Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

В.Н. МАТВЕЕВ

АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: 110800.62 «Агроинженерия», 190600.62 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 190700.62 «Технология транспортных процессов», 230700.62 «Прикладная информатика», 270100.62 «Архитектура», 280700.62 «Техносферная безопасность», 270800.62 «Строительство»

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2012

УДК 512.5:514.122(075.8)
ББК В14я73+В151.5я73
М333

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»
Е.С. Жуковский

Кандидат физико-математических наук,
доцент ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
А.В. Медведев

Матвеев, В.Н.

М333 Алгебра. Аналитическая геометрия : учебное пособие / В.Н. Матвеев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 96 с. – 300 экз. – ISBN 978-5-8265-1127-5.

Содержит теоретические основы высшей алгебры и аналитической геометрии, примеры решения стандартных задач и методический материал для проведения контрольной работы, завершающей изучение данной части дисциплины «Математика».

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальностям 110800.62 «Агроинженерия», 190600.62 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 190700.62 «Технология транспортных процессов», 230700.62 «Прикладная информатика», 270100.62 «Архитектура», 280700.62 «Техносферная безопасность», 270800.62 «Строительство».

УДК 512.5:514.122(075.8)
ББК В14я73+В151.5я73

ISBN 978-5-8265-1127-5

«…Теории – это сети, предназначенные улавливать то, что мы называем "миром", для осознания, объяснения и овладения им. Мы стремимся сделать ячейки сетей все более мелкими…»

Карл Поппер

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра – раздел математики, который можно охарактеризовать как обобщение и расширение арифметики. Слово «алгебра» также употребляется в названиях различных алгебраических систем. В более широком смысле под алгеброй понимают раздел математики, посвящённый изучению операций над элементами множества произвольной природы, обобщающий обычные операции сложения и умножения чисел. Методы алгебры являются основополагающими в научной структуре знаний.

Научные знания представляют собой сложную развивающуюся систему, в которой по мере эволюции возникают всё новые уровни организации. Они оказывают обратное воздействие на ранее сложившиеся уровни знания и трансформируют их. В этом процессе постоянно возникают новые приёмы и способы теоретического исследования, меняется стратегия научного поиска.

В своих развитых формах наука предстаёт как дисциплинарно-организованное знание, в котором отдельные отрасли – научные дисциплины (математика; естественно-научные дисциплины – физика, химия, биология и др.; технические и социальные науки) выступают в качестве относительно автономных подсистем, взаимодействующих между собой. Научные дисциплины возникают и развиваются неравномерно. В них формируются различные типы знаний, причём некоторые из наук уже прошли достаточно длительный путь теоретизации и сформировали образцы развитых и математизированных теорий, а другие только вступают на этот путь. Теоретическое исследование подразумевает применение особых методов: идеализация (метод построения идеализированного объекта); мысленный эксперимент с идеализированными объектами, который как бы замещает реальный эксперимент с реальными объектами; особые методы построения теории (восхождение от абстрактного к конкретному, аксиоматический и гипотетико-дедуктивный методы); методы логического и исторического исследования и др. При этом исследуемая система представляется в виде некоторой алгебраической структуры, содержащей несущие элементы (множества, наборы объектов); набор операций, выполняемых над перечисленными объектами, и связи, накладываемые на имеющееся множество объектов. Именно в первой главе пособия и раскрыты данные основания математики.

Во второй главе рассматривается, пожалуй, наиболее интересный и распространённый объект современных научных исследований – матрица. Это не культовый научно-фантастический боевик, снятый братьями Энди и Ларри Вачовски, а то, что само название, отражающее суть боевика, является отражением сложившегося отношения современного естествознания к данному объекту исследования. Именно во второй главе изучаются основы матричного исчисления.

В третьей главе объектом исследования выступают векторы – основа языка любого современного образованного человека, воспринимающего действительность во всем её многообразии и отходом от средневекового эпистолярного стиля восприятия знаний.

Основу четвёртой и пятой главы составляет реальная геометрия, соответственно планиметрия и стереометрия, но изложенная не с точки зрения аксиоматики Евклида, а с точки зрения современной алгебры.

Последний раздел определяет прагматический интерес любого естествоиспытателя к совершенным, простым и надёжным инструментам исследования, а с точки зрения математики, таковыми являются линейные пространства, линейные операторы и квадратичные формы.

В конце работы приведены задания для выполнения контрольной работы. Все задания выполнены автором пособия в среде MathCad и могут быть использованы для проверки усвоенного материала предлагаемого пособия. Пример выполнения и методика изложения решения для каждой из групп заданий рассмотрены в самом пособии, как соответствующие примеры, демонстрирующие теоретические положения. Имеются также методические указания для выполнения соответствующих заданий.

Раздел 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Алгебра – раздел математики, который можно охарактеризовать как обобщение и расширение арифметики. Слово «алгебра» также употребляется в названиях различных алгебраических систем. В более широком смысле под алгеброй понимают раздел математики, посвященный изучению операций над элементами множества произвольной природы, обобщающий операции сложения и умножения чисел.

Множеством называется любая совокупность различимых объектов, рассматриваемых как единое целое. Объекты, из которых состоит множество, называются элементами этого множества. В основе методов математики лежит метод абстрагирования – метод, основанный на мысленном выделении существенных свойств и связей предмета и отвлечении от других, частных его свойств и связей. Самой простейшей абстракцией в математике является множество натуральных чисел $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Для данного множества определялись операции сложения, умножения и вычитания из большего. Рассмотрение операции, обратной умножению, привело к появлению в математике множества рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$. Далее было уточнено понятие «нуля», появилось множество всех целых чисел $\boldsymbol{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, ...\}$, а развитие непрерывной математики привело к понятию множества вещественных чисел $\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$. Все эти множества чисел являются абстракциями реальных объектов, допускающих над собой операции типа «сложение» и «умножение». Существенное отличие первых трёх множеств от последнего заключается в самой их природе – они являются «счётными»: всегда известно, сколько элементов находится между двумя произвольно выбранными его элементами, что для множества вещественных чисел принципиально невозможно и поэтому оно было названо множеством «континуум». Практически используются конечные подмножества счётного множества и, как правило, непрерывные отрезки (полуотрезки) и интервалы (полуинтервалы) множества $\boldsymbol{R}$:

$$[a, b];\ (-\infty, b];\ [a, +\infty);\ (a, b];\ [a, b);\ (a, b);\ (a, +\infty);\ (-\infty, b)\,. \quad (1.1)$$

Множества обычно обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а элементы – строчными. Например: $A = \{a, b, ...\}$.

Если объект x является элементом множества A, то это обозначается как $x \in A$, а если не является, то это обозначается как $x \notin A$. Множества равны $(A = B)$, если состоят из одинаковых элементов.

Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B (случай $A = B$ не исключается), то A называется подмножеством множества B ($A \subset B$ или $A \subseteq B$).

Множество, не содержащее элементов, называется пустым и обозначается как $\varnothing$.

Множество, из которого выбираются элементы для проведения конкретных рассуждений, называется универсумом и обозначается U.

Число элементов в множестве A называется *мощностью множества* и обозначается $|A| = \mathrm{card}(A)$.

Множество всех подмножеств множества A называют булеаном и обозначают ß(A). $|$ß$(A)| = 2^{|A|}$.

Способы задания множества:

1) способ перечисления элементов: $A = \{a,\ b,\ 1,\ 0\}$, $B = \{a,\ b,\ ...\}$;

2) способ задания свойств элементов: $A = \{x \mid x - \text{green}\}$;

3) способ порождающей процедуры: $A = \{x \mid x = 2^k,\ k \in N\}$;

4) способ предикативного описания: $A = \{x \mid x > 5\}$.

Операции над множествами, диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1.1):

1) объединение множеств $C = A \cup B = \{\, c \mid c \in A$ или $c \in B \,\}$;

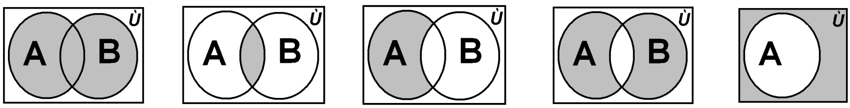
2) пересечение множеств $C = A \cap B = \{\, c \mid c \in A$ и $c \in B \,\}$;

3) разность множеств $C = A \setminus B = \{\, c \mid c \in A$ и $c \notin B \,\}$;

4) симметрическая разность $C = A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

5) дополнение множества $C = \overline{A} = \{c \mid c \notin A\}$.

Операции над множествами обладают свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.



1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) $A \setminus B$ 4) $A \oplus B$ 5) $\overline{A}$

Рис. 1.1. Операции над множествами

1.2. СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ

Пусть $x_i \in X_i,\ i = \overline{1,\ n}$. Кортежем *n*-го порядка $\langle x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \rangle$ называется упорядоченная последовательность *n* элементов $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$.

Декартовым (прямым) произведением множеств $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$ называется множество $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \left\{\langle x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \rangle \mid x_i \in X_i,\ i = \overline{1,\ n}\right\}$.

Проекция является обратной операцией декартового произведения, например: $\text{пр}_{X_i X_j}\left(X_1 \times ... \times X_i \times ... \times X_j \times ... \times X_n\right) = X_i \times X_j$.

Пусть $r = r\,(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ – некоторое свойство (предикат), заданное на множестве $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, тогда можно ввести понятие отношения $R : R = \left\{\langle x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \rangle \mid r(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)\right\} \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Аналогично определяется операция селекции над отношением *R*: $\sigma_F(R) = \left\{r \mid r \in R,\ F(r)\right\}$, где *F* – некоторое свойство.

Наиболее широко используются бинарные отношения (соответствия), составляющие основу реляционных (табличных) баз данных и позволяющие выполнять упорядочение и эквивалентные преобразования данных. Бинарным отношением *R* из множества *X* в множество *Y* называется подмножество прямого произведения множеств *X* и *Y*. Для бинарных отношений обычно используется *инфиксная запись* (*xRy*), когда отношение расположено между операндами. Область определения и область значений *R* определяются, соответственно, как $\text{пр}_X(R) \subseteq X$ и $\text{пр}_Y(R) \subseteq Y$. Если *X* = *Y*, то говорят, что *R* – это отношение на множестве *X* (или преобразование множества *X*).

Обратным называется отношение: $R^{-1} = \{\langle y,\ x \rangle \mid \langle x,\ y \rangle \in R\}$.

Дополнением называется отношение: $\overline{R} = \{\langle x,\ y \rangle \mid \langle x,\ y \rangle \notin R\}$.

Тождественным называется отношение: $I = \{\langle x,\ x \rangle \mid \forall x \in R\}$.

Универсальным называется отношение: $U = \{\langle x,\ y \rangle \mid x \in X,\ \ y \in Y\}$.

Пусть $P \subseteq X \times Y,\quad Q \in Y \times Z$. *Композицией P* и *Q* называется отношение $R = P \circ Q = \left\{\langle x,\ z \rangle \mid \exists y \in Y\left(xPy \wedge yQz\right),\ \ x \in X,\ \ z \in Z\right\} \subseteq X \times Z$, т.е. выбираются те пары *x* и *z*, между которыми есть связь по *y*.

Ядром отношения *R* называется отношение $Ker(R) = R \circ R^{-1}$.

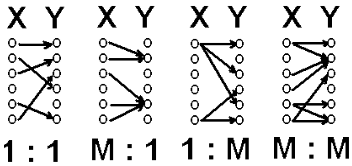


Рис. 1.2. Типы соответствий

Функциональные отношения. Известны четыре типа соответствий, приведенные на рис. 1.2.

Соответствия типа 1:1 и М:1 являются функциональными (или функциями), т.е. каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y \in Y$. Последнее обозначается как $R : X \to Y$. $R(x)$ – значение отображения R от элемента x (образ элемента x), а область значений определяется как $\text{пр}_Y(R) = R(X)$.

Отображение R называется *инъективным*, если выполнено: $\forall x_1, x_2 \in \text{пр}_X R\big((x_1 \neq x_2) \to (R(x_1) \neq R(x_2))\big)$, т.е. разные элементы переходят в разные.

Отображение R называется *сюръективным*, если $\text{пр}_Y(R) = Y$.

Отображение R называется *биективным* (или взаимно-однозначным), если оно *инъективно* и *сюръективно*.

Свойства отношения R на множестве X.

1. *Рефлексивность*: $\forall x \in X\,(xRx)$.
2. *Антирефлексивность*: $\forall x \in X\,(\overline{xRx})$.
3. *Симметричность*: $\forall a, b \in X\,(aRb \to bRa)$.
4. *Антисимметричность*: $\forall a, b \in X\,(aRb \wedge bRa \to (a = b))$.
5. *Транзитивность*: $\forall a, b, c \in X\,(aRb \wedge bRc \to aRc)$.
6. *Эквивалентность*: выполнение свойств 1, 3 и 5.
7. *Упорядоченность*: выполнение свойств 4 и 5.
8. *Строгая* упорядоченность: выполнение свойств 2 и 7.
9. *Нестрогая* упорядоченность: выполнение свойств 1 и 7.

Свойства отношения $R : X \to Y$ можно определить в результате построения матрицы отношения, строки которой являются элементами X, а столбцы – элементами Y. На пересечении строки i и столбца j стоит единица, если кортеж $\langle x_i, y_j \rangle \in R$, в противном случае – нуль.

1.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Алгебраической структурой (*системой*) $\mathcal{A}$ называется совокупность $\langle M, O, R \rangle$, первая составляющая которой M есть непустое множество, вторая компонента O – множество алгебраической операций, третья компонента R – множество отношений на множестве M.

1. Множество M называют *несущим*, или *основным множеством*.

2. Совокупность алгебраических операций и отношений алгебраической системы называют *сигнатурой* Σ. В этом случае алгебраическая система записывается парой $\langle M, \Sigma \rangle$.

3. Алгебраическая система $\langle M, O \rangle$ называется *универсальной алгеброй* (или просто *алгеброй*), если на основном множестве M множество отношений R пусто (т.е. $R = \varnothing$).

4. Алгебраическая система $\langle M, R \rangle$ называется *реляционной системой* (или *моделью*), если на основном множестве M заданы только отношения R (т.е. в этом случае пусто множество операций O.

Пример 1.1. Аксиоматическая теория множеств $\langle M, O, R \rangle$, где M – некоторые множества; $O = \{\bigcup, \bigcap, \overline{}\}$ – множество из операций объединения ($\bigcup$), пересечения ($\bigcup$) и дополнения ($\overline{}$) множеств, а $R = \{\subseteq\}$ – множество, состоящее из отношения включения $\subseteq$.

Пример 1.2. *Алгебра Кантора* (алгебра множеств) $\langle M, O \rangle$. Несущим множеством является булеан $B(U)$ (т.е. множество всех подмножеств данного множества U), а множеством операций $O = \{\bigcup, \bigcap, \overline{}\}$.

Пример 1.3. Метрическое пространство $\langle M, R \rangle$, где R – метрика, является реляционной системой. Например: $x, y, z \in M$ – множество точек с расстоянием между ними $R \geq 0$, удовлетворяющим:

1) аксиоме идентичности: $R(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) аксиоме симметрии: $R(x, y) = R(y, x)$;

3) аксиоме треугольника: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Алгебры с унарными операциями. Самые простые алгебры $\mathcal{A} = \langle M, F_1 \rangle$ – это алгебры со множеством унарных операций F_1. Самыми простыми будут алгебры с единственной операцией, т.е. $F_1 = \{f\}$, где $f : M \to M$.

Алгебры с бинарными операциями. Бинарные алгебры имеют вид $\mathcal{A} = \langle M, F_2 \rangle$. Самой простой из них будут алгебры с одной бинарной операцией $g : M \times M \to M$.

Свойство 1.1. *Ассоциативность.* Бинарная операция «•» на множестве M называется ассоциативной, если $\forall a, b, c \in M$ выполнено $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

Свойство 1.2. *Коммутативность.* Бинарная операция «•» на множестве M называется коммутативной, если $\forall a, b \in M$ выполнено $a \bullet b = b \bullet a$.

Выполнение свойств операций 1.1 и 1.2 отражается и в названии соответствующих алгебраических структур $\langle M, «\bullet» \rangle$, т.е. коммутативная или ассоциативная или то и другое одновременно.

Свойство 1.3. *Наличие нейтрального элемента* $e \in M$ ($\varnothing$ – нуль или E – единица: нуль – для структур с бинарной операцией типа «сложение» – $\oplus$; единица – для структур с бинарной операцией типа «умножение» – $\otimes$). Элемент $e \in M$ называется нейтральным, если для любого элемента $m \in M$ выполняется равенство $e \bullet m = m \bullet e = m$ (или $e^l \bullet m = m \bullet e^r = m$, где e^l, e^r – соответственно левый и правый нейтральный элемент).

Свойство 1.4. *Наличие противоположного и обратного элемента.* Пусть $a, b, c \in M$. *П*ротивоположным элементу a называется элемент $b = (-a)$, если выполняется равенство $a \oplus b = \varnothing$. *Обратным* элементу a называется элемент $c = (a^{-1})$, если выполняется равенство $a \otimes c = E$, где $\oplus$ и $\otimes$ – операции типа «сложение» и «умножение».

Определение группоида. Система вида $\langle M, «\bullet» \rangle$ называется *группоидом*. Если «•» – операция типа умножения, то группоид называют *мультипликативным*, если «•» – операция типа сложения, то *аддитивным*.

Группоид $\langle M, «\bullet» \rangle$ называется *идемпотентным*, если его сигнатура удовлетворяет закону идемпотентности: $\forall m \in M \quad (m \bullet m = m)$.

Группоид $\langle M, «\bullet» \rangle$ называется *коммутативным* (*абелевым*), если его сигнатура удовлетворяет закону коммутативности.

Определение полугруппы. Группоид $\langle M, «\bullet» \rangle$, в котором выполняется закон ассоциативности, называется *полугруппой*.

Например. Любое множество функций, замкнутое относительно суперпозиции, образует полугруппу.

Определение моноида. Полугруппу с нейтральным элементом принято называть моноидом.

Теорема. Нейтральный элемент моноида единственен.

Доказательство. Предположим, что $\exists e_1 \neq e_2$ – нейтральные элементы. Тогда $\forall a \in M$ $(a \bullet e_1 = e_1 \bullet a = a)$ и $(a \bullet e_2 = e_2 \bullet a = a)$. В результате получаем $e_1 \bullet e_2 = e_1$ и $e_1 \bullet e_2 = e_2 \Rightarrow e_1 = e_2$. *Теорема доказана.*

Определение группы. *Группой* называется полугруппа $\langle M, «\bullet» \rangle$, в которой выполнимы обратные операции: $\forall a, b \in M$ каждое из уравнений $a \bullet x = b$, $y \bullet a = b$ обладает единственным решением.

Группа с коммутативной операцией называется *коммутативной*, но чаще её называют абелевой в честь норвежского математика Абеля.

Алгебра с двумя операциями.

Свойство 1.5. *Дистрибутивность.* Пусть $x, y, z \in M$; $\oplus, \otimes \in O$ – операции типа «сложение» и «умножение», тогда может иметь место:

– дистрибутивность умножения относительно сложения справа (слева):

$$x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y \oplus x \otimes z \qquad \{(y \oplus z) \otimes x = y \otimes x \oplus z \otimes x\};$$

– дистрибутивность сложения относительно умножения справа (слева):

$$x \oplus (y \otimes z) = (x \oplus y) \otimes (x \oplus z) \qquad \{(y \otimes z) \oplus x = (y \oplus x) \otimes (z \oplus x)\}.$$

Определение кольца. Пусть $a, b, c \in M$. *Кольцом* называется алгебра $\langle M, \otimes, \oplus \rangle$, которая по умножению является мультипликативным группоидом, по сложению – абелевой группой, причём умножение связано со сложением законами дистрибутивности:

$$a \otimes (b \oplus c) = a \otimes b \oplus a \otimes c; \qquad (b \oplus c) \otimes a = b \otimes a \oplus c \otimes a.$$

Определение тела. Телом называется кольцо, в котором все отличные от нуля элементы составляют группу по умножению.

Определение поля. Тело, у которого мультипликативная группа абелева, называется полем.

1.4. МЕТОДЫ ФОРМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ В МАТЕМАТИКЕ

Математическая логика – наука, изучающая саму математику математическими средствами. Одной из основных задач при этом является однозначное толкование и запись математических выражений (суждений, высказываний), действий (умозаключение, вывод или рассуждение), самих операции, т.е. то, что является задачей логической семантики – дать чёткое и однозначное истолкование умозаключений формального языка, одновременно как можно более простое и как можно более близкое к естественному математическому пониманию.

Каждая математическая теория имеет свою предметную область, или универсум,– совокупность всех предметов, которые она изучает. Например, в математическом анализе естественно выделить два сорта объектов: действительные числа и их функции и, соответственно, два универсума: универсум чисел и универсум функций.

Простейшие из выражений, обозначающих предметы, – константы, т.е. имена конкретных предметов. Считается, что для каждой константы однозначно задан предмет, который она обозначает. Поэтому в математической модели необходимо строго следить за тем, чтобы любое собственное имя обозначало свой предмет, в отличие от обычной жизни, где имена могут быть неоднозначны. Поэтому в математике стремятся к систематизации обозначений, хотя бы в рамках одной работы. Аналогично и для переменных. Далее, для каждой константы (переменной) чётко указывается сорт, которому она принадлежит. Например, можно принять, что $i,\ j,\ k,\ l,\ m,\ n$ – переменные, значениями которых служат целые числа; $x,\ y,\ z$ – переменные, значениями которых служат действительные числа. Для того, чтобы запас имен переменных был неограничен, используют индексацию: i^3, z_3 и т.д.

Более сложные выражения образуются применением символов операций. Структура оператора может быть в одном из трёх видов:

– префиксная запись: $R(a,\ b)$ или обычная функциональная запись. Например, унарная операция отрицания: $\neg x = \overline{x}$;

– инфиксная запись – отношение расположено между операндами. Например, $x \bullet y = xy = \times(x,\ y)$. В примере показано, как инфиксная запись может быть представлена функциональной;

– постфиксная запись: $(a,\ b)R$. К данному виду относятся операции возведения в степень, например: $x^2 = x**2 = \mathrm{sqr}(x)$, т.е. и постфиксная запись может быть представлена функциональной.

Поэтому *множество функций* некоторой теории определяется множеством функциональных символов $\{f\}$, где f – некоторое n-местное отношение, формально имеющее вид $f(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n)$, а $t_1,\ t_2,\ ...,\ t_n$ – термы, обозначающие элементы соответствующих множеств.

Использование функциональных символов f удобно при проведении математических преобразований, а для процессов принятия решений и, в общем случае, для любых логических операций (т.е. когда значения $f(t_1, t_2, ..., t_n) \in \{0, 1\}$ или $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ – «истина» либо «ложь») – удобно использовать понятие предиката $P(t_1, t_2, ..., t_n)$, являющегося элементом множества предикатных символов $\{P\}$ той же теории. Приведём пример эффективности использования предиката при определении некоторых классов функций, используемых в дальнейшем.

Наиболее распространённые множества функций.

1. *Линейные функции* $f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1 x_1 + ... + a_n x_n \in (L = a_0)$, где $a_i \neq f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = \overline{0, n}$ (т.е. a_i не являются некоторыми функциями $x_1, x_2, ..., x_n$); L (или $L = 0$) – множество однородных линейных функций или линейных форм. *Свойства* $f \in L$:

1) $f(x_1, ..., x_i^1 + x_i^2, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_i^1, ..., x_n) + f(x_1, ..., x_i^2, ..., x_n)$;

2) $f(x_1, ..., c\,x_i, ..., x_n) = c\, f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$, $c \in R$.

2. *Непрерывные функции на множестве* Ω: $f(x) \in C^0(\Omega)$.

Функция f непрерывна на Ω, если для каждого x из Ω и для любого сколь угодно малого положительного ε найдётся такое положительное δ, зависящее от ε, что, когда x_1 лежит в Ω и отличается от x меньше, чем на δ, $f(x_1)$ отличается от $f(x)$ меньше, чем на ε.

Условие непрерывности функции f на множестве Ω можно записать значительно изящнее с помощью предиката непрерывности:

$$P_H(f, \Omega) = \forall x \in \Omega \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1 \in \Omega \quad \left(|x - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon\right) = \mathrm{T}.$$

Последний пример показывает, насколько удобнее пользоваться понятием предиката, чем анализировать многостроковое определение. Но использование предикатов в математических рассуждениях требует осознания методологии самой математики, т.е. использования методов формальной логики в современной математике.

1.4.1. ПОНЯТИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ, СЛОЖНЫЕ СУЖДЕНИЯ

Элементарным понятием математической логики является высказывание (посылка, исходное или простое суждение) – повествовательное предложение, отражающее истинность:

1) наличие у сущности (отдельный объект, явление, событие, процесс, предмет) заданного признака – *атрибутивное высказывание*;

2) отношения между сущностями – *высказывание с отношениями*;

3) факт существования сущности – *экзистенциальное высказывание*.

Соглашение 1.1. Единственными логическими значениями высказывания являются истина либо ложь (1 либо 0 или T либо F).

Соглашение 1.2. Логическое значение сложного утверждения зависит лишь от логических значений его компонент, а не от его смысла.

1.1. Виды и свойства сложных суждений

Вид суждения	Мнемокод	Связка	Содержательный смысл	Таблица истинности				
Инверсия (отрицание)	$\neg A$ $\overline{A}$	НЕ	«*A* неверно», «*A* ложно», «*A* не может быть»	A	0	1		
				$\overline{A}$	1	0		
Соединительное (конъюнктивное)	$A \& B \& \ldots$ $AB\ldots$ $A \wedge B \wedge \ldots$	И	«*A* и *B*», «*A* вместе с *A*», «не только *A*, но и *B*», «как *A*, так и *B*» и т.п.	A	0	0	1	1
				B	0	1	0	1
				$A \& B$	0	0	0	1
Разделительное (дизъюнктивное)	$A \vee B \vee \ldots$ (слабое)	ИЛИ	«*A* или *B* или оба вместе» и т.п.	$A \vee B$	0	1	1	1
	$A \oplus B$ (сильное)	ЛИБО	«либо *A*, либо *B*, но не вместе» и т.п.	$A \oplus B$	0	1	1	0
Условное (импликативное)	$A \to B$ $A \Rightarrow B$	СЛЕДУЕТ	«если *A*, то *B*», «из *A* следует *B*», «*A* достаточное условие для *B*», «*B* необходимое условие для *A*» и т.п.	$A \to B$	1	1	0	1
Эквивалентное	$A \Leftrightarrow B$ $A \equiv B$ $A \sim B$	ЭКВИВА-ЛЕНТНОСТЬ	«*A* эквивалентно *B*», «*A* необходимое и достаточное условие для *B*»…	$A \equiv B$	1	0	0	1

Примечание: для формирования сложных суждений также используются кванторы.

1.4.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Математические выражения значительно сокращаются, если придерживаться общепринятого порядка выполнения операций (табл. 1.2).

1.2. Приоритетность выполнения логических операций

Операция	Приоритет	Название операции
$\neg$	Первый (высший)	Отрицание
$\&(\wedge)$	Второй	Логическое умножение – конъюнкция
$\vee$, $\oplus$	Третий	Логическое сложение: слабое – дизъюнкция, сильное – сложение по модулю 2 или неэквивалентность
$\Rightarrow(\rightarrow), (\leftarrow)\Leftarrow$	Четвёртый	Условия необходимости и достаточности
$\sim(\Leftrightarrow, \equiv)$	Пятый	Эквивалентность

Примечание. Операции равного приоритета выполняются первоначально слева направо. Выражение, заключённое в скобки, перед выполнением вычисляется как отдельный операнд. При наличии вложенных скобок вычисления выполняются, начиная с самых внутренних.

1.4.3. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КВАНТОРОВ

В математической формализации квантор – это операция, применяющаяся к некоторым переменным подкванторного выражения и дающая в результате выражение, от этих переменных не зависящее, т.е. связывая эти переменные. Операция применения квантора к некоторому выражению, называется операцией навешивания квантора.

Замечание. Переменные подкванторного выражения, не связанные каким-либо квантором, называются свободными, а связанными называются переменные, связанные каким-либо квантором.

Кванторы суммирования и произведения $\sum_{i=1}^{n} a_i$; $\prod_{i=1}^{n} a_i$ связывают переменную i, заставляя её пробежать все натуральные числа от 1 до n, a_i – подкванторное выражение.

Квантор всеобщности. Утверждение «для всех x верно $A(x)$» символически записывается в виде $\forall x\, A(x)$ и обеспечивает проверку истинности высказывания $A(x)$, зависящего от некоторого параметра x, одновременно по всем значениям этого параметра (по всему универсуму), и если найдётся хотя бы одно конкретное значение $x = c$, такое, что $A(c) = \mathrm{F}$, то и все утверждение $\forall x\, A(x) = \mathrm{F}$.

Эта же связка используется при переводе утверждений «$A(x)$ верно при любом значении x», «для произвольного x имеет место $A(x)$», «каково бы ни было x, $A(x)$» и т.п.

Квантор существования. Утверждение «существует такое x, что $A(x)$» символически записывается в виде $\exists x\, A(x)$ и обеспечивает проверку истинности высказывания $A(x)$, зависящего от некоторого параметра x, хотя бы для одного значения этого параметра, и если найдётся хотя бы одно конкретное значение $x = c$, такое, что $A(c) = \mathrm{T}$, то и все утверждение $\forall x\, A(x) = \mathrm{T}$.

Эта же связка используется при переводе утверждений «$A(x)$ верно при некоторых x», «$A(x)$ иногда верно», «есть такое x, при котором $A(x)$», «можно найти такое x, при котором $A(x)$» и т. п.

Замечание 1.1. Справедлива формула: $\overline{\forall x\, A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$.

Замечание 1.2. Квантор общности ($\forall$) сочетается со связкой «СЛЕДУЕТ» ($\Rightarrow$), а квантор существования ($\exists$) – со связкой «И» (&).

Квантор образования множества $\{x \mid A(x)\}$ ($A(x)$ – логическая формула), который по $A(x)$ строит множество всех x, обладающих данным свойством.

Ограничительные кванторы. В математике и в жизни сплошь и рядом приходится заставить переменную пробегать не весь универсум, а лишь некоторую его часть, определяемую некоторым выражением $C(x)$, а именно $X = \{x \mid C(x)\}$, тогда можно ввести ограничительный квантор вида $\forall x \in X$. Например: $\forall x \in X\ (A(x))$.

Сокращение кванторов. Для утверждений типа $\exists x \exists y \big(A(x, y)\big)$ можно провести сокращение $\exists x, y\big(A(x, y)\big)$, т.е. несколько однородных кванторов соединяются в один.

1.4.4. КВАНТОРЫ РАВЕНСТВА И ЕДИНСТВЕННОСТИ

Пусть $A(x)$ – произвольная формула рассматриваемой теории.

Равенство. Для формулировки равенства воспользуемся постулатом Лейбница: «Два предмета равны, если они обладают одинаковыми свойствами», что записывается в виде $\forall x, y((x = y) \Rightarrow (A(x) = A(y)))$. Но эти два предмета не могут обладать всеми одинаковыми свойствами, поскольку в формулировке Лейбница они уже различны. Поэтому на современном математическом языке равенство записывают в виде формулы, не укладывающейся в стандартный язык логики предикатов: $\forall P((P(x) \Leftrightarrow P(y)) \Leftrightarrow (x = y))$, где P – переменная по предикатам.

Единственность. Единственность выражается следующим образом:

$$\forall x, y(A(x) \,\&\, A(y) \Rightarrow (x = y)).$$

Для утверждения, что есть не менее двух различных решений задачи, можно использовать выражение:

$$\exists x, y(A(x) \,\&\, A(y) \,\&\, (x \neq y)).$$

Для выражения единственности используют сокращения:

$\exists!\, x(A(x))$ – существует единственное x, такое, что $A(x)$;

$\exists_n x(A(x))$ – существует ровно n таких x, что $A(x)$;

$\exists_{\geq n} x(A(x))$ – существует не менее n таких x, что $A(x)$;

$\exists_{\leq n} x(A(x))$ – существует не более n таких x, что $A(x)$.

Равенство и единственность являются основой доказательства теорем методом «по аналогии».

1.4.5. МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Умозаключение – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких высказываний выводится новое суждение. Посылками умозаключения называются исходные суждения, из которых выводится *новое суждение*. Логический переход от посылок к заключению называется *выводом*. Различают *дедуктивные* (от общего знания к частному), *индуктивные* (от частного к общему) и умозаключения по аналогии – *абдуктивные* (от частного к частному) выводы.

Дедукция. Рассматривается некоторая формальная теория, в которой задано множество аксиом, правил вывода и определено правило подстановки (суперпозиции). Задаётся исходное множество формул (посылок), из которых формируется упорядоченная последовательность $A_1, A_2, ..., A_n$, называемая выводом. Очередной элемент цепи вывода A_j при этом может быть получен только одним из трёх способов:

1) A_j – аксиома, к которой может быть применена некоторая подстановка;

2) A_j – одна из формул множества $\{A_1, A_2, ..., A_{j-1}\}$, к которой также может быть применена некоторая подстановка;

3) A_j – получена из формул $\{A_1, A_2, ..., A_{j-1}\}$ с помощью некоторого правила вывода.

Если при этом $A_n = B$, то говорят, что формула B выводима из $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Формально для этого используется запись:

$$A_1, A_2, ..., A_n \vdash B \quad \text{или} \quad \frac{A_1, A_2, ..., A_n}{B}.$$

Индукция. В основе метода лежит способ доказательства «по индукции», суть которого состоит в следующем: если предложение $A(n)$, зависящее от натурального числа n, истинно для $n=1$ и из того, что оно истинно для $n=k$ (где k – любое натуральное число), следует, что оно истинно и для следующего числа $n=k+1$, то предположение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n.

Абдукция. Доказательство по аналогии основано на том, что сущности могут быть подобными, сходными в каких-либо свойствах, признаках или отношениях, причём даже такие, которые в целом различны. Очевидно, что доказательство по аналогии не является абсолютным, оно гипотетическое. Необходимо отметить, что в умозаключении по аналогии весьма часто вместо слов «вероятно» и «возможно» употребляют слова «следовательно» и «значит». Нередко это оказывается правомерным и подтверждается истинностью заключения. Между тем немаловажно иметь в виду, что недооценка вероятностного характера умозаключения по аналогии способна привести к ошибкам и просчётам. Ход умозаключения по аналогии можно записать в виде следующей последовательности формул:

A имеет признаки $a_1, a_2, ..., a_n, x$;

B имеет признаки $a_1, a_2, ..., a_n$.

B, вероятно, имеет и признак x.

2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МАТРИЦАХ

Определение 2.1. Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов, элементы которой a_{ij} принадлежат некоторому множеству K (в данном разделе $K = R$, т.е. a_{ij} – вещественные числа, $i=\overline{1,\ m}$; $j=\overline{1,\ n}$):

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A=A_{m\times n}=(a_{ij})_{11}^{mn}. \qquad (2.1)$$

Для каждого элемента матрицы a_{ij} индекс $i\,(i=\overline{1,\ m})$ обозначает номер строки, а индекс $j\,(j=\overline{1,\ n})$ – номер столбца, в котором находится данный элемент.

Элементы a_{ii} $(i=1,\ \dots,\ \min\{m,\ n\})$ называются диагональными, а их совокупность – главной диагональю матрицы A.

Матрица B размера $1\times n$ называется матрицей-строкой, а матрица C размера $m\times 1$ называется матрицей-столбцом. Столбец $j\,(j=\overline{1,\ n})$ матрицы A обозначают как A^j. Строку $i\,(i=\overline{1,\ m})$ – как A_i. Так как матрицу A можно рассматривать в виде совокупности её столбцов или строк, то можно определить первоначальную матрицу A как вектор-строку, состоящую из столбцов A^j, или как вектор-столбец, состоящий из строк A_i (рис. 2.1, 2.2).

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}; \\ A_i &= \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}; \\ A &= \begin{pmatrix} A^1 & A^2 & \dots & A^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 2.1. Матрицы-строки

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}; \quad A^j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}; \quad A=\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix}$$

Рис. 2.2. Матрицы-столбцы

Наиболее часто используемыми являются следующие матрицы:

– Θ – нулевая матрица (все элементы которой равны 0);

– квадратная матрица порядка n – матрица размера $n \times n$.

Наиболее распространённые квадратные матрицы.

Симметричная – элементы симметричны относительно главной диагонали, т.е. $\forall i,\ j = \overline{1,\ n}: a_{ij} = a_{ji}$, где n – размерность матрицы.

Диагональная – все элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Единичная – диагональная с единичными элементами (рис. 2.3).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рис. 2.3 **Рис. 2.4** **Рис. 2.5**

Верхняя (*нижняя*) *треугольная матрица* – все элементы матрицы под (над) главной диагональю равны нулю (рис. 2.4, 2.5).

Элементарная матрица перестановок P_{ij} – матрица, полученная из единичной перестановкой i-й и j-й строк.

Элементарная матрица масштабирования $R_i(a)$ – матрица, полученная из единичной заменой элемента $a_{ii} = a \neq 0$.

Элементарная матрица замещения $N_{ij}(a)$ – матрица, полученная из единичной добавлением элемента $a_{ij} = a \neq 0$.

2.2. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ

2.2.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Определение 2.2. Определителем второго порядка матрицы A (или просто определителем второго порядка) называется число, обозначаемое символом $\Delta = \Delta(A)$ и определяемое равенством

$$\Delta = \Delta(A) = \Delta\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \qquad (2.2)$$

Также используются и другие обозначения $|A|$, $\det A$.

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называются элементами определителя.

Пример 2.1. Вычислить определитель матрицы. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

Решение: $\Delta(A)=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=1\cdot 4-2\cdot(-2)=8.$

Определение 2.3. Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом Δ, и определяемое равенством:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-\\ &-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.\end{aligned}\qquad(2.3)$$

А. Вычисление определителя с использованием правила треугольников (рис. 2.6): со знаком «+» берутся произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «–» – произведения элементов побочной диагонали и элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали. Здесь a_{11}, a_{22} и a_{33} – главная диагональ; a_{31}, a_{22} и a_{13} – побочная диагональ.

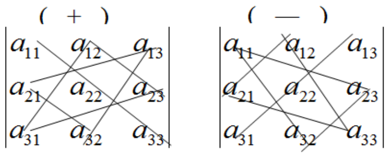


Рис. 2.6

Б. Вычисление определителя по правилу приписывания столбцов:

1. Приписываем последовательно справа от определителя первый и второй столбцы.

2. Вычисляем произведения трёх элементов по диагонали слева направо, сверху вниз от a_{11} до a_{13} со знаком «+». Затем произведения элементов по диагонали слева направо, снизу вверх от a_{31} до a_{33} со знаком «–».

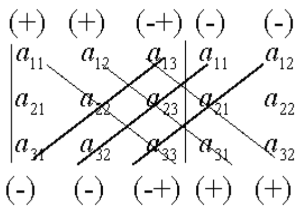


Рис. 2.7

Пример 2.2. Вычислить Δ по правилу приписывания столбцов.

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 3 & 6\\ 1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\end{vmatrix}\begin{matrix}0 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{matrix}.$$

Решение: $\Delta=\begin{matrix}0\cdot 4\cdot 8+3\cdot 7\cdot 2+6\cdot 1\cdot 5\\ -2\cdot 4\cdot 6-5\cdot 7\cdot 0-8\cdot 1\cdot 3\end{matrix}=\begin{matrix}42+30\\ -48-24\end{matrix}=0.$

Определение 2.4. Матрица *A* называется вырожденной, если $\det A=0$.

2.2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ РАЗЛОЖЕНИЕМ ПО СТРОКЕ (СТОЛБЦУ)

Вычисление определителя произвольного порядка основано на переходе от вычисления определителя высшего порядка к вычислению суммы нескольких определителей меньшего порядка. Данный метод основан по понятиях минора и алгебраического дополнения, а также на доказательстве теоремы Лапласа, позволяющей сводить вычисление определителя n-го порядка к вычислению нескольких определителей порядков k и $n - k$.

Определение 2.5. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n - 1)$ порядка, полученный вычёркиванием строки и столбца определителя, на пересечении которых расположен этот элемент.

Определение 2.6. Алгебраическим дополнением A_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Например, в определителе третьего порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ можно рассмотреть:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12};$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}.$$

Определение 2.7. Определителем n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов любой строки определителя, умноженных на их алгебраические дополнения, или любого столбца, умноженных на их алгебраические дополнения:

$\Delta(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение определителя по i-й строке;

$\Delta(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ – разложение определителя по j-му столбцу.

Пример 2.3. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ разложением по первой строке.

Решение:

$$\Delta = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Опр. 2.3}}{=}$$

$$= 2\cdot(6+6-6) - 1\cdot(9-3+3-9) - 2\cdot(-2-2+2-6) = 12+16 = 28\,.$$

2.2.3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Если в определителе все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то определитель равен нулю.
2. Если в определителе два столбца (строки) равны, то определитель равен нулю.
3. Определитель не изменится, если его строки и столбцы поменять местами.

Например: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Если в определителе переставить местами два столбца или две строки, то определитель изменит свой знак на противоположный.

Например: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Общий множитель столбца или строки можно выносить за знак определителя.

Например: $$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. Если в определителе соответствующие элементы двух столбцов или двух строк пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Если в определителе каждый элемент некоторого столбца или некоторой строки представляет собой сумму двух слагаемых, то этот определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, в одном из которых в том же столбце или в той же строке стоят первые слагаемые, а во втором – вторые, например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12}+a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22}+a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32}+a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a'_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + = \begin{vmatrix} a_{11} & a''_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a''_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a''_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Если к элементам некоторого столбца или строки определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца или строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится.

9. Сумма произведений элементов любого столбца (строки) матрицы (в том числе и определителя) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки) равна нулю.

2.3. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

2.3.1. СЛОЖЕНИЕ, УМНОЖЕНИЕ И ТРАНСПОНИРОВАНИЕ

Определение 2.8. Говорят, что матрицы $A = A_{m\times n}$ и $B = B_{k\times l}$ равны ($A = B$), если они одинакового размера ($m = k,\ n = l$), а для их элементов выполнено условие $\forall i = \overline{1,\ m};\ \forall j = \overline{1,\ n}\ \ (a_{ij} = b_{ij})$.

Свойства операции: бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности (п. 1.2).

Определение 2.9. Суммой двух матриц A и B размера $m\times n$ называется матрица $C = A + B$ того же размера, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц A и B.

Свойства операции: ассоциативность и коммутативность (п. 1.3)

Определение 2.10. Произведением матрицы A размера $m\times n$ на число λ называется матрица B, полученная умножением всех элементов матрицы A на число λ, т.е. $\forall i = \overline{1,\ m};\ \forall j = \overline{1,\ n}\ \ (c_{ij} = \lambda b_{ij})$.

Свойства операции: ассоциативность умножения произведения чисел на матрицу, коммутативность умножения матрицы на число, дистрибутивность умножения суммы чисел на матрицу, а также дистрибутивность умножения числа на сумму матриц (п. 1.3).

Определение 2.11. Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times l}$ называется такая матрица $C_{m\times l} = A_{m\times n}\, B_{n\times l}$, каждый элемент которой определяется равенством $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \quad (i = \overline{1,\, m}; \;\; j = \overline{1,\, l})$.

Свойства операции: ассоциативность умножения матрицы или числа на произведение матриц, отсутствие коммутативности при перемножении матриц, дистрибутивность умножения относительно сложения матриц.

Замечание: матрицы, для которых выполнена коммутативность умножения, называются коммутирующими между собой.

Определение 2.12. Матрица $B = B_{n\times m}$ называется транспонированной по отношению к матрице $A = A_{m\times n}$, если $\forall i = \overline{1,\, m} \quad \forall j = \overline{1,\, n} \;\; (a_{ij} = b_{ji})$, что записывается в виде $B = A^T$.

Свойства операции: инволютивная унарная операция, линейная относительно алгебраических операций сложения и перемножения матриц, идемпотентная относительно симметричных матриц.

Пример 2.4. Найти $C = A - 3B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -8 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.5. Найти произведение матриц $C = AB$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$C = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot(-2) & 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 & 2\cdot(-1) + 3\cdot 5 + 1\cdot 0 \\ -2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 3\cdot(-2) & -2\cdot 3 + 0\cdot 2 + 3\cdot 3 & -2\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 15 & 13 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3.2. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение 2.13. Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

Замечание. Только квадратные матрицы могут иметь обратную.

***Теорема* 2.1** (о существовании обратной матрицы). Всякая невырожденная матрица $A = A_{n\times n}$ $(\det A \neq 0)$ имеет обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}, \tag{2.4}$$

где $A_{ij}\,(i = \overline{1,\,n};\;\; j = \overline{1,\,n})$ – алгебраические дополнения; $\tilde{A}$ – присоединённая (или взаимная) матрица к матрице A.

Доказательство. Пусть A^{-1} определена в соответствии с (2.4). Докажем, что $AA^{-1} = E$. Имеем:

$$AA^{-1} = A\,\frac{1}{\det A}\,\tilde{A} = \frac{1}{\det A}\,A\tilde{A} = \frac{1}{\det A}\,C,$$

где элемент c_{ij} определяется умножением *i*-й строки A на *j*-й столбец матрицы $\tilde{A}$, т.е.

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} \det A, & i = j \quad \text{(определение 2.7);} \\ 0, & i \neq j \quad \text{(п. 2.2.3, свойство 9).} \end{cases}$$

В результате получаем:

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{2n} & \dots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что $A^{-1}A = E$. *Теорема доказана*.

***Теорема* 2.2** (о единственности обратной матрицы). Если матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то матрица A^{-1} – единственна.

Доказательство. Предположим, что матрицы B и C являются обратными к A, т.е. $BA = AB = E$ и $CA = AC = E$.

Тогда по свойствам единичной матрицы

$$BAC = (BA)C = EC = C\,, \quad BAC = B(AC) = BE = B\,,$$

т.е. $B = C$. *Теорема доказана*.

Пример 2.6. Найти матрицу A^{-1}, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Вычислим определитель A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3-2) = 2\,.$$

2. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 12;\ A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1;\ A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ A3_{23} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

3. Составим присоединённую матрицу $\tilde{A}$ и получим A^{-1}:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & 2 \end{pmatrix};\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -9 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ -4{,}5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.3. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. РАНГ МАТРИЦЫ

Над строками и столбцами матриц можно проводить преобразования, в результате которых они сохраняют некоторые свои свойства.

Элементарными называются следующие операции над матрицей.

1. «Перестановка» – перестановка строк или столбцов матрицы.

Перестановку строк A_i и A_j исходной матрицы можно получить умножением слева на матрицу перестановки P_{ij}, т.е. $A' = P_{ij}\,A$.

Для перестановки столбцов необходимо умножить исходную матрицу справа на матрицу перестановки P_{ij}, т.е. $A' = A\,P_{ij}$.

2. «Масштабирование» – умножение всех элементов некоторой строки или столбца на число α.

Масштабирование строки A_i получается умножением слева на матрицу масштабирования $R_i(a)$, т.е. $A' = R_i(\alpha)\,A$.

Масштабирование столбца A^i получается умножением справа на матрицу масштабирования $R_i(a)$, т.е. $A' = A\,R_i(\alpha)$.

3. «Замещение» – прибавление к элементам некоторой строки (столбца) матрицы соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число α.

Для замещения строки A_i суммой строк $A_i + \alpha A_j$ необходимо умножить матрицу A слева на $N_{ij}(a)$, т.е. $A' = N_{ij}(\alpha)\,A$.

Для замещения столбца A^i суммой столбцов $A^i + \alpha A^j$ необходимо умножить справа на транспонированную матрицу замещения $N_{ij}(a)$ исходную матрицу A, т.е. $A' = A\left(N_{ij}(\alpha)\right)^T$.

Определение 2.14. Матрицы A и B называются эквивалентными $(A \sim B)$, если A получена из матрицы B при помощи конечного числа элементарных преобразований.

Определение 2.15. Прямоугольная матрица называется ступенчатой, если в каждой её строке, начиная со второй, её первый отличный от нуля элемент расположен правее первого ненулевого элемента в предыдущей строке.

С помощью элементарных преобразований строк или столбцов матрицу можно привести к ступенчатому виду.

Определение 2.16. Рангом r_A матрицы A называется число ненулевых строк ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице A.

r_A может обозначаться как $r(A)$ или $\operatorname{rang} A$. Очевидно, если матрица A имеем размер $m \times n$, то $r(A) \le \min\{m, n\}$, а ранг невырожденной квадратной матрицы равен её порядку.

***Теорема* 2.3.** Эквивалентные матрицы имеют один и тот же ранг. *Без доказательства*.

Пример 2.7. Определить ранг матрицы A.

Решение. Элементарными преобразованиями приведём матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ к ступенчатой.

Первую строку матрицы вычтем из второй и прибавим к третьей (получили эквивалентную матрицу, имеющую в первом столбце нулевые поддиагональные элементы), далее из третьей вычтем вторую:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ -\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array} \sim \begin{array}{c} \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{II}^1 \\ \mathrm{III}^1 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ \\ -\mathrm{II}^1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу с тремя ненулевыми строками.

Ответ: $r(A) = 3$.

2.4. ЛИНЕЙНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА МАТРИЦ

Пусть A, B, C – произвольные матрицы; E – единичная, а Θ – нулевая матрицы. Будем считать, что эти матрицы являются квадратными и одинаковой размерности; α, β, $1 \in \boldsymbol{R}$ – действительные числа.

Тогда, относительно операций, определённых в п. 2.3.1 (определения 2.9 – 2.11), получаем следующую алгебраическую структуру: квадратные матрицы одинаковой размерности с двумя бинарными операциями – сложением и умножением, для которых выполнены свойства:

1. Коммутативность сложения $A + B = B + A$.
2. Ассоциативность сложения $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. Существование нулевого элемента Θ: $A + \Theta = \Theta + A = A$.
4. Существование противоположного элемента
$$\forall A \exists B = (-1) \cdot A: \quad A + B = B + A = \Theta.$$
5. Дистрибутивность матриц
$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC.$$

5′. Дистрибутивность чисел

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B\,,\quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\,.$$

6. Ассоциативность умножения матриц $A(BC)=(AB)C$.

6′. Ассоциативность умножения произведения чисел на матрицу

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)\,.$$

6″. Ассоциативность умножения числа на произведение матриц

$$\alpha(AB)=(\alpha A)B\,.$$

7. Наличие единичного элемента E : $EA=AE=A$.

7′. Свойство единицы ($1\in\boldsymbol{R}$): $1\cdot A=A$

8. Существование обратного элемента: $\forall A\ (\det A\neq O)\quad \exists\,!\ A^{-1}$.

9. Некоммутативность умножения матриц $AB\neq BA$.

9″. Коммутативность умножения числа на произведение матриц

$$\alpha(AB)=A(\alpha B)=A(B\alpha)=(AB)\alpha\,.$$

10. Наличие делителей нуля (Θ), т.е. $\exists(A\neq\Theta)\wedge(B\neq\Theta):AB=\Theta$.

Замечание 1. Наличие свойств 2 и 6 позволяет избавиться от лишних скобок в формулах при использовании операций сложения и умножения: $A+(B+(C+\ldots))=A+B+C+\ldots$ и $A(B(C\ldots))=ABC\ldots$.

Замечание 2. Свойства 1 – 4 характеризуют, что данная структура представляет собой абелеву группу относительно операции сложения. Добавление свойства 5 характеризует данную структуру, как кольцо; а свойств 6 и 7 – как ассоциативное кольцо с единицей. Данное кольцо не является целостным и, следовательно, не может быть полем, так как кольцо матриц не обладает коммутативностью умножения (свойство 9) и имеет делители нуля (свойство 10).

Следует отметить, что само пространство квадратных матриц одинаковой размерности является линейным:

– операции п. 2.3.1 сохраняют размерность результата операции относительно размерности участвующих в операции операндов;

– выполнены свойства 1 – 4 как абелевой группы относительно операции сложения;

– выполнены законы дистрибутивности умножения действительного числа на сумму матриц и умножения суммы чисел на матрицу (свойство 5′), ассоциативности умножения чисел на матрицу (свойство 6′) и идемпотентности операции умножения числа 1 на матрицу (свойство 7′).

Учитывая также выполнимость свойств 6″ и 9″, получаем, что структурой квадратных матриц одинаковой размерности с двумя бинарными операциями – сложением и умножением является алгебра.

2.5. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим матричное равенство $AX = B$. Если матрица X – неизвестная матрица, то данное равенство называется матричным уравнением. Для его решения умножим слева на A^{-1} обе части уравнения $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}AX = EX = X$, получим $X = A^{-1}B$, т.е. если матрица A имеет обратную, то матричное уравнение решается.

2.6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

2.6.1. МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ СЛАУ

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.5}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; x_j – неизвестные; b_i – свободные члены ($i = \overline{1,\ m}$; $j = \overline{1,\ n}$). Если все свободные члены системы равны нулю, то система называется однородной, иначе – неоднородной.

Упорядоченный набор из n чисел, в результате подстановки которых вместо соответствующих неизвестных получаем m тождеств, называется решением системы (2.5). Если система (2.5) имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, в противном случае – несовместной. Если система имеет единственное решение, то она называется определённой, если система имеет более одного решения, то она называется неопределённой. Однородная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0; \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

всегда совместна, так как она имеет решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

матрица A' – расширенная матрица системы; матрица A – главная (основная) матрица системы; матрица-столбец X – столбец неизвестных; матрица-столбец B – столбец из свободных членов.

Тогда систему (2.5) можно записать в матричной форме:

$$AX = B. \tag{2.7}$$

В частности, если система является однородной, то её запись в матричной форме имеет вид $AX = \varnothing$, где $\varnothing$ – нулевой столбец.

2.6.2. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА – КАПЕЛЛИ

Вопрос о совместности системы линейных уравнений полностью решается теоремой Кронекера – Капелли:

***Теорема* 2.4.** Для того, чтобы система линейных уравнений (2.5) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы был равен рангу матрицы системы. *Без доказательства*.

2.6.3. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЛАУ

Система в виде (2.7) является матричным уравнением, которое можно решить с помощью обратной матрицы, если A является квадратной и невырожденной, что означает совпадение числа уравнений с числом неизвестных ($m = n$) и отличие от нуля определителя системы: $\Delta = \det A \neq 0$. Тогда решение системы (2.7) находится по формуле:

$$X = A^{-1}B. \tag{2.8}$$

Такой метод решения системы (2.7) называется матричным.

Пример 2.8. Решить матричным методом систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 3x + 4y = 12. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу системы, столбцы неизвестных и свободных членов и найдём матрицу, обратную матрице A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4\\ 12\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2,$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix};\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}.$$

Найдём решение системы по формуле (2.8):

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8+12\\ 6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 4$, $y = 0$.

2.6.4. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Рассмотрим другой способ решения систем с квадратной матрицей. Для простоты возьмём систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2.\end{cases}\qquad (2.9)$$

Умножим первое уравнение на «a_{22}», второе – на «$-a_{12}$» и сложим полученные уравнения:

$$a_{11}a_{22}x_1-a_{12}a_{21}x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}\quad\Rightarrow\quad x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Аналогично найдём x_2. Умножим первое уравнение на «$-a_{21}$», второе – на «a_{11}». После их сложения получим:

$$-a_{12}a_{21}x_2+a_{11}a_{22}x_{21}=-b_1a_{21}+b_2a_{11}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

Используя понятие определителя, формулы для вычисления неизвестных можно представить в виде:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

В знаменателях дробей – определитель основной матрицы системы, а определители в числителях определяются как вспомогательные:

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ – вспомогательный определитель переменной x_1;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ – вспомогательный определитель переменной x_2.

Определение 2.17. Вспомогательным определителем переменной x_i, где i – номер переменной в системе (2.5), называется определитель, полученный из основного определителя системы $(\Delta = \det A)$ путём замены столбца A^i, соответствующего номеру переменной x_i, на столбец свободных членов B.

Тогда решение системы (2.9) можно представить в виде:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{2.10}$$

Формулы (2.10) называются формулами Крамера решения системы (2.9). Формулы (2.10) применяются только в случае, если $\Delta(A) \neq 0$, что даёт единственность решения системы (2.5).

Для системы трёх линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2.11}$$

формулы Крамера имеют вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{2.12}$$

где $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Для линейной алгебраической системы (2.5) с квадратной матрицей любого порядка n в случае, если главный определитель системы отличен от нуля $(\Delta = \det A \neq 0)$, формулы Крамера имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ldots; \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Пример 2.9. Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + \ 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Находим главный и вспомогательные определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Тогда решением системы будет $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = -1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 1$.

Ответ: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$.

2.6.5. МЕТОД ГАУССА

Итак, если система (2.5) имеет квадратную матрицу, определитель которой отличен от нуля $\Delta = \det A \neq 0$, то она имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера или матричным методом. А как узнать количество решений системы и как найти эти решения, если главный определитель равен нулю, либо число неизвестных не равно числу уравнений $n \neq m$, т.е. когда матрица системы является прямоугольной? Для решения линейных алгебраических систем (2.5) любого вида применяют метод Гаусса.

Метод Гаусса заключается в том, что исходную систему путём исключения неизвестных преобразуют к ступенчатому виду. При этом используют элементарные преобразования, выполняемые только над строками в расширенной матрице.

Метод Гаусса состоит из прямого хода и обратного хода. Прямым ходом метода Гаусса является приведение расширенной матрицы системы (2.5) к ступенчатому виду путём элементарных преобразований над строками. После чего происходит исследование системы на совместность и определённость. Затем по ступенчатой матрице восстанавливается система уравнений. Решение этой ступенчатой системы уравнений составляет суть обратного хода метода Гаусса, в котором, начиная с последнего уравнения, последовательно вычисляются неизвестные с большим порядковым номером, и их значения подставляются в предыдущие уравнения системы для вычисления неизвестных с меньшим порядковым номером.

Исследование системы в конце прямого хода происходит в соответствии с теоремой Кронекера – Капелли сравнением рангов матрицы системы A и расширенной матрицы A'. При этом возможны следующие случаи:

1) если $\operatorname{rang} A' > \operatorname{rang} A$, то система несовместна;

2) если $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A = n$, то система является определённой;

3) если $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A < n$, то система является неопределённой.

Если система является неопределённой, т.е. выполняется $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A < n$, то некоторые её неизвестные объявляются свободными, а остальные через них выражаются. Количество свободных неизвестных равно $k = n - \operatorname{rang} A$. Процесс отнесения неизвестных к свободным можно описать следующим образом. При выполнении обратного хода метода Гаусса в каждом очередном уравнении, после подстановки найденных ранее переменных, должна остаться ровно одна неизвестная. Если неизвестных при этом остаётся более одного, то остальные объявляются свободными.

Пример 2.10. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение. Расширенную матрицу системы приведём к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк (прямой ход):

1) перестановка первой и второй строк расширенной матрицы;

2) замещение: из второй строки вычитаем 4, а из третьей – 8 первых:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & 3 & -6 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{c} \mathrm{II} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{III} \end{array} \sim \begin{array}{c} \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{II}^1 \\ \mathrm{III}^1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 9 \\ 8 & 3 & -6 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -4\cdot \mathrm{I}^1; \\ -8\cdot \mathrm{I}^1 \end{array}$$

3) масштабирование третьей строки: умножение на $(-1/3)$;

4) замещение: из третьей строки вычитаем $(5/3)$ вторых:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I}^2 \\ \mathrm{II}^2 \\ \mathrm{III}^2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 17 \\ 0 & -5 & 2 & 28 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -1/3 \\ -5/3\,\mathrm{II}^2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \mathrm{I}^3 \\ \mathrm{II}^3 \\ \mathrm{III}^3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1/3 & -17/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right).$$

Получена ступенчатая матрица. Из неё следует $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A = = n = 3$. Следовательно, система совместна и имеет одно решение, т.е. является определённой.

Находим решение путём обратного хода процесса поиска решения методом Гаусса:

$$x_3 = -1; \quad x_2 = \frac{-17}{3} + \frac{1 \cdot x_3}{3} = \frac{-18}{3} = -6; \quad x_1 = -2 + x_3 - x_2 = -3 + 6 = 3.$$

Ответ: $x_1 = 3; \quad x_2 = -6; \quad x_3 = -1.$

Пример 2.11. Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Расширенную матрицу системы приведём к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк (прямой ход):

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -3\cdot\mathrm{I} \\ -2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \begin{array}{c} \mathrm{I}^1 \\ \mathrm{II}^1 \\ \mathrm{III}^1 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ -\mathrm{II}^1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В результате поиска решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса получено, что $\operatorname{rang} A' = \operatorname{rang} A = 2 < n = 4$, система является неопределённой, т.е. имеет несколько решений. Число свободных неизвестных равно $k = 4 - 2 = 2$.

Обратный ход:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ \qquad x_2 - 11x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - 4x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 11x_3 + 3x_4 + 1, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -15C_1 - 5C_2 - 1, \\ x_2 = 11C_1 + 3C_2 + 1, \\ x_3 = C_1, \\ x_4 = C_2. \end{cases}$$

Во втором уравнении ступенчатой системы три неизвестных. Два из них объявили свободными: $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ и оставшееся неизвестное x_2 выразили через свободные неизвестные. Затем подставили выражения неизвестных x_2, x_3, x_4 через свободные неизвестные в первое уравнение системы.

Ответ: $x_1 = -15C_1 - 5C_2 - 1; \quad x_2 = 11C_1 + 3C_2 + 1; \quad x_3 = C_1; \quad x_4 = C_2$,

где C_1 и C_2 – любые числа.

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1. ВЕКТОРЫ, ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Отвлекаясь от конкретного физического содержания, рассмотрим математическую теорию векторов, прежде всего самую простую её часть – векторную алгебру.

Определение 3.1. Вектором называется некоторая величина, характеризующаяся числовым значением и направлением.

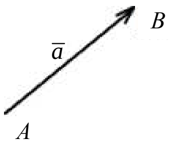


Рис. 3.1

Геометрически вектор изображается направленным отрезком (рис. 3.1). Обозначение вектора: $\overline{a}\left(\overline{AB}\right)$, где точка A – начало вектора, а B – конец вектора. Каждому вектору соответствует число, называемое длиной или модулем вектора, равное расстоянию между началом и концом. Обозначение модуля: $\left|\overline{a}\right|$, $\left|\overline{AB}\right|$. Вектор, модуль которого равен нулю, называется нулевым – $\overline{\varnothing}$. Направление вектора $\overline{\varnothing}$ может выбираться произвольно.

Определение 3.2. Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются равными, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Из последнего определения следует, что любой вектор в пространстве (на плоскости) можно переносить параллельно самому себе в любую точку этого пространства (плоскости).

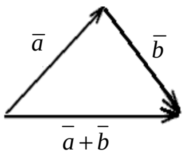


Рис. 3.2

Рассмотрим линейные операции над векторами: сложение векторов и умножение вектора на число.

Определение 3.3. Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{a}+\overline{b}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$, при условии, что начало вектора $\overline{b}$ совпадает с концом вектора $\overline{a}$ (правило треугольника, см. рис. 3.2).

Векторы можно складывать также по правилу параллелограмма: искомый вектор $\overline{a}+\overline{b}$ представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Замечание. Сумма нескольких векторов ищется с помощью последовательного применения правила треугольника.

Определение 3.4. Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b}=\lambda\overline{a}=\overline{a}\lambda$, имеющий длину $\left|\overline{b}\right|=\left|\lambda\right|\left|\overline{a}\right|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, если $\lambda>0$; противоположно вектору $\overline{a}$, если $\lambda<0$ (рис. 3.3).

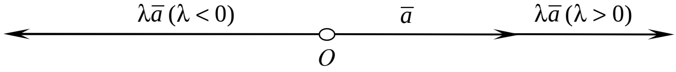


Рис. 3.3

В результате введённых понятий вектора и рассмотренных операций сложения и умножения (определения 3.1 – 3.4), получаем векторное (линейное) пространство L, обладающее следующими свойствами:

1. Коммутативность сложения векторов $\forall \bar{a}, \bar{b} \in L: \ \bar{b}+\bar{a}=\bar{a}+\bar{b}$.
2. Ассоциативность сложения векторов
$$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in L: \ \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$
3. Существование нулевого вектора $\overline{\varnothing}: \ \forall \bar{a} \in L, \ \bar{a}+\overline{\varnothing}=\bar{a}$.
4. Существование противоположного элемента:
$$\bar{a} \in L \ \exists \ \bar{b}=(-\bar{a}) \in L: \bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}=\overline{\varnothing}.$$
5. Дистрибутивность суммы векторов при умножении на число:
$$\forall \alpha \in \mathrm{R}, \ \forall \bar{a}, \bar{b} \in L: \ \alpha(\bar{a}+\bar{b})=\alpha\bar{a}+\alpha\bar{b}.$$
6. Дистрибутивность суммы чисел при умножении на вектор:
$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}, \ \forall \bar{a} \in L: \ (\alpha+\beta)\bar{a}=\alpha\bar{a}+\beta\bar{a}.$$
7. Ассоциативность умножения произведения чисел на вектор:
$$\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}, \ \forall \bar{a} \in L: \ (\alpha\beta)\bar{a}=\alpha(\beta\bar{a}).$$
8. Наличие и свойство идемпотентности единицы:
$$\forall \bar{a} \in L: \ 1 \cdot \bar{a}=\bar{a}.$$

Замечание. Наличие свойства 2 позволяет избавиться от лишних скобок в формулах при использовании операции сложения векторов: $\bar{a}+\left(\bar{b}+\left(\bar{c}+\ldots\right)\right)=\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\ldots$.

Определение 3.5. Линейной комбинацией векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_m}$ пространства L называется вектор $\bar{y} \in L$ вида
$$\bar{y}=\alpha_1\overline{x_1}+\alpha_2\overline{x_2}+\ldots+\alpha_m\overline{x_m}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\overline{x_i},$$
где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \boldsymbol{R}$ – коэффициенты линейной комбинации.

Если $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$, то линейная комбинация называется тривиальной, в противном случае – нетривиальной, т.е. $\exists i \in \overline{1, m}: \ a_i \neq 0$.

Определение 3.6. Линейной оболочкой $\left[\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}\right]$ системы векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}$ линейного пространства L называется множество всех линейных комбинаций системы векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}$:

$$\left[\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}\right] = \left\{\overline{y}:\ \overline{y} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{x_i},\ a_i \in R,\ i = \overline{1, m}\right\}.$$

3.2. КОЛЛИНЕАРНЫЕ И КОМПЛАНАРНЫЕ ВЕКТОРЫ. БАЗИС

Определение 3.7. Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если существует такое число λ (число μ), что выполняется равенство

$$\overline{b} = \lambda\overline{a}\ (\overline{a} = \mu\overline{b}). \tag{3.1}$$

Проще это выражается следующим образом: векторы, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, – коллинеарны.

***Теорема* 3.1.** Любой вектор плоскости единственным образом можно представить в виде линейной комбинации двух любых неколлинеарных векторов этой плоскости.

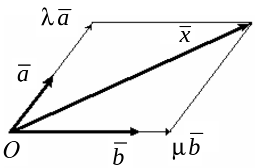


Рис. 3.4.

Доказательство (геометрическое). Рассмотрим на плоскости два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, а также произвольный вектор $\overline{x}$. Поместим в точке *O* начала всех трёх векторов. На рисунке 3.4 приведена одна из возможных ситуаций. Построим параллелограмм, диагональю которого является вектор $\overline{x}$, со сторонами параллельными прямым, на которых лежат векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Тогда по правилу параллелограмма

$$\overline{x} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}. \tag{3.2}$$

Докажем единственность выражения (3.2). От противного: предположим, что существуют два других числа α и β, например, $\alpha \neq \lambda$, такие, что $\overline{x} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$. Вычтем из последнего равенства равенство (3.2), тогда по свойствам линейных операций

$$\overline{\varnothing} = (\alpha - \lambda)\overline{a} + (\beta - \mu)\overline{b} \Rightarrow (\alpha - \lambda)\overline{a} = (\mu - \beta)\overline{b} \Rightarrow \overline{a} = \frac{\mu - \beta}{\alpha - \lambda}\overline{b},$$

т.е. $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарные, что противоречит условию теоремы.

Следовательно, выражение (3.2) единственное. *Теорема доказана*.

Определение 3.8. Три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называются компланарными, если один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных, т.е. существуют числа λ и μ, что выполняется равенство

$$\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}. \tag{3.3}$$

Из равенства (3.3) следует, что вектор $\overline{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\lambda\overline{a}$ и $\mu\overline{b}$, следовательно, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости. Итак, компланарные векторы лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях (так как векторы можно перемещать параллельно себе в пространстве).

***Теорема* 3.2.** Любой вектор $\overline{x}$ пространства единственным образом можно представить в виде линейной комбинации трёх некомпланарных векторов, т.е. $\overline{x} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} + \gamma\overline{c}$, где векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны; λ, μ и γ – числа.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

Определение 3.9. Любые два упорядоченных неколлинеарных вектора называются базисом на плоскости. Любые три упорядоченных некомпланарных вектора называются базисом в пространстве.

Плоскость и пространство будем обозначать $\boldsymbol{R}^2$ и $\boldsymbol{R}^3$, соответственно, по числу базисных векторов. Пусть $\{\overline{e_1};\ \overline{e_2};\ \overline{e_3}\}$ – базис в пространстве $\boldsymbol{R}^3$. По теореме 3.2 для любого вектора $\overline{x} \in \boldsymbol{R}^3$ выполняется равенство $\overline{x} = \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}$, которое называется разложением вектора $\overline{x}$ по базису $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$. Аналогичное разложение можно записать и для векторов плоскости $\boldsymbol{R}^2$.

Определение 3.10. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в разложении вектора по базису называются координатами вектора в этом базисе.

Обозначение: $\overline{x} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$ в базисе $\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3}\}$.

Векторы можно задавать координатами. Из единственности разложения вектора по базису следует, что вектор задаётся своими координатами однозначно. Тогда для выполнения линейных операций над векторами не требуется проводить геометрических построений.

Пусть задан базис $\left\{\overline{e_1};\, \overline{e_2};\, \overline{e_3}\right\}$ в пространстве $\boldsymbol{R^3}$. Рассмотрим два вектора: $\overline{a} = \alpha_1\, \overline{e_1} + \alpha_2\, \overline{e_2} + \alpha_3\, \overline{e_3}$ и $\overline{b} = \beta_1\, \overline{e_1} + \beta_2\, \overline{e_2} + \beta_3\, \overline{e_3}$.

Сумма векторов и произведение вектора на число в соответствии со свойствами этих операций равны:

$$\overline{a} + \overline{b} = \alpha_1\, \overline{e_1} + \alpha_2\, \overline{e_2} + \alpha_3\, \overline{e_3} + \beta_1\, \overline{e_1} + \beta_2\, \overline{e_2} + \beta_3\, \overline{e_3} =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1)\, \overline{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\, \overline{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\, \overline{e_3},$$
$$\lambda\, \overline{a} = \lambda\left(\alpha_1\, \overline{e_1} + \alpha_2\, \overline{e_2} + \alpha_3\, \overline{e_3}\right) = (\lambda\, \alpha_1)\overline{e_1} + (\lambda\, \alpha_2)\overline{e_2} + (\lambda\, \alpha_3)\overline{e_3}.$$

Таким образом, координаты суммы векторов $\overline{a} + \overline{b}$ равны сумме соответствующих координат $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Координаты произведения вектора $\overline{a}$ на число λ равны произведениям координат вектора $\overline{a}$ на число λ.

Замечание. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны.

Действительно, запишем (3.1) в координатной форме, располагая координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ в виде столбцов (λ – коэффициент пропорциональности):

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \beta_1 = \lambda\, \alpha_1; \\ \beta_2 = \lambda\, \alpha_2; \\ \beta_3 = \lambda\, \alpha_3. \end{cases}$$

3.3. ПОНЯТИЕ *n*-МЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Пространства $\boldsymbol{R^2}$ и $\boldsymbol{R^3}$ имеют базисы из двух и трёх векторов, векторы в этих пространствах соответственно имеют две и три координаты. Рассмотрим обобщение этих пространств – пространство $\boldsymbol{R^n}$, векторы в котором содержат n координат. Векторами пространства $\boldsymbol{R^n}$ называются упорядоченные наборы из n чисел:

$$\overline{x} \in \boldsymbol{R^n} \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = (x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n).$$

Пространство $\boldsymbol{R^n}$ называется арифметическим пространством. Операции сложения векторов и умножения вектора на число определяются так же, как и в пространствах $\boldsymbol{R^2}$ и $\boldsymbol{R^3}$, когда векторы заданы координатами. Обобщением понятий коллинеарности и компланарности является понятие линейной зависимости.

3.3.1. ЛИНЕЙНАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Определение 3.11. Система векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}$ пространства $\boldsymbol{R^n}$ называется линейно зависимой, если существует ненулевой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ (набор называется нулевым, если $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$) такой, что выполняется равенство

$$\alpha_1 \overline{x_1} + \alpha_2 \overline{x_2} + ... + \alpha_m \overline{x_m} = \overline{\varnothing}, \tag{3.4}$$

где $\overline{\varnothing}$ – нулевой вектор (вектор с нулевыми координатами). Если же для векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}$ равенство (3.4) выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, то эти векторы называются линейно независимыми.

***Теорема* 3.3.** Система из m векторов пространства $\boldsymbol{R^n}$ является линейно независимой тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из координат этих векторов, равен m.

Доказательство. Подставим в равенство (3.4) вместо векторов соответствующие им наборы чисел:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ ... \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ ... \\ x_{2n} \end{pmatrix} + ... + \alpha_m \begin{pmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ ... \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix},$$

здесь в столбцах расположены наборы чисел x_{ij}, $j = 1, ..., n$, соответствующие вектору $\overline{x_i}$, $i = 1, ..., m$. Выполним действия по правилам линейных операций в пространстве $\boldsymbol{R^n}$. Так как каждый вектор в $\boldsymbol{R^n}$ однозначно определяется упорядоченным набором чисел, приравняем «координаты» равных векторов, получим систему n линейных однородных алгебраических уравнений с m неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$:

$$\begin{cases} x_{11}\alpha_1 + x_{21}\alpha_2 + ... + x_{m1}\alpha_m = 0, \\ x_{12}\alpha_1 + x_{22}\alpha_2 + ... + x_{m2}\alpha_m = 0, \\ \qquad ... \\ x_{1n}\alpha_1 + x_{2n}\alpha_2 + ... + x_{mn}\alpha_m = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Очевидно, в силу эквивалентных преобразований, линейная независимость системы векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}$ эквивалентна тому, что однородная система (3.5) имеет единственное нулевое решение. Совместная система тогда и только тогда имеет единственное решение, когда ранг матрицы системы (матрица системы составлена из координат векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_m}$) равен числу неизвестных, т.е. m.

Теорема доказана.

На практике теорема 3.3 используется для установления факта линейной зависимости или независимости векторов пространства $\boldsymbol{R^n}$.

3.3.2. БАЗИС В *n*-МЕРНОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 3.12. Любая упорядоченная система n линейно независимых векторов пространства $\boldsymbol{R^n}$ называется его базисом.

***Теорема* 3.4.** Каждый вектор пространства $\boldsymbol{R^n}$ единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов базиса.

Доказательство. Пусть $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; ...; \overline{e_n}\right\}$ – базис в $\boldsymbol{R^n}$; $\overline{x}$ – произвольный вектор из $\boldsymbol{R^n}$. Если покажем, что существует единственный набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ такой, что выполняется равенство

$$\overline{x} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} + ... + \lambda_n \overline{e_n}\ , \tag{3.6}$$

то теорема будет доказана. Преобразуем равенство (3.6), подставляя вместо векторов соответствующие наборы чисел:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ ... \\ e_{1n} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ ... \\ e_{2n} \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} e_{n1} \\ e_{n2} \\ ... \\ e_{nn} \end{pmatrix},$$

здесь в левом столбце расположен набор чисел, соответствующих вектору $\overline{x}$, а в столбцах правой части расположены наборы чисел $e_{ij}\left(j = \overline{1, n}\right)$, соответствующие вектору $\overline{e_i}\left(i = \overline{1, n}\right)$. Выполним действия по правилам линейных операций в пространстве $\boldsymbol{R^n}$. Так как каждый вектор в $\boldsymbol{R^n}$ однозначно определяется упорядоченным набором чисел, приравняем координаты векторов. В результате получим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$:

$$\begin{cases} e_{11}\lambda_1 + e_{21}\lambda_2 + \ldots + e_{n1}\lambda_n = x_1, \\ e_{12}\lambda_1 + e_{22}\lambda_2 + \ldots + e_{n2}\lambda_n = x_2, \\ \ldots \\ e_{1n}\lambda_1 + e_{2n}\lambda_2 + \ldots + e_{nn}\lambda_n = x_n. \end{cases}$$

Так как векторы $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}$ являются базисом, то они линейно независимы и по теореме 3.3 ранг матрицы этой линейной системы равен числу векторов, т.е. n. Тогда система имеет единственное решение, т.е. существует единственный набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, удовлетворяющих равенству (3.6). *Теорема доказана.*

Выражение (3.6) называется разложением вектора $\overline{x}$ по базису $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\right\}$. Коэффициенты разложения вектора $\overline{x} \in \boldsymbol{R^n}$ по базису называются координатами $\overline{x}$ в данном базисе (определение 3.10).

Обозначение: $\overline{x} = (\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n)$ в базисе $\left\{\overline{e_1}; \overline{e_2}; \ldots; \overline{e_n}\right\}$.

3.4. ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТАХ

3.4.1. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Под осью понимается прямая, на которой задано начало отсчёта, масштаб и положительное направление.

Определение 3.13. Проекцией точки M на ось l называется точка M_1, являющаяся основанием перпендикуляра, проведённого из M на эту ось (рис. 3.5).

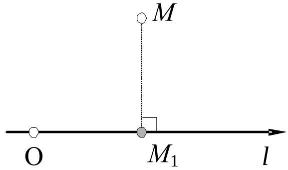


Рис. 3.5

Определение 3.14. Проекцией вектора $\overline{a}$ на ось l называется число, равное длине отрезка AB этой оси, заключённого между проекциями начала и конца вектора $\overline{a}$, взятое со знаком «+», если отрезок AB ориентирован (считая от A к B) в положительную сторону оси l и со знаком «–» – в противном случае (рис. 3.6). Обозначение: $\text{пр}_l\,\overline{a}$.

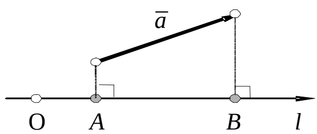


Рис. 3.6

***Теорема* 3.5.** Проекция вектора на ось равна произведению его модуля на косинус угла между вектором и положительным направлением оси:

$$\text{пр}_l\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right| \cos\varphi. \qquad (3.7)$$

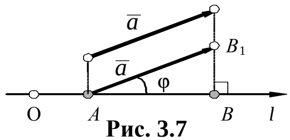


Рис. 3.7

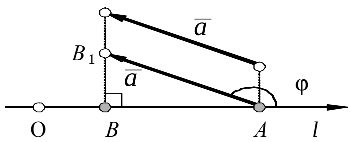


Рис. 3.8

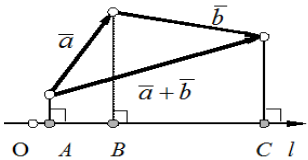


Рис. 3.9

Доказательство. Из ΔABB_1 получаем: $AB = AB_1 \cos\varphi = |\overline{a}| \cos\varphi$ (рис. 3.7). Если направление отрезка AB совпадает с положительным направлением оси l, получаем равенство: $\text{пр}_l\, \overline{a} = AB = |\overline{a}|\cos\varphi$, в случае противоположной ориентации: $\text{пр}_l\, \overline{a} = -AB = AB_1 \cos(\pi-\varphi) = |\overline{a}|\cos\varphi$ (см. рис. 3.8). *Теорема доказана*.

Свойства линейности проекции.

Свойство 1. Проекция суммы двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на ось равна сумме их проекций на ту же ось, т.е.

$$\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = \text{пр}_l\, \overline{a} + \text{пр}_l\, \overline{b}\cdot$$

Доказательство в случае одного из возможных положений векторов следует из рис. 3.9:

$$\text{пр}_l\left(\overline{a}+\overline{b}\right) = AC = AB + BC = \text{пр}_l\, \overline{a} + \text{пр}_l\, \overline{b}\cdot$$

Свойство 2. При умножении вектора на число λ его проекция умножается на это число $\text{пр}_l\left(\lambda\overline{a}\right) = \lambda\text{пр}_l\, \overline{a}$.

Доказательство. При $\lambda > 0$ векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ образуют один и тот же угол с осью l $\Rightarrow \text{пр}_l\left(\lambda\overline{a}\right) = |\lambda\overline{a}|\cos\varphi = \lambda\,|\overline{a}|\cos\varphi = \lambda\text{пр}_l\,\overline{a}$; при $\lambda < 0$ векторы $\overline{a}$ и $\lambda\overline{a}$ образуют с осью l соответственно углы φ и $\varphi+\pi \Rightarrow \text{пр}_l\left(\lambda\overline{a}\right) = |\lambda\overline{a}|\cos(\varphi+\pi) = |\lambda|\,|\overline{a}|\left(-\cos\varphi\right) = \lambda\overline{a}\cos\varphi = \lambda\text{пр}_l\,\overline{a}$.

При $\lambda=0$ имеем очевидное равенство $\text{пр}_l\left(\lambda\overline{a}\right) = \text{пр}_l\,\overline{\varnothing} = 0 = 0\cdot\text{пр}_l\,\overline{a}$.

Следствие из свойств 1 и 2: $\text{пр}_l\left(\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b}\right) = \lambda_1\text{пр}_l\overline{a} + \lambda_2\text{пр}_l\overline{b}$.

3.4.2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ДЕКАРТОВЫЙ БАЗИС

Направление любого вектора определяется его ортом.

Определение 3.15. Единичным вектором или ортом вектора $\overline{a}$ называется вектор $\overline{a^o}$, который имеет одинаковое направление с вектором $\overline{a}$ и модуль, равный единице.

Рассмотрим три попарно перпендикулярных единичных вектора (орта) $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. В зависимости от их взаимного расположения они могут составлять правую (рис. 3.10) или левую (рис. 3.11) систему координат. Для определения ориентации тройки векторов в пространстве (левая или правая) можно воспользоваться правилом буравчика.

Правило буравчика. Для определения ориентации тройки некомпланарных векторов в пространстве (левая или правая) необходимо: мысленно поместить буравчик (винт) на место третьего вектора и начать его вращать кратчайшим образом от первого до второго вектора. Если при этом поступательное движение буравчика (винта) совпадёт с направлением третьего вектора, то тройка векторов – правая.

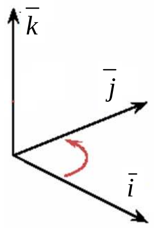


Рис. 3.10

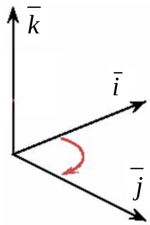


Рис. 3.11

Орты $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – некомпланарны, поэтому они образуют базис в $\boldsymbol{R}^3$. Этот базис получил название – прямоугольный декартовый базис.

В дальнейшем все преобразования с векторами будут, по умолчанию, производиться в прямоугольном декартовом базисе.

3.4.3. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ДЕКАРТОВОМ БАЗИСЕ

Координаты вектора в прямоугольном декартовом базисе имеют простой геометрический смысл. Возьмём произвольный вектор $\overline{a} \in \boldsymbol{R}^3$ и перенесём начала векторов $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и $\overline{a}$ в общую точку O, которая будет началом отсчёта (рис. 3.12). Построим оси Ox, Oy и Oz, направление и масштаб которых определяются соответственно векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$ и $\overline{k}$. Получили прямоугольную декартовую систему координат. На рисунке 3.12 приведено одно из возможных расположений вектора $\overline{a}$.

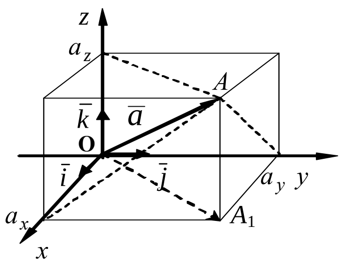


Рис. 3.12

Построим параллелепипед, у которого три ребра лежат на осях координат, а диагональю является вектор $\overline{a}$. Тогда по правилу параллелограмма $\overline{a} = \overline{OA_1} + \text{пр}_{Oz}\,\overline{a}\,\overline{k}$, где A_1 – проекция точки A (конца вектора $\overline{a}$) на координатную плоскость Oxy. Вектор $\overline{OA_1}$ тоже можно разложить на сумму двух векторов по правилу параллелограмма: $\overline{OA_1} = \text{пр}_{Ox}\,\overline{a}\,\overline{i} + \text{пр}_{Oy}\,\overline{a}\,\overline{j}$. Тогда разложение вектора $\overline{a}$ по прямоугольному декартову базису $\left\{\overline{i};\ \overline{j};\ \overline{k}\right\}$ примет вид

$$\overline{a} = \text{пр}_{Ox}\,\overline{a}\,\overline{i} + \text{пр}_{Oy}\,\overline{a}\,\overline{j} + \text{пр}_{Oz}\,\overline{a}\,\overline{k}, \tag{3.8}$$

т.е. координатами вектора являются его проекции на соответствующие координатные оси (направления базисных векторов). Обозначим их a_x, a_y и a_z соответственно, тогда $\overline{a} = \left(a_x;\ a_y;\ a_z\right)$. Если вектор $\overline{a}$ расположен в другом координатном октанте, то некоторые из его проекций, а, следовательно, и координат, будут отрицательными.

Найдём координаты орта вектора $\overline{a}$ в базисе $\left\{\overline{i};\ \overline{j};\ \overline{k}\right\}$:

$$\overline{a^o} = \frac{1}{\left|\overline{a}\right|}\,\overline{a} = \left(\frac{\text{пр}_{Ox}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}\,\overline{i} + \frac{\text{пр}_{Oy}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}\,\overline{j} + \frac{\text{пр}_{Oz}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}\,\overline{k}\right) = \left(\frac{\text{пр}_{Ox}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|};\ \frac{\text{пр}_{Oy}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|};\ \frac{\text{пр}_{Oz}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|}\right).$$

Координатами вектора $\overline{a^o}$ являются коэффициенты при базисных векторах. По теореме 3.5 отношение проекции вектора на ось к модулю вектора равно косинусу угла между осью и вектором, т.е.

$$\frac{\text{пр}_{Ox}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|} = \cos\alpha,\ \frac{\text{пр}_{Oy}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|} = \cos\beta,\ \frac{\text{пр}_{Oz}\,\overline{a}}{\left|\overline{a}\right|} = \cos\gamma, \tag{3.9}$$

где α, β, γ – углы между соответствующими осями координат и вектором $\overline{a}$ (рис. 3.13). Косинусы этих углов называются направляющими косинусами. Таким образом, координатами орта являются направляющие косинусы $\overline{a^o} = \left(\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\right)$.

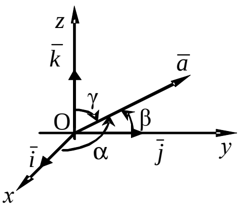


Рис. 3.13

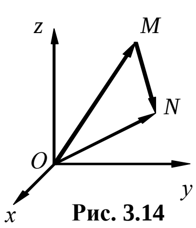


Рис. 3.14

Любую точку M в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ можно задать её радиус-вектором $\overline{OM}$ (рис. 3.14) и рассматривать координаты точки как координаты её радиус-вектора. Тогда произвольный вектор $\overline{MN} \in \boldsymbol{R}^3$ можно представить как разность радиус-векторов $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$.

Если известны координаты конца $N\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и начала $M\,(x_1; y_1;\ z_1)$ вектора (такие же координаты имеют соответственно векторы $\overline{ON}$ и $\overline{OM}$), то по правилам линейных операций над векторами получим $\overline{MN} = \left(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\right)$. Таким образом, чтобы найти координаты вектора, надо из координат его конца вычесть координаты начала.

3.4.4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Определение 3.16. Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\bar{a}\bar{b}$ (или $(\bar{a}, \bar{b})$), равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними (рис. 3.15):

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi . \qquad (3.10)$$

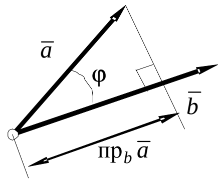


Рис. 3.15

Из *определения* 3.16 и *теоремы* 3.5 следует:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\ \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a} . \qquad (3.11)$$

Свойства скалярного произведения.

1. Коммутативность $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;
2. Дистрибутивность $(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$;
3. $(\bar{a}, \lambda\bar{b}) = (\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$;
4. $\bar{a}\,\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Доказательство свойств скалярного произведения.
Свойство 1. Доказательство получается непосредственно из (3.10):

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi = |\bar{b}|\,|\bar{a}|\cos\varphi = \bar{b}\bar{a} .$$

Свойство 2. Доказательство следует из (3.11) и свойств проекции:

$$(\bar{a}+\bar{b})\bar{c} = |\bar{c}|\ \text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a}+\bar{b}) = |\bar{c}|\ \text{пр}_{\bar{c}}\,\bar{a} + |\bar{c}|\ \text{пр}_{\bar{c}}\,\bar{b} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} .$$

Свойство 3. При $\lambda = 0$ – свойство очевидно. Пусть $\lambda > 0$, тогда угол между векторами $\bar{a}$ и $\lambda\bar{b}$ такой же, как и между $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е. φ. Из определения 3.16 получим:

$$(\bar{a}, \lambda\bar{b}) = |\bar{a}|\,|\lambda\bar{b}|\cos\varphi = \lambda|\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi = (\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}).$$

Пусть $\lambda < 0$, тогда угол между векторами $\bar{a}$ и $\lambda\bar{b}$ равен $\varphi \pm \pi$, так как направление вектора $\lambda\bar{b}$ отличается на π от направления вектора $\bar{b}$ (противоположное к $\bar{b}$), тогда

$$(\bar{a}, \lambda\bar{b}) = |\bar{a}|\,|\lambda\bar{b}|\cos(\varphi+\pi) = (-\lambda)\,|\bar{a}||\bar{b}|(-\cos\varphi) =$$
$$= \lambda|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi = (\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b}).$$

Свойство 4. Из определения (3.16) следует:

$$\bar{a}\,\bar{a} = |\bar{a}|\,|\bar{a}|\cos 0^\circ = |\bar{a}|\,|\bar{a}| = |\bar{a}|^{\,2}.$$

***Теорема* 3.6.** Для того, чтобы два ненулевых вектора были ортогональны (перпендикулярны), необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю: $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\,\bar{b} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Дано: $\bar{a} \perp \bar{b}$. Пусть φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, тогда $\cos\varphi = 0$ и $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi = 0$.

Достаточность. Дано: $\bar{a}\,\bar{b} = 0$. По определению (3.16) $\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$. Из условия теоремы следует, что $|\bar{a}| \neq 0,\ |\bar{b}| \neq 0,$ поэтому $\cos\varphi = 0$. Тогда $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, т.е. векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны. *Теорема доказана*.

Теорема даёт признак ортогональности ($\bar{a} \perp \bar{b}$) векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

3.4.5. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Найдём формулу вычисления скалярного произведения векторов, если векторы заданы координатами в базисе $\{\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k}\}$. Пусть

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = (a_x; a_y; a_z),\ \ \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} = (b_x; b_y; b_z).$$

По свойствам скалярного произведения

$$\bar{a}\,\bar{b} = \left(a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}\right)\left(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}\right) =$$
$$= a_xb_x\bar{i}\,\bar{i} + a_xb_y\bar{i}\,\bar{j} + a_xb_z\bar{i}\,\bar{k} + +a_yb_x\bar{j}\,\bar{i} + a_yb_y\bar{j}\,\bar{j} +$$
$$+ a_yb_z\bar{j}\,\bar{k} + a_zb_x\bar{k}\,\bar{i} + a_zb_y\bar{k}\,\bar{j} + a_zb_z\bar{k}\,\bar{k}\ .$$

Найдём скалярные произведения векторов прямоугольного декартового базиса. По свойствам скалярного произведения, учитывая, что они являются попарно ортогональными векторами, имеем:

$$\bar{i}\,\bar{i} = \bar{j}\,\bar{j} = \bar{k}\,\bar{k} = 1,\ \ \bar{i}\,\bar{j} = \bar{i}\,\bar{k} = \bar{j}\,\bar{i} = \bar{j}\,\bar{k} = \bar{k}\,\bar{i} = \bar{k}\,\bar{j} = 0\cdot$$

В результате получим:

$$\bar{a}\,\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z\,, \tag{3.12}$$

т.е. скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Используя формулу (3.12), можно записать признак ортогональности векторов в координатной форме

$$\bar{a} \perp \bar{b} \;\Leftrightarrow\; a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 .$$

Пример 3.1. Доказать, что диагонали AC и BD четырёхугольника с вершинами $A(1;\ -2;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(-4;\ 1;\ 1)$ и $D(-5;\ -5;\ 3)$ взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдём координаты векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ (рис. 3.16), вычитая из координат конца соответствующие координаты начала вектора:

$$\overline{AC} = \{-4-1;\ 1+2;\ 1-2\} = \{-5;\ 3;\ -1\};$$

$$\overline{BD} = \{-5-1;\ -5-4;\ 3-0\} = \{-6;\ -9;\ 3\}.$$

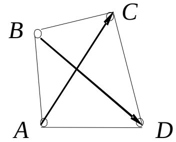


Рис. 3.16

По признаку ортогональности векторов

$$\overline{AC} \perp \overline{BD} \;\Leftrightarrow\; \overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0 ,$$

поэтому вычислим скалярное произведение векторов $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ по формуле (3.10): $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = -5 \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) - 1 \cdot 3 = 30 - 27 - 3 = 0$. Следовательно, векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ ортогональны.

Метод «Операции с векторами в координатах» позволяет решать обширный круг задач по нахождению различных геометрических характеристик векторов (некоторые из них приведены ниже).

1. Нахождение модуля вектора (свойство 4 скалярного произведения и формула (3.12)):

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\ \bar{a})} \;\Rightarrow\; |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

2. Нахождение косинуса угла между векторами (определение скалярного произведения и формула (3.12)):

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} .$$

3. Нахождение проекции вектора на вектор (формулы (3.11) и (3.12)):

$$\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{a}\,\bar{b}}{|\bar{a}|} \;\Rightarrow\; \text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} .$$

4. Нахождение координат орта. Координатами являются направляющие косинусы: $\overline{a^o} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$. По формулам (3.9) и из геометрического смысла координат вектора в базисе $\{\overline{i}\ ;\ \overline{j}\ ;\ \overline{k}\ \}$ имеем:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|},$$

где $|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Из формулы нахождения модуля вектора в координатах, учитывая, что $|\overline{a^o}| = 1$, получаем основное свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (3.13)$$

3.5. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

3.5.1. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Определение 3.17. Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ (рис. 3.17), удовлетворяющий условиям:

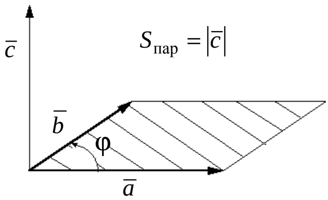


Рис. 3.17

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\,\sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$;

2) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая.

Геометрический смысл модуля векторного произведения (рис. 3.17). По определению $|\overline{c}| = |\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$. С другой стороны, площадь параллелограмма со сторонами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равна $S_{\text{пар}} = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\,\sin\varphi$. Таким образом, длина вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ выражается числом, равным площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Свойства векторного произведения.

Свойство 1. Признак коллинеарности векторов.

***Теорема* 3.7.** Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю: $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{\varnothing}$.

Доказательство прямого утверждения. Действительно, если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарные ($\overline{a} \parallel \overline{b}$), то $\sin\varphi = 0$ $(\varphi = 0 \vee \varphi = \pi)$. В результате получаем: $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \overline{a} \times \overline{b} = \overline{\varnothing}$.

Доказательство обратного утверждения. Если $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{\varnothing}$, то $|\overline{a} \times \overline{b}| = 0$ лишь в одном из трёх случаев: $|\overline{a}| = 0$, $|\overline{b}| = 0$ или $\sin\varphi = 0$. В первых двух случаях, поскольку нулевой вектор имеет произвольное направление, имеем: $\overline{a} \parallel \overline{b}$. В третьем случае $\overline{a} \parallel \overline{b}$, так как $\varphi = 0$ ($\varphi = \pi$), т.е. $\overline{a} \parallel \overline{b}$. *Теорема доказана.*

Свойство 2. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$ (свойство антикоммутативности).

Доказательство (рис. 3.18). Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – коллинеарны, то свойство очевидно, если неколлинеарны, то векторы $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{b} \times \overline{a}$ имеют одинаковую длину $\left(|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi = |\overline{b}||\overline{a}|\sin\varphi = |\overline{b} \times \overline{a}|\right)$ и противонаправлены. Действительно, $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{b} \times \overline{a}$ перпендикулярны плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, но тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{a} \times \overline{b}$ – правая, и если переставить местами первые два вектора, то получается левая тройка векторов $\overline{b}$, $\overline{a}$ и $\overline{a} \times \overline{b}$. При изменении направления третьего вектора на противоположное – изменяется ориентация векторов и теперь тройка $\vec{b}$, $\overline{a}$ и $-\overline{a} \times \overline{b}$ – правая. То есть векторы $\overline{a} \times \overline{b}$ и $\overline{b} \times \overline{a}$ имеют противоположные направления. Таким образом, $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$. *Свойство доказано.*

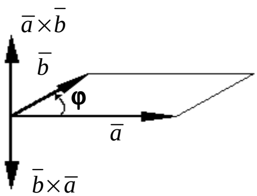


Рис. 3.18

Свойство 3. $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$ – скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения.

Доказательство.

1. Пусть имеет место $(\overline{a} \parallel \overline{b}) \vee (\lambda = 0)$, тогда, очевидно, выполнено свойство 3, так как $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = \vec{\varnothing}$.

2. Если $(\overline{a} \parallel \overline{b}) \vee (\lambda = 0)$ не выполнено, то из условий определения 3.17 имеем:

1) векторы $(\lambda\overline{a}) \times \overline{b}$ и $\lambda(\overline{a} \times \overline{b})$ одинаковой длины (рис. 3.19), так как

$$|(\lambda\overline{a}) \times \overline{b}| = \begin{cases} |\lambda||\overline{a}||\overline{b}| \sin(\pi - \phi), & \lambda < 0; \\ |\lambda||\overline{a}||\overline{b}| \sin\phi, & \lambda > 0 \end{cases} = |\lambda||\overline{a}||\overline{b}| \sin\phi = |\lambda(\overline{a} \times \overline{b})|;$$

2) вектор $\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}$ перпендикулярен плоскости векторов $\lambda\overline{a}$ и $\overline{b}$, следовательно, перпендикулярен и плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, так как $\lambda\overline{a}\parallel\overline{a}$; вектор $\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$ также перпендикулярен плоскости векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, так как $\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\parallel\overline{a}\times\overline{b}$. Получаем коллинеарность $\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}$ и $\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$;

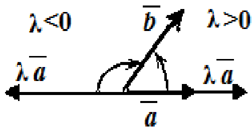


Рис. 3.19

3) тройка векторов $\left\{\overline{a},\,\overline{b},\,\overline{a}\times\overline{b}\right\}$ – правая:

• при $\lambda>0$ тройка $\left\{\lambda\overline{a},\,\overline{b},\,\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\right\}$ – правая, ибо направление обхода векторов $\left\{\overline{a};\,\overline{b}\right\}$ и $\left\{\lambda\overline{a};\,\overline{b}\right\}$ не меняется (рис. 3.19, $\lambda>0$);

• при $\lambda<0$ имеет место соотношение $\lambda=-|\lambda|$. Тройка векторов $\left\{-|\lambda|\overline{a},\;\overline{b},\;|\lambda|\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\right\}$ – левая, так как направление обхода меняется на противоположное – по часовой стрелке (рис. 3.19, $\lambda<0$), а тройка $\left\{-|\lambda|\overline{a},\,\overline{b},-|\lambda|\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\right\}=\left\{\lambda\overline{a},\,\overline{b},\,\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\right\}$ – правая, так как изменилось направление третьего вектора.

Заметим, что и тройка векторов $\left\{\lambda\overline{a},\,\overline{b},\,\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}\right\}$ – правая. В результате получим, что вектора $\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}$ и $\lambda\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)$ – сонаправлены (вектора сонаправлены, если они параллельны и одинаково направлены), коллинеарны и равны по длине, т.е. они равны. *Свойство доказано.*

Замечание. Для упрощения используется запись $\left(\lambda\overline{a}\right)\times\overline{b}=\lambda\overline{a}\times\overline{b}$.

Свойство 4. Векторное произведение подчиняется дистрибутивному закону: $\overline{a}\times\left(\overline{b}+\overline{c}\right)=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$. *Без доказательства.*

3.5.2. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В КООРДИНАТАХ

Найдём формулу вычисления векторного произведения, если векторы заданы координатами:

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}=\left(a_x;\,a_y;\,a_z\right);\quad \overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}=\left(b_x;\,b_y;\,b_z\right).$$

По свойствам векторного произведения (свойства 3, 4):

$$\begin{aligned}\overline{a}\,\overline{b}&=\left(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\right)\left(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\right)=\\&=a_xb_x\left(\overline{i}\,\overline{i}\right)+a_xb_y\left(\overline{i}\,\overline{j}\right)+a_xb_z\left(\overline{i}\,\overline{k}\right)+a_yb_x\left(\overline{j}\,\overline{i}\right)+a_yb_y\left(\overline{j}\,\overline{j}\right)+\\&+a_yb_z\left(\overline{j}\,\overline{k}\right)+a_zb_x\left(\overline{k}\,\overline{i}\right)+a_zb_y\left(\overline{k}\,\overline{j}\right)+a_zb_z\left(\overline{k}\,\overline{k}\right),\end{aligned}\qquad(3.14)$$

где $\overline{i}\,\overline{i}=\overline{\varnothing}$, $\overline{j}\,\overline{j}=\overline{\varnothing}$, $\overline{k}\,\overline{k}=\overline{\varnothing}$ (свойство 1); векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ образуют правую тройку, а их круговая перестановка (рис. 3.20) ориентации не меняет, поэтому $\bar{i}\ \ \bar{j} = \bar{k}$, $\bar{j}\ \ \bar{k} = \bar{i}$, $\bar{k}\ \ \bar{j} = \bar{k}$; перестановка соседних векторов меняет ориентацию, поэтому $\bar{i}\ \ \bar{k} = -\bar{j}$, $\bar{j}\ \ \bar{i} =$ $= -\bar{k}$, $\bar{k}\ \ \bar{j} = -\bar{i}$. Подставим данные выражения в (3.14). После группировки соответственно получим:

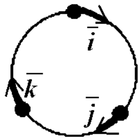


Рис. 3.20

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\bar{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\bar{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\bar{k} \ .$$

Последнее равенство есть не что иное, как разложение определителя по первой строке. В результате получена формула вычисления векторного произведения в координатах

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} . \qquad (3.15)$$

Пример 3.2. Пусть система векторов $\left\{\overline{AB};\ \ \overline{AC};\ \ \overline{AD}\right\}$ образует некоторый базис $\boldsymbol{R}^{\mathbf{3}}$: $\overline{AB} = (1;\ 2;\ 0)$, $\overline{AC} = (1;\ 0;\ 3)$, $\overline{AD} = (1;\ 2;\ 3)$. Определить, является ли правой данная система векторов.

Решение:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\bar{k} = (6;\ -3;\ -2).$$

Система векторов $\left\{\overline{AB};\overline{AC};\overline{AB}\times\overline{AC}\right\}$ является правой по свойству 3 векторного произведения, следовательно, если вектор $\overline{AD}$ сонаправлен вектору $\overline{AB}\times\overline{AC}$, то система векторов $\left\{\overline{AB};\overline{AC};\overline{AD}\right\}$ – правая. Сонаправленность векторов определяется с помощью скалярного произведения: $\left(\overline{AD},\ \ \overline{AB}\times\overline{AC}\right) = -6 < 0$, т.е. угол между соответствующими векторами более $\pi/2$. Поэтому исходная система – левая.

Ответ: система векторов $\left\{\overline{AB};\ \ \overline{AC};\ \ \overline{AD}\right\}$ является левой.

Нахождение площади параллелограмма

Чтобы найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 3.17), необходимо, во-первых, найти векторное произведение $\bar{a}\times\bar{b}$ по формуле (3.15), а затем вычислить длину найденного вектора. В результате получим $S_{\text{пар}} = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$.

Если векторы лежат на плоскости Oxy, т.е. $\overline{a}$, $\overline{b} \in \boldsymbol{R^2}$,

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} = (a_x; a_y);\ \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} = (b_x; b_y),$$

то площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна

$$S_{\text{пар}} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \left\| \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} \right\| = \left| \overline{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right| = \left|\overline{k}\right| \left\| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\|.$$

Геометрический смысл определителя второго порядка: модуль определителя равен площади параллелограмма, построенного на векторах, координаты которых расположены в строках определителя.

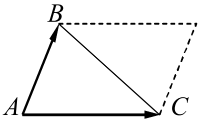


Рис. 3.21

Пример 3.3. Найти площадь треугольника ABC: $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ 4)$, $C(-2;\ 1)$ (рис. 3.21).

Решение. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB} = (4;\ 2)$ и $\overline{AC} = (-1;\ -1)$, т.е.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{\text{пар}} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|-2\right| = 1.$$

Ответ: $S_{ABC} = 1$.

3.6. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

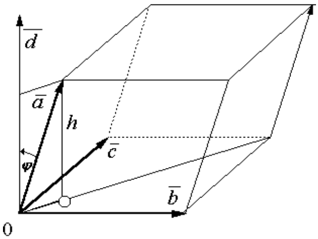


Рис. 3.22

Определение 3.18. Смешанным произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется число $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$, т.е. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{a}\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)$.

Геометрический смысл модуля смешанного произведения – объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (см. рис. 3. 22):

$$\overline{d} = \overline{b}\times\overline{c},\ h = \pm\text{пр}_{\overline{d}}\ \overline{a} \Rightarrow V = S_{\text{осн}}h = \left|\overline{b}\times\overline{c}\right|\left(\pm\,\text{пр}_{\overline{d}}\ \overline{a}\right) = \left|\overline{a}\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\right| = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|.$$

Знак «$\pm$» необходим, чтобы высота была положительной.

Найдём формулу для вычисления смешанного произведения векторов, если векторы заданы координатами:

$$\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k},\ \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k},\ \overline{c} = c_x\overline{i} + c_y\overline{j} + c_z\overline{k}.$$

Тогда $\overline{b}\times\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}$.

В результате получим формулу вычисления смешанного произведения в координатах:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\overline{a}\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=a_x\begin{vmatrix}b_y & b_z\\ c_y & c_z\end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix}b_x & b_z\\ c_x & c_z\end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix}b_x & b_y\\ c_x & c_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \quad (3.16)$$

Учитывая формулу (3.16), получаем геометрический смысл определителя третьего порядка: модуль определителя равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах, координаты которых расположены в строках определителя.

Свойства смешанного произведения

Свойство 1. От перестановки местами двух векторов смешанное произведение меняет знак: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{b}\overline{a}\overline{c}$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{a}\overline{c}\overline{b}$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=-\overline{c}\overline{b}\overline{a}$.

Свойство 2. При круговой перестановке (рис. 3. 20) векторов смешанное произведение не меняется: $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\overline{c}\overline{a}\overline{b}=\overline{b}\overline{c}\overline{a}$.

Докажем свойства 1 и 2 , используя формулу (3.16) и п. 2.2.3:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\overline{b}\overline{a}\overline{c},$$

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ a_x & a_y & a_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=\overline{b}\overline{c}\overline{a}.$$

Свойство 3. Признак компланарности векторов.

***Теорема* 3.8.** Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство. Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ – компланарны (т.е. лежат в одной или параллельных плоскостях) тогда и только тогда, когда $\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\perp\overline{a}$ (рис. 3. 23). Следовательно, по признаку ортогональности, скалярное произведение $\overline{a}\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=0$. *Теорема доказана.*

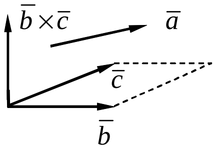


Рис. 3.23

Условие компланарности векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 .$$

С помощью смешанного произведения можно решать *задачи на вычисление объёмов многогранников.*

Задача 1. Вычисление объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, как на сторонах (рис. 3. 22): $V_{\text{пар}} = S_{\text{осн}}\, h = \left| \overline{a}\overline{b}\overline{c} \right|$.

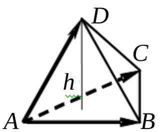


Рис. 3.24

Задача 2. Вычисление объёма пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, как на сторонах $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$ и $\overline{AD} = \overline{c}$ (рис. 3.24):

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{ABC}\, h = \frac{1}{6} \left| \overline{a}\overline{b}\overline{c} \right|.$$

Пример 3.4. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2; -1; -1)$, $B(5; -1; 2)$, $C(3; 0; -3)$ и $D(6; 0; -1)$. Найти объём пирамиды и высоту, проведённую из вершины D.

Решение. На рисунке 3.24 изображена пирамида $ABCD$, в основании которой – треугольник ABC. Объём пирамиды определим с помощью смешанного произведения векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$. Вычислим предварительно их координаты: $\overline{AB} = (3; 0; 3)$; $\overline{AC} = (1; 1; -2)$; $\overline{AD} = (4; 1; 0)$.

Тогда $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \left| \overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} \right| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \left| 3 - 12 + 6 \right| = 0{,}5$.

С другой стороны, $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{ABC}\, h = \frac{1}{6} S_{\text{пар}}\, h \Rightarrow h = \frac{6V_{\text{пир}}}{S_{\text{пар}}}$.

Найдём площадь параллелограмма $S_{\text{пар}}$, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, с помощью векторного произведения этих векторов:

$$S_{\text{пар}} = \left| \overline{AB} \times \overline{AC} \right| = \left\| \begin{matrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| = \left| -3\overline{i} + 9\overline{j} + 3\overline{k} \right| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 3^2} = 3\sqrt{11} .$$

Тогда $h = \frac{6V_{\text{пир}}}{S_{\text{пар}}} = \frac{6 \cdot 0{,}5}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$. *Ответ*: $V_{\text{пир}} = 0{,}5$; $h = \frac{\sqrt{11}}{11}$.

Раздел 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Система координат на плоскости (в общем случае косоугольная или аффинная) определяется некоторой её точкой O и базисом из двух векторов, лежащих в этой плоскости. Точка O называется началом координат. Прямые, проведённые через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. Они лежат в плоскости и называются осями абсцисс и ординат. Каждая ось координат является числовой осью с началом в точке O, положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора. Координатами $(x; y)$ точки M называются координаты радиуса-вектора OM (рис. 4.1).

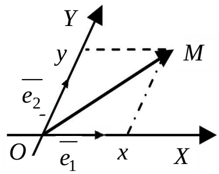


Рис. 4.1

Если базис ортонормированный, то связанная с ним система координат называется декартовой или прямоугольной.

На плоскости часто употребляется полярная система координат (рис. 4.2). Она определяется точкой O, называемой полюсом, и лучом, исходящим из полюса, называемым полярной осью. Полярными координатами ρ и φ точки M называются расстояние ρ от полюса до точки M ($\rho = |OM|$) и угол φ между полярной осью и вектором OM (рис. 4.2).

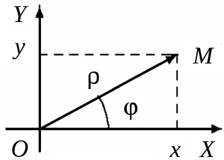


Рис. 4.2

Угол φ называется полярным углом, измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Полярные координаты точки O: $\rho = 0$, угол φ не определён. У остальных точек $\rho > 0$ и угол φ определён с точностью до 2π. Обычно полагают $0 \le \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \le \pi$. Если полюс совпадает с началом прямоугольной декартовой системы координат, а полярная ось – с положительной частью оси абсцисс, то декартовы координаты x и y точки M и её полярные координаты ρ и φ связаны формулами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi = \operatorname{arctg}(y/x). \end{cases} \tag{4.1}$$

4.2. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

В декартовой системе координат на плоскости каждая прямая определяется уравнением первой степени и, обратно, каждое уравнение первой степени определяет прямую.

Определение 4.1. Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется общим уравнением прямой, где $A, B, C \in \boldsymbol{R}$: $A^2+B^2 \neq 0$.

Угловым коэффициентом k прямой называется число $k=\operatorname{tg}(\alpha)$, где α – угол наклона прямой к оси OX $(0 \le \alpha < \pi)$.

Определение 4.2. Уравнение $y=kx+b$ называется уравнением прямой с угловым коэффициентом k (b – ордината точки пересечения прямой с осью OY).

Определение 4.3. Уравнение прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ называется уравнением прямой в отрезках (a – абсцисса точки пересечения прямой с осью OX, b – ордината точки пересечения прямой с осью OY).

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Угол между прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

Условие параллельности прямых: $k_1=k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_1 k_2=-1$.

4.3. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 4.4. Уравнение вида $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Fy+G=0$ называется общим уравнением кривой второго порядка, где $A, B, C, D, F, G \in \boldsymbol{R}$: $A^2+B^2+C^2 \neq 0$.

Определение 4.5. Окружностью называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением $x^2+y^2=R^2$, где $R>0$ – радиус окружности.

Это уравнение называется каноническим уравнением окружности, а система координат, в которой окружность описывается каноническим уравнением, называется канонической. В канонической системе начало координат является центром окружности.

Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ определяет окружность радиуса R с центром в точке $M(a;\, b)$.

Определение 4.6. *Эллипсом* называется кривая второго порядка (рис. 4.3), которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a,\, b>0$ – параметры эллипса.

Это каноническое уравнение эллипса. В канонической системе оси координат являются осями симметрии эллипса. Следовательно, можно ограничиться исследованием функции

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,,\ x\in[0,a],\ y\in[0,b]. \qquad (4.2)$$

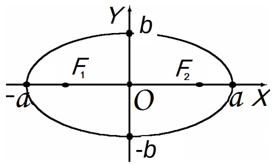


Рис. 4.3

Если отразить полученный график функции (4.2) симметрично относительно осей координат, получаем искомый эллипс (рис. 4.3).

Точки пересечения эллипса с осями координат $(\pm a;\, 0)$ и $(0;\, \pm b)$ называются вершинами эллипса, а соответствующие отрезки a и b – полуосями эллипса. Пусть $a > b$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Точки $F_1(-c;\, 0)$ и $F_2(c;\, 0)$ называются фокусами эллипса.

Замечание. Если $a < b$, то $c=\sqrt{b^2-a^2}$ и фокусы эллипса расположены на оси *OY*: $F_1(0;\, -c)$ и $F_2(0;\, c)$.

Эксцентриситетом эллипса называют отношение расстояния между его фокусами ($2c$) к большой оси ($2a$): $\varepsilon=c/a<1$.

Определение 4.7. *Гиперболой* называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a,\, b>0$ – параметры гиперболы.

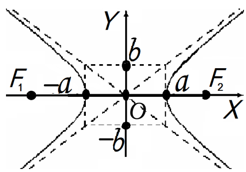


Рис. 4.4

Это каноническое уравнение гиперболы (рис. 4.4). В канонической системе оси координат являются осями симметрии гиперболы. Следовательно, можно ограничиться исследованием функции:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\ ,\ x \in [a, \infty],\ y > 0\,. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) позволяет рассматривать часть гиперболы, лежащую в первой четверти координат. Если же полученную кривую отразить симметрично относительно осей координат, то получится полный график, характеризующий гиперболу. Гипербола имеет две наклонных асимптоты, заданные уравнением $y = \pm\frac{b}{a}x$ (рис. 4.4).

Точки пересечения гиперболы с осью $OX(\pm a;\,0)$ называют вершинами гиперболы (с осью OY пересечений нет); отрезки a и b – полуосями гиперболы (a – действительной, b – мнимой); точки $F_1(-c;\,0)$ и $F_2(c;\,0)$ называют фокусами гиперболы, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; эксцентриситетом гиперболы называют отношение $\varepsilon = c/a > 1$.

Замечание 1. Если $a = b$, то гипербола называется равносторонней. Её уравнение принимает вид: $x^2 - y^2 = a^2$.

Замечание 2. Если фокусы гиперболы лежат на оси OY, то уравнение её имеет вид: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Замечание 3. Уравнение гиперболы с осями, параллельными координатным и с центром $(x_0;\ y_0)$, имеет вид: $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$.

Определение 4.8. *Параболой* называется кривая второго порядка, которая в некоторой декартовой системе координат описывается уравнением $y^2 = 2px,\ p > 0$ – параметр параболы.

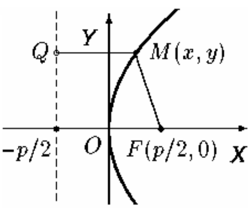


Рис. 4.5

Это каноническое уравнение параболы. В канонической системе ось OX является осью симметрии параболы (рис. 4.5). Следовательно, можно ограничиться исследованием функции

$$y = \sqrt{2px}\,,\ x \in [0,\,\infty],\ y \in [0,\,\infty]\,. \tag{4.4}$$

При $0 \le x \le \infty$ формула (4.4) рассматривает часть параболы, лежащую в первой четверти координат, а для того, чтобы получить всю кривую, необходимо график функции, построенный на основе уравнения (4.4), отразить симметрично относительно оси OX .

Асимптот у параболы нет. Начало координат (0; 0) – вершина параболы (рис. 4.5).

Прямая $x = -p/2$ называется директрисой параболы, а точка $(-p/2\,,\,0)$ – её фокусом.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = -2py$ ($p > 0$) также описывают параболы, ветви которых соответственно направлены влево, вверх и вниз.

Пример 4.1. Привести уравнение кривой второго порядка $4x^2 + y^2 + 16x - 2y - 8 = 0$ к каноническому виду и построить кривую.

Решение. Используется метод выделения полного квадрата:

1) группируем слагаемые, содержащие x или y . Коэффициенты при x^2 (y^2) выносятся за скобки: $4(x^2 + 4x) + (y^2 - 2y) - 8 = 0$;

2) выделяем полный квадрат: $4(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8 + 16 + 1$;

3) приводим к каноническому виду:

$$\frac{4(x+2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{(x+2)^2}{25/4} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1 .$$

Таким образом, получено уравнение эллипса с центром в точке $C(-2;1)$ и полуосями $\frac{5}{2}$ и 5 (рис. 4.6).

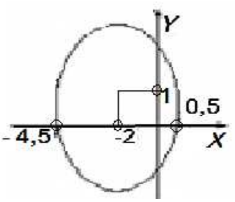


Рис. 4.6

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Система координат в пространстве (в общем случае косоугольная или аффинная) определяется точкой и базисом из трёх векторов. Выбранная точка называется началом координат. Прямые, проведённые через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. В трёхмерном пространстве они называются осями абсцисс, ординат и аппликат. Оси координат являются числовыми осями, исходящими из начала координат, с положительным направлением, совпадающим с направлением соответствующего базисного вектора, и единицей длины, равной длине этого вектора. В частности (рис. 5.1), в качестве начала координат выбрана точка O. Базисными векторами являются $\left\{\overline{e_1};\ \overline{e_2};\ \overline{e_3}\right\}$, образующие оси координат OX, OY и OZ. Координатами точки M являются координаты радиуса-вектора $\overline{OM}(x;\ y;\ z)$, которые получены как стороны параллелепипеда, образованного векторами $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{e_3}$ с диагональю $\overline{OM}$. Численное значение $x = Ox;\ \ y = Oy$ и $z = Oz$ зависит от длины соответствующих векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}$ и $\overline{e_3}$. Если базис ортонормированный, то связанная с ним система координат называется декартовой или прямоугольной.

Цилиндрические и сферические координаты определяются точкой O, исходящим из неё лучом l и единичным вектором $\overline{n} \perp l$ (рис. 5.2).

Проведём через точку O (рис. 5.3) плоскость $P(OXY) \perp \overline{n}.$ $M' = \text{пр}_{P(OXY)} M$.

В цилиндрических координатах положение M определяется числами ρ, φ и z, где ρ, φ – полярные координаты M', а $z = \text{пр}_{\overline{n}}\, \overline{OM} = Oz$.

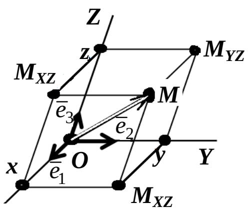


Рис. 5.1

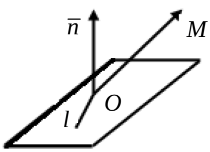


Рис. 5.2

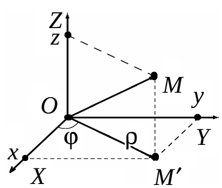


Рис. 5.3

Декартовы координаты x, y и z точки M выражаются через её цилиндрические координаты ρ, φ и z по формулам, почти таким же, как и для полярных координат на плоскости – п. 4.1:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi); \\ y = \rho\sin(\varphi); \\ z = z; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(y/x\right); \\ z = z. \end{cases} \tag{5.1}$$

В сферических координатах (рис. 5.4) положение точки M определяется числами ρ, φ и θ, где $\rho = \left|\overline{OM}\right|$, φ – полярный угол точки M', а θ – угол между векторами $\overline{n}\,(OZ)$ и $\overline{OM}$. Отсчёт угла θ производится от вектора $\overline{n}$ по направлению к вектору $\overline{OM}$ ($0 \le \theta \le \pi$).

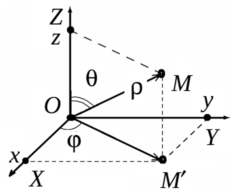


Рис. 5.4

Декартовы координаты x, y и z точки M выражаются через сферические ρ, φ и θ по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\,\sin\theta\,\cos\varphi; \\ y = \rho\,\sin\theta\,\sin\varphi; \\ z = \rho\,\cos\theta; \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right); \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(y/x\right). \end{cases} \tag{5.2}$$

5.2. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Пусть в трёхмерном пространстве задана прямоугольная система координат. Сформулируем следующую задачу: составить уравнение плоскости S, проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно данному вектору $\overline{n} = (A; B; C)$ (рис. 5.5).

Решение. Пусть $P(x, y, z)$ – произвольная точка пространства

$$P \in S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{MP}(x - x_0; y - y_0; z - z_0) \perp \overline{n}(A; B; C).$$

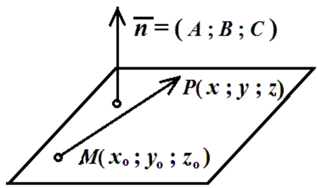


Рис. 5.5

Написав условие ортогональности этих векторов ($\overline{n}$, MP) = 0 в координатной форме, получим искомое уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (5.3)$$

Вектор $\overline{n} = (A;\ B;\ C)$ называется нормальным вектором плоскости.

Вывод: зная нормальный вектор плоскости и координаты любой точки плоскости, можно построить её уравнение.

Общее уравнение плоскости. Если в формуле (5.3) раскрыть скобки и привести подобные члены, получим общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (5.4)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

В декартовой системе координат любая плоскость описывается уравнением первой степени (линейным уравнением). И обратно, любое линейное уравнение определяет плоскость.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1) $Ax + By + Cz = 0$ $(D = 0)$ – плоскость проходит через начало координат;

2) $Ax + By + D = 0$ $(C = 0)$ – плоскость параллельна оси OZ ($Ax + Cz + D = 0$ и $By + Cz + D = 0$ – аналогичны случаю 2);

3) $Ax + By = 0$ $(C = D = 0)$ – плоскость проходит чрез ось OZ ($Ax + Cz = 0$ и $By + Cz = 0$ – аналогичны случаю 3);

4) $Ax + D = 0$ $(B = D = 0)$ – плоскость параллельна плоскости OYZ ($Cz + D = 0$ и $By + D = 0$ – аналогичны случаю 4);

5) $Ax = 0$ $(B = C = D = 0)$ или $x = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью OYZ ($y = 0$ и $z = 0$ – соответственно уравнения плоскостей OXZ и OXY).

Уравнение плоскости в отрезках.

Определение 5.1. Если уравнение плоскости имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, то говорят, что задано уравнение плоскости в отрезках (a, b и c – соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения с плоскостью координатных осей OX, OY и OZ.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки. *Пусть заданы* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *и* $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через эти три точки, находится как определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\,.$$

Пример 5.1. Найти общее уравнение и уравнение плоскости в отрезках, проходящей через точки $M_1(1;\ 2;\ 3)$, $M_2(-2;\ 2;\ 4)$, $M_3(-1;\ 4;\ 5)$.

Решение. Общее уравнение плоскости находим из соотношения

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-2 & 2-2 & 4-3 \\ -1-1 & 4-2 & 5-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-2x+4y-6z+12=0\,.$$

Уравнение плоскости в отрезках будет иметь вид:

$$-2x+4y-6z=-12\,\Big|\,\vdots(-12)\ \Rightarrow\ \frac{x}{6}+\frac{y}{(-3)}+\frac{z}{2}=1\,.$$

Замечание: точками пересечения данной плоскости с осями координат будут следующие $(6;\ 0;\ 0)$, $(0;\ -3;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 2)$.

Ответ. Общее уравнение плоскости: $x-2y+3z+6=0$. Уравнение плоскости в отрезках: $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{(-3)}+\dfrac{z}{2}=1$.

Расстояние от точки до плоскости. Постановка задачи: найти расстояние d от точки $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение: фиксируем точку $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$, принадлежащую плоскости, и строим вектор $\overline{MP}$ (рис. 5.6). Искомое расстояние d равно абсолютной величине проекции вектора $\overline{MP}$ на нормальный вектор плоскости. Получаем:

$$d=\left|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{MP}\right|=\left|\frac{\overline{MP}\,\bar{n}}{|\vec{n}|}\right|,$$

где $\bar{n}=(A;B;C)$ и $\overline{MP}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$.

Ответ: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

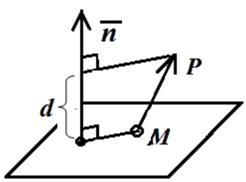


Рис. 5.6

5.3. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Прямая в $\boldsymbol{R}^3$ определяется, вообще говоря, пересечением двух поверхностей, т.е. описывается системой двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{5.5}$$

при условии, что эти плоскости непараллельны, т.е. их нормальные векторы $\overline{n_1} = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\overline{n_2} = (A_2;\ B_2;\ C_2)$ неколлинеарны. Уравнения системы (5.5) называются общими уравнениями прямой в пространстве.

Поставим следующую задачу: составить уравнения прямой, проходящей через данную точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\overline{a} = (l;\ m;\ n)$ ($\overline{a}$ – называется направляющим вектором прямой).

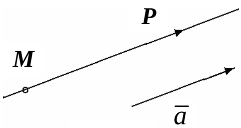


Рис. 5.7

Решение. Пусть $P(x;\ y;\ z)$ – произвольная точка пространства. Построим вектор $\overline{MP} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ (рис. 5.7). Очевидно, что точка P принадлежит прямой тогда и только тогда, когда вектор $\overline{MP}$ коллинеарен $\overline{a}$, т.е. когда их координаты пропорциональны. В результате получим так называемые канонические уравнения прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{5.6}$$

Если в (5.6) ввести параметр t:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

то получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \tag{5.7}$$

5.4. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Угол φ между прямой L: $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ и плоскостью Q: $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой (5.7), тогда координаты точки пересечения находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} x=x_0+lt; \\ y=y_0+mt; \\ z=z_0+nt; \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

Условие параллельности прямой (L) и плоскости (Q) имеет вид:

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Условие перпендикулярности L и Q:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Условие, при котором прямая (L) лежит в плоскости (Q):

$$\begin{cases} Al+Bm+Cn=0; \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$$

Если $Al+Bm+Cn\neq 0$, то прямая пересекает плоскость.

Если $Al+Bm+Cn=0$ и $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq O$ – прямая параллельна плоскости.

Пример 5.2. Пусть заданы плоскость $Q:\sqrt{3}x-2y+5z=6$ и точка $A(x_0;\,y_0;\,z_0)=(1;\,2;\,3)\notin Q$. Найти параметрическое и каноническое уравнения прямой L: $L\perp Q,\;\; A\in L$.

Решение. $A\in L\Rightarrow L$: $\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z-3}{n}$; $L\perp Q\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{l}=\dfrac{-2}{m}=\dfrac{5}{n}=c$.

Пусть $c=1$, тогда каноническое уравнение L будет иметь вид:

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{5}.$$

Пусть $\frac{x-1}{\sqrt{3}}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{5}=t$, тогда параметрическое уравнение прямой L будет иметь вид:

$$\begin{cases} x(t)=1+\sqrt{3}\,t; \\ y(t)=2-2t; \\ z(t)=3+5t. \end{cases}$$

Замечание. Рассматривая частные случаи общего уравнения плоскости, например $C=0$, получим, что $z=z_0$ при сохранении левой части канонического уравнения, а для параметрического уравнения прямой третье уравнение в системе (5.7) примет вид: $z(t)=z_0$.

Пример 5.3. Пусть заданы плоскость Q: $x-2y+3z=2$ и параметрическое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x(t)=3t+2, \\ y(t)=t, \\ z(t)=-2. \end{cases}$$

Найти: координаты M – точки пересечения L с Q.

Решение. Подставим координаты L в Q: $3t+2-2t-6=2 \;\Rightarrow\; t=6$, т.е. получим координаты точки $M\big(x(t);\, y(t);\, z(t)\big)=(20;\, 6;\, -2)$.

Ответ. Точка пересечения L с Q имеет координаты $M(20;\, 6;\, -2)$.

5.5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение 5.2. Общим уравнением поверхности 2-го порядка называется уравнение вида:

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+2Gx+2Hy+2Kz+L=0,$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L \in \boldsymbol{R}: A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2 \neq 0$.

Определение 5.3. Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где $a, b, c > 0$ – параметры эллипсоида (рис. 5.8).

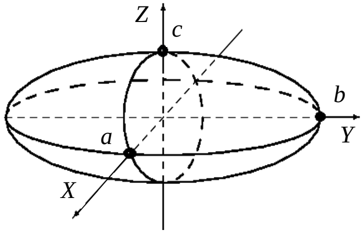


Рис. 5.8

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипсоида, а система координат, в которой эллипсоид описывается каноническим уравнением, называется канонической. При $a=b=c=R$ получаем уравнение сферы.

Определение 5.4. Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a, b, c > 0$ – параметры гиперболоида (рис. 5.9).

Это уравнение является каноническим уравнением однополостного гиперболоида в канонической системе координат.

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z=h$ являются эллипсами: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}+1$.

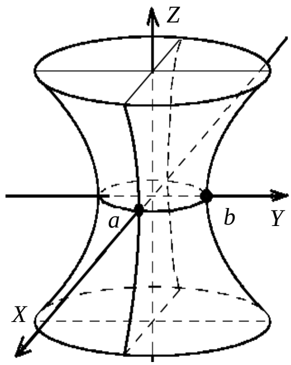


Рис. 5.9

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x=h$ или $y=h$ являются гиперболами: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$ или $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$.

Определение 5.5. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат определяется уравнением, в котором отсутствует одна из переменных, т.е. $F(x, y)=0$ ($F(x, z)=0$ или $F(y, z)=0$).

Свойство. Если некоторая точка $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ принадлежит цилиндрической поверхности, описываемой уравнением $F(x,\ y)=0$, то все точки прямой, проходящей через эту точку параллельно оси OZ, также принадлежат цилиндрической поверхности. Такие прямые называются образующими цилиндрической поверхности, а кривая, описываемая уравнением $F(x,\ y)=0$ и получающаяся в сечении любой плоскостью $z=h$, называется направляющей.

Примеры цилиндрических поверхностей 2-го порядка:

1) эллиптический цилиндр (рис. 5.10) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

2) параболический цилиндр (рис. 5.11) $y^2=2px,\quad p>0$;

3) гиперболический цилиндр (рис. 5.12) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

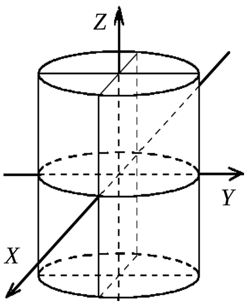


Рис. 5.10

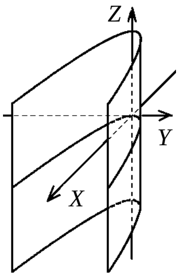


Рис. 5.11

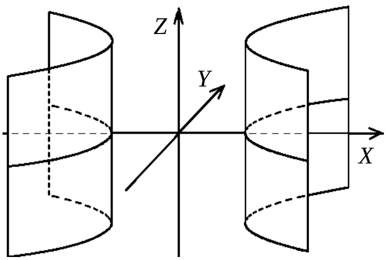


Рис. 5.12

Раздел 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

6. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА *L*

Пусть $L=\{a,\, b,\, ...\}$– множество, состоящее из элементов, называемых векторами; $K=\{\alpha,\, \beta,\, ...\}$– множество так называемых скаляров, обладающих свойствами, как минимум, алгебраического поля.

Например, если $K=\boldsymbol{R}$ (множество вещественных чисел), то говорят о вещественном пространстве L. Аналогично можно рассмотреть комплексное L. В дальнейшем будем рассматривать $K=\boldsymbol{R}$, а для его элементов использовать термин «числа».

Определение 6.1. Множество L называется линейным пространством, если:

I. Определена операция сложения (сумма): $\forall x,\ y\in L \quad x+y\in L$.

II. Определена операция умножения на число: $\forall\lambda\in\boldsymbol{R}$, $\forall x\in L$ $\lambda x\in L$.

III. Определено отношение равенства: $\forall x,\ y\in L \quad (x=y)\oplus(x\neq y)$.

IV. Операции сложения и умножения удовлетворяют 8 условиям:

1. Коммутативность сложения: $x+y=y+x$.
2. Ассоциативность сложения: $x+(y+z)=(z+y)+z$.
3. Ассоциативность умножения на число: $(\lambda\mu)x\in\lambda(\mu x)$.
4. Дистрибутивность по отношению к сложению чисел:
$$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x.$$
5. Дистрибутивность по отношению к сложению векторов:
$$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y.$$
6. Существует элемент $\Theta\in L$, называемый нулевым, такой, что
$$\forall x\in L \quad (x+\Theta=x).$$
7. $\forall x\in L$ имеет место равенство $1\cdot x=x\cdot 1=x$.
8. $\forall x\in L \quad \exists y=(-x)$, называемый противоположным к элементу x, такой, что $x+(-x)=\Theta$.

Замечание: ввиду выполнения свойств 2 и 3 допускается упрощённая запись формул: $x+(y+(z+...))=x+y+z+...$; $(\lambda\mu)x=\lambda\mu x$.

6.2. РАЗМЕРНОСТЬ И БАЗИС. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В L

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n \in L$; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \boldsymbol{R}$.

Определение 6.2. Линейной комбинацией $a_1, a_2, ..., a_n$ называется выражение вида: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение 6.3. Система элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ называется линейно независимой, если $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = \Theta$ только при условии, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$. В противном случае система $a_1, a_2, ..., a_n$ называется линейно зависимой.

Определение 6.4. Любая совокупность n линейно независимых векторов $a_1, a_2, ..., a_n$ называется базисом пространства L, если

$$\forall x \in L \ \exists x_1, x_2, ..., x_n \in \boldsymbol{R}: \ x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n.$$

Такое представление вектора x называется разложением его по данному базису. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются координатами вектора в этом базисе и записываются в виде: $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ или же используется запись в виде матрицы-столбца.

***Теорема* 6.1.** Координаты вектора $x \in L$ относительно базиса $a_1, a_2, ..., a_n$ этого линейного пространства определяются однозначно.

Доказательство. Пусть имеет место два различных разложения вектора $x \in L$ относительно данного базиса $a_1, a_2, ..., a_n$:

$$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + ... + x_n a_n; \quad x = x_1^* a_1 + x_2^* a_2 + ... + x_n^* a_n.$$

Почленно вычитая одно разложение из другого, получим

$$\Theta = \left(x_1 - x_1^*\right)a_1 + \left(x_2 - x_2^*\right)a_2 + ... + \left(x_n - x_n^*\right)a_n.$$

Так как базисные векторы $a_1, a_2, ..., a_n$ линейно независимы, то все коэффициенты линейной комбинации $x_i - x_i^* = 0$, $i = \overline{1, n}$, что означает равенство координат в обоих разложениях. *Теорема доказана.*

Определение 6.5. Линейное пространство L^n называется пространством размерности n, если оно содержит n базисных векторов.

Определение 6.6. Подпространством $L^m \subset L^n$ называется множество элементов из L^n, которое само является пространством.

6.3. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО E^n

Определение 6.7. Линейное пространство L называется евклидовым, если в нём определена операция скалярного произведения векторов $(x,\ y): L \times L \to \boldsymbol{R}$, для которой выполнены условия:

1. $\forall x,\ y \in L \Rightarrow (x,\ y) = (y,\ x)$.
2. $\forall x,\ y,\ z \in L \Rightarrow (x + y,\ z) = (x,\ z) + (y,\ z)$.
3. $\forall x,\ y \in L,\ \forall \lambda \in R \Rightarrow (\lambda x,\ y) = \lambda (x,\ y)$.
4. $\forall x \in L \Rightarrow (x,\ x) \geq 0$ и $(x,\ x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.

Евклидово пространство размерности n обозначают E^n.

Определение 6.8. Длиной (модулем) вектора $x \in E^n$ называют число $|x| = \sqrt{(x,\ x)}$. Операцию получения вектора $x^0 = x/|x|$, длина которого равна единице, называют нормированием вектора.

6.4. НЕРАВЕНСТВО КОШИ – БУНЯКОВСКОГО

***Теорема* 6.2.** $\forall x,\ y \in E$ выполнено неравенство Коши – Буняковского: $|(x, y)| \leq |x||y|$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \boldsymbol{R}$ – произвольное число. В силу свойств скалярного произведения можно написать:

1) $(\lambda x - y,\ \lambda x - y) \geq 0$;

2) $(\lambda x - y,\ \lambda x - y) = (\lambda x - y,\ \lambda x) - (\lambda x - y,\ y) = \lambda^2 (x,\ x) - 2\lambda (x,\ y) + (y,\ y)$.

Следовательно, $\lambda^2 (x,\ x) - 2\lambda (x,\ y) + (y,\ y) \geq 0$, что выполнимо, если дискриминант данного квадратного неравенства меньше или равен 0, т.е. $(x,\ y)^2 - (x,\ x)(y,\ y) \leq 0$, откуда вытекает $|(x,\ y)| \leq |x||y|$.

Теорема доказана.

6.5. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

***Теорема* 6.3.** $\forall x,\ y \in E$ имеет место неравенство треугольника:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Доказательство. В силу свойств скалярного произведения имеем:

1) $(x + y,\ x + y) = (x,\ x) + 2(x,\ y) + (y,\ y) = |x|^2 + 2(x,\ y) + |y|^2$;

2) $(x + y,\ x + y) = |x + y|^2$ – определение 6.8.

Исходя из неравенства Коши – Буняковского, получим

$$|x+y|^2 \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = \left(|x|+|y|\right)^2, \text{ т.е. } |x+y| \le |x|+|y|.$$

Неравенство треугольника доказано.

6.6. НОРМА ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Определение 6.9. Линейное пространство L называется метрическим, если на нём задана функция $\rho(x,\ y): L \times L \to \boldsymbol{R}$, называемая расстоянием между $x,\ y \in L$ и удовлетворяющая аксиомам:

1) $\forall x,\ y \in L \Rightarrow \rho(x,\ y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $\forall x,\ y \in L \Rightarrow \rho(x,\ y) = \rho(y,\ x)$ (симметрия);
3) $\forall x,\ y,\ z \in L \Rightarrow \rho(x,\ z) \le \rho(x,\ y) + \rho(y,\ z)$ – неравенство треугольника.

Определение 6.10. Линейное пространство L называется нормированным, если на нём задана функция $\|x\|: L \to \boldsymbol{R}$, называемая нормой, удовлетворяющая аксиомам:

1) $\forall x \in L \Rightarrow \|x\| \ge 0$, причём $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$;
2) $\forall x \in L,\ \forall \lambda \in \boldsymbol{R} \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
3) $\forall x,\ y \in L \Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ – неравенство треугольника.

Нетрудно видеть, что нормированное пространство является метрическим пространством. В самом деле, в качестве расстояния между x и y можно взять $\|x-y\|$. В евклидовом пространстве E^n в качестве нормы любого вектора $x \in E^n$ принимается его длина, т.е. $\|x\| = |x|$.

Нетрудно убедиться, что все аксиомы нормы выполняются для выбранной таким образом нормы евклидова пространства E^n.

Итак, евклидово пространство E^n является метрическим пространством и более того, евклидово пространство E^n является нормированным пространством.

6.7. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Заметим, что из неравенства Коши – Буняковского $|(x,y)| \le |x||y|$ следует, что

$$\frac{|(x,\ y)|}{|x||y|} \le 1, \quad x,\ y \ne \Theta.$$

Определение 6.11. Углом между ненулевыми векторами $x,\ y \in E^n$ называют число $\phi \in [0;\ \pi]$, для которого выполнено:

$$\cos\phi = \frac{|(x, y)|}{|x||y|}, \quad x,\ y \neq \Theta.$$

Определение 6.12. Векторы $x,\ y \in E$ евклидова пространства E называются ортогональными, если для них выполнено $(x,\ y) = 0$.

Если x и y – ненулевые, то из определения следует, что угол между ними равен $\pi/2$. Заметим, что нулевой вектор по определению считается ортогональным любому вектору.

6.8. ОРТОНОРМИРОВАННЫЙ БАЗИС

Определение 6.13. Базис $\{e_1;\ e_2;\ ...;\ e_n\}$ евклидова пространства E^n называется ортогональным, если векторы этого базиса попарно ортогональны, т.е. если $\forall i,\ j = \overline{1,\ n} : i \neq j \to (e_i,\ e_j) = 0$.

Определение 6.14. Если все векторы ортогонального базиса $\{e_1;\ e_2;\ ...;\ e_n\}$ единичны, т.е. $\forall i = \overline{1,\ n} \to (e_i,\ e_i) = 1$, то базис называется ортонормированным, т.е. для ортонормированного базиса выполнено:

$$(e_i,\ e_j) = \begin{cases} 0,\ i \neq j; \\ 1,\ i = j, \end{cases} \qquad (i,\ j = \overline{1,\ n}).$$

***Теорема* 6.4** (о построении ортонормированного базиса). Во всяком пространстве E^n существуют ортонормированные базисы.

Доказательство. Докажем теорему для случая $n = 3$.

Пусть $\{a_1; a_2; a_3\}$ – произвольный базис пространства E^3. Построим ортонормированный базис $\{e_1;\ e_2;\ e_3\}$ в этом пространстве.

Положим $e_1 = a_1,\ \ e_2 = a_2 + \lambda e_1$, где $\lambda \in \boldsymbol{R}$ выбрано так, чтобы $(e_1,\ e_2) = 0$, т.е. $(e_1,\ e_2) = (a_1,\ a_2 + \lambda a_1) = (a_1,\ a_2) + \lambda(a_1,\ a_1) = 0$. Из последнего равенства следует, что $\lambda = -\dfrac{(a_1,\ a_2)}{(a_1,\ a_1)}$, а $e_2 = a_2 - \dfrac{(a_1,\ a_2)}{(a_1,\ a_1)} a_1$.

Далее определим вектор $e_3 = a_3 + \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \boldsymbol{R}$ выбраны так, чтобы

$$\begin{cases}(e_1, e_3)=0;\\(e_2, e_3)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(e_1, a_3+\mu_1 e_1+\mu_2 e_2)=0;\\(e_2, a_3+\mu_1 e_1+\mu_2 e_2)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(e_1, a_3)+\mu_1(e_1, e_1)=0;\\(e_2, a_3)+\mu_2(e_2, e_2)=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(e_1, a_3)=-\mu_1(e_1, e_1);\\(e_2, a_3)=-\mu_2(e_2, e_2),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu_1=-\dfrac{(e_1, a_3)}{(e_1, e_1)};\\\mu_2=-\dfrac{(e_2, a_3)}{(e_2, e_2)}.\end{cases}\quad e_3=a_3-\frac{(e_1, a_3)}{(e_1, e_1)}e_1-\frac{(e_2, a_3)}{(e_2, e_2)}e_2.$$

Допустим, что система векторов e_1, e_2, e_3 – линейно зависимая. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация

$$\eta_1 e_1+\eta_2 e_2+\eta_3 e_3=\Theta, \text{ где } |\eta_1|+|\eta_2|+|\eta_3|>0 .$$

Проведём преобразование полученной линейной комбинации к системе векторов a_1, a_2, a_3:

$$\begin{aligned}&\eta_1 a_1+\eta_2(a_2+\lambda a_1)+\eta_3(a_3+\mu_1 a_1+\mu_2 e_2)=\Theta\Rightarrow\\&\Rightarrow\eta_1 a_1+\eta_2(a_2+\lambda a_1)+\eta_3(a_3+\mu_1 a_1+\mu_2 a_2+\mu_2\lambda a_1)=\Theta\Rightarrow\\&\Rightarrow a_1(\eta_1+\eta_2\lambda+\eta_3\mu_1+\eta_3\mu_2\lambda_2)+a_2(\eta_2+\eta_3\mu_2)+a_3\eta_3=\Theta.\end{aligned}$$

Но, исходя из того, что система векторов a_1, a_2, a_3 – линейно независимая, то все коэффициенты в полученном разложении могут быть только нулевыми, т.е.

$$\begin{cases}\eta_1+\eta_2\lambda+\eta_3\mu_1+\eta_3\mu_2\lambda_2=0;\\\eta_2+\eta_3\mu_2=0;\\\eta_3=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta_1=0;\\\eta_2=0;\\\eta_3=0.\end{cases}$$

Следовательно, допущение о линейной зависимости e_1, e_2, e_3 – неверно.

Остаётся пронормировать построенный базис, для чего каждый из построенных векторов надо разделить на его длину.

Теорема доказана.

Пример 6.1. Построить ортонормированный базис $\{e_1; e_2; e_3\}$ на основе векторов $\overline{AB}=(3;\ 4;\ 0)$, $\overline{AC}=(4;\ 12;\ 3)$, $\overline{AD}=(0;\ 0;\ 1)$.

Решение. Воспользуемся теоремой 6.4:

$$e_1=\overline{AB}=(3;\ 4;\ 0)\Rightarrow|e_1|=\sqrt{(e_1, e_1)}=\sqrt{9+16}=5 .$$

$$e_2=\overline{AC}-\frac{(e_1, \overline{AC})}{(e_1, e_1)}e_1=(4;\ 12;\ 3)-\frac{(3;\ 4;\ 0)(4;\ 12;\ 3)}{25}((3;\ 4;\ 0))=\left(\frac{-16}{5};\ \frac{12}{5};\ 3\right).$$

Следовательно, $|e_2| = \sqrt{\dfrac{256+144+225}{25}} = 5$.

$$e_3 = \overline{AD} - \frac{\left(e_1, \overline{AD}\right)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{\left(e_2, \overline{AD}\right)}{(e_2, e_2)} e_2 = (0;\ 0;\ 1) - \frac{(3;\ 4;\ 0)(0;\ 0;\ 1)}{25}(3;\ 4;\ 0) -$$

$$- \frac{\left(\frac{-16}{5};\ \frac{12}{5};\ 3\right)(0;\ 0;\ 1)}{25}\left(\frac{-16}{5};\ \frac{12}{5};\ 3\right) =$$

$$= (0;\ 0;\ 1) - (0;\ 0;\ 0) - \frac{3}{25}\left(\frac{-16}{5};\ \frac{12}{5};\ 3\right) = \left(\frac{48}{125};\ \frac{-36}{125};\ \frac{16}{25}\right).$$

Следовательно, $|e_3| = \sqrt{\dfrac{48^2 + 36^2 + 25 \cdot 16^2}{125^2}} = \dfrac{\sqrt{10\,000}}{125} = \dfrac{4}{5}$.

Произведём нормировку $e_i = \dfrac{e_i}{|e_i|}$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Окончательно получим:

$$e_1 = \left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ 0\right),\quad e_2 = \left(\frac{-16}{25};\ \frac{12}{25};\ \frac{3}{5}\right),\quad e_3 = \left(\frac{12}{25};\ \frac{-9}{25};\ \frac{4}{5}\right).$$

Ответ: $e_1 = \left(\dfrac{3}{5};\ \dfrac{4}{5};\ 0\right)$, $e_2 = \left(\dfrac{-16}{25};\ \dfrac{12}{25};\ \dfrac{3}{5}\right)$, $e_3 = \left(\dfrac{12}{25};\ \dfrac{-9}{25};\ \dfrac{4}{5}\right)$.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

7.1. ПОНЯТИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА, ЯДРО, ОБРАЗ

Пусть заданы два пространства L_1 и L_2.

Определение 7.1. Говорят, что задан оператор A, действующий из пространства L_1, в L_2 ($A: L_1 \to L_2$), если $\forall x \in L_1$ ставится в соответствие $y \in L_2$, что записывается в виде $y = Ax$.

Определение 7.2. Оператор A называется линейным, если $\forall x,\ y \in L_1$ и $\forall \lambda \in R$ выполнено:

1) свойство аддитивности: $A(x+y) = A(x) + A(y)$;

2) свойство однородности: $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Замечание. Вместо условий 1) и 2) можно рассмотреть единственное условие $A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$.

Определение 7.3. Ядром линейного оператора $A: L_1 \to L_2$ называется множество всех таких векторов $x \in L_1$, что $Ax = \Theta_2$, где Θ_2 – нулевой элемент пространства L_2.

Ядро оператора A обозначается $\ker A$. Таким образом, $\ker A = \{x \mid Ax = \Theta_2\}$.

Определение 7.4. Образом линейного оператора $A: L_1 \to L_2$ называется множество всех таких векторов $y \in L_2$, для которых существует такой $x \in L_1$, что $Ax = y$.

Образ оператора A обозначается $\operatorname{Im} A$. Таким образом, $\operatorname{Im} A = \{y \mid (\exists x)(Ax = y)\}$

***Теорема* 7.1.** Ядро $\ker A$ линейного оператора $A: L_1 \to L_2$ есть подпространство пространства L_1, а образ $\operatorname{Im} A$ указанного оператора есть подпространство пространства L_2.

Доказательство. Пусть $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, если $x_1, x_2 \in \ker A$, то $A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A x_1 + \mu A x_2 = \Theta + \Theta = \Theta$, т.е. $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \ker A$. Итак, ядро $\ker A$ есть подпространство пространства L_1.

Пусть теперь $y_1, y_2 \in \operatorname{Im} A$. Это значит, что найдутся $x_1, x_2 \in L_1$ ($Ax_1 = y_1,\ Ax_2 = y_2$), но тогда $\lambda y_1 + \mu y_2 = \lambda A x_1 + \mu A x_2 = A(\lambda x_1 + \mu x_2)$, откуда и следует, что $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \operatorname{Im} A$. *Теорема доказана.*

7.2. АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе рассматриваются алгебраические операции, позволяющие по известным линейным операторам получать новые линейные операторы.

Сумма линейных операторов. Если $A: L_1 \to L_2$ и $B: L_1 \to L_2$ – линейные операторы, действующие из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, то однозначно определён линейный оператор $A+B: L_1 \to L_2$, называемый суммой операторов A и B такой, что $\forall x((A+B)x = Ax + Bx)$.

Умножение линейного оператора на число. Если $A: L_1 \to L_2$ – линейный оператор, и α – вещественное число, то оператор αA, называемый результатом умножения A на число α, определяется так, что $\forall x((\alpha A)x = \alpha Ax)$.

Композиция линейных операторов. Если $A: L_2 \to L_3$ и $B: L_1 \to L_2$ – линейные операторы, то в том случае, когда область значений B содержится в области определения оператора A, определён оператор $AB: L_1 \to L_3$, называемый композицией (или произведением) A на B: $\forall x(ABx = A(Bx))$.

Обратный линейный оператор. Пусть $A: L_1 \to L_2$ – линейный оператор. Если определён такой линейный оператор $A^{-1}: L_2 \to L_1$, что $\forall y(A^{-1}y = x \Leftrightarrow Ax = y)$, то он называется обратным к A.

В частности, если $L_1 = L_2 = L$ (т.е. рассматриваются линейные преобразования), то можно написать двойное тождество $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где $I: L \to L$ – единичный (тождественный) оператор, обладающий свойством $\forall x \in L \Rightarrow I(x) = x$.

7.3. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\Phi: L^n \to L^m$ – линейный оператор, действующий из линейного пространства размерности n в линейное пространство размерности m. Заданы произвольно базисы $\overline{e} = \{e_1; \ldots; e_n\}$ в L^n и $\overline{g} = \{g_1; \ldots; g_m\}$ в L^m. Поставим задачу: для произвольного вектора $x \in L^n$ вычислить координаты вектора $y = \Phi(x) \in L^m$ в базисе $\overline{g}$, если задана векторная матрица-строка $\Phi(\overline{e}) = (\Phi(e_1); \ldots; \Phi(e_n))$, состоящая из образов векторов базиса $\overline{e}$ в базисе $\overline{g} = \{g_1; \ldots; g_m\}$.

Рассмотрим упрощённую задачу: $\Phi(x): L^3 \to L^2$, $\overline{e} = \{e_1; e_2; e_3\}$, $\overline{g} = \{g_1; g_2\}$, а также заданы разложения образов e_1, e_2, e_3 по g_1, g_2:

$$\Phi(e_1) = a_{11}g_1 + a_{21}g_2, \ \Phi(e_2) = a_{12}g_1 + a_{22}g_2 \text{ и } \Phi(e_3) = a_{13}g_1 + a_{23}g_2 .$$

Пусть разложение вектора x в базисе e_1, e_2, e_3 и разложение образа $\Phi(x) = y$ в базисе g_1, g_2 соответственно имеют вид:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \qquad y = y_1g_1 + y_2g_2.$$

Тогда получим уравнение:

$$\Phi(x) = \Phi(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1\Phi(e_1) + x_2\Phi(e_2) + x_3\Phi(e_3) = y = (g_1; g_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Используя разложение образов базисных векторов e_1, e_2, e_3 по векторам g_1, g_2, преобразуем левую часть уравнения:

$$\Phi(x) = + \begin{matrix} x_1a_{11}g_1 \\ x_1a_{21}g_2 \end{matrix} + \begin{matrix} x_2a_{12}g_1 \\ x_2a_{22}g_2 \end{matrix} + \begin{matrix} x_3a_{13}g_1 \\ x_3a_{23}g_2 \end{matrix} = (g_1; g_2)\left(+ \begin{matrix} x_1a_{11} \\ x_1a_{21} \end{matrix} + \begin{matrix} x_2a_{12} \\ x_2a_{22} \end{matrix} + \begin{matrix} x_3a_{13} \\ x_3a_{23} \end{matrix} \right) =$$

$$= (g_1; g_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

или в матричном виде $A_\Phi x = y$.

Таким образом, получена матрица линейного оператора, столбцы которой задают разложения образов базисных векторов e_1, e_2, e_3 по g_1, g_2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример 7.1. Заданы координаты $M(i,\ j,\ k) = (3;\ 4;\ 0)^T$ в базисе $\{i;\ j;\ k\}$. Необходимо получить координаты $M(e_1; e_2; e_3)$ в базисе $\{e_1; e_2; e_3\}$, если известно разложение векторов e_1, e_2, e_3 по векторам $i,\ j,\ k$: $e_1 = (1;\ 0;\ 2)$, $e_2 = (1;\ 1;\ 1)$, $e_3 = (1;\ 1;\ -1)$.

Решение. Разложение e_1, e_2, e_3 по $i,\ j,\ k$ задаёт матрицу перехода от базиса $\{e_1; e_2; e_3\}$ к базису $\{i;\ j;\ k\}$: $(e_1, e_2, e_3) = (i,\ j,\ k)P$.

Для получения перехода от базиса $\{i;\ j;\ k\}$ к $\{e_1; e_2; e_3\}$ необходимо преобразование: $(e_1, e_2, e_3)P^{-1} = (i,\ j,\ k)PP^{-1} = (i,\ j,\ k)$, где $\quad P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}, \quad P^{-1}=T=\dfrac{1}{|P|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1{,}5 & 0{,}5\\ 1 & -0{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix},$

$|P|=1\cdot A_{11}+2\cdot A_{31}=-2$ (разложение определителя по 1 столбцу), а

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2; \quad A_{12}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=2; \quad A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=2; \quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1; \quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 .$$

В результате получена матрица перехода $T=P^{-1}$, позволяющая получить координаты точки M:

$$M(e_1, e_2, e_3)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1{,}5 & 0{,}5\\ 1 & -0{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

7.4. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Определение 7.5. Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного оператора A, если существует такое вещественное число, что $Ax=\lambda x$. Число λ называется при этом собственным числом, или собственным значением оператора A.

Собственный вектор x называется в этом случае собственным вектором, отвечающим собственному числу λ.

Заметим, что собственное число может быть равно нулю.

***Теорема* 7.2.** Один и тот же собственный вектор не может отвечать одновременно двум разным собственным числам.

Доказательство. Пусть $Ax=\lambda x,\ Ax=\mu x$, но $\lambda\ne\mu$. Тогда $(\lambda-\mu)x=0$, а так как $x\ne 0$, то $\lambda=\mu$, что противоречит допущению.

Но одному и тому же собственному числу может отвечать много собственных векторов. Более того, множество $P_A^{(\lambda)}=\{x\mid Ax=\lambda x\}$ всех собственных векторов оператора A, отвечающих данному собственному числу λ, образует подпространство пространства L.

В самом деле: $A\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i Ax_i=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda x_i=\lambda\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$, каковы бы ни были собственные векторы x_i, отвечающие собственному числу λ, и вещественные числа α_i.

Размерность подпространства $P_A^{(\lambda)}$ называется геометрической кратностью собственного числа λ. Само же это подпространство называется собственным подпространством, отвечающим собственному числу λ.

Рассмотрим задачу об отыскании собственных векторов и собственных чисел линейного оператора.

Имеем: $\lambda x=\lambda I\, x$, где I – тождественный оператор.

Тогда из равенства $Ax=\lambda x$ следует $(A-\lambda I)\,x=\Theta$. Задавая произвольно некий базис $\bar{e}$, получим из последнего операторного уравнения – матричное:

$$(\mathrm{A}-\lambda\,\mathrm{E})\,X=\varnothing\,, \tag{7.1}$$

где А – матрица оператора A в базисе $\bar{e}$, и $x=\bar{e}X$.

Рассматривая (7.1) как однородную систему относительно столбца X, получим, что для того, чтобы эта система имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{E})=0\,. \tag{7.2}$$

Используя понятие детерминанта линейного оператора, можно переписать (7.2) в виде:

$$\det(A-\lambda I)=0\,. \tag{7.3}$$

Уравнение (7.3) называется характеристическим уравнением оператора A, а его корни – характеристическими числами данного оператора. Множество всех характеристических чисел оператора с учётом их кратности образует его спектр. Из предыдущего ясно, что характеристическое уравнение и спектр линейного оператора не зависят от выбора конкретного базиса, являются, как говорят, инвариантами. Подчеркнём, что корни характеристического уравнения могут быть *комплексными*. Сам детерминант, образующий левую часть характеристического уравнения, является, как нетрудно понять, многочленом n-й степени от λ и называется характеристическим многочленом (полиномом) данного оператора. Собственные числа оператора – это в точности все *вещественные* характеристические числа. Существует один важный класс линейных операторов – *самосопряжённые операторы*, когда весь спектр оператора лежит в вещественной области. Тогда понятия характеристического и собственного числа совпадают.

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов:

1) составляется и решается характеристическое уравнение;

2) для каждого вещественного корня λ_0 решается однородная система (7.1); фундаментальные решения этой системы образуют базис подпространства, а общее решение определяет множество всех собственных векторов, отвечающих λ_0.

Пример 7.2. Задана матрица A линейного оператора φ: $R^3 \to R^3$ в базисе $(i;\ j;\ k)$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1. Собственные числа φ. 2. Собственные векторы φ. 3. Матрицу перехода T от базиса $\{i;\ j;\ k\}$ к базису $\{e_1;\ e_2;\ e_3\}$. 4. Матрицу линейного оператора в базисе $\{e_1;\ e_2;\ e_3\}$.

Решение: 1. *Собственные числа находятся как корни характеристического многочлена* $P_\varphi(\lambda)$:

$$P_\varphi(\lambda) = |\mathrm{A} - \lambda\,\mathrm{E}| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0\,.$$

С целью нахождения целого корня уравнения, рассмотрим все делители свободного члена: $\{\pm 1, \pm 2\}$. Обнаруживается, что число –1 является корнем. Для нахождения остальных корней делим многочлен «уголком» на λ + 1. Получаем в частном $-\lambda^2 - 3\lambda - 2 = -(\lambda+1)(\lambda+2)$. В результате $P_\varphi(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda+2)$. Имеются два собственных значения, одно из которых двукратно, т.е. спектр φ: $S_\varphi = \{(-1)^{[2]}, (-2)^{[1]}\}$.

2. *Нахождение собственных векторов* v_1 для $\lambda_1 = -1$. Вычисляем

$$P_\varphi(\lambda_1) = |\mathrm{A} + \mathrm{E}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x - 2y + 2z = 0.$$

Так как подпространство решений двумерно (три неизвестных на одно уравнение), y и z объявляем свободными и находим базис данного подпространства: 1) $y = 1,\ \ z = 0 \to x = -2$; 2) $y = 0,\ \ z = 1 \to x = 2$, т.е.

$$1)\ e_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix};\quad 2)\ e_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow v_1=\alpha\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ \forall\alpha,\,\beta\in\boldsymbol{R};\ \alpha^2+\beta^2\neq 0.$$

$2'$. *Нахождение собственных векторов* v_2 для $\lambda_2=-2$:

$$P_\varphi(\lambda_2)=\left|\mathrm{A}+2\mathrm{E}\right|=\begin{vmatrix}0&-2&2\\-1&-1&2\\-1&-2&3\end{vmatrix}\underset{\hookleftarrow}{-}=\begin{vmatrix}0&-2&2\\-1&-1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{cases}x-z=0;\\y-z=0.\end{cases}$$

Данное подпространство решений одномерно, z объявляем свободным и находим базис: 3) $z=1\to x=1,\ y=1$, т.е.

$$3)\ e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow v_2=\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \forall\gamma\in\boldsymbol{R}:\ \gamma\neq 0.$$

3. *Нахождение матрицы* T. Матрица перехода от $\{i;\ j;\ k\}$ к базису $\{e_1;\,e_2;\,e_3\}$ есть матрица, столбцы которой суть найденные базисные векторы $e_1,\,e_2,\,e_3$:

$$T=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

4. *Нахождение матрицы оператора* φ *в базисе* $\{e_1;\,e_2;\,e_3\}$ – диагональной матрицы с размещением собственных чисел на главной диагонали в порядке формирования столбцов матрицы T, которая может быть определена преобразованием $A^I=T^{-1}AT$:

$$T^{-1}A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&-2&3\\1&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\-1&-3&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1-2&2+3-4&-2-2+2\\2+2-3&2+6-6&-2-4+3\\-2-2+2&-2-6+4&2+4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&2&-3\\-2&-4&4\end{pmatrix},$$

$$\left(T^{-1}A\right)T=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&2&-3\\-2&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+1&2-2&1+1-2\\-2+2&2-3&1+2-3\\4-4&-4+4&-2-4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$

Вывод: решена задача нахождения собственных чисел и собственных векторов оператора φ; найдена матрица перехода T от базиса $\{i;\ j;\ k\}$ к базису $\{e_1;\,e_2;\,e_3\}$, получен канонический вид оператора φ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении следует отметить, что никакие рамки пособия не могут дать полного представления даже о той части математики, которая рассмотрена выше. Необходимо тщательное изучение классической математической литературы [1 – 6], интенсивное общение с интернет-ресурсами [7 – 11] и самостоятельное решение задач. В прилагаемом списке литературы приведены наиболее надёжные интернет-источники по современной математике и методике решения задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии : учебник / П.С. Александров. – 2-е изд. – СПб. : Физматлит, 2008. – 912 с.
2. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие / Д.В. Клетеник. – М. : Профессия, 2007. – 199 с. – Серия «Специалист».
3. Ильин, В.А. Линейная алгебра : учебник / В.А. Ильин, Э.Г.Позняк. – 6-е изд. – М. : Физматлит, 2008. – 280 с.
4. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – 7-е изд. – М. : Физматлит, 2009. – 572 с.
5. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты : учеб. пособие / Л.А. Кузнецов. – 11-е изд. – СПб. : Физматлит, 2008. – 240 с.
6. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры : учебник / А.Г. Курош. – 18-е изд. – М. : Физматлит, 2011. – 432 с.
7. Математическая энциклопедия (на англ. языке). – URL : http:// mathworld. wolfram.com.
8. Электронная энциклопедия «Википедия». – URL : http:// wikipedia.org.
9. Федеральный портал «Российское образование». – URL : http:// www.edu.ru/.
10. Электронно-библиотечная система «Лань». – URL : http:// e.lanbook.com.
11. Образовательный математический сайт. Теория, решение задач. – URL : http://www.exponenta.ru/.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание включает 2 этапа:

1) построение матричного уравнения $AX = B$. Построение уравнения производится в соответствии с заданным вариантом контрольной работы. Для выполнения требуемых линейных преобразований необходимо повторить материал главы 2 настоящего пособия и самостоятельно разобрать примеры 2.4 и 2.5;

2) решение матричного уравнения $AX = B$. Для решения уравнения необходимо воспользоваться именно тем методом, который будет определён преподавателем в варианте контрольной работы. При этом в зависимости от заданного преподавателем метода решения для успешного нахождения X в уравнении $AX = B$ необходимо:

– для матричного метода решения разобрать примеры 2.1, 2.2, 2.6, 2.8;

– для метода Крамера повторить п. 2.6.4 и разобрать примеры 2.1, 2.2, 2.9;

– для метода Гаусса повторить п. 2.6.5 и разобрать пример 2.10, если преподавателем определён в качестве используемого метода.

Исходные данные. Построение матриц A и B производится в соответствии с таблицей «Варианты задания матриц A и B», по заданным значениям параметров (n, m) и (k, l) производится выбор матриц U и W из нижеприведенной таблицы «Задание матриц U_{nm} и W_{kl}».

Задание матриц U_{nm} и W_{kl}

U_{nm}	$U_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$	$U_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	W_{kl}	$W_{12} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$	$W_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
$U_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$U_{22} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$W_{21} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$W_{22} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$W_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$U_{31} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$U_{32} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$U_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$W_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$W_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$W_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Варианты задания матриц *A* и *B*

Вариант-метод (преподаватель)	U_{nm} (n, m)	W_{kl} (k, l)	λ	μ	*A*	*B*
1	(1, 2)	(2, 2)	2	–3	$\lambda U^T U + \mu W$	U^T
2			–2	5		
3	(2, 2)	(2, 1)	6	–6	$\lambda U + \mu W W^T$	W
4			1	–3		
5	(2, 3)	(1, 2)	2	–2	$\lambda U U^T + \mu W^T W$	W^T
6			–2	1		
7	(2, 1)	(2, 3)	2	–2	$\lambda U U^T + \mu W W^T$	U
8			2	–1		
9	(1, 2)	(1, 2)	1	1	$\lambda U^T U + \mu W^T W$	W^T
10			5	–2		
11	(1, 3)	(3, 3)	–2	–1	$\lambda U^T U + \mu W$	U^T
12			3	3		
13	(3, 3)	(3, 1)	–1	2	$\lambda U + \mu W W^T$	W
14			3	–2		
15	(3, 3)	(1, 3)	3	2	$\lambda U^T + \mu W^T W$	W^T
16			2	–1		
17	(3, 1)	(3, 3)	1	–4	$\lambda U U^T + \mu W^T$	U
18			–1	9		
19	(2, 3)	(1, 3)	–3	1	$\lambda U^T U + \mu W^T W$	W^T
20			1	–1		
21	(2, 3)	(2, 1)	1	1	$\lambda U U^T + \mu W W^T$	W
22			1	–1		
23	(3, 1)	(3, 3)	–4	1	$\lambda W + \mu U U^T$	U
24			–3	1		
25	(2, 1)	(2, 2)	–3	1	$\lambda W + \mu U U^T$	U
26			1	–3		
27	(3, 2)	(2, 1)	1	–2	$\lambda W W^T + \mu U^T U$	W
28			–3	1		
29	(2, 2)	(2, 1)	3	2	$\lambda U U + \mu W W^T$	W
30			9	1		

Задание 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Задание. Привести уравнение кривой второго порядка $F(x, y)$ к каноническому виду и построить кривую.

Исходные данные. Варианты задания $F(x, y)$ приведены в таблице.

Для решения задания необходимо повторить материал п. 4.3 и разобрать пример 4.1.

Варианты задания $F(x, y)$

1.	$3y^2+2x-6y+1=0$	16.	$9x^2+4y^2-36x-4y-41=0$
2.	$4y^2-2x+8y-1=0$	17.	$x^2+36y^2-6x+72y+36=0$
3.	$2x-3y+z-4=0$	18.	$x^2+9y^2-4x+6y-31=0$
4.	$5x^2+10x-y=0$	19.	$2x^2+9y^2-4x+6y+2=0$
5.	$5y^2-x-10y+1=0$	20.	$4x^2-9y^2-8x-6y+39=0$
6.	$2x^2+8x-y=0$	21.	$x^2+25y^2-4x+10y-11=0$
7.	$x^2-6x+9y=0$	22.	$9x^2-4y^2-36x-4y-1=0$
8.	$3y^2-x+6y+5=0$	23.	$4x^2+2y^2-4x+8y-16=0$
9.	$x^2-4y^2+6x+4y-8=0$	24.	$4x^2-16y^2+8x+16y-13=0$
10.	$2y^2-4y-x-1=0$	25.	$4x^2-16y^2+8x+16y-13=0$
11.	$36x^2-y^2-36x-2y-1=0$	26.	$25x^2-16y^2-10x-8y+36=0$
12.	$4x^2+4x+y+3=0$	27.	$4x^2+9y^2-24x+9y+2{,}25=0$
13.	$x^2+4y^2-x+8y-4{,}75=0$	28.	$16x^2-9y^2+32x+18y-32=0$
14.	$2y^2+3x-2y-2{,}5=0$	29.	$4x^2+25y^2-4x+50y-35=0$
15.	$3x^2+2y^2+6x-8y+5=0$	30.	$x^2-36y^2-x-72y-51{,}75=0$

Общие указания к выполнению заданий 3, 4 и 5.

В декартовой системе координат с базисом $\{i;\ j;\ k\}$ рассматривается пирамида *P*: вершина – *A*, основания – *B*, *C* и *D*; *L* – высота; *Q* – поверхность основания; *M* – точка пересечения *L* с *Q*; *V* – объём; *S* – площадь боковой поверхности (без площади *Q*) пирамиды.

Исходные данные: координаты *A*, *B*, *C* и *D* приведены в таблице «Варианты задания пирамиды».

Замечание. Все вычисления в заданиях 3, 4 и 5 необходимо производить без округления, т.е. используя радикалы в символьном виде (символьные вычисления в среде MathCad), а не заменять их приближёнными значениями, например: $\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2 = 3+2\sqrt{18}+6 = 9+3\sqrt{2}$.

Задание 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Найти: $\angle BAC$, $\angle BAD$, S и V .

Для решения задания необходимо повторить материал п. 3.4.4, 3.4.5 и разобрать примеры 3.1, 3.3, 3.4.

Задание 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Найти: уравнения: общее и каноническое для Q, каноническое и параметрическое для L ; координаты точки M .

Для решения необходимо повторить материал п. 5.2 – 5.4 и разобрать примеры 5.1 – 5.3.

Задание 5. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Построить ортонормированный базис $\{e_1; e_2; e_3\}$ на основе векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$. Определить, является ли полученная система правосторонней? Найти T – матрицу перехода от $\{i;\ j;\ k\}$ к $\{e_1; e_2; e_3\}$. Определить координаты точки M в базисе $\{e_1; e_2; e_3\}$.

Для решения необходимо повторить материал п. 3.5, 6.1 – 6.8, 7.3 и разобрать примеры 6.1, 3.2, 7.1.

Варианты задания пирамиды

Вариант	A	B	C	D
1	(0; 1; 0)	(1; 1; 0)	($\sqrt{3}$; 2; 0)	(1; 1; $\sqrt{3}$)
2	(0; – 1; 0)	(1; – 1; 0)	(– $\sqrt{3}$; 0; 0)	(1; –1; 1)
3	(0; –1; 0)	(1; –1; 0)	($\sqrt{3}$; –1; 0)	(1; 0; $\sqrt{3}$)
4	(0; –1; 0)	(1; –1; 0)	($\sqrt{3}$; 0; 0)	(1; –1; – $\sqrt{3}$)
5	(1; 0; 0)	(2; 0; 0)	(1– $\sqrt{3}$;1; 0)	(2; 0; $\sqrt{3}$)
6	(0; 1; – 2)	($\sqrt{3}$; – 2; 0)	(3 $\sqrt{3}$; 0; 0)	(0; 1; 6)
7	(1; 0; 0)	(2; 0; 0)	(1– $\sqrt{3}$;1; 0)	(2; 0; $\sqrt{3}$)
8	(0; 1; 0)	(1; 1; 0)	($\sqrt{3}$; 0; 0)	(1; 1; – $\sqrt{3}$)
9	(0; 1; 0)	(0; 1; 2)	($\sqrt{3}$; 0; 2 $\sqrt{3}$)	(1; 1+ $\sqrt{3}$; 2)
10	(0; 1; 0)	(1; 1; 0)	(– $\sqrt{3}$; 0; 0)	(1; 1; $\sqrt{3}$)
11	(3; 0; 2)	(5; 0; 2)	(3; $\sqrt{3}$; 1)	(5; $\sqrt{3}$; 5)
12	(0; –1; 0)	(1; –1; 0)	($\sqrt{3}$; –2; 0)	(1; –1; $\sqrt{3}$)
13	(0; 0; – 4)	(2; –2 $\sqrt{3}$; –4)	(8; 0; – 4)	(2 $\sqrt{3}$; –6; 0)
14	(1; 1; 1)	(2; 1; 1)	(1; 2; 1)	(1; 1; 2)
15	(–1; $\sqrt{3}$; 0)	(0; 0; 0)	($\sqrt{3}$;1; 0)	(0; 0; 2)
16	(0; 1; 0)	(1; 1; 0)	(– $\sqrt{3}$; 2; 0)	(1; 1; $\sqrt{3}$)
17	(0; 0; – $\sqrt{3}$)	(0; 0; 1– $\sqrt{3}$)	(1; 0; 0)	(0; 1; 0)
18	(1; 1; 0)	(2; 1; 0)	(1; 2; 0)	(2; 1; $\sqrt{3}$)
19	(0; –1; 0)	(1; –1; 0)	(– $\sqrt{3}$; –2; 0)	(1; –1; – $\sqrt{3}$)
20	(0; –1; 0)	(1; –1; 0)	(– $\sqrt{3}$; 0; 0)	(1; –1; – $\sqrt{3}$)
21	(0; –1; 0)	(1; –1; 0)	($\sqrt{3}$; 0; 0)	($\sqrt{3}$; –1; 1)
22	(0; $\sqrt{3}$ – 1; 0)	(1; –1; 0)	($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 0)	(1; –1; 2 $\sqrt{3}$)
23	(– 2; 2 $\sqrt{3}$; 0)	(0; 0; 0)	(2 $\sqrt{3}$; 2; 0)	(0; 0; 4 $\sqrt{3}$)
24	(– $\sqrt{3}$; – 1; 0)	(1– $\sqrt{3}$; –1; 0)	(0; 0; 0)	(1– $\sqrt{3}$; –1; 1)
25	(–2; 0; –2 $\sqrt{3}$)	(0; 0; 0)	(3; 2; – $\sqrt{3}$)	(– $\sqrt{3}$; 2 $\sqrt{3}$; 1)
26	(3; 0; – $\sqrt{3}$)	(5; 0; $\sqrt{3}$)	(8; 6; 0)	(2 $\sqrt{3}$; 2; 6)
27	(0; –1; –1)	(1; –1; –1)	(1; 0; –1)	($\sqrt{3}$; –1; 0)
28	(0; 0,5; 0)	(–1; 0,5; 0)	($\sqrt{3}$ /2; 0; 0)	$\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{2};\ 0{,}5;\ -\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$
29	(0; –0,5; –1)	(–1; –0,5; –1)	($\sqrt{3}$ /2; 0; –1)	(1; –0,5; 0)
30	(0; 0,5; 0)	(–1; 0,5; 0)	(– $\sqrt{3}$ /2; 0; 0)	$\left(-\dfrac{\sqrt{21}}{2};\ 0{,}5;\ -\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

Задание 6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Исходные данные. Задана матрица A линейного оператора φ: $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ в базисе $\{i;\ j;\ k\}$. Варианты задания приведены в таблице «Варианты задания матрицы линейного оператора φ».

Найти: 1) собственные числа φ; 2) собственные вектора φ; 3) матрицу перехода T от базиса $\{i;\ j;\ k\}$ к базису $\{e_1;\ e_2;\ e_3\}$; 4) матрицу A^I линейного оператора в базисе $\{e_1;\ e_2;\ e_3\}$.

Для решения необходимо повторить материал п. 7.3, 7.4 и разобрать пример 7.2.

Варианты задания матрицы линейного оператора φ

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \\ -3 & -3 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -14 & -6 & 18 \\ -6 & -5 & 9 \\ -12 & -6 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -6 & -8 & -12 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8	Вариант 9	Вариант 10
$\begin{pmatrix} -6 & -2 & 6 \\ -2 & -3 & 3 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -11 & 0 & 12 \\ -3 & 1 & 3 \\ -9 & 0 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -13 & -6 & 18 \\ -6 & -4 & 9 \\ -12 & -6 & 17 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 9 & -8 & -27 \\ -3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}$
Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15
$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ -3 & -5 & 6 \\ -3 & -6 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 12 \\ -3 & -3 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 12 & 1 & 12 \\ -9 & 0 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18	Вариант 19	Вариант 20
$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & 0 & -12 \\ -6 & 1 & 6 \\ 15 & 0 & -14 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 9 & 3 & -8 \end{pmatrix}$
Вариант 21	Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24	Вариант 25
$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -15 & 1 & 15 \\ 6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 6 \\ 6 & -2 & -6 \\ -6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
Вариант 26	Вариант 27	Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30
$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -6 & -7 & -12 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 12 & 6 \\ -6 & -11 & -6 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8 & -9 & 0 \\ 6 & 7 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Раздел 3. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

Учебное издание

МАТВЕЕВ Владимир Николаевич

АЛГЕБРА.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 27.09.2012
Формат 60 × 84/16. 5,58 усл. печ. л. Тираж 300 экз. Заказ № 507

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14