

Министерство образования и науки Российской Федерации  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»**

**Е.Б. ВИНОКУРОВ, В.М. ИВАНОВ,  
А.В. ЛАНОВАЯ, Т.И. ЧЕРНЫШОВА**

# **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ**

## **ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА**

Рекомендовано УМО по образованию в области радиотехники,  
электроники, биомедицинской техники и автоматизации  
в качестве учебного пособия для бакалавров по направлениям  
211000 «Конструирование и технология электронных средств» и  
140400 «Электроэнергетика и электротехника»  
дневного и заочного отделений



---

Тамбов  
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
2013

УДК 621.3(075.8)  
ББК з21я73  
Э454

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор,  
Заслуженный изобретатель Российской Федерации  
*Е.И. Глинкин*

Доктор физико-математических наук, профессор,  
Заслуженный деятель науки Российской Федерации  
*В.А. Федоров*

Э454 Электрические цепи и сигналы. Теория и практика : учебное пособие / Е.Б. Винокуров, В.М. Иванов, А.В. Лановая, Т.И. Чернышова. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 168 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1221-0.

Содержит краткий теоретический материал по электрическим и магнитным цепям и сигналам, электрическим цепям с распределёнными параметрами, а также описание лабораторных работ по рассматриваемым темам.

Соответствует программе подготовки бакалавров по направлениям 211000 «Конструирование и технология электронных средств» и 140400 «Электроэнергетика и электротехника»

Предназначено для практических занятий и лабораторных работ по дисциплине «Электротехника и электроника».

УДК 621.3(075.8)  
ББК з21я73

**ISBN 978-5-8265-1221-0**

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2013

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

---

Современная электроника требует от специалистов широких знаний, связанных с распространением и преобразованием электрических сигналов. Первым и основным шагом в этом направлении является освоение физических законов электричества и магнетизма, анализ электрических и магнитных цепей и прохождение сигналов через эти цепи и многое другое, предусмотренное в изучении дисциплины «Электротехника и электроника». Полнота освоения дисциплины невозможна без решения конкретных задач и выполнения лабораторных работ.

Учебное пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит краткое описание теории по цепям и сигналам с применением математических методов расчёта стационарных и переходных режимов. Во второй части предлагается лабораторный практикум, в котором каждая лабораторная работа выполняется как традиционным способом, так и с помощью компьютерного моделирования с использованием новых информационных технологий.

Книга может быть полезна для подготовки бакалавров радио- и электротехнических направлений.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам, доктору физико-математических наук, профессору В.А. Федорову и доктору технических наук, профессору Е.И. Глинкину за просмотр книги, сделанные советы и предложения, которые позволили улучшить её содержание.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

---

---

Идеализированной называют электрическую цепь, которую получают из реальной электрической цепи при замене каждого реального элемента его упрощённой моделью, составленной из идеализированных элементов.

К идеализированным элементам относятся: активное сопротивление, индуктивность, ёмкость, источник напряжения и источник тока.

Активное сопротивление – идеализированный пассивный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в другой вид энергии, например в тепловую, механическую или световую.

Зависимость между током и напряжением на активном сопротивлении подчиняется закону Ома

$$u = Ri \quad \text{или} \quad i = Gu,$$

где  $G = \frac{1}{R}$  – проводимость.

Мгновенная мощность сопротивления

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2.$$

Электрическая энергия, поступающая в сопротивление:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p dt = R \int_{-\infty}^t i^2 dt = G \int_{-\infty}^t u^2 dt > 0.$$

Ёмкость – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию электрического поля.

Мгновенные значения тока и напряжения на ёмкости связаны соотношениями

$$i = C \frac{du}{dt}; \quad u = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt.$$

Мгновенная мощность ёмкости

$$p = ui = Cu \frac{du}{dt}.$$

Энергия, запасённая ёмкостью:

$$W(t) = \int_{-\infty}^t p dt = C \int_0^u u du = C \frac{u^2}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Индуктивность – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию магнитного поля.

Мгновенные значения тока и напряжения на индуктивности связаны соотношениями

$$u = -e = L \frac{di}{dt}; \quad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u dt .$$

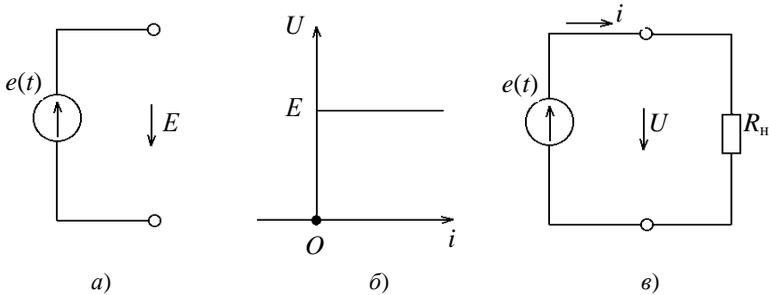
Мгновенная мощность индуктивности

$$p = ui = Li \frac{di}{dt} .$$

Энергия, запасённая индуктивностью:

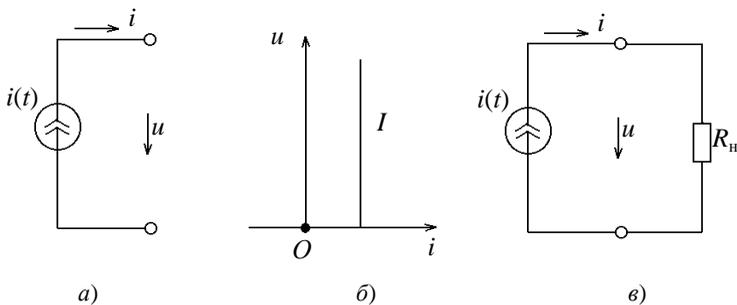
$$W(t) = \int_{-\infty}^t p dt = L \int_0^i i di = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L} .$$

Идеальный источник напряжения (источник ЭДС) представляет собой идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от величины протекающего через него тока (рис. 1.1).



**Рис. 1.1. Идеальный источник напряжения:**

*a* – условное графическое обозначение; *б* – внешняя характеристика источника постоянного тока; *в* – идеальный источник напряжения с нагрузкой



**Рис. 1.2. Идеальный источник тока:**

*a* – условное графическое обозначение; *б* – внешняя характеристика источника постоянного тока; *в* – идеальный источник тока с нагрузкой

Ток и мощность в нагрузке

$$i = \frac{u}{R_H} = \frac{1}{R_H} e(t); \quad p = \frac{1}{R_H} u^2 = \frac{1}{R_H} e(t).$$

Идеальный источник тока (источник тока) – это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от величины напряжения на его зажимах (рис. 1.2).

Напряжение и мощность в нагрузке

$$u = R_H i = R_H i(t); \quad p = R_H i^2 = R_H i^2(t).$$

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключённых к каждому из узлов электрической цепи, в любой момент равна нулю:

$$\sum_k i_k = 0,$$

где  $k$  – номер ветви, подключённой к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в любой произвольный контур: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур электрической цепи, в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_k u_k = 0,$$

где  $k$  – номер ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Уравнение по второму закону Кирхгофа можно составить и для напряжений элементов, входящих в ветви данного контура.

Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на элементах любого контура в каждый момент времени равна алгебраической сумме ЭДС источников напряжений, действующих в этом контуре:

$$\sum_i u_i = \sum_j e_j,$$

где  $u_i$  – напряжение каждого из элементов рассматриваемого контура, за исключением напряжений источников ЭДС;  $e_j$  – ЭДС источников напряжений, действующих в контуре.

Мгновенное значение величины напряжения (тока), изменяющееся с течением времени по синусоидальному или косинусоидальному закону:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \psi_1),$$

где  $U_m$  – амплитуда или максимальное значение гармонической функции, её размерность совпадает с размерностью гармонической функции;  $(\omega t + \psi)$  – аргумент, называется мгновенной (полной) фазой;  $\psi$  – начальная фаза;  $\omega$  – скорость изменения мгновенной (полной) фазы – угловая частота;  $\psi_1 = \psi + \frac{\pi}{2}$ .

Период  $T$ , угловая частота  $\omega$  и частота  $f$  связаны соотношением

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \quad f = \frac{1}{T}.$$

Действующее значение  $I$  периодического тока  $i(t)$  численно равно значению постоянного тока  $I$ , при протекании которого за время  $T$  выделится такое же количество энергии, как и при протекании тока  $i(t)$  за то же время.

Действующее значение гармонической функции в  $\sqrt{2}$  раз меньше её амплитуды:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m.$$

Действующим значением периодической функции  $a(t)$  называется среднеквадратическое значение этой функции за период  $T$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [a(t)]^2 dt}.$$

Среднее значение синусоидально изменяющегося тока (напряжения) на положительном полупериоде

$$I = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m; \quad U = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m.$$

Если к сопротивлению приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону

$$u = \sqrt{2} U_r \cos(\omega t + \psi_u),$$

то ток определяется как

$$i = \frac{u}{R} = \frac{\sqrt{2} U_r \cos(\omega t + \psi_u)}{R}.$$

Мгновенная мощность

$$p = ui = U_r I_r + U_r I_r \cos 2(\omega t + \psi).$$

Среднее значение мощности сопротивления за период

$$P = U_r I_r.$$

Если к ёмкости приложено гармоническое напряжение  $u = \sqrt{2}U_C \sin(\omega t + \psi)$ , то ток имеет вид

$$i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2}U_C \omega C \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}).$$

Мгновенная мощность ёмкости

$$p = ui = U_C I_C \sin 2(\omega t + \psi_u).$$

Энергия, запасённая в ёмкости:

$$W_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_u)].$$

Если ток индуктивности изменяется по гармоническому закону  $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \psi_i)$ , то напряжение на индуктивности

$$u = L \frac{di}{dt} = \omega L \sqrt{2}I \cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2}\omega LI \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}).$$

Мгновенная мощность на индуктивности

$$p = ui = U_L I_L \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

Энергия, запасённая в индуктивности:

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_L^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)].$$

Если цепь, состоящая из последовательно соединённых элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , включена на синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}; \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$\omega L = X_L$  – индуктивное сопротивление;  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  – ёмкостное сопро-

тивление;  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = X = X_L - X_C$  – реактивное сопротивление;

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \text{ – полное сопротивление.}$$

Если цепь, состоящая из параллельно соединённых элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , включена на синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

где

$$I_m = U_m Y = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{R};$$

$\frac{1}{R} = g$  – активная проводимость;  $\omega C = b_C$  – проводимость ёмкости;

$\frac{1}{\omega L} = b_L$  – проводимость индуктивности;  $\omega C - \frac{1}{\omega L} = b$  – реактивная

проводимость;  $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$  – входная проводимость.

### Контрольные вопросы

1. Что называется электрической цепью?
2. Что понимается под положительным направлением тока?
3. Что понимается под терминами «сопротивление», «индуктивность», «ёмкость»?
4. Что понимается под терминами «источник тока», «источник напряжения»?
5. Какие элементы потребляют электромагнитную энергию и почему?
6. Сформулируйте первый и второй законы Кирхгофа и поясните их физический смысл и порядок применения.

7. Что понимается под действующим значением переменного тока? Каким образом можно определить действующее значение гармонической функции?

8. Каковы фазовые соотношения между напряжением и током в цепях с активным сопротивлением, с ёмкостью, с индуктивностью?

9. Что называется полным сопротивлением и проводимостью электрической цепи? Написать их аналитические выражения.

10. Какова разница между активной, реактивной и полной мощностями? В каких единицах они выражаются?

## 2. АНАЛИЗ И РАСЧЁТ ПРОСТЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Каждой гармонической функции времени, например напряжению

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u),$$

можно поставить в соответствие комплексное число, т.е.

$$U(t) \dots U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \dot{U}_m e^{j\omega t} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) + jU_m \sin(\omega t + \varphi_u),$$

где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$  – комплексная амплитуда;  $U_m$  – модуль комплексного числа, равный амплитуде гармонического напряжения;  $\varphi_u$  – аргумент комплексного числа, равный начальной фазе гармонического напряжения;  $\operatorname{Re}\{U(t)\} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  – вещественная часть комплексного изображения;  $\operatorname{Im}\{U(t)\} = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  – коэффициент при мнимой части комплексного изображения.

Линейным операциям над гармоническими функциями (оригиналами) соответствуют следующие операции над их изображениями:

а) умножению оригинала на постоянное число соответствует умножение изображения данного оригинала на это же число:

$$U_R = R i \dots R \dot{U}_m e^{j\omega t};$$

б) суммированию оригиналов соответствует суммирование их изображений:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n \dots (\dot{U}_{1m} + \dot{U}_{2m} + \dots + \dot{U}_{nm}) e^{j\omega t};$$

в) дифференцированию оригинала соответствует алгебраическая операция умножения изображения этого оригинала на множитель  $j\omega$ :

$$\frac{dU}{dt} \dots j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t};$$

г) интегрированию оригинала соответствует алгебраическая операция деления изображения этого оригинала на оператор  $j\omega$ :

$$\int U dt \dots \frac{1}{j\omega} \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U} = Z \dot{I}_m; \dot{I}_m = \dot{Y}_m \dot{U}_m$$

или

$$\dot{U} = Z \dot{I}; \dot{I}_m = \dot{Y} \dot{U}.$$

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0,$$

где  $k$  – номер ветви, подключённой к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{i=1}^m \dot{U}_{mi} = \sum_{j=1}^m \dot{E}_{mj}; \quad \sum_{i=1}^m \dot{U}_i = \sum_{j=1}^m \dot{E}_j,$$

где  $m$  – число пассивных элементов контура;  $n$  – число источников напряжения.

Комплексное сопротивление последовательной  $RLC$ -цепи

$$\dot{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = Z e^{j\varphi}; \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2};$$

$$\varphi = \text{arctg}(\omega L - 1/\omega C) / R.$$

Комплексная проводимость параллельной  $RLC$ -цепи

$$\dot{Y} = G - j(1/\omega L - \omega C) = Y e^{j\varphi}; \quad Y = \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2};$$

$$\varphi = \text{arctg}(1/\omega L - \omega C) / G.$$

Комплексная мощность цепи

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = P + jQ = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi,$$

где  $S$  – полная мощность;  $P$  – активная мощность;  $Q$  – реактивная мощность.

Уравнение баланса комплексных мощностей:

$$\sum_{k=1}^N \dot{E}_k \dot{I}_k + \sum_{k=1}^M \dot{U}_k \dot{I}_k = \sum_{k=1}^H \dot{I}_k^2 \dot{Z}_k,$$

где  $N$  – число идеальных источников напряжения;  $M$  – число идеальных источников тока;  $H$  – число идеализированных пассивных элементов.

При расчёте электрических цепей часто возникает необходимость преобразования схем этих цепей в более простые и удобные для расчё-

та. Приёмы преобразования схем одинаковы для цепей как постоянного, так и переменного тока.

Последовательное соединение (рис. 2.1):

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{эк}} &= \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dots + \dot{Z}_n; \\ \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dots + \dot{U}_n. \end{aligned}$$

Параллельное соединение трёх сопротивлений (рис. 2.2):

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_{\text{экв}} &= \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3}; \\ \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3; \\ \dot{U} = \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_3; \\ \dot{Y}_{\text{вх}} &= \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3. \end{aligned}$$

Смешанное соединение сопротивлений (рис. 2.3):

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_{\text{вх}}}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$

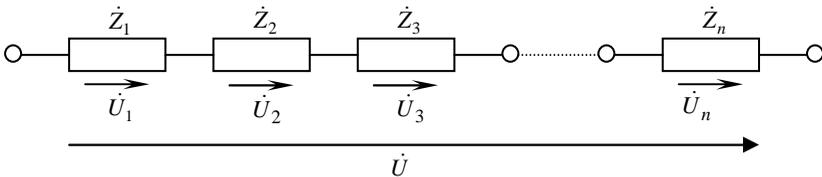


Рис. 2.1. Последовательное соединение

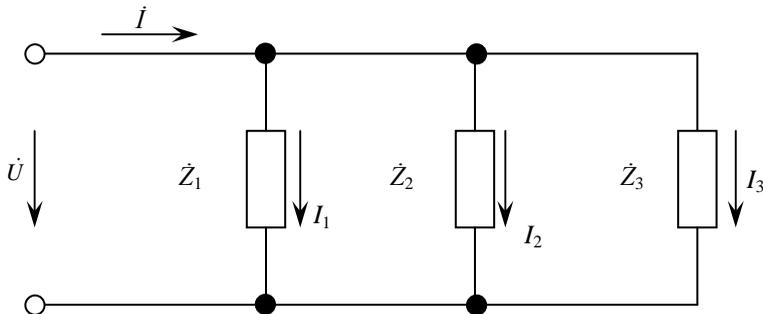
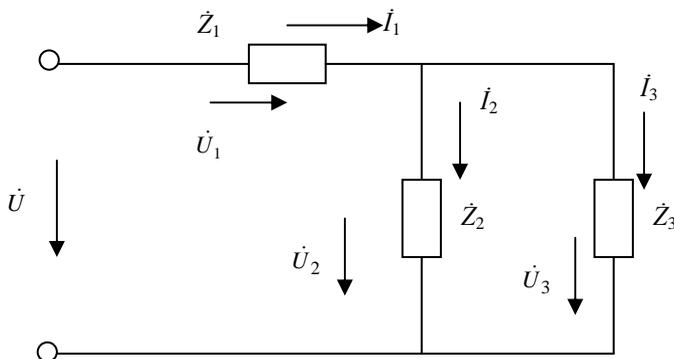


Рис. 2.2. Параллельное соединение трёх сопротивлений



**Рис. 2.3. Смешанное соединение сопротивлений**

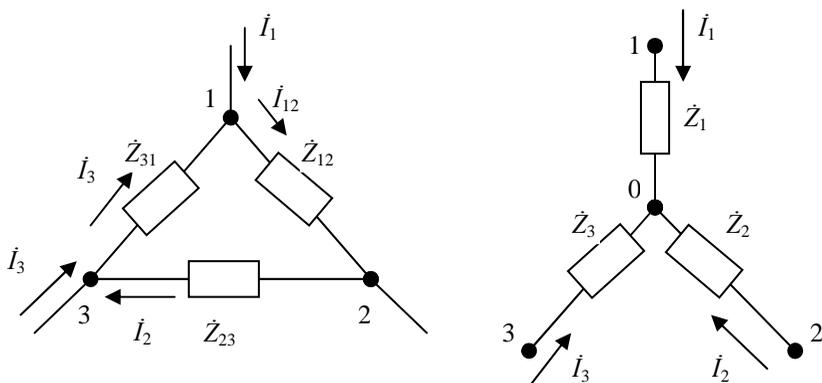
Преобразование соединения треугольником в эквивалентную звезду (рис. 2.4):

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{23}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}.$$

В случае преобразования звезды в эквивалентный треугольник сопротивления сторон последнего определяют из выражений

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}; \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}; \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}.$$

При составлении уравнений индуктивно связанных электрических цепей необходимо учитывать способы включения индуктивностей.



**Рис. 2.4. Преобразование соединения треугольником в эквивалентную звезду**

При согласном включении (рис. 2.5), где  $M$  – взаимная индуктивность, комплексное сопротивление взаимной индукции

$$\dot{Z}_M = j\omega M = jX_M, \text{ здесь } X_M = \omega M.$$

Реактивное сопротивление двух индуктивно связанных катушек при их согласном включении

$$X_{\text{согл}} = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M.$$

При встречном включении (рис. 2.6)

$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I};$$

$$L_{\text{встр}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

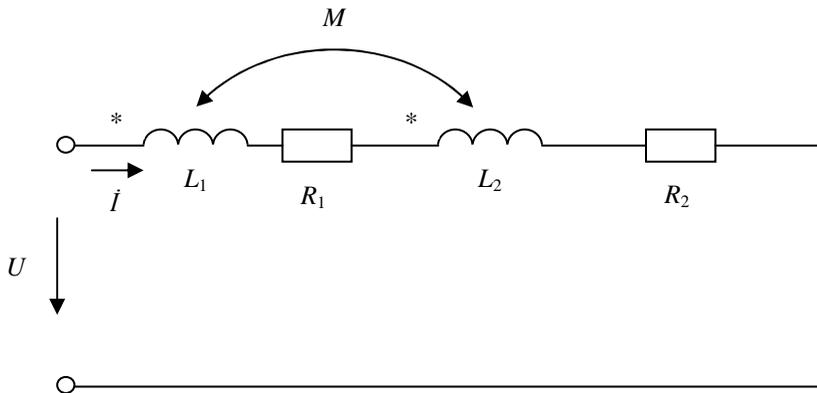


Рис. 2.5. Согласное включение двух индуктивно связанных катушек

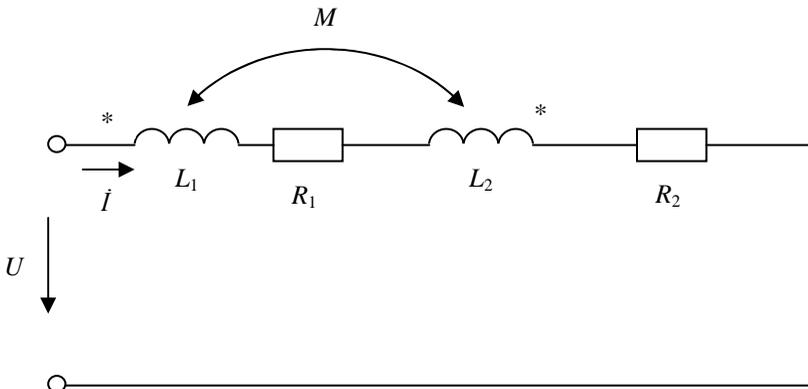


Рис. 2.6. Встречное включение

Реактивное сопротивление встречно включённых двух индуктивно связанных катушек

$$X_{\text{встр}} = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M.$$

При расчёте разветвлённых цепей с взаимной индукцией используют методы уравнений Кирхгофа, контурных токов и наложения.

При расчёте в уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа, к напряжению на индуктивном элементе  $L \frac{di}{dt}$  необходимо

добавить напряжение взаимной индукции  $\pm M \frac{di}{dt}$ . При этом напряжение взаимной индукции имеет знак плюс, если направление обхода индуктивного элемента и выбранное положительное направление тока в индуктивно связанном элементе совпадают относительно одноимённых зажимов этих элементов.

Уравнения в комплексной форме трансформатора без ферромагнитного сердечника (воздушный трансформатор) (рис. 2.7) при согласованном включении катушек будут иметь вид:

- для первичной цепи

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2;$$

- для вторичной цепи

$$0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{Z}_H \dot{I}_2.$$

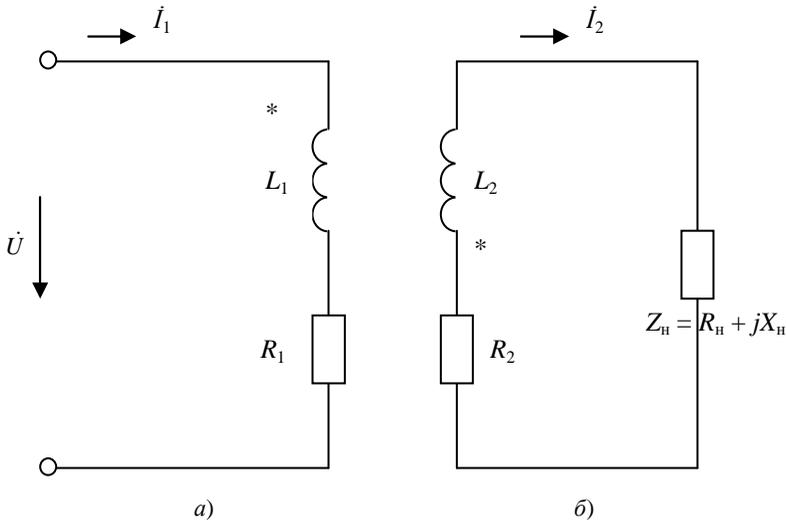
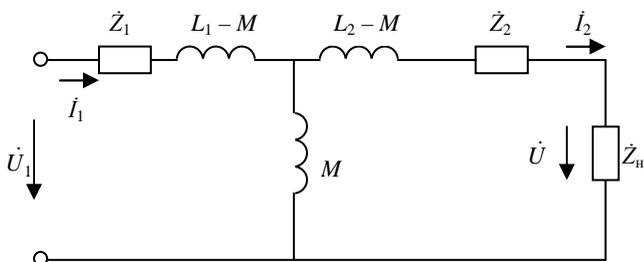


Рис. 2.7. Трансформатор без ферромагнитного сердечника:  
*a* – для первичной цепи; *б* – для вторичной цепи



**Рис. 2.8. Схема замещения трансформатора без ферромагнитного сердечника**

Схема замещения без приведения числа витков, в которой разности  $L_1 - M$  и  $L_2 - M$  имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток, приведена на рис. 2.8.

Идеальный трансформатор ( $R_1 = R_2 = 0$ ;  $L_1 = L_2 = \infty$ ;  $M = \infty$ ;  $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = I$ ), включённый между нагрузкой и источником электроэнергии, изменяет сопротивление нагрузки  $Z_n$  пропорционально квадрату коэффициента трансформации  $n$ , т.е. осуществляет согласование сопротивлений:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = n; \quad \dot{Z}_{\text{вх}_1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = n^2 \dot{Z}_2.$$

### Контрольные вопросы

1. В чём состоит идея расчёта электрической цепи комплексным методом?
2. В чём заключается удобство комплексной формы расчёта электрической цепи?
3. В каких формах может быть записано комплексное число?
4. Как переходят от мгновенных значений токов к комплексным и наоборот?
5. Что называется комплексной амплитудой синусоидальной функции? Написать выражения для комплексных амплитуд тока и напряжения.
6. Написать выражение для комплекса мгновенного значения напряжения.
7. Написать выражения комплексного сопротивления и комплексной проводимости для цепей с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$  и  $RLC$ .
8. Чему равны модуль и аргумент комплексного сопротивления в последовательной цепи с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$  и  $RLC$ ?
9. Чему равны модуль и аргумент комплексной проводимости в параллельной цепи с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$ ,  $RLC$ ?

10. Написать уравнение, выражающее второй закон Кирхгофа для комплексных амплитуд (то же для первого закона Кирхгофа).

11. Как связаны сопротивления и проводимости одного и того же участка?

12. Записать и пояснить выражение для мощности в комплексной форме.

13. Чему равно эквивалентное комплексное сопротивление электрической цепи с последовательным соединением комплексных сопротивлений  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_n$ ? Как определить общее активное сопротивление, индуктивность и ёмкость такой цепи?

14. Чему равен модуль комплексного сопротивления цепи, состоящей из двух последовательно соединённых комплексных сопротивлений

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 \text{ и } \dot{Z}_2 = R_2 + jX_2 ?$$

15. Чему равна эквивалентная комплексная проводимость электрической цепи, представляющей собой параллельное соединение комплексных проводимостей  $\dot{Y}_1, \dot{Y}_2, \dots, \dot{Y}_n$ ? Как определить общую активную проводимость, индуктивность и ёмкость такой цепи?

16. Пояснить, как понимать эквивалентность участков электрических цепей с последовательным и параллельным соединением элементов.

17. Вывести условие эквивалентности (при определённой частоте) активно-ёмкостных цепей с последовательным и параллельным соединением сопротивления и ёмкости.

18. В чём заключается условие эквивалентности генератора напряжения и генератора тока?

19. Привести пример, в котором требуется преобразовать звезду в треугольник или треугольник в звезду.

20. Каково условие эквивалентности электрических цепей, соединённых по способу «звезда» и «треугольник»? Пояснить, чем определяется направление ЭДС взаимной индукции.

21. В чём состоят особенности расчёта простых и сложных цепей при наличии в цепях взаимной индукции?

22. Записать для согласного последовательного включения индуктивно связанных катушек уравнения по второму закону Кирхгофа.

23. Для встречного включения индуктивно связанных катушек изобразить векторную диаграмму напряжений.

24. Сформулировать правило составления уравнений по второму закону Кирхгофа для цепей с взаимной индукцией.

25. Идеальный трансформатор: расчётная схема и уравнения по второму закону Кирхгофа для первичного и вторичного контуров.

26. Пояснить преобразование сопротивления нагрузки с помощью согласующего трансформатора.

### 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЁТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В методе контурных токов в качестве неизвестных выступают так называемые контурные токи, одинаковые для всех участков контура. При решении задач рекомендуется записывать уравнения в канонической форме, например для трёхконтурной цепи

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11}\dot{I}_{11} + \dot{Z}_{12}\dot{I}_{22} + \dot{Z}_{13}\dot{I}_{33} = \dot{E}_{11}; \\ \dot{Z}_{21}\dot{I}_{11} + \dot{Z}_{22}\dot{I}_{22} + \dot{Z}_{23}\dot{I}_{33} = \dot{E}_{22}; \\ \dot{Z}_{31}\dot{I}_{11} + \dot{Z}_{32}\dot{I}_{22} + \dot{Z}_{33}\dot{I}_{33} = \dot{E}_{33}, \end{cases}$$

где  $\dot{Z}_{ii}$  ( $\dot{Z}_{11}$ ,  $\dot{Z}_{22}$ ,  $\dot{Z}_{33}$ ) – собственное сопротивление  $i$ -го контура, представляет собой сумму комплексных сопротивлений, входящих в контур, входит в уравнение со знаком «+»;  $\dot{Z}_{ij}$  ( $\dot{Z}_{12}$ ,  $\dot{Z}_{13}$ ,  $\dot{Z}_{23}$ ,  $\dot{Z}_{21}$ ,  $\dot{Z}_{31}$ ,  $\dot{Z}_{32}$ ) – общее сопротивление двух рядом расположенных контуров, входит в уравнение со знаком «+», если контурные токи в общем сопротивлении совпадают по направлению, при несовпадении направлений токов общее сопротивление входит со знаком «-»;  $\dot{E}_i$  ( $\dot{E}_{11}$ ,  $\dot{E}_{22}$ ,  $\dot{E}_{33}$ ) – контурная ЭДС (алгебраическая сумма ЭДС, входящих в  $i$ -й контур).

После решения системы уравнений относительно контурных токов токи в ветвях определяются алгебраической суммой контурных токов, протекающих через соответствующие ветви.

В методе узловых напряжений на первом этапе расчёта в качестве неизвестных выступают потенциалы узловых точек схем (узловые напряжения).

При расчёте этим методом систему уравнений цепи следует представить в виде

$$\begin{cases} \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{13}\dot{U}_3 = \dot{I}_{11}; \\ \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{23}\dot{U}_3 = \dot{I}_{22}; \\ \dot{Y}_{31}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{32}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{33}\dot{U}_3 = \dot{I}_{33}, \end{cases}$$

где  $\dot{Y}_{ii}$  ( $\dot{Y}_{11}$ ,  $\dot{Y}_{22}$ ,  $\dot{Y}_{33}$ ) – собственная проводимость  $i$ -го узла;  $\dot{Y}_{ij}$  ( $\dot{Y}_{12}$ ,  $\dot{Y}_{13}$ ,  $\dot{Y}_{23}$ , ...) – общая проводимость узлов  $i$  и  $j$ ;  $\dot{Y}_{ij}$  входит в уравнение со знаком «-», если положительные направления узловых напряжений выбраны от независимых узлов к базисному узлу, в противном случае общая проводимость берётся со знаком «+»;  $\dot{I}_i$  ( $\dot{I}_{11}$ ,  $\dot{I}_{22}$ ,  $\dot{I}_{33}$ ) – узловой ток (алгебраическая сумма токов, полученных от деления ЭДС ветвей, подходящих к  $i$ -му узлу, на сопротивле-

ния данных ветвей). В эту сумму со знаком «+» входят токи тех ветвей, ЭДС которых направлены к  $i$ -му узлу.

После определения узловых напряжений токи в ветвях находят по закону Ома для участка цепи.

Для нахождения тока в одной из ветвей цепи используют метод эквивалентного генератора.

Искомый ток ветви определяется по закону Ома

$$I = \frac{U_{abxx}}{R_{abvx} + R},$$

если в данной ветви нет источника ЭДС, где  $U_{abxx}$  – напряжение холостого хода между точками  $a$  и  $b$ ;  $R_{abvx}$  – входное сопротивление цепи между точками  $a$  и  $b$ , и

$$I = \frac{U_{abxx} \pm E}{R_{abvx} + R},$$

если в данной ветви имеется источник ЭДС  $E$ , направление которого совпадает («+») или не совпадает («-») с направлением тока от зажима « $a$ » к зажиму « $b$ ».

Для переменных токов расчётные уравнения в комплексной форме будут иметь вид

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_{abxx}}{\dot{Z}_{abvx} + \dot{Z}}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_{abxx} \pm \dot{E}}{\dot{Z}_{abvx} + \dot{Z}}.$$

При расчёте цепи методом наложения (суперпозиции) истинный ток в любой и каждой ветви цепи определяют как алгебраическую сумму частичных токов, вызываемых в данной ветви действием каждого из источников в отдельности.

При определении токов в цепи от действия какого-либо одного источника остальные источники должны быть исключены, но их внутренние сопротивления (проводимости) оставлены.

Метод наложения применим лишь для линейных цепей.

### Контрольные вопросы

1. Что называется ветвью, узлом и контуром электрической цепи?
2. Сформулировать и записать первый и второй законы Кирхгофа в интегралодифференциальной и комплексной формах.
3. В чём состоит сущность метода контурных токов?
4. Каков порядок определения независимых контуров в электрической цепи?
5. Что понимается под контурным током контурной ЭДС?
6. Что представляют собой собственное и взаимное сопротивления контуров?

7. В чём состоит сущность метода узловых напряжений?
8. Что понимается под узловым напряжением?
9. Что называется собственной и общей проводимостями?
10. Пояснить целесообразность применения методов эквивалентного генератора и наложения для расчёта электрических цепей.
11. В чём сущность метода эквивалентного генератора?
12. В чём сущность метода наложения?
13. Сформулировать теорему об эквивалентном источнике ЭДС.
14. Каким образом определяют  $U_{xx}$  и  $Z_{bx}$  при расчёте цепи методом эквивалентного генератора?
15. Пояснить на конкретном примере порядок определения  $U_{xx}$  и  $Z_{bx}$ .
16. Частичные токи и их связь с искомыми значениями токов в ветвях электрической цепи.

## 4. СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) цепи – отношение комплексных изображений отклика и воздействия:

$$\dot{K}_{XY}(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \frac{Y}{X} e^{j(\psi_Y - \psi_X)} = K_{XY} e^{j\varphi_{XY}},$$

где  $\dot{Y}_m$  и  $\dot{Y}$  – комплексные амплитуда и действующие значения отклика (реакции) цепи;  $\dot{X}_m$  и  $\dot{X}$  – комплексные амплитуда и действующие значения внешнего воздействия.

Зависимости модуля  $K_{XY}(\omega)$  и аргумента  $\varphi_{XY}(\omega)$  КЧХ от частоты  $\omega$  называются амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками цепи.

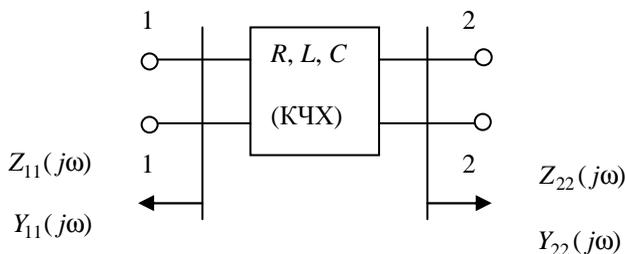
Если отклик и внешнее воздействие рассматриваются на одних и тех же зажимах цепи, КЧХ называется входной. К входным характеристикам цепи (рис. 4.1) относятся:

- комплексное входное сопротивление

$$K_{iu}(j\omega) = Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1};$$

- комплексная входная проводимость

$$K_{ui}(j\omega) = Y_{11}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}.$$



**Рис. 4.1. Входные и передаточные характеристики частотно-избирательной цепи**

Когда отклик и внешнее воздействие задаются на разных зажимах цепи, КЧХ называется передаточной.

К передаточным характеристикам относятся:

- комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} e^{j\varphi_U};$$

- комплексный коэффициент передачи по току

$$K_i(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{I_2}{I_1} e^{j\varphi_i};$$

- комплексное передаточное сопротивление

$$K_{iU}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = Z_{21}(j\omega);$$

- комплексная передаточная проводимость

$$K_{Ui}(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = Y_{12}(j\omega).$$

Сопротивление последовательного колебательного контура вблизи резонанса

$$Z = R + jX \approx R + j2\rho v = R(1 + j2Qv),$$

где  $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \approx 2\rho v$  – реактивное сопротивление;

$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – характеристическое сопротивление,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансная частота;

$v = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  – относительная расстройка;

$Q = \frac{\rho}{R}$  – добротность;  $d = \frac{1}{Q}$  – затухание.

Общее активное сопротивление последовательного контура с учётом  $R_i$  и  $R_n$

$$R_{\text{общ}} = R_i + R + \frac{\rho^2}{R_n}.$$

Полоса пропускания контура

$$\Delta f = df_0 = \frac{f_0}{Q}.$$

Сопротивление параллельных контуров вблизи резонанса

$$\dot{Z} = \frac{Z_{\varepsilon 0}}{1 + j2Qv},$$

где  $Z_{\varepsilon 0} = \frac{\rho^2}{R} p^2 = Q\rho p^2 = Q^2 R p^2 = \frac{L}{RC} p^2$  – сопротивление контура на

резонансной частоте,  $p = \frac{|x_{1,20}|}{\rho}$  – коэффициент включения,  $|x_{1,20}|$  – модуль сопротивления ветви на резонансной частоте.

Общее активное сопротивление параллельного контура с учётом  $R_i$  и  $R_n$

$$R_{\text{общ}} = R + \frac{\rho^2}{R_i} + \frac{\rho^2}{R_n} = R \left( 1 + \frac{Z_{\varepsilon 0}}{R_i} + \frac{Z_{\varepsilon 0}}{R_n} \right).$$

Выражение нормированной АЧХ одиночных контуров:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q_3^2 v^2}},$$

где  $Q_3$  – добротность контура с учётом влияния  $R_i$  и  $R_n$ .

Сопротивление схемы замещения первичного контура системы двух связанных контуров

$$\dot{Z}_{\text{э}1} = \dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_{\text{CB}}^2}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{CB}}^2}{\dot{Z}_2}.$$

Сопротивление схемы замещения вторичного контура системы двух связанных контуров

$$\dot{Z}_{\text{э}2} = \dot{Z}_2 - \frac{\dot{Z}_{\text{CB}}^2}{\dot{Z}_1} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{CB}}^2}{\dot{Z}_1}.$$

Сопротивление, вносимое в первичный (вторичный) контур:

$$\dot{Z}_{\text{вн}1} = R_{\text{вн}1} + jX_{\text{вн}1}, \quad \dot{Z}_{\text{вн}2} = R_{\text{вн}2} + jX_{\text{вн}2},$$

где

$$R_{\text{вн}1} = R_2 \frac{X_{\text{CB}}^2}{R_2^2 + X_2^2}; \quad X_{\text{вн}1} = -X_2 \frac{X_{\text{CB}}^2}{R_2^2 + X_2^2};$$

$$R_{\text{вн}2} = R_1 \frac{X_{\text{CB}}^2}{R_1^2 + X_1^2}; \quad X_{\text{вн}2} = -X_1 \frac{X_{\text{CB}}^2}{R_1^2 + X_1^2}.$$

Условие первого (второго) частотного резонанса:

$$X_1 + X_{\text{вн}1} = 0; \quad X_2 + X_{\text{вн}2} = 0.$$

Условия сложного резонанса:

$$X_1 + X_{\text{вн}1} = 0; \quad X_2 + X_{\text{вн}2} = 0.$$

$$X_{\text{CB.опт}} = Z_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}; \quad X_{\text{CB.опт}} = Z_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

Условия полного резонанса:

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_{\text{CB.опт}} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Максимально возможное значение тока во вторичном контуре

$$I_{m\text{max}} = \frac{E_m}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Коэффициент связи

$$k = \frac{|X_{\text{св}}|}{\sqrt{X_{K_1} X_{K_2}}},$$

где  $X_{K_1}$  и  $X_{K_2}$  – составляющие  $X_1$  и  $X_2$ , имеющие тот же знак, что и  $X_{\text{св}}$ .

Полоса пропускания связанных контуров:

а) случай  $k \leq d$ :

$$\Delta f_n = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[\left(\frac{k}{d}\right)^4 + 1\right]}};$$

б) случай  $k > d$ :

$$\Delta f_n = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{d}\right) - 1}.$$

### Контрольные вопросы

1. Дать определение комплексной частотной характеристики (КЧХ) цепи. Пояснить, какую размерность может иметь КЧХ.
2. Дать определение амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристики цепи. Что характеризуют АЧХ и ФЧХ цепи?
3. Чем определяется (от чего зависит) выражение КЧХ линейной цепи?
4. Что называется резонансом напряжения? Какими свойствами характеризуется последовательный колебательный контур при резонансе?
5. Начертить графики зависимостей активного, реактивного и полного сопротивлений контура от частоты.
6. Что называется резонансной кривой контура? Начертить графики резонансных кривых по току и напряжению. С какой целью производится нормирование резонансных кривых?

7. Что называется АЧХ и ФЧХ контура? Начертить и пояснить графики нормированных АЧХ при различных добротностях контуров. Начертить график ФЧХ при снятии входного напряжения с ёмкости.

8. Что называется полосой пропускания контура? Написать формулу для полосы пропускания. Как определить полосу пропускания по частотной характеристике контура?

9. Как влияют внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки на добротность контура и его характеристики?

10. Что называется резонансом токов? Какими свойствами характеризуется параллельный контур при резонансе токов?

11. Начертить графики зависимостей  $R_3$ ,  $X_3$  и  $Z_3$  параллельного контура от расстройки. Привести формулу для сопротивления параллельного контура при резонансе.

12. Что такое эквивалентная добротность контура? Как она зависит от внутреннего сопротивления источника и сопротивления нагрузки?

13. Как влияют внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки на АЧХ и ФЧХ параллельного контура?

14. Чем обусловлено применение сложных параллельных контуров? Нарисовать их схемы и пояснить особенности контуров второго и третьего видов.

15. Какие виды связи применяются в связанных контурах? Что называется коэффициентом связи и чему он равен в схемах с индуктивной, автотрансформаторной и внутренней ёмкостной связью?

16. С какой целью вводят понятие схемы замещения первичного и вторичного контуров? Нарисовать данные схемы замещения, написать выражения для вносимых сопротивлений и пояснить их физический смысл.

17. Какие существуют способы настройки связанных контуров? Пояснить условия сложного и полного резонансов. Как практически настраиваются контуры данными способами?

18. Что понимается под резонансными частотами связанных контуров? Пояснить физическую возможность существования частот связи в связанных контурах.

19. Нарисовать семейство нормированных АЧХ при  $k \leq d$  и  $k > d$  и пояснить причины возникновения двугорбой АЧХ.

20. Что понимается под полосой пропускания связанных контуров и от чего она зависит? Какова максимально возможная полоса пропускания двух связанных контуров?

## 5. ТРЁХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### 5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЁХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

Трёхфазная электрическая цепь может быть представлена как совокупность трёх однофазных цепей, в которой действуют ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые относительно друг друга на одну треть периода, или, что то же самое, на угол  $2\pi/3$ .

Эти три составные части трёхфазной цепи называются фазами, и им будем приписывать буквенные обозначения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Таким образом, термин «фаза» в электротехнике обозначает два понятия: угол, определяющий стадию периодического процесса, и составную часть трёхфазной цепи.

Изобразим трёхфазную цепь, фазы которой не связаны друг с другом (рис. 5.1). Такую трёхфазную цепь называют несвязанной (в настоящее время не применяется).

Фазы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  изображены под углом  $120^\circ$  для того, чтобы подчеркнуть, что напряжения источников  $u_A$ ,  $u_B$ ,  $u_C$  сдвинуты относительно друг друга на одну треть периода. Следовательно,

$$u_A = U_m \sin \omega t; \quad u_B = U_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad u_C = U_m \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Графики, изображающие эти напряжения, показаны на рис. 5.2.

При равенстве амплитуд  $U_m$  напряжений и одинаковых сопротивлений нагрузки  $z$  в фазах токи  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  также равны по величине и сдвинуты относительно друг друга на одну треть периода, образуя так называемый трёхфазный ток. Сумма этих токов в любой момент времени равна нулю:

$$I_A + I_B + I_C = 0.$$

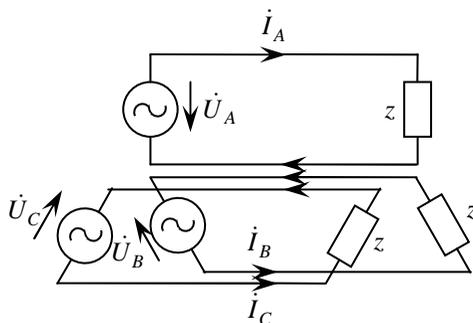
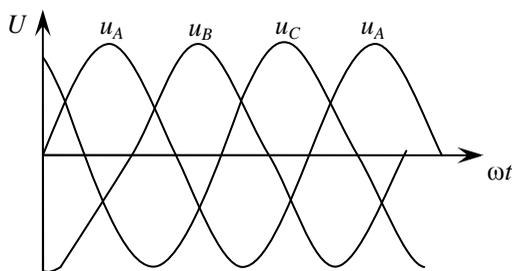
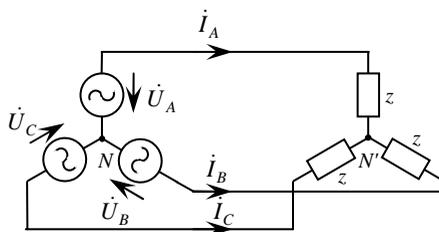


Рис. 5.1. Схема несвязанной трёхфазной цепи



**Рис. 5.2.** Графики мгновенных значений трёхфазной симметричной системы ЭДС



**Рис. 5.3.** Соединение «звезда-звезда» без нейтрального провода

Поэтому если три провода, по которым токи возвращаются к источникам, объединить в один, то ток в этом проводе будет равен нулю. При отсутствии в проводе тока излишним в данном случае является и сам провод, от него можно отказаться, перейдя к схеме рис. 5.3.

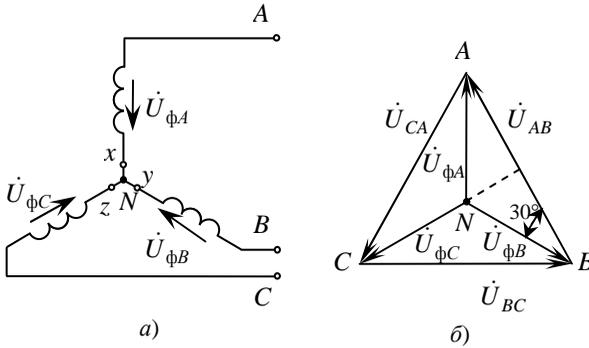
В результате этого достигается экономия материала проводов, кроме того, по сравнению с несвязанной трёхфазной цепью исключаются потери мощности от токов  $i_A, i_B, i_C$  в обратном проводе.

Трёхфазная цепь рис. 5.3, фазы которой соединены электрически, представляет одну из разновидностей так называемых связанных трёхфазных цепей.

Необходимо отметить, что для получения связанной трёхфазной цепи не требуются отдельные однофазные генераторы, а используется один трёхфазный генератор.

Обмотки трёхфазного генератора могут быть соединены либо звездой, либо треугольником. При соединении звездой концы обмоток соединяют в общую точку, которую называют нейтральной. Начала обмоток обозначают  $A, B, C$ , концы —  $x, y, z$  (рис. 5.4, а). Начала обмоток соединяют с нагрузкой линейными проводами, по которым идут линейные токи.

Будем в дальнейшем пользоваться следующей терминологией: ЭДС, индуцируемые в обмотках генератора или трансформатора, напряжения на зажимах обмоток и токи в них называть фазными ЭДС, напряжениями и токами, а напряжения между линейными проводами и токи в них — линейными напряжениями и токами.



**Рис. 5.4. Векторная диаграмма напряжений при соединении генератора звездой**

На схеме (см. рис. 5.4, а)  $\dot{U}_{\phi A}$ ,  $\dot{U}_{\phi B}$ ,  $\dot{U}_{\phi C}$  – комплексы фазных напряжений генератора;  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  (рис. 5.4, б) – комплексы линейных напряжений. Абсолютные значения этих напряжений являются их модулями, т.е.

$$|\dot{U}_{\phi A}| = |\dot{U}_{\phi B}| = |\dot{U}_{\phi C}| = U_{\phi};$$

$$|\dot{U}_{AB}| = |\dot{U}_{BC}| = |\dot{U}_{CA}| = U_{л}.$$

Связь между линейными и фазными напряжениями устанавливается на основании второго закона Кирхгофа:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

На рис. 5.4, б приведена топографическая векторная диаграмма линейных и фазных напряжений генератора.

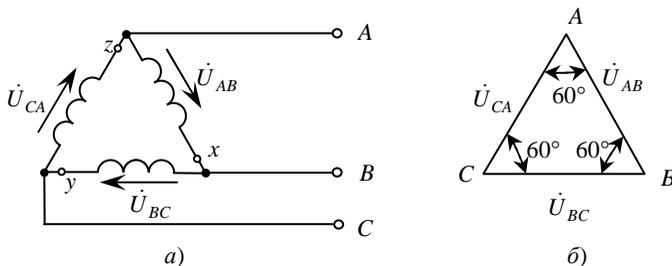
Из векторной диаграммы следует, что при соединении генератора звездой линейные напряжения равны по величине и сдвинуты относительно друг друга на угол  $2\pi/3$ .

На основании геометрических соображений легко показать, что между фазными и линейными напряжениями при соединении звездой существует следующее соотношение:

$$U_{л} = \sqrt{3}U_{\phi}.$$

Действительно, из треугольника (см. рис. 5.4, б) следует:

$$\dot{U}_{AB} = 2U_{\phi B} \cos 30^\circ = 2U_{\phi B} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_{\phi B}.$$



**Рис. 5.5. Соединение генератора треугольником:**

*a* – топографическая диаграмма напряжений;

*б* – векторная диаграмма напряжений

При соединении генератора треугольником конец первой фазы соединяется с началом второй фазы, конец второй – с началом третьей, конец третьей – с началом первой (рис. 5.5, *a*).

Топографическая диаграмма напряжений приведена на рис. 5.5, *a*. На рис. 5.5, *б* показана векторная диаграмма напряжений.

Общие точки соединённых обмоток генератора выводятся на зажимы, к которым присоединяются линейные провода или нагрузка.

Нагрузка (потребитель) в трёхфазной цепи также может быть соединена звездой или треугольником.

## 5.2. СИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Трёхфазные цепи представляют собой разновидность цепей синусоидального тока, и поэтому расчёт и исследование их производятся теми же методами, что и для однофазных цепей. Расчёт трёхфазной цепи, так же как и расчёт всякой сложной цепи, ведётся обычно в комплексной форме. Ввиду того, что фазные ЭДС и напряжения генератора сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$ , для краткости математической записи применяется фазовый оператор – комплексная величина:

$$a = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Умножение вектора на оператор  $a$  означает поворот вектора на  $120^\circ$  в положительном направлении (против хода часовой стрелки), соответственно умножение вектора на  $a^2$  означает поворот вектора на  $240^\circ$  в положительном направлении, или, что то же самое, поворот вектора на  $120^\circ$  в отрицательном направлении:

$$a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Три вектора:  $1$ ,  $a$  и  $a^2$  образуют симметричную трёхфазную систему векторов. При этом:  $1 + a + a^2 = 0$ .

При помощи оператора  $a$  можно, например, записать напряжения фаз трёхфазной системы как

$$U_{\phi A}, U_{\phi B} = a^2 U_{\phi A}, U_{\phi C} = a U_{\phi A}.$$

На практике применяются различные комбинации соединений, например генератор и нагрузка соединяются звездой, генератор может быть соединён звездой, а нагрузка – треугольником и т.д.

На рис. 5.6, *a* показано соединение нагрузки звездой. На схеме обозначены:  $I_A, I_B, I_C$  – линейные токи;  $U_A, U_B, U_C$  – фазные напряжения нагрузки;  $z$  – сопротивления нагрузки.

В этой схеме комплексы фазных напряжений источника и комплексы фазных напряжений нагрузки соответствующих фаз равны между собой, т.е.

$$U_{\phi A} = U_A, U_{\phi B} = U_B, U_{\phi C} = U_C.$$

Векторная диаграмма напряжений и токов имеет вид, показанный на рис. 5.6, *б*. Ток в каждой фазе отстаёт от напряжения той же фазы на угол

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R},$$

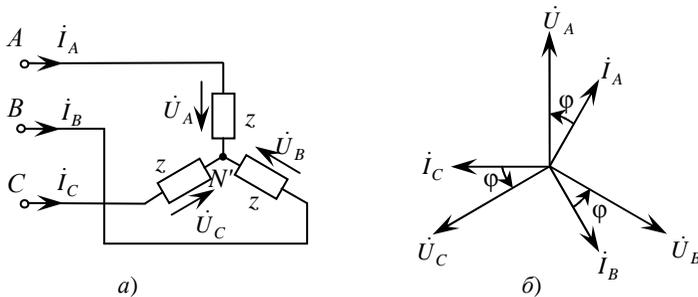
где  $R$  и  $X$  – активное и реактивное сопротивления фаз.

Ток в каждой из фаз находят так же, как и в однофазной цепи. Например, в фазе  $A$

$$I_A = \frac{U_A}{z}.$$

Соответственно, токи в фазах  $B$  и  $C$  выражаются через ток  $I_A$ :

$$I_B = e^{-j120^\circ} I_A; I_C = e^{j120^\circ} I_A.$$



**Рис. 5.6. Соединение нагрузки звездой:**

*a* – схема цепи; *б* – векторная диаграмма напряжений и токов

Таким образом, при симметричном режиме работы трёхфазной цепи задача сводится к расчёту одной из фаз аналогично расчёту однофазной цепи.

Линейное напряжение определяется как разности соответствующих фазных напряжений. Например:

$$U_{AB} = U_A - U_B = U_A(1 - a^2) = \sqrt{3}U_A \angle 30^\circ.$$

При соединении нагрузки треугольником (рис. 5.7, а) сопротивления отдельных фаз находятся под линейными напряжениями, поэтому фазные токи в них определяются по закону Ома:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{z}; \quad I_{BC} = \frac{U_{BC}}{z} = a^2 I_{AB}; \quad I_{CA} = \frac{U_{CA}}{z} = a I_{AB}.$$

Линейные токи определяются на основании первого закона Кирхгофа. Так, линейный ток фазы *A* равен

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = I_{AB}(1 - a) = I_{AB}\sqrt{3} \angle -30^\circ,$$

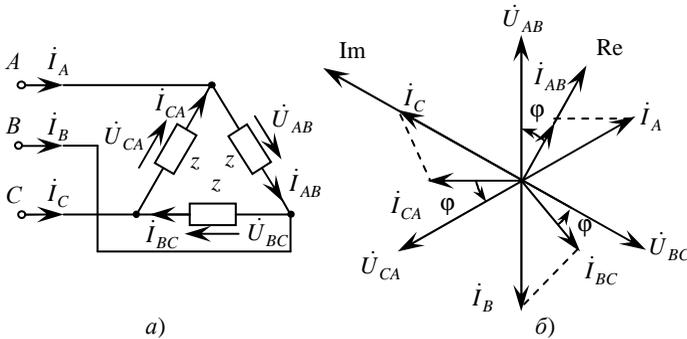
т.е. линейный ток  $I_A$  отстаёт по фазе на  $30^\circ$  от тока  $I_{AB}$ , причём модуль его в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного тока  $I_{AB}$ .

Таким образом, при симметричном режиме работы цепи имеет место следующее соотношение:

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3}I_{\text{ф}}.$$

Векторная диаграмма линейных напряжений и токов при соединении нагрузки треугольником показана на рис. 5.7, б. Как и при соединении звездой, угол сдвига фаз равен

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$



**Рис. 5.7. Соединение нагрузки треугольником:**  
а – схема цепи; б – векторная диаграмма напряжений и токов

Активная мощность симметричной трёхфазной цепи равна

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi.$$

При соединении нагрузки звездой  $U_{\phi} = \frac{U_{л}}{\sqrt{3}}$ ,  $I_{\phi} = I_{л}$ .

Поэтому активная мощность трёхфазной цепи, выраженная через линейные токи и линейные напряжения,

$$P = 3 \frac{U_{л}}{\sqrt{3}} I_{л} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \cos \varphi.$$

При соединении нагрузки треугольником  $U_{\phi} = U_{л}$ ,  $I_{\phi} = \frac{I_{л}}{\sqrt{3}}$ .

Активная мощность трёхфазной цепи будет такой же:

$$P = 3U_{л} \frac{I_{л}}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \cos \varphi.$$

Следовательно, независимо от схемы соединения нагрузки

$$P = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \cos \varphi.$$

Аналогично реактивная мощность

$$Q = \sqrt{3} U_{л} I_{л} \sin \varphi.$$

И полная мощность симметричной треугольной цепи

$$S = \sqrt{3} U_{л} I_{л}.$$

При этом коэффициент мощности определяется из соотношения

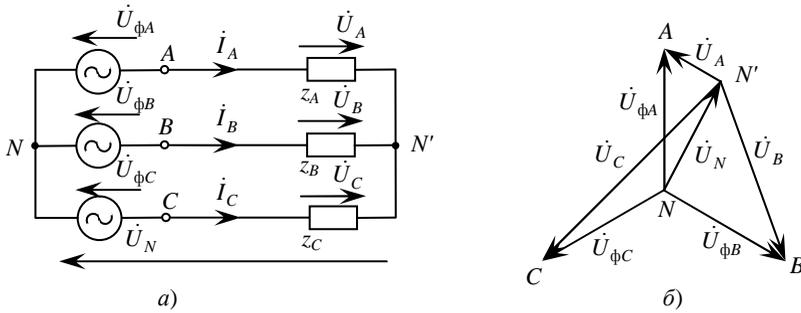
$$\cos \varphi = \frac{P}{S},$$

где  $\varphi$  – угол сдвига фазного тока относительно соответствующего фазного напряжения.

### 5.3. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Несимметричный режим работы трёхфазной цепи имеет место в том случае, когда комплексные сопротивления отдельных фаз нагрузки не равны между собой, т.е.  $z_A \neq z_B \neq z_C$ .

Расчёт токов и напряжений при несимметричном режиме производится теми же методами, которые применяются для расчёта сложных однофазных цепей. Рассмотрим несколько схем.



**Рис. 5.8. «Звезда–звезда» без нулевого провода:**  
*a* – схема цепи; *б* – топографическая диаграмма напряжений

**«Звезда–звезда» без нулевого провода.** Схема, у которой источник и нагрузка соединены звездой, показана на рис. 5.8, *a*. Для расчёта цепи целесообразно воспользоваться методом двух узлов, на основании которого напряжение смещения нейтрали, т.е. напряжение между нулевыми точками источника и нагрузки, равно

$$\dot{U}_N = \dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{\phi A} \dot{Y}_A + \dot{U}_{\phi B} \dot{Y}_B + \dot{U}_{\phi C} \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}.$$

Или, обозначив

$$\dot{U}_{\phi A} = \dot{U}_\phi; \quad \dot{U}_{\phi B} = a^2 \dot{U}_\phi; \quad \dot{U}_{\phi C} = a \dot{U}_\phi,$$

получим

$$\dot{U}_N = \dot{U}_\phi \frac{\dot{Y}_A + a^2 \dot{Y}_B + a \dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) позволяет по заданным фазным напряжениям генератора и сопротивлениям приёмника  $\dot{Z}_A = \frac{1}{\dot{Y}_A}$ ,  $\dot{Z}_B = \frac{1}{\dot{Y}_B}$ ,  $\dot{Z}_C = \frac{1}{\dot{Y}_C}$  определить напряжение смещения нейтрали  $U_N$ , зная которое, легко найти напряжения на зажимах приёмников и вычислить ток в каждом из них.

Имеем

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{\phi A} - \dot{U}_N; \quad \dot{U}_B = \dot{U}_{\phi B} - \dot{U}_N; \quad \dot{U}_C = \dot{U}_{\phi C} - \dot{U}_N. \quad (5.2)$$

На рисунке 5.8, *б* приведена топографическая диаграмма напряжений для некоторых конкретных значений  $z_A$ ,  $z_B$ ,  $z_C$ .

Как видно из уравнений (5.2) и диаграммы, при неравномерной нагрузке фаз в системе без нулевого провода напряжения приёмников

не равны друг другу. На одних фазах может быть пониженное напряжение по сравнению с фазным, на других – повышенное, что является серьёзным недостатком рассматриваемой схемы. Её нельзя применять в тех случаях, когда нагрузка заведомо несимметрична, например в осветительной сети.

Если заданы линейные напряжения  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$  на зажимах нагрузки, то целесообразно пользоваться формулами, полученными подстановкой (5.1) в уравнения (5.2).

Имеем:

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \frac{\dot{U}_{AB}\dot{Y}_B - \dot{U}_{CA}\dot{Y}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}; \\ \dot{U}_B &= \frac{\dot{U}_{BC}\dot{Y}_C - \dot{U}_{AB}\dot{Y}_A}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}; \\ \dot{U}_C &= \frac{\dot{U}_{CA}\dot{Y}_A - \dot{U}_{BC}\dot{Y}_B}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

Мощность при несимметричной нагрузке, как и при симметричной, равна сумме мощностей отдельных фаз. Следовательно, активная мощность

$$P = P_A + P_B + P_C.$$

Аналогично реактивная мощность равна сумме реактивных мощностей отдельных фаз:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C.$$

Поэтому полная или кажущаяся мощность трёхфазной цепи может быть определена как

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}\quad (5.4)$$

и коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P_A + P_B + P_C}{|S_A + S_B + S_C|}.\quad (5.5)$$

Здесь  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  – полные комплексные мощности отдельных фаз.

Пользуясь комплексной формой записи мощности, можно написать выражение для мощности трёхфазной цепи, приведённой на рис. 5.8, а, в функции линейных напряжений. Полная мощность

$$\tilde{S} = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C.$$

Исключая один из токов, например  $I_B^*$ , из условия

$$I_B^* = -I_A^* - I_C^*,$$

Получим

$$\tilde{S} = (\dot{U}_A - \dot{U}_B)^* I_A + (\dot{U}_C - \dot{U}_B)^* I_C,$$

или

$$\tilde{S} = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_{CB}^* I_C. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) справедливо и для нагрузки, соединённой в треугольник, так как оно определяется линейными напряжениями  $U_{AB}$  и  $U_{BC}$ . Круговой заменой индексов  $A, B, C$  в уравнении (5.6) можно получить выражения для других напряжений и токов мощности  $S$ .

«Звезда–звезда» с нулевым проводом (рис. 5.9). Одно из главных назначений нейтрального провода состоит в том, чтобы при несимметричной нагрузке выравнять фазные напряжения потребителей. Из схемы (см. рис. 5.9) следует:

$$U_A = U_{\phi A}; U_B = U_{\phi B}; U_C = U_{\phi C},$$

т.е. фазные напряжения источника равны фазным напряжениям нагрузки (потребителя).

**Соединение нагрузки треугольником.** При соединении нагрузки треугольником (см. рис. 5.7) токи в фазах находим на основании закона Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\dot{z}_{AB}}; \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\dot{z}_{BC}}; \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\dot{z}_{CA}}.$$

Таким образом, при соединении нагрузки треугольником независимо от её сопротивлений напряжения на нагрузке равны линейным напряжениям источника.

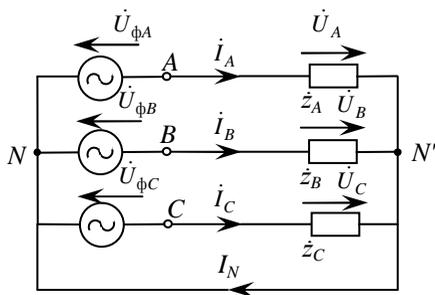


Рис. 5.9. «Звезда–звезда» с нулевым проводом

#### 5.4. ИЗМЕРЕНИЕ МОЩНОСТИ В ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Для измерения мощности в трёхфазной цепи с нейтральным проводом простейшим является метод трёх ваттметров (рис. 5.10). При таком соединении каждый из ваттметров измеряет активную мощность одной фазы приёмника (нагрузки). Активная мощность всей трёхфазной цепи равна сумме показаний трёх ваттметров:

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Если нагрузка симметрична, достаточно произвести измерение одним ваттметром:

$$P = 3P_W.$$

При отсутствии нейтрали провода достаточно иметь два ваттметра. В соответствии с (5.6) для схемы рис. 5.11 комплекс мощности всей цепи может быть записан как

$$\tilde{S} = \dot{U}_{AB}^* I_A + \dot{U}_{CB}^* I_C.$$

При выводе формулы (5.6) не делалось никаких предположений о симметрии цепи, следовательно, данный метод измерения двумя ваттметрами применим как в случае симметричной, так и в случае несимметричной трёхфазной системы.

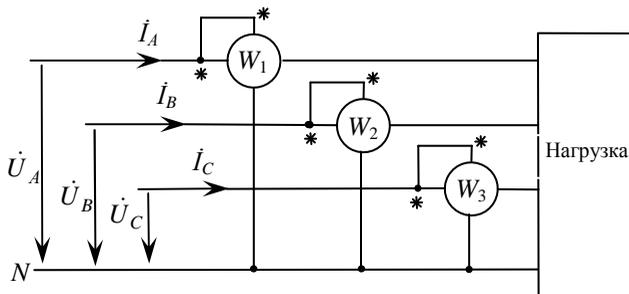


Рис. 5.10. Схема включения ваттметров в четырёхпроводную сеть

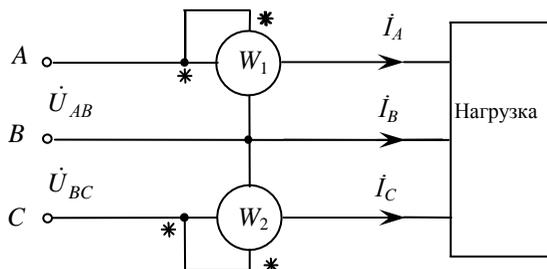


Рис. 5.11. Схема включения ваттметров в трёхпроводную сеть

Показания ваттметров следующие:

$$P_{W_1} = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{AB} I_A^* \right] = U_{AB} I_A \cos(\widehat{\dot{U}_{AB} I_A});$$

$$P_{W_2} = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{CB} I_C^* \right] = U_{CB} I_C \cos(\widehat{\dot{U}_{CB} I_C}).$$

Мощность всей трёхфазной цепи

$$P = P_{W_1} + P_{W_2},$$

т.е. равна сумме показаний отдельных ваттметров.

Измерение реактивной мощности в трёхфазных цепях производится с помощью специальных измерителей реактивной мощности, подобных по устройству ваттметрам. В симметричной трёхфазной цепи измерение реактивной мощности может быть произведено, кроме того, с помощью ваттметров активной мощности. В этом случае ваттметр может быть включён в схему, как показано на рис. 5.12.

Поскольку при симметричной нагрузке как при соединении треугольником, так и при соединении звездой угол между линейным напряжением  $U_{BC}$  и линейным током  $I_A$  равен  $90^\circ - \varphi$ , то показание ваттметра будет

$$P_W = U_{BC} I_A \cos(\varphi - 90^\circ) = U_{BC} I_A \sin \varphi.$$

Для получения суммарной реактивной мощности показание ваттметра нужно умножить на  $\sqrt{3}$ :

$$Q = \sqrt{3} P_W = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi,$$

где  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}$ .

В данном случае  $X > 0$ , т.е. нагрузка носит индуктивный характер.

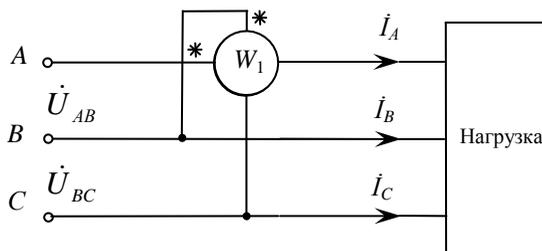


Рис. 5.12. Схема включения ваттметра при симметричной нагрузке

## 5.5. ТРЁХФАЗНОЕ ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Большим достоинством трёхфазных систем является лёгкость получения вращающегося магнитного поля. Это даёт возможность создания большого класса трёхфазных электрических машин переменного тока – генераторов и двигателей.

Пусть через катушку, показанную на рис. 5.13, проходит синусоидальный ток  $i$ . Катушка условно изображена в виде витка, причём точка и крестик указывают направление тока: точкой обозначено остриё, а крестиком – конец стрелки. По правилу буравчика определено направление вектора магнитной индукции  $B$ . В среде с постоянной магнитной проницаемостью магнитная индукция в любой точке поля пропорциональна по величине току, создающему магнитное поле. Поэтому если  $i = I_m \cos \omega t$ , то и  $B$  также изменяется по закону  $B = B_m \cos \omega t$  ( $B_m$  – максимальное значение магнитной индукции в центре катушки); когда ток отрицателен, вектор магнитной индукции имеет противоположное направление.

Таким образом, магнитное поле изменяется (пульсирует) вдоль оси катушки, такое магнитное поле катушки называется пульсирующим.

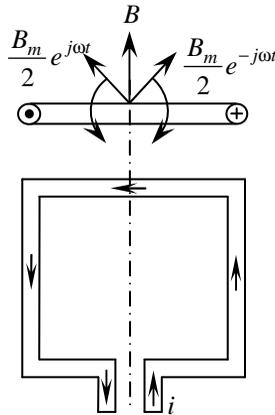
Условимся круговым вращающимся магнитным полем называть магнитное поле, ось которого равномерно вращается, причём значение магнитной индукции на этой оси неизменно. Легко убедиться в том, что магнитное поле, пульсирующее по закону синуса или косинуса, может рассматриваться как результат наложения двух полей, вращающихся в противоположные стороны со скоростью, равной угловой частоте переменного тока, и имеющих амплитуду, вдвое меньшую амплитуды пульсирующего поля (см. рис. 5.13). Действительно, если косинусоидальную функцию выразить через экспоненциальную в виде

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2},$$

то магнитная индукция запишется как

$$B = \frac{B_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{B_m}{2} e^{-j\omega t},$$

где  $e^{j\omega t}$  – единичный вектор, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  в положительном направлении (против движения часовой стрелки), вектор с отрицательным показателем вращается в противоположную сторону.

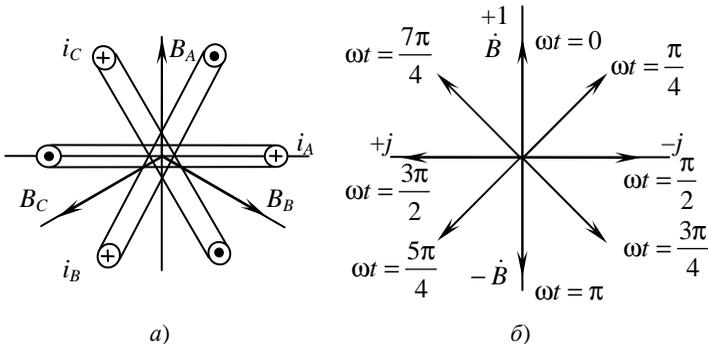


**Рис. 5.13.** Разложение пульсирующего магнитного поля катушки на два вращающихся

Расположим три одинаковые катушки таким образом, чтобы их оси были сдвинуты друг относительно друга в пространстве на угол  $120^\circ$  (рис. 5.14, а), и подключим эти катушки к симметричной трёхфазной цепи. Тогда через катушки будут протекать токи

$$i_A = I_m \cos \omega t; \quad i_B = I_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_C = I_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Направлениям токов  $i_A$ ,  $i_B$ ,  $i_C$ , обозначенным на рис. 5.14, а с помощью точек и крестиков, соответствуют по правилу буравчика указанные стрелками направления магнитных потоков (векторов индукций).



**Рис. 5.14.** Получение вращающегося магнитного поля при помощи трёхфазной системы токов

При пропорциональной зависимости индукции от токов мгновенные значения индукций фаз выразятся следующим образом:

$$B_A = B_m \cos \omega t; \quad B_B = B_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad B_C = B_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right),$$

где  $B_m$  – амплитуда индукции на оси каждой из катушек.

Заменяя косинусоидальные функции на экспоненциальные, получим

$$\begin{aligned} B_A &= \frac{B_m}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \\ B_B &= \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \right]; \\ B_C &= \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Каждое из уравнений системы (5.7) выражает собой пульсирующее магнитное поле. Чтобы осуществить направление этих полей в соответствии с рис. 5.14, а, достаточно представить индукции  $B_B$  и  $B_C$  в комплексной форме:

$$B_B = B_m e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad B_C = B_m e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (5.8)$$

Тогда с учётом (5.7) и (5.8) получим:

$$\begin{aligned} B_A &= \frac{B_m}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}); \\ B_B &= \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-j\omega t} \right]; \\ B_C &= \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{8\pi}{3}\right)} + e^{-j\omega t} \right]. \end{aligned}$$

Результирующий вектор индукции находится сложением векторов  $\dot{B}_A$ ,  $\dot{B}_B$ ,  $\dot{B}_C$ .

В силу того, что сумма трёх единичных векторов  $1$ ,  $e^{-j\frac{4\pi}{3}}$ ,  $e^{-j\frac{8\pi}{3}}$  равна нулю, результирующая индукция принимает вид

$$B = \frac{3}{2} B_m e^{-j\omega t}. \quad (5.9)$$

Полученное выражение (5.9) показывает, что результирующий вектор магнитного поля имеет постоянный модуль, равный  $1,5B_m$ , и равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  от оси фазы  $A$  по направлению к оси фазы  $B$  и т.д. или по ходу часовой стрелки, т.е. имеет место вращающееся магнитное поле.

На рисунке 5.14, б показано положение результирующего вектора для различных моментов времени.

Для изменения направления вращения поля достаточно поменять местами токи в каких-нибудь двух катушках, например токи  $i_B$  и  $i_C$ .

За один период переменного тока такое магнитное поле совершит один оборот, а за 1 мин – 60 оборотов.

Известно устройство для получения кругового вращающегося магнитного поля при помощи двух катушек, плоскости которых смещены в пространстве на угол  $60^\circ$  (заявка на изобретение № 2633114/07 от 16 июня 1978 г.).

При подведении к схеме рис. 5.15 трёхфазной системы напряжений возникают токи  $i_1$  и  $i_2$ , создающие магнитные поля, индукции которых соответственно равны

$$B_1 = B_m \cos \omega t; \quad B_2 = B_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right).$$

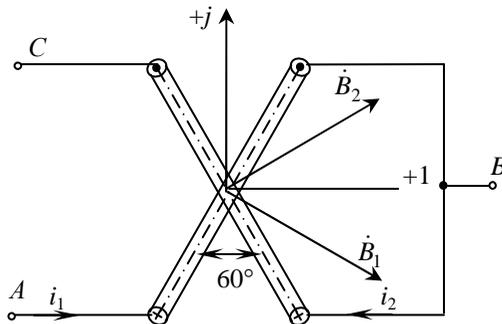


Рис. 5.15. Получение вращающегося магнитного поля при помощи двух катушек

Результирующий вектор индукции находится сложением векторов

$$B_1 = \frac{B_m}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-j\pi/6}$$

и

$$B_2 = \frac{B_m}{2} \left( e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \right) e^{j\pi/6}.$$

После простых преобразований получим

$$B = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m e^{j(\omega t - \pi/6)}. \quad (5.10)$$

Это выражение показывает, что результирующий вектор магнитной индукции вращается с угловой скоростью  $\omega$ , причём значение индукции на оси неизменно равно  $\frac{\sqrt{3}}{2} B_m$ , т.е. получается круговое магнитное вращающееся поле.

## 5.6. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Если в трёх одинаковых фазах обмотки трёхфазного генератора переменного тока индуцируются одинаковые несинусоидальные напряжения, например содержащие третью гармонику, то напряжение фазы  $A$  можно представить в виде

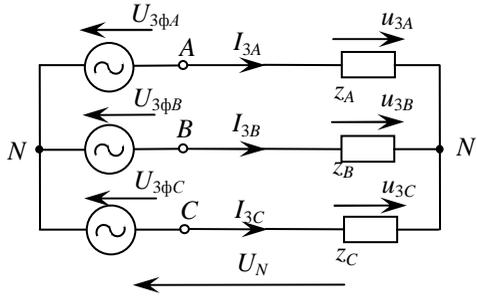
$$u_{\phi A} = U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3).$$

Напряжения во второй и третьей фазах получаются путём замены в этом уравнении  $\omega t$  соответственно на  $\omega t - \frac{2\pi}{3}$  и  $\omega t - \frac{4\pi}{3}$ . Это дает:

$$u_{\phi B} = U_{1m} \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + U_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3);$$

$$u_{\phi C} = U_{1m} \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) + U_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3).$$

Таким образом, в то время как основные гармоники смещены по фазе друг относительно друга на  $120^\circ$ , высшие гармоники во всех трёх направлениях совпадают по фазе. Поэтому в линейных напряжениях высших гармоник не будет, и они будут синусоидальными (если, конечно, фазные напряжения не содержат пятой или седьмой гармоники).



**Рис. 5.16.** Схема для третьей гармоники при соединении звездой

Если три одинаковые фазы нагрузки подключены к генератору по схеме звезды, то на нагрузку будут действовать синусоидальные напряжения. Схема для третьей гармоники показана на рис. 5.16.

Здесь

$$U_N = U_{3\phi A} = U_{3\phi B} = U_{3\phi C} = U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3).$$

При этом легко показать, что  $i_{3A} = i_{3B} = i_{3C} = 0$ .

Поэтому

$$u_{3A} = u_{3B} = u_{3C} = 0.$$

Если нулевые точки генератора и нагрузки соединить между собой, как это показано на рис. 5.9, то через линейные провода и нулевой провод будет циркулировать ток утроенной частоты. Он создаёт в фазах нагрузки падение напряжения утроенной частоты и таким образом делает несинусоидальным также напряжение на нагрузке.

## 5.7. МЕТОД СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДЛЯ РАСЧЁТА НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРЁХФАЗНЫХ СИСТЕМ

Запишем действующие значения симметричной системы ЭДС:

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = E_B e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \dot{E}_C = E_C e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$

Обозначим

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

тогда

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a^3 = e^{j2\pi} = 1; \quad a^4 = a; \quad 1 + a + a^2 = 0.$$

Симметричную трёхфазную систему ЭДС можно записать в виде

$$\dot{E}_A; \dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A; \dot{E}_C = a \dot{E}_A.$$

Как видно из рис. 5.17, ЭДС в фазах проходит через максимум в алфавитном порядке фаз ( $A, B, C, A, B, C, \dots$ ). Такую систему называют симметричной системой прямой последовательности.

Симметричную систему обратной последовательности, в которой ЭДС проходит через максимум в обратном алфавитном порядке фаз ( $A, C, B, A, C, B, \dots$ ), можно записать в виде

$$\dot{E}_A; \dot{E}_B = a \dot{E}_A; \dot{E}_C = a^2 \dot{E}_A.$$

Симметричная система нулевой последовательности, в которой все три ЭДС проходят через максимум амплитуды одновременно, записывается в виде

$$\dot{E}_A = \dot{E}_B = \dot{E}_C.$$

Любую несимметричную трёхфазную систему ЭДС, напряжений или токов, например  $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ , можно представить в виде суммы трёх симметричных трёхфазных систем: нулевой ( $\dot{E}_0; \dot{E}_0; \dot{E}_0$ ), прямой ( $\dot{E}_1; a^2 \dot{E}_1; a \dot{E}_1$ ) и обратной ( $\dot{E}_2; a \dot{E}_2; a^2 \dot{E}_2$ ) последовательности, которые называют симметричными составляющими данной несимметричной трёхфазной системы (рис. 5.18):

$$\begin{cases} \dot{E}_A = \dot{E}_0 + \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ \dot{E}_B = \dot{E}_0 + a^2 \dot{E}_1 + a \dot{E}_2; \\ \dot{E}_C = \dot{E}_0 + a \dot{E}_1 + a^2 \dot{E}_2. \end{cases} \quad (5.11)$$

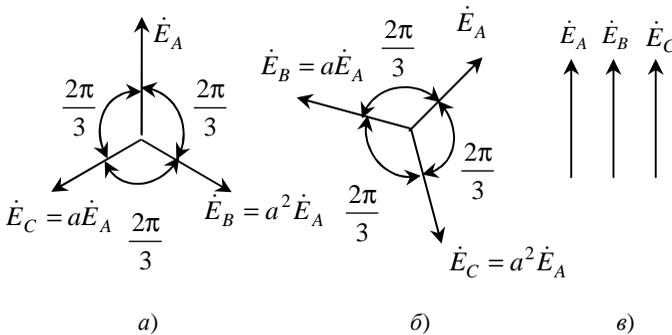
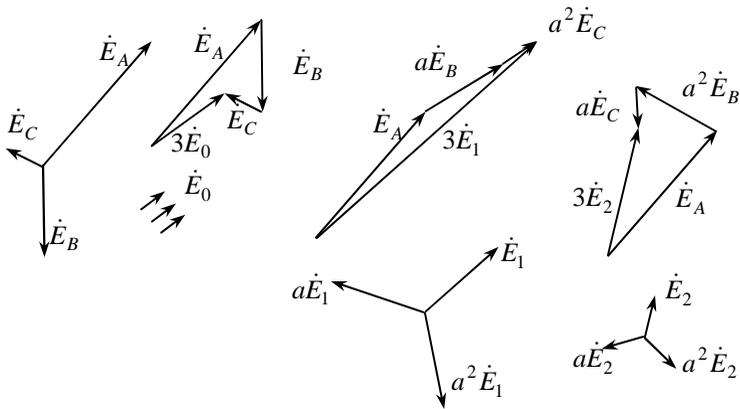


Рис. 5.17. Симметричные составляющие прямой (а), обратной (б) и нулевой (в) последовательностей



**Рис. 5.18. Разложение несимметричной системы ЭДС на симметричные составляющие**

Из уравнения (5.11) можно выразить  $\dot{E}_0$ ,  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  через  $\dot{E}_A$ ,  $\dot{E}_B$  и  $\dot{E}_C$ , если учесть, что

$$1 + a + a^2 = 0; \quad a^3 = 1; \quad a^4 = a.$$

Для получения  $\dot{E}_0$  следует сложить равенства (5.11) и разделить полученную сумму на три.

Для получения  $\dot{E}_1$  следует, оставив первое равенство (5.11) без умножения, умножить второе равенство на  $a$  и третье – на  $a^2$ , затем сложить три полученных равенства и разделить сумму на три.

Для получения  $\dot{E}_2$  следует, оставив первое равенство (5.11) без умножения, умножить второе равенство на  $a^2$  и третье – на  $a$ , затем сложить три полученных равенства и разделить сумму на три.

$$\begin{cases} \dot{E}_0 = \frac{1}{3}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C); \\ \dot{E}_1 = \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a\dot{E}_B + a^2\dot{E}_C); \\ \dot{E}_2 = \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a^2\dot{E}_B + a\dot{E}_C). \end{cases} \quad (5.12)$$

Получили формулы прямой, обратной и нулевой последовательностей линейных и фазных напряжений сети, по которым представля-

ется возможным рассчитывать указанные симметричные составляющие на основании результатов измерения линейных и фазных напряжений обычными вольтметрами и создавать автоматические устройства непрерывного контроля указанных симметричных составляющих.

На рис. 5.19, а показан участок сети с указанием положительных направлений линейных  $U_{CA}$ ,  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  и фазных  $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$  напряжений, а на рис. 5.19, б представлена векторная диаграмма линейных напряжений.

Примем следующие обозначения:

$$U_{AB} = U_{AB}; U_{BC} = U_{BC}e^{j\alpha}; U_{CA} = U_{CA}e^{j\beta}.$$

Тогда на основании метода симметричных составляющих для обратной последовательности напряжения  $U_{AB2}$  можем записать:

$$U_{AB2} = \frac{1}{3}(U_{AB} + a^2U_{BC}e^{j\alpha} + aU_{CA}e^{j\beta}), \quad (5.13)$$

где  $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$  – фазный множитель.

Перепишем уравнение (5.13):

$$3U_{AB2} = U_{AB} + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)U_{BC}e^{j\alpha} + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)U_{CA}e^{j\beta}.$$

Можно показать, что модуль этого комплекса равен

$$9U_{AB2}^3 = U_{AB}^3 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - U_{AB}U_{CA}(\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta) - U_{AB}U_{BC}(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha) - U_{BC}U_{CA}\cos(\alpha - \beta) - \sqrt{3}\sin(\beta - \alpha). \quad (5.14)$$

Сумма комплексов линейных напряжений получена из рассмотрения треугольника на рис. 5.20.

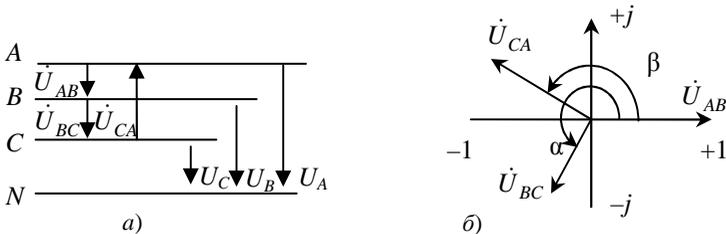
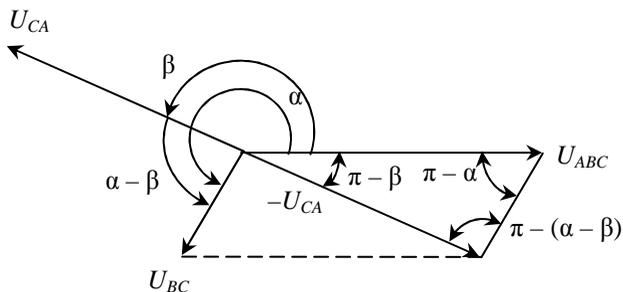


Рис. 5.19. Участок сети (а) и его векторная диаграмма (б)



**Рис. 5.20.** Получение суммы комплексов линейных напряжений

Из треугольника по теореме косинусов имеем:

$$\cos(\alpha - \pi) = \frac{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2}{2U_{AB}U_{CA}} = -\cos \alpha; \quad (5.15)$$

$$\cos(\pi - \beta) = \frac{U_{AB}^2 + U_{CA}^2 - U_{BC}^2}{2U_{AB}U_{CA}} = -\cos \beta; \quad (5.16)$$

$$\cos(\pi - (\alpha - \beta)) = \frac{U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - U_{AB}^2}{2U_{BC}U_{CA}} = -\cos(\alpha - \beta). \quad (5.17)$$

Следовательно, можем записать:

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha; \quad \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}. \quad (5.18)$$

По теореме синусов

$$\frac{U_{AB}}{\sin(\pi - (\alpha - \beta))} = \frac{U_{BC}}{\sin(\pi - \beta)} = -\frac{U_{0A}}{\sin(\alpha - \pi)}.$$

Или

$$\frac{U_{AB}}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{U_{BC}}{\sin \beta} = -\frac{U_{CA}}{\sin \alpha}.$$

Таким образом, с учётом (15) имеем

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{(U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2)^2}{4U_{AB}^2 + U_{BC}^2}}. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.15) – (5.18) в (5.14) и производя несложные преобразования, с учётом (5.19) получим окончательное выражение для

обратной последовательности линейного напряжения в функции его модулей:

$$U_{AB2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - \sqrt{3} \sqrt{4U_{AB}^2 U_{BC}^2 - (U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2)^2}}. \quad (5.20)$$

Аналогично можно найти уравнение для напряжения прямой последовательности.

Действительно,

$$U_{AB1} = \frac{1}{3} (U_{AB} + aU_{BC}e^{j\alpha} + a^2U_{CA}e^{j\beta}).$$

Квадрат модуля этого комплекса равен

$$9U_{AB1}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - U_{AB}U_{BC}(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) - U_{AB}U_{CA}(\cos\beta - \sqrt{3}\sin\beta) - U_{BC}U_{CA}(\cos(\alpha - \beta) - \sqrt{3}\sin(\alpha - \beta)). \quad (5.21)$$

Подставляя (5.15) – (5.18) в (5.21), получим уравнение для определения напряжения прямой последовательности:

$$U_{AB1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 + \sqrt{3} \sqrt{4U_{AB}^2 U_{BC}^2 - (U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2)^2}}. \quad (5.22)$$

Уравнения (5.20) и (5.22) являются основными для расчёта симметричных составляющих прямой и обратной последовательности несимметричных линейных напряжений.

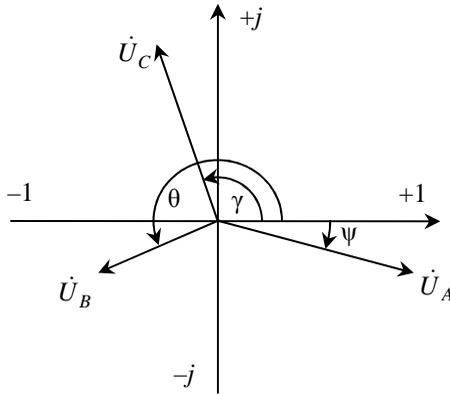
Так как соотношения между симметричными составляющими фазных и линейных напряжений являются такими же, как и соотношения между действительными фазными и линейными напряжениями, то симметричные составляющие прямой и обратной последовательности фазных напряжений найдем из выражений

$$U_{A1} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} U_{AB1}; \quad U_{A2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} U_{AB2}.$$

Для получения нулевой последовательности фазных напряжений рассмотрим векторную диаграмму рис. 5.21.

Запишем фазные напряжения в комплексной форме:

$$U_A = U_A(\cos\alpha + j\sin\alpha); \quad U_B = U_B(\cos\beta + j\sin\beta); \quad U_C = U_C(\cos\gamma + j\sin\gamma).$$



**Рис. 5.21.** Получение нулевой последовательности фазных напряжений

Система линейных напряжений независимо от вида схемы определяется через фазные напряжения:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Причём

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0.$$

На основании метода симметричных составляющих утроенное напряжение нулевой последовательности равно

$$\begin{aligned} 3\dot{U}_0 &= U_A(\cos \alpha + j \sin \alpha) + U_B(\cos \beta + j \sin \beta) + U_C(\cos \gamma + j \sin \gamma) = \\ &= U_A \cos \alpha + U_B \cos \beta + U_C \cos \gamma + j(U_A \sin \alpha + U_B \sin \beta + U_C \sin \gamma). \end{aligned}$$

Модуль последнего выражения после простых преобразований будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} 9U_0^2 &= U_A^2 + U_B^2 + U_C^2 + 2U_C U_B \cos(\alpha - \beta) + \\ &+ 2U_B U_C \cos(\beta - \gamma) + 2U_C U_A \cos(\alpha - \gamma). \end{aligned} \quad (5.23)$$

С другой стороны, линейное напряжение  $U_{AB}$ , выраженное через фазные напряжения  $U_A$  и  $U_B$ , можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= U_A(\cos \alpha + j \sin \alpha) - U_B(\cos \beta + j \sin \beta) = \\ &= U_A \cos \alpha - U_B \cos \beta + j(U_A \sin \alpha - U_B \sin \beta). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Его модуль

$$U_{AB}^2 = U_A^2 + U_B^2 - 2U_A U_B \cos(\alpha - \beta).$$

Таким образом,

$$2U_A U_B \cos(\alpha - \beta) = U_A^2 + U_B^2 - U_{AB}^2. \quad (5.25)$$

Аналогично получим уравнения для линейных напряжений  $U_{BC}$  и  $U_{CA}$ :

$$2U_B U_C \cos(\beta - \gamma) = U_B^2 + U_C^2 - U_{BC}^2; \quad (5.26)$$

$$2U_A U_C \cos(\alpha - \gamma) = U_A^2 + U_C^2 - U_{CA}^2. \quad (5.27)$$

Подставляя уравнения (5.25) – (5.27) в (5.23), имеем

$$9U_0^2 = 3U_A^2 + 3U_B^2 + U_C^2 - U_{AB}^2 - U_{BC}^2 - U_{CA}^2.$$

И окончательно искомое напряжение нулевой последовательности фазных напряжений будет определяться формулой

$$U_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2) - \frac{1}{9}(U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2)}. \quad (5.28)$$

В частном случае, когда система линейных напряжений симметрична, т.е.  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{л}}$ , из (5.28) получим

$$U_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2 - U_{\text{л}}^2)}. \quad (5.29)$$

На рисунке 5.22 дана схема фильтра для выделения составляющих прямой или обратной последовательности системы токов, составляющая нулевой последовательности которой равна нулю. Определим условия, которым следует подчинить полные сопротивления  $Z_{AB}$  и  $Z_{BC}$  элементов этой цепи, причём полное сопротивление амперметра обозначим через  $Z_{CA}$ . На основании законов Кирхгофа имеем

$$I_{AB}Z_{AB} + I_{BC}Z_{BC} + I_{CA}Z_{CA} = 0;$$

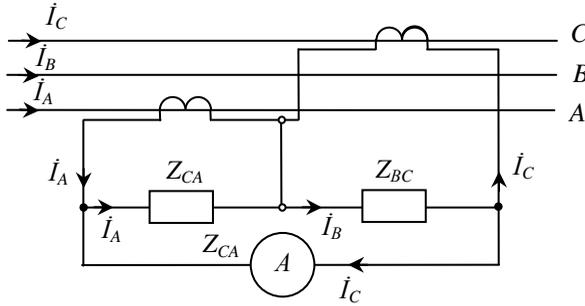
$$I_{AB} = I_A + I_{CA}; \quad I_{BC} = I_C + I_{CA},$$

откуда

$$I_{CA} = -\frac{I_A Z_{AB} + I_C Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}.$$

Так как составляющая нулевой последовательности системы линейных токов по условию равна нулю, то, выражая токи  $I_C$  и  $I_A$  через составляющие прямой и обратной последовательностей  $I_1$  и  $I_2$ , получим

$$I_A = I_1 + I_2; \quad I_C = aI_1 + a^2I_2$$



**Рис. 5.22. Фильтр составляющих прямой и обратной последовательностей**

и, подставив эти значения в выражение для  $I_{CA}$ , найдём

$$I_{CA} = -\frac{I_1(Z_{AB} + aZ_{BC}) + I_2(Z_{AB} + a^2Z_{BC})}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}.$$

Из этого выражения следует, что ток  $I_{CA}$ , проходящий через амперметр, не зависит от составляющей обратной последовательности и пропорционален составляющей прямой последовательности, если выполнены условия

$$Z_{AB} + a^2Z_{BC} = 0,$$

или

$$Z_{AB} = -a^2Z_{BC} = Z_{BC}e^{j\pi/3}, \quad (5.30)$$

и не зависит от составляющей прямой последовательности и пропорционален составляющей обратной последовательности, если выполнены условия

$$Z_{AB} + aZ_{BC} = 0,$$

или

$$Z_{BC} = -a^2Z_{AB} = Z_{AB}e^{j\pi/3}.$$

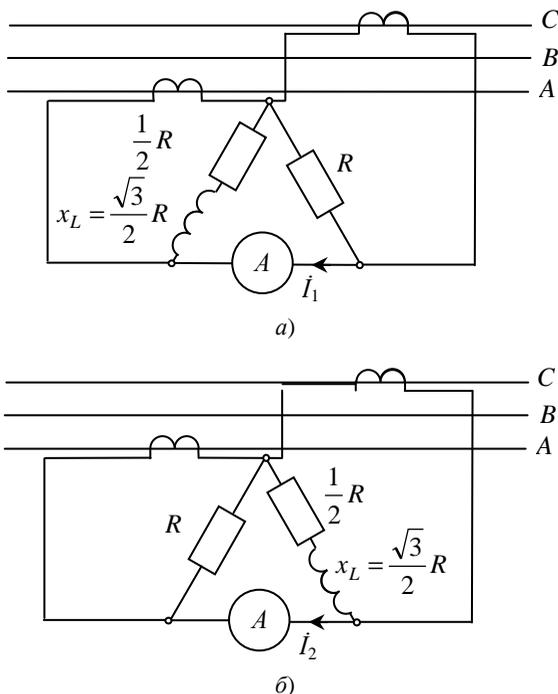
Фильтр для выделения составляющей прямой последовательности логично получить при

$$Z_{BC} = R; \quad Z_{AB} = R' + jX.$$

Нетрудно показать, что равенство (5.30) будет выполняться при

$$R' = \frac{1}{2}R; \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

На рисунке 5.23, *a* показана схема, в которой реализуются указанные условия.



**Рис. 5.23. Фильтры для выделения составляющих прямой (а) и обратной (б) последовательностей**

Фильтр для выделения составляющей обратной последовательности получим, взяв

$$Z_{AB} = R; Z_{BC} = R' + jX .$$

Равенство (5.30), как и ранее, будет выполняться при

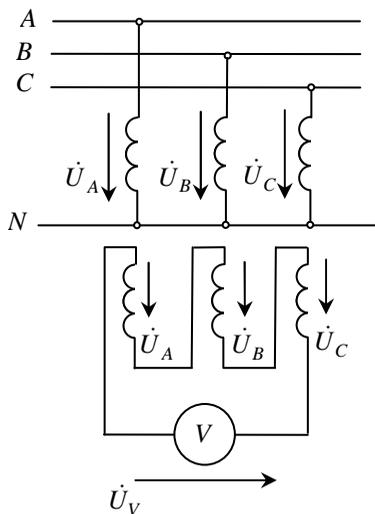
$$R' = \frac{1}{2} R; X = \frac{\sqrt{3}}{2} R .$$

На рисунке 5.23, б показана схема для выделения составляющей обратной последовательности.

Как уже отмечалось, величина напряжения нулевой последовательности равна одной трети суммы фазных напряжений, т.е.

$$U_0 = \frac{1}{3}(U_A + U_B + U_C) . \quad (5.31)$$

Это соотношение используется при измерении напряжения нулевой последовательности. Три однофазных трансформатора напряжения соединяются, как показано на рис. 5.24, причём первичные обмотки



**Рис. 5.24.** Измерение напряжения нулевой последовательности

соединяются звездой, а общая точка подсоединяется к нейтрали. Вторичные обмотки трансформаторов соединяются открытым треугольником, благодаря чему напряжение на зажимах треугольника пропорционально сумме вторичных фазных напряжений. Вольтметр, показанный на схеме, используется для измерений данного напряжения:

$$U_V = U_A + U_B + U_C,$$

а при соответствующей градуировке его можно использовать для измерения напряжения нулевой последовательности:  $U_V \equiv U_0$ .

Напряжение нулевой последовательности можно также измерить при помощи схемы, показанной на рис. 5.25. Три индуктивные катушки с равными сопротивлениями  $Z$  соединены звездой и подсоединены к трём фазам линии. Общая точка звезды подсоединена через вольтметр к нейтрали. Напряжение на вольтметре  $U_V$  можно определить из следующих соотношений:

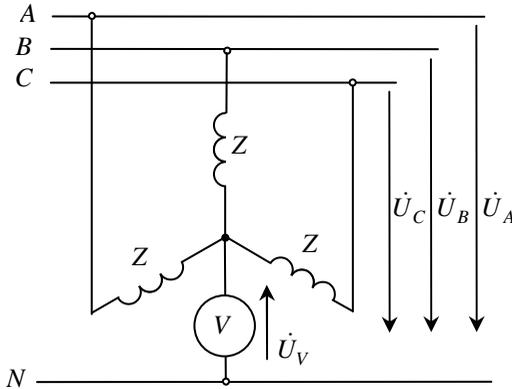
$$U'_A - U_V - U_A = 0; \quad U'_B - U_V - U_B = 0; \quad U'_C - U_V - U_C = 0.$$

Сложив эти уравнения и учтя, что

$$U_A + U_B + U_C = 3U_0; \quad U'_A + U'_B + U'_C = 3U'_0,$$

получим

$$U_V = U'_0 - U_0.$$



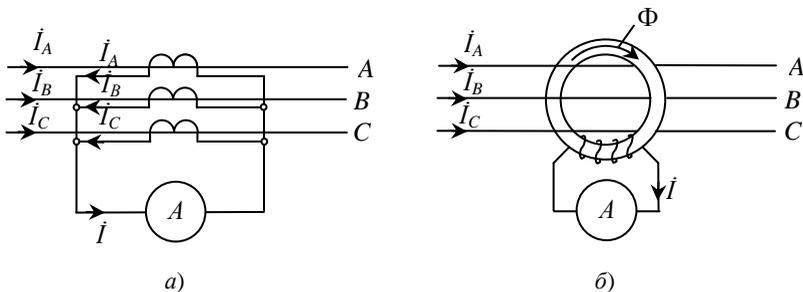
**Рис. 5.25.** Измерение напряжения нулевой последовательности

Напряжение  $U'_0$  определяется асимметрией фазных напряжений источника питания линии. Эта система, как правило, симметрична. Поэтому показание вольтметра равно напряжению нулевой последовательности:  $U_V = U_0$ .

Аналогично (5.31) ток нулевой последовательности можно представить в виде

$$I_0 = \frac{1}{3}(I_A + I_B + I_C). \quad (5.32)$$

Поэтому для измерения токов нулевой последовательности необходимо использовать три трансформатора тока, вторичные обмотки которых соединяются параллельно (рис. 5.26, а).



**Рис. 5.26.** Измерение токов нулевой последовательности с помощью трёх трансформаторов тока (а) или одного кольцевого трансформатора тока (б)

Через амперметр  $A$ , подсоединённый к концам трёх вторичных обмоток, проходит ток, соответствующий сумме токов

$$\dot{I} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C,$$

и, следовательно, его можно отградуировать на показание тока нулевой последовательности, т.е.  $\dot{I} \equiv \dot{I}_0$ .

Для этой же цепи часто используется один кольцевой трансформатор, сердечник которого охватывает три провода (рис. 5.26, б). В этой схеме происходит суммирование магнитных потоков, создаваемых токами трёх фаз  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ . Поэтому ЭДС, индуцируемая вторичной обмоткой кольцевого трансформатора, пропорциональна результирующему магнитному потоку  $\Phi$ , а показание амперметра, как и в схеме рис. 5.26, а, пропорционально току нулевой последовательности.

## 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ

---



---

Суть теории четырёхполюсников (ЧП) заключается в том, что на основании некоторых обобщённых их параметров находятся токи и напряжения на входе при известных токах и напряжениях на выходе, и наоборот. При этом токи и напряжения внутри заданной схемы не рассчитываются.

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе ЧП (рис. 6.1) могут быть записаны в виде шести групп уравнений:

1. Форма  $\parallel A \parallel$ :  $\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2$ ;

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

2. Форма  $\parallel Y \parallel$ :  $\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2$ ;

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.$$

3. Форма  $\parallel Z \parallel$ :  $\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}'_2$ ;

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}'_2.$$

4. Форма  $\parallel B \parallel$ :  $\dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}'_1$ ;

$$\dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}'_1.$$

5. Форма  $\parallel G \parallel$ :  $\dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}'_2$ ;

$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}'_2.$$

6. Форма  $\|H\|$ :  $\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2$ ;

$$\dot{I}'_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.$$

Коэффициенты каждой системы уравнений четырёхполюсника могут быть выражены через коэффициенты любой другой системы (табл. 6.1).

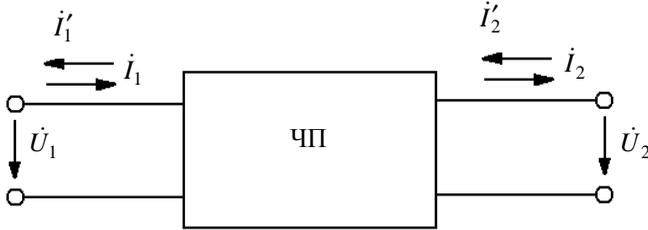


Рис. 6.1. Положительные направления напряжений и токов на входе и выходе четырёхполюсника

### 6.1. Связь обобщённых параметров четырёхполюсника в различных формах

Из формы \n / \n В форму	$\ A\ $	$\ Y\ $	$\ Z\ $	$\ H\ $
$\ A\ $	$A_{11} \ A_{12}$ $A_{21} \ A_{22}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \ \frac{-1}{Y_{21}}$ $\frac{- Y }{Y_{21}} \ \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \ \frac{ Z }{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \ \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{- H }{H_{21}} \ \frac{-H_{11}}{H_{21}}$ $\frac{-H_{22}}{H_{21}} \ \frac{-1}{H_{21}}$
$\ Y\ $	$\frac{A_{22}}{A_{12}} \ \frac{- A }{A_{12}}$ $\frac{-1}{A_{12}} \ \frac{A_{11}}{A_{12}}$	$Y_{11} \ Y_{12}$ $Y_{21} \ Y_{22}$	$\frac{Z_{22}}{ Z } \ \frac{-Z_{12}}{ Z }$ $\frac{-Z_{21}}{ Z } \ \frac{Z_{11}}{ Z }$	$\frac{1}{H_{11}}$ $\frac{-H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}} \ \frac{ H }{H_{11}}$

Из формы В форму	$\ A\ $	$\ Y\ $	$\ Z\ $	$\ H\ $
$\ Z\ $	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \frac{ A }{A_{21}}$	$\frac{Y_{22}}{ Y } \frac{-Y_{12}}{ Y }$	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{ H }{H_{22}} \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $\frac{-H_{21}}{H_{22}} \frac{1}{H_{22}}$
$\ H\ $	$\frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{ A }{A_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$	$\frac{ Z }{Z_{22}} \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$H_{11} \quad H_{12}$ $H_{21} \quad H_{22}$
	$\frac{-1}{A_{22}} \frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \frac{ Y }{Y_{11}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \frac{1}{Z_{22}}$	

В таблице 6.1 обозначено:

$$\|A\| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21};$$

$$\|Y\| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21};$$

$$\|Z\| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21};$$

$$\|H\| = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21};$$

- для обратимого ЧП

$$\|A\| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1;$$

$$Y_{12} = Y_{21}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad H_{12} = H_{21}; \quad A_{12} = A_{21};$$

- для симметричного ЧП

$$A_{11} = A_{22}; \quad Y_{11} = Y_{22}; \quad Z_{11} = Z_{22}; \quad H_{11} = H_{22}.$$

В последнем случае независимых коэффициентов только два ( $A_{11}$  и  $A_{12}$ ;  $Y_{11}$  и  $Y_{12}$ ;  $Z_{11}$  и  $Z_{12}$ ;  $H_{11}$  и  $H_{12}$ ).

Анализ одиночных ЧП, а также их каскадное (цепочное) соединение производится в наиболее удобной форме уравнений – форма  $\|A\|$ .

Каскадное (цепочное) соединение нескольких ЧП целесообразно заменить эквивалентным ЧП, коэффициенты которого определяются

по известным коэффициентам каскадно соединённых ЧП. Матрица коэффициентов  $\|A\|$  эквивалентного ЧП равна произведению матриц  $\|A\|$  и отдельных ЧП (рис. 6.2):

$$\|A_{\text{э}}\| = \prod_{k=1}^n \|A_k\|.$$

Следует иметь в виду, что матрицы, подлежащие перемножению, записываются в том же порядке, в каком отдельные ЧП включены в схеме сложного (эквивалентного) ЧП.

Необходимо отметить, что параллельное соединение ЧП легко заменяется эквивалентным, если уравнения составных ЧП записаны в форме  $\|Y\|$ :

$$\|Y_{\text{э}}\| = \prod_{k=1}^n \|Y_k\|,$$

а последовательное соединение – в форме  $\|Z\|$  (рис. 6.3):

$$\|Z_{\text{э}}\| = \prod_{k=1}^n \|Z_k\|.$$

Правила сложения матриц применимы лишь при равенстве входящего и выходящего токов в каждой паре зажимов составных ЧП. Соединение четырёхполюсников, удовлетворяющее этому условию, называется регулярным.

При расчёте сложных электрических цепей, представленных в виде ЧП, часто пользуются схемами замещения – Т-образной (соединение элементов звездой) и П-образной (соединение элементов треугольником) (рис. 6.4).

Между элементами Т- и П-образных схем замещения и параметрами ЧП существует определённая связь (табл. 6.2).

Пассивный П-образный ЧП может быть преобразован в Т-образный (или наоборот) по правилу преобразования «треугольника» сопротивлений в эквивалентную «звезду».

Следует отметить, что Т-образная и П-образная схемы замещения четырёхполюсника не всегда физически реализуемы. Это означает, что в схеме замещения ЧП параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$  должны быть положительными.

Если в какой-либо ветви схемы такое условие не выполняется, то она считается физически нереализуемой.

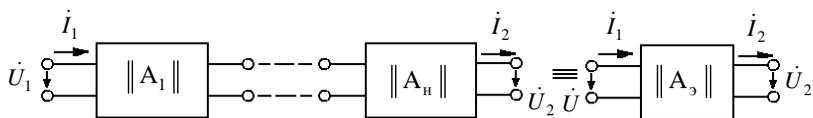
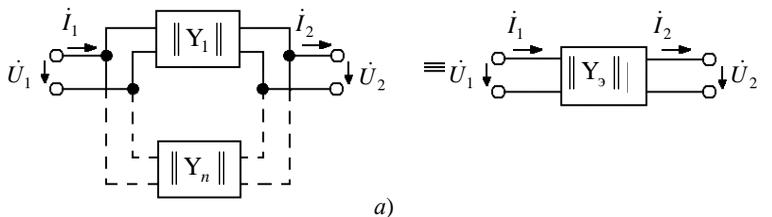
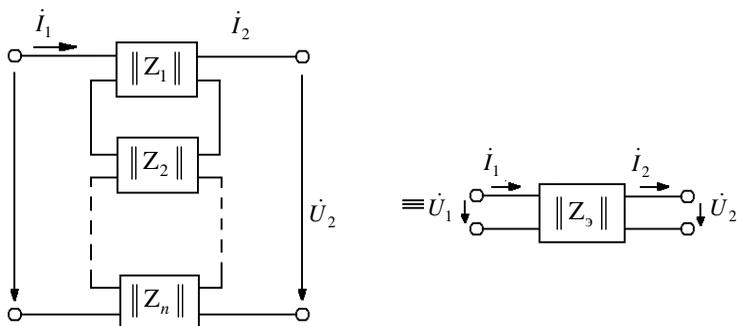


Рис. 6.2. Каскадное соединение четырёхполюсников

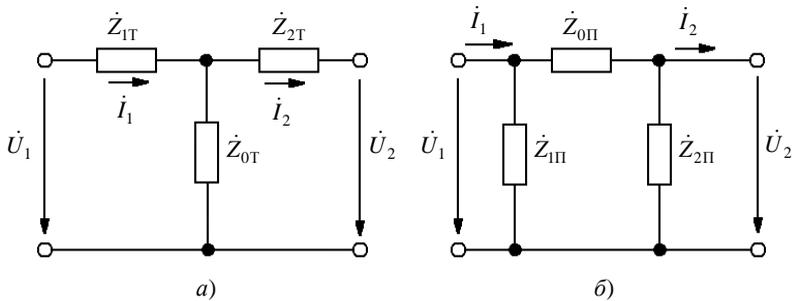


а)



б)

Рис. 6.3. Параллельное (а) и последовательное (б) соединения четырёхполюсников



а)

б)

Рис. 6.4. Схемы замещения четырёхполюсников:  
а – Т-образная; б – П-образная

## 6.2. Связь между Т- и П-образными схемами замещения четырёхполюсников

Кoeffициент ЧП	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{21}$	$A_{22}$
Рис. 6.4, а	$1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}$	$\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} +$ $+\frac{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}$	$\frac{1}{\dot{Z}_{0T}}$	$1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}$
Рис. 6.4, б	$1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{2T}}$	$\dot{Z}_{0П}$	$\frac{\dot{Z}_{0П} + \dot{Z}_{1П} + \dot{Z}_{2П}}{\dot{Z}_{1П}\dot{Z}_{2П}}$	$1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{1П}}$

Однако данное утверждение не относится к четырёхполюсникам, не содержащим реактивных элементов.

Помимо коэффициентов уравнений ЧП в различных формах широко используются характеристические параметры: постоянная распределения (передачи)  $\gamma = \alpha + j\beta$ , действительная часть которой называется собственным затуханием ЧП, а мнимая часть – коэффициентом фазы, и характеристические сопротивления  $\dot{Z}_{1c}$  и  $\dot{Z}_{2c}$ . Кроме того, часто применяются параметры холостого хода (хх) и короткого замыкания (кз), входные сопротивления ЧП со стороны входных зажимов ( $\dot{Z}_{1x}$  и  $\dot{Z}_{1к}$ ) и со стороны выходных зажимов ( $\dot{Z}_{2x}$  и  $\dot{Z}_{2к}$ ). Эти параметры связаны между собой соотношением  $\frac{\dot{Z}_{1x}}{\dot{Z}_{1к}} = \frac{\dot{Z}_{2x}}{\dot{Z}_{2к}}$ , которое

свидетельствует о том, что в общем виде ЧП характеризуется тремя независимыми коэффициентами – параметрами, а симметричный ЧП – двумя (например,  $\dot{Z}_{1x}$  и  $\dot{Z}_{1к}$ ).

Входным сопротивлением ЧП называется отношение входного напряжения к входному току.

Связь между коэффициентами ЧП, параметрами хх и кз и характеристическими параметрами приведена в табл. 6.3. В этой же таблице через вышеназванные параметры даются выражения для расчёта входного сопротивления ЧП при произвольной нагрузке  $\dot{Z}_н$ .

### 6.3. Связь между коэффициентами и характеристическими параметрами четырёхполюсника

	Коэффициенты	Параметры хх и кз	Характеристические параметры
Коэффициенты	$A_{11} \quad A_{12}$ $A_{21} \quad A_{22}$	$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1x} Z_{1k}}{Z_{2k} (Z_{1x} - Z_{1k})}}$ $A_{12} = A_{11} Z_{2k}$ $A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1x}}$ $A_{22} = \frac{A_{12}}{Z_{1k}}$	$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \operatorname{ch} \gamma$ $A_{12} = \sqrt{Z_{1c} Z_{2c}} \operatorname{sh} \gamma$ $A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{1c} Z_{2c}}} \operatorname{sh} \gamma$ $A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \operatorname{ch} \gamma$
Параметры хх и кз	$Z_{1x} = \frac{A_{11}}{A_{21}}$ $Z_{1k} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$ $Z_{2x} = \frac{A_{22}}{A_{21}}$ $Z_{2k} = \frac{A_{12}}{A_{11}}$	$Z_{1x} \quad Z_{1k}$ $Z_{2x} \quad Z_{2k}$	$Z_{1x} = Z_{1c} \operatorname{cth} \gamma$ $Z_{1k} = Z_{1c} \operatorname{th} \gamma$ $Z_{2x} = Z_{2c} \operatorname{cth} \gamma$ $Z_{2k} = Z_{2c} \operatorname{th} \gamma$
Характеристические параметры	$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11} A_{12}}{A_{21} A_{22}}}$ $Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}}$ $\gamma = \ln \left( \sqrt{\frac{A_{11} A_{22}}{A_{12} A_{21}}} + \sqrt{\frac{A_{11} A_{21}}{A_{12} A_{22}}} \right)$	$Z_{1c} = \sqrt{Z_{1x} Z_{1k}}$ $Z_{2c} = \sqrt{Z_{2x} Z_{2k}}$ $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{Z_{1k}}{Z_{1x}}} = \sqrt{\frac{Z_{2k}}{Z_{2x}}}$	$Z_{1c} \quad Z_{2c}$ $\gamma = \alpha + j\beta$
Входное сопротивление	$Z_{1\text{BX}} = \frac{A_{11} Z_{\text{H}} + A_{12}}{A_{21} Z_{\text{H}} + A_{22}}$ $Z_{2\text{BX}} = \frac{A_{22} Z_{\text{H}} + A_{12}}{A_{21} Z_{\text{H}} + A_{11}}$	$Z_{1\text{BX}} = Z_{1x} \frac{Z_{2k} + Z_{\text{H}}}{Z_{2x} + Z_{\text{H}}}$ $Z_{2\text{BX}} = Z_{2x} \frac{Z_{1k} + Z_{\text{H}}}{Z_{1x} + Z_{\text{H}}}$	$Z_{1\text{BX}} = Z_{1c} \operatorname{tg} \times$ $\times \left( \gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{2c} + Z_{\text{H}}}{Z_{2c} - Z_{\text{H}}} \right)$ $Z_{2\text{BX}} = Z_{2c} \operatorname{tg} \times$ $\times \left( \gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{1c} + Z_{\text{H}}}{Z_{1c} - Z_{\text{H}}} \right)$

## Контрольные вопросы

1. Что называется четырёхполюсником?
2. Как классифицируются четырёхполюсники?
3. Написать шесть форм записи уравнений ЧП, указать для них положительные направления записи токов и напряжений.
4. В каких случаях каждая форма записи имеет преимущества перед остальными?
5. Как опытным путём определить коэффициенты  $A$ ,  $Z$ ,  $Y$ ,  $H$ ?
6. Каким образом, зная коэффициенты одной формы записи, определить коэффициенты другой формы?
7. Какое соединение ЧП называют регулярным?
8. Что понимается под характеристическими параметрами ЧП?
9. Каким образом определяются характеристические сопротивления ЧП?
10. Что называется входным сопротивлением ЧП?
11. С какой целью используют схемы замещения ЧП?
12. Привести примеры электро-, радиосхем, в которых осуществляется каскадное соединение ЧП?
13. Что называется постоянной передачи?
14. В каких единицах измеряют затухания?

## 7. РЕАКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ ТИПА К

---

---

Реактивным фильтром называется реактивный четырёхполюсник, пропускающий некоторую определённую полосу частот в согласованном режиме без затухания; вне этой полосы затухание велико. Полоса частот, при которых затухание отсутствует, называется полосой пропускания фильтра. Остальную область частот составляет полоса задерживания (или затухания).

На рисунках 7.1 – 7.4 показаны схемы Г-, Т- и П-образных фильтров нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовых (ПФ) и заграждающих (ЗФ).

Частотные характеристики  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $Z_T$  и  $Z_{\Pi}$  рассматриваемых фильтров типа К изображены на рис. 7.5 – 7.8, а расчётные выражения основных характеристик и параметров фильтров сведены в табл. 7.1 и 7.2.

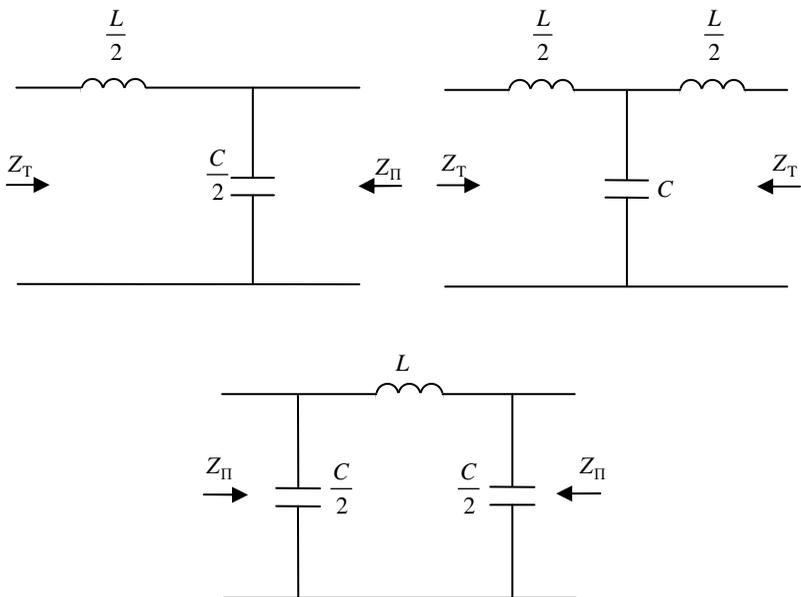


Рис. 7.1. Фильтр нижних частот

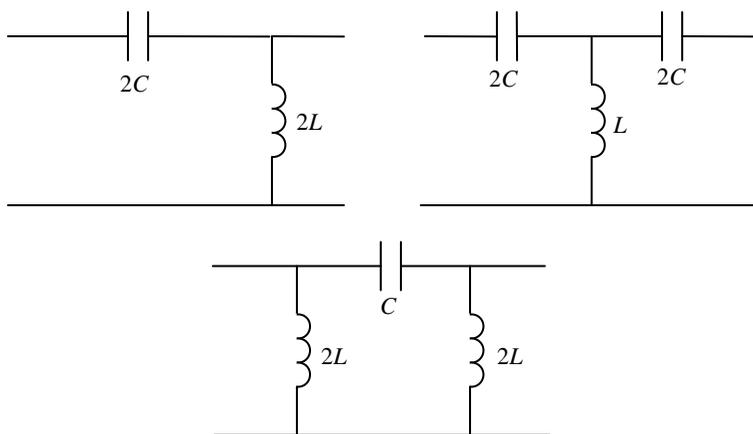


Рис. 7.2. Фильтр верхних частот

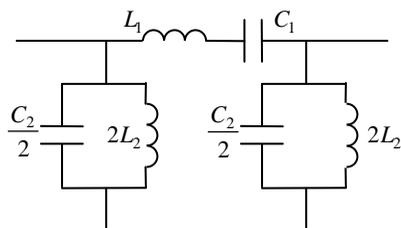
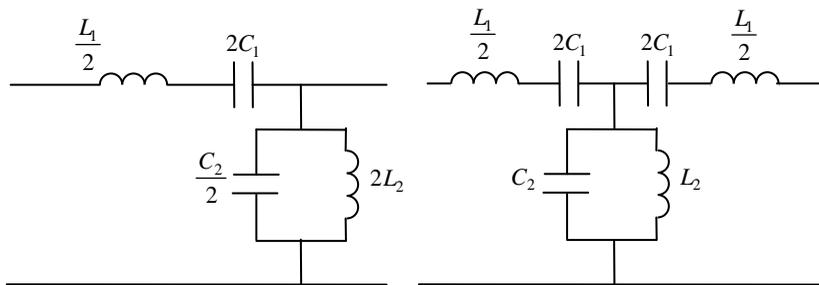


Рис. 7.3. Полосовой фильтр

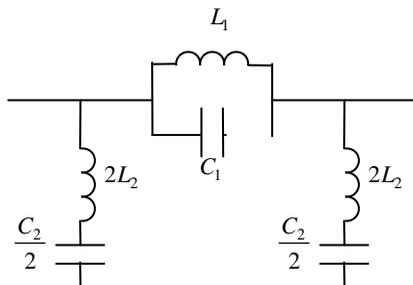
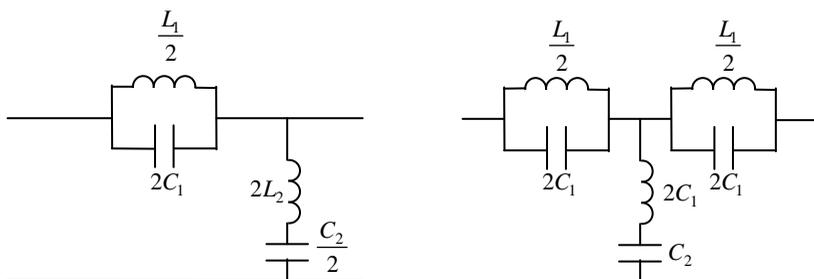


Рис. 7.4. Заграждающий фильтр

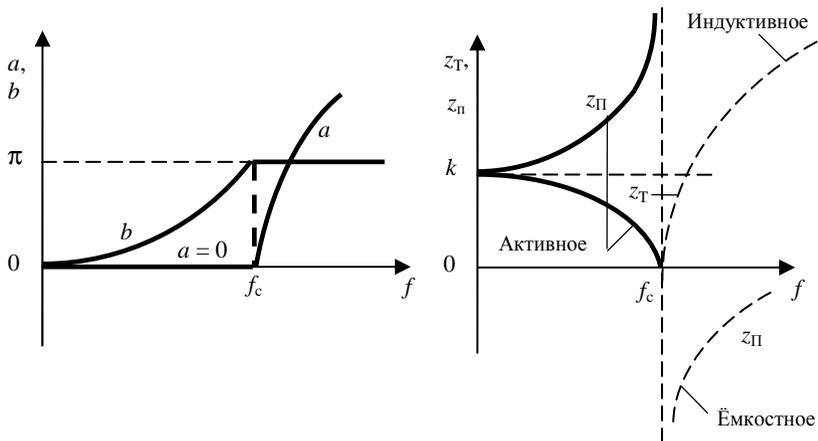


Рис. 7.5. Частотные характеристики ФНЧ

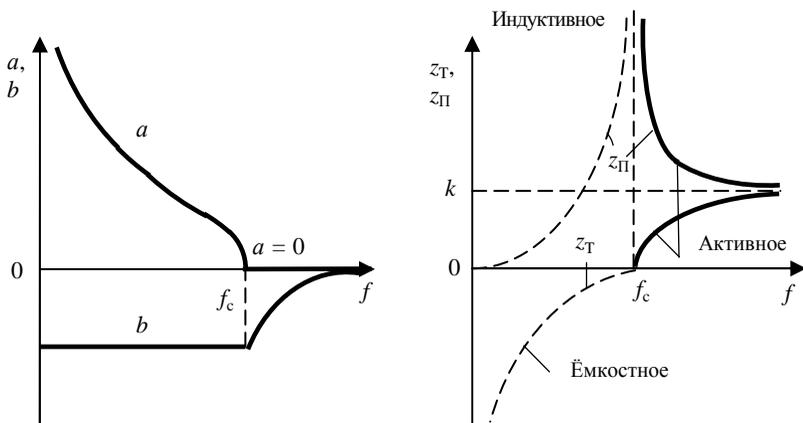


Рис. 7.6. Частотные характеристики ФВЧ

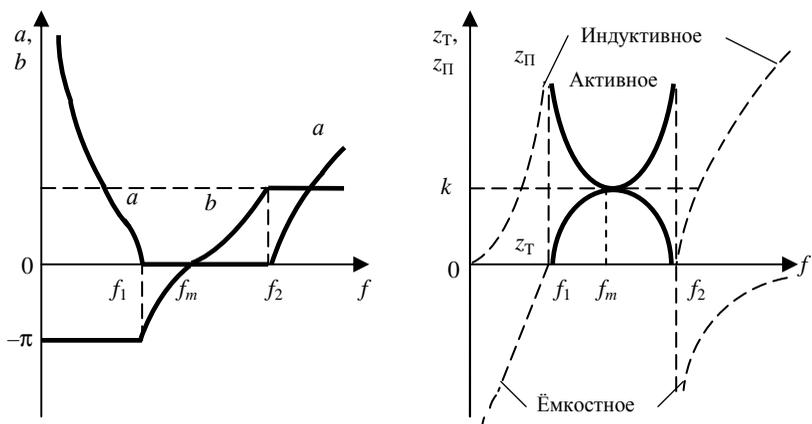


Рис. 7.7. Частотные характеристики ПФ

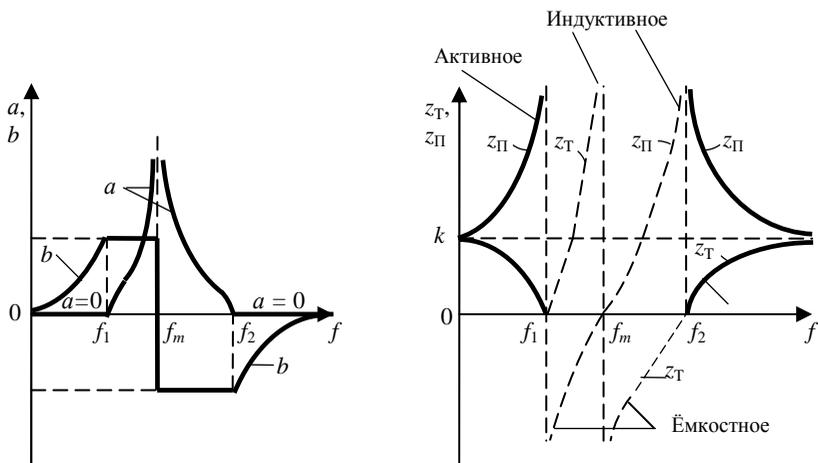


Рис. 7.8. Частотные характеристики ЗФ

## 7.1. Основные характеристики фильтров

Характеристика		Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
Полоса пропускания	$\sin \frac{b}{2}$ при $a = 0$	$\frac{f}{f_c}$	$-\frac{f_c}{f}$	$F$	$-\frac{1}{F}$
Полоса задерживания	$ch \frac{a}{2}$ $b$	$\frac{f}{f_c}$ $\pi$	$\frac{f_c}{f}$ $-\pi$	$ F $ $\pm\pi$	$\frac{1}{ F }$ $\pm\pi$
$Z_T$		$K\sqrt{1+\left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}$	$K\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{jf}\right)^2}$	$K\sqrt{1+(jF)^2}$	$K\sqrt{1+\left(\frac{1}{jF}\right)^2}$
$Z_{\Pi}$		$\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}}$	$\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{f_c}{jf}\right)^2}}$	$\frac{K}{\sqrt{1+(jF)^2}}$	$\frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{jF}\right)^2}}$
$K$		$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$

Примечание:  $f_m = \sqrt{f_1 f_2}$ ,  $F = \frac{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}}$ .

## 7.2. Расчётные параметры фильтров

Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
$L = -\frac{K}{\pi f_c}$	$L = \frac{K}{4\pi f_c}$	$L_1 = \frac{K}{\pi(f_2 - f_1)}$ $L_2 = \frac{K(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}$	$L_1 = \frac{K(f_2 - f_1)}{\pi f_1 f_2}$ $L_2 = \frac{K}{4\pi(f_2 - f_1)}$

Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
$C = \frac{1}{\pi f_c K}$	$C = \frac{1}{4\pi f_c K}$	$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi K f_1 f_2}$ $C_2 = \frac{1}{\pi K (f_2 - f_1)}$	$C_1 = \frac{1}{4\pi K (f_2 - f_1)}$ $C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi K f_1 f_2}$
$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}}$	$f_c = \frac{1}{4\pi \sqrt{LC}}$	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{L_4 C_2} + \frac{1}{L_4 C_1}} \mp \sqrt{\frac{1}{L_4 C_2}} \right]$	$f_{1,2} = \frac{1}{8\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{1}{L_4 C_1}} \mp \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1}} \right]$

## 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Длинная линия – линия электропередачи, длина которой превышает длину волны колебаний, распространяющихся в ней, а расстояние между проводниками, из которых она состоит, значительно меньше этой длины волны.

Длинные линии представляют собой электрические цепи с распределёнными параметрами, каждый элемент длинной линии обладает  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и  $g$  на единицу длины  $dx$ .

Одной из основных задач теории длинных линий является нахождение не только законов распределения тока и напряжения вдоль линии, но и координаты. Процессы в таких цепях описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называемых телеграфными уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} = g_1 U + C_1 \frac{\partial U}{\partial t}, \end{cases}$$

где  $R_1 = \frac{dR}{dx}$ ;  $L_1 = \frac{dL}{dx}$ ;  $C_1 = \frac{dC}{dx}$ .

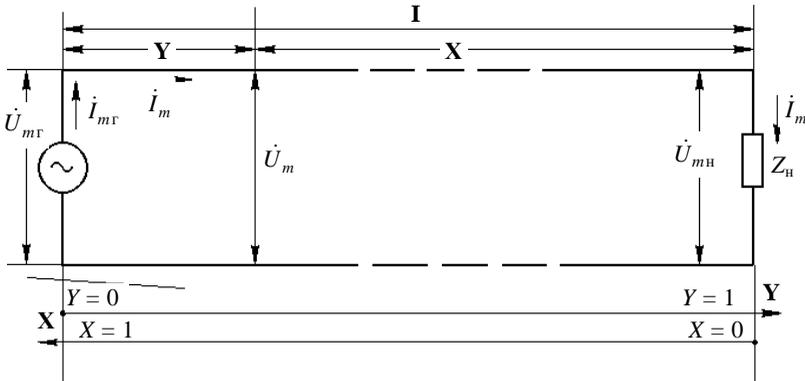


Рис. 8.1. Пояснение телеграфных уравнений

Для схемы, представленной на рис. 8.1, решение телеграфных уравнений записывается в виде

$$\begin{cases} U_m = \frac{U_{mн} + I_{mн} Z_B}{2} e^{\dot{\gamma}x} + \frac{U_{mн} - I_{mн} Z_B}{2} e^{-\dot{\gamma}x}; \\ I_m = \frac{U_{mн} + I_{mн} Z_B}{2 Z_B} e^{\dot{\gamma}x} - \frac{U_{mн} - I_{mн} Z_B}{2 Z_B} e^{-\dot{\gamma}x}, \end{cases}$$

где  $Z_B$  – волновое сопротивление, которое оказывает линия распространяющейся вдоль неё волне тока;  $\dot{\gamma}$  – коэффициент распространения.

$$Z_B = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{\gamma}} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{\dot{\gamma}} \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}; \quad \dot{\gamma} = \alpha + j\beta,$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания;  $\beta$  – коэффициент фазы.

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \alpha \approx \frac{R_1}{2\rho}.$$

Для линии без потерь приближённое выражение для  $Z_B$  является точным:

$$Z_B = \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Гармоническая волна, перемещающаяся от генератора к нагрузке, называется падающей волной, а от нагрузки к генератору – отражённой:

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_{m\text{пад}} + \dot{U}_{m\text{отр}}; \\ U_{m\text{пад}} &= \frac{U_{m\text{н}} + I_{m\text{н}} Z_{\text{в}}}{2} e^{i\gamma X}; \\ U_{m\text{отр}} &= \frac{U_{m\text{н}} - I_{m\text{н}} Z_{\text{в}}}{2} e^{-i\gamma X}; \\ U_{m\text{пад}} &= \frac{U_{m\text{н}} + I_{m\text{н}} Z_{\text{в}}}{2 Z_{\text{в}}} e^{i\gamma X}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}_{m\text{пад}}}{I_{m\text{пад}}} = -\frac{\dot{U}_{m\text{отр}}}{I_{m\text{отр}}}.$$

Для характеристики связи между падающими и отражёнными волнами в теории длинных линий введены коэффициенты отражения напряжения и тока:

$$\begin{aligned} P_U &= \frac{U_{m\text{отр}}}{U_{m\text{пад}}} = \frac{\dot{Z}_{\text{н}} - \dot{Z}_{\text{в}}}{\dot{Z}_{\text{н}} + \dot{Z}_{\text{в}}}; \\ P_I &= \frac{I_{m\text{отр}}}{I_{m\text{пад}}} = -\frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$P_U = -P_I.$$

### 8.1. РЕЖИМ БЕГУЩИХ ВОЛН (РБВ)

Режимом бегущих волн называется такой режим, когда в линии существуют только падающие волны, а отражённой волны нет (рис. 8.2).

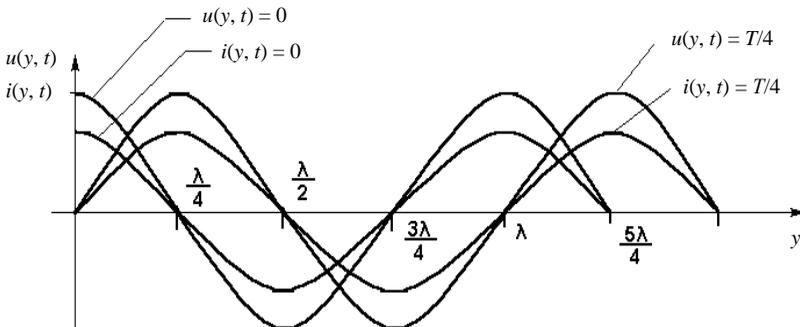


Рис. 8.2. Распределение тока и напряжения в РБВ

Для того чтобы в линии существовали отражённые волны, её необходимо нагрузить на сопротивление, равное волновому:

$$Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}} = \rho.$$

Физически это означает, что вся энергия, подводимая к нагрузке, расходуется в ней.

## 8.2. РЕЖИМ СТОЯЧИХ ВОЛН (РСтВ)

Режим стоячих волн возникает в линии без потерь ( $\alpha = 0$ ).

В результате интерференции падающей и отражённой волны, вследствие одинаковых амплитуд этих волн возникает новая волна, называемая стоячей (рис. 8.3).

Если линия короткозамкнута на конце, т.е.  $Z_{\text{н}} = 0$ ;  $\alpha = 0$ :

$$U_m = jI_{m\text{н}} \sin \beta X ;$$

$$I_m = I_{m\text{н}} \cos \beta X ;$$

$$Z_{\text{вх.кз}} = \frac{\dot{U}_m}{I_m} = j \operatorname{tg} \beta X .$$

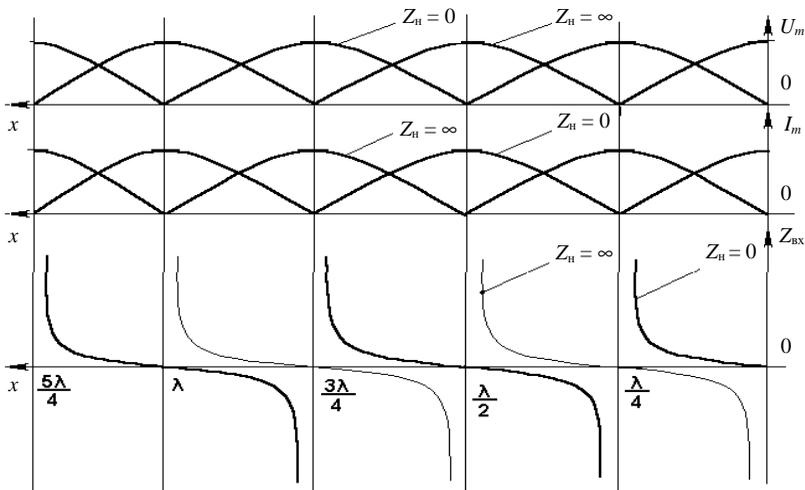


Рис. 8.3. Распределение напряжения, тока и входного сопротивления вдоль линии в РСтВ

Если линия разомкнута на конце, т.е.  $Z_{\text{н}} = \infty$ ;  $\alpha = 0$ :

$$U_m = U_{m\text{н}} \cos \beta X ;$$

$$I_m = j \frac{U_{m\text{н}}}{\rho} \sin \beta X ;$$

$$Z_{\text{вх.пз}} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta X .$$

Если линия замкнута на ёмкость или индуктивность, т.е.  $Z_{\text{н}} = jX$ ,  $\alpha = 0$ :

$$U_m = j\rho I_{m\text{н}} \sin \beta(X + l_3) ;$$

$$I_m = I_{m\text{н}} \cos \beta(X + l_3) ;$$

$$Z_{\text{вх}} = j\rho \operatorname{tg} \beta(X + l_3) ;$$

$$l_3 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{\rho} .$$

### 8.3. РЕЖИМ СМЕШАННЫХ ВОЛН (РСМВ)

Если  $Z_{\text{н}} \neq \rho$ , то в линии появляются отражённые волны, при этом амплитуда отражённой волны меньше падающей, т.е. в каждой точке происходит поглощение энергии. В линии получается промежуточный режим между РБВ и РСтВ, который называется режимом смешанных волн (рис. 8.4). Наибольшее значение напряжения  $U_{\text{наиб}}$  будет, очевидно, получаться в тех точках линии, где напряжения падающей и отражённой волны совпадают по фазе (амплитуды арифметически складываются). В этих же точках получается наибольшее значение тока. Там же, где  $U_{\text{пад}}$  и  $U_{\text{отр}}$  находятся в противофазе, будем иметь наименьшее значение напряжения и наибольшее значение тока:

$$P_U = \frac{R_{\text{н}} - \rho}{R_{\text{н}} + \rho} = \frac{1 - \frac{\rho}{R_{\text{н}}}}{1 + \frac{\rho}{R_{\text{н}}}} = \frac{1 - K}{1 + K} ,$$

где  $K = \frac{\rho}{R_{\text{н}}} .$

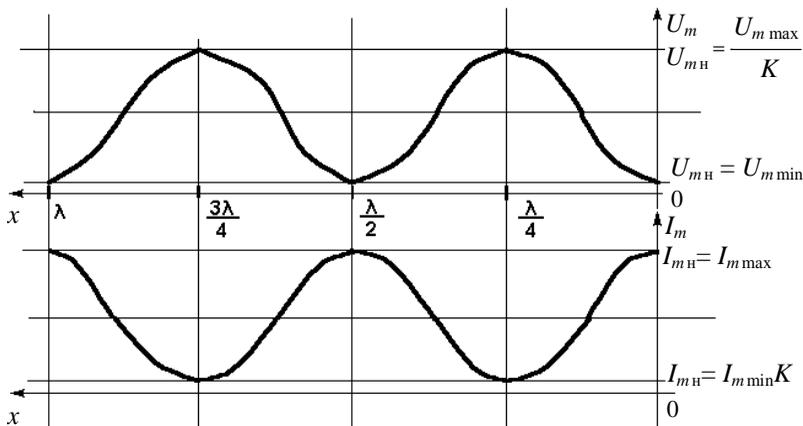


Рис. 8.4. Распределение напряжения и тока вдоль линии в РСмВ

Для того чтобы охарактеризовать степень приближения РСмВ в линии к РБВ или РСтВ, вводят коэффициенты стоячих и бегущих волн:

$$K_{\text{БВ}} = \frac{U_{m\min}}{U_{m\max}} = \frac{I_{m\min}}{I_{m\max}};$$

$$K_{\text{СВ}} = \frac{1}{K_{\text{БВ}}} = \frac{U_{m\max}}{U_{m\min}},$$

так как в РБВ  $I_{m\min} = I_{m\max}$ , то  $K_{\text{БВ}} = K_{\text{СВ}} = 1$ , а в РСтВ  $K_{\text{БВ}} = 0$ ;  $K_{\text{СВ}} = \infty$ , поскольку  $I_{m\min} = 0$ .

Для линий с  $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} < \rho$

$$K = \frac{\rho}{R_{\text{н}}} \geq 1; K_{\text{БВ}} = \frac{U_m}{U_m K} = \frac{1}{K}; K_{\text{СВ}} = K.$$

Если же  $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} > \rho$ ,

$$K = \frac{\rho}{R_{\text{н}}} \leq 1, \text{ то } K_{\text{БВ}} = K; K_{\text{СВ}} = 1/K;$$

$$K_{\text{БВ}} = \frac{1 - P_U}{1 + P_U};$$

$$P_U = \sqrt{\frac{(R_H - \rho)^2 + X_H^2}{(R_H + \rho)^2 + X_H^2}},$$

откуда

$$K_{\text{БВ}} = \frac{1 - \sqrt{\frac{(R_H - \rho)^2 + X_H^2}{(R_H + \rho)^2 + X_H^2}}}{1 + \sqrt{\frac{(R_H - \rho)^2 + X_H^2}{(R_H + \rho)^2 + X_H^2}}}.$$

Входное сопротивление линии при  $\frac{\rho}{R_H} > 1$

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{\cos \beta x + jK \sin \beta x}{K \cos \beta x + j \sin \beta x}.$$

Входное сопротивление линии при  $\frac{\rho}{R_H} < 1$

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{R_H \cos \beta x + j(X_H \cos \beta x + \rho \sin \beta x)}{\rho \cos \beta x + X_H \sin \beta x + jR_H \sin \beta x}.$$

Длинные линии нашли широчайшее применение в качестве фидеров, т.е. устройств, предназначенных для передачи энергии от источников к нагрузке.

Погонные параметры и сопротивление длинных линий:

а) двухпроводная линия ( $r \ll d$ ) (рис. 8.5):

$$R_1 \cong \frac{1,44}{r\sqrt{\lambda}} \frac{\text{Ом}}{\text{м}}; \quad c_1 = \frac{\pi \epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}} \frac{\Phi}{\text{м}};$$

$$L_1 = \frac{\mu_a \ln \frac{d}{r}}{\pi} \frac{\Gamma_H}{\text{м}}; \quad \rho = \frac{\ln \frac{d}{r}}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \text{ Ом}.$$

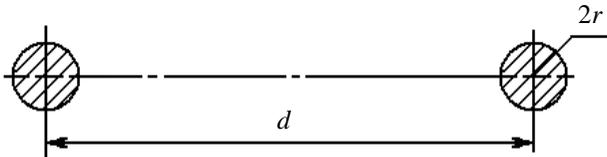


Рис. 8.5. Двухпроводная симметричная линия

б) коаксиальная линия (рис. 8.6):

$$R_1 \cong \frac{1,44}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d} \right) \frac{\text{Ом}}{\text{м}};$$

$$c_1 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}} \frac{\Phi}{\text{м}};$$

$$L_1 = \frac{\mu_a \ln \frac{d}{r}}{\pi} \frac{\Gamma_{\text{Н}}}{\text{м}};$$

$$\rho = \frac{\ln \frac{d}{r}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \text{ Ом},$$

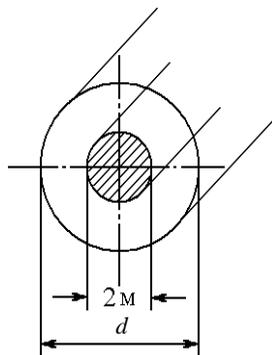


Рис. 8.6. Коаксиальная линия

где  $\lambda$  – длина волны;  $\rho$  – волновое сопротивление линии,  $\rho \cong \sqrt{\frac{L_1}{c_1}}$ .

Решение телеграфных уравнений (начало отсчёта – нагрузка):

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{U}_{m\text{н}} + \dot{I}_{m\text{н}}\rho}{2} e^{\dot{\gamma}x} + \frac{\dot{U}_{m\text{н}} - \dot{I}_{m\text{н}}\rho}{2} e^{-\dot{\gamma}x};$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{m\text{н}} + \dot{I}_{m\text{н}}\rho}{2\rho} e^{\dot{\gamma}x} - \frac{\dot{U}_{m\text{н}} - \dot{I}_{m\text{н}}\rho}{2\rho} e^{-\dot{\gamma}x},$$

где  $\dot{U}_m$ ,  $\dot{I}_m$  – напряжение и ток на нагрузке;  $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$  – коэффициент распространения,  $\alpha \approx \frac{R_1}{2\rho}$  – коэффициент затухания;  $\beta = \omega\sqrt{L_1 c_1}$  – коэффициент фазы.

Фазовая скорость распространения волны вдоль длинной линии

$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{L_1 c_1}} = \frac{\omega}{\beta},$$

откуда коэффициент фазы

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{л}}},$$

где  $\lambda_{\text{л}}$  – длина волны в длинной линии, причём  $\lambda_{\text{л}} = \frac{\lambda_{\text{г}} v_{\phi}}{c}$ ,  $\lambda_{\text{г}}$  – длина волны в свободном пространстве;  $c$  – скорость света ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

Коэффициенты отражения по напряжению и току (на нагрузке)

$$\dot{P}_U = -\dot{P}_I = \frac{\dot{Z}_H - \rho}{\dot{Z}_H + \rho}.$$

Входное сопротивление длинной линии в общем случае

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_m}{I_m}.$$

Входное сопротивление длинной линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) при

$$K = \frac{\rho}{R_H} \neq 1$$

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \rho \frac{K + j0,5(K^2 - 1)\sin 2\beta x}{K^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x}.$$

Коэффициенты бегущей и стоячей волн:

$$K_{\text{БВ}} = \frac{v_{m \text{ min}}}{v_{m \text{ max}}} = \frac{1}{K_{\text{СВ}}} = \frac{I_{m \text{ min}}}{I_{m \text{ max}}};$$

$$0 \leq K_{\text{БВ}} \leq 1; \infty > K_{\text{СВ}} \geq 1.$$

Входное сопротивление длинной линии с малыми потерями ( $\alpha \neq 0$ ):

а) разомкнутой на конце:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \rho \frac{\text{sh}2\alpha x - j \sin 2\beta x}{\text{ch}2\alpha x - \cos 2\beta x};$$

б) короткозамкнутой на конце:

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \rho \frac{\text{sh}2\alpha x + j \sin 2\beta x}{\text{ch}2\alpha x + \cos 2\beta x}.$$

КПД линии  $\eta$ :

а) согласованной с нагрузкой:  $\eta \approx 1 - 2\alpha l$ ;

б) в случае ( $\alpha \neq 0$ )  $R_H \neq \rho$

$$\eta = \frac{1}{1 + \alpha l \left( K + \frac{1}{K} \right)} = \frac{1}{1 + \alpha l (K_{\text{БВ}} + K_{\text{СВ}})}.$$

### Контрольные вопросы

1. Является ли линия промышленной частоты, связывающая пункты приёма и передачи энергии на расстоянии 2 км, длинной?
2. Вывести решение телеграфных уравнений, взяв за начало отсчёта генератор, зная величины  $\dot{U}_{mg}$  и  $\dot{I}_{mg}$ .
3. Провести аналогию вторичных параметров длинной линии с характеристическими параметрами каскада четырёхполюсников. Каков их физический смысл?
4. Какие режимы возможны в линии без потерь, при каких нагрузках?
5. Каков режим работы линии без потерь (рис. 8.7)?

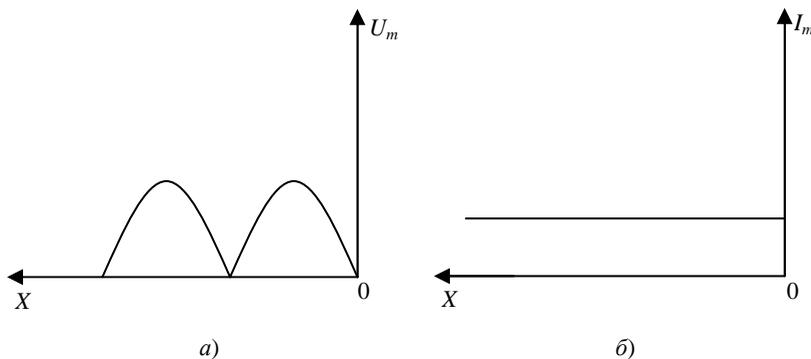


Рис. 8.7

6. Найти входное сопротивление линии, изображённой на рис. 8.8.

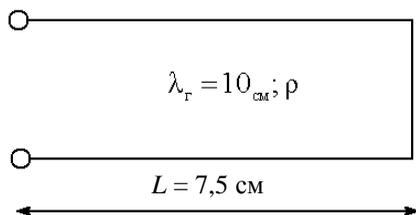


Рис. 8.8

7. Определить характер нагрузки по графикам на рис. 8.9.

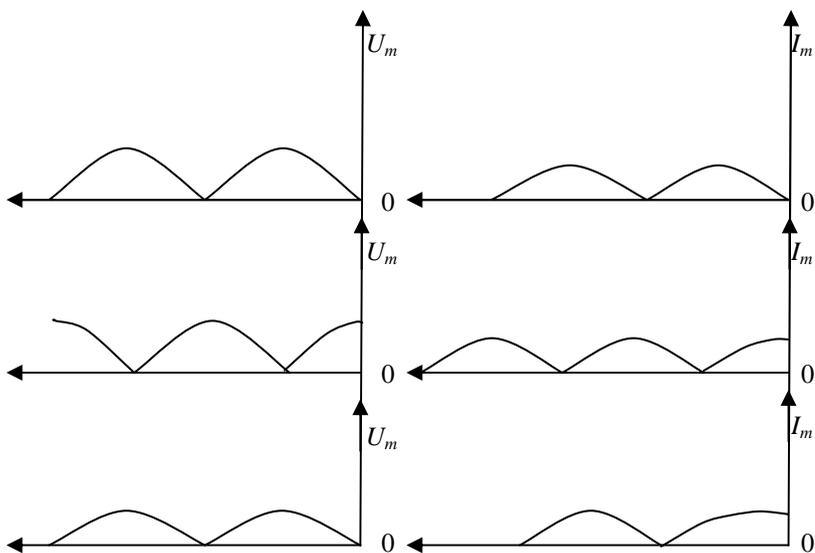


Рис. 8.9

8. Как изменится входное сопротивление длинной линии при разрезе и выпрямлении короткозамкнутой перемычки (рис. 8.10)?

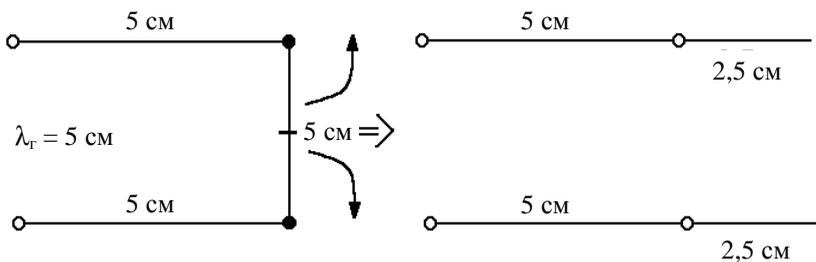


Рис. 8.10

9. Перечислить нагрузки, при которых в линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) возможен режим смешанных волн.

10. Показать (например, для случая  $R_H > \rho$ ), что режим смешанных волн является суперпозицией режимов БВ и СВ.

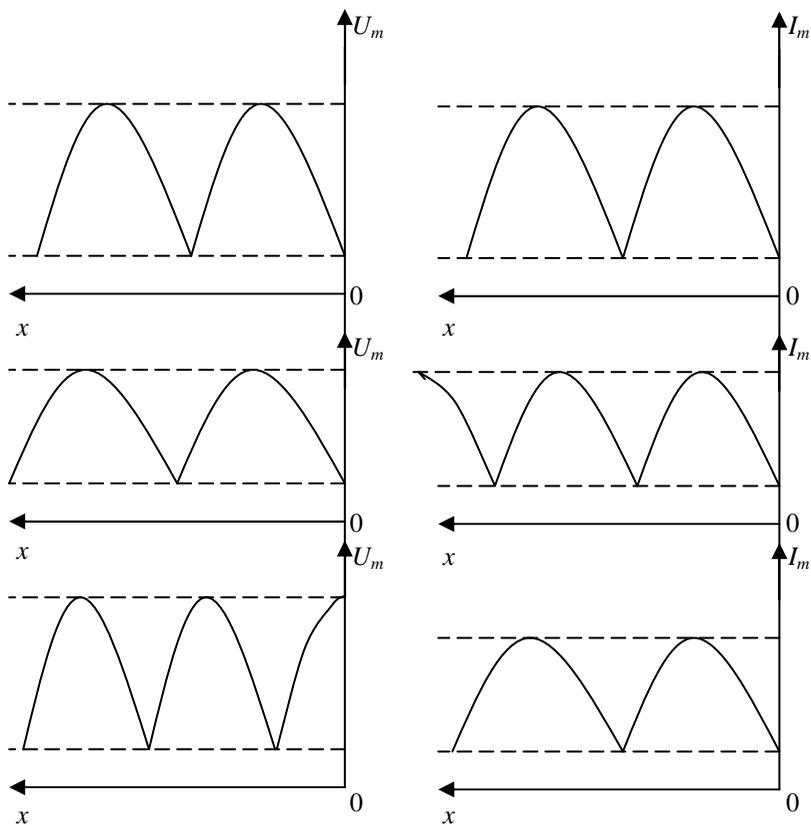


Рис. 8.11

11. Определить характер нагрузки для случаев, приведённых на рис. 8.11.

12. Для  $R_n > \rho$  выразить  $K$  через величину  $K_{СВ}$ .

13. Доказать, что модуль входного сопротивления длинной линии ( $\alpha = 0$ ) длиной  $l = \frac{\lambda}{8}$  равен  $\rho$  при любом значении  $R_n$ .

14. Каковы режимы работы длинных линий с потерями и почему?

15. По распределению амплитуд напряжения и тока вдоль линии определить нагрузки и описать свойства линии (рис. 8.12).

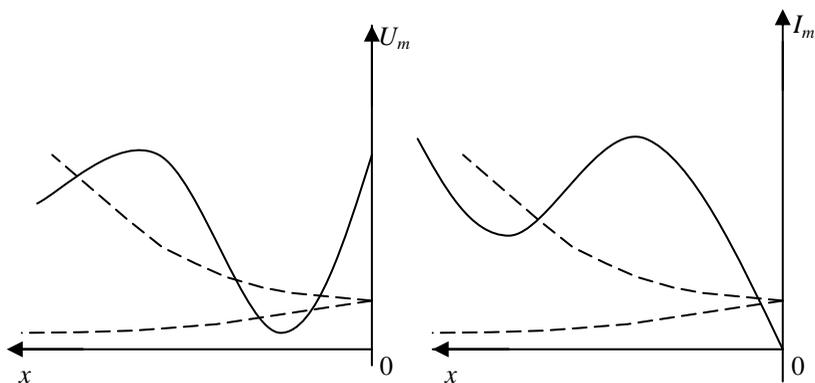


Рис. 8.12

16. Что происходит с КПД согласованной линии ( $\alpha \neq 0$ ) при увеличении  $\alpha$ ?

17. Какой из отрезков длинных линий чаще используется в качестве колебательной системы и почему?

18. В чём состоит задача согласования и как она решается в случае  $Z_n = R_n \neq \rho$ ?

19. Почему двухшлейфное согласование применяется в основном для коаксиальных длинных линий?

## 9. ЧАСТОТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Дельта-функция (функция Дирака)

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), & a < t_0 < b; \\ \frac{1}{2} f(t_0), & t_0 = a, b; \\ 0, & t_0 < a, t_0 > b; \end{cases} \text{ при } t = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Фильтрующее свойство  $\delta$ -функции

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0), & a < t_0 < b; \\ \frac{1}{2} f(t_0), & t_0 = a, b; \\ 0, & t_0 < a, t_0 > b; \end{cases}$$

единичная функция (функция Хевисайда)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t < 0; \\ \frac{1}{2}, & t = 0; \\ 0, & t > 0; \end{cases}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x)dx; \quad \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

Периодический сигнал  $f(t)$  с периодом  $T_n$  разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k \Omega_n t + b_k \sin k \Omega_n t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\Omega_n t},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) dt; \quad a_k = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) \cos k \Omega_n t dt;$$

$$b_k = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) \sin k \Omega_n t dt; \quad \dot{A}_{mk} = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) e^{-jk\Omega_n t} dt.$$

Средняя за период мощность периодического сигнала (выделяемая на единичном сопротивлении)

$$P = \left( \frac{a_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\dot{A}_{mk}|^2.$$

Спектральная плотность сигнала  $f(t)$  (прямое преобразование Фурье)

$$\dot{G}(\omega) = G(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Связь комплексной амплитуды ряда Фурье для периодической последовательности импульсов со спектральной плотностью одиночного импульса

$$\dot{A}_{mk} = \frac{2}{T_{\Pi}} \dot{G}(k \Omega_{\Pi}) = \frac{\Omega_{\Pi}}{\pi} \dot{G}(k \Omega_{\Pi}).$$

Энергия непериодического сигнала (выделяемая на единичном сопротивлении)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega) d\omega.$$

### Контрольные вопросы

1. Что понимается под спектром периодического сигнала? Необходимость этого понятия.
2. Связаны ли между собой спектр амплитуд и спектр фаз сигнала?
3. Построить спектральную диаграмму периодической последовательности прямоугольных импульсов. Как она изменится, если: а) амплитуду импульса увеличить; б) длительность импульса уменьшить; в) период повторения увеличить?
4. Чем определяется активная ширина спектра сигнала?
5. Как по спектру амплитуд импульсов получить их энергетический спектр?
6. Что понимают под спектральной плотностью одиночного импульса? Какова необходимость введения этого понятия?
7. Написать и пояснить выражения для прямого и обратного преобразования Фурье.
8. Раскрыть свойства спектральной функции.
9. Какова связь спектра периодического сигнала и спектральной функции импульса, повторением которого образован периодический сигнал?
10. Сформулировать энергию импульса и теорему о спектрах.
11. Какова связь между длительностью импульса и активной шириной его спектра?

## 10. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ. АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ ЦЕПЬ

Связь выходного сигнала  $y(t)$  с входным  $x(t)$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t), \quad (10.1)$$

где  $a_n, a_{n-1}, a_0, b_m, b_{m-1}, b_0$  – постоянные коэффициенты.

Решение дифференциального уравнения отыскивается в виде

$$y(t) = y_{\text{св}}(t) + y_{\text{пр}}(t),$$

где  $y_{\text{св}}(t)$  – свободная составляющая колебаний в рассматриваемой цепи;  $y_{\text{пр}}(t)$  – принуждённая (вынужденная или установившаяся) составляющая.

Свободная составляющая  $y_{\text{св}}(t)$  является общим решением однородного дифференциального уравнения (без правой части), её характер не зависит от входного воздействия  $x(t)$  и определяется порядком дифференциального уравнения.

Принуждённая составляющая  $y_{\text{пр}}(t)$  зависит от входного воздействия  $x(t)$ .

Для линейных цепей первого порядка выходной сигнал определяется по формуле

$$y(t) = [y(0) - y_{\text{пр}}(0)] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_{\text{пр}}(t), \quad (10.2)$$

где  $c = y(0) - y_{\text{пр}}(0)$  – постоянная интегрирования, определяется на основании начальных условий;

$$\tau = R_3 C \text{ или } L / R_3 ,$$

где  $R_3$  – эквивалентное сопротивление цепи.

Эквивалентным называют сопротивление, которым обладает электрическая цепь по отношению к зажимам накопителя энергии. При этом предполагается, что все источники напряжения замкнуты накоротко, а их внутренние сопротивления включены в соответствующие ветви цепи. Если в цепи имеются источники тока, то ветви с источником разрываются, а ветви с внутренней проводимостью сохраняются.

При воздействии на цепи первого порядка постоянного перепада реакция цепи определяется как

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty), \quad (10.3)$$

где  $y(0)$  – начальное значение реакции;  $y(\infty)$  – асимптотическое значение реакции.

Импульсная характеристика цепи  $h_{\delta}(t)$  – реакция цепи на  $\delta$ -функцию при нулевых начальных условиях.

Переходная характеристика цепи  $h_1(t)$  – реакция цепи на единичную функцию при нулевых начальных условиях.

Интеграл Дюамеля – форма связи выходного колебания  $y(t)$  со входным  $x(t)$ :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h_{\delta}(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) h_{\delta}(\tau) d\tau. \quad (10.4)$$

Другие формы записи интеграла Дюамеля можно получить, учитывая связь импульсной характеристики с переходной:

$$h_{\delta}(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}; \quad (10.5)$$

$$y(t) = x(0)h_1(t) + \int_0^t x'(t - \tau)h_1(\tau)d\tau; \quad (10.6)$$

$$y(t) = x(t)h_1(0) + \int_0^t x(t - \tau)h_1(\tau)d\tau; \quad (10.7)$$

$$y(t) = x(0)h_1(t) + \int_0^t x'(\tau)h_1(t - \tau)d\tau; \quad (10.8)$$

$$y(t) = x(t)h_1(0) + \int_0^t x(\tau)h_1'(t - \tau)d\tau. \quad (10.9)$$

Частотный коэффициент передачи цепи  $K(\omega)$  – преобразование Фурье от импульсной характеристики  $h_{\delta}(t)$ :

$$K(\omega) = \int_0^{\infty} h_{\delta}(t) e^{-j\omega t} dt; \quad h_{\delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (10.10)$$

Операторный коэффициент передачи цепи  $K(p)$  – преобразование Лапласа от импульсной характеристики  $h_{\delta}(t)$ :

$$K(p) = \int_0^{\infty} h_{\delta}(t) e^{-pt} dt; \quad h_{\delta}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_- - j\infty}^{\sigma_+ + j\infty} K(p) e^{pt} dp. \quad (10.11)$$

Частотный коэффициент передачи  $K(\omega)$  можно определить из дифференциального уравнения цепи, а также путём непосредственного анализа исследуемой схемы.

Очевидно, что  $K(p) = K(\omega) / j\omega = p$ .

Связь спектральной плотности  $G_y(\omega)$  выходного сигнала  $y(t)$  со спектральной плотностью  $G_x(\omega)$  входного  $x(t)$ :

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)K(\omega). \quad (10.12)$$

Связь изображения  $y(p)$  выходного сигнала  $y(t)$  с изображением  $x(p)$  входного  $x(t)$ :

$$y(p) = x(p)K(p). \quad (10.13)$$

### Контрольные вопросы

1. Что понимают под переходным процессом? Какова роль переходных процессов в работе электротехнических устройств?
2. В чём суть анализа переходных процессов классическим методом и какова последовательность его применения?
3. Записать и пояснить решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка в общем виде. Чем определяется порядок дифференциального уравнения цепи?
4. Написать выражение для прямого и обратного преобразований Лапласа и Фурье и пояснить, для какого класса функций применены эти преобразования.
5. В чём суть анализа переходных процессов операторным методом? В каких случаях следует использовать этот метод?
6. Записать в развёрнутом виде выражение второго закона Кирхгофа в операторной форме и пояснить входящие в него величины.
7. Для каких цепей применимы суперпозиционные методы анализа переходных процессов и в чём их суть?
8. Что понимается под импульсной и переходной характеристиками цепи и какова связь между ними?
9. Написать формулы, выражающие связь между временными и частотными характеристиками линейных цепей.
10. Каким образом с помощью переходной характеристики цепи можно определить напряжение на её выходе?
11. Как рассчитывается переходный процесс с помощью импульсной характеристики цепи?
12. Дать сравнительную характеристику классического, операторного, спектрального и временного суперпозиционного методов расчёта переходных процессов.

# ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

## Лабораторная работа 1

### ИЗУЧЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**Цель работы.** Экспериментальная проверка основных законов и методов расчёта линейных цепей постоянного тока: наложения, двух узлов; эквивалентного генератора.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: закон Ома для участка цепи; обобщённый закон Ома; законы Кирхгофа; метод контурных токов; принцип наложения и метод наложения; метод узловых потенциалов (двух узлов); метод эквивалентного генератора.

#### Оборудование и приборы

1. Источники постоянного тока.
2. Амперметр постоянного тока 0...1 А.
3. Вольтметр постоянного тока 0...15 В.

#### Порядок выполнения работы

1. Собрать цепь для измерения сопротивления согласно рис. 1.

2. Определить сопротивления резисторов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  методом амперметра-вольтметра, для чего, подключая поочередно резисторы, измерить токи и напряжения. Данные измерений внести в табл. 1.

3. Проверить экспериментально первый закон Кирхгофа. Собрать цепь согласно рис. 2. Измерить токи ветвей  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , внести результат измерений в первую строку табл. 2. Проверить справедливость формулы  $\sum I_k = 0$ .

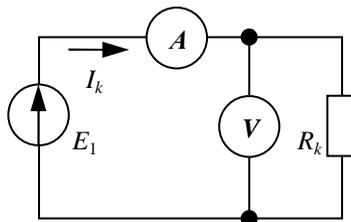


Рис. 1

Таблица 1

$I_1$	$I_2$	$I_3$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$R_1$	$R_2$	$R_3$
А			В			Ом		

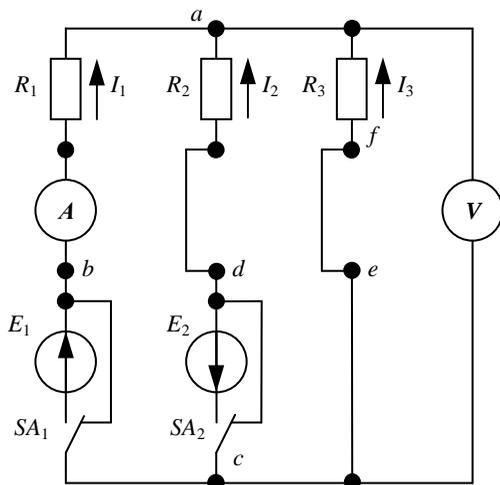


Рис. 2

4. Провести экспериментальную проверку (см. рис. 2) метода наложения, для чего:

- а) измерить и записать значения  $E_1$  и  $E_2$ ;
- б) измерить токи в ветвях от действия двух источников  $E_1$  и  $E_2$ :  $I_1, I_2, I_3$ ; внести результат измерений в первую строку табл. 2;
- в) измерить токи ветвей цепи от действия одного источника ЭДС  $E_1$ :  $I_1, I_2, I_3$ ; внести результат измерений во вторую строку табл. 2;
- г) измерить токи во всех ветвях цепи от действия другого источника ЭДС  $E_2$ :  $I_1, I_2, I_3$ ; внести результат измерений в третью строку табл. 2;
- д) рассчитать токи во всех ветвях исследуемой цепи методом наложения:  $I_1, I_2, I_3$ ; внести результат расчётов в табл. 2;

Таблица 2

	Измерения			Вычисления		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
	мА					
1. ( $E_1, E_2$ )						
2. ( $E_1$ )						
3. ( $E_2$ )						

е) сравнить измеренные и рассчитанные значения токов ветвей; объяснить расхождения результатов.

5. Провести экспериментальную проверку метода эквивалентного генератора относительно ветви  $R_3$  исследуемой цепи (см. рис. 2), для чего:

- а) замкнуть амперметром клеммы  $a$  и  $e$  и измерить ток  $I_{3кз}$  в короткозамкнутой ветви;
- б) отключить перемычку  $f-e$  и измерить напряжение холостого хода  $U_{x,x}$  на клеммах  $a-c$ ;
- в) рассчитать ток  $I_3$  методом эквивалентного генератора:

$$R = \frac{U_{xx}}{I_{3кз}}; I_3 = \frac{U_{xx}}{(R_2 + R)}.$$

Данные измерений и расчёта внести в табл. 3.

**Таблица 3**

Измерения			Вычисления		
$I_{3кз}$	$U_{x,x}$	$I_3$	$U_{x,x}$	$R_3$	$I_3$
А	В	А	В	Ом	А

6. Снять потенциальную диаграмму внешнего контура исследуемой цепи (см. рис. 2), для чего:

- а) одну клемму вольтметра соединить с узлом  $c$ ;
- б) измерить потенциалы точек  $b, a, e$ , последовательно присоединяя к ним вторую клемму вольтметра;
- в) рассчитать потенциалы точек  $b, a, e$ , используя результаты опытов п. 3. Данные измерений и расчёта внести в табл. 4. Построить потенциальную диаграмму внешнего контура.

**Таблица 4**

Измерения				Вычисления			
$\Phi_b$	$\Phi_a$	$\Phi_e$	$\Phi_c$	$\Phi_b$	$\Phi_a$	$\Phi_e$	$\Phi_c$
В							
			0				0

7. Выполнить эксперименты в программе **EWB**. Открыть файл lab1\_01.ewb. Схема цепи соответствует рис. 3. Установить значения элементов цепи лабораторного стенда. Установить переключатели  $S_1 \dots S_4$  с помощью клавиш [1], [2], [3], [4] в следующие положения:  $S_1 \dots S_3$  – [ВКЛ],  $S_4$  – [ВЫКЛ].

Включить питание. Провести измерения токов  $I_1 \dots I_3$ . Заполнить первую строку табл. 5. Выключить питание.

8. Проверить выполнение первого закона Кирхгофа для верхнего узла цепи.

9. Переключатель  $S_2$  перевести в положение [ВЫКЛ]. Включить питание. Измерить и внести во вторую строку табл. 5 значения токов  $I_1, I_2, I_3$  при действии одного источника ЭДС  $E_1$ . Выключить питание.

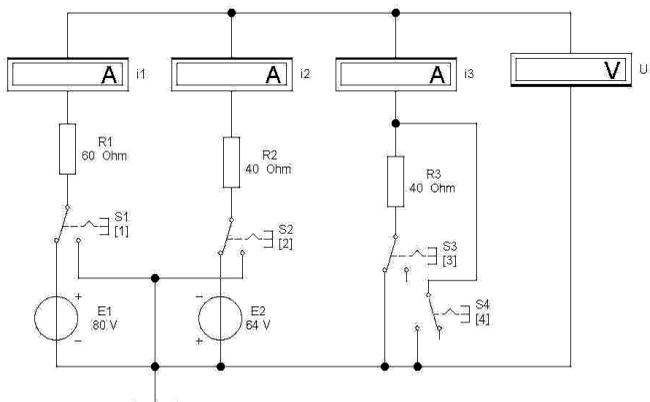


Рис. 3

Таблица 5

	Измерения			Вычисления		
	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
мА						
1						
2						
3						

10. Переключатель  $S_2$  перевести в положение [ВКЛ], переключатель  $S_1$  перевести в положение [ВЫКЛ]. Включить питание. Измерить и внести в третью строку табл. 5 значения токов  $I_1, I_2, I_3$  при действии другого источника ЭДС  $E_2$ . Выключить питание.

11. Рассчитать токи во всех ветвях исследуемой цепи методом наложения. Внести результат расчётов в табл. 5.

12. Провести экспериментальную проверку метода двух узлов. Установить переключатели в положение, соответствующее п. 7. По имеющимся значениям ЭДС и сопротивлений провести расчёт узлового напряжения  $U_{ab}$ , а также токов ветвей  $I_1, I_2, I_3$ . Результаты занести в табл. 6. Включить питание. Показания вольтметра  $U$  и амперметров занести в табл. 6. Выключить питание. Проверить совпадение расчётов и результатов измерений.

Таблица 6

Измерения				Вычисления			
$U_{ab}$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$U_{ab}$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
В	А			В	А		

13. Провести экспериментальную проверку метода эквивалентного генератора. Установить переключатели  $S_1 \dots S_4$  с помощью клавиш [1], [2], [3], [4] в следующие положения:

$S_1, S_2$  – [ВКЛ],  $S_3, S_4$  – [ВЫКЛ].

Включить питание. Измерить и записать в табл. 7 напряжение холостого хода эквивалентного генератора  $U_{xx}$ . Выключить питание. Переключатель  $S_4$  перевести в положение [ВКЛ], включить питание и измерить значение тока короткого замыкания  $I_{3кз}$ . Повторить расчёты п. 5, получив параметры эквивалентного генератора и расчётное значение тока  $I_3$ .

14. Собрать в рабочем окне программы **EWB** схему эквивалентного генератора согласно рис. 4. Установить значения  $U_{eq} = U_{xx}$  и  $R_{eq} = R_3$ .

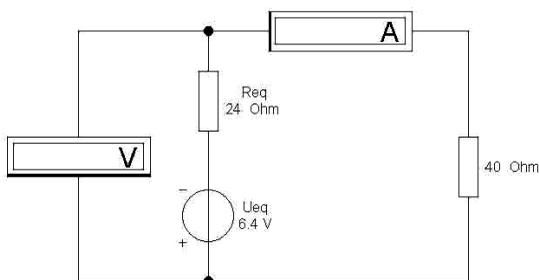


Рис. 4

Включить питание. Измерить и записать в табл. 7 величину тока ветви  $I_3$ . Выключить питание. Сравнить результат измерений с расчётным значением.

Таблица 7

$U_{eq}$	$R_{eq}$	$I_3$	
		Измерения	Вычисления

### Содержание отчёта

1. Схемы исследуемых электрических цепей.
2. Заполненные таблицы с результатами измерений.
3. Результаты расчётов.
4. Выводы.

### Контрольные вопросы

1. Дать определение электрической цепи.
2. Дать определения основных топологических элементов электрической цепи.

3. Сформулировать основные законы линейных электрических цепей постоянного тока.
4. На каких законах основан классический метод расчёта электрических цепей?
5. В чём заключается сущность метода наложения (суперпозиции)?
6. В каких случаях наиболее рационален метод двух узлов?
7. В каких случаях обосновано использование метода эквивалентного генератора?
8. В чём заключается сущность метода контурных токов?
9. Какие из методов не могут быть проверены экспериментально?
10. Как строится потенциальная диаграмма контура?
11. В чём заключается различие между источниками тока и источниками ЭДС?

## Лабораторная работа 2

### ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАЗВЕТВЛЁННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

**Цель работы.** Исследование физических процессов, происходящих при включении простых цепей, содержащих активное сопротивление  $R$ , ёмкость  $C$  и индуктивность  $L$ , на переменное синусоидальное напряжение. Построение векторных диаграмм и треугольников сопротивлений.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: векторные диаграммы; резистивный, индуктивный и ёмкостный элементы в цепи переменного синусоидального тока; треугольники напряжений, сопротивлений, проводимостей, мощностей.

#### **Оборудование и приборы**

1. Источник постоянного тока.
2. Генератор низкой частоты (НЧ).
3. Амперметр.
4. Вольтметр.
5. Осциллограф.

#### **Порядок выполнения работы**

1. Измерить сопротивление катушки индуктивности постоянно-му току  $R_k$ . Для этого собрать схему согласно рис. 1. Резистор  $R_1$  ограничивает ток в катушке до безопасного значения. Ориентировочное значение ЭДС источника  $E$  10 В, сопротивления  $R_1$  100 Ом, вольтметр должен иметь высокое входное сопротивление, тогда его входное сопротивление можно не учитывать. Измерить значения  $I_1$ ,  $U_1$ , рассчитать по закону Ома сопротивление катушки  $R_k = (U_1/I_1)$ , результаты внести в табл. 1.

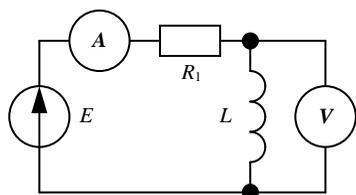


Рис. 1

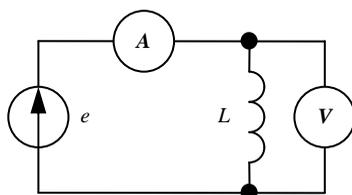


Рис. 2

2. Определить полное и индуктивное сопротивления катушки, а также её индуктивность  $L$ . Для этого собрать схему согласно рис. 2. В качестве источника переменной ЭДС использовать генератор НЧ, установив частоту  $f = 1$  кГц и выходное напряжение 10 В. Измерить значения  $I_2$ ,  $U_2$ , рассчитать полное сопротивление катушки  $z = (U_2/I_2)$ , а также индуктивное сопротивление  $X_L$  и индуктивность катушки  $L$ , используя формулы

$$z = \sqrt{R_k^2 + X_L^2}, \quad X_L = \sqrt{z^2 - r^2}, \quad L = \frac{X_L}{2\pi f}.$$

Результаты внести в табл. 1.

Таблица 1

Измерения							Вычисления					
$f$	$U_1$	$I_1$	$U_2$	$I_2$	$U_3$	$I_3$	$r$	$z$	$X_L$	$X_C$	$L$	$C$
Гц	В	А	В	А	В	А	Ом	Ом	Ом	Ом	Гн	мкФ

3. Построить векторную диаграмму напряжений  $U_2$ ,  $U_{Rk}$ ,  $U_L$  для катушки индуктивности (рис. 3), для этого вычислить угол сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi_k = \arccos \frac{r}{z}$ , а также

$$\cos \varphi_k = \frac{r}{z}, \quad \sin \varphi_k = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_k}, \quad U_{Rk} = U_2 \cos \varphi_k, \quad U_L = U_2 \sin \varphi_k.$$

4. Измерить ёмкость конденсатора. Для этого в схеме рис. 2 вместо катушки  $L$  включить конденсатор  $C$ . Измерить значения  $I_3$ ,  $U_3$ , вычислить  $X_C = (U_3/I_3)$ ,  $C = (1/2\pi f X_C)$ , результаты внести в табл. 1.

5. Измерить угол сдвига фаз между напряжением и током в конденсаторе. Для этого собрать схему рис. 4. В качестве датчика тока  $R_T$  использовать низкоомный резистор с известным сопротивлением, например  $R_T = 1$  Ом;  $z_x$  – исследуемый реактивный элемент (конденсатор). Параметры источника переменной ЭДС прежние.

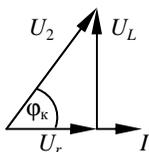


Рис. 3

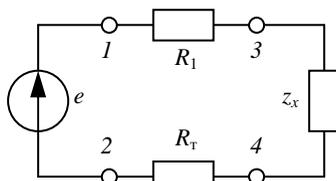


Рис. 4

К точке 1 цепи подключить вход канала А двухлучевого осциллографа, к точке 4 цепи – вход канала В, к точке 2 – корпус осциллографа. В качестве  $z_x$  включить исследуемый конденсатор, точки 1 и 3 замкнуть накоротко. С помощью органов управления осциллографом получить устойчивые осциллограммы напряжения на цепи (канал А) и тока (канал В). Синхронизация – по каналу А.

По осциллограммам определить период переменной ЭДС  $T$ , а также временной сдвиг между напряжением и током  $\Delta t$  с учётом знака. Вычислить угол сдвига фаз между напряжением и током по формуле

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} 360^\circ \text{ или } \varphi = \frac{\Delta t}{T} 2\pi \text{ рад.}$$

Результаты внести в первую строку табл. 2.

Таблица 2

№ п/п	$T$	$\Delta t$	$\varphi$	$U_{12}$	$U_{42}$
	мс	мс	град/рад	В	В
1					
2					
3					
4					

6. Измерить угол сдвига фаз между напряжением и током в неразветвлённой  $RC$ -цепи. Для этого разомкнуть точки 1 и 3 исследуемой цепи и повторить измерения п. 5. Измерить вольтметром напряжения  $U_{13}$  между точками 1 и 3 (на резисторе  $R_1$ ) и  $U_{34}$  между точками 3 и 4 (на конденсаторе  $C$ ).

Результаты внести во вторую строку табл. 2.

7. Измерить угол сдвига фаз между напряжением и током в катушке индуктивности  $\varphi_k$  (схема рис. 4,  $z_x$  – катушка индуктивности). Повторить действия п. 5, результаты измерений внести в третью строку табл. 2. Сравнить результат измерений с результатом расчёта в п. 3, объяснить полученные расхождения.

8. Измерить угол сдвига фаз между напряжением и током в неразветвлённой  $RL$ -цепи. Для этого повторить действия п. 6, результаты измерений внести в четвёртую строку табл. 2.

9. Построить векторные диаграммы напряжений и треугольники сопротивлений для цепей с элементами  $L$ ,  $C$ ,  $LC$ ,  $RC$ .

10. Выполнить эксперименты в программе **EWB**. Открыть файл lab2\_01.ewb. Схема цепи соответствует рис. 5. Параметры элементов соответствуют элементам стенда.

Установить переключатели  $[R]$ ,  $[C]$ ,  $[L]$  в следующие положения:

$[R]$  – ВКЛ.,  $[C]$ ,  $[L]$  – ВЫКЛ.

Включить питание. На экране осциллографа получить две осциллограммы, соответствующие напряжению на резисторе  $R_1$  (канал  $A$ ) и сигналу датчика тока в масштабе 1 А в 1 В (канал  $B$ ). Выключить питание.

По показаниям осциллографа определить: период сигнала генератора  $T$ , разность фаз между напряжением и током  $\varphi$ .

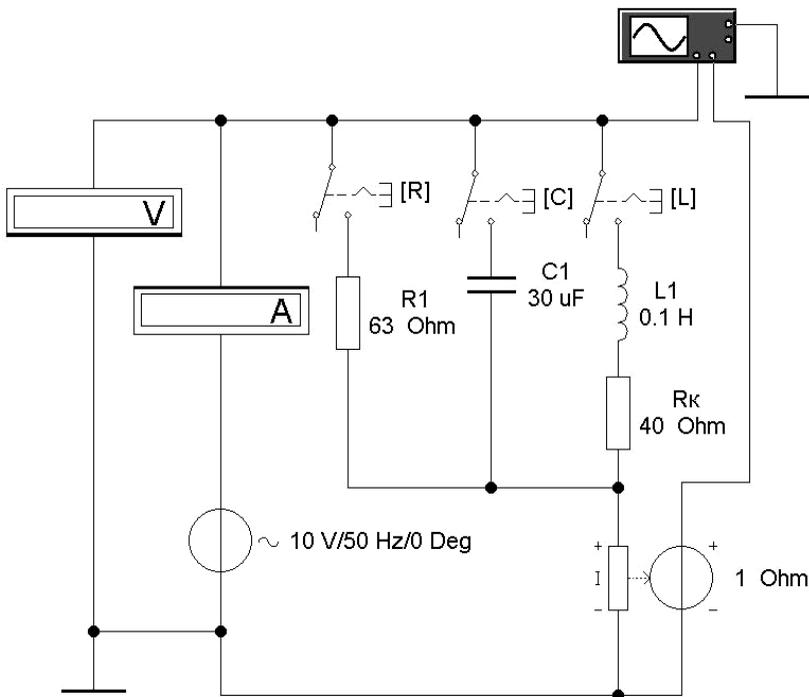


Рис. 5

Установить визир 1 в точку канала  $A$ , удобную для считывания показаний, например в точку  $U_A = 0$  В. Установить визир 2 в точку канала  $B$ , соответствующую по фазе точке  $A$ . На панели осциллографа в крайнем правом окне снять значение величины  $T_2 - T_1$  (разность фаз между напряжением и током, выраженная в миллисекундах или микросекундах) с учётом знака.

Показания внести в табл. 3.

**Таблица 3**

Элемент		$T$	$U$	$I$	$T_2 - T_1$	$\phi$
		мкс	В	мА	мкс	рад
$R$	159 Ом					
$C$	0,1 мкФ					
$L$	2,5 мГн					

11. Повторить действия п. 10 при следующих положениях переключателей:  $[C]$  – ВКЛ.,  $[R]$ ,  $[L]$  – ВЫКЛ.

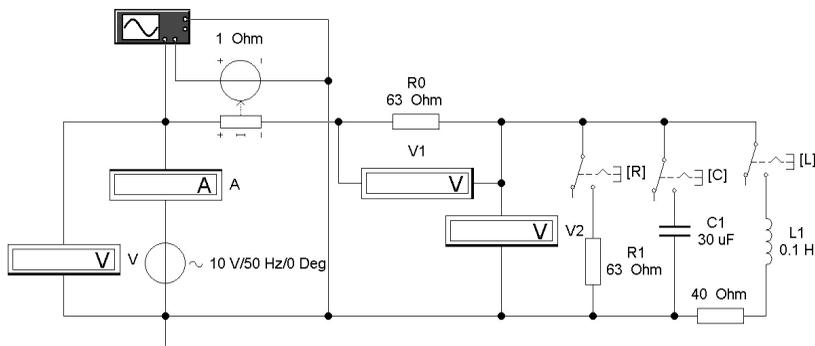
12. Повторить действия п. 10 при следующих положениях переключателей:  $[L]$  – ВКЛ.,  $[R]$ ,  $[C]$  – ВЫКЛ.

Построить векторные диаграммы напряжений и токов для элементов  $R$ ,  $C$ ,  $L$ .

13. Исследовать неразветвлённую цепь, содержащую элементы  $RR$ ,  $RC$ ,  $RL$ . Открыть файл lab2\_02.ewb. Схема цепи соответствует рис. 6. Параметры элементов соответствуют элементам стенда.

Установить переключатели  $[R]$ ,  $[C]$ ,  $[L]$  в следующие положения:

$[R]$  – ВКЛ.,  $[C]$ ,  $[L]$  – ВЫКЛ.



**Рис. 6**

Включить питание. Снять показания всех измерительных приборов, внести их в соответствующие ячейки табл. 4. Выключить питание.

**Таблица 4**

Положение переключателей [R], [C], [L]					
[R] – ВКЛ. [C], [L] – ВЫКЛ.		[C] – ВКЛ. [R], [L] – ВЫКЛ.		[L] – ВКЛ. [R], [C] – ВЫКЛ.	
$U, B$		$U, B$		$U, B$	
$U_1, B$		$U_1, B$		$U_1, B$	
$U_2, B$		$U_2, B$		$U_2, B$	
$I$		$I$		$I$	

14. Повторить действия п. 13 при следующих положениях переключателей: [C] – ВКЛ., [R], [L] – ВЫКЛ.

15. Повторить действия п. 13 при следующих положениях переключателей: [L] – ВКЛ., [R], [C] – ВЫКЛ.

Убедиться расчётным путём в том, что для цепи п. 13 выполняется равенство  $U = U_1 + U_2$ , а для цепей п. 14 и 15 выполняется равенство  $U^2 = U_1^2 + U_2^2$ . Объяснить отличия в значениях напряжений на элементах и токов цепей.

16. Провести измерения угла сдвига фаз между напряжением и током в элементах цепи рис. 6 с использованием двухлучевого осциллографа. Установить переключатели [R], [C], [L] согласно п. 13. На экране осциллографа получить две осциллограммы, соответствующие напряжению на резисторе  $R_1$  (канал A) и сигналу датчика тока в масштабе 1 А в 1 В (канал B). Показания внести в табл. 5.

17. Установить переключатели [R], [C], [L] согласно п. 14. Провести измерения величины  $T_2 - T_1$ . Показания внести в табл. 5.

18. Установить переключатели [R], [C], [L] согласно п. 15. Провести измерения величины  $T_2 - T_1$ . Показания внести в табл. 5.

**Таблица 5**

$f, \text{кГц}$	$T, \text{мкс}$	$T_2 - T_1$ (п. 16)		$T_2 - T_1$ (п. 17)		$T_2 - T_1$ (п. 18)	
		мкс	рад	мкс	рад	мкс	рад

Вычислить разность фаз между напряжением и током в радианах и заполнить соответствующую ячейку табл. 5.

19. Построить векторные диаграммы напряжений и треугольники сопротивлений для  $RR$ -,  $RC$ - и  $RL$ -цепей, исследованных в п. 13 – 18.

## Содержание отчёта

1. Схемы исследуемых электрических цепей.
2. Заполненные таблицы с результатами измерений.
3. Результаты расчётов.
4. Векторные диаграммы напряжений и треугольники сопротивлений.
5. Выводы.

## Контрольные вопросы

1. Какую величину называют индуктивным сопротивлением и в каких единицах его измеряют?
2. Какие существуют методы измерения индуктивного сопротивления?
3. Какую величину называют ёмкостным сопротивлением и в каких единицах его измеряют?
4. Какие существуют методы измерения ёмкостного сопротивления?
5. Как записываются законы Ома и Кирхгофа для цепей переменного синусоидального тока?
6. Для чего применяют векторные диаграммы?
7. Что такое треугольники напряжений, сопротивлений, мощностей?

## Лабораторная работа 3

### ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСА НАПРЯЖЕНИЙ

**Цель работы.** Изучение и экспериментальное исследование резонанса в цепи с последовательным соединением катушки индуктивности и конденсатора.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: резонансный режим работы двухполюсника; резонанс напряжений в неразветвлённой  $RLC$ -цепи; частотные характеристики двухполюсников.

#### **Оборудование и приборы**

1. Генератор НЧ ГЗ-103.
2. Вольтметр переменного тока 0...15 В.
3. Миллиамперметр переменного тока 0...200 мА.

#### **Порядок выполнения работы**

1. Собрать схему, приведённую на рис. 1. В качестве источника переменной ЭДС  $e(t)$  использовать звуковой генератор, работающий в режиме источника напряжения ( $r$  – его внутреннее сопротивление),  $L$  – катушка индуктивности,  $R$  – её омическое сопротивление,  $C$  – конденсатор.

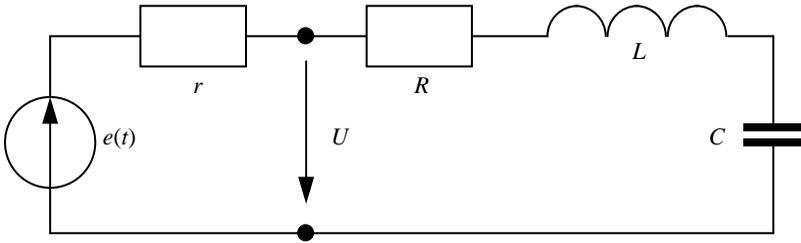


Рис. 1

2. Снять зависимости  $I(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$ ,  $U_C(\omega)$  при  $U = \text{const}$ . При измерении напряжений необходимо применять вольтметр с высоким входным сопротивлением. Рекомендуется сначала определить резонансную частоту по максимуму тока, а затем сделать по шесть измерений на частотах ниже резонансной и выше резонансной. Данные внести в табл. 1.

3. Определить расчётным путём и внести в табл. 1 следующие величины:  $Z$ ,  $X_L$ ,  $X_C$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $\cos\varphi$  и  $P$ , используя формулы

$$Z = \frac{U}{I}, \quad R = \frac{U}{I_0}, \quad X_L = \sqrt{Z_L^2 - R_L^2}, \quad Z_L = \frac{U_L}{I}, \quad X_C = \frac{U_C}{I},$$

$$L = \frac{X_L}{\omega}, \quad C = \frac{1}{\omega X_L}, \quad \cos\varphi = \frac{R}{Z},$$

где  $I_0$  – ток в цепи при резонансе;  $R_L$  – сопротивление катушки (измеряется омметром).

4. Определить добротность  $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$  и волновое сопротивление

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ контура.}$$

Таблица 1

№ опыта	Измерения						Вычисления							
	$f$	$\omega$	$U_R$	$U_L$	$U_C$	$I$	$Z$	$X_L$	$X_C$	$L$	$C$	$R$	$\cos\varphi$	$P$
	Гц	с	В	В	В	А	Ом	Ом	Ом	Гн	мкФ	Ом		Вт
1														
2														
...														
13														

5. Построить в масштабе векторные диаграммы напряжений для трёх частот:  $f = f_0$ ,  $f = 0,8f_0$ ,  $f = 1,2f_0$ .

6. Построить в масштабе в одной системе координат графики:  $U_C(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$ ,  $I(\omega)$ ,  $X_C(\omega)$ ,  $X_L(\omega)$ ,  $Z(\omega)$ .

7. Запустить программу **EWB**.

8. Загрузить файл **resonance\_serial.ewb**. Схема цепи соответствует рис. 2. Значения элементов цепи соответствуют оптимальным условиям наблюдения резонанса напряжений.

9. Установить переключатель  $S_0$  с помощью клавиши [I] в верхнее по схеме положение. Переключатели  $S_1$  и  $S_2$  с помощью клавиш [C] и [L] установить в нижнее по схеме положение.

10. Включить питание. Через промежуток времени  $t \geq 5$  с отключить питание.

11. Включить Боде-плоттер (измеритель АЧХ) в режим измерения АЧХ (**Magnitude**), установить нижнюю и верхнюю частоты анализа (Horizontal F и Horizontal I соответственно) и с помощью кнопок [←] и [→] на его панели определить частоту  $f_0$ , соответствующую резонансу напряжений и, соответственно, максимуму тока в цепи.

12. Включить Боде-плоттер в режим измерения ФЧХ (**Phase**), определить угол сдвига фаз между током и напряжением  $\alpha$  на частоте  $f_0$ , соответствующей максимуму тока в цепи. Угол сдвига фаз между напряжением и током  $\phi$  имеет такую же величину, взятую с обратным знаком. Рассчитать модуль полного сопротивления цепи  $Z$ .

13. Внести в первую строку табл. 2 значения резонансной частоты  $f_0$  (соответствующей максимуму тока), а также величины напряжений на всей цепи  $U$ , на сопротивлении  $U_R$ , катушке индуктивности  $U_L$ , конденсаторе  $U_C$ , модуль полного сопротивления цепи  $Z$ .

14. Установить переключатели  $S_0$  и  $S_2$  в нижнее по схеме положение. Переключатель  $S_1$  установить в верхнее по схеме положение.

15. Повторить п. 10.

16. Включить Боде-плоттер в режим измерения АЧХ (**Magnitude**), с помощью кнопок [←] и [→] на его панели определить частоту  $f_C$ , соответствующую максимуму напряжения на конденсаторе.

17. Установить переключатели  $S_0$  и  $S_1$  в нижнее по схеме положение. Переключатель  $S_2$  установить в верхнее по схеме положение.

18. Повторить п. 10.

19. Включить Боде-плоттер в режим измерения АЧХ (**Magnitude**), с помощью кнопок [←] и [→] на его панели определить частоту  $f_L$ , соответствующую максимуму напряжения на катушке индуктивности.

20. Установить на генераторе частоту  $f_H = 0,8f_0$ , повторить п. 10, 12. Рассчитать модуль полного сопротивления цепи  $Z$ . Внести во вторую строку табл. 2 величины напряжений на всей цепи  $U$ , сопротивлении  $U_R$ , катушке индуктивности  $U_L$ , конденсаторе  $U_C$ , модуль полного сопротивления цепи  $Z$ .

21. Установить на генераторе частоту  $f_B = 1,2f_0$ , повторить п. 10, 12. Рассчитать модуль полного сопротивления цепи  $Z$ . Внести в третью строку табл. 2 величины напряжений на всей цепи  $U$ , сопротивлении  $U_R$ , катушке индуктивности  $U_L$ , конденсаторе  $U_C$ , модуль полного сопротивления цепи  $Z$ .

22. Построить векторные диаграммы напряжений, соответствующие п. 13, 20, 21.

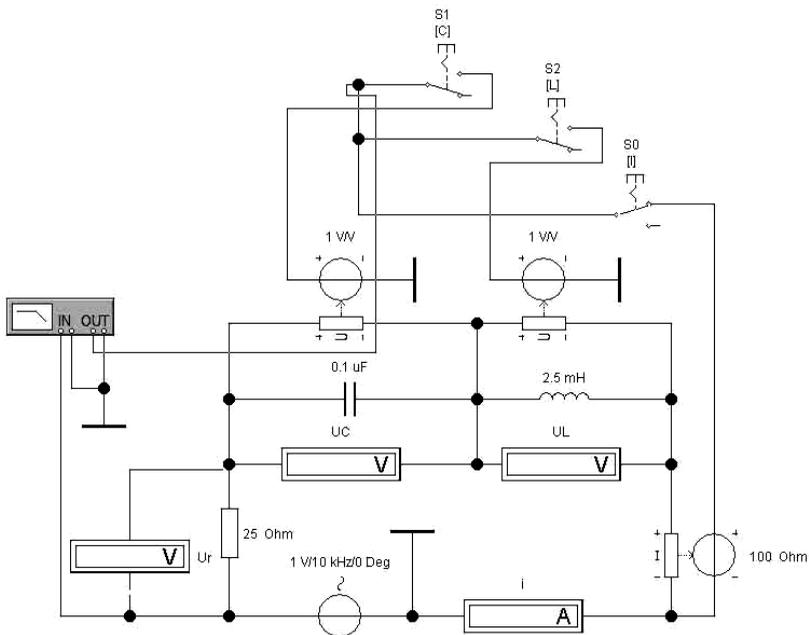


Рис. 2

Таблица 2

№	$R$	$L$	$C$	$U$	$U_R$	$U_L$	$U_C$	$I$	$f_0$	$f_L$	$f_C$	$\varphi$	$Z$
	Ом	Гн	мкФ	В	В	В	В	А	Гц	Гц	Гц	град	Ом
1													
2													
3													

## Содержание отчёта

1. Заполненные таблицы результатов измерений и расчётов.
2. Векторные диаграммы напряжений для следующих режимов работы цепи:  $f = f_0$ ,  $f_n = 0,8f_0$ ,  $f_v = 1,2f_0$ .

## Контрольные вопросы

1. Чем характеризуется резонансный режим работы электрической цепи?
2. Какой режим работы электрической цепи называют резонансом напряжений?
3. Изменением каких параметров цепи или источника питания можно добиться резонанса напряжений?
4. Записать условие резонанса напряжений.
5. Как по величине входного тока установить, что достигнут резонанс напряжений?
6. При каком соотношении параметров цепи напряжения на реактивных элементах могут быть значительно больше входного?
7. Как определить добротность контура?
8. Как меняется знак угла сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi$  при изменении частоты от нуля до бесконечности?
9. Объяснить ход зависимостей  $I(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$ ,  $U_C(\omega)$ ,  $Z(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$ ,  $\cos\varphi(\omega)$ .

## Лабораторная работа 4

### ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСА ТОКОВ

**Цель работы.** Изучение и экспериментальное исследование резонанса в цепи при параллельном соединении катушки индуктивности и конденсатора.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: резонансный режим работы двухполюсника; резонанс токов в разветвлённой  $RLC$ -цепи; компенсация сдвига фаз.

#### **Оборудование и приборы**

1. Генератор НЧ ГЗ-103.
2. Вольтметр переменного тока 0...15 В.
3. Миллиамперметр переменного тока 0...200 мА.

#### **Порядок выполнения работы**

1. Собрать цепь согласно схеме, приведённой на рис. 1. В качестве источника переменной ЭДС  $e(t)$  использовать звуковой генератор, работающий в режиме источника напряжения ( $r$  – его внутреннее

сопротивление),  $L$  – катушка индуктивности,  $R$  – её омическое сопротивление,  $C$  – конденсатор.

2. Снять зависимости общего тока и токов через катушку индуктивности и конденсатор от частоты, питая цепь от звукового генератора, работающего в режиме источника ЭДС. Для этого установить  $r = 5$  Ом. При необходимости постоянно выходного напряжения целесообразно поддерживать с помощью регулятора уровня выхода.

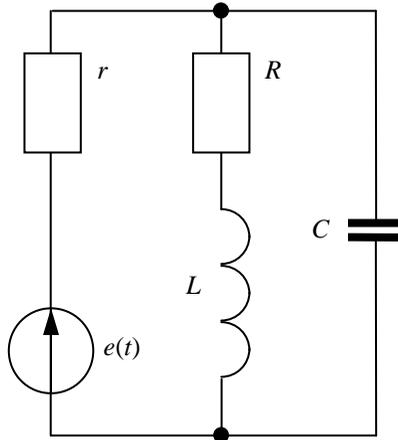


Рис. 1

При измерении напряжений необходимо применять вольтметр с высоким входным сопротивлением. Рекомендуется сначала определить резонансную частоту по максимуму тока, а затем сделать по шесть измерений на частотах ниже резонансной и выше резонансной. Данные внести в табл. 1.

Таблица 1

№ опыта	Измерения						Вычисления				
	$f$	$\omega$	$U$	$I$	$I_L$	$I_C$	$Y$	$g$	$b_L$	$b_C$	$\cos\varphi$
	Гц	с	В	А	А	А	См	См	См	См	
1											
2											
...											
13											

3. Провести расчёт величин:

а) полной проводимости  $Y = \frac{I}{U}$ ;

б) активной проводимости  $g = \frac{I_0}{U}$ ;

в) индуктивной проводимости  $b_L = \sqrt{Y_L^2 - g^2} = \sqrt{\left(\frac{I_L}{U}\right)^2 - \left(\frac{I_0}{U}\right)^2}$ ;

г) ёмкостной проводимости  $b_C = \omega C$ ;

д) коэффициента мощности  $\cos \varphi = \frac{g}{Y}$ . Данные вычислений внести в табл. 1.

сти в табл. 1.

4. По данным эксперимента и вычислений построить в масштабе в одной системе координат графики:  $I(\omega)$ ,  $I_L(\omega)$ ,  $I_C(\omega)$ . В другой системе координат – в том же масштабе по частоте и строго под первой – зависимости:  $Y(\omega)$ ,  $\cos \varphi(\omega)$ .

5. Построить в масштабе векторные диаграммы для трёх случаев: а) – для частоты резонанса  $f_0$ ; б) – для частоты  $f = 0,8f_0$ ; в) – для частоты  $f = 1,2f_0$ .

6. Запустить программу **EWB**.

7. Загрузить файл **resonance\_parall.ewb**. Схема цепи соответствует рис. 2. Значения элементов цепи соответствуют оптимальным условиям наблюдения резонанса токов.

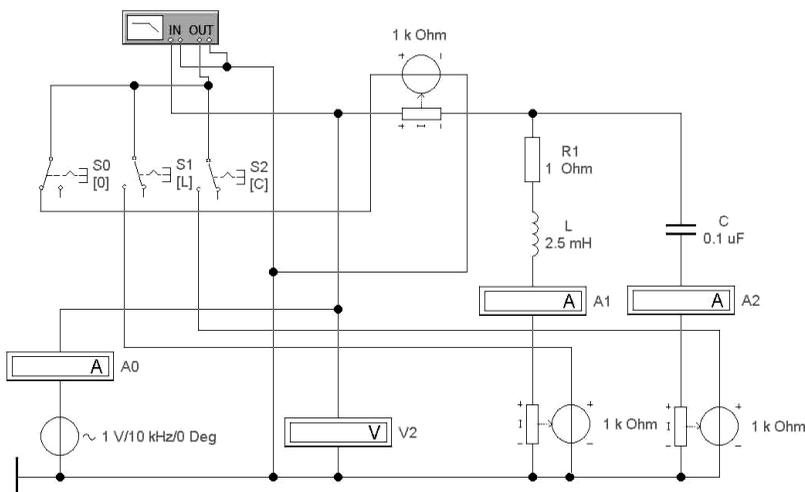


Рис. 2

8. Установить переключатель  $S_0$  с помощью клавиши [0] в левое по схеме положение. Переключатели  $S_1$  и  $S_2$  с помощью клавиш [L] и [C] установить в правое по схеме положение.

9. Включить питание. Через промежуток времени  $t \geq 5$  с отключить питание.

10. Включить Боде-плоттер (измеритель АЧХ) в режим измерения АЧХ (**Magnitude**), установить нижнюю и верхнюю частоты анализа (Horizontal F и Horizontal I соответственно) и сравнить полученную характеристику с теоретической, с помощью кнопок [←] и [→] на его панели определить частоту  $f_0$ , соответствующую резонансу токов и, соответственно, минимуму тока в цепи.

11. Включить Боде-плоттер в режим измерения ФЧХ (**Phase**), определить угол сдвига фаз между током и напряжением  $\alpha$  на частоте  $f_0$ , соответствующей резонансу токов. Угол сдвига фаз между напряжением и током  $\varphi$  имеет такую же величину, взятую с обратным знаком. Провести также измерения на частотах  $f_n = 0,8f_0$ ,  $f_n = 1,2f_0$ .

12. Установить переключатель  $S_0$  с помощью клавиши [0] в левое по схеме положение. Переключатель  $S_1$  с помощью клавиши [L] установить в левое по схеме положение. Повторить п. 9. Включить Боде-плоттер в режим измерения АЧХ (**Magnitude**), получить зависимость  $I_L(f)$ . Сравнить её с теоретической.

13. Установить переключатель  $S_1$  с помощью клавиши [L] в левое по схеме положение, переключатель  $S_2$  с помощью клавиши [C] установить в левое по схеме положение. Повторить п. 9. Включить Боде-плоттер в режим измерения АЧХ (**Magnitude**), получить зависимость  $I_C(f)$ . Сравнить её с теоретической.

14. Снять показания амперметров  $A_0, A_1, A_2$ , измеряющих токи цепи  $I_0, I_L, I_C$  на частоте  $f_0$ , установленной на источнике переменной ЭДС заранее. Внести их в табл. 2.

15. Установить частоту  $f_n = 0,8f_0$ , повторить п. 9. Снять показания приборов на частоте  $f_n$ , внести их в табл. 2.

Таблица 2

	Измерения						Вычисления				
	$f$	$\varphi$	$U$	$I$	$I_L$	$I_C$	$Y$	$g$	$b_L$	$b_C$	$\cos\varphi$
	Гц	град	В	А	А	А	См	См	См	См	
1											
2											
3											

16. Установить частоту  $f_b = 1,2f_0$ , повторить п. 9. Снять показания приборов на частоте  $f_b$ , внести их в табл. 2.

17. Провести расчёты величин  $Y$ ,  $g$ ,  $b_L$ ,  $b_C$ ,  $\cos\varphi$ , внести их в соответствующие ячейки табл. 2.

18. Построить в масштабе векторные диаграммы токов для опытов, проведённых на частотах  $f = f_0$ ,  $f_n = 0,8f_0$ ,  $f_b = 1,2f_0$ .

### Содержание отчёта

1. Заполненная таблица результатов измерений и расчётов.
2. Векторные диаграммы токов для следующих режимов работы цепи:  $f = f_0$ ,  $f_n = 0,8f_0$ ,  $f_b = 1,2f_0$ .

### Контрольные вопросы

1. Написать формулы для определения активной, индуктивной, ёмкостной и полной проводимостей электрической цепи.
2. Зависит ли реактивная проводимость катушки индуктивности от величины её активного сопротивления?
3. Сформулировать условие возникновения резонанса токов в электрической цепи.
4. Чем отличается резонанс токов от резонанса напряжений?
5. Пояснить способ повышения коэффициента мощности электрической цепи при параллельном включении ёмкости и потребителя с активно-индуктивной нагрузкой.
6. Пояснить ход зависимостей  $I(\omega)$ ,  $I_L(\omega)$ ,  $I_C(\omega)$ .

## Лабораторная работа 5

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЁХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ СОЕДИНЕНИИ ПРИЁМНИКОВ ЗВЕЗДОЙ

**Цель работы.** Установить соотношения между линейными и фазными токами и напряжениями в трёхфазной системе при соединении приёмников звездой при различной нагрузке фаз; определить влияние обрыва линейного провода и одной или двух фаз приёмника на его работу, построить векторные диаграммы напряжений и токов.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: трёхфазная система ЭДС; основные схемы соединения трёхфазных цепей; соотношения между линейными и фазовыми напряжениями и токами; соединение нагрузки звездой.

### Оборудование и приборы

1. Трёхфазный источник с напряжением 36 В.
2. Вольтметр переменного тока 0...50 В.
3. Амперметр переменного тока 0...0,5 А.
4. Измерительный комплект К-505.

### Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с измерительным комплектом К-505. Для измерений в трёхпроводных цепях трёхфазного тока схема комплекта имеет искусственный нуль. Поэтому с помощью вольтметра комплекта можно измерить только фазные напряжения. Переносным вольтметром измерить линейные напряжения  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$ . Со стенда снять и записать значения  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$ ,  $L$ ,  $C$ .

2. Собрать схему, приведённую на рис. 1, для измерения токов, напряжений, мощности с помощью комплекта К-505, а также тока в нулевом проводе с помощью переносного амперметра  $A$  и напряжения смещения нейтрали нагрузки с помощью переносного вольтметра  $V$ . Показания приборов записать в первую строку табл. 1.

3. Отключить амперметр  $A$ , создав тем самым разрыв нулевого провода, и показания приборов записать во вторую строку табл. 1. Подключить амперметр  $A$ .

4. Установить несимметричную нагрузку фаз  $r_A = r_B \neq r_C$  и показания приборов записать в третью строку табл. 1.

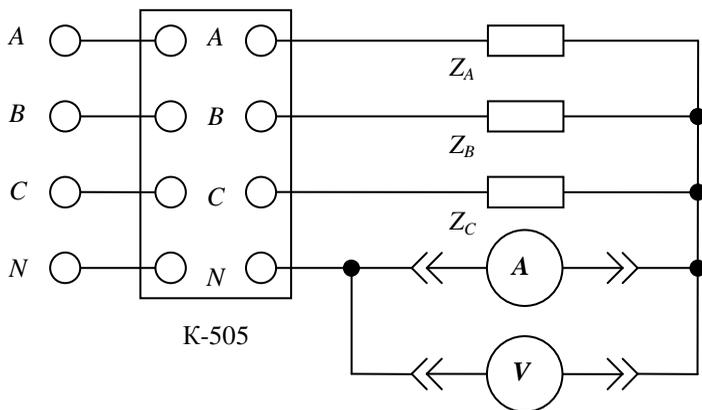


Рис. 1

Таблица 1

№ опыта	Вид нагрузки	$I_A$	$I_B$	$I_C$	$U_A$	$U_B$	$U_C$	$P_A$	$P_B$	$P_C$	$I_N$	$U_N$
		А	А	А	В	В	В	Вт	Вт	Вт	А	В
1	$r_A = r_B = r_C$ , четырёхпроводная											
2	$r_A = r_B = r_C$ , трёхпроводная											
3	$r_A = r_B \neq r_C$ , четырёхпроводная											
4	$r_A = r_B \neq r_C$ , трёхпроводная											
5	$r_A = \infty, r_B \neq r_C$ , трёхпроводная											
6	$r_A = \infty, r_B \neq r_C$ , четырёхпроводная											
7	$r_A = r, r_B = X_L$ , $r_C = X_C$ , четырёхпроводная											
8	$r_A = r, r_B = X_L$ , $r_C = X_C$ , трёхпроводная											

5. Отключить амперметр А и показания приборов записать в четвёртую строку табл. 1.

6. Провести обрыв фазы А и показания записать в пятую строку табл. 1.

7. Подключить амперметр А и оставить оборванной фазу А, произвести измерения. Показания приборов записать в шестую строку табл. 1.

8. Собрать схему для неоднородной нагрузки с нулевым проводом: фаза А – активная нагрузка, фаза В – индуктивная нагрузка, фаза С – ёмкостная нагрузка ( $Z_{AB} = r_A + jX_L$ ,  $Z_{BC} = -jX_C$ ,  $Z_{CA} = r$ ). Произвести измерения и результаты записать в седьмую строку табл. 1.

9. Собрать схему для неоднородной нагрузки без нулевого провода, для этого в предыдущей схеме отключить переносной амперметр А. Произвести измерения и результаты записать в восьмую строку табл. 1.

10. По данным опыта 7 определить углы сдвига между током и напряжением в каждой фазе  $\varphi = \arctg \frac{P}{IU}$ .

11. По данным всех опытов построить векторные диаграммы.

12. Запустить программу **EWB**.

13. Загрузить файл **star\_01.ewb** для исследования трёхфазной цепи при соединении приёмников звездой. Схема цепи соответствует рис. 2. Установить значения элементов цепи лабораторного стенда. Значения активной мощности в ваттах соответствуют показаниям приборов  $P_A, P_B, P_C$  в вольтах.

14. Исследование цепи при симметричной нагрузке с нулевым проводом. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:  $S_1, S_2$  – [ВКЛ].

15. Включить питание. Через промежуток времени  $t \geq 5$  с отключить питание. Снять показания приборов.

16. Заполнить первую строку табл. 2.

**Таблица 2**

№ опыта	Вид нагрузки	$I_A$	$I_B$	$I_C$	$U_A$	$U_B$	$U_C$	$P_A$	$P_B$	$P_C$	$I_N$	$U_N$
		А	А	А	В	В	В	Вт	Вт	Вт	А	В
1	$r_A = r_B = r_C$ , четырёхпроводная											
2	$r_A = r_B = r_C$ , трёхпроводная											
3	$r_A = r_B \neq r_C$ , четырёхпроводная											
4	$r_A = r_B \neq r_C$ , трёхпроводная											
5	$r_A = \infty, r_B \neq r_C$ , трёхпроводная											
6	$r_A = \infty, r_B \neq r_C$ , четырёхпроводная											
7	$r_A = r, r_B = X_L$ , $r_C = X_C$ , четырёхпроводная											
8	$r_A = r, r_B = X_L$ , $r_C = X_C$ , трёхпроводная											

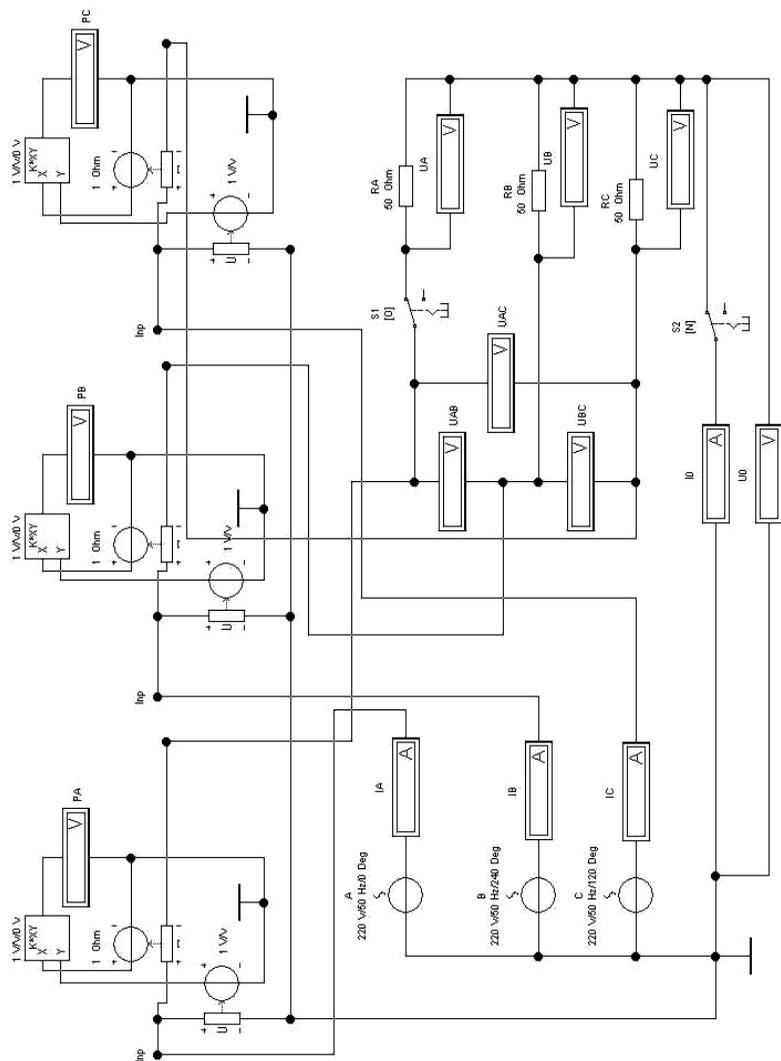


Рис. 2

17. Исследование цепи при симметричной нагрузке без нулевого провода. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:  $S_1$  – [ВКЛ],  $S_2$  – [ОТКЛ].

Повторить действия п. 15, заполнить вторую строку табл. 2.

18. Исследование цепи при несимметричной нагрузке с нулевым проводом. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:  $S_1, S_2$  – [ВКЛ].

Увеличить значения сопротивления  $R_A$  в два раза. Повторить действия п. 15, заполнить третью строку табл. 2.

19. Исследование цепи при несимметричной нагрузке без нулевого провода. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:

$$S_1 \text{ – [ВКЛ], } S_2 \text{ – [ОТКЛ].}$$

Повторить действия п. 15, заполнить четвёртую строку табл. 2.

20. Исследование цепи при обрыве линейного провода с нулевым проводом. Восстановить исходное значение  $R_A$ . Переключатели должны быть установлены в следующие положения:

$$S_2 \text{ – [ВКЛ], } S_1 \text{ – [ОТКЛ].}$$

Повторить действия п. 15, заполнить пятую строку табл. 2.

21. Исследование цепи при обрыве линейного провода без нулевого провода. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:

$$S_1, S_2 \text{ – [ОТКЛ].}$$

Повторить действия п. 15, заполнить шестую строку табл. 2.

22. Исследование цепи при неоднородной нагрузке с нулевым проводом: фаза  $A$  – активная нагрузка, фаза  $B$  – индуктивная нагрузка, фаза  $C$  – ёмкостная нагрузка. Заменить элемент  $R_B$  на катушку индуктивности, а элемент  $R_C$  – на конденсатор. Установить значения элементов цепи лабораторного стенда. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:

$$S_1, S_2 \text{ – [ВКЛ].}$$

Произвести измерения и результаты записать в седьмую строку табл. 2.

23. Исследование цепи при неоднородной нагрузке без нулевого провода: фаза  $A$  – активная нагрузка, фаза  $B$  – индуктивная нагрузка, фаза  $C$  – ёмкостная нагрузка. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:

$$S_1 \text{ – [ВКЛ], } S_2 \text{ – [ОТКЛ].}$$

Произвести измерения и результаты записать в восьмую строку табл. 2.

24. По данным опыта 7 определить углы сдвига между током и напряжением в каждой фазе  $\varphi = \arctg \frac{P}{IU}$ .

25. Построить векторные диаграммы для опытов 1 – 8 табл. 2.

### Содержание отчёта

1. Заполненная таблица результатов измерений.
2. Рассчитанные значения угла сдвига фаз между напряжением и током.
3. Векторные диаграммы напряжений и токов.

### Контрольные вопросы

1. Дать определение трёхфазной симметричной системы ЭДС.
2. Перечислить способы соединения нагрузки в трёхфазных цепях.
3. Объяснить назначение нейтрального провода.
4. Каково соотношение между фазными и линейными напряжениями и токами при соединении нагрузки звездой?
5. Указать способы включения ваттметров для измерения активной мощности в четырёхпроводных и трёхпроводных трёхфазных цепях.

## Лабораторная работа 6

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЁХФАЗНЫХ ЦЕПЕЙ ПЕРЕМЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА ПРИ СОЕДИНЕНИИ ПРИЁМНИКОВ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

**Цель работы.** Установить соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами при соединении приёмников треугольником при различной нагрузке фаз; определить влияние обрыва линейного провода и фазы нагрузки на работу цепи; построить векторные диаграммы напряжений и токов.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: трёхфазная система ЭДС; основные схемы соединения трёхфазных цепей; соотношения между линейными и фазными напряжениями и токами при соединении нагрузки треугольником.

#### **Оборудование и приборы**

1. Трёхфазный источник с напряжением 36 В.
2. Вольтметр переменного тока 0...50 В.
3. Амперметр переменного тока 0...1 А.
4. Измерительный комплект К-505.

## Порядок выполнения работы

1. Собрать установку для измерения токов и напряжений для случая симметричной нагрузки согласно схеме рис. 1. Установить одинаковые сопротивления в каждой фазе:  $r_{AB} = r_{BC} = r_{CA}$ . Для измерения линейных токов использовать прибор К-505. Фазные токи  $I_{AB}$ ,  $I_{BC}$ ,  $I_{CA}$  измерить тремя переносными амперметрами  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  или одним, поочерёдно включая его в цепь каждой фазы треугольника. Фазные напряжения  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$  измерить переносным вольтметром. Со стенда снять и записать значения  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$ ,  $L$ ,  $C$ . Показания приборов записать в первую строку табл. 1.

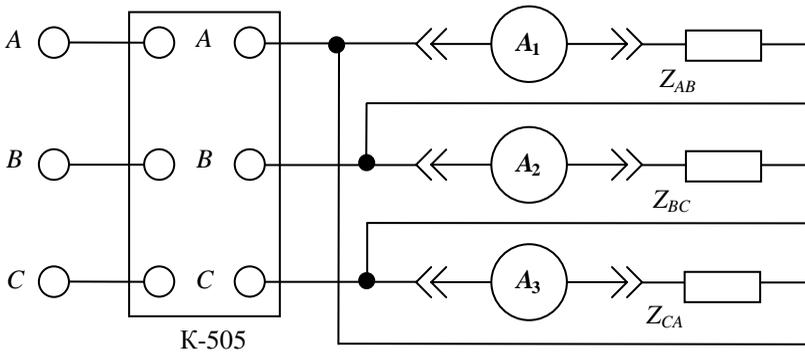


Рис. 1.

Таблица 1

№ п/п	Нагрузка	Измерения						Вычисления		
		$I_{AB}$	$I_{BC}$	$I_{CA}$	$I_A$	$I_B$	$I_C$	$P_{AB}$	$P_{BC}$	$P_{CA}$
		А						Вт		
1	$r_{AB} = r_{BC} = r_{CA}$									
2	$r_{AB} = r_{BC} \neq r_{CA}$									
3	$r_{AB} = r_{BC}$ , обрыв линейного провода $A$									
4	$r_{AB} = \infty$ , $r_{BC} \neq r_{CA}$									
5	$Z_{AB} = r_A + jX_L$ , $Z_{BC} = -jX_C$ , $Z_{CA} = r$									

2. Установить неодинаковые сопротивления двух фаз:  $r_{AB} = r_{BC} \neq r_{CA}$ . Показания приборов записать во вторую строку табл. 1.

3. Произвести обрыв линейного провода  $A$ . Показания приборов записать в третью строку табл. 1.

4. Подключить провод  $A$ , нагрузку  $r_{AB}$  отключить, результаты измерений записать в четвёртую строку табл. 1.

5. Собрать схему для неоднородной нагрузки  $\underline{Z}_{AB} = r_A + jX_L$ ,  $\underline{Z}_{BC} = -jX_C$ ,  $\underline{Z}_{CA} = r$ . Произвести измерение токов и напряжений. Результаты измерений записать в пятую строку табл. 1.

6. По данным опыта 5 определить параметры нагрузки по формулам

$$Z_{AB} = \frac{U}{I_{AB}}, \quad X_{AB} = \sqrt{Z_{AB}^2 - r_{AB}^2}, \quad X_{BC} = \frac{U}{I_{BC}},$$

$$\cos \varphi_{AB} = \frac{r_{AB}}{Z_{AB}}, \quad \cos \varphi_{BC} = 0, \quad \cos \varphi_{CA} = 1.$$

7. По данным опытов 1 – 5 определить мощности фаз и всей цепи по формулам

$$P_{AB} = U_{AB} I_{AB} \cos \varphi_{AB}, \quad P_{BC} = U_{BC} I_{BC} \cos \varphi_{BC},$$

$$P_{CA} = U_{CA} I_{CA} \cos \varphi_{CA}, \quad \sum P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA}.$$

8. По данным опытов 1 – 5 построить векторные диаграммы.

9. Запустить программу **EWB**.

10. Загрузить файл **triangle\_1.ewb** для исследования трёхфазной цепи при соединении приёмников треугольником. Схема цепи соответствует рис. 2. Установить значения элементов цепи лабораторного стенда.

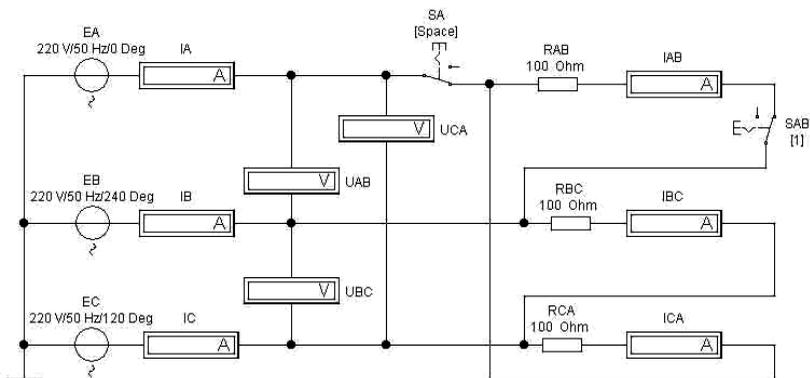


Рис. 2

Таблица 2

№ п/п	Нагрузка	Измерения						Вычисления		
		$I_{AB}$	$I_{BC}$	$I_{CA}$	$I_A$	$I_B$	$I_C$	$P_{AB}$	$P_{BC}$	$P_{CA}$
		А						Вт		
1	$r_{AB} = r_{BC} = r_{CA}$									
2	$r_{AB} = r_{BC} \neq r_{CA}$									
3	$r_{AB} = r_{BC}$ , обрыв линейного провода $A$									
4	$r_{AB} = \infty$ , $r_{BC} \neq r_{CA}$									
5	$Z_{AB} = r_A + jX_L$ , $Z_{BC} = -jX_C$ , $Z_{CA} = r$									

11. Исследование цепи при симметричной нагрузке. Переключатели должны быть установлены в следующие положения:

$$S_A, S_{AB} - [\text{ВКЛ}].$$

12. Включить питание. Через промежуток времени  $t \geq 5$  с отключить питание. Снять показания приборов.

13. Заполнить первую строку табл. 2.

14. Исследование цепи при несимметричной нагрузке. Увеличить значения сопротивления  $r_{AB}$  в два раза. Повторить действия п. 12, заполнить вторую строку табл. 2. Восстановить исходные значения  $r_{AB}$ .

15. Исследование цепи при обрыве линейного провода  $A$ .

Создать обрыв линейного провода  $A$ , установив переключатель  $S_A$  в положение [ВЫКЛ] с помощью клавиши [ПРОБЕЛ]. Повторить действия п. 12, заполнить третью строку табл. 2. Восстановить исходное положение переключателя  $S_A$  с помощью клавиши [ПРОБЕЛ].

16. Исследование цепи при обрыве одной фазы нагрузки  $AB$ .

Установить переключатель  $S_{AB}$  в положение [ВЫКЛ] с помощью клавиши [1]. Повторить действия п. 12, заполнить четвертую строку табл. 2.

17. Исследование цепи при неоднородной нагрузке. Собрать схему для неоднородной нагрузки  $Z_{AB} = r_A + jX_L$ ,  $Z_{BC} = -jX_C$ ,  $Z_{CA} = r$ , значения индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$  установить согласно п. 5. Повторить действия п. 12, заполнить пятую строку табл. 2.

18. Вычислить параметры нагрузки и значения коэффициента мощности для каждой из фаз нагрузки по формулам п. 6.

19. Вычислить значения активной мощности для каждой из фаз нагрузки и всей цепи по формулам п. 7.

20. Построить векторные диаграммы для каждого из опытов.

### Содержание отчёта

1. Заполненная таблица результатов измерений.
2. Рассчитанные значения коэффициента мощности и активной мощности в фазах нагрузки  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ .
3. Векторные диаграммы напряжений и токов.

### Контрольные вопросы

1. Начертить схему соединения приёмников треугольником, указав положительные направления линейных и фазных токов.
2. Каковы соотношения между значениями линейных и фазных токов при симметричной нагрузке?
3. Начертить векторную диаграмму напряжений и токов для симметричной нагрузки, соединённой в треугольник.
4. Как изменятся ток и мощность, если включённые по схеме «звезда» одинаковые нагрузки переключить на схему «треугольник» (линейные напряжения в обоих случаях одинаковы)?
5. Как рассчитать мощность приёмника при несимметричной нагрузке?
6. Как рассчитать мощность приёмника при симметричной нагрузке?
7. Доказать, что при помощи двух однофазных ваттметров можно измерить мощность всей трёхфазной цепи.

## Лабораторная работа 7

### ИЗУЧЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

**Цель работы.** Изучение методики снятия вольт-амперных характеристик (ВАХ) элементов электрических цепей постоянного тока с различными видами нелинейности; экспериментальная проверка графо-аналитического метода расчёта нелинейных цепей постоянного тока.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить раздел учебника «Нелинейные электрические цепи постоянного тока».

### **Оборудование и приборы**

1. Варистор 22 В.
2. Лампа накаливания 220 В 100 Вт.
3. Стабилитрон типа Д815А.
4. Источник постоянной ЭДС 0...10 В.
5. Источник переменной ЭДС 0...15 В.
6. Амперметр постоянного тока 0,2 А.
7. Вольтметр постоянного тока 10 В.
8. Реостат 50 Ом.
9. Осциллограф.

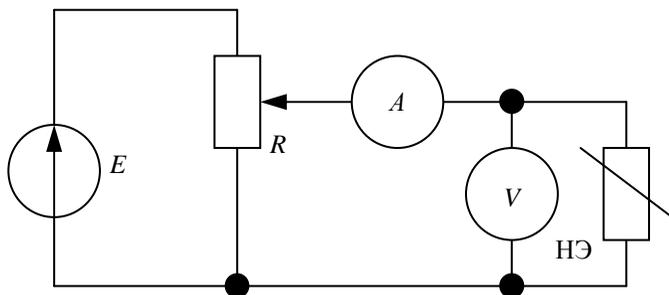
### **Порядок выполнения работы**

1. Сборка основной цепи согласно рис. 1 производится на лабораторном стенде. В качестве нелинейного элемента (НЭ) используется варистор. У некоторых типов нелинейных элементов ветви ВАХ могут быть настолько крутыми, что задавать разумные значения приращения напряжения и измерять соответствующие им приращения тока оказывается невозможным. Поэтому для всех трёх типов нелинейных элементов следует задавать значения тока от 0 до 150 мА через 10 мА и измерять соответствующие значения напряжения. Результаты измерений занести в табл. 1.

2. Повторить п. 1 с использованием в качестве НЭ лампы накаливания.

3. Повторить п. 1 с использованием в качестве НЭ стабилитрона, включив его в прямом направлении.

4. Повторить п. 1 с использованием в качестве НЭ стабилитрона, включив его в обратном направлении.



**Рис. 1**

Таблица 1

№ п/п	$I$ , мА	Варистор	Лампа	Стабилитрон		$HL  R$	$HL \rightarrow R$
		$U_1$ , В	$U_2$ , В	$U_{пр}$ , В	$U_{обр}$ , В	$I_0$	$U_0$
1	10						
2	20						
3	30						
4	40						
5	50						
6	60						
7	70						
8	80						
9	90						
10	100						
11	110						
12	120						
13	130						
14	140						
15	150						

5. Взять в качестве НЭ лампу накаливания и включить параллельно с ней резистор из состава стенда с сопротивлением, близким к 150 Ом. Провести измерения тока в неразветвлённой части цепи при напряжениях на параллельном участке, взятых из столбца  $U_2$  (для лампы накаливания). Результаты измерений занести в табл. 1 (столбец  $HL||R$ ).

6. Взять в качестве НЭ лампу накаливания и включить последовательно с ней резистор из состава стенда с сопротивлением, близким к 60 Ом. Провести измерения суммарного напряжения на лампе и резисторе при значениях тока, взятых из столбца  $I$ . Результаты измерений занести в табл. 1 (столбец  $HL \rightarrow R$ ).

7. Построить ВАХ варистора, лампы накаливания и стабилитрона, выбрав соответствующие масштабы на осях координат. Для варистора и лампы накаливания построить обратные ветви ВАХ по значениям  $U_1$  и  $U_2$  в третьей координатной четверти аналогично их прямым ветвям. Для стабилитрона использовать значения  $U_{пр}$  и  $U_{обр}$ , взятые из соответствующих столбцов табл. 1.

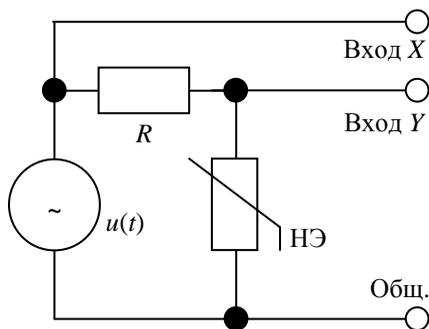


Рис. 2

8. Построить в одной системе координат ВАХ лампы накаливания с подключёнными резисторами (столбцы  $HL||R$  и  $HL \rightarrow R$ ). Провести соответствующие расчёты для 1-й, 4-й, 8-й и 12-й точек ВАХ (соответствующие строки табл. 1). Проверить соответствие экспериментальных и расчётных значений. Объяснить причину расхождения.

9. Собрать цепь согласно рис. 2 для получения ВАХ полупроводникового стабилизатора на экране осциллографа, который должен работать в двухкоординатном режиме. Точность такого метода ниже, чем предыдущего, однако качественно ВАХ получается практически мгновенно после включения приборов.

Значение сопротивления резистора не критично, необходимо соблюдать условие, чтобы рабочий ток диода не превышал предельно допустимого значения для данного типа диода. Величина напряжения  $u(t)$  определяется чувствительностью канала горизонтального отклонения осциллографа.

Сравнить ВАХ стабилизатора, полученную двумя способами. Объяснить причину расхождений.

### Содержание отчёта

1. Схемы исследуемых электрических цепей.
2. Заполненные таблицы с результатами измерений.
3. ВАХ исследуемых элементов.
4. Результаты расчётов.
5. Выводы.

### Контрольные вопросы

1. Как классифицируются нелинейные элементы?
2. Где применяются нелинейные элементы?
3. Что понимают под ВАХ нелинейного элемента?

4. Как определяются  $R_d$  и  $R_{ст}$  и с какой целью это делается?
5. Нарисовать схему простейших стабилизаторов тока и напряжения и объяснить их принцип действия.
6. Как составить схему замещения нелинейного элемента, зная его рабочую точку?

## Лабораторная работа 8

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПЕЙ С ИНДУКТИВНО СВЯЗАННЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

**Цель работы.** Освоение методики определения параметров катушек индуктивности с помощью омметра, амперметра и вольтметра; экспериментальное исследование цепей с последовательным и параллельным соединением индуктивно связанных катушек. Освоение методики определения взаимной индуктивности катушек и построения векторных диаграмм для цепей с индуктивной связью.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: расчёт электрических цепей при наличии в них индуктивно связанных катушек; последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек; определение взаимной индуктивности опытным путём.

#### **Оборудование и приборы**

1. Генератор НЧ.
2. Омметр.
3. Амперметр 0...0,2 А.
4. Вольтметр 0...15 В.
5. Трансформатор без магнитопровода.

#### **Порядок выполнения работы**

1. Измерить сопротивления катушек  $L_1$ ,  $L_2$  с помощью омметра; вычислить сумму сопротивлений катушек  $L_1$ ,  $L_2$  и записать полученную величину в табл. 1.

2. Собрать цепь согласно рис. 1. Установить напряжение на выходе генератора НЧ в пределах 5...10 В при частоте 1 кГц.

**Таблица 1**

№ опыта	Измерения					Вычисления		
	$R_1$	$R_2$	$R$	$U$	$I$	$z$	$X$	$L$
	Ом			В	А	Ом	Ом	Гн
1								
2								

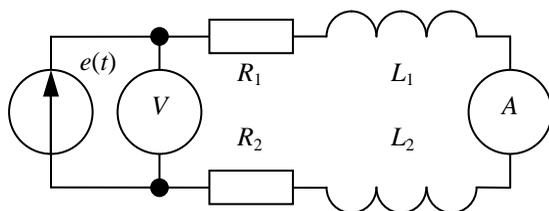


Рис. 1

3. Измерить напряжение и ток при первом варианте включения катушек, записать измеренные величины для опыта № 1. Поменять местами выводы катушки  $L_2$  (правой в схеме рис. 1), провести измерения и записать данные для опыта № 2. При отсутствии маркировки одноимённых выводов обмоток согласному включению соответствует меньшее значение тока в катушках.

4. Провести расчёты  $z$ ,  $X$ ,  $L$  для частоты, на которой проводились измерения. Вычислить коэффициент взаимной индукции первым способом по формуле

$$M = (L_{\text{согл}} - L_{\text{встр}})/4.$$

5. Построить в одинаковом масштабе векторные диаграммы для согласного и встречного включения катушек.

6. Собрать цепь согласно схеме рис. 2 для измерения коэффициента взаимной индукции вторым способом. Провести измерения  $I_1$ ,  $U_2$ . Вычислить коэффициент взаимной индукции вторым способом по формуле

$$M = U_2/(\omega I_1).$$

7. Сравнить значения коэффициента взаимной индукции, измеренные первым и вторым способами. Провести анализ полученных результатов.

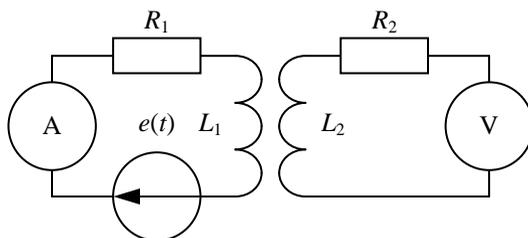


Рис. 2

8. Вычислить значение коэффициента связи по формуле

$$K = M / (L_1 L_2)^{1/2}.$$

Значение  $M$  взять из результатов первого способа.

### Содержание отчёта

1. Схемы исследуемых электрических цепей.
2. Заполненная таблица с результатами измерений.
3. Результаты расчётов, векторные диаграммы.
4. Выводы.

### Контрольные вопросы

1. Сформулировать закон электромагнитной индукции.
2. Как с помощью амперметра, вольтметра, омметра определить параметры катушки  $R$ ,  $Z$ ,  $X_L$ ,  $L$ ?
3. Какое включение катушек индуктивности называется согласным?
4. Какое включение катушек индуктивности называется встречным?
5. Как по результатам опытов для последовательного соединения индуктивно связанных катушек при неизменном напряжении определить характер их включения (согласное или встречное)?
6. Как определить характер включения катушек при неизменном во всех опытах токе?
7. Какие зажимы катушек называются одноимёнными?
8. Как их определить экспериментально?
9. Как опытным путём определить взаимную индуктивность?

## Лабораторная работа 9

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПАССИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ

**Цель работы.** Экспериментальное определение коэффициентов системы уравнений пассивного четырёхполосника в  $A$ -форме и его характеристических параметров.

**Пояснения к выполнению работы.** Изучить разделы учебника: различные формы записи уравнений четырёхполосника; определение коэффициентов  $A$ -формы записи уравнений четырёхполосника; постоянная передачи и единицы измерения затухания.

Коэффициенты системы уравнений четырёхполюсника и его характеристические параметры связаны с параметрами элементов, из которых составлен четырёхполюсник, и могут быть рассчитаны по их значениям, а также определены экспериментально.

Для экспериментального определения характеристического сопротивления симметричного четырёхполюсника  $\underline{Z}_c$  и постоянной передачи  $\underline{\Gamma}$ , а также коэффициентов  $A$ -формы необходимо найти его входное сопротивление в предельных режимах, т.е. в режимах холостого хода  $\underline{Z}_x$  и короткого замыкания  $\underline{Z}_k$ .  $A$ -параметры симметричного четырёхполюсника

$$\underline{A} = \underline{D} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_x}{\underline{Z}_x - \underline{Z}_k}}; \quad \underline{B} = \underline{AZ}_k; \quad \underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_x}.$$

Характеристическое сопротивление

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_k} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}.$$

Постоянная передачи  $\underline{\Gamma} = \ln[\underline{A} + (\underline{BC})^{1/2}]$ .

**Пример расчёта.** Симметричный Т-образный четырёхполюсник (рис. 1) составлен из следующих элементов:  $\underline{Z}_{1T} = \underline{Z}_{2T} = \underline{Z}_T = 10$  Ом,  $\underline{Z}_{0T} = -j10$  Ом. Определить коэффициенты  $A$ -формы и характеристические параметры.

Коэффициенты  $A$ -формы могут быть найдены из следующих выражений:

$$\underline{A} = \underline{D} = 1 + (\underline{Z}_{1T}/\underline{Z}_{0T}) = 1 + (10/-j10) = 1 + j = 1,41 e^{j45^\circ};$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_{1T} + \underline{Z}_{2T} + (\underline{Z}_{1T} \underline{Z}_{2T}/\underline{Z}_{0T}) = 10 + 10 + (100/-j10) = (20 + j10) \text{ Ом};$$

$$\underline{C} = 1/\underline{Z}_{0T} = (1/-j10) = j0,1 \text{ См}.$$

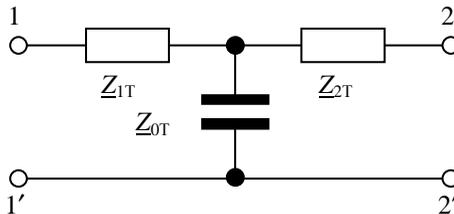


Рис. 1

Характеристическое сопротивление симметричного четырёхполюсника

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}} = \sqrt{\frac{20 + j10}{j0,1}} = 14,95e^{-j31,75^\circ} = (12,75 - j7,87) \text{ Ом.}$$

Постоянная передачи  $\underline{\Gamma}$

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= a + jb = \ln(A + \sqrt{BC}) = \ln\left[1 + j + \sqrt{(20 + j10)j0,1}\right] = \\ &= \ln 2,9b^{j51,75^\circ} = \ln 2,9e^{j0,9}; \\ a &= \ln 2,9 = 1,06 \text{ Нп}; \quad b = 0,9 \text{ рад} = 51,75^\circ. \end{aligned}$$

При расчётах по приведённым формулам постоянную ослабления выражают в неперах (Нп), а постоянную фазы – в радианах (рад). Измерительную аппаратуру градуируют в децибелах и градусах, причём 1 Нп = 8,68 дБ; 1 дБ = 0,115 Нп; 1 рад = 57,3°; 1° = 0,017452 рад.

#### **Оборудование и приборы**

1. Генератор НЧ.
2. Миллиамперметр переменного тока 0,2 А.
3. Вольтметр переменного тока 10 В.
4. Осциллограф.

#### **Порядок выполнения работы**

1. Собрать цепь согласно рис. 2. В качестве  $Z_{1Г}$ ,  $Z_{2Г}$  и  $Z_{0Г}$  взять резисторы и конденсатор из состава стенда, удовлетворяющие условию  $Z_{1Г} \approx Z_{2Г} \approx Z_{0Г}$  на частоте 1 кГц. Нагрузку  $\underline{Z}_c$  не подключать. В качестве датчиков тока  $R_d$  использовать низкоомные резисторы сопротивлением 0,5...1,0 Ом (знать точное значение не обязательно). Провести расчёты коэффициентов  $\underline{A}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{D}$ , а также параметров  $\underline{Z}_c$ ,  $a$  и  $b$  по значениям элементов на частоте 1 кГц. Установить выходное напряжение генератора в пределах 5...10 В, в дальнейшем поддерживать его постоянным.

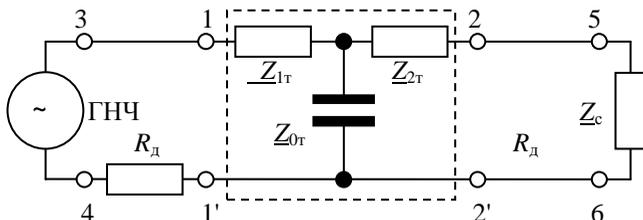


Рис. 2

2. Вместо переключки 3-1 включить миллиамперметр, к зажимам 1-1' четырёхполюсника подключить вольтметр, к точке 1 подключить вход канала *A*, к точке 4 подключить вход канала *B* двухканального осциллографа. Провести измерения напряжения  $U_{1x}$  и тока  $I_{1x}$  на входе четырёхполюсника, а также фазовый сдвиг между напряжением и током  $\Delta t_{1x}$  в режиме холостого хода. Внести данные в табл. 1.

3. Замкнуть накоротко зажимы 2-2' четырёхполюсника, повторить действия п. 2, измерив и записав в табл. 1 напряжение  $U_{1k}$  и ток  $I_{1k}$  на входе четырёхполюсника, а также временной сдвиг между напряжением и током  $\Delta t_{1k}$  в режиме короткого замыкания.

**Таблица 1**

Режим	Измерения			Вычисления	
	$U_1$	$I_1$	$\Delta t_1$	$\varphi_1$	$Z$
	В	мА	мс	град	Ом
ХХ					
КЗ					

4. Рассчитать  $\varphi_x$ ,  $\varphi_k$ ,  $Z_x$  и  $Z_k$  по формулам

$$\varphi = (2\pi \Delta t)/T \text{ рад или } \varphi = (360 \Delta t)/T \text{ град, } T = 1/f, Z = U/I, Z = Ze^{j\varphi}.$$

Внести данные в табл. 1.

5. По известным значениям  $R$ ,  $C$ ,  $f$  вычислить величины  $Z_T = Z_{1T} = Z_{2T}$  и  $Z_{0T}$ , а также коэффициенты  $A = \underline{D}$ ,  $B$ ,  $C$ , характеристическое сопротивление  $Z_c = R_c + jX_c$ , постоянную передачи  $\underline{\Gamma}$ , постоянную ослабления  $a$  и постоянную фазы  $b$  по формулам, приведённым ранее. Внести данные в табл. 2.

**Таблица 2**

$Z_T$	$Z_{0T}$	$A$	$B$	$C$	$Z_c$	$R_c$	$X_c$	$\underline{\Gamma}$	$a$		$b$	
Ом	–	Ом	См	Ом				Нп	дБ	рад	град	

6. Разомкнуть переключку 2-5, на её место включить второй миллиамперметр. Подключить к клеммам 5, 6 нагрузку  $Z_c = R_c + jX_c$ , составленную из резисторов и конденсаторов стенда. К зажимам 2-2' подключить второй вольтметр. К точке 1 подключить вход канала *A*, к точке 2 подключить вход канала *B* осциллографа. Провести измерения  $U_{1c}$ ,  $U_{2c}$ ,  $I_{1c}$ ,  $I_{2c}$ ,  $\Delta t_{12c}$  (напряжения и токи на входе и выходе четырёхполюсника, а также временной сдвиг между входным  $U_{1c}$  и выходным  $U_{2c}$  напряжениями при согласованной нагрузке  $Z_{in} = Z_c$ ). Внести данные в табл. 3.

Таблица 3

Измерения					Вычисления		
$U_{1c}$	$U_{2c}$	$I_{1c}$	$I_{2c}$	$\Delta t_{12c}$	$\ln(U_{1c}/U_{2c})$	$\ln(I_{1c}/I_{2c})$	$\varphi_{12}$
Ом		мА		мс	–	–	град

7. Вычислить величины  $\ln(U_{1c}/U_{2c})$ ,  $\ln(I_{1c}/I_{2c})$ ,  $\varphi_{12}$ . Сравнить эти значения с полученными ранее значениями  $a$  и  $b$ . Объяснить различие результатов.

8. Выполнить эксперименты в программе **EWB**. Открыть файл lab\_4pol.ewb. Схема цепи соответствует рис. 3. Установить значения элементов цепи лабораторного стенда  $Z_{1r}$ ,  $Z_{2r}$ ,  $Z_{0r}$ .

9. Переключатель  $S_1$  установить в положение [ВЫКЛ] с помощью клавиши [ПРОБЕЛ]. Включить питание. Провести измерения в режиме холостого хода: напряжения  $U_{1x}$  и тока  $I_{1x}$  на входе четырёхполюсника, фазовый сдвиг между напряжением и током  $\Delta t_{1x}$  с помощью осциллографа, а также угол  $\varphi$  между напряжением  $U_{1x}$  и током  $I_{1x}$  с помощью Боде-плоттера в режиме фазометра. Внести данные в табл. 4.

Таблица 4

Режим	Измерения				Вычисления	
	$U_1$	$I_1$	$\Delta t_1$	$\varphi_1$	$\varphi_1$	$Z$
	В	мА	мс	град	град	Ом
ХХ						
КЗ						

10. Переключатель  $S_1$  установить в положение [ВКЛ] с помощью клавиши [ПРОБЕЛ]. Повторить действия п. 9 для режима короткого замыкания на выходе.

11. Переключатель  $S_1$  установить в положение [ВЫКЛ] с помощью клавиши [ПРОБЕЛ]. Подключить параллельно вольтметру  $U_2$  согласованную нагрузку  $Z_c = R_c + jX_c$ , составленную по данным табл. 2. Включить питание.

Провести измерения  $U_{1c}$ ,  $U_{2c}$ ,  $I_{1c}$ ,  $I_{2c}$ ,  $\Delta t_{12c}$  и  $\varphi_{1c}$  (напряжения и токи на входе и выходе четырёхполюсника, а также временной и угловой сдвиг между входным  $U_{1c}$  и выходным  $U_{2c}$  напряжениями при согласованной нагрузке  $Z_{н} = Z_c$ ). Внести данные в табл. 5.

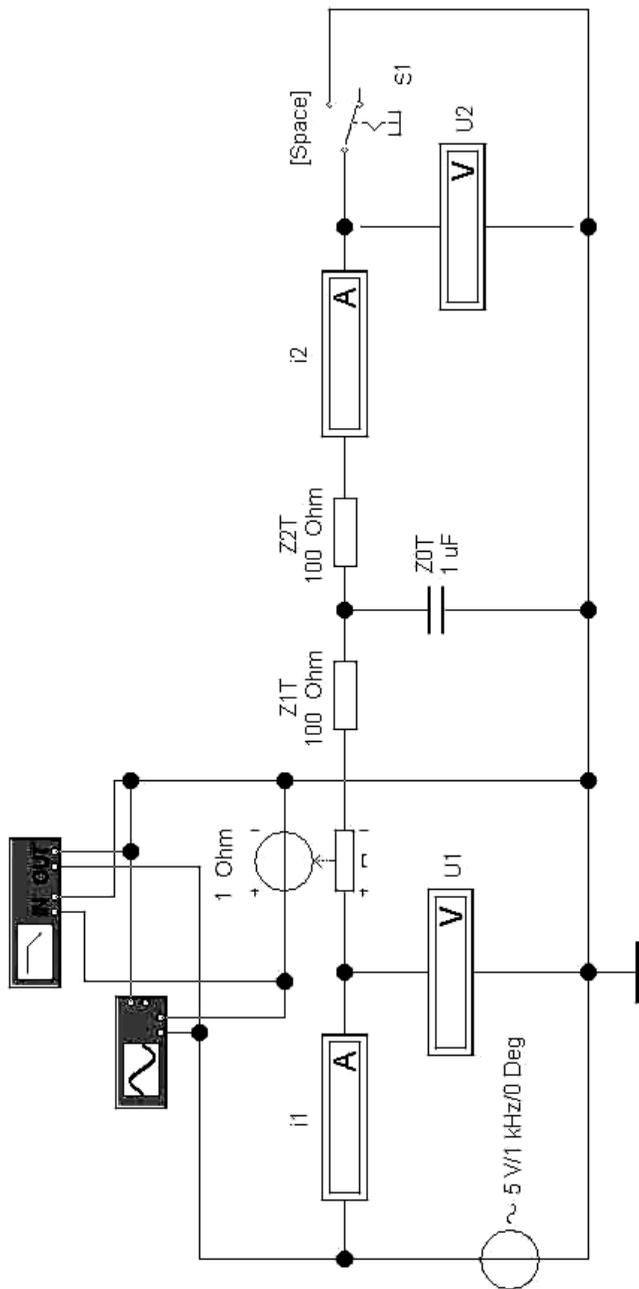


Рис. 3

12. Вычислить величины  $\ln(U_{1c}/U_{2c})$ ,  $\ln(I_{1c}/I_{2c})$ ,  $\varphi_{12}$ . Сравнить эти значения с полученными ранее значениями  $a$  и  $b$ . Объяснить различие результатов. Данные внести в табл. 5.

**Таблица 5**

Измерения						Вычисления		
$U_{1c}$	$U_{2c}$	$I_{1c}$	$I_{2c}$	$\Delta I_{12c}$	$\varphi_{1c}$	$\ln(U_{1c}/U_{2c})$	$\ln(I_{1c}/I_{2c})$	$\varphi_{12}$

### Содержание отчёта

1. Схемы исследуемых электрических цепей.
2. Заполненные таблицы с результатами измерений.
3. Результаты расчётов.
4. Выводы.

### Контрольные вопросы

1. Какими величинами характеризуется четырёхполосник?
2. Какие существуют формы записи уравнений четырёхполосника?
3. Каков физический смысл параметров  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$   $A$ -формы записи четырёхполосника?
4. Каким образом можно рассчитать параметры четырёхполосника по опытам холостого хода и короткого замыкания?
5. Какую величину называют характеристическим сопротивлением четырёхполосника?
6. Какую величину называют постоянной передачи четырёхполосника?
7. В чём заключается физический смысл постоянной ослабления и постоянной фазы?

## Лабораторная работа 10

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

**Цель работы.** Исследование свойств П-образного фильтра нижних частот и Т-образного фильтра верхних частот типа  $k$ .

**Объект исследования.** Электрическим фильтром называется четырёхполосник, предназначенный для пропускания от источника к нагрузке токов определённых частот и задерживания токов остальных частот. Диапазон частот, пропускаемых фильтром, называется полосой пропускания или полосой прозрачности, а диапазон частот, задержи-

ваемых фильтром, называется полосой затухания. Фильтр нижних частот (ФНЧ) имеет полосу пропускания от  $\omega = 0$  (постоянный ток) до  $\omega = \omega_c$ , а фильтр верхних частот (ФВЧ) от  $\omega = \omega_c$  до  $\omega = \infty$ .

Схема П-образного ФНЧ приведена на рис. 1, а схема Т-образного ФВЧ – на рис. 2.

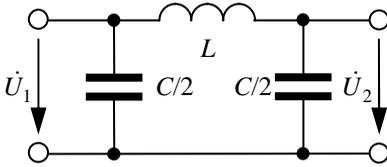


Рис. 1

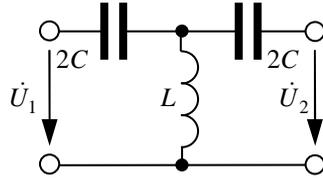


Рис. 2

Граничная частота полосы пропускания, или частота среза, определяется по формулам:

- для ФНЧ:  $\omega_c = 2/\sqrt{LC}$  или  $f_c = 1/\pi\sqrt{LC}$ ;
- для ФВЧ:  $\omega_c = 1/2\sqrt{LC}$  или  $f_c = 1/4\pi\sqrt{LC}$ .

Характеристическим сопротивлением фильтра (как и любого симметричного четырёхполюсника) называется сопротивление  $Z_c$ , которое обладает следующим свойством: если к выходным зажимам фильтра присоединить сопротивление  $Z_c$ , то его сопротивление со стороны входных зажимов также будет равно  $Z_c$ . Оно зависит от частоты:

- для П-образного ФНЧ:  $Z_c = k/\sqrt{1+(jf/f_c)^2}$ ;
- для Т-образного ФВЧ:  $Z_c = k\sqrt{1+(f_c/jf)^2}$ , где  $k = \sqrt{L/C}$ .

Из этих формул следует, что в полосе пропускания  $Z_c$  – активное сопротивление. В полосе затухания для обоих рассматриваемых фильтров  $Z_c$  – ёмкостное сопротивление, при граничной частоте для ФНЧ (режим холостого хода)  $Z_c \rightarrow \infty$ , для ФВЧ  $Z_c = 0$  (режим короткого замыкания).

Второй характеристикой фильтра является его постоянная передачи  $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$ , где  $\alpha$  – постоянная затухания;  $\beta$  – постоянная фазы. В согласованном режиме, т.е. когда нагрузкой фильтра является  $Z_c$ ,  $\dot{U}_1/\dot{I}_1 = \dot{U}_2/\dot{I}_2 = Z_c$ , следовательно,  $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = \dot{I}_1/\dot{I}_2 = e^{\dot{\gamma}} = e^{\alpha + j\beta}$ , но  $\dot{U}_1/\dot{U}_2 = (\dot{U}_1/\dot{U}_2) e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$ , где  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  – комплексные действующие значения первичного и вторичного напряжений, а  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – их начальные фазы. Аналогичное равенство можно записать и для токов. Значит,  $U_1/U_2 = I_1/I_2 = e^\alpha$ , откуда следует, что постоянная ослабления  $\alpha = \ln(U_1/U_2) = \ln(I_1/I_2)$ . Постоянная фазы представляет собой разность фаз напряжений (токов) на первичной и вторичной сторонах фильтра:  $\beta = \varphi_1 - \varphi_2$ .

В полосе пропускания постоянная ослабления  $\alpha = 0$ , т.е.  $U_1 = U_2$ ,  $I_1 = I_2$ . В полосе затухания постоянная ослабления  $\alpha > 0$ , т.е.  $U_1 > U_2$ ,  $I_1 > I_2$ . Если бы фильтр был идеальным, то в полосе затухания соблюдались бы условия  $U_2 = 0$ ,  $I_2 = 0$ .

Постоянная фазы в полосе пропускания для ФНЧ –  $\beta = \arccos[1 - 2(f_0/f_c)^2]$ , для ФВЧ –  $\beta = \arccos[1 - 2(f_c/f_0)^2]$ . Таким образом, для ФНЧ  $\beta > 0$ , т.е. первичное напряжение и ток опережают вторичное напряжение и ток на угол  $\beta$ , для ФВЧ  $\beta < 0$ , т.е. первичное напряжение и ток отстают от вторичного напряжения и тока на угол  $\beta$ .

В полосе затухания  $\beta = \pm 180^\circ$ , т.е. первичное и вторичное напряжения (токи) находятся в противофазе.

При выполнении работы в качестве ёмкостных элементов используются конденсаторы одинаковой ёмкости, а в качестве индуктивного элемента – катушка индуктивности  $L$ .

Измерение напряжения на входе фильтра производится электронным вольтметром, а сравнение напряжений на входе и выходе по амплитуде и фазе – с помощью двухлучевого осциллографа. Для определения затухания и разности амплитуд между двумя сигналами, одновременно наблюдаемыми на экране осциллографа, необходимо измерить отрезки  $p$ ,  $q$ ,  $U_1$ ,  $U_2$ , показанные на рис. 3, а затем найти угол  $\beta$  и постоянную затухания  $\alpha$  по формулам:  $\beta = 360^\circ p/q$ ;  $\alpha = \ln(U_1/U_2)$ . Сдвиг фаз между входными и выходными напряжениями можно определить по фигурам Лиссажу. Для этого переводят осциллограф из режима развёртки по времени  $Y(t)$  в двухкоординатный режим  $Y-X$ .

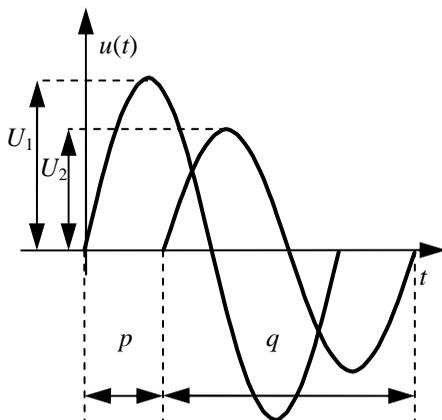


Рис. 3

При этом на обе пары отклоняющих пластин подают исследуемые напряжения: на одну пару – входное, на другую – выходное. Если напряжения, приложенные к парам пластин, синфазны, то фигурой Лиссажу будет прямая линия, при наличии сдвига фаз фигурой Лиссажу будет эллипс (рис. 4). Угол сдвига фаз может быть найден из соотношения  $|\sin\beta| = X/U_1 = Y/U_2$ , значения  $X$  и  $A$  или  $Y$  и  $B$  измеряют в делениях шкалы осциллографа.

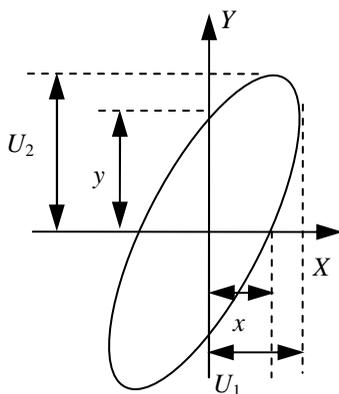


Рис. 4

### Порядок выполнения работы

#### *Выполнение на лабораторном стенде*

1. Записать значения индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$  исследуемого фильтра.
2. Определить расчётным путём его граничную частоту  $f_c$ .
3. Для П-образного ФНЧ определить частоту  $f_1$ , при которой  $Z_c = R_1$ . Для Т-образного ФВЧ определить частоту  $f_2$ , при которой  $Z_c = R_2$ ;  $R_1, R_2$  – сопротивления нагрузки из состава лабораторного стенда.
4. Определить постоянную фазы  $\beta$  для частоты  $f_1$ , найденной в п. 3.
5. Собрать схему для исследования П-образного ФНЧ (рис. 5) и найти экспериментально граничную частоту  $f_c$ . Оставить разомкнутыми выходные зажимы ФНЧ (режим холостого хода) и присоединить вольтметр к входным зажимам для измерения  $U_1$ . Установить на генераторе НЧ частоту  $f_c$ , вычисленную в п. 2, и сравнить на экране осциллографа напряжения  $U_1$  и  $U_2$ . Если они отличаются по амплитуде, добиться их равенства, изменяя частоту генератора. Записать полученное значение частоты  $f_{c \text{ эксп}}$ .

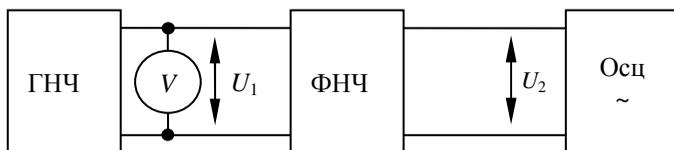


Рис. 5

6. Присоединить к выходным зажимам П-образного ФНЧ (рис. 6) резистор  $R_1$ , установить на генераторе частоту  $f_1$ , вычисленную в п. 3. К входным зажимам фильтра присоединить вольтметр. На экране осциллографа сравнить осциллограммы напряжений  $U_1$  и  $U_2$ . Если они отличаются по амплитуде, добиться их равенства, изменяя частоту генератора. Записать полученное значение частоты  $f_{1 \text{ эксп}}$ . По осциллограмме определить разность фаз напряжений  $U_1$  и  $U_2$  при частоте  $f_{1 \text{ эксп}}$ . Сравнить с постоянной фазы  $\beta$ , определённой в п. 4.

7. Собрать схему исследуемого Т-образного ФВЧ (рис. 7) и найти экспериментально граничную частоту  $f_c$ . Соединить между собой выходные зажимы ФВЧ (режим короткого замыкания) и присоединить вольтметр к входным зажимам для измерения  $U_1$ . Установить на генераторе НЧ частоту  $f_c$ , вычисленную в п. 2, и сравнить на экране осциллографа напряжения  $U_{c1}$  и  $U_{c2}$ . Если они отличаются по амплитуде, добиться их равенства, изменяя частоту генератора. Записать полученное значение частоты  $f_{c \text{ эксп}}$ .

8. Аналогично п. 6 определить  $f_{1 \text{ эксп}}$  и  $\beta$  для Т-образного ФВЧ при  $Z_c = R_2$  (рис. 8).

9. Повторить действия п. 6 и 8. Измерить напряжения: для ФНЧ –  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_L$ ; для ФВЧ –  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_L$ ,  $U_{c1}$  и  $U_{c2}$ .



Рис. 6

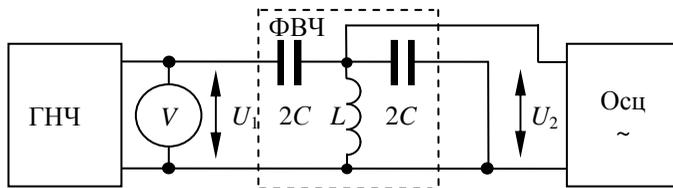


Рис. 7

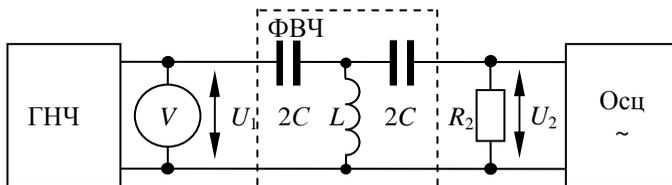


Рис. 8

10. По данным п. 9 построить топографическую диаграмму фильтров, совмещённую с векторной диаграммой всех токов, протекающих по его элементам и в сопротивлении нагрузки. (Действующие значения токов определить расчётным путём.)

### Компьютерное моделирование

В электронном варианте работы выбрать  $L = 100$  мГн и  $C = 1$  мкФ. Исследование ФНЧ проводить по схеме, приведённой на рис. 9.

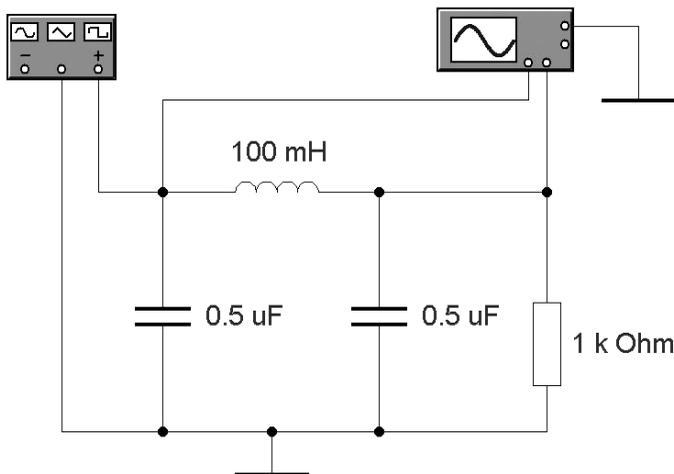


Рис. 9

Сопротивление нагрузки ФНЧ выбрать из расчёта  $R \gg k \approx 316$  Ом, например 1 кОм.

Исследование ФВЧ проводить по схеме, приведённой на рис. 10.

Сопротивление нагрузки ФВЧ выбрать из расчёта  $R \approx k \approx 316$  Ом, например 300 Ом.

Выполнить п. 1 – 10.

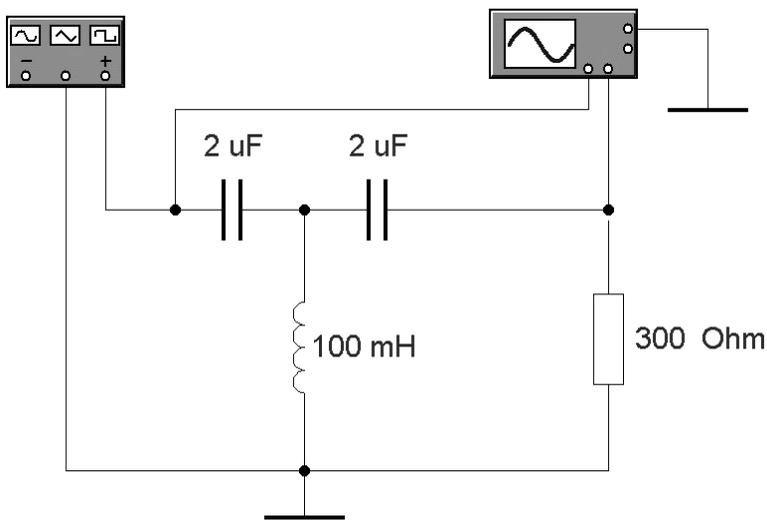


Рис. 10

### Контрольные вопросы

1. Что такое электрический фильтр?
2. По каким признакам классифицируются фильтры и как в соответствии с этим называются?
3. Что такое постоянная затухания фильтра?
4. Что такое постоянная фазы фильтра?
5. Что такое характеристическое сопротивление фильтра?
6. Как экспериментально определить граничную частоту?
7. Как зависит постоянная затухания ФНЧ и ФВЧ от частоты?
8. Каково назначение фильтров и где они применяются?
9. Как объяснить несоответствие экспериментальных и теоретических данных?

## Лабораторная работа 11

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПЕЙ С НЕСИНУСОИДАЛЬНЫМИ ТОКАМИ

**Цель работы.** Экспериментальная проверка метода разложения периодической несинусоидальной функции в тригонометрический ряд Фурье; исследование работы линейной цепи при воздействии несинусоидального периодического напряжения.

**Объект исследования.** Если несколько источников напряжения с разными частотами  $0, \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$ , амплитудами  $U_{m1}, U_{m2}, U_{m3}$  и начальными фазами  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  присоединить последовательно к линейной цепи  $R$ , то напряжение и ток в этой цепи окажутся несинусоидальными.

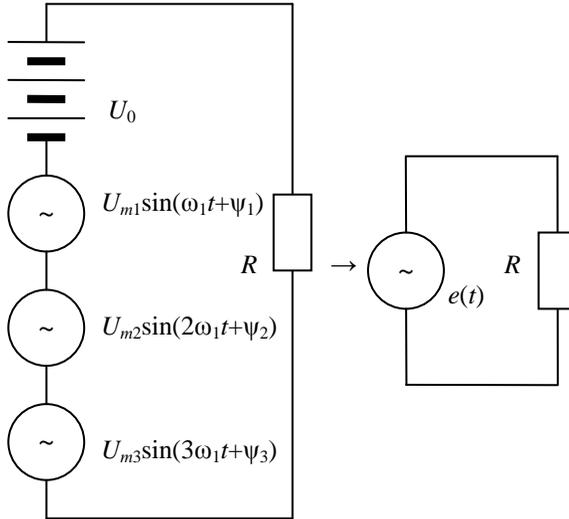


Рис. 1

Можно также считать, что на цепь (рис. 1) воздействует только одна несинусоидальная периодическая ЭДС  $e(t)$ , которую можно представить в виде ряда

$$e(t) = U_0 + U_{m1}\sin(\omega_1 t + \psi_1) + U_{m2}\sin(2\omega_1 t + \psi_2) + U_{m3}\sin(3\omega_1 t + \psi_3).$$

Первый член ряда  $U_0$  называют *постоянной составляющей* или *нулевой гармоникой*. Второй член ряда  $U_{m1}\sin(\omega_1 t + \psi_1)$  – *первой* или *основной гармоникой*. Остальные члены ряда называют *высшими гармониками*, например наименования второго и третьего членов, а также их параметров следующие:

$U_{m2}\sin(2\omega_1 t + \psi_2)$  – вторая гармоника;

$U_{m3}\sin(3\omega_1 t + \psi_3)$  – третья гармоника,

где  $\omega_1 = 2\pi/T$  – основная частота;  $T$  – период несинусоидального периодического колебания;  $U_{m1}, U_{m2}, U_{m3}$  – амплитуды гармоник;  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  – начальные фазы гармоник.

Все сигналы, отличные от гармонических, называют *негармоническими*.

Из курса математики известно, что всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. ограниченная, имеющая за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд Фурье. Пусть переменная  $x$  связана с временем  $t$  соотношением

$$x = \omega t = 2\pi t/T,$$

где  $T$  – период функции во времени, при этом период функции по  $x$  равен  $2\pi$ .

Периодический сигнал  $x(t)$  может быть представлен:

1) одинарным рядом Фурье, когда

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin(k\omega t + \psi_k),$$

где  $k$  – номер гармоники ( $k = 1, 2, 3, \dots$ );  $X_k$  – амплитуда гармоники с номером  $k$ ;  $\psi_k$  – начальная фаза гармоники с номером  $k$ ;

2) двойным рядом Фурье, когда

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega t),$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая (нулевая гармоника);  $B_k, C_k$  – коэффициенты ряда ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ).

Для определения этих коэффициентов используются формулы

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(k\omega t) dt; \quad C_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(k\omega t) dt;$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Коэффициенты одинарного ряда находятся через коэффициенты двойного ряда:

$$X_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \quad \psi_k = \arctg\left(\frac{C_k}{B_k}\right).$$

Разложение в ряд Фурье не является математической абстракцией. В реальных электрических цепях при несинусоидальных токах или напряжениях эти гармоники реально существуют и могут быть выде-

лены с помощью резонансных цепей. Встречающиеся в электротехнике периодические кривые можно подразделить на две группы:

1) кривые произвольной (геометрически неправильной) формы, обычно задаваемые в виде графика; разложение их в ряд Фурье производят графоаналитическим методом;

2) кривые геометрически правильной формы (например, трапецидальной, треугольной, прямоугольной и др.).

Для анализа большинства цепей с несинусоидальными токами достаточно знать величину постоянной составляющей и нескольких первых гармоник ряда, которые можно регистрировать с помощью анализатора спектра.

Обычные измерительные приборы в силу своей инерционности могут измерять только усреднённые значения переменных токов и напряжений. Так, приборы магнитоэлектрической системы показывают величину постоянной составляющей, например напряжения

$$U_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \text{ где } T = 2\pi/\omega - \text{период несинусоидального напряжения.}$$

Приборы электромагнитной, электродинамической и тепловой системы показывают действующее (среднеквадратичное) значение изме-

ряемой величины:  $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$ . Несинусоидальный сигнал при-

нято также характеризовать с помощью коэффициента нелинейных искажений (коэффициента гармоник), который в общем случае опре-

$$\text{деляют как } K_{н.и} = \sqrt{\frac{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + \dots}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + U_5^2 + \dots}}.$$

### Порядок выполнения работы

Наиболее распространённые формы несинусоидального сигнала: треугольная, прямоугольная (двуполярное или однополярное напряжение), являющиеся частными случаями сигнала трапецидальной формы, а также сигналы, получаемые при одно- и двухполупериодном выпрямлении синусоидального напряжения, приведены в табл. 1 *a – e*. Здесь же даны формулы их разложения в ряд Фурье. Сигналы *b – c* могут быть получены с помощью функционального генератора (реального или виртуального), сигналы *d, e* получают на выходе одно- или двухполупериодного выпрямителей.

Таблица 1

	$f(\omega t) = \frac{4U_m}{\alpha\pi} \left( \sin \alpha \sin \omega t + \frac{1}{9} \sin 3\alpha \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\alpha \sin 5\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{8U_m}{\pi^2} \left( \sin \omega t - \frac{1}{9} \sin 3\omega t + \frac{1}{25} \sin 5\omega t - \frac{1}{49} \sin 7\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{4U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{U_m}{2} + \frac{2U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{U_m}{\pi} + \frac{2U_m}{\pi} \left( \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{1}{1.3} \sin 2\omega t - \frac{1}{3.5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t + \dots \right)$
	$f(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} + \frac{4U_m}{\pi} \left( \frac{1}{1.3} \cos 2\omega t - \frac{1}{3.5} \cos 4\omega t + \frac{1}{5.7} \cos 6\omega t + \dots \right)$

## Компьютерное моделирование

При выполнении виртуального эксперимента все типы исследуемых сигналов формируются двумя способами.

Способ 1 – с помощью функционального генератора, при необходимости дополненного источником постоянного напряжения (рис. 2), или с помощью выпрямителей.

Способ 2 – с помощью моделирующей цепи, схема которой приведена на рис. 3. Моделирование производится на основе первых четырех членов разложения в двойной ряд Фурье (номера гармоник могут не совпадать с номерами членов разложения в ряд Фурье)  $U_a$ ,  $U_b$ ,  $U_c$ ,  $U_d$ , при необходимости добавляется постоянная составляющая  $U_0$ .

По способу 1 получается сигнал, по форме близкий к идеальному. По способу 2 получается модель такого сигнала с некоторой степенью приближения к идеальному сигналу.

Количественной оценкой этого приближения служат амплитудные спектры и коэффициенты гармоник сигнала и его модели, полученные с помощью инструментальных средств программы **EWB**.

### 1. Запустить программу **EWB**.

Собрать цепь согласно схеме рис. 2. Положение переключателя  $S_1$  устанавливается по умолчанию клавишей [**Пробел**]. Форма сигнала соответствует п. б) табл. 1.

2. В командной строке выбрать параметры моделирования **Analysis\Fourier**, в открывшемся диалоговом окне выбрать точку анализа (**Output node** → б), частоту основной гармоники (**Fundamental frequency** → 1 kHz), число гармоник (**Number of harmonics** → 9) и нажать кнопку **Simulate**.

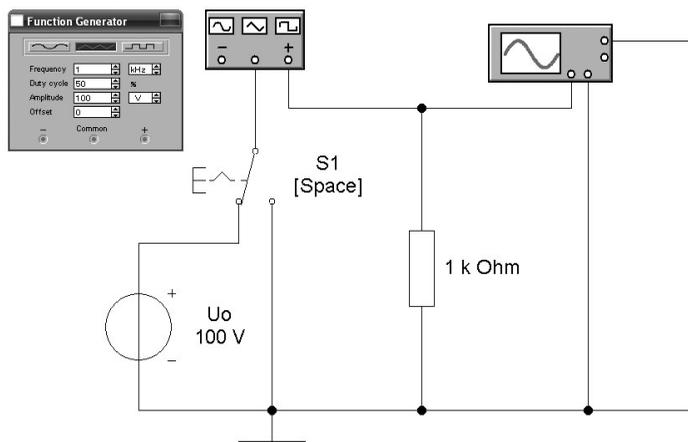


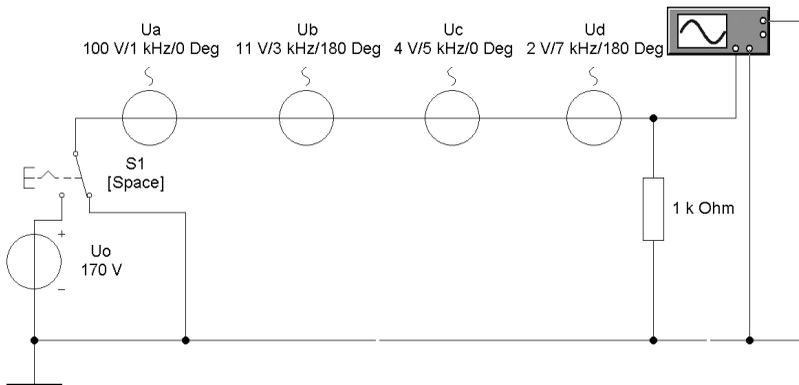
Рис. 2

В открывшемся окне в режиме **Fourier** появятся амплитудный спектр треугольного сигнала и суммарный коэффициент нелинейных искажений. Измерить амплитуды гармоник с первой по седьмую и коэффициент нелинейных искажений, данные занести в строку б) табл. 2.

*Примечание.* Постоянная составляющая  $U_0$  и некоторые, например чётные, гармоники могут отсутствовать ( $U_k = 0$  В).

**Таблица 2**

Сигнал	$U_0$ , В	$U_1$ , В	$U_2$ , В	$U_3$ , В	$U_4$ , В	$U_5$ , В	$U_6$ , В	$U_7$ , В	$K_{н.л.}$ , %
б)									
в)									
з)									
д)									



**Рис. 3**

3. Собрать цепь согласно схеме рис. 3. В этой цепи  $U_0 = U_2 = U_4 = U_6 = 0$  В,  $U_a$  соответствует первой (основной) гармонике  $U_1$ ,  $U_b$  – третьей гармонике  $U_3$ ,  $U_c$  – пятой гармонике  $U_5$ ,  $U_d$  – седьмой гармонике  $U_7$ . Амплитуды гармоник при моделировании выбрать следующим образом.

Амплитуду первой гармоники принять за 100% и взять значение напряжения  $U_a = 100$  В (в программе **EWB 5.12** это соответствует действительному значению напряжения источника  $U_a$ ). Амплитуды остальных гармоник задать относительно первой согласно разложению в ряд Фурье из табл. 1 п. б).

Повторить действия п. 2, данные занести в строку б) табл. 3.

Таблица 3

Модель сигнала	$U_0$ , В	$U_1$ , В	$U_2$ , В	$U_3$ , В	$U_4$ , В	$U_5$ , В	$U_6$ , В	$U_7$ , В	$K_{н.и.}$ , %
б)									
в)									
з)									
д)									

Сравнение результатов из соответствующих строк табл. 2 и 3 провести относительным способом, т.е. рассматривать не абсолютные значения напряжений  $U_0, U_1, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7$  для каждой таблицы, а отношение напряжений  $U_0:U_1:U_2:U_3:U_4:U_5:U_6:U_7$  в табл. 2 и 3.

4. Для выполнения заданий, соответствующих п. в) и з) табл. 1 – 3, использовать схемы цепей рис. 2 и 3 с изменениями параметров источников согласно разложению табл. 1 п. в) и з).

5. Собрать цепь согласно схеме рис. 4.

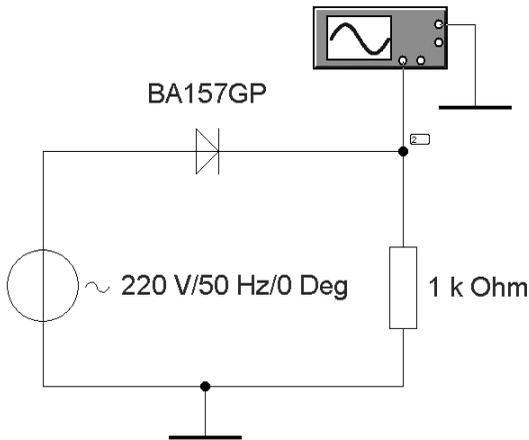


Рис. 4

6. Повторить действия п. 2, выбрав в диалоговом окне точку анализа **Output node**→2, данные занести в строку д) табл. 2.

7. Собрать цепь согласно схеме рис. 2. Переключатель  $S_1$  установить в положение, соответствующее включённому в цепь источнику постоянного напряжения  $U_0$ . Параметры  $U_0, U_a - U_d$  установить согласно пункту д) табл. 1.

8. Повторить действия п. 6.

Провести сравнительный анализ коэффициентов нелинейных искажений в исходных сигналах и их моделях. Выяснить причину расхождений, сделать выводы.

### **Выполнение на лабораторном стенде**

9. Собрать на лабораторном стенде цепь согласно схеме рис. 4. В качестве источника переменной ЭДС использовать генератор НЧ, в качестве диода – КД202А или аналогичный.

Изменяя напряжение генератора, установить амплитуду напряжения на сопротивлении нагрузки  $U_m = 10$  В (это облегчит дальнейшие расчёты). По полученной осциллограмме, используя формулы для определения постоянной составляющей и действующего значения напряжения, вычислить эти величины. Вычислить величины постоянной составляющей и амплитуд первых трёх гармоник по формулам определения  $A_0, B_k, C_k$ . Результаты занести в табл. 4.

**Таблица 4**

Напряжение	$U_m, \text{В}$	$U_0, \text{В}$	$U, \text{В}$	$U_{m1}, \text{В}$	$U_{m2}, \text{В}$	$U_{m3}, \text{В}$
Измерено						
Вычислено						

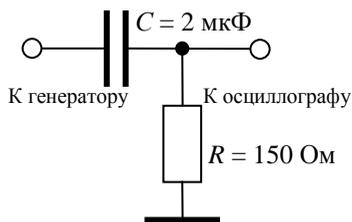
Полученный результат сравнить с соответствующими данными табл. 2 и 3, объяснить причину расхождений в результатах.

10. В собранной цепи заменить активную нагрузку  $R$  на последовательную  $RC$ -цепь, включив её так, как показано на рис. 5.

С помощью осциллографа зарегистрировать форму напряжения на резисторе и сравнить её с формой напряжения источника. Объяснить причину отличия.

11. Повторить опыт 10, заменив последовательную  $RC$ -цепь на последовательную  $RL$ -цепь (использовать катушку индуктивности из состава лабораторного стенда).

12. Повторить опыты 10 и 11, используя в качестве источника несинусоидальной ЭДС генератор прямоугольных импульсов лабораторного стенда.



**Рис. 5**

## Контрольные вопросы

1. По каким причинам возникают несинусоидальные токи и напряжения?
2. К каким последствиям может привести наличие высших гармоник в сети?
3. Изменится ли форма несинусоидального сигнала при прохождении его через цепь, содержащую реактивные элементы?
4. Какова роль конденсатора, включаемого последовательно в цепь несинусоидального тока? Изменяется ли при этом спектр сигнала?
5. В чём отличие спектров периодического синусоидального и несинусоидального сигналов?
6. Как определить активную, реактивную и полную мощности в цепях с несинусоидальными токами и напряжениями?
7. Составить моделирующую цепь согласно рис. 3 и задать параметры источников для сигналов п. а) и е) табл. 1.

## Лабораторная работа 12

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Цель работы.** Качественное исследование переходных процессов в последовательных  $RC$ - и  $RL$ -цепях; определение экспериментально и расчётным путём постоянной времени  $\tau$ , сравнение результатов; определение переходной характеристики цепи.

**Объект исследования.** При изменении параметров электрической цепи или режима её работы при наличии ёмкости или индуктивности происходит переход от одного установившегося режима работы к другому. Каждому состоянию цепи соответствует определённый запас энергии электрического и магнитного полей. В связи с тем, что при коммутации эта энергия не может меняться мгновенно, переход от одного режима работы к другому занимает некоторое время. Скорость протекания переходного процесса принято характеризовать постоянной времени цепи  $\tau$ , которая зависит от её параметров. Физический смысл постоянной времени заключается в том, что за это время амплитуда сигнала изменяется в  $e = 2,718\dots$  раз. Переходный процесс считается практически законченным через интервал времени, равный  $(3\dots 5)\tau$ .

Цепь с ёмкостным накопителем энергии приведена на рис. 1, а. При подаче на вход этой цепи прямоугольного импульса напряжения с амплитудным значением  $U_m$  ток в цепи и напряжения на элементах цепи изменяются по экспоненциальному закону:

$$i(t) = \frac{U_m}{R} e^{-t/\tau}; U_R(t) = U_m e^{-t/\tau}; U_C(t) = U_m (1 - e^{-t/\tau}),$$

где  $\tau = RC$  – постоянная времени цепи и может изменяться при варьировании  $R$  или  $C$ . Временные диаграммы напряжений и тока представлены на рис. 1, б – д.

Цепь с индуктивным накопителем энергии приведена на рис. 2, а. При подаче на вход этой цепи прямоугольного импульса напряжения  $U_m$  ток и напряжения на элементах цепи изменяются в соответствии с выражениями

$$i(t) = \frac{U_m}{R} (1 - e^{-t/\tau}); U_R(t) = U_m (1 - e^{-t/\tau}); U_C(t) = U_m e^{-t/\tau},$$

где  $\tau = L/R$  – постоянная времени цепи с индуктивностью.

Временные диаграммы напряжений и тока представлены на рис. 2, б – д. Входной сигнал в виде прямоугольного импульса напряжения представляет собой единичную функцию Хевисайда  $1(t)$  или единичную ступеньку (в пустой цепи её называют функцией включения), умноженную на амплитудное значение напряжения  $U_m$ , т.е.  $U_m \cdot 1(t)$ . В лабораторной работе формирование такого сигнала осуществляется с помощью генератора прямоугольных импульсов с  $U_m = 5$  В и регулируемой частотой. Временные диаграммы напряжений (см. рис. 2, б – д) регистрируются осциллографом и в дальнейшем анализируются.

При входном воздействии на цепь единичной функции  $1(t)$  реакция этой цепи выражается в виде переходной характеристики  $h_1(t)$ . Другими словами, переходная характеристика  $h_1(t)$  численно выражает реакцию «пустой» цепи на воздействие единичной ступеньки  $1(t)$ . Поэтому переходную характеристику можно определить как зависимость выходного напряжения от времени, вызванного воздействием на вход цепи ступеньки напряжения.

Подобно частотной характеристике цепи  $K(\omega)$ , переходная характеристика однозначно определяет свойство цепи. Для её экспериментального определения необходимо на вход цепи подать скачок напряжения с выхода генератора прямоугольных импульсов, затем с соответствующего выхода (с элемента цепи) подать напряжение на вход осциллографа и получить осциллограмму зависимости выходного напряжения от времени, т.е. переходную характеристику  $h_1(t)$ . При этом временная развёртка на осциллограмме должна быть такой, чтобы длительность импульса  $t_{\text{и}}$  уместилась по всей длине экрана.

Переходную характеристику можно теоретически рассчитать по формулам, приведённым в табл. 1. Практически  $h_1(t)$  применяется при анализе прохождения сложного сигнала через линейную цепь временным суперпозиционным методом (метод интеграла Дюамеля).

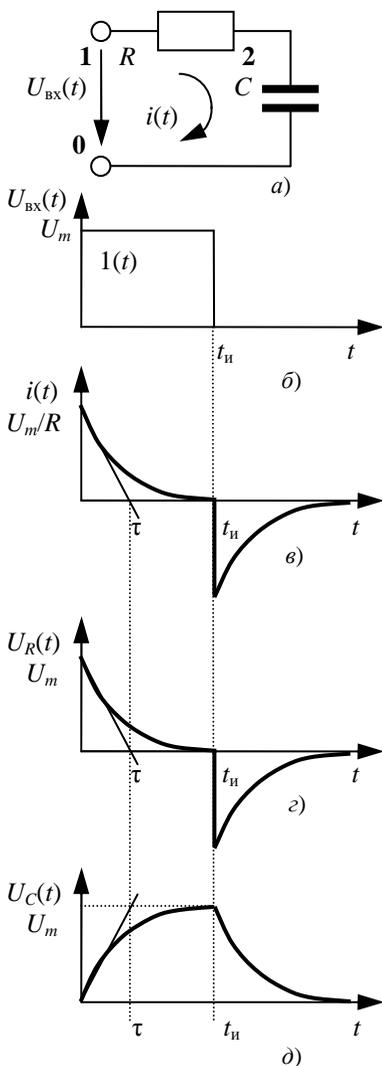


Рис. 1

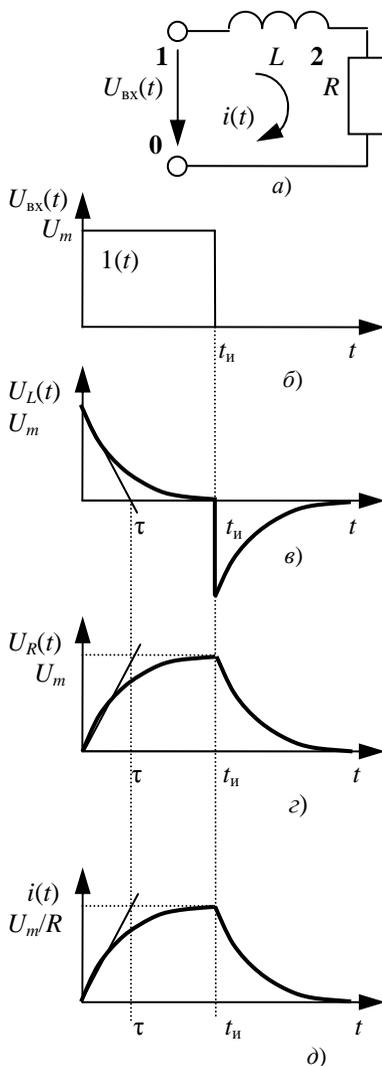


Рис. 2

Таблица 1

Электрическая цепь	$U_{\text{эле}}м$	Переходная характеристика $h_1(t)$
$RC$	$R$	$\exp(-t/RC)$
	$C$	$1 - \exp(-t/RC)$
$LC$	$R$	$1 - \exp(-t/RL)$
	$L$	$\exp(-t/RL)$

### Порядок выполнения работы

#### Выполнение на лабораторном стенде

1. Собрать схему с ёмкостным накопителем (см. рис. 1, *a*). Получить осциллограммы входного напряжения (точки 1–0), а также напряжения на конденсаторе  $C$  (точки 2–0). С экрана осциллографа срисовать кривые входного напряжения (точки 1–0) и выходного напряжения (точки 2–0). Аналогично снять кривые при значении ёмкости конденсатора  $C_1 = 2C$  и  $C_2 = C/2$ .

2. По результатам опыта в п. 1 графически определить постоянные времена  $\tau$  для цепей с различной ёмкостью и сравнить их с расчётными. При опытном определении  $\tau$  необходимо, приняв значение  $U_m$  за единицу, найти величину  $0,63U_m$ , отложить эту ординату и по графику напряжения найти соответствующую её абсциссу, т.е. время  $\tau$ . Полученные данные занести в табл. 2.

3. Собрать схему с индуктивным накопителем согласно рис. 2, *a*. Повторить действия п. 1, 2. Результаты занести в табл. 2.

*Примечание.* На экране осциллографа получается зависимость  $u_R(t)$ , качественно повторяющая зависимость  $i_L(t)$  согласно закону Ома.

Таблица 2

Накопитель	Номинал	$\tau_{\text{расч}}$	$\tau_{\text{эсп}}$
Ёмкостный	$C$		
	$2C$		
	$C/2$		
Индуктивный	$L$		

### Компьютерное моделирование

4. Собрать схему с ёмкостным накопителем (рис. 3). С экрана осциллографа снять кривые входного напряжения (точки 1–0) и выходного напряжения (точки 2–0). Повторить измерения при значении ёмкости конденсатора  $C_1 = 2C$  и  $C_2 = C/2$ . Определить постоянную времени  $\tau$  по приведённой в п. 2 методике. Полученные данные занести в табл. 3.

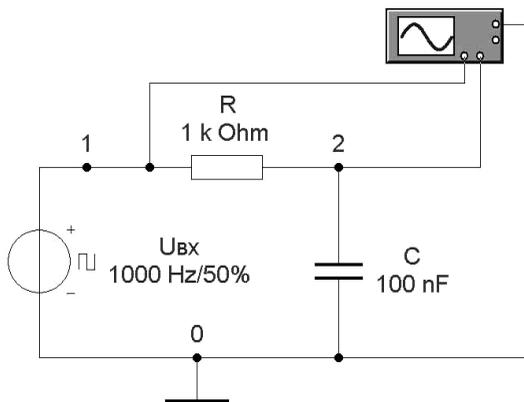


Рис. 3

Таблица 3

Накопитель	Номинал	$\tau_{\text{расч}}$	$\tau_{\text{эсп}}$
Ёмкостный	$C$		
	$2C$		
	$C/2$		
Индуктивный	$L$		
	$2L$		
	$L/2$		

5. Собрать схему с индуктивным накопителем (рис. 4). С экрана осциллографа снять кривые входного напряжения (точки 1–0) и выходного напряжения (точки 2–0).

*Примечание.* Осциллограмму тока  $i_L(t)$  получить с помощью преобразователя ток–напряжение  $D$ .

Снять кривые при значении индуктивности катушки  $L_1 = 2L$  и  $L_2 = L/2$ . Полученные данные занести в табл. 3.

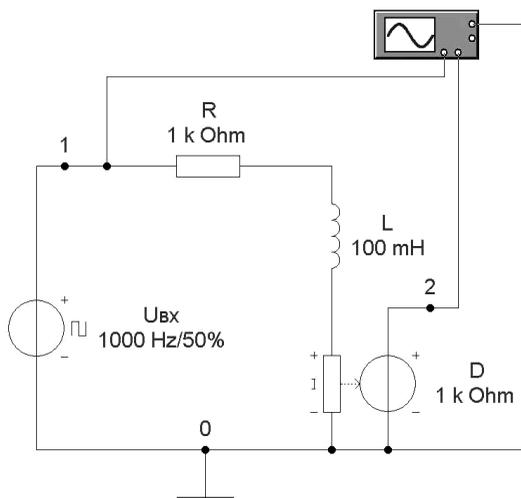


Рис. 4

### Контрольные вопросы

1. Как формулируются законы коммутации и на каком основании они выведены?
2. Что понимают под нулевыми начальными условиями?
3. В чём заключается классический метод расчёта?
4. Как определить постоянную времени экспериментально?
5. Как определить переходную характеристику цепи?
6. Чем определяется длительность переходного процесса?
7. Каким образом можно определить напряжения на элементах  $RL$ - и  $RC$ -цепи, если известна переходная характеристика?
8. Какая существует связь между передаточной  $K(\omega)$  и переходной  $h_1(t)$  характеристиками цепи?

### Лабораторная работа 13

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ И ИНТЕГРИРУЮЩИХ ЦЕПЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**Цель работы.** Исследование дифференцирующих и интегрирующих свойств  $RC$ - и  $RL$ -цепей.

**Объект исследования.** Дифференцирующей (обостряющей) называется цепь, в которой выходной сигнал является производной от второго сигнала. Реализовать дифференцирующую цепь можно с помощью последовательных  $RC$ -звена (рис. 1) или  $RL$ -звена (рис. 3). Более широко на практике используется  $RC$ -звено (см. рис. 1).

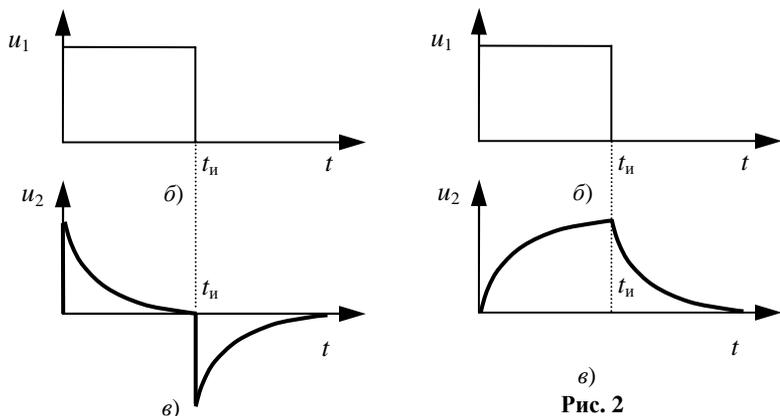
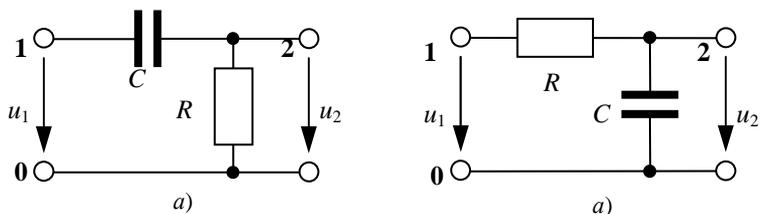


Рис. 1

Рис. 2

Пусть на вход схемы (см. рис. 1) подаётся прямоугольный импульс длительностью  $t_n$ . По второму закону Кирхгофа эта цепь описывается уравнением

$$u_1 = iR + \frac{1}{C} \int idt . \quad (1)$$

При условии  $t_n \gg \tau$ , где  $\tau = RC$ , в уравнении (1) первое слагаемое  $iR$  значительно меньше второго, и им можно пренебречь, т.е. приближённо можно записать  $u_1 = 1/C \int idt$ , откуда  $i = C \frac{du_1}{dt}$ , и напряжение на сопротивлении является дифференциалом входного напряжения:

$$u_2 = iR = RC \frac{du_1}{dt} = \tau \frac{du_1}{dt} . \quad (2)$$

Операция дифференцирования осуществляется тем точнее, чем меньше постоянная времени цепи по сравнению с длительностью импульса. Из (2) следует, что повышение точности дифференцирования ведёт к уменьшению амплитуды выходного сигнала. Практически достаточно, чтобы  $t_n \geq 10\tau$ . Если длительность входного импульса одного порядка с величиной  $RC$  или меньше её, то такая цепь не выполняет

операции дифференцирования, в этом случае она служит укорачивающей или фильтром высших частот.

Если для дифференцирования используется  $RL$ -цепь, то выходной сигнал снимается с индуктивности  $L$  и должно соблюдаться соотношение  $t_{и} \gg \tau$ . Графически зависимости входного и выходного сигналов для  $RL$ -цепей представлены на рис. 2.

Интегрирующая (растягивающая) цепь может быть реализована с помощью  $RC$ - и  $RL$ -цепей (рис. 2) и (рис. 4).

Схема рис. 3 описывается уравнением

$$u_1 = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (3)$$

При достаточно большой постоянной времени  $\tau = L/R$  первым слагаемым в уравнении (3) можно пренебречь, приняв приближённо, что  $u_1 = L di/dt$ . Тогда  $i = (1/L) \int u_1 dt$  и, соответственно,  $u_R = iR = (R/L) \int u_1 dt$ ,  $\tau \leq t \leq t_{и}$ . Для того чтобы выходной сигнал был интегральной функцией входного напряжения, снимать его надо с активного сопротивления  $R$ .

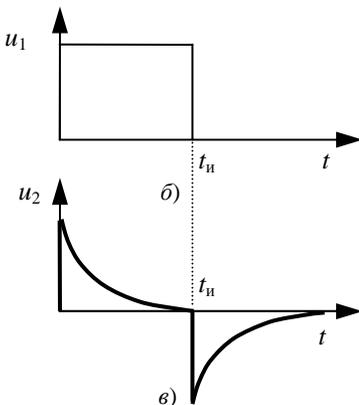
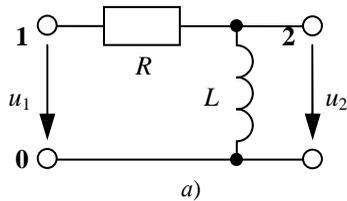


Рис. 3

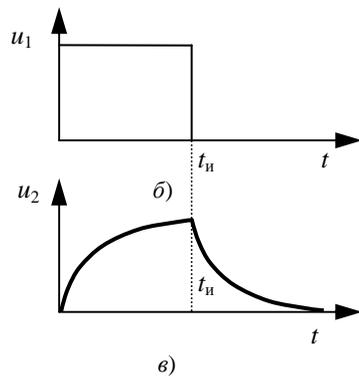
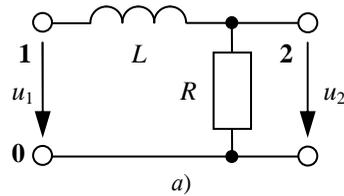


Рис. 4

Для качественного интегрирования в уравнении (3) слагаемое  $Ldi/dt$  должно быть по крайней мере на порядок выше, чем  $iR$ . Схема (см. рис. 4) будет являться интегрирующим звеном при условии  $t_{и} \gg \tau$ , а выходное напряжение снимается с конденсатора  $C$ . Если длительность входного сигнала  $t_{и}$  больше или равна  $L/R$ , то операция интегрирования выполняется неточно. В этом случае цепь является сглаживающей или фильтром низких частот. Экспериментальное исследование дифференцирующих и интегрирующих цепей проводится на тех же схемах, что и исследование переходных процессов.

### Порядок выполнения работы

**Выполнение на лабораторном стенде** – номера рисунков указаны без скобок.

**Компьютерное моделирование** – номера рисунков указаны в скобках.

1. Собрать схему рис. 1 (рис. 5). На генераторе установить частоту  $f = 500$  Гц, что соответствует длительности импульса  $t_{и} = 1$  мс. Задать значение ёмкости конденсатора  $C$ , соответствующее первой строке табл. 1. С экрана осциллографа снять кривые входного напряжения (точки 1–0) и выходного напряжения (точки 2–0). Заполнить первую строку табл. 1. Начертить осциллограммы входного и выходного напряжений.

2. Повторить действия п. 1 для второй и третьей строк табл. 1.

3. Собрать схему рис. 2 (рис. 6). Задать значение ёмкости конденсатора  $C$ , соответствующее первой строке табл. 2. С экрана осциллографа снять кривые входного напряжения (точки 1–0) и выходного напряжения (точки 2–0). Заполнить первую строку табл. 2. Начертить осциллограммы входного и выходного напряжений.

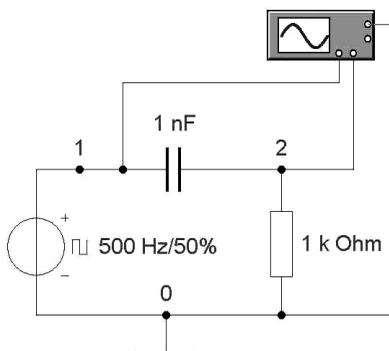


Рис. 5

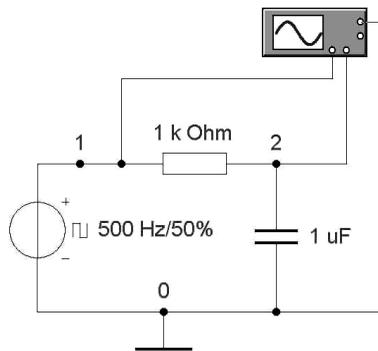


Рис. 6

4. Повторить действия п. 3 для второй и третьей строк табл. 2.

5. По результатам измерений и расчётов табл. 1 и 2 сделать выводы о точности выполнения операции и о величине выходного напряжения в зависимости от отношения  $\tau/t_{и}$ .

6. Проверить качественно возможность выполнения операций дифференцирования и интегрирования с помощью схем, изображённых на рис. 3 (рис. 7), рис. 4 (рис. 8).

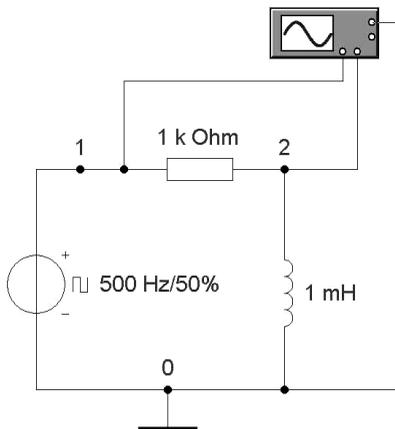


Рис. 7

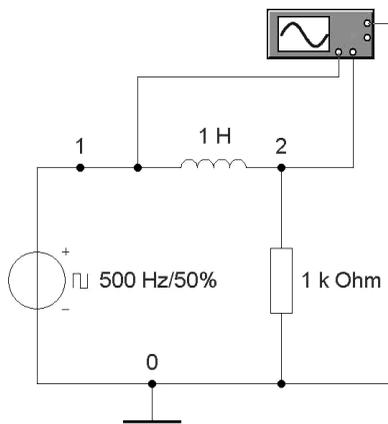


Рис. 8

Таблица 1

№	$t_{и}$	$R$	$C$	$\tau$	$\tau/t_{и}$	$U_{m\text{ ВХ}}$	$U_{m\text{ ВЫХ}}$
	с	Ом	Ф	с	—	В	В
1	$10^{-3}$	$10^3$	$10^{-9}$				
2			$10^{-8}$				
3			$10^{-7}$				

Таблица 2

№	$t_{и}$	$R$	$C$	$\tau$	$\tau/t_{и}$	$U_{m\text{ ВХ}}$	$U_{m\text{ ВЫХ}}$
	с	Ом	Ф	с	—	В	В
1	$10^{-3}$	$10^3$	$10^{-7}$				
2			$10^{-6}$				
3			$10^{-5}$				

## Контрольные вопросы

1. При каких условиях  $RL$ -цепь будет работать как дифференцирующая?
2. При каких условиях  $RC$ -цепь будет работать как интегрирующая?
3. Как можно оценить качество дифференцирования и интегрирования?
4. Почему амплитуда выходного сигнала в дифференцирующих и интегрирующих цепях меньше амплитуды входного сигнала?
5. Почему напряжения на конденсаторах и токи в катушках остаются неизменными в момент коммутаций?

## Лабораторная работа 14

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Цель работы.** Исследование апериодического и затухающего колебательного процессов в последовательном колебательном контуре; экспериментальное определение декремента затухания, добротности и сопротивления потерь в контуре.

**Объект исследования.** При воздействии на  $RLC$ -цепь постоянного напряжения в виде ступеньки  $U_m \cdot 1(t)$  конденсатор начинает заряжаться через  $RL$ -цепь током, характер изменения которого может быть как апериодическим, так и колебательным. Наиболее интересен и практически чаще реализуем колебательный процесс, т.е. получение затухающих гармонических колебаний, которые при переменном возмущающем входном напряжении являются незатухающими. Такое свойство  $RLC$ -цепи генерировать синусоидальные колебания различных частот (в зависимости от параметров цепи) используется в автогенераторах.

В общем случае любое колебательное движение физически описывается уравнением

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + kx = F,$$

где  $m$  – степень сопротивления системы внешним изменениям, её инертность (масса в механике, индуктивность в электромагнитных явлениях);  $k$  – степень стремления к положению равновесия, так называемая возвращающая сила (коэффициент упругости в механике,

$1/C$  – в электротехнике,  $C$  – ёмкость конденсатора);  $\alpha$  – степень замедления колебательного движения (трение в механике, активное сопротивление  $R$  в электротехнике);  $F$  – внешняя возмущающая сила (источник ЭДС в электротехнике).

Если  $F$  постоянна или отсутствует, то колебания называются собственными или свободными.

Основные параметры собственных колебаний определяются свойствами самой колебательной системы, т.е. значениями  $R$ ,  $L$  и  $C$ , за исключением амплитуды, которая задаётся начальной энергией источника. Поэтому изучение собственных колебаний позволяет определить основные параметры, характеризующие поведение колебательной системы в целом.

Уравнение собственных колебаний в контуре, схема которого представлена на рис. 1, выглядит так:

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0,$$

а его решение примет вид

$$u_c(t) = U_m e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $U_m$  и  $\varphi$  – константы, зависящие от начальных условий колебательного процесса;  $\delta$  – коэффициент затухания, равный  $R/2L$ ;  $\omega$  – частота

собственных колебаний,  $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ .

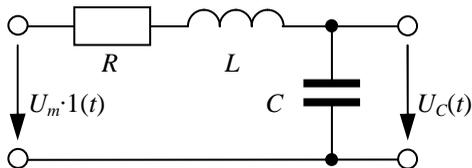


Рис. 1

Из решения видно, что напряжение на конденсаторе  $U_c(t)$  с течением времени изменяется по гармоническому закону, а амплитуда убывает по множителю  $e^{-\delta t}$ , т.е. по экспоненте.

Период колебаний определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Если  $R$  достаточно мало по сравнению с  $L$ , то членом  $R^2/4L^2$  можно пренебречь. Тогда получаются колебания с периодом  $T_0$  без затухания, т.е. резонансными:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Практически собственная частота колебаний в контуре совпадает по значению с резонансной частотой контура при малых потерях в нём, т.е. при высокой добротности. В качестве основной меры затухания вводится величина  $\theta$ , называемая логарифмическим декрементом затухания:

$$\theta = \ln e^{\delta T} = \delta T = TR/2L.$$

Практически  $\theta$  считается по осциллограмме свободных колебаний (рис. 2):

$$\theta = \ln \frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \ln \frac{U_{m1}}{U_{m2}}.$$

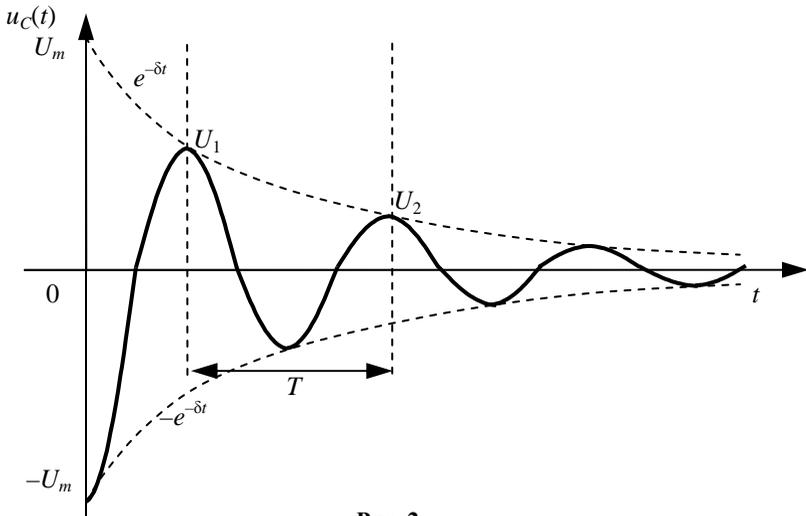


Рис. 2

Зная  $\theta$ , можно определить добротность контура  $Q$  и сопротивление потерь в контуре  $R$ :

$$\theta = \pi K \sqrt{L/C} = \pi R/\rho = \pi/Q.$$

В зависимости от  $\theta$  свободные колебания в контуре получают-ся слабо или сильно затухающими. Поэтому чем меньше  $R$  и чем больше  $L$ , тем меньше затухание, т.е. кривая напряжения на рис. 2

приближается к синусоиде с постоянной амплитудой. Вместе с тем период колебания  $T$  приближается к  $T_0$ . При значительном возрастании  $R$  затухание, так же как и период колебаний, увеличивается. При  $R \geq 2\rho = 2\sqrt{L/C}$ , где  $\rho$  – волновое сопротивление контура, процесс становится аperiodическим (рис. 3).

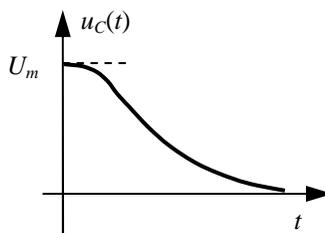


Рис. 3

### Порядок выполнения работы

#### Выполнение на лабораторном стенде

1. Собрать цепь согласно схеме рис. 4.

2. Ко входным зажимам цепи, обозначенным как  $U_m \cdot 1(t)$ , подключить генератор прямоугольных импульсов лабораторного стенда. К выходным зажимам цепи, обозначенным как  $U_C(t)$ , подключить осциллограф. Изменяя частоту и скважность импульсов, а также скорость развёртки осциллографа, получить устойчивое изображение нескольких периодов затухающих колебаний в контуре.

По осциллограмме определить декремент затухания  $\theta$ , добротность  $Q$ , потери в контуре  $R$ , период  $T$  и частоту колебания  $\omega$ , резонансную частоту  $\omega_0$ . Данные занести в табл. 1.

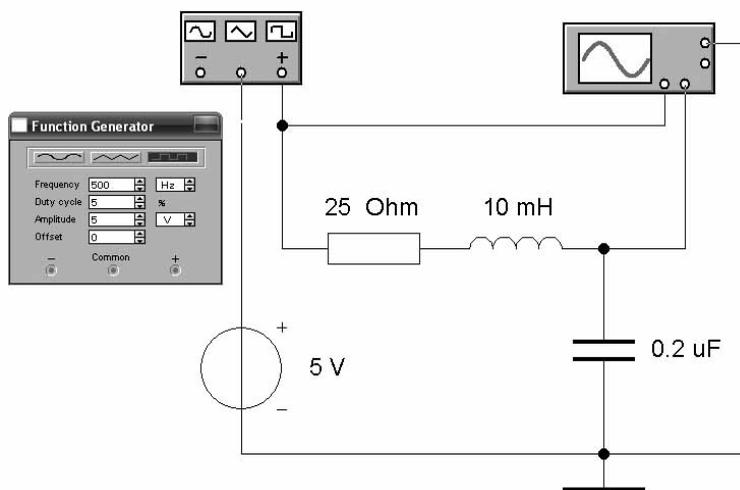


Рис. 4

**Таблица 1**

$RLC$	Измерено					Вычислено					
$R \leq \rho$	$T$	$\omega$	$\theta$	$Q$	$R$	$T$	$\omega$	$T_0$	$\omega_0$	$Q$	$R$

3. Рассчитать те же параметры контура по формулам, приведённым в работе, и сравнить их с опытными значениями. Данные занести в ту же таблицу.

4. Увеличить сопротивление потерь в контуре так, чтобы  $R \geq 2\rho$ .

5. Снять осциллограмму напряжения на конденсаторе и сравнить её с той, которая получена в п. 2. Сделать соответствующий вывод.

### **Компьютерное моделирование**

6. Запустить программу **EWB**. На рабочем поле в окне программы собрать цепь согласно рис. 4. Включить питание.

7. Повторить п. 2 – 5.

### **Контрольные вопросы**

1. Каким образом анализируется цепь второго порядка классическим способом?

2. Как получить уравнение свободных колебаний в контуре?

3. Как подсчитать переходную характеристику для  $RLC$ -цепи, если выходной сигнал снимается с сопротивления  $R$ ?

4. Что определяет декремент затухания и как он связан с параметрами контура?

5. Как изменится декремент затухания и длительность переходного процесса при увеличении активного сопротивления контура?

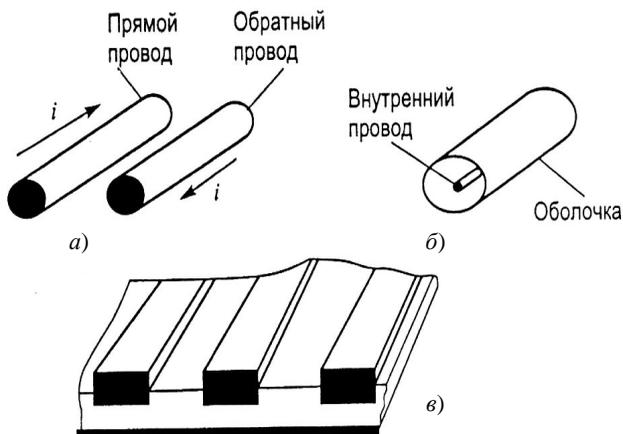
6. Какие методы применяются при анализе переходных процессов и в чём сущность этих методов?

## **Лабораторная работа 15**

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕПЕЙ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

**Цель работы.** Изучение стационарных режимов работы длинной линии при гармоническом воздействии. Моделирование распределения напряжения вдоль длинной линии при гармоническом воздействии в режиме стоячих и смешанных волн.

**Пояснения к выполнению работы.** Наряду с цепями с сосредоточенными  $R$ ,  $L$ ,  $C$ -параметрами широкое распространение имеют цепи, у которых электрические и магнитные поля распределены вдоль всей цепи, а также вдоль всей цепи происходит преобразование электромагнитной энергии в тепловую. Если электрические и магнитные поля распределены равномерно по всей цепи, то цепь считается однородной. Примерами цепей с распределёнными параметрами являются ЛЭП (линии электропередачи), линии связи, информационные линии. Конструктивно однородные цепи могут быть выполнены как двухпроводная линия (рис. 1, *а*), в виде коаксиального кабеля (рис. 1, *б*), в виде полосковой линии (рис. 1, *в*).



**Рис. 1**

Цепи с распределёнными параметрами характеризуются происходящими в них волновыми процессами. Напряжения и токи в них изменяются не только во времени, но и в пространстве:

$$u = u(t, x); i = i(t, x).$$

Если на входе цепи действует гармоническая ЭДС, то в любой точке цепи с координатой  $x$  значение напряжения повторяется через период  $T$ :

$$u(t, x) = u(t + T, x).$$

При этом в любой фиксированный момент времени  $t_0$  значение напряжения может повторяться в пространстве через некоторое минимальное расстояние  $\Delta l = \lambda$ :

$$u(t_0, x) = u(t_0, x + \lambda),$$

величина  $\lambda$  называется длиной волны.

Когда размеры элементов цепи малы по сравнению с длиной волны, их рассматривают как сосредоточенные. По мере уменьшения длины волны их размеры становятся соизмеримыми с длиной волны. Вследствие этого необходим переход к элементам с распределёнными параметрами с существенно отличными характеристиками.

На практике считают, что элемент цепи является сосредоточенным, если его размеры меньше  $0,1\lambda$ , и распределённым, если больше этой величины.

Длинными линиями называют линии, геометрическая длина которых  $l$  сравнима с длиной волны  $\lambda$ . Из этого следует, что для экспериментального исследования требуется или линия очень большой длины, или генератор сверхвысоких частот. И то и другое не входит в состав электротехнической лаборатории, поэтому изучение стационарных режимов работы длинной линии при гармоническом воздействии производится на основе компьютерного моделирования.

**Оборудование и приборы.** Персональный компьютер, ОС Windows, табличный процессор MS Excel.

### Порядок выполнения работы

1. Если заданы напряжение и ток в конце линии, то уравнения линии запишутся следующим образом (рис. 2):

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \cos \beta x + jZ_B \dot{I}_2 \sin \beta x ; \\ \dot{I}(x) &= j \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \sin \beta x + \dot{I}_2 \cos \beta x . \end{aligned}$$

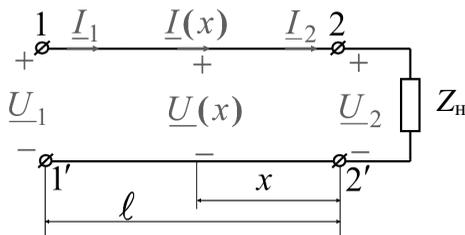


Рис. 2

В линии без потерь существует несколько наиболее характерных режимов работы.

2. Режим холостого хода, когда  $Z_n = \infty$  и  $I_2 = 0$  (рис. 3):

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \cos \beta x ; \quad \dot{I}(x) = j \frac{\dot{U}_2}{Z_B} \sin \beta x .$$

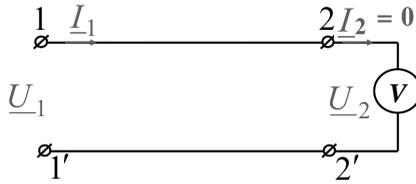


Рис. 3

Действующие значения напряжения и тока рассчитываются по формулам

$$U(x) = U_2 |\cos \beta x|; \quad I(x) = \frac{U_2}{Z_B} |\sin \beta x|.$$

Для удобства моделирования строятся графики распределения приведённых значений напряжения  $U/U_{\max}$  и тока  $I/I_{\max}$  по длине линии. Длина также берётся в относительных единицах:  $l_{\max} = 1$  (генератор на правом конце линии, нагрузка – на левом).

Согласно синтаксису **MS Excel** соотношения для  $U/U_{\max}$  и  $I/I_{\max}$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} &=ABS(COS(2*ПИ()*A2)); \\ &=ABS(SIN(2*ПИ()*A2)) \end{aligned}$$

На Листе 1 составить табл. 1.

С помощью средств **MS Excel** построить графики зависимостей  $U/U_{\max}$  и  $I/I_{\max}$  от относительной длины линии. Они должны соответствовать рис. 4. Анализ графиков позволяет сделать следующие заключения:

- а) в линии стоячие волны напряжения и тока;
- б) на конце линии ( $l_{\text{отн}} = 0$ ) наблюдаются пучность напряжения и узел тока;
- в) при стоячих волнах пучности и узлы неподвижны и сдвинуты друг относительно друга на  $\lambda/4$ .

3. Режим короткого замыкания, когда  $Z_n = 0$  и  $U_2 = 0$  (рис. 5):

$$\dot{U}(x) = jZ_B \dot{I}_2 \sin \beta x; \quad \dot{I}(x) = \dot{I}_2 \cos \beta x.$$

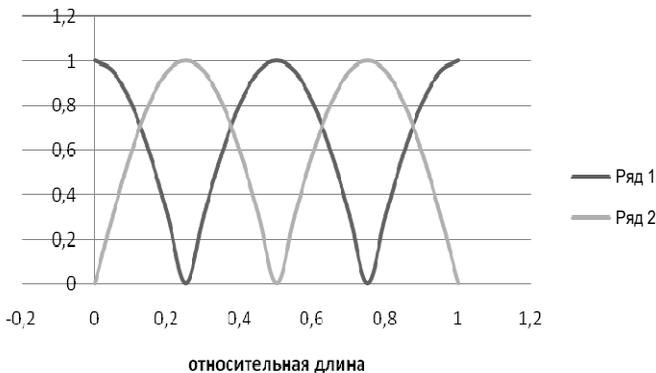
Действующие значения:

$$U(x) = Z_B \dot{I}_2 |\sin \beta x|; \quad I(x) = \dot{I}_2 |\cos \beta x|.$$

**Таблица 1**

Столбцы/строки	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	<i>x</i>	$U/U_{\max}$ (ряд 1)	$I/I_{\max}$ (ряд 2)
2	1	1	0
3	0,95	0,95105652	0,30901699
4	0,9	0,80901699	0,58778525
5	0,85	0,58778525	0,80901699
6	0,8	0,30901699	0,95105652
7	0,75	1,9601E-15	1
8	0,7	0,30901699	0,95105652
9	0,65	0,58778525	0,80901699
10	0,6	0,80901699	0,58778525
11	0,55	0,95105652	0,30901699
12	0,5	1	2,343E-15
13	0,45	0,95105652	0,30901699
14	0,4	0,80901699	0,58778525
15	0,35	0,58778525	0,80901699
16	0,3	0,30901699	0,95105652
17	0,25	2,0597E-15	1
18	0,2	0,30901699	0,95105652
19	0,15	0,58778525	0,80901699
20	0,1	0,80901699	0,58778525
21	0,05	0,95105652	0,30901699
22	-3,2E-16	1	2,0055E-15

**Холостой ход**



**Рис. 4**



Рис. 5

Для моделирования процесса на Листе 1 составить табл. 2, аналогичную табл. 1. Начать табл. 2 с ячейки А31, тогда расчётные формулы запишутся следующим образом:

$$=ABS(SIN(2*ПИ()*A32));$$

$$=ABS(COS(2*ПИ()*B32))$$

Построить графики зависимостей  $U/U_{\max}$  и  $I/I_{\max}$  от относительной длины линии и провести их анализ согласно п. 2 а), б), в).

4. Режим активной нагрузки (рис. 1,  $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}}$ ):

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_2 \left( \cos \beta x + j \frac{Z_{\text{в}}}{R_{\text{н}}} \sin \beta x \right);$$

$$\dot{I}(x) = \dot{I}_2 \left( \cos \beta x + j \frac{R_{\text{н}}}{Z_{\text{в}}} \sin \beta x \right).$$

В линии наблюдается режим смешанных волн. Действующие значения:

$$U(x) = U_2 \sqrt{\cos^2 \beta x + \frac{Z_{\text{в}}^2}{R_{\text{н}}^2} \sin^2 \beta x};$$

$$I(x) = \sqrt{I_2^2 \cos^2 \beta x + \frac{R_{\text{н}}^2}{Z_{\text{в}}^2} \sin^2 \beta x}.$$

5.  $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} = 2Z_{\text{в}}$ . На Листе 2 составить табл. 3, аналогичную табл. 1. Формулы для вычисления  $U/U_{\max}$  и  $I/I_{\max}$  записываются следующим образом:

$$=КОРЕНЬ(COS(2*ПИ()*A2)^2+0,25*SIN(2*ПИ()*A2)^2);$$

$$=КОРЕНЬ(COS(2*ПИ()*A2)^2+4*SIN(2*ПИ()*A2)^2).$$

Построить графики зависимостей  $U/U_{\max}$  и  $I/I_{\max}$  от относительной длины линии и провести их анализ согласно п. 2 а), б), в).

6.  $Z_{\text{н}} = R_{\text{н}} = 0,5Z_{\text{в}}$ . На Листе 2 составить табл. 4, аналогичную табл. 2. Формулы для вычисления  $U/U_{\text{max}}$  и  $I/I_{\text{max}}$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &= \text{КОРЕНЬ}(\text{COS}(2 * \text{ПИ}() * A32)^2 + 4 * \text{SIN}(2 * \text{ПИ}() * A32)^2); \\ &= \text{КОРЕНЬ}(\text{COS}(2 * \text{ПИ}() * A32)^2 + 0,25 * \text{SIN}(2 * \text{ПИ}() * A32)^2). \end{aligned}$$

Построить графики зависимостей  $U/U_{\text{max}}$  и  $I/I_{\text{max}}$  от относительной длины линии и провести их анализ согласно п. 2 а), б), в).

7. Режим реактивной нагрузки:

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{U}_2 \frac{\sin(\beta x + \sigma)}{\sin \sigma}; \\ \dot{I}(x) &= \dot{I}_2 \frac{\cos(\beta x + \sigma)}{\cos \sigma}. \end{aligned}$$

В линии наблюдается режим стоячих волн. Действующие значения:

$$\begin{aligned} U(x) &= U_2 \left| \frac{\sin(\beta x + \sigma)}{\sin \sigma} \right|; \\ I(x) &= I_2 \left| \frac{\cos(\beta x + \sigma)}{\cos \sigma} \right|. \end{aligned}$$

8.  $Z_{\text{н}} = jX$  (индуктивная нагрузка);  $X = 0,2\pi Z_{\text{в}}$ . На Листе 3 составить табл. 5, аналогичную табл. 1. Формулы для вычисления  $U/U_{\text{max}}$  и  $I/I_{\text{max}}$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &= \text{ABS}(\text{SIN}((2 * \text{ПИ}() * A2 + 0,2 * \text{ПИ}())) / \text{SIN}(0,2 * \text{ПИ}())); \\ &= \text{ABS}(\text{COS}((2 * \text{ПИ}() * A2 + 0,2 * \text{ПИ}())) / \text{COS}(0,2 * \text{ПИ}())). \end{aligned}$$

Построить графики зависимостей  $U/U_{\text{max}}$  и  $I/I_{\text{max}}$  от относительной длины линии и провести их анализ согласно п. 2 а), б), в).

9.  $Z_{\text{н}} = -jX$  (ёмкостная нагрузка);  $X = 0,2\pi Z_{\text{в}}$ . На Листе 3 составить табл. 6, аналогичную табл. 2. Формулы для вычисления  $U/U_{\text{max}}$  и  $I/I_{\text{max}}$  записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &= \text{ABS}(\text{SIN}((2 * \text{ПИ}() * A32 - 0,2 * \text{ПИ}())) / \text{SIN}(-0,2 * \text{ПИ}())); \\ &= \text{ABS}(\text{COS}((2 * \text{ПИ}() * A32 - 0,2 * \text{ПИ}())) / \text{COS}(0,2 * \text{ПИ}())). \end{aligned}$$

Построить графики зависимостей  $U/U_{\text{max}}$  и  $I/I_{\text{max}}$  от относительной длины линии и провести их анализ согласно п. 2 а), б), в).

## Содержание отчёта

1. Графики распределения  $U$  и  $I$  по длине линии.
2. Анализ зависимостей  $U(x)$  и  $I(x)$ .
3. Выводы.

## Контрольные вопросы

1. Какие цепи называются цепями с распределёнными параметрами? Привести пример таких цепей.
2. Какая величина называется длиной волны?
3. Какие параметры длинной линии называются первичными? Привести пример.
4. Пояснить устройство коаксиальной линии передачи.
5. Пояснить устройство двухпроводной линии передачи.
6. Вывести телеграфные уравнения для режима гармонических колебаний.
7. Что называется падающей и отражённой волнами в длинных линиях?
8. Вывести мгновенные значения напряжений прямой и обратной волн.
9. Вывести мгновенные значения токов прямой и обратной волн.
10. Что называется коэффициентом отражения по напряжению в конце линии?
11. Как зависит этот коэффициент от сопротивления нагрузки и волнового сопротивления?
12. Какие параметры называются вторичными? Привести пример. Что называется фазовой скоростью? Как она зависит от длины волны и периода?
13. Какие параметры называются  $S$ -параметрами? Привести пример вычисления  $S$ -параметров.
14. Пояснить режим работы линии без потерь.
15. Раскрыть физический смысл коэффициентов бегущей и стоячей волн (КБВ и КСВ).
16. Что называется четвертьволновым трансформатором? Привести его основные параметры.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

---

Подготовка студентов радиотехнических и электроэнергетических направлений начинается с углублённого изучения дисциплин, рассматривающих электромагнитные явления в электрических и магнитных цепях.

Студентам необходимо освоить большой объём теоретического материала, сопровождающегося многочисленными и весьма объёмными расчётами. Данное учебное пособие призвано помочь в решении этих задач.

Изложенный в сжатой форме теоретический материал освещает большинство аспектов, связанных с электромагнитными процессами и явлениями в электрических цепях. Лабораторный практикум способствует систематизации и закреплению теоретического материала. Компьютерная версия практикума может рассматриваться как дополнение к физическому эксперименту и выступает весьма полезной для студентов заочной и дистанционной форм обучения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. Атабеков, Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи : учеб. пособие / Г.И. Атабеков. – 7-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2009. – 592 с.
2. Атабеков, Г.И. Теоретические основы электротехники. Нелинейные электрические цепи. Электромагнитное поле : учеб. пособие / Г.И. Атабеков, С.Д. Купалян, А.Б. Тимофеев, С.С. Хухриков ; под ред. Г.И. Атабекова. – 6-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2010. – 432 с.
3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник / Л.А. Бессонов. – 10-е изд. – М. : Гардарики, 2002. – 638 с.
4. Бессонов, Л.А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов. – М. : Высшая школа, 1980. – 427 с.
5. Бронштейн, И.Н. Справочник по высшей математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендеев. – М. : Наука, 1986. – 483 с.
6. Калинин, В.Ф. Теоретическая электротехника : практикум / В.Ф. Калинин, В.М. Иванов. – М. : Изд-во Машиностроение-1, 2004. – 268 с.
7. Карлашук, В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Лабораторный практикум на базе Electronics Workbench и MATLAB / В.И. Карлашук. – М. : Солон-Р, 2004. – 799 с.
8. Ионкин, Н.А. Примеры и задачи по теоретическим основам электротехники / Н.А. Ионкин, Н.Н. Курдюков, Е.С. Кухаркин. – М. : Высшая школа, 1965. – 320 с.
9. Панфилов, Д.И. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях. Практикум на Electronics Workbench. В 2 т. Т. 1. Электротехника / Д.И. Панфилов, В.С. Иванов, И.Н. Чепурин. – М., 2001.
10. Прянишников, В.А. Электротехника и ТОО в примерах и задачах : практическое пособие / В.А. Прянишников, Е.А. Петров, Ю.М. Осипов. – СПб., 2003.
11. Чернышов, Н.Г. Моделирование и анализ схем в Electronics Workbench : учеб.-метод. пособие / Н.Г. Чернышов, Т.И. Чернышова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005. – 52 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

---

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ .....	4
Контрольные вопросы .....	9
2. АНАЛИЗ И РАСЧЁТ ПРОСТЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ .....	10
Контрольные вопросы .....	16
3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЁТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ .....	18
Контрольные вопросы .....	19
4. СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ .....	20
Контрольные вопросы .....	24
5. ТРЁХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ .....	26
5.1. Общие сведения о трёхфазных цепях .....	26
5.2. Симметричный режим работы трёхфазной цепи .....	29
5.3. Несимметричный режим работы трёхфазной цепи .....	32
5.4. Измерение мощности в трёхфазной цепи .....	36
5.5. Трёхфазное вращающееся магнитное поле .....	38
5.6. Несинусоидальные токи в трёхфазной цепи .....	42
5.7. Метод симметричных составляющих для расчёта несимметричных трёхфазных систем .....	43
6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ .....	55
Контрольные вопросы .....	62
7. РЕАКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ ТИПА $K$ .....	62
8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ .....	68
8.1. Режим бегущих волн (РБВ) .....	70
8.2. Режим стоячих волн (РСтВ) .....	71
8.3. Режим смешанных волн (РСмВ) .....	72
Контрольные вопросы .....	77
9. ЧАСТОТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ .....	80
Контрольные вопросы .....	82

10. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ. АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ ЦЕПЬ .....	83
Контрольные вопросы .....	85
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ .....	86
<b>Лабораторная работа 1.</b> Изучение линейных цепей постоянного тока .....	86
<b>Лабораторная работа 2.</b> Исследование неразветвлённых линейных цепей переменного синусоидального тока .....	91
<b>Лабораторная работа 3.</b> Исследование резонанса напряжений .....	97
<b>Лабораторная работа 4.</b> Исследование резонанса токов ....	101
<b>Лабораторная работа 5.</b> Исследование трёхфазных цепей при соединении приёмников звездой .....	105
<b>Лабораторная работа 6.</b> Исследование трёхфазных цепей переменного синусоидального тока при соедине- нии приёмников треугольником .....	111
<b>Лабораторная работа 7.</b> Изучение нелинейных цепей постоянного тока .....	115
<b>Лабораторная работа 8.</b> Исследование цепей с индук- тивно связанными элементами .....	119
<b>Лабораторная работа 9.</b> Исследование пассивных симметричных четырёхполюсников .....	121
<b>Лабораторная работа 10.</b> Исследование электрических фильтров .....	127
<b>Лабораторная работа 11.</b> Исследование цепей с несину- соидальными токами .....	133
<b>Лабораторная работа 12.</b> Исследование переходных процессов в линейных цепях первого порядка .....	142
<b>Лабораторная работа 13.</b> Исследование дифференци- рующих и интегрирующих цепей первого порядка .....	147
<b>Лабораторная работа 14.</b> Исследование переходного процесса в линейной цепи второго порядка .....	152
<b>Лабораторная работа 15.</b> Исследование цепей с распре- делёнными параметрами .....	156
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	164
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	165

Учебное издание

ВИНОКУРОВ Евгений Борисович,  
ИВАНОВ Владимир Михайлович,  
ЛАНОВАЯ Анна Владимировна,  
ЧЕРНЫШОВА Татьяна Ивановна

# ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ

## ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Учебное пособие

Редактор Е.С. Кузнецова  
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 03.09.2013.

Формат 60 × 84/16. 9,76 усл. печ. л. 100 экз. Заказ № 386

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14