U\big(h(\Delta t)\big)-U\big(h(0)\big)}{h(\Delta t)}\ \frac{h(\Delta t)}{\Delta t}\ I_0(t) \underset{\Delta t\to 0}{\to}$$

$$\underset{\Delta t\to 0}{\to} U'\big(h(0)\big)\frac{1}{\varphi(t)}\ I_0(t) = U'(0)\frac{1}{\varphi(t)} I_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} A\,U(0)\,I_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} A I_0(t)\,.$$

Показано, что

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{U\left(I_0(t,t+\Delta t)\right)-I}{\Delta t}\ I_0(t) = \frac{1}{\varphi(t)} A I_0(t)\,. \qquad (2.56)$$

Покажем, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)\frac{f(t)}{\varphi(t)}\,ds\right] = \frac{f(t)}{\varphi(t)}\,. \qquad (2.57)$$

В силу равенства

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\frac{f(t)}{\varphi(t)}\,ds$$

для справедливости соотношения (2.57) достаточно показать, что

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left[U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}\,ds \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0\,. \qquad (2.58)$$

Используя теорему о среднем значении, получаем

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left[U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}\,ds\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}\left\|\left[U\left(\int\limits_s^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right\|ds =$$

$$= \left\|\left[U\left(\int\limits_{s*}^{t+\Delta t}\frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right)-I\right]\frac{f(t)}{\varphi(t)}\right\| \underset{\Delta t\to 0}{\to} 0 \qquad (2.59)$$

в силу равенства (1.5) и сильной непрерывности полугруппы $U(\bullet)$ (здесь $s_* \in [t, t+\Delta t]$). Из соотношения (2.59) следует справедливость предельного перехода (2.58) и, тем самым, справедливость соотношения (2.57).

В силу соотношений (2.50), (2.52), (2.56), (2.57) функция $I_0(t)$ дифференцируема в точке t справа и ее правосторонняя производная имеет вид

$$\overset{+}{I_0'}(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \left[A I_0(t) + f(t) \right]. \tag{2.60}$$

Функция $A I_0(t) = V(t)$ непрерывна. Это следует из сильной непрерывности полугруппы $U(\bullet)$, непрерывности функций $A f(s)$, $\varphi(s)$ и того, что в силу оценки (1.10) с $\omega_\delta < 0$ и соотношения (2.24)

$$\left\| U\left(I_0(s,t)\right) \frac{A f(s)}{\varphi(s)} \right\| \le M_\delta \, M(t) \, \kappa_0(s,t) \underset{s \to +0}{\to} 0 .$$

В силу равенства (2.60) и непрерывности функций $A I_0(t)$, $f(t)$ производная $\overset{+}{I_0'}(t)$ непрерывна. Следовательно (см. доказательство леммы 1.4), функция $I_0(t)$ непрерывно дифференцируема и справедлива формула

$$I_0'(t) = \frac{1}{\varphi(t)} \left[A I_0(t) + f(t) \right].$$

Тогда $\varphi(t) I_0'(t) = A I_0(t) + f(t)$, т.е. функция $I_0(t)$ является решением уравнения (2.1). Лемма 2.5 доказана.

Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. При $f(t) \equiv f$, $0 \le t < \infty$, решение задачи (2.2), (2.3) можно записать в виде

$$I_\varepsilon(t) = -A^{-1} f + U\left(I_\varepsilon(0,t)\right)\left(x_{\varepsilon,0} + A^{-1} f\right)$$

и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon(t) = I_0(t)$, $0 < t < \infty$, где $I_0(t) = -A^{-1} f$ – стационарное решение уравнения $\varphi(t) x'(t) = A x(t) + f$, $0 < t < \infty$.

Рассмотрим случай слабой вырождаемости уравнения (2.1), т.е. случай, когда условие (2.4) выполняется при $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. В такой ситуации несобственный интеграл

$$I_0(0,t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}$$

является сходящимся (см. (I.2.66)) и

$$\lim_{t \to +0} \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} = 0 \tag{2.61}$$

(см. (I.2.67)).

Для нахождения ограниченных в точке вырождения $t = 0$ решений уравнения (2.1) рассмотрим задачу вида

$$\varphi(t)\, x'(t) = Ax(t) + f(t)\,,\ 0 < t < \infty\,, \tag{2.62}$$

$$\lim_{t \to +0} x(t) = x_0\,,\ x_0 \in D(A)\,. \tag{2.63}$$

Теорема 2.2. При выполнении условий 1), 2) и условия 3) с $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$, задача (2.62), (2.63) имеет решение

$$x(t) = U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) x_0 + \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \frac{f(s)}{\varphi(s)}\, ds\,. \tag{2.64}$$

Если тип ω полугруппы $U(t)$ отрицателен и функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то решение (2.64) ограничено на $(0, \infty)$.

Доказательство. Тот факт, что функция (2.64) является решением уравнения (2.62), устанавливается непосредственной подстановкой этой функции в данное уравнение, при этом используются соотношения (1.7), (1.8).

Покажем, что функция (2.64) удовлетворяет начальному условию (2.63). В силу соотношения (2.61)

$$\lim_{t \to +0} U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) x_0 = x_0\,. \tag{2.65}$$

Покажем, что справедливо соотношение

$$\lim_{t \to +0} I(t) = 0\,, \tag{2.66}$$

где

$$I(t) = \int_0^t U\left(\int_s^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}\right) \frac{f(s)}{\varphi(s)}\, ds\,.$$

Проведя те же выкладки, что и при доказательстве теоремы I.2.2, получаем

$$\| I(t) \| \le \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \left[1 - \exp\left(\omega_\delta \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \right]. \tag{2.67}$$

В силу равенства (2.61) правая часть неравенства (2.67) сходится к нулю при $t \to +0$, откуда следует соотношение (2.66). Согласно соотношениям (2.65), (2.66) функция (2.64) удовлетворяет начальному условию (2.63). Далее, используя оценку (1.10) и неравенство (2.67), получаем

$$\| x(t) \| \le M_\delta \exp\left(\omega_\delta \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \| x_0 \| +$$

$$+ \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t) \left[1 - \exp\left(\omega_\delta \int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \right]. \qquad (2.68)$$

Пусть $\omega < 0$. Тогда в оценке (2.68) можно считать, что $\omega_\delta < 0$. Следовательно,

$$\| x(t) \| \le M_\delta \| x_0 \| + \frac{M_\delta}{-\omega_\delta} N(t), \; 0 < t < \infty . \qquad (2.69)$$

Из неравенства (2.69) видно, что если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то решение (2.64) ограничено на $(0, \infty)$. Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.2. Если $f(t) \equiv f$, $0 \le t < \infty$; $f \in R(A)$ и оператор A обратим, то решение (2.64) можно записать в виде

$$x(t) = -A^{-1} f + U\left(\int_0^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \right) \left(x_0 + A^{-1} f \right).$$

Замечание 2.3. Если выполняются условия замечания 2.2, то задача (2.62), (2.63) с начальным значением $x_0 = -A^{-1} f$ имеет стационарное решение $x(t) = -A^{-1} f$.

Г л а в а III

УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

§ 1. Уравнение с ограниченным операторным коэффициентом

В предыдущих главах данной книги в целях полноты картины для операторного коэффициента A изучаемого уравнения были рассмотрены два случая: A ограничен и A неограничен. Хотя можно было рассмотреть лишь второй случай, а результаты для случая $A\in L(E)$ получить из соответствующих результатов для второго случая, используя вместо оценки (II.1.10) оценку (I.1.7) и заменяя полугруппу $U(\bullet)$ на операторную экспоненту $\exp(A\bullet)$. Поэтому стиль изложения материала в предыдущих главах будет сохранен в § 2 и 3 этой главы, а в данном параграфе предлагается иной подход к выяснению условий, обеспечивающих сходимость решения $x_\varepsilon(t)$ почти вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменным ограниченным операторным коэффициентом к решению $x_0(t)$ соответствующего предельного ($\varepsilon=0$) уравнения.

Рассматривается задача

$$(t+\varepsilon)^\alpha x_\varepsilon'(t)=A(t)\,x_\varepsilon(t)+f(t)\,,\ 0\le t\le T\ , \tag{1.1}$$

$$x_\varepsilon^{(l)}(0)=\varphi\,,\ \varphi\in E\ , \tag{1.2}$$

где $x_\varepsilon(t)$ – искомая функция со значениями в банаховом пространстве E; $A(t)$ – заданная операторная функция со значениями в $L(E)$; $f(t)$ – заданная векторная функция со значениями в E; ε – малый положительный параметр, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=\mathrm{const}$, $\varepsilon_0>0$; $\alpha\ge1$, $l\ge0$.

Исследуется два вопроса:

а) условия разрешимости задачи (1.1), (1.2);

б) условия сходимости решения задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon\to0$ к ограниченному решению соответствующего вырождающегося уравнения

$$t^\alpha x'(t)=A(t)\,x(t)+f(t)\,,\ 0<t\le T\ , \tag{1.3}$$

при известных предположениях, обеспечивающих существование и единственность ограниченного решения уравнения (1.3).

Рассмотрение начального условия (1.2) с $l\ge1$ обусловлено тем, что в случае несогласованности начальных значений решение задачи Коши

(1.1), (1.2) ($l=0$) не сходится при $\varepsilon \to 0$ к ограниченному решению уравнения (1.3), что будет видно ниже.

В дальнейшем в этом параграфе предполагается, что при $l=0,1$ $A(t)\in C([0,T];L(E))$, $f(t)\in C([0,T];E)$; при $l\ge 2$ $A(t)\in C^{l-1}([0,T];L(E))$, $f(t)\in C^{l-1}([0,T];E)$.

Известно [3, с. 148], что задача Коши для уравнения (1.1) с начальным условием $x_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0}$ имеет решение

$$x_\varepsilon(t)=U_\varepsilon(t,0)\,x_{\varepsilon,0}+\int_0^t U_\varepsilon(t,\tau)\frac{f(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^\alpha}\,d\tau, \qquad (1.4)$$

где $U_\varepsilon(t,s)$ – эволюционный оператор задачи Коши

$$x_\varepsilon'(t)=\frac{1}{(t+\varepsilon)^\alpha}A(t)\,x_\varepsilon(t),\ \ s\le t\le T,\, s\in[0,T); \qquad (1.5)$$

$$x_\varepsilon(s)=x_{\varepsilon,s}. \qquad (1.6)$$

Будем подбирать в решении (1.4) элемент $x_{\varepsilon,0}$ так, чтобы выполнялось начальное условие (1.2). Тогда формула (1.4) с таким $x_{\varepsilon,0}$ будет задавать решение задачи (1.1), (1.2).

При $l=1$ и условии $0\,\overline{\in}\,\sigma(A(0))$

$$x_{\varepsilon,0}=A^{-1}(0)[\varepsilon^\alpha\varphi-f(0)], \qquad (1.7)$$

что следует из уравнения (1.1).

При $l\ge 2$ поступаем следующим образом: исходя из равенства $x_\varepsilon'(t)=A_\varepsilon(t)\,x_\varepsilon(t)+f_\varepsilon(t)$, где $A_\varepsilon(t)=(t+\varepsilon)^{-\alpha}A(t)$, $f_\varepsilon(t)=(t+\varepsilon)^{-\alpha}f(t)$, находим для $x_\varepsilon^{(l)}(t)$ формулу вида

$$x_\varepsilon^{(l)}(t)=\tilde{S}_\varepsilon(t)\,x_\varepsilon(t)+\tilde{s}_\varepsilon(t), \qquad (1.8)$$

где $\tilde{S}_\varepsilon(t)$, $\tilde{s}_\varepsilon(t)$ – конкретно выписываемые соответственно операторнозначное и векторнозначное выражения.

Пусть η и κ – соответственно наибольший и второй по величине показатели степени двучлена $t+\varepsilon$ в знаменателях выражения $\tilde{S}_\varepsilon(t)$.

Из формулы для $\tilde{s}_\varepsilon(t)$ будет видно, что эти η и κ будут также соответственно наибольшим и вторым по величине показателями степени двучлена $t+\varepsilon$ в знаменателях выражения $\tilde{s}_\varepsilon(t)$.

Пусть $\nu = \eta - \kappa$; $\widetilde{R}_{\varepsilon}(t)$ – сумма всех слагаемых выражения $\widetilde{S}_{\varepsilon}(t)$, содержащих множитель $\dfrac{1}{(t+\varepsilon)^{\eta}}$; $\widetilde{B}_{\varepsilon}(t) = \widetilde{S}_{\varepsilon}(t) - \widetilde{R}_{\varepsilon}(t)$; $R(t) = (t+\varepsilon)^{\eta}\widetilde{R}_{\varepsilon}(t)$; $B_{\varepsilon}(t) = (t+\varepsilon)^{\kappa}\widetilde{B}_{\varepsilon}(t)$. Аналогично, пусть $\widetilde{r}_{\varepsilon}(t)$ – сумма всех слагаемых выражения $\widetilde{s}_{\varepsilon}(t)$, содержащих множитель $\dfrac{1}{(t+\varepsilon)^{\eta}}$; $\widetilde{b}_{\varepsilon}(t) = \widetilde{s}_{\varepsilon}(t) - \widetilde{r}_{\varepsilon}(t)$; $r(t) = (t+\varepsilon)^{\eta}\widetilde{r}_{\varepsilon}(t)$; $b_{\varepsilon}(t) = (t+\varepsilon)^{\kappa}\widetilde{b}_{\varepsilon}(t)$. Тогда формулу (1.8) можно записать в виде

$$x_{\varepsilon}^{(l)}(t) = [\widetilde{R}_{\varepsilon}(t) + \widetilde{B}_{\varepsilon}(t)]\, x_{\varepsilon}(t) + [\,\widetilde{r}_{\varepsilon}(t) + \widetilde{b}_{\varepsilon}(t)],$$

или

$$(t+\varepsilon)^{\eta} x_{\varepsilon}^{(l)}(t) = [R(t) + (t+\varepsilon)^{\nu} B_{\varepsilon}(t)]\, x_{\varepsilon}(t) + [\,r(t) + (t+\varepsilon)^{\nu} b_{\varepsilon}(t)]. \quad (1.9)$$

Начальное условие (1.2) принимает вид

$$\varepsilon^{\eta}\varphi = [R(0) + \varepsilon^{\nu} B_{\varepsilon}(0)]\, x_{\varepsilon,0} + [\,r(0) + \varepsilon^{\nu} b_{\varepsilon}(0)]. \quad (1.10)$$

Заметим, что

$$\varepsilon^{\nu} B_{\varepsilon}(0),\ \varepsilon^{\nu} b_{\varepsilon}(0) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0. \quad (1.11)$$

Если оператор $R(0) + \varepsilon^{\nu} B_{\varepsilon}(0)$ непрерывно обратим, то из равенства (1.10) получаем

$$x_{\varepsilon,0} = [R(0) + \varepsilon^{\nu} B_{\varepsilon}(0)]^{-1} [\,\varepsilon^{\eta}\varphi - r(0) - \varepsilon^{\nu} b_{\varepsilon}(0)], \quad (1.12)$$

и, в силу (1.4), решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$x_{\varepsilon}(t) = U_{\varepsilon}(t,0)[R(0) + \varepsilon^{\nu} B_{\varepsilon}(0)]^{-1} [\,\varepsilon^{\eta}\varphi - r(0) - \varepsilon^{\nu} b_{\varepsilon}(0)] +$$
$$+ \int_0^t U_{\varepsilon}(t,\tau) \frac{f(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^{\alpha}}\, d\tau. \quad (1.13)$$

Известно [7, с. 229], что если $A_0 \in GL(E)$, где $GL(E) = \left\{A \in L(E) \mid \exists\, A^{-1} \in L(E)\right\}$, то при любом $\Delta A \in L(E)$, удовлетворяющем условию $\|\Delta A\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, справедливо включение $A_0 + \Delta A \in GL(E)$. Значит, оператор $R(0) + \varepsilon^{\nu} B_{\varepsilon}(0)$ непрерывно обратим, если $R(0)$ непрерывно обратим и

$$\varepsilon^{\nu}\left\|B_{\varepsilon}(0)\right\| < \frac{1}{\left\|[R(0)]^{-1}\right\|}. \qquad (1.14)$$

Заметим, что для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$ условие (1.14) будет выполняться в силу (1.11).

Лемма 1.1. При $\alpha = 1$, $l \ge 2$ производная $x_{\varepsilon}^{(l)}(t)$ выражается формулой

$$x_{\varepsilon}^{(l)}(t) = \left[(-1)^{l-1}(l-1)! \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{(t+\varepsilon)^{l-j}} A^{(j)}(t) + \right.$$

$$+ \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i_s=1}^{l-s} \sum_{i_{s-1}=i_s+1}^{l-(s-1)} \ldots \sum_{i_2=i_3+1}^{l-2} \sum_{i_1=i_2+1}^{l-1} \prod_{k=0}^{s} (-1)^{i_k-1-i_{k+1}} \frac{(i_k-1)!}{i_{k+1}!} \times$$

$$\left. \times \sum_{j=0}^{i_k-1-i_{k+1}} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{(t+\varepsilon)^{i_k-i_{k+1}-j}} A^{(j)}(t) \right] x_{\varepsilon}(t) +$$

$$+ (-1)^{l-1}(l-1)! \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{(t+\varepsilon)^{l-j}} f^{(j)}(t) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i_s=1}^{l-s} \sum_{i_{s-1}=i_s+1}^{l-(s-1)} \ldots \sum_{i_2=i_3+1}^{l-2} \sum_{i_1=i_2+1}^{l-1} \left[\prod_{k=0}^{s} (-1)^{i_k-1-i_{k+1}} \frac{(i_k-1)!}{i_{k+1}!} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{j=0}^{i_k-1-i_{k+1}} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{(t+\varepsilon)^{i_k-i_{k+1}-j}} A^{(j)}(t) \right] (-1)^{i_s-1}(i_s-1)! \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{i_s-1} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{(t+\varepsilon)^{i_s-j}} f^{(j)}(t), \qquad (1.15)$$

где приняты следующие условные обозначения: $i_{s+1} = 0$ $(1 \le s \le l-1)$, $i_0 = l$.

Лемма 1.1 доказывается непосредственно, при этом используются запись $x_{\varepsilon}^{(l)}(t) = [A_{\varepsilon}(t)x_{\varepsilon}(t) + f_{\varepsilon}(t)]^{(l-1)}$ и формула Лейбница для n-й производной композиции операторной функции $Q(t) \in C^n\left(L(E)\right)$ и векторной функции $g(t) \in C^n(E)$:

$$[Q(t)\,g(t)]^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, Q^{(n-i)}(t)\, g^{(i)}(t)\,. \tag{1.16}$$

Лемма 1.2. В случае $\alpha = 1$ справедливы равенства

$$\eta = l\,,\ \ \kappa = l-1\,; \tag{1.17}$$

$$R(0) = \prod_{k=0}^{l-1} (A(0) - k\,I)\,; \tag{1.18}$$

$$r(0) = \prod_{k=1}^{l-1} (A(0) - k\,I)\, f(0)\,. \tag{1.19}$$

Доказательство. Из формулы (1.15) видно, что наибольшую степень двучлена $t+\varepsilon$ в знаменателе содержат слагаемые, отвечающие $j=0$. Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{s} (i_k - i_{k+1}) = (l - i_1) + (i_1 - i_2) + \ldots + (i_{s-1} - i_s) + (i_s - 0) = l\,;$$

$$\sum_{k=0}^{s} (i_k - 1 - i_{k+1}) = l - 1 - s\,;\ \ \prod_{k=0}^{s} A(t) = A^{s+1}(t)\,;$$

$$\prod_{k=0}^{s} \frac{(i_k - 1)!}{i_{k+1}!} = \frac{(l-1)!}{i_1!}\frac{(i_1-1)!}{i_2!}\cdot \ldots \cdot \frac{(i_{s-1}-1)!}{i_s!}\frac{(i_s-1)!}{0!} = \frac{(l-1)!}{i_1\, i_2 \ldots i_s}\,.$$

Тогда из формулы (1.15) получаем

$$\tilde{R}_\varepsilon(t) = \frac{1}{(t+\varepsilon)^\alpha}\, A(t) \Biggl[(-1)^{l-1} (l-1)!\, I + \sum_{s=1}^{l-1} (-1)^{l-1-s} \times$$

$$\times \sum_{i_s=1}^{l-s}\ \sum_{i_{s-1}=i_s+1}^{l-(s-1)} \ldots \sum_{i_2=i_3+1}^{l-2}\ \sum_{i_1=i_2+1}^{l-1} \frac{(l-1)!}{i_1\, i_2 \ldots i_s} A^s(t) \Biggr]. \tag{1.20}$$

Так как $1 \le i_s < i_{s-1} < \ldots < i_2 < i_1 \le l-1$, то

$$\frac{(l-1)!}{i_1\, i_2 \ldots i_s} = j_1\, j_2 \cdots j_{l-1-s}\,,$$

где $\{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{l-1-s}\} = \{1,\ 2,\ \ldots,\ l-1\} \setminus \{i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_s\}$.

Итак, коэффициент при $A^s(t)$ $(0 \le s \le l-1)$ представляет собой сумму всевозможных произведений по $l-1-s$ штук различных чисел $1, 2, ..., l-1$, взятую со знаком $(-1)^{l-1-s}$. В силу формул Вьета [10, с.159], дающих связь между корнями $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ многочлена $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ и его коэффициентами

$$a_k = (-1)^k \sum \prod_{j=1}^{k} \alpha_{k_j}\ ,\ \ \alpha_{k_m} \ne \alpha_{k_s}\ \ (m \ne s),$$

получаем, что корнями многочлена, записанного в квадратных скобках в правой части равенства (1.20), являются числа $1, 2, ..., l-1$. Тогда

$$\tilde{R}_\varepsilon(t) = \frac{1}{(t+\varepsilon)^\alpha} \prod_{k=0}^{l-1} (A(t) - k\,I)\,. \tag{1.21}$$

Из формулы (1.21) видно, что $\eta = l$. Тогда из формулы (1.15) получаем, что $\kappa = l-1$. Равенство (1.18) следует из (1.21).

Формула (1.19) показывается аналогично. Лемма 1.2 доказана.

Из соотношений (1.13), (1.14), (1.17) – (1.19) получаем следующее утверждение.

Теорема 1.1. Если $\alpha = 1$, $l \ge 2$ и

$$0, 1, ..., l-1 \,\overline{\in}\, \sigma(A(0))\,,$$

то при любом $\varepsilon > 0$, удовлетворяющем условию

$$\varepsilon \left\| B_\varepsilon(0) \right\| < \left[\left\| \prod_{k=0}^{l-1} R_{A(0)}(k) \right\| \right]^{-1},$$

где $R_{A(0)}(k) = (A(0) - kI)^{-1}$ – резольвента оператора $A(0)$ в точке k, задача (1.1), (1.2) имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t,0) \left[\prod_{k=0}^{l-1} (A(0) - k\,I) + \varepsilon B_\varepsilon(0) \right]^{-1} \left[\varepsilon^l \varphi\ - \right.$$

$$\left. - \prod_{k=1}^{l-1} (A(0) - k\,I)\, f(0) + \varepsilon b_\varepsilon(0) \right] + \int_0^t U_\varepsilon(t,\tau) \frac{f(\tau)}{\tau + \varepsilon}\, d\tau\,, \tag{1.22}$$

где $B_\varepsilon(0)$, $b_\varepsilon(0)$ определяются из формулы (1.15); $\varepsilon B_\varepsilon(0), \varepsilon b_\varepsilon(0) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Лемма 1.3. При $\alpha > 1$, $l \geq 2$ производная $x_\varepsilon^{(l)}(t)$ выражается формулой

$$x_\varepsilon^{(l)}(t) = \left[\ \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{l-1-j} C_{l-1}^{j} \left[\prod_{p=0}^{l-2-j} (\alpha + p)\right] \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha+l-1-j}} A^{(j)}(t) + \right.$$

$$+ \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i_s=1}^{l-s} \sum_{i_{s-1}=i_s+1}^{l-(s-1)} \ldots \sum_{i_2=i_3+1}^{l-2} \sum_{i_1=i_2+1}^{l-1} \left[\prod_{k=0}^{s} C_{i_{k-1}}^{i_{k+1}}\right] \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{s} \sum_{j=0}^{i_k-1-i_{k+1}} (-1)^{i_k-1-i_{k+1}-j} C_{i_k-1-i_{k+1}}^{j} \left[\prod_{p=0}^{i_k-2-i_{k+1}-j} (\alpha + p)\right] \times$$

$$\left. \times \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha+i_k-1-i_{k+1}-j}} A^{(j)}(t) \right] x_\varepsilon(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{l-1-j} C_{l-1}^{j} \left[\prod_{p=0}^{l-2-j} (\alpha + p)\right] \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha+l-1-j}} f^{(j)}(t) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{l-1} \sum_{i_s=1}^{l-s} \sum_{i_{s-1}=i_s+1}^{l-(s-1)} \ldots \sum_{i_2=i_3+1}^{l-2} \sum_{i_1=i_2+1}^{l-1} \left[\prod_{k=0}^{s-1} C_{i_k-1}^{i_{k+1}}\right] \times$$

$$\times \left[\prod_{k=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{i_k-1-i_{k+1}} (-1)^{i_k-1-i_{k+1}-j} C_{i_k-1-i_{k+1}}^{j} \left[\prod_{p=0}^{i_k-2-i_{k+1}-j} (\alpha + p)\right] \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha+i_k-1-i_{k+1}-j}} A^{(j)}(t) \right] \sum_{j=0}^{i_s-1} (-1)^{i_s-1-j} C_{i_s-1}^{j} \times$$

$$\times \left[\prod_{p=0}^{i_s-2-j} (\alpha + p)\right] \frac{1}{(t+\varepsilon)^{\alpha+i_s-1-j}} f^{(j)}(t), \qquad (1.23)$$

где $i_{s+1} = 0$ $(1 \leq s \leq l-1)$, $i_0 = l$.

Лемма 1.4. В случае $\alpha > 1$ справедливы равенства

$$\eta = \alpha l, \ \kappa = \alpha(l-1) + 1;$$

$$R(0) = \gamma A^{l}(0), \ \gamma = [\alpha(\alpha-1)]^{l};$$

$$r(0) = \gamma A^{l-1}(0) f(0).$$

Теорема 1.2. Если $\alpha > 1$, $l \geq 2$ и $0 \overline{\in} \sigma(A(0))$, то при любом $\varepsilon > 0$, удовлетворяющем условию

$$\varepsilon^{\alpha-1} \left\| B_\varepsilon(0) \right\| < \frac{\gamma}{\left\| R^l_{A(0)}(0) \right\|},$$

задача (1.1), (1.2) имеет решение

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t,0)[\, \gamma A^l(0) + \varepsilon^{\alpha-1} B_\varepsilon(0)]^{-1} [\varepsilon^{\alpha l} \varphi - \gamma A^{l-1}(0) f(0) - \varepsilon^{\alpha-1} b_\varepsilon(0)] +$$

$$+ \int_0^t U_\varepsilon(t,\tau) \frac{f(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^\alpha}\, d\tau, \qquad (1.24)$$

где $B_\varepsilon(0)$, $b_\varepsilon(0)$ определяются из формулы (1.23).

Известно [2, с. 38], что при $\alpha \geq 1$ и выполнении условия

$$\sigma(A(0)) \subset \mathbb{C}_-, \qquad (1.25)$$

где $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, уравнение (1.3) имеет единственное ограниченное решение

$$x_0(t) = \int_0^t U(t,\tau) \frac{f(\tau)}{\tau^\alpha}\, d\tau \qquad (1.26)$$

и

$$\lim_{t \to +0} x_0(t) = -A^{-1}(0) f(0). \qquad (1.27)$$

Здесь $U(t,s)$ – эволюционный оператор задачи Коши

$$t^\alpha x'(t) = A(t)\, x(t),\ 0 < s \leq t \leq T;$$
$$x(s) = x_s.$$

Поясним, почему несобственный интеграл в формуле (1.26) сходится. Известно [2, с. 22], что при выполнении условия (1.25) справедлива оценка

$$\left\| U(t,s) \right\| \leq N \exp\left\{ -\nu \int_s^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha} \right\},\ 0 < s \leq t \leq T;\ N, \nu > 0. \qquad (1.28)$$

Тогда

$$\left\| \int_0^t U(t,\tau)\,\frac{f(\tau)}{\tau^\alpha}\,d\tau \right\| \le \int_0^t \|U(t,\tau)\|\,\|f(\tau)\|\,\frac{d\tau}{\tau^\alpha} \le$$

$$\le \|f\|_C \; N \int_0^t \exp\left\{-\nu\int_\tau^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}\right\}\frac{d\tau}{\tau^\alpha} =$$

$$= \frac{N}{\nu}\,\|f\|_C \lim_{\delta\to+0} \int_\delta^t \exp\left\{-\nu\int_\tau^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}\right\} d\left[-\nu\int_\tau^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}\right] =$$

$$= \frac{N}{\nu}\,\|f\|_C \lim_{\delta\to+0}\left[1-\exp\left\{-\nu\int_\delta^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}\right\}\right] = \frac{N}{\nu}\,\|f\|_C\ .$$

Будем считать, что решение $x_0(t)$ доопределено по непрерывности в нуле: $x_0(0) = \lim\limits_{t\to+0} x_0(t) = -A^{-1}(0)\,f(0)$.

Мы видим, что в точке $t=0$ решение задачи (1.1), (1.2) при $l=0$ и $\varphi \ne -A^{-1}(0)\,f(0)$ не сходится при $\varepsilon\to 0$ к $x_0(t)$.

Замечание 1.1. При $\alpha \ge 1$, $l \ge 1$

$$x_\varepsilon(0) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} x_0(0)\,. \tag{1.29}$$

Предельный переход (1.29) следует из соотношений (1.7), (1.22), (1.24).

Известно [4], что если выполнено условие (1.25), то из (1.29) следует равномерная сходимость $x_\varepsilon(t)$ к $x_0(t)$ на $[0,T]$.

Теорема 1.3. Если выполнено условие (1.25), то при $\alpha \ge 1$, $l \ge 1$

$$x_\varepsilon(t) \overset{\text{р.}}{\underset{\varepsilon\to 0}{\to}} x_0(t)\,,\ t\in[0,T]\,. \tag{1.30}$$

§ 2. Уравнение с неограниченным операторным коэффициентом

В банаховом пространстве E изучается вырождающееся в точке $t=0$ уравнение

$$t^\alpha x'(t) = A(t)x(t) + f(t)\,,\ 0 < t \le T\,, \tag{2.1}$$

где $A(t)$ – заданная операторная функция, при каждом $t\in[0,T]$ $A(t)$ – линейный неограниченный оператор, $A(t): D\big(A(t)\big) \equiv D(A) \subset E \to E$,

$\overline{D(A)} = E$; $f(t)$ – заданная векторная функция переменного $t \in [0,T]$ со значениями в E; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 1$.

Пусть выполнены известные условия [17], при которых уравнение (2.1) имеет единственное ограниченное решение, а именно, пусть

$$f(t) \in C\big([0,T]; E\big); \tag{2.2}$$

существует $\omega < 0$, такое что $(\omega, \infty) \subset \rho\big(A(t)\big)$ (здесь $\rho\big(A(t)\big)$ – резольвентное множество оператора $A(t)$) и справедлива оценка

$$\left\| R_{A(t)}(\lambda) \right\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \ \lambda \in (\omega, \infty), \tag{2.3}$$

здесь $R_{A(t)}(\lambda)$ – резольвента оператора $A(t)$ в точке λ .

Тогда уравнение (2.1) имеет единственное ограниченное решение

$$x(t) = \int_0^t U(t,\tau) \frac{f(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau, \tag{2.4}$$

где $U(t,s)$ – эволюционный оператор задачи

$$t^\alpha x'(t) = A(t) x(t), \ \ 0 < s \leq t \leq T;$$
$$x(s) = x_0, \ x_0 \in D(A),$$

при этом справедлива оценка

$$\left\| U(t,s) \right\| \leq e^{\omega \int_s^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}}, 0 < s \leq t \leq T; \tag{2.5}$$

кроме того,

$$\lim_{t \to +0} x(t) = -A^{-1}(0) f(0).$$

Будем считать в дальнейшем, что решение $x(t)$ доопределено по непрерывности в нуле:

$$x(0) = \lim_{t \to +0} x(t) = -A^{-1}(0) f(0). \tag{2.6}$$

Рассмотрим задачу Коши вида

$$(t+\varepsilon)^\alpha x_\varepsilon'(t) = A(t)\, x_\varepsilon(t), \ \ 0 \leq t \leq T; \tag{2.7}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, x_{\varepsilon,0} \in D(A), \tag{2.8}$$

где $x_\varepsilon(t)$ – искомая функция со значениями в E; ε – малый параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, $\varepsilon_0 > 0$; $x_{\varepsilon,0}$ – некоторый заданный элемент из $D(A)$.

В дальнейшем выясняется два вопроса:

а) условия разрешимости задачи (2.7), (2.8);

б) условия равномерной на $[0,T]$ сходимости решения $x_\varepsilon(t)$ задачи (2.7), (2.8) при $\varepsilon \to 0$ к ограниченному решению $x(t)$ уравнения (2.1).

Запишем задачу (2.7), (2.8) в виде

$$x'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t)\, x_\varepsilon(t) + f_\varepsilon(t), \quad 0 \le t \le T; \tag{2.9}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \; x_{\varepsilon,0} \in D(A), \tag{2.10}$$

где $A_\varepsilon(t) = (t+\varepsilon)^{-\alpha} A(t)$, $f_\varepsilon(t) = (t+\varepsilon)^{-\alpha} f(t)$ (заметим, что $D\big(A_\varepsilon(t)\big) = D\big(A(t)\big) \equiv D(A)$).

Известно [8, с. 246], что задача Коши

$$z'(t) = A(t)\, z(t), \; s \le t \le T, s \in [0, T]; \tag{2.11}$$

$$z(s) = z_s, \; z_s \in D(A), \tag{2.12}$$

равномерно корректна, если

1) $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$;

2) существует $A^{-1}(t) \in L(E)$, $0 \le t \le T$;

3) $\left\| A(0)A^{-1}(s) \right\| \le M$, $0 \le s \le T$;

4) $A(t)$ устойчиво аппроксимируется операторами $A_n(t)$, т.е.

4.1) существует последовательность ограниченных сильно непрерывных операторов $A_n(t)$, таких что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \le t \le T} \left\| \big[A(t) - A_n(t)\big] A^{-1}(t) x \right\| = 0, \; x \in E ; \tag{2.13}$$

4.2) $$\left\| U_n(t,s) \right\| \le M \;, 0 \le s \le t \le T ; \; n = 1, 2, \ldots, \tag{2.14}$$

где $U_n(t,s)$ – эволюционные операторы, отвечающие операторам $A_n(t)$;

5) $A_n(t)A(t)\, x = A(t)A_n(t)\, x$, $x \in D(A)$;

6) $U_n(t,s) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{с.}}{\to}} U(t,s)$ равномерно по $0 \le s \le t \le T$ (символ $\overset{\text{с.}}{\to}$ означает сильную сходимость). При этом предельный оператор $U(t,s)$ из условия 6) является эволюционным оператором задачи (2.11), (2.12).

Пусть оператор $A(t)$ удовлетворяет следующим дополнительным требованиям:

1.1) оператор $A(t)A'(t)A^{-2}(t)$ определен, ограничен и сильно непрерывен;

1.2) множество $D_2 = \bigcap\limits_{t\in[0,T]} D\left(A^2(t)\right)$ плотно в E (заметим, что при каждом фиксированном $t\in[0,T]$ множество $D\left(A^2(t)\right)$ плотно в E, ибо $D\left(A(t)\right)\equiv D(A)$ плотно в E [8, с. 30]);

1.3) оператор $A(0)A(t)$ сильно непрерывен на D_2.

Пусть аппроксимирующие операторы $A_n(t)$ из условия 4) удовлетворяют дополнительным требованиям вида

$$
\begin{aligned}
&1.4)\ \left\| R_{A_n(t)}(\lambda) \right\| \le \frac{1}{\lambda},\ \lambda > 0;\\
&1.5)\ A_n(t)A^{-2}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{C(L(E))}{\longrightarrow}} A^{-1}(t).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Лемма 2.1. Если для оператора $A(t)$ выполнены условия 1) – 3), 4.1), 5), а также дополнительные условия 1.1) – 1.5), то при любом фиксированном $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ для оператора $A_\varepsilon(t)=(t+\varepsilon)^{-\alpha}A(t)$ выполнены условия вида 1) – 6), при этом, в роли аппроксимирующих операторов для $A_\varepsilon(t)$ выступают операторы $A_{\varepsilon,n}(t)=(t+\varepsilon)^{-\alpha}A_n(t)$.

Доказательство. Если $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$, то $A_\varepsilon(t)=\left[(t+\varepsilon)^{-\alpha}I\right]A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$ как произведение ограниченного сильно непрерывно дифференцируемого оператора и сильно непрерывно дифференцируемого оператора [8, с. 219].

Если существует $A^{-1}(t)\in L(E)$, $0\le t\le T$, то существует $A_\varepsilon^{-1}(t)=(t+\varepsilon)^{\alpha}A^{-1}(t)\in L(E)$, $0\le t\le T$.

Если $\left\|A(0)A^{-1}(s)\right\|\le M$, $0\le s\le T$, то для любого $0\le s\le T$

$$
\left\|A_\varepsilon(0)A_\varepsilon^{-1}(s)\right\| = \left\|\frac{1}{\varepsilon^\alpha}A(0)(s+\varepsilon)^\alpha A^{-1}(s)\right\| =
$$

$$
=\left(\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^\alpha \left\|A(0)A^{-1}(s)\right\| \le \left(\frac{T+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^\alpha M = M_\varepsilon.
$$

Пусть выполнено условие 4.1). Покажем, используя условия (2.15), что $A_\varepsilon(t)$ устойчиво аппроксимируем операторами $A_{\varepsilon,n}(t)=(t+\varepsilon)^{-\alpha}A_n(t)$, т.е.

4.1′) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{0\le t\le T}\left\|\left[A_\varepsilon(t)-A_{\varepsilon,n}(t)\right]A_\varepsilon^{-1}(t)x\right\|=0$, $x\in E$;

4.2′) $\left\|U_{\varepsilon,n}(t,s)\right\|\le M_\varepsilon$, $0\le s\le t\le T$; $n=1,2,\ldots$,

где $U_{\varepsilon,n}(t,s)$ – эволюционные операторы, отвечающие операторам $A_{\varepsilon,n}(t)$, т.е. эволюционные операторы задачи Коши

$$z'_{\varepsilon,n}(t)=A_{\varepsilon,n}(t)\,z_{\varepsilon,n}(t),\ \ s\le t\le T,\ s\in[0,T); \tag{2.16}$$

$$z_{\varepsilon,n}(s)=z_{\varepsilon,s}. \tag{2.17}$$

Заметим, что

$$\left[A_\varepsilon(t)-A_{\varepsilon,n}(t)\right]A_\varepsilon^{-1}(t)=\left[A(t)-A_n(t)\right]A^{-1}(t),$$

поэтому из 4.1) следует 4.1′). Далее,

$$R_{A_{\varepsilon,n}(t)}(\lambda)=\left[A_{\varepsilon,n}(t)-\lambda I\right]^{-1}=\left[(t+\varepsilon)^{-\alpha}A_n(t)-\lambda I\right]^{-1}=$$

$$=\left[(t+\varepsilon)^{-\alpha}\left[A_n(t)-\lambda(t+\varepsilon)^{\alpha}I\right]\right]^{-1}=(t+\varepsilon)^{\alpha}R_{A_n(t)}\left(\lambda(t+\varepsilon)^{\alpha}\right).$$

В силу условий (2.15) для $\lambda>0$

$$R_{A_{\varepsilon,n}(t)}(\lambda)=(t+\varepsilon)^{\alpha}\left\|R_{A_n(t)}\left(\lambda(t+\varepsilon)^{\alpha}\right)\right\|\le(t+\varepsilon)^{\alpha}\cdot\frac{1}{\lambda(t+\varepsilon)^{\alpha}}=\frac{1}{\lambda}.$$

Получена оценка

$$\left\|R_{A_{\varepsilon,n}(t)}(\lambda)\right\|\le\frac{1}{\lambda},\ \ \lambda>0.$$

Следовательно [8, с. 250], решение $z_{\varepsilon,n}(t)$ задачи (2.16), (2.17) удовлетворяет условию $\left\|z_{\varepsilon,n}(t)\right\|\le\left\|z_{\varepsilon,s}\right\|$, или, в силу равенства $z_{\varepsilon,n}(t)=U_{\varepsilon,n}(t,s)z_{\varepsilon,s}$ получаем неравенство $\left\|U_{\varepsilon,n}(t,s)z_{\varepsilon,s}\right\|\le\left\|z_{\varepsilon,s}\right\|$, откуда следует оценка

$$\left\|U_{\varepsilon,n}(t,s)\right\|\le 1,\ \ 0\le s\le t\le T;\ n=1,2,\ldots, \tag{2.18}$$

т.е. показана справедливость 4.2′) с $M_\varepsilon=1$.

Если $A_n(t)A(t)x = A(t)A_n(t)x$, $x \in D(A)$, то $A_{\varepsilon,n}(t)A_\varepsilon(t)x =$ $= A_\varepsilon(t)A_{\varepsilon,n}(t)x$, $x \in D(A)$, что очевидно.

Покажем, используя дополнительные условия 1.1) – 1.5), что

$$U_{\varepsilon,n}(t,s) \underset{n\to\infty}{\overset{\text{с.}}{\to}} U_\varepsilon(t,s) \tag{2.19}$$

равномерно по $0 \le s \le t \le T$, где $U_\varepsilon(t,s)$ – некоторый линейный ограниченный оператор. Для доказательства (2.19) достаточно показать, в силу теоремы Банаха-Штейнгауза [18, с. 129], выполнение двух условий:

а) $\left\| U_{\varepsilon,n}(t,s) \right\| \le M_\varepsilon$, $0 \le s \le t \le T$; $n = 1, 2, \ldots$;

б) при любом фиксированном x из некоторого плотного в E множества D последовательность $\left\{ U_{\varepsilon,n}(t,s)x \right\}$ сходится равномерно по $0 \le s \le t \le T$, т.е. сходится по норме пространства $C\big([0,T]\times[0,T]; E\big)$.

Условие а) выполняется с $M_\varepsilon = 1$ (см. оценку (2.18), которая получена с помощью условия 1.4)).

Для выполнения условия б) достаточно показать, что при любом фиксированном $x \in D$ последовательность $\left\{ U_{\varepsilon,n}(t,s)x \right\}$ фундаментальна по метрике пространства $C\big([0,T]\times[0,T]; E\big)$.

Возьмем в роли D множество D_2 из условия 1.2). Справедлива формула [8, с. 234]

$$U_{\varepsilon,n}(t,s)x = U_{\varepsilon,m}(t,s)x + \int_s^t U_{\varepsilon,n}(t,\tau)\big[A_{\varepsilon,n}(\tau) - A_{\varepsilon,m}(\tau)\big]U_{\varepsilon,m}(\tau,s)x\,d\tau, \tag{2.20}$$

которую при $x \in D_2$ можно записать в виде

$$U_{\varepsilon,n}(t,s)x - U_{\varepsilon,m}(t,s)x = \int_s^t \frac{1}{(\tau+\varepsilon)^\alpha}\, U_{\varepsilon,n}(t,\tau)\,\Big[A_n(\tau) - A_m(\tau)\Big]A^{-2}(\tau)\times$$

$$\times\Big[A^2(\tau)\,U_{\varepsilon,m}(\tau,s)A^{-2}(s)\Big]\,A^2(s)\,x\,d\tau. \tag{2.21}$$

Покажем, что операторы

$$V_{\varepsilon,n}(t,s) = A^2(t)\,U_{\varepsilon,n}(t,s)A^{-2}(s) \tag{2.22}$$

являются эволюционными операторами задачи

$$y'_{\varepsilon,n}(t) = A_{\varepsilon,n}(t)\, y_{\varepsilon,n}(t) + \left[A'(t)A^{-1}(t) + A(t)A'(t)A^{-2}(t)\right] y_{\varepsilon,n}(t), \qquad (2.23)$$

$$s \le t \le T,\ s \in [0,\ T);$$

$$y_{\varepsilon,n}(s) = y_{\varepsilon,s}, \qquad (2.24)$$

где оператор $B(t) = A'(t)A^{-1}(t) + A(t)A'(t)A^{-2}(t)$ ограничен и сильно непрерывен, так как $A'(t)A^{-1}(t)$ ограничен и сильно непрерывен [8, с. 221], $A(t)A'(t)A^{-2}(t)$ ограничен и сильно непрерывен по условию 1.1).

Покажем вначале, что функция $w_{\varepsilon,n}(t) = A^{-2}(t)y_{\varepsilon,n}(t)$ является решением задачи (2.16), (2.17) с начальным значением $z_{\varepsilon,n}(s) = A^{-2}(s)y_{\varepsilon,s}$. Известно [8, с. 221], что при выполнении условий 1) – 3) ограниченный оператор A^{-1} сильно непрерывно дифференцируем и

$$\left[A^{-1}(t)\right]' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t)\,. \qquad (2.25)$$

Тогда оператор $A^{-2}(t) = A^{-1}(t)A^{-1}(t)$ ограничен и сильно непрерывно дифференцируем и, в силу равенства (2.25),

$$\left[A^{-2}(t)\right]' = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-2}(t) - A^{-2}(t)A'(t)A^{-1}(t)\,.$$

Функция $y_{\varepsilon,n}(t)$ непрерывно дифференцируема как решение задачи (2.23), (2.24). Тогда [8, с. 22]

$$w'_{\varepsilon,n}(t) = \left[-A^{-1}(t)A'(t)A^{-2}(t) - A^{-2}(t)A^{-1}(t)\right] y_{\varepsilon,n}(t) +$$
$$+ A^{-2}(t)A_{\varepsilon,n}(t)y_{\varepsilon,n}(t) + \left[A^{-2}(t)A'(t)A^{-1}(t) + A^{-1}(t)A'(t)A^{-2}(t)\right] y_{\varepsilon,n}(t) =$$
$$= A^{-2}(t)A_{\varepsilon,n}(t)y_{\varepsilon,n}(t)\,.$$

Получили равенство

$$w'_{\varepsilon,n}(t) = A^{-2}(t)A_{\varepsilon,n}(t)y_{\varepsilon,n}(t)\,. \qquad (2.26)$$

В силу условия 5) имеем $A_n(t)A(t) = A(t)A_n(t)$ на $D(A)$, откуда получаем $A^{-1}(t)A_n(t)A(t) = A_n(t)$ или $A^{-1}(t)A_n(t) = A_n(t)A^{-1}(t)$. Тогда $A^{-1}(t)A_{\varepsilon,n}(t) = A_{\varepsilon,n}(t)A^{-1}(t)$ и из равенства (2.26) следует, что

$$w'_{\varepsilon,n}(t) = A_{\varepsilon,n}(t)\, w_{\varepsilon,n}(t)\,,$$

т.е. функция $w_{\varepsilon,n}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.16).

Эта функция удовлетворяет также начальному условию (2.17) с начальным значением $z_{\varepsilon,n}(s) = A^{-2}(s) y_{\varepsilon,s}$:

$$w_{\varepsilon,n}(s) = A^{-2}(s)\, y_{\varepsilon,n}(s) = A^{-2}(s)\, y_{\varepsilon,s}\,.$$

В силу единственности решения задачи (2.16), (2.17) имеем

$$w_{\varepsilon,n}(t) = A^{-2}(t)\, y_{\varepsilon,n}(t) = z_{\varepsilon,n}(t) = U_{\varepsilon,n}(t,s) A^{-2}(s)\, y_{\varepsilon,s}\,,$$

откуда

$$y_{\varepsilon,n}(t) = A^{2}(t) U_{\varepsilon,n}(t,s) A^{-2}(s)\, y_{\varepsilon,s}\,,$$

т.е. эволюционные операторы задачи (2.23), (2.24) имеют вид (2.22).

Известно [8, с. 234], что если последовательность эволюционных операторов $U_n(t,s)$, отвечающих ограниченным сильно непрерывным операторам $A_n(t)$, равномерно ограничена:

$$\left\| U_n(t,s) \right\| \le M\,, \quad 0 \le s \le t \le T\,;\ n = 1, 2, \ldots,$$

то последовательность эволюционных операторов $\tilde{U}_n(t,s)$, отвечающих операторам $\tilde{A}_n(t) = A_n(t) + B(t)$, где возмущающий оператор $B(t)$ ограничен и сильно непрерывен, тоже равномерно ограничена:

$$\left\| \tilde{U}_n(t,s) \right\| \le \tilde{M}\,, \quad 0 \le s \le t \le T\,;\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2.27}$$

при этом в роли $\tilde{M}$ можно взять постоянную $M\, e^{MCT}$, где $C = \sup\limits_{0 \le t \le T} \left\| B(t) \right\|$.

Значит, в силу оценки (2.18)

$$\left\| A^{2}(t) U_{\varepsilon,n}(t,s)\, A^{-2}(s) \right\| \le M_1\,, 0 \le s \le t \le T\,;\ n = 1, 2, \ldots, \tag{2.28}$$

где M_1 – некоторая постоянная (M_1 не зависит от ε, так как постоянная в оценке (2.18) не зависит от ε).

Для $x \in D_2$ имеем

$$A^{2}(t)\, x = \left[A(t) A^{-1}(0) \right] A(0) A(t) x\,,$$

откуда видно, что функция $A^2(t)x$ непрерывна, так как оператор $A(t)A^{-1}(0)$ ограничен и сильно непрерывен [8, с. 216], функция $A(0)A(t)x$ непрерывна по условию 1.3). Положим

$$M_2 = \max_{0 \le t \le T} \left\| A^2(t)x \right\|, \; M_\varepsilon = \frac{M_1 M_2}{\varepsilon^\alpha}.$$

Тогда из формулы (2.21) следует, в силу соотношений (2.18), (2.28) оценка

$$\left\| U_{\varepsilon,n}(t,s)x - U_{\varepsilon,m}(t,s)x \right\| \le M_\varepsilon \int_0^T \left\| \left[A_n(\tau) - A_m(\tau) \right] A^{-2}(\tau) \right\| d\tau. \quad (2.29)$$

Из оценки (2.29) следует, в силу условия 1.5), что при любом фиксированном $x \in D_2$ последовательность $\left\{ U_{\varepsilon,n}(t,s)x \right\}$ фундаментальна по метрике пространства $C\left([0,T] \times [0,T]; E \right)$. Лемма 2.1. доказана.

Фактически доказано следующее утверждение.

Лемма 2.2. При выполнении условий 1) – 3), 4.1), 1.1) – 1.5) задача Коши

$$z'_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t) z_\varepsilon(t), \; s \le t \le T, s \in [0, T); \quad (2.30)$$

$$z_\varepsilon(s) = z_{\varepsilon,s}, \; z_{\varepsilon,s} \in D(A), \quad (2.31)$$

при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ равномерно корректна; ее эволюционным оператором является предельный оператор $U_\varepsilon(t,s)$ из условия (2.19).

Известно [8, с. 241], что если наряду с условиями 1) – 6) выполняются следующие условия:

7) $f(t) \in C\left([0,T]; E \right)$;

8) $f(t) \in D(A)$, $0 \le t \le T$; $A(t)f(t) \in C\left([0,T]; E \right)$,

то задача Коши

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \; s \le t \le T, s \in [0, T);$$
$$x(s) = x_s, \; x_s \in D(A)$$

имеет единственное решение

$$x(t) = U(t,s)x_s + \int_s^t U(t,\tau) f(\tau) \, d\tau, \quad (2.32)$$

где $U(t,s)$ – эволюционный оператор задачи (2.11), (2.12).

Заметим, что из условий 7), 8) следуют при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$

7′) $f_\varepsilon(t) \in C([0,T]; E)$;

8′) $f_\varepsilon(t) \in D(A)$, $0 \le t \le T$; $A_\varepsilon(t) f_\varepsilon(t) \in C([0,T]; E)$.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1. При выполнении условий 1) – 3), 4.1), 5), 7), 8), 1.1) – 1.5) задача (2.9), (2.10) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет единственное решение

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t, 0)\, x_{\varepsilon,0} + \int_0^t U_\varepsilon(t,\tau) \frac{f(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^\alpha}\, d\tau, \qquad (2.33)$$

где $U_\varepsilon(t,s)$ – эволюционный оператор задачи Коши (2.30), (2.31).

Заметим, что формула (2.33) следует из (2.32).

Известна [8, с. 255] следующая реализация аппроксимации оператора $A(t)$: если $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$, $[0,\infty) \subset \rho(A(t))$ и

$$\left\| R_{A(t)}(\lambda) \right\| \le \frac{1}{1+\lambda}, \ \lambda \in [0,\infty), \qquad (2.34)$$

то условия 4) – 6) реализуются с помощью аппроксимирующих операторов Иосида

$$A_n(t) = -nA(t) R_{A(t)}(n),$$

которые можно записать также в виде

$$A_n(t) = -nI - n^2 R_{A(t)}(n),$$

что следует из тождества

$$AR_A(\lambda) = I + \lambda R_A(\lambda). \qquad (2.35)$$

В связи с этим естественно требовать, чтобы все дополнительные ограничения на $A_n(t)$ выполнялись для аппроксимирующих операторов Иосида.

Замечание 2.1. Аппроксимирующие операторы Иосида удовлетворяют условию 1.4) [8, с. 252].

Замечание 2.2. Аппроксимирующие операторы Иосида удовлетворяют условию 1.5).

Действительно, используя тождество (2.35), получаем

$$A_n(t)A^{-2}(t) = -nA(t)R_{A(t)}(n)A^{-2}(t) = -nR_{A(t)}(n)A^{-1}(t) =$$

$$= \left[I - A(t)R_{A(t)}(n) \right] A^{-1}(t) = A^{-1}(t) - R_{A(t)}(n) .$$

Используя оценку (2.34), получаем

$$\left\| A_n(t)A^{-2}(t) - A^{-1}(t) \right\| = \left\| R_{A(t)}(n) \right\| \le \frac{1}{1+n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

равномерно по $t \in [0,T]$, откуда следует 1.5).

Выясним условия, при которых решение (2.33) задачи (2.7), (2.8) сходится равномерно на $[0,T]$ при $\varepsilon \to 0$ к ограниченному решению (2.4) уравнения (2.1):

$$x_\varepsilon(t) \overset{\text{р.}}{\underset{\varepsilon\to 0}{\to}} x(t) ,\ t \in [0,T] . \tag{2.36}$$

Естественно, что такая сходимость будет иметь место лишь в том случае, когда

$$x_\varepsilon(0) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} x(0) , \tag{2.37}$$

т.е., в силу соотношений (2.6), (2.8), когда

$$x_{\varepsilon,0} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} -A^{-1}(0) f(0) . \tag{2.38}$$

Оказывается, что условие (2.38) достаточно для справедливости предельного перехода (2.36).

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.3. При выполнении условия (2.3) для эволюционного оператора задачи (2.30), (2.31) справедлива следующая оценка:

$$\left\| U_\varepsilon(t,s) \right\| \le e^{\omega \int_s^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}} ,\ 0 \le s \le t \le T ,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 . \tag{2.39}$$

Доказательство. Наряду с задачей (2.30), (2.31) рассмотрим задачу Коши вида

$$y'_\varepsilon(t) = B_\varepsilon(t)\, y_\varepsilon(t),\ s \le t \le T, s \in [0,T) , \tag{2.40}$$

$$y_\varepsilon(s) = z_{\varepsilon,s} , z_{\varepsilon,s} \in D(A), \tag{2.41}$$

где

$$B_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t) - \frac{\omega}{(t+\varepsilon)^\alpha} I .$$

Непосредственно проверяется, что если $z_\varepsilon(t)$ – решение задачи (2.30), (2.31), то функция

$$y_\varepsilon(t) = e^{-\omega\int\limits_s^t \frac{d\rho}{(\rho+s)^\alpha}} z_\varepsilon(t)$$

является решением задачи (2.40), (2.41). Заметим, что

$$R_{B_\varepsilon(t)}(\lambda) = (t+\varepsilon)^\alpha R_{A(t)}\left(\omega + \lambda(t+\varepsilon)^\alpha\right).$$

Тогда в силу (2.3) для любого $\lambda > 0$

$$\left\| R_{B_\varepsilon(t)}(\lambda) \right\| = (t+\varepsilon)^\alpha \left\| R_{A(t)}\left(\omega + \lambda(t+\varepsilon)^\alpha\right) \right\| \le$$

$$\le (t+\varepsilon)^\alpha \frac{1}{\omega + \lambda(t+\varepsilon)^\alpha - \omega} = \frac{1}{\lambda}.$$

Получена оценка

$$\left\| R_{B_\varepsilon(t)}(\lambda) \right\| \le \frac{1}{\lambda},\ \lambda > 0.$$

Следовательно [8, с. 250], решение $y_\varepsilon(t)$ задачи (2.40), (2.41) удовлетворяет условию $\| y_\varepsilon(t) \| \le \| z_{\varepsilon,s} \|$. Тогда из формулы

$$z_\varepsilon(t) = e^{\omega\int\limits_s^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}} y_\varepsilon(t)$$

получаем

$$\| z_\varepsilon(t) \| = e^{\omega\int\limits_s^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}} \| y_\varepsilon(t) \| \le e^{\omega\int\limits_s^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}} \| z_{\varepsilon,s} \|.$$

В силу равенства $z_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t,s)\, z_{\varepsilon,s}$ имеем

$$\| U_\varepsilon(t,s)\, z_{\varepsilon,s} \| \le e^{\omega\int\limits_s^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}} \| z_{\varepsilon,s} \|,$$

откуда следует оценка (2.39). Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия (2.3), (2.38). Тогда для любого сколь угодно малого положительного числа η существуют такие $\mu = \mu(\eta) > 0$, $\delta = \delta(\eta) > 0$, что для любого $0 < \varepsilon < \mu$ справедливо неравенство

$$\| x_\varepsilon(t)-x(t) \| < \eta\,,\ \ \forall\, t\in[0,\delta]\,. \tag{2.42}$$

Доказательство. Решение $x_\varepsilon(t)$ выражается формулой (2.33). В силу известной формулы [8, с. 240],

$$\frac{\partial U_\varepsilon(t,s)\,x}{\partial s} = -U_\varepsilon(t,s)\frac{A(s)}{(s+\varepsilon)^\alpha}\,x\,,\ \ x\in D(A)\,.$$

Тогда

$$\int_0^t U_\varepsilon(t,\tau)\frac{f(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^\alpha}\,d\tau = \int_0^t U_\varepsilon(t,\tau)\frac{A(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^\alpha}A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\int_0^t \frac{\partial U_\varepsilon(t,\tau)}{\partial\tau}A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau = -U_\varepsilon(t,\tau)A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\Big|_0^t +$$

$$+\int_0^t U_\varepsilon(t,\tau)\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'\,d\tau = U_\varepsilon(t,0)A^{-1}(0)\,f(0)-A^{-1}(t)\,f(t)+$$

$$+\int_0^t U_\varepsilon(t,\tau)\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'\,d\tau\,. \tag{2.43}$$

Значит, решение $x_\varepsilon(t)$ можно записать в виде

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(t,\,0)\,x_{\varepsilon,0} + U_\varepsilon(t,0)A^{-1}(0)\,f(0)-A^{-1}(t)\,f(t)+$$

$$+\int_0^t U_\varepsilon(t,\tau)\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'\,d\tau\,. \tag{2.44}$$

Учитывая соотношения (2.6), (2.8), получаем

$$x_\varepsilon(t)-x(t) = U_\varepsilon(t,\,0)\left[x_\varepsilon(0)-x(0)\right]-\left[x(t)-x(0)\right]-$$

$$-\left[A^{-1}(t)\,f(t)-A^{-1}(0)\,f(0)\right]+\int_0^t U_\varepsilon(t,\tau)\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'\,d\tau\,.$$

В силу оценки (2.3) имеем

$$\| x_\varepsilon(t)-x(t)\| \le \| x_\varepsilon(0)-x(0)\| + \| x(t)-x(0)\| +$$

$$+\left\| A^{-1}(t)\,f(t)-A^{-1}(0)\,f(0)\right\| + K\int_0^t e^{\omega\int_\tau^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}}\,d\tau\,, \tag{2.45}$$

где

$$K = \max_{0 \le \tau \le T} \left\| \left[A^{-1}(\tau) f(\tau) \right]' \right\|.$$

Пусть задано произвольное сколь угодно малое $\eta > 0$. В силу соотношения (2.37) для числа $\frac{\eta}{4}$ $\exists \mu_1 = \mu_1(\eta) > 0 \mid \forall\ 0 < \varepsilon < \mu_1$ выполняется неравенство $\left\| x_\varepsilon(0) - x(0) \right\| < \frac{\eta}{4}$. В силу непрерывности функции $x(t)$ в точке $t = +0$ для числа $\frac{\eta}{4}$ $\exists \delta_1 = \delta_1(\eta) > 0 \mid \forall\ 0 \le t \le \delta_1$ справедливо неравенство $\left\| x(t) - x(0) \right\| < \frac{\eta}{4}$. Аналогично, в силу непрерывности функции $A^{-1}(t) f(t)$ в точке $t = 0$ для числа $\frac{\eta}{4}$ $\exists \delta_2 = \delta_2(\eta) > 0 \mid \forall\ 0 \le t \le \delta_2$ выполняется неравенство $\left\| A^{-1}(t) f(t) - A^{-1}(0) f(0) \right\| < \frac{\eta}{4}$. Положим

$$\psi_\varepsilon(t) = \int_0^t e^{\omega \int_\tau^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}} d\tau;$$

$$\psi(t) = \int_0^t e^{\omega \int_\tau^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}} d\tau.$$

Покажем, что

$$\lim_{t \to +0} \psi(t) = 0. \tag{2.46}$$

При $\alpha = 1$ соотношение (2.46) очевидно, ибо

$$\psi(t) = \int_0^t e^{\omega \ln \frac{t}{\tau}} d\tau = \int_0^t \left(\frac{\tau}{t} \right)^{-\omega} d\tau = \frac{1}{t^{-\omega}} \frac{\tau^{-\omega+1}}{-\omega+1} \Bigg|_0^t = \frac{1}{1-\omega}\, t.$$

При $\alpha > 1$ и $t \le 1$

$$0 \le \psi(t) = \int_0^t e^{\omega \int_\tau^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}} d\tau \le \int_0^t e^{\omega \int_\tau^t \frac{d\rho}{\rho}} d\tau \underset{t \to +0}{\longrightarrow} 0,$$

откуда следует соотношение (2.46) для $\alpha > 1$.

Пусть

$$g_\varepsilon(\tau) = e^{\omega \int\limits_\tau^t \frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}};$$

$$g(\tau) = e^{\omega \int\limits_\tau^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}}.$$

Так как

$$g_\varepsilon(\tau) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} g(\tau),\ \tau \in [0,t];$$

$$\left| g_\varepsilon(\tau) \right| \le 1,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0,\ \tau \in [0,t],$$

то в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [15, с. 120]

$$\psi_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} \psi(t),\ t \in [0,T].$$

При любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функция $\psi_\varepsilon(t)$ непрерывна по $t \in [0,T]$. При убывании ε эта функция монотонно убывает и сходится к непрерывной функции $\psi(t)$. Тогда в силу обобщенной теоремы Дини [19, с. 657]

$$\psi_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{\text{р.}}{\to}} \psi(t),\ t \in [0,T]. \tag{2.47}$$

Далее,

$$\psi_\varepsilon(t) \le \left| \psi_\varepsilon(t) - \psi(t) \right| + \psi(t).$$

В силу предельного перехода (2.47), для числа $\frac{\eta}{8K}$ $\exists\, \mu_2 = \mu_2(\eta) > 0 \mid \forall\ 0 < \varepsilon < \mu_2$ справедливо неравенство $\left|\psi_\varepsilon(t) - \psi(t)\right| < \frac{\eta}{8K}$ для $\forall\ 0 \le t \le T$. В силу равенства (2.46) для числа $\frac{\eta}{8K}$ $\exists\, \delta_3 = \delta_3(\eta) > 0 \mid \forall\ 0 \le t \le \delta_3$ выполняется неравенство $\psi(t) < \frac{\eta}{8K}$. Положим $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Тогда в силу соотношения (2.45) для любого $0 < \varepsilon < \mu$

$$\left\| x_\varepsilon(t) - x(t) \right\| < \eta,\ \forall\, t \in [0, \delta].$$

Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. Пусть выполнены условия (2.38) и (2.3), причем, в случае $\alpha = 1$ пусть $\omega < -1$. Тогда при любом фиксированном $\delta \in (0, T)$

$$x_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{\text{p.}}{\to}} x(t)\,,\ t \in [\delta, T]\,. \tag{2.48}$$

Доказательство. Решение $x_\varepsilon(t)$ можно записать в виде (2.44). Решение $x(t)$ выражается формулой (2.4). В силу равенства

$$\frac{\partial U(t,s)\,x}{\partial s} = -U(t,s)\frac{A(s)}{s^\alpha}\,x\,,\ x \in D(A)\,,$$

получаем

$$x(t) = \int_0^t U(t,\tau)\frac{f(\tau)}{\tau^\alpha}\,d\tau = \int_0^t U(t,\tau)\frac{A(\tau)}{\tau^\alpha}A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\int_0^t \frac{\partial U(t,\tau)}{\partial \tau}A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\,d\tau = -U(t,\tau)A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\Big|_0^t +$$

$$+\int_0^t U(t,\tau)\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'\,d\tau = -A^{-1}(t)\,f(t) + \int_0^t U(t,\tau)\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'\,d\tau\,,$$

так как

$$U(t,0)A^{-1}(0)\,f(0) = \lim_{s \to +0} U(t,s)A^{-1}(0)\,f(0) = 0\,,$$

ибо в силу оценки (2.5)

$$\left\|U(t,s)A^{-1}(0)\,f(0)\right\| \le e^{\omega\int_s^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}}\left\|A^{-1}(0)\,f(0)\right\| \le$$

$$\le e^{\omega\int_s^\delta \frac{d\rho}{\rho^\alpha}}\left\|A^{-1}(0)\,f(0)\right\| \underset{s \to +0}{\to} 0\,.$$

Получена формула

$$x(t) = -A^{-1}(t)\,f(t) + \int_0^t U(t,\tau)\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'\,d\tau\,. \tag{2.49}$$

В силу формул (2.44), (2.49)

$$x_\varepsilon(t)-x(t)=U_\varepsilon(t,0)\,x_{\varepsilon,0}+U_\varepsilon(t,0)A^{-1}(0)\,f(0)+$$

$$+\int_0^t\left[U_\varepsilon(t,\tau)-U(t,\tau)\right]\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'d\tau\,. \tag{2.50}$$

В силу соотношений (2.3), (2.38)

$$U_\varepsilon(t,0)\,x_{\varepsilon,0}\ \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\text{р.}}{\to}}\ 0\,,\ t\in[\delta,T]\,. \tag{2.51}$$

Действительно, с учетом соотношений (2.6), (2.38), (2.39) получаем

$$\left\|U_\varepsilon(t,0)\,x_{\varepsilon,0}\right\|=\left\|U_\varepsilon(t,0)\left[x_\varepsilon(0)-x(0)\right]+U_\varepsilon(t,0)\,x(0)\right\|\le$$

$$\le e^{\omega\int_0^t\frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}}\left\|x_\varepsilon(0)-x(0)\right\|+e^{\omega\int_0^t\frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}}\left\|x(0)\right\|\le$$

$$\le\left\|x_\varepsilon(0)-x(0)\right\|+e^{\omega\int_0^t\frac{d\rho}{(\rho+\varepsilon)^\alpha}}\left\|x(0)\right\|\ \underset{\varepsilon\to 0}{\to}\ 0$$

равномерно по $t\in[\delta,T]$, откуда следует соотношение (2.51).

Аналогично показывается, что

$$U_\varepsilon(t,0)A^{-1}(0)\,f(0)\ \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\text{р.}}{\to}}\ 0\,,\ t\in[\delta,T]\,. \tag{2.52}$$

Положим

$$I_\varepsilon(t)=\int_0^t\left[U_\varepsilon(t,\tau)-U(t,\tau)\right]\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'d\tau\,.$$

В силу соотношений (2.50) – (2.52) для выполнения предельного перехода (2.48) достаточно показать, что

$$I_\varepsilon(t)\ \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{\text{р.}}{\to}}\ 0\,,\ t\in[\delta,T]\,. \tag{2.53}$$

Используя формулу (2.25), получаем

$$\left[A^{-1}(\tau)\,f(\tau)\right]'=-A^{-1}(\tau)A'(\tau)A^{-1}(\tau)\,f(\tau)+A^{-1}(\tau)\,f'(\tau)=A^{-1}(\tau)g(\tau)\,,$$

где $g(\tau)=f'(\tau)-A'(\tau)A^{-1}(\tau)\,f(\tau)$. Интеграл $I_\varepsilon(t)$ можно записать в виде

$$I_\varepsilon(t)=\int_0^t\left[U_\varepsilon(t,\tau)A^{-1}(\tau)-U(t,\tau)A^{-1}(\tau)\right]g(\tau)\,d\tau\,. \tag{2.54}$$

Оценим норму разности $U_\varepsilon(t,\tau)A^{-1}(\tau)-U(t,\tau)A^{-1}(\tau)$. Используя известные формулы [8, с. 240], получаем при любом $x\in E$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[U(t,s)U_\varepsilon(s,\tau)A^{-1}(\tau)\,x\right]=-U(t,s)\frac{A(s)}{s^\alpha}U_\varepsilon(s,\tau)A^{-1}(\tau)\,x+$$

$$+U(t,s)\frac{A(s)}{(s+\varepsilon)^\alpha}U_\varepsilon(s,\tau)A^{-1}(\tau)\,x=$$

$$=U(t,s)\left[\frac{1}{(s+\varepsilon)^\alpha}-\frac{1}{s^\alpha}\right]\left[A(s)U_\varepsilon(s,\tau)A^{-1}(\tau)\right]x\,.$$

Интегрируя в пределах от τ до t, получаем

$$U_\varepsilon(t,\tau)A^{-1}(\tau)\,x-U(t,\tau)\,A^{-1}(\tau)\,x=$$

$$=\int_\tau^t U(t,s)\left[\frac{1}{(s+\varepsilon)^\alpha}-\frac{1}{s^\alpha}\right]\left[A(s)U_\varepsilon(s,\tau)A^{-1}(\tau)\right]x\,ds\,. \qquad (2.55)$$

Известно [8, с. 246], что оператор

$$V_\varepsilon(t,s)=A(t)U_\varepsilon(t,s)A^{-1}(s)$$

является пределом эволюционных операторов

$$V_{\varepsilon,n}(t,s)=A(t)U_{\varepsilon,n}(t,s)A^{-1}(s)$$

задачи

$$v'_{\varepsilon,n}(t)=A_{\varepsilon,n}(t)\,v_{\varepsilon,n}(t)+A'(t)A^{-1}(t)\,v_{\varepsilon,n}(t),\ \ s\le t\le T,\, s\in[\,0,\,T);$$

$$v_{\varepsilon,n}(s)=v_{\varepsilon,s}\,.$$

Здесь $U_{\varepsilon,n}(t,s)$ – эволюционные операторы, отвечающие операторам $A_{\varepsilon,n}(t)$. В силу (2.18), (2.27)

$$\left\|V_{\varepsilon,n}(t,s)\right\|\le M_1,\ \ 0\le s\le t\le T\ ;\ \ n=1,2,\,...\ ;\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]\,.$$

Переходя в неравенстве

$$\left\|V_{\varepsilon,n}(t,s)\,x\right\|\le M_1\left\|x\right\|,\ \ x\in E\ ,$$

к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\left\|V_\varepsilon(t,s)\,x\right\|\le M_1\left\|x\right\|,\ \ x\in E\ ,$$

т.е.

$$\left\| V_\varepsilon(t,s) \right\| \le M_1 ,\ 0 \le s \le t \le T\ ;\ n = 1, 2, \dots\ ; \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\,. \qquad (2.56)$$

Из соотношения (2.55) следует в силу неравенств (2.5), (2.56) оценка

$$\left\| U_\varepsilon(t,\tau) A^{-1}(\tau)\, x - U(t,\tau)\, A^{-1}(\tau)\, x \right\| \le M_1 \| x \| \int_\tau^t \frac{(s+\varepsilon)^\alpha - s^\alpha}{s^\alpha (s+\varepsilon)^\alpha}\, e^{\omega \int_s^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}} ds \le$$

$$\le M_1 \left[(T+\varepsilon)^\alpha \right] \| x \| \int_0^t \frac{1}{s^{2\alpha}}\, e^{\omega \int_s^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}} ds\,. \qquad (2.57)$$

При $\alpha = 1$

$$\int_0^t \frac{1}{s^2}\, e^{\omega \int_s^t \frac{d\rho}{\rho}} ds = \int_0^t \frac{1}{s^2}\, e^{\omega \ln \frac{t}{s}} ds = \int_0^t \frac{1}{s^2} \left(\frac{s}{t} \right)^{-\omega} ds \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^{-\omega}} \int_0^t s^{-\omega-2} ds = \delta^\omega \frac{s^{-\omega-1}}{-\omega-1} \Bigg|_0^t \le \delta^\omega \frac{T^{-\omega-1}}{-\omega-1} = M_2\,. \qquad (2.58)$$

При $\alpha > 1$

$$\int_0^t \frac{1}{s^{2\alpha}}\, e^{\omega \int_s^t \frac{d\rho}{\rho^\alpha}} ds = \int_0^t \frac{1}{s^{2\alpha}}\, e^{\omega \left. \frac{\rho^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_s^t} ds = \int_0^t \frac{1}{s^{2\alpha}}\, e^{\frac{\omega}{\alpha-1} \left(\frac{1}{s^{\alpha-1}} - \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right)} ds \le$$

$$\le e^{-\frac{\omega}{\alpha-1} \frac{1}{\delta^{\alpha-1}}} \int_0^T \frac{1}{s^{2\alpha}}\, e^{\frac{\omega}{\alpha-1} \frac{1}{s^{\alpha-1}}} ds\,. \qquad (2.59)$$

Покажем, что несобственный интеграл

$$I_\alpha = \int_0^T \frac{1}{s^{2\alpha}}\, e^{\frac{\omega}{\alpha-1} \frac{1}{s^{\alpha-1}}} ds$$

сходится. Для этого достаточно показать, что $\lim\limits_{s \to +0} \varphi(s) = 0$, где

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^{2\alpha}}\, e^{\frac{\omega}{\alpha-1} \frac{1}{s^{\alpha-1}}}\,,$$

для чего, в свою очередь, достаточно показать, что

$$\lim_{s\to+0}\ln\varphi(s)=-\infty\,. \qquad (2.60)$$

Имеем

$$\ln\varphi(s)=\frac{\omega}{\alpha-1}\frac{1}{s^{\alpha-1}}-2\alpha\ln s=\frac{\omega}{\alpha-1}\frac{1}{s^{\alpha-1}}\left[1-\frac{2\alpha(\alpha-1)}{\omega}\,s^{\alpha-1}\ln s\right]; \quad (2.61)$$

$$\lim_{s\to+0}\left(s^{\alpha-1}\ln s\right)=\lim_{s\to+0}\frac{\ln s}{s^{-(\alpha-1)}}=\lim_{s\to+0}\frac{\frac{1}{s}}{-(\alpha-1)\,s^{-\alpha}}=$$

$$=\lim_{s\to+0}\frac{s^{\alpha-1}}{1-\alpha}=0\,. \qquad (2.62)$$

Из соотношения (2.61) следует равенство (2.60). Из соотношений (2.57) – (2.59) следует оценка

$$\left\|U_\varepsilon(t,\tau)A^{-1}(\tau)\,x-U(t,\tau)\,A^{-1}(\tau)\,x\right\|\le M\left[(T+\varepsilon)^\alpha-T^\alpha\right]\|\,x\,\|,$$

или

$$\left\|U_\varepsilon(t,\tau)A^{-1}(\tau)-U(t,\tau)\,A^{-1}(\tau)\right\|\le M\left[(T+\varepsilon)^\alpha-T^\alpha\right], \qquad (2.63)$$

где $M=M_1M_2$ при $\alpha=1$; $M=M_1\,I_\alpha\,e^{-\frac{\omega}{\alpha-1}\frac{1}{\delta^{\alpha-1}}}$ при $\alpha>1$. Учитывая соотношения (2.54) и (2.63), получаем

$$\|\,I_\varepsilon(t)\,\|\le M\left[(T+\varepsilon)^\alpha-T^\alpha\right]T\max_{0\le\tau\le T}\|\,g(\tau)\,\|\underset{\varepsilon\to0}{\to}0$$

равномерно по $t\in[\delta,T]$, откуда следует соотношение (2.53). Из (2.50) – (2.53) следует предельный переход (2.48). Лемма 2.5 доказана.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1, а также условия (2.38) и (2.3), причем в случае $\alpha=1$ пусть $\omega<-1$. Тогда справедлив предельный переход (2.36).

Доказательство. Пусть задано произвольное сколь угодно малое число $\eta>0$. По лемме 2.4 существуют такие $\mu_1=\mu_1(\eta)>0$, $\delta=\delta(\eta)>0$, что для любого $0<\varepsilon<\mu_1$ справедливо неравенство

$$\|\,x_\varepsilon(t)-x(t)\,\|<\eta\,,\ t\in[0,\delta]\,.$$

По лемме 2.5 существует такое число $\mu_2 = \mu_2(\eta) > 0$, что для любого $0 < \varepsilon < \mu_2$

$$\| x_\varepsilon(t) - x(t) \| < \eta, \ t \in [\delta, T].$$

Положим $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < \mu$

$$\| x_\varepsilon(t) - x(t) \| < \eta, \ t \in [0, T].$$

Теорема 2.2 доказана.

Например, задача вида

$$(t+\varepsilon)^\alpha x'_\varepsilon(t) = A(t) x_\varepsilon(t) + f(t), \quad 0 \le t \le T,$$
$$x_\varepsilon^{(l)}(0) = \varphi$$

при некоторых дополнительных условиях на $A(t)$, $f(t)$, обеспечивающих существование и единственность ее решения [22], обладает тем свойством, что ее решение удовлетворяет условию (2.37), следовательно, для него имеет место предельный переход (2.36).

§ 3. Случай переменной области определения операторного коэффициента

В данном параграфе излагаются результаты, полученные в соавторстве с С.Г. Крейном.

В банаховом пространстве E рассматривается задача

$$(t+\varepsilon)^\alpha x'_\varepsilon(t) = A(t)\, x_\varepsilon(t) + f(t), \quad 0 \le t \le T, \qquad (3.1)$$
$$x_\varepsilon(0) = x_0,$$

где $A(t)$ – заданная почти везде (п. в.) на $[0, T]$ операторная функция, значениями которой являются линейные неограниченные операторы $A(t) : D(A(t)) \subset E \to E$, $\overline{D(A(t))} = E$; ε – малый положительный параметр, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \text{const}, \varepsilon_0 > 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \ge 1$.

Исследуется вопрос о разрешимости задачи (3.1) и аппроксимации ее решения, а также решения соответствующего вырожденного ($\varepsilon = 0$) уравнения

$$t^\alpha x'(t) = A(t)\, x(t) + f(t), \quad 0 < t \le T. \qquad (3.2)$$

Ниже используются известные понятия ω-измеримости [42] и (M,ω)-устойчивости [43] операторной функции $A(t)$, обобщенного и точного решений [41] для (3.1), (3.2) а также следующие пространства векторных функций $u(t)$ со значениями в E: $C(E)$, $\|u\|_C = \sup\limits_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_E$; $L^p(E)$, $p\in[1,\infty)$, $\|u\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_E^p\,dt\right)^{1/p}$; $L^p_\rho(E) = \left\{u:(0,T)\to E \mid \rho(t)u(t)\in L^p(E)\right\}$, $\|u\|_{L^p_\rho} = \|\rho(t)u(t)\|_{L^p}$.

Всюду в дальнейшем предполагается выполнение следующих условий:

а) E рефлексивно;

б) $A(t)$ ω-измерима и (M,ω)-устойчива в E;

в) существует банахово пространство F, непрерывно и плотно вложенное в E, такое что $F\subset D(A(t))$ п. в. на $[0,T]$, сужение $A(t)\big|_F$ η-измеримо и (N,η)-устойчиво в F;

г) $\int\limits_\delta^T \|A(t)\|^p_{L(F,E)}\,dt<\infty$ для любого $0<\delta<T$;

д) $\omega+1/p<0$.

Известно [41], что при $\alpha=1$ сингулярное уравнение (3.2) для любой $f(t)\in L^p(E)$, $p\in[1,\infty)$, имеет единственное обобщенное решение $x(t)\in L^p(E)$; а при $\alpha>1$ и для любой $f(t)\in L^p_{\rho_2}(E)$, $p\in[1,\infty)$, где

$$\rho_2=\rho_2(t)=t^{-\alpha/p}\exp\left\{-\frac{1}{p}\int\limits_t^T\frac{d\rho}{\rho^\alpha}\right\},$$

уравнение (3.2) имеет единственное обобщенное решение $x(t)\in L^p_{\rho_2}(E)$.

Запишем для задачи (3.1) и уравнения (3.2) их аппроксимации с помощью операторов Иосида $A_n(t)=n^2R(n,A(t))-nI$:

$$(t+\varepsilon)^\alpha x'_{\varepsilon,n}(t)=A_n(t)\,x_{\varepsilon,n}(t)+f(t),\quad 0\le t\le T,$$
$$x_{\varepsilon,n}(0)=x_0; \tag{3.1′}$$

$$t^{\alpha} x_n'(t) = A_n(t)\, x_n(t) + f(t), \quad 0 < t \le T \ . \tag{3.2$'$}$$

Теорема 3.1. При $\alpha \ge 1$ для любых $f(t) \in L^p(E)$, $p \in [1,\infty)$, $x_0 \in \overline{D}$, где $D = \{ x \in E \mid x \in D(A(t))$ п. в. на $[0,T]$ и $A(t)x \in L^p(E) \}$, задача (3.1) при произвольном достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет единственное обобщенное решение $x_\varepsilon(t) \in C(E)$ и

$$x_{\varepsilon,n}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{C}{\to}} x_\varepsilon(t) \ , \tag{3.3}$$

где $x_{\varepsilon,n}(t)$ – точное решение задачи (3.1$'$)

Из предельного перехода (3.3) следует, что

$$x_{\varepsilon,n}(t) \underset{n\to\infty}{\overset{L^p}{\to}} x_\varepsilon(t) \ . \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. При $\alpha = 1$ для любой $f(t) \in L^p(E)$, $p \in [1,\infty)$, уравнение (3.2$'$) при произвольном достаточно большом n имеет единственное точное решение $x_n(t) \in L^p(E)$ и

$$x_n(t) \underset{n\to\infty}{\overset{L^p}{\to}} x(t) \, , \tag{3.5}$$

где $x(t)$ – обобщенное решение уравнения (3.2).

Лемма 3.2. При $\alpha = 1$ для любой $f(t) \in L^p_{\rho_*}(E)$, $p \in [1,\infty)$, где $\rho_* = \rho_*(t) = t^{-1}$,

$$x_{\varepsilon,n}(t) \underset{\varepsilon\to 0}{\overset{L^p}{\to}} x_n(t) \, . \tag{3.6}$$

Заметим, что $L^p_{\rho_*}(E) \subset L^p(E)$.

Теорема 3.2. При $\alpha = 1$ для любой $f(t) \in L^p_{\rho_*}(E)$, $p \in [1,\infty)$,

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} \ \lim_{\varepsilon\to 0} \ x_{\varepsilon,n}(t) \, , \tag{3.7}$$

где сходимость понимается по норме пространства $L^p(E)$.

Замечание 3.1. Если в (3.4) предельный переход равномерен по ε, то в силу (3.4) – (3.6) при $\alpha = 1$ для любой $f(t) \in L^p_{\rho_*}(E)$, $p \in [1, \infty)$,

$$x_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L^p}{\to}} x(t) \ .$$

Лемма 3.3. При $\alpha > 1$ для любой $f(t) \in L^p_{\rho_2}(E)$, $p \in [1, \infty)$, уравнение (3.2′) при произвольном достаточно большом n имеет единственное точное решение $x_n(t) \in L^p_{\rho_2}(E)$ и

$$x_n(t) \underset{n \to \infty}{\overset{L^p_{\rho_2}}{\to}} x(t) ,$$

где $x(t)$ – обобщенное решение уравнения (3.2).

Лемма 3.4. При $\alpha > 1$ для любой $f(t) \in L^p_{\rho_1}(E)$, $p \in [1, \infty)$, где $\rho_1 = \rho_1(t) = t^{-\alpha/p}$, уравнение (3.2′) при произвольном достаточно большом n имеет единственное точное решение $x_n(t) \in L^p_{\rho_1}(E)$, кроме того, если $f(t) \in L^p_{\rho_0}(E)$, где $\rho_0 = \rho_0(t) = t^{-\alpha/p - \alpha}$, то

$$x_{\varepsilon,n}(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L^p_{\rho_1}}{\to}} x_n(t) . \tag{3.8}$$

Замечание 3.2. $L^p_{\rho_0}(E) \subset L^p_{\rho_1}(E) \subset L^p(E) \subset L^p_{\rho_2}(E)$ и из соотношений (3.4), (3.8) следует, что

$$x_{\varepsilon,n}(t) \underset{n \to \infty}{\overset{L^p_{\rho_2}}{\to}} x_\varepsilon(t) ,$$

$$x_{\varepsilon,n}(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L^p_{\rho_2}}{\to}} x_n(t) .$$

Теорема 3.3. При $\alpha > 1$ для любой $f(t) \in L^p_{\rho_0}(E)$, $p \in [1, \infty)$, справедливо соотношение (3.7), где сходимость понимается по норме пространства $L^p_{\rho_2}(E)$.

Замечание 3.3. Если в соотношении (3.4) предельный переход равномерен по ε, то при $\alpha > 1$ для любой $f(t) \in L^p_{\rho_0}(E)$, $p \in [1, \infty)$,

$$x_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L^p_{\rho_2}}{\longrightarrow}} x(t).$$

При доказательстве приведенных утверждений используются различные варианты обобщенного неравенства Харди [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Актуальность изучения почти вырождающихся дифференциальных уравнений обусловлена двумя причинами: во-первых, такие уравнения используются при решении некоторых задач естествознания, во-вторых, они являются полезным инструментом при исследовании вырождающихся дифференциальных уравнений методом малых возмущений.

Как показано в данной книге, в случае почти вырождающихся линейных дифференциальных уравнений удается применить конструктивные методы, т.е. найти решения изучаемых уравнений в аналитическом виде. В нелинейном случае придется больше полагаться на качественные методы исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

2. Глушко В.П. Линейные вырождающиеся дифференциальные уравнения. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1972. – 193 с.

3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

4. Зюкин П.Н. Поведение решений сингулярных дифференциальных уравнений с малым параметром: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1982. – 13 с.

5. Зюкин П.Н. О зависимости решения задачи Коши для системы сингулярных дифференциальных уравнений от параметра // Математические заметки. – 1987. – Т. 42, № 3. – С. 403 – 410.

6. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: Физматлит, 1995. – 176 с.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

8. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

9. Крейн С.Г., Фомин В.И. Малые возмущения сингулярных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // ДАН СССР. – 1990. – Т. 314, № 1. – С. 77 – 79.

10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1975. – 432 с.

11. Ломов С.А. Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1966. – Т. 30. – С. 525 – 572.

12. Ломов С.А. Приближенное решение некоторых уравнений с параметрами // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т.5. № 7. – С. 1193 – 1206.

13. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 416 с.

14. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с.

15. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

16. Олейник О.А., Самохин В.Н. Математические методы в теории пограничного слоя. – М.: Наука, 1997. – 512 с.

17. Смелянский О.М. Исследование существования и гладкости решений некоторых вырождающихся дифференциальных уравнений: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1974. – 13 с.

18. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. – М.: Наука, 1970. – 800 с.

20. Фомин В.И. Сингулярное дифференциальное уравнение с малым параметром в случае переменного ограниченного операторного коэффициента // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1350 – 1354.

21. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэффициентом // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 9.– С. 1629–1630.

22. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1989. – 15 с.

23. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с переменным неограниченным операторным коэффициентом // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 1997.– Т. 3, № 3. – С. 275 – 290.

24. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэффициентом и переменной правой частью // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 1997. – Т. 3, № 4. – С. 435 – 454.

25. Фомин В.И. Метод малых регулярных возмущений при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 12. – С. 1712.

26. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения вырождающегося линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянным ограниченным операторным коэффициентом и переменным свободным членом // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2000. – Т. 5, вып. 1. – С. 80 – 82.

27. Фомин В.И. О малом стабилизирующем возмущении сингулярного дифференциального уравнения с постоянным ограниченным оператором и вырождающимся коэффициентом общего вида // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки.– 2001.– Т. 6, вып. 3.– С. 306–307.

28. Фомин В.И. О слабо вырождающемся линейном дифференциальном уравнении первого порядка с постоянным ограниченным операторным коэффициентом в банаховом пространстве // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2003. – Т. 8, вып. 2. – С. 227–228.

29. Фомин В.И. О слабо вырождающемся линейном дифференциальном уравнении первого порядка в банаховом пространстве с вырождающимся коэффициентом степенного вида // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2003. – Т. 9, № 2. – С. 267 – 270.

30. Фомин В.И. О малом стабилизирующем возмущении сингулярного дифференциального уравнения с постоянным оператором и вырождающимся коэффициентом общего вида // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 183 – 190.

31. Фомин В.И. О слабо вырождающемся линейном дифференциальном уравнении первого порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1433 – 1435.

32. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1568–1569.

33. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1140–1141.

34. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 1130 – 1133.

35. Фомин В.И. Об уравнении Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 483 – 488.

36. Фомин В.И. О линейном дифференциальном уравнении второго порядка в банаховом пространстве в случае негативного операторного дискриминанта // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2008. – Т. 13, вып. 1. – С. 38 – 42.

37. Фомин В.И. Об одном семействе решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 3. – С. 427–428.

38. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве в терминах косинус и синус оператор-функций // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2010. – Т. 15, вып. 2. – С. 519 – 525.

39. Фомин В.И. О векторном уравнении Эйлера второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. – 2012. – Т. 17, вып. 2. – С. 517 – 526.

40. Фомин В.И. Векторное уравнение Эйлера второго порядка в банаховом пространстве. – М.: Издательский дом «Спектр», 2012. – 136 с.

41. Coppoletta G. Abstract singular evolution equations of hyperbolic type // J. Funct. Anal. – 1983. – Vol. 50, № 1. – P. 50 – 66.

42. Da Prato G., Grisvard P. Sommes d’operateurs lineaires et equations differentielles operationelles // J. Math. pures et appl. – 1975. – Vol. 54, № 3. – P. 305 – 387.

43. Kato T. Linear evolution equations of «hyperbolic» type // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. – 1970. – Vol. 17, № 1/2. – P. 241 – 258.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

ФОМИН Василий Ильич

ПОЧТИ ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Редактор Т.М. Г л и н к и н а
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Р ы ж к о в а

Сдано в набор 14.08.2013
Подписано в печать 27.08.2013. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 7,44. Уч.-изд. л. 7,1. Тираж 400 экз. Заказ № 367

ISBN 978-5-4442-0038-4

9 785444 200384

ООО «Издательский дом «Спектр»,
119048, Москва, ул. Усачева, д. 35, стр. 1
Http://www.idspektr.ru. E-mail: idspektr@rambler.ru

Подготовлено к печати и отпечатано в Издательско-полиграфическом центре ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14

По вопросам приобретения книги обращаться
по телефону 8(4752)638108
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru