В.И. ФОМИН

ВЕКТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Спектр
Издательский дом

Москва, 2012

УДК 517.937
ББК В143
Ф762

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор физико-математических наук, профессор
директор Института физики, математики и информатики
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»
Е.С. Жуковский

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теоретической гидрометеорологии ВГКВОУ ВПО
«Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил»
«Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и
Ю.А. Гагарина, г. Воронеж»
М.Е. Семенов

Фомин, В.И.

Ф762 Векторное уравнение Эйлера второго порядка в банаховом пространстве. – М.: Издательский дом «Спектр», 2012. – 136 с. – 400 экз.

ISBN 978-5-4442-0022-3

Содержит изложение результатов исследований автора по применению метода малых стабилизирующих возмущений при построении ограниченных в точке вырождения решений вырождающихся линейных дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве.

Предназначена для специалистов в области дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, уравнений математической физики, а также для студентов старших курсов и аспирантов.

УДК 517.937
ББК В143

ISBN 978-5-4442-0022-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Как правило, краевая задача для уравнения с частными производными сводится к задаче Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Этим обусловлена актуальность дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений, в частности, вырождающихся линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. С другой стороны, внутренние потребности развития такой теории давно превратили ее в самостоятельную область исследования.

В данной книге в банаховом пространстве E изучается уравнение Эйлера второго порядка

$$t^2 x''(t) + tAx'(t) + Bx(t) = f(t), \ 0 < t < \infty, \tag{1}$$

где A, B – линейные операторы, действующие в пространстве E; $f(t) \in C([0, \infty); E)$. При этом, в целях полноты картины для операторных коэффициентов A и B рассмотрены два случая: A и B ограничены; A и B неограничены.

Везде в книге под решением уравнения (1) понимается его сильное решение, т.е. дважды непрерывно дифференцируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция, удовлетворяющая уравнению (1).

В книге находится методом малых стабилизирующих возмущений ограниченное в точке вырождения $t = 0$ решение уравнения (1).

Метод малых стабилизирующих возмущений состоит в следующем.

1. Рассматривается стабилизирующее, т.е. устраняющее вырожденность, возмущение уравнения (1) малым положительным параметром $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \text{const}$, $\varepsilon_0 > 0$. Возмущенное уравнение можно рассматривать уже для $0 \le t < \infty$ и ставить для него задачу Коши:

$$(t+\varepsilon)^2 x''_\varepsilon(t) + (t+\varepsilon)Ax'_\varepsilon(t) + Bx_\varepsilon(t) = f(t), \ 0 \le t < \infty, \tag{2}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}, \ \ x'_\varepsilon(0) = x'_{\varepsilon,0}. \tag{3}$$

2. Выясняются условия, при которых задача (2), (3) разрешима и находится ее решение.

3. Находятся условия, при которых существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t), \quad 0 < t < \infty. \tag{4}$$

4. Выясняются условия, при которых предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1).

Заменой переменной $t = \varepsilon e^{\tau} - \varepsilon$ задача (2), (3) сводится к стандартной задаче Коши

$$u''_{\varepsilon}(\tau) + (A - I)\, u'_{\varepsilon}(\tau) + B u_{\varepsilon}(\tau) = g_{\varepsilon}(\tau)\,,\ 0 \le \tau < \infty\,,$$

$$u_{\varepsilon}(0) = x_{\varepsilon,0}\,,\ \ u'_{\varepsilon}(0) = \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}\,,$$

где $u_{\varepsilon}(\tau) ::= x_{\varepsilon}\left(\varepsilon e^{\tau} - \varepsilon\right)$, $g_{\varepsilon}(\tau) ::= f\left(\varepsilon e^{\tau} - \varepsilon\right)$.

Поэтому в первых двух главах книги найдено решение стандартной задачи Коши в виде, позволяющем обосновать предельный переход (4).

Результаты, полученные для вырождающихся линейных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве, изложены в работах [9], [12] – [17].

Нумерация формул внутри каждой главы книги двойная. Если в некоторой главе дается ссылка на формулу из другой главы, то используется тройная нумерация. Например, ссылка вида (II.1.3) означает ссылку на формулу (1.3) из главы II.

Глава I

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Решение задачи Коши в терминах операторной экспоненты

В банаховом пространстве E изучается задача Коши

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t),\ 0 \le t < \infty, \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_0', \tag{1.2}$$

где A, $B \in L(E)$, $L(E)$ – банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E; $f(t) \in C\big([0, \infty); E\big)$, $C\big([0, \infty); E\big)$ – линейное пространство непрерывных функций, действующих из $[0, \infty)$ в E.

Везде в дальнейшем под решением задачи (1.1), (1.2) понимается ее сильное решение, т.е. дважды непрерывно дифференцируемая на полуоси $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая уравнению (1.1) и начальным условиям (1.2).

Рассмотрим характеристическое операторное уравнение

$$\Lambda^2 + B\Lambda + C = O \tag{1.3}$$

соответствующего однородного уравнения

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = 0,\ 0 \le t < \infty \tag{1.4}$$

(в записи (1.3) O – нулевой оператор).

Вид характеристических операторов Λ_k уравнения (1.4), т.е. решений уравнения (1.3), определяется видом операторного дискриминанта $\Delta = B^2 - 4C$.

Операторный дискриминант Δ называется *позитивным*, если $\Delta = F^2$; *негативным*, если $\Delta = -F^2$, где $F \in L(E)$, $F \ne O$; *нулевым*, если $\Delta = O$.

В дальнейшем при доказательстве утверждений неоднократно будут использованы без дополнительных ссылок следующие соотношения для операторной экспоненты [3, с. 41]:

$$e^{At}\Big|_{t=0} = I,$$

где I – единичный оператор;

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At}e^{A\tau};$$

$$\left(e^{At}\right)' = Ae^{At};$$

а также правило дифференцирования интеграла по параметру [8, с. 162]

$$\left[\int_0^{\beta(\eta)} g(s,\eta)\,ds\right]' = \beta'(\eta)\,g\big(\beta(\eta),\eta\big) + \int_0^{\beta(\eta)} \left[g(s,\eta)\right]'_\eta\,ds,$$

справедливое при условии, что $g(s,\eta)$, $\left[g(s,\eta)\right]'_\eta$ непрерывны по (s,η) и $\beta(\eta)$ непрерывно дифференцируема; в частности,

$$\left[\int_0^{t} g(s,t)\,ds\right]' = g(t,t) + \int_0^{t} \left[g(s,t)\right]'_t\,ds.$$

Теорема 1.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) операторный дискриминант $\Delta = B^2 - 4C$ является позитивным, т.е. $\Delta = F^2$, где $F \in L(E)$, $F \neq O$.

2) $BF = FB$.

Тогда задача (1.1), (1.2) имеет решение вида

$$u(t) = \exp(\Lambda_1 t)\,u_0 + \int_0^t \exp\left[\Lambda_2 (t-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)(u_0' - \Lambda_1 u_0)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^{t-s} \exp\left[\Lambda_2(t-s-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)\,f(s)\,d\tau\right]ds, \qquad (1.5)$$

где $\Lambda_1 = 2^{-1}(-B-F)$, $\Lambda_2 = 2^{-1}(-B+F)$ – характеристические операторы уравнения (1.4).

Доказательство. Заметим, что функция (1.5) удовлетворяет первому начальному условию $u(0) = u_0$.

Из ограниченности операторов Λ_1, Λ_2 вытекает их замкнутость [11, с. 162]. Следовательно, при $k = 1, 2$

$$\left[\Lambda_k\,h(t)\right]' = \Lambda_k\,h'(t)$$

при условии, что обе производные существуют;

$$\int_a^b \Lambda_k\,h(\tau)\,d\tau = \Lambda_k \int_a^b h(\tau)\,d\tau$$

при условии, что оба интеграла существуют. Из условия 2) вытекает, что

$$\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2\Lambda_1,$$

следовательно,

$$\Lambda_2 \exp(\Lambda_1 t) = \exp(\Lambda_1 t)\,\Lambda_2; \quad \Lambda_1 \exp(\Lambda_2 t) = \exp(\Lambda_2 t)\,\Lambda_1.$$

Запишем функцию (1.5) в виде

$$u(t) = w(t) + I_1(t) + I_2(t)\,, \tag{1.6}$$

где

$$w(t) = \exp(\Lambda_1 t)\,u_0\,,$$

$$I_1(t) = \int_0^t \exp\left[\Lambda_2(t-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)(u_0' - \Lambda_1 u_0)\,d\tau\,,$$

$$I_2(t) = \int_0^t \left[\int_0^{t-s} \exp\left[\Lambda_2(t-s-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)\,f(s)\,d\tau\right] ds\,.$$

Тогда

$$w'(t) = \Lambda_1 \exp(\Lambda_1 t)\,u_0\,; \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} I_1'(t) &= \exp(\Lambda_1 t)(u_0' - \Lambda_1 u_0) + \\ &+ \int_0^t \Lambda_2 \exp\left[\Lambda_2(t-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)(u_0' - \Lambda_1 u_0)\,d\tau\,; \end{aligned} \tag{1.8}$$

$$I_2'(t) = \int_0^t \left[\int_0^{t-s} \exp\left[\Lambda_2(t-s-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)\,f(s)\,d\tau\right]_t' ds\,; \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{t-s} \exp\left[\Lambda_2(t-s-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)\,f(s)\,d\tau\right]_t' &= \exp\left[\Lambda_1(t-s)\right] f(s) + \\ &+ \int_0^{t-s} \Lambda_2 \exp\left[\Lambda_2(t-s-\tau)\right]\exp(\Lambda_1\tau)\,f(s)\,d\tau\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

В силу (1.9), (1.10)

$$I_2'(t) = \Lambda_2 I_2(t) + I_3(t), \tag{1.11}$$

где

$$I_3(t) = \int_0^t \exp\left[\Lambda_1(t-s)\right] f(s)\,ds.$$

В силу (1.6) – (1.8), (1.11)

$$u'(t)=\exp(\Lambda_1 t)\,u_0'+\Lambda_2 I_1(t)+\Lambda_2 I_2(t)+I_3(t)\ .$$

Прибавляя и вычитая в правой части последнего равенства выражение $\Lambda_2 w(t)$ и учитывая представление (1.6), получаем

$$u'(t)=\exp(\Lambda_1 t)\,(u_0'-\Lambda_2 u_0)+\Lambda_2 u(t)+I_3(t)\ . \qquad (1.12)$$

Из (1.12) видно, что функция (1.5) удовлетворяет второму начальному условию $u'(0)=u_0'$. Далее,

$$u''(t)=\Lambda_1\exp(\Lambda_1 t)\,(u_0'-\Lambda_2 u_0)+\Lambda_2 u'(t)+I_3'(t)\ . \qquad (1.13)$$

Заметим, что

$$I_3'(t)=f(t)+\Lambda_1 I_3(t)\ . \qquad (1.14)$$

В силу (1.12) – (1.14)

$$u''(t)=f(t)+(\Lambda_1+\Lambda_2)I_3(t)+\exp(\Lambda_1 t)\,\big[(\Lambda_1+\Lambda_2)u_0'-$$

$$-(\Lambda_1+\Lambda_2)\Lambda_2 u_0\,\big]+\Lambda_2^2\,u(t)\ .$$

Используя равенство $\Lambda_1+\Lambda_2=-B$, получаем

$$u''(t)=f(t)-B\,I_3(t)+\Lambda_2^2 u(t)+\exp(\Lambda_1 t)\,(B\Lambda_2 u_0-B\,u_0')\ . \qquad (1.15)$$

В силу условия 2)

$$B\Lambda_1=\Lambda_1 B\ ,\ \ B\Lambda_2=\Lambda_2 B\,.$$

Тогда, используя равенства (1.12), (1.15), получаем

$$u''(t)+B\,u'(t)+C\,u(t)=f(t)-B\,I_3(t)+\Lambda_2^2 u(t)+$$

$$+\exp(\Lambda_1 t)\,(B\Lambda_2 u_0-B\,u_0')+B\,I_3(t)+B\Lambda_2 u(t)+$$

$$+\exp(\Lambda_1 t)\,(Bu_0'-B\Lambda_2 u_0)+C\,u(t)\ =f(t)+\left(\Lambda_2^2+B\Lambda_2+C\right)u(t)=f(t)\,,$$

так как $\Lambda_2^2+B\Lambda_2+C=O$. Получили: $u''(t)+B\,u'(t)+C\,u(t)=f(t)$, т.е. функция (1.5) является решением уравнения (1.1).

Из формулы (1.15) следует, в силу непрерывности $f(t)$, $I_3(t)$, $u(t)$, что $u''(t)\in C\big([\,0,\infty);E\,\big)$, т.е. $u(t)\in C^{\,2}\big([\,0,\infty);E\,\big)$, где $C^{\,2}\big([\,0,\infty);E\,\big)$ – линейное пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, действующих из $[\,0,\infty\,)$ в *E*. Теорема 1.1 доказана.

В дальнейшем неоднократно будет использовано правило дифференцирования композиции операторной и векторной функций [11, с. 144]:

$$\big[A(t)g(t)\big]'=A'(t)g(t)+A(t)g'(t)\ . \qquad (1.16)$$

Теорема 1.2. Пусть операторный дискриминант $\Delta = B^2 - 4C$ равен нулю. Тогда задача (1.1), (1.2) имеет решение вида

$$u(t) = \exp(\Lambda_0 t)\left[u_0 + (u_0' - \Lambda_0 u_0)t\right] + \int_0^t \exp\left[\Lambda_0(t-s)\right](t-s) f(s)\,ds\,, \quad (1.17)$$

где $\Lambda_0 = -2^{-1}B$ – характеристический оператор уравнения (1.4).

Доказательство. Из (1.17) видно, что функция $u(t)$ удовлетворяет первому начальному условию $u(0) = u_0$. Далее,

$$u'(t) = \Lambda_0 \exp(\Lambda_0 t)\left[u_0 + (u_0' - \Lambda_0 u_0)t\right] + \exp(\Lambda_0 t)(u_0' - \Lambda_0 u_0) +$$

$$+ \int_0^t \left[\Lambda_0 \exp\left[\Lambda_0(t-s)\right](t-s) f(s) + \exp\left[\Lambda_0(t-s)\right] f(s)\right] ds\,,$$

или

$$u'(t) = \exp(\Lambda_0 t)(u_0' - \Lambda_0 u_0) + \Lambda_0 u(t) + I(t)\,, \quad (1.18)$$

где

$$I(t) = \int_0^t \exp\left[\Lambda_0(t-s)\right] f(s)\,ds.$$

Из равенства (1.18) видно, что функция (1.17) удовлетворяет второму начальному условию $u'(0) = u_0'$. Далее,

$$u''(t) = \Lambda_0 \exp(\Lambda_0 t)(u_0' - \Lambda_0 u_0) + \Lambda_0 u'(t) + I'(t)\,. \quad (1.19)$$

Имеем

$$I'(t) = f(t) + \Lambda_0 I(t)\,. \quad (1.20)$$

В силу (1.18) – (1.20)

$$u''(t) = f(t) + 2\Lambda_0 I(t) + 2\Lambda_0 \exp(\Lambda_0 t)(u_0' - \Lambda_0 u_0) + \Lambda_0^2 u(t)$$

или в силу равенства $2\Lambda_0 = -B$

$$u''(t) = f(t) - BI(t) + \Lambda_0^2 u(t) - B\exp(\Lambda_0 t)(u_0' - \Lambda_0 u_0)\,. \quad (1.21)$$

Используя равенства (1.18), (1.21), получаем

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t) - BI(t) + \Lambda_0^2 u(t) - B\exp(\Lambda_0 t)(u_0' - \Lambda_0 u_0) +$$

$$+ B\exp(\Lambda_0 t)(u_0' - \Lambda_0 u_0) + B\Lambda_0 u(t) + BI(t) + Cu(t) =$$

$$= f(t) + \left(\Lambda_0^2 + B\Lambda_0 + C\right) u(t) = f(t)\,,$$

так как $\Lambda_0^2 + B\Lambda_0 + C = O$. Получили $u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t)$, т.е. функция (1.17) является решением уравнения (1.1).

Из формулы (1.21) следует, в силу непрерывности $f(t)$, $I(t)$, $u(t)$, что $u''(t) \in C\big([0,\infty); E\big)$, т.е. $u(t) \in C^2\big([0,\infty); E\big)$. Теорема 1.2 доказана.

В случае негативного операторного дискриминанта решение задачи (1.1), (1.2) построено в [24]. Здесь это решение не приводится по той причине, что оно не используется в дальнейшем.

§ 2. Решение задачи Коши в терминах косинус и синус оператор-функций

Найдем решение задачи (1.1), (1.2) в терминах косинус и синус оператор-функций. Пусть выполнены условия 1), 2) теоремы 1.1. Рассмотрим косинус-оператор-функцию с производящим оператором $\Delta_1 = (1/4)\Delta = (1/4)F^2$:

$$C(t) = C\left(t, \frac{1}{4}F^2\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}Ft} + e^{-\frac{1}{2}Ft}\right) \tag{2.1}$$

и ассоциированную с ней синус-оператор-функцию

$$S(t) = S\left(t, \frac{1}{4}F^2\right) = \int_0^t C(\tau)\,d\tau\,. \tag{2.2}$$

Из формул (2.1), (2.2) следует, что

$$C(0) = I\,,\ S(0) = O\,; \tag{2.3}$$

$$C'(t) = \frac{1}{4}F^2 S(t)\,,\ S'(t) = C(t)\,; \tag{2.4}$$

$$C''(t) = \frac{1}{4}F^2 C(t)\,,\ S''(t) = \frac{1}{4}F^2 S(t)\,. \tag{2.5}$$

Докажем, например, первую из формул в (2.4). Имеем

$$C'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Fe^{\frac{1}{2}Ft} - \frac{1}{2}Fe^{-\frac{1}{2}Ft}\right) = \frac{1}{4}F\left(e^{\frac{1}{2}Ft} - e^{-\frac{1}{2}Ft}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}F\left(e^{\frac{1}{2}F\tau} - e^{-\frac{1}{2}F\tau}\right)\Bigg|_0^t = \frac{1}{4}F\int_0^t \left(e^{\frac{1}{2}F\tau} - e^{-\frac{1}{2}F\tau}\right)' d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}F\int_0^t \left(\frac{1}{2}Fe^{\frac{1}{2}F\tau} + \frac{1}{2}Fe^{-\frac{1}{2}F\tau}\right) d\tau = \frac{1}{4}F^2\int_0^t C(\tau)\,d\tau = \frac{1}{4}F^2 S(t)\,.$$

Получили $C'(t)=\frac{1}{4}F^2S(t)$. Остальные из указанных формул очевидны.

Теорема 2.1. При выполнении условий 1), 2) теоремы 1.1 задача (1.1), (1.2) имеет решение вида

$$u(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}Bt\right)\left[C(t)u_0+S(t)\left(u_0'+\frac{1}{2}Bu_0\right)\right]+$$

$$+\int_0^t S(t-\tau)\exp\left[-\frac{1}{2}B(t-\tau)\right]f(\tau)\,d\tau\ . \qquad (2.6)$$

Доказательство. В силу (2.3) функция (2.6) удовлетворяет первому начальному условию $u(0)=u_0$. Запишем (2.6) в виде

$$u(t)=e^{-\frac{1}{2}Bt}\left[C(t)u_0+S(t)\left(u_0'+\frac{1}{2}Bu_0\right)+\int_0^t S(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau}f(\tau)\,d\tau\right].$$

Получаем

$$u'(t)=-\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}Bt}\left[C(t)u_0+S(t)\left(u_0'+\frac{1}{2}Bu_0\right)+\int_0^t S(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau}f(\tau)\,d\tau\right]+$$

$$+e^{-\frac{1}{2}Bt}\left[C'(t)u_0+S'(t)\left(u_0'+\frac{1}{2}Bu_0\right)+\int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau}f(\tau)\,d\tau\right]$$

или

$$u'(t)=-\frac{1}{2}Bu(t)+e^{-\frac{1}{2}Bt}\left[C'(t)u_0+S'(t)\left(u_0'+\frac{1}{2}Bu_0\right)+\right.$$

$$\left.+\int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau}f(\tau)\,d\tau\right]. \qquad (2.7)$$

В силу (2.3), (2.4)

$$C'(0)=O\ ,\ S'(0)=I\ . \qquad (2.8)$$

Из (2.7), (2.8) видно, что функция (2.6) удовлетворяет второму начальному условию $u'(0)=u_0'$.

Исходя из формулы (2.7) получаем

$$u''(t) = -\frac{1}{2}Bu'(t) - \frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}Bt}\left[C'(t)u_0 + S'(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0\right) + \right.$$

$$\left. + \int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)\,d\tau\right] + e^{-\frac{1}{2}Bt}\left[C''(t)u_0 + S''(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0\right) + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{1}{2}Bt} f(t) + \int_0^t S''(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)\,d\tau\right]. \tag{2.9}$$

Вычитая и прибавляя в правой части равенства (2.9) выражение $(1/4)B^2u(t)$, а также используя равенства (2.5) и замкнутость оператора F^2, имеем

$$u''(t) = -\frac{1}{2}Bu'(t) - \frac{1}{4}B^2u(t) - \frac{1}{2}B\left[-\frac{1}{2}Bu(t) + e^{-\frac{1}{2}Bt}\left[C'(t)u_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + S'(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0\right) + \int_0^t S'(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)\,d\tau\,\right]\right] +$$

$$+ e^{-\frac{1}{2}Bt}\left[\frac{1}{4}F^2C(t)u_0 + \frac{1}{4}F^2S(t)\left(u_0' + \frac{1}{2}Bu_0\right) + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{1}{2}Bt} f(t) + \frac{1}{4}F^2\int_0^t S(t-\tau)e^{\frac{1}{2}B\tau} f(\tau)\,d\tau\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}Bu'(t) - \frac{1}{4}B^2u(t) - \frac{1}{2}Bu'(t) + f(t) + \frac{1}{4}F^2u(t) =$$

$$= f(t) - Bu'(t) + \frac{1}{4}\left(F^2 - B^2\right)u(t) = f(t) - Bu'(t) - Cu(t).$$

Получили равенство

$$u''(t) = f(t) - Bu'(t) - Cu(t) \tag{2.10}$$

или $u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t)$, т.е. функция (2.6) является решением уравнения (1.1).

Из формулы (2.10) следует, в силу непрерывности $f(t), u(t)$, $u'(t)$, что $u''(t) \in C\left([0,\infty); E\right)$, т.е. $u(t) \in C^2\left([0,\infty); E\right)$. Теорема 2.1 доказана.

Глава II

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Решение задачи Коши в терминах полугрупп

В банаховом пространстве E изучается задача Коши

$$u''(t)+Bu'(t)+Cu(t)=f(t)\,,\ 0\le t<\infty\,, \tag{1.1}$$

$$u(0)=u_0\,,\ u'(0)=u_0'\,, \tag{1.2}$$

где $f(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$; $B,C\in N(E)$, $N(E)$ – множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E, с плотными в E областями определения.

Как и в главе I, под решением задачи (1.1), (1.2) понимается ее сильное решение.

Рассмотрим операторный дискриминант $\Delta=B^2-4C$. Заметим, что $D(\Delta)=D(B^2)\cap D(C)$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $\Delta=F^2$, где F – некоторый оператор из $N(E)$;

2) характеристические операторы $\Lambda_{1,2}=(1/2)(-B\mp F)$ являются производящими операторами полугрупп $U_1(t)$ и $U_2(t)$ класса C_0;

3) $BFx=FBx$, $x\in D(\Lambda^2)$, где $D(\Lambda^2)::=D(\Lambda_1^2)=D(\Lambda_2^2)=$ $=D(\Lambda_1\Lambda_2)=D(\Lambda_2\Lambda_1)=D(B^2)\cap D(C)\cap D(BF)\cap D(FB)$;

4) $f(t)\in D(\Lambda^2)$ при каждом $t\in[0,\infty)$;

5) $Bf(t)$, $Ff(t)$, $B^2f(t)$, $BFf(t)$, $Cf(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$;

6) $u_0\in D_1$, $u_0'\in D(\Lambda^2)$, где

$$D_1=D(B^2)\cap D(BC)\cap D(BF)\cap D(FB)\cap D(FC)\,.$$

Теорема 1.1. При выполнении условий 1) – 6) задача (1.1), (1.2) имеет решение вида

$$u(t)=U_1(t)u_0+\int_0^t U_2(t-\tau)U_1(\tau)(u_0'-\Lambda_1u_0)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2(t-s-\tau)U_1(\tau)\,f(s)\,d\tau\right]ds\,. \tag{1.3}$$

Перед доказательством теоремы 1.1 сделаем несколько замечаний, которые понадобятся в дальнейшем.

В силу условия 3) справедливы соотношения

$$\left(\Lambda_k^2 + B\Lambda_k + C\right)x = 0\,,\ x \in D(\Lambda^2)\,;\ k = 1,2\,; \tag{1.4}$$

$$\Lambda_1\Lambda_2\, x = \Lambda_2\Lambda_1\, x = Cx\,,\ x \in D(\Lambda^2)\,. \tag{1.5}$$

Из вида операторов $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ следует равенство

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)x = -Bx\,,\ x \in D(\Lambda)\,, \tag{1.6}$$

где

$$D(\Lambda) ::= D(\Lambda_1) = D(\Lambda_2) = D(B) \cap D(F)\,.$$

В силу условия 2) имеем при $k = 1,2$ [4, с. 17]

$$U_k(0) = I\,, \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} &U_k(t)\, x \in D(\Lambda)\,, t \in [0, \infty)\,,\\ &U_k'(t)\, x = \Lambda_k U_k(t)\, x = U_k(t)\Lambda_k\, x\,,\ \forall\, x \in D(\Lambda)\,, \end{aligned} \tag{1.8}$$

кроме того, $\overline{D(\Lambda)} = E$ и операторы $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ замкнуты.

В силу условий 3) – 5) справедливо включение $F\,B\,f(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$ и из условия 5) следует, что

$$\Lambda_i^p\, \Lambda_j^q\, f(t) \in C\left([0, \infty); E\right);\ 1 \le i, j \le 2\,;\ 0 \le p, q \le 2\,;\ 1 \le p + q \le 2 \tag{1.9}$$

(по определению, $\Lambda_k^0 = I$, $k = 1,2$).

Пусть $\Phi = \Phi\left([0, \infty); L(E)\right)$ – множество оператор-функций $A(t)$ действительного переменного $t \in [0, \infty)$ со значениями в $L(E)$. Рассмотрим семейство сильно непрерывных по $t \in [0, \infty)$ на пространстве E функций:

$$\Phi_E^0 = \left\{ A(t) \in \Phi \mid A(t)\, x \in C\left([0, \infty); E\right) \text{ при каждом } x \in E \right\}.$$

В силу условия 2) справедливо включение

$$U_k(t) \in \Phi_E^0\,;\ k = 1,2\,. \tag{1.10}$$

Ниже неоднократно будет использован без дополнительных оговорок следующий факт: если $A(t) \in \Phi_E^0$, $g(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$, то $A(t)g(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$, т.е. композиция сильно непрерывной операторнозначной функции и непрерывной векторнозначной функции является непрерывной функцией [8, с. 21].

Замечание 1.1. В силу (1.8), (1.10) справедливо включение

$$U_k(t)\,x\in C^1\big([0,\infty);E\big),\quad \forall\, x\in D(\Lambda)\,;\quad k=1,2\,.$$

В дальнейшем потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1.1. При выполнении условий 1) – 3) справедливо соотношение

$$\Lambda_2 U_1(t)\,y = U_1(t)\,\Lambda_2\,y\,,\quad y\in D(\Lambda)\,. \tag{1.11}$$

Доказательство. Покажем вначале, что

$$\Lambda_2 U_1(t)\,x = U_1(t)\,\Lambda_2\,x\,,\quad x\in D(\Lambda^2)\,, \tag{1.12}$$

для чего достаточно установить, что

$$F\,U_1(t)\,x = U_1(t)\,F\,x\,,\quad x\in D(\Lambda^2)\,, \tag{1.13}$$

ибо формула (1.12) следует из (1.13) в силу равенства $\Lambda_2=\Lambda_1+F$ и соотношения (см. (1.8))

$$\Lambda_1 U_1(t)\,x = U_1(t)\,\Lambda_1\,x\,,\quad x\in D(\Lambda)\,. \tag{1.14}$$

Покажем справедливость (1.13). По условию 2) Λ_1 является производящим оператором полугруппы $U_1(t)$ класса C_0. Известно [8, с. 61], что производящий оператор полугруппы класса C_0 для всех λ с достаточно большой вещественной частью имеет резольвенту и справедливо представление

$$U_1(t)\,y = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} R_{\Lambda_1}(\lambda)y\,d\lambda\,,\ y\in D(\Lambda)\,, \tag{1.15}$$

где $R_{\Lambda_1}(\lambda)=(\Lambda_1-\lambda I)^{-1}$. Если $y\in D(\Lambda)$, то в силу (1.8) $U_1(t)\,y\in D(\Lambda)$, следовательно, $U_1(t)\,y\in D(F)$. Тогда, используя формулу (1.15) и замкнутость оператора *F*, получаем соотношение

$$F\,U_1(t)\,y = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} F\,R_{\Lambda_1}(\lambda)y\,d\lambda\,,\ y\in D(\Lambda)\,. \tag{1.16}$$

Покажем, что

$$F\,R_{\Lambda_1}(\lambda)y = R_{\Lambda_1}(\lambda)F\,y\,,\ y\in D(\Lambda)\,. \tag{1.17}$$

Пусть $H=\Lambda_1-\lambda I$, тогда $H^{-1}=R_{\Lambda_1}(\lambda)$. В силу условия 3)

$$F\,H\,x = H\,F\,x\,,\ \ x \in D(\Lambda^2)\,. \tag{1.18}$$

Пусть $y \in D(\Lambda) = D(\Lambda_1)$. Тогда $H^{-1}y \in D(\Lambda_1^2) = D(\Lambda^2)$, ибо $R_{\Lambda_1}(\lambda)\big[D(\Lambda_1)\big] = D(\Lambda_1^2)$ [8, с. 30]. Используя соотношение (1.18), получаем

$$F\,H^{-1}y = H^{-1}[(H\,F\,)\,H^{-1}y] = H^{-1}[(F\,H\,)\,H^{-1}y] =$$
$$= H^{-1}[F(H\,H^{-1}y)] = H^{-1}F\,y\,.$$

Соотношение (1.17) установлено. В силу (1.16), (1.17)

$$F\,U_1(t)\,y = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} R_{\Lambda_1}(\lambda) F\,y\,d\lambda\,,\ \ y \in D(\Lambda)\,. \tag{1.19}$$

Пусть $x \in D(\Lambda^2)$, тогда $x \in D(\Lambda)$, $F\,x \in D(\Lambda)$ и в силу (1.15), (1.19)

$$F\,U_1(t)\,x = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{\lambda t} R_{\Lambda_1}(\lambda) F\,x\,d\lambda = U_1(t)\,F\,x\,,$$

т.е. имеет место равенство (1.13). Соотношение (1.12) доказано.

Пусть $y \in D(\Lambda)$. Известно [8, с. 60], что область определения любой положительной степени производящего оператора полугруппы класса C_0 плотна в *E*, в частности, $D(\Lambda_1^2) = D(\Lambda^2)$ плотна в *E*. Следовательно, существует последовательность $\{x_n\} \subset D(\Lambda^2)$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. В силу (1.12)

$$\Lambda_2 U_1(t)\,x_n = U_1(t)\,\Lambda_2\,x_n\,,\ \ n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.20}$$

Учитывая замкнутость оператора Λ_2, замкнутость $U(t)$ при каждом $t \in [0, \infty)$ как ограниченного оператора и тот факт, что для замкнутого оператора знак оператора и знак предела можно менять местами, и переходя в равенстве (1.20) к пределу при $n \to \infty$, получаем соотношение (1.11). Лемма 1.1 доказана.

В силу равенства $B = -F - 2\,\Lambda_1$ и соотношений (1.13), (1.14)

$$B U_1(t)\,x = U_1(t)\,B\,x\,,\ \ x \in D(\Lambda^2)\,, \tag{1.21}$$

откуда следует в силу плотности $D(\Lambda^2)$ в *E* и замкнутости операторов *B*, $U_1(t)$ соотношение

$$BU_1(t)\,x = U_1(t)\,B\,x\,,\ \ x \in D(\Lambda)\,. \tag{1.22}$$

Аналогично, из равенства (1.13) следует, что

$$F\,U_1(t)\,x = U_1(t)\,F\,x\,,\ \ x \in D(\Lambda)\,. \tag{1.23}$$

Используя равенство $C = (1/4)(B^2 - F^2)$ и соотношения (1.22), (1.23), приходим к формуле вида

$$C\,U_1(t)\,x = U_1(t)\,C\,x\,,\ \ x \in D(\Lambda^2)\,. \tag{1.24}$$

Пусть $x \in D(\Lambda)$, x фиксирован. Рассмотрим функцию действительного переменного $t \in [\,0, \infty\,)$ вида

$$I_1(t, x) = \int\limits_0^t U_2(t-\tau)U_1(\tau)\,x\,d\tau\,.$$

Лемма 1.2. При любом фиксированном $x \in D(\Lambda)$ справедливы соотношения

$$I_1(t,x) \in C^1\big([\,0,\infty\,);\,E\,\big), \tag{1.25}$$

$$I_1'(t,x) = U_1(t)\,x + I_1(t, \Lambda_2 x). \tag{1.26}$$

Доказательство. В силу включения (1.10) подынтегральная функция $g_1(\tau, t) = U_2(t-\tau)U_1(\tau)\,x$ непрерывна по (τ, t). В силу (1.8) справедливо включение $U_1(\tau)\,x \in D(\Lambda)$ при каждом $\tau \in [0, t\,]$ и $\big[\,g_1(\tau, t)\,\big]_t' = U_2(t-\tau)\,\Lambda_2 U_1(\tau)\,x$ или в силу (1.11) $\big[\,g_1(\tau, t)\,\big]_t' = $ $= U_2(t-\tau)\,U_1(\tau)\,\Lambda_2\,x$, откуда видно в силу (1.10), что производная $\big[\,g_1(\tau, t)\,\big]_t'$ непрерывна по (τ, t). Следовательно, можно применить правило дифференцирования интеграла по параметру. Учитывая равенство $U_2(0) = I$ (см. (1.7)), получаем

$$I_1'(t,\,x) = U_1(t)\,x + \int\limits_0^t U_2(t-\tau)U_1(\tau)\,\Lambda_2\,x\,d\tau = U_1(t)\,x + I_1(t,\,\Lambda_2 x)\,,$$

т.е. получили формулу (1.26), из которой видно, что справедливо включение (1.25), ибо в силу (1.10) оба слагаемых в правой части последней формулы непрерывны по *t*. Лемма 1.2 доказана.

В силу (1.8), (1.11) и замкнутости оператора Λ_2 формулу (1.26) можно записать в виде

$$I_1'(t,x) = U_1(t)\,x + \Lambda_2\,I_1(t,x)\,. \tag{1.27}$$

Пусть $\Omega=\{h(s)\in C([0,\infty);E)\,|\,h(s)\in D(\Lambda)$ при каждом $s\in[0,\infty)$; $\Lambda_k h(s)\in C([0,\infty);E),\ k=1,2\}$. Рассмотрим для фиксированной функции $h(s)\in\Omega$ две функции действительного переменного $t\in[0,\infty)$ вида

$$I_2(t,h(s))=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2(t-s-\tau)U_1(\tau)h(s)\,d\tau\right]ds,$$

$$I_3(t,h(s))=\int_0^t U_1(t-s)h(s)\,ds\ .$$

Лемма 1.3. При любой фиксированной функции $h(s)\in\Omega$ справедливы соотношения

$$I_2(t,h(s)),\ I_3(t,h(s))\in C^1([0,\infty);E), \tag{1.28}$$

$$I_2'(t,h(s))=I_2(t,\Lambda_2 h(s))+I_3(t,h(s)), \tag{1.29}$$

$$I_3'(t,h(s))=I_3(t,\Lambda_1 h(s))+h(t)\ . \tag{1.30}$$

Доказательство. В силу включения (1.10) и непрерывности функции $h(s)$ подынтегральная функция

$$g_{21}(s,t)=\int_0^{t-s}U_2(t-s-\tau)U_1(\tau)h(s)\,d\tau$$

непрерывна по (s,t) как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. При фиксированном значении s подынтегральная функция $g_{22}(\tau,t)=U_2(t-s-\tau)U_1(\tau)h(s)$ непрерывна по (τ,t) в силу (1.10).

По условию $h(s)\in D(\Lambda)$, следовательно, в силу (1.8) справедливо включение $U_1(\tau)h(s)\in D(\Lambda)$ и $[g_{22}(\tau,t)]_t'=U_2(t-s-\tau)\Lambda_2 U_1(\tau)h(s)$ или в силу (1.11) $[g_{22}(\tau,t)]_t'=U_2(t-s-\tau)U_1(\tau)\Lambda_2 h(s)$, откуда видно в силу (1.10), что производная $[g_{22}(\tau,t)]_t'$ непрерывна по (τ,t). Следовательно,

$$[g_{21}(s,t)]_t'=\int_0^{t-s}U_2(t-s-\tau)U_1(\tau)\Lambda_2 h(s)\,d\tau+U_1(t-s)h(s), \tag{1.31}$$

откуда видно, что производная $\left[g_{21}(s,\,t)\right]_t'$ непрерывна по $(s,\,t)$ как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции, ибо подынтегральная функция в формуле (1.31) непрерывна по $(s,\,t)$ в силу включения (1.10) и непрерывности функции $\Lambda_2 h(s)$. Следовательно,

$$I_2'(t,\,h(s)) = \int_0^t \left[\;\int_0^{t-s} U_2(t-s-\tau)U_1(\tau)\Lambda_2 h(s)\,d\tau\right]ds +$$

$$+\int_0^t U_1(t-s)h(s)\,ds \;= I_2(t,\Lambda_2 h(s)) + I_3(t,h(s)), \quad (1.32)$$

т.е. справедлива формула (1.29). Из (1.32) видно, что справедливо первое из включений (1.28), ибо каждое слагаемое в правой части равенства (1.32) непрерывно по t как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции.

Докажем формулу (1.30). В силу включения (1.10) и непрерывности функции $h(s)$ подынтегральная функция $g_3(s,\,t) = U_1(t-s)\,h(s)$ непрерывна по $(s,\,t)$. По условию $h(s)\in D(\Lambda)$, следовательно, в силу (1.8) справедлива формула $\left[\,g_3(\,s,\,t)\,\right]_t' = U_1(t-s)\,\Lambda_1 h(s)$, откуда видно в силу (1.10) и непрерывности функции $\Lambda_1 h(s)$, что производная $\left[\,g_3(\,s,\,t)\,\right]_t'$ непрерывна по $(s,\,t)$. Тогда, используя (1.7) при $k=1$, получаем соотношение

$$I_3'(t,\,h(s)) = \int_0^t U_1(t-s)\,\Lambda_1 h(s)\,ds + h(t) = I_3(t,\Lambda_1 h(s)) + h(t)\,,$$

т.е. справедлива формула (1.30), из которой видно, что справедливо второе из включений (1.28). Лемма 1.3 доказана.

В силу (1.8), (1.11) и замкнутости операторов $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ формулы (1.29), (1.30) можно записать в виде

$$I_2'(t,\,h(s)) = \Lambda_2\, I_2(t,\,h(s)) + I_3(t,\,h(s))\,, \quad (1.33)$$

$$I_3'(t,\,h(s)) = \Lambda_1 I_3(t,\,h(s)) + h(t)\;. \quad (1.34)$$

Доказательство теоремы 1.1. В силу (1.7) при $k=1$ функция (1.3) удовлетворяет первому начальному условию $u(0)=u_0$. По условию теоремы

$$u_0 \in D_1,\ u_0' \in D(\Lambda^2)\ . \qquad (1.35)$$

В силу (1.35) и включения $D_1 \subset D(\Lambda^2)$

$$u_0 \in D(\Lambda^2)\ , \qquad (1.36)$$

и в силу включения $D(\Lambda^2) \subset D(\Lambda)$

$$u_0,\ u_0' \in D(\Lambda)\ . \qquad (1.37)$$

Покажем, что функция (1.3) является решением уравнения (1.1). Используя введенные выше обозначения, запишем ее в виде

$$u(t) = U_1(t)u_0 + I_1(t,\, u_0' - \Lambda_1 u_0) + I_2(t,\, f(s))\ . \qquad (1.38)$$

В силу (1.8), (1.37)

$$U_1'(t)\,u_0 = U_1(t)\Lambda_1 u_0\ . \qquad (1.39)$$

В силу (1.36), (1.37) справедливо включение $u_0' - \Lambda_1 u_0 \in D(\Lambda)$, следовательно, по формуле (1.26)

$$I_1'(t,\, u_0' - \Lambda_1 u_0) = U_1(t)\,(u_0' - \Lambda_1 u_0) + I_1(t,\, \Lambda_2 u_0' - \Lambda_2 \Lambda_1 u_0)$$

или в силу (1.5), (1.36)

$$I_1'(t,\, u_0' - \Lambda_1 u_0) = U_1(t)\,(u_0' - \Lambda_1 u_0) + I_1(t,\, \Lambda_2 u_0' - C u_0)\ . \qquad (1.40)$$

В силу условия 4) и соотношения (1.9) справедливо включение $f(s) \in \Omega$, следовательно, по формуле (1.29)

$$I_2'(t,\, f(s)) = I_2(t,\, \Lambda_2 f(s)) + I_3(t,\, f(s))\ . \qquad (1.41)$$

В силу (1.38) – (1.41)

$$u'(t) = U_1(t)u_0' + I_1(t,\, \Lambda_2 u_0' - C\, u_0) + I_2(t,\, \Lambda_2 f(s)) + I_3(t,\, f(s))\ . \qquad (1.42)$$

Из (1.42) видно, что функция (1.3) удовлетворяет второму начальному условию $u'(0) = u_0'$. В силу (1.27), (1.33) формулу (1.42) можно записать в виде

$$u'(t) = U_1(t)u_0' + \Lambda_2 I_1(t,\, u_0' - \Lambda_1\, u_0) + \Lambda_2 I_2(t,\, f(s)) + I_3(t,\, f(s))\ . \qquad (1.43)$$

В силу (1.8), (1.37)

$$U_1'(t)u_0' = U_1(t)\,\Lambda_1 u_0'\ . \qquad (1.44)$$

В силу (1.35) справедливо включение $\Lambda_2 u_0' - C u_0 \in D(\Lambda)$, следовательно, по формуле (1.26)

$$I_1'(t,\, \Lambda_2 u_0' - C u_0) = U_1(t)\,(\Lambda_2 u_0' - C u_0) + I_1(t,\, \Lambda_2^2 u_0' - \Lambda_2 C u_0)\ . \qquad (1.45)$$

В силу условия 4) и соотношения (1.9) справедливо включение $\Lambda_2 f(s) \in \Omega$, следовательно, по формуле (1.29)

$$I_2'(t, \Lambda_2 f(s)) = I_2(t, \Lambda_2^2 f(s)) + I_3(t, \Lambda_2 f(s)) . \qquad (1.46)$$

По формуле (1.30)

$$I_3'(t, f(s)) = I_3(t, \Lambda_1 f(s)) + f(t) . \qquad (1.47)$$

В силу (1.43) – (1.47) с учетом соотношения (1.6) получаем, что

$$u''(t) = U_1(t)(-Bu_0' - C u_0) + I_1(t, \Lambda_2^2 u_0' - \Lambda_2 C u_0) +$$

$$+ I_2(t, \Lambda_2^2 f(s)) + I_3(t, -B f(s)) + f(t) . \qquad (1.48)$$

В силу непрерывности функции $f(s)$, условия 4) и включений (1.9), (1.10) каждое слагаемое в правой части (1.48) непрерывно по t, следовательно, $u(t) \in C^2\left([0,\infty); E\right)$.

Учитывая (1.8), (1.11), (1.27), (1.33), (1.34) и замкнутость операторов B, Λ_2, формулу (1.48) можно записать в виде

$$u''(t) = f(t) + U_1(t)(-Bu_0' - C u_0) + \Lambda_2^2 I_1(t, u_0' - \Lambda_1 u_0) +$$

$$+ \Lambda_2^2 I_2(t, f(s)) - B I_3(t, f(s)) . \qquad (1.49)$$

Покажем, используя представление (1.43), что

$$u'(t) \in D(B) , \ t \in [0,\infty) . \qquad (1.50)$$

В силу (1.8), (1.37)

$$U_1(t) u_0' \in D(\Lambda) . \qquad (1.51)$$

Из (1.49) видно, что

$$I_1(t, u_0' - \Lambda_1 u_0) , \ I_2(t, f(s)) \in D(\Lambda^2) , \qquad (1.52)$$

следовательно,

$$\Lambda_2 I_1(t, u_0' - \Lambda_1 u_0) , \ \Lambda_2 I_2(t, f(s)) \in D(\Lambda) . \qquad (1.53)$$

Из (1.47) видно в силу (1.34), что

$$I_3(t, f(s)) \in D(\Lambda) . \qquad (1.54)$$

В силу (1.43), (1.51), (1.53), (1.54) справедливо включение $u'(t) \in D(\Lambda)$, $t \in [0,\infty)$, откуда следует (1.50).

Покажем, используя представление (1.38), что

$$u(t) \in D(C) , \ t \in [0,\infty) . \qquad (1.55)$$

В силу (1.24), (1.36) имеем равенство $U_1(t)Cu_0 = CU_1(t)u_0$, откуда видно, что

$$U_1(t)u_0 \in D(C). \qquad (1.56)$$

В силу (1.52)

$$I_1(t, u_0' - \Lambda_1 u_0), \quad I_2(t, f(s)) \in D(C), \qquad (1.57)$$

и включение (1.55) следует из (1.38), (1.56), (1.57).

Учитывая (1.38), (1.43), (1.49), (1.50), (1.55), а также соотношения (1.4), (1.21), (1.24), (1.52), получаем

$$u''(t) + Bu'(t) + Cu(t) = f(t) + U_1(t)(-Bu_0' - Cu_0) +$$

$$+ U_1(t)Bu_0' + U_1(t)Cu_0 + (\Lambda_2^2 + B\Lambda_2 + C) I_1(t, u_0' - \Lambda_1 u_0) +$$

$$+ (\Lambda_2^2 + B\Lambda_2 + C) I_2(t, f(s)) - B I_3(t, f(s)) + B I_3(t, f(s)) = f(t),$$

т.е. функция (1.3) является решением уравнения (1.1). Выше было показано, что выполняются начальные условия (1.2). Теорема 1.1 доказана.

Пусть оператор F из условия 1) теоремы 1.1 имеет ограниченный обратный F^{-1} и вместо условия 3) справедливо соотношение

$$BF^{-1}x = F^{-1}Bx, \; x \in D(\Lambda). \qquad (1.58)$$

Тогда решение (1.3) задачи (1.1), (1.2) можно записать в виде

$$u(t) = U_2(t)F^{-1}(u_0' - \Lambda_1 u_0) - U_1(t)F^{-1}(u_0' - \Lambda_2 u_0) +$$

$$+ \int_0^{t-s} [U_2(t-s) - U_1(t-s)] F^{-1} f(s)\, ds. \qquad (1.59)$$

Для вывода формулы (1.59) докажем вначале включение

$$F^{-1}[D(\Lambda)] \subset D(B^2) \cap D(C) \cap D(BF). \qquad (1.60)$$

Пусть $x \in D(\Lambda)$. Покажем, что элемент $y = F^{-1}x$ принадлежит множеству в правой части включения (1.60). Имеем $Fy = x$, значит справедливо включение $Fy \in D(\Lambda) = D(\Lambda_1)$, откуда следует, что $y \in D(\Lambda_1 F) = D[(1/2)(-BF - F^2)] = D(F^2) \cap D(BF) = D(B^2) \cap D(C) \cap$ $\cap D(BF)$. Справедливость включения (1.60) установлена.

В силу включения (1.60) запись условия (1.58) корректна.

Покажем, что из (1.58) следует выполнимость условия 3) теоремы 1.1, т.е.

$$BFy = FBy, \; y \in D(\Lambda^2). \qquad (1.61)$$

Пусть $y \in D(\Lambda^2)$. Имеем

$$\left.\begin{array}{l} y \in D(\Lambda^2) \Rightarrow y \in D(BF) \Rightarrow F\,y \in D(B), \\ y \in D(\Lambda^2) \Rightarrow y \in D(B^2) \cap D(C) = D(F^2) \Rightarrow F\,y \in D(F), \end{array}\right\} \Rightarrow F\,y \in D(\Lambda).$$

Тогда в силу (1.58) $(BF^{-1})F\,y = (F^{-1}B)F\,y$ или $B(F^{-1}F\,y) = F^{-1}(BF\,y)$,

$By = F^{-1}(BF\,y)$, $F\,By = F\,F^{-1}(BF\,y)$, $F\,By = BF\,y$. Равенство (1.61) доказано.

Известно [8, с. 188], что если $A_2 = A_1 + Q$, то

$$\int_0^t U_{A_2}(t-\tau)\,Q\,U_{A_1}(\tau)\,x\,d\tau = \left[U_{A_2}(t) - U_{A_1}(t)\right]x\,,\ x \in D(A_1^2)\,,$$

где $U_{A_k}(t)$ – полугруппа, порожденная оператором Λ_k, $k = 1, 2$. В нашем случае $\Lambda_2 = \Lambda_1 + F$, следовательно,

$$\int_0^t U_2(t-\tau)\,F\,U_1(\tau)\,x\,d\tau = \left[U_2(t) - U_1(t)\right]x\,,\ x \in D(\Lambda^2)\,. \qquad (1.62)$$

Известно [6, с. 218], что если обратимый оператор T коммутирует с оператором $A \in L(E)$, то T^{-1} тоже коммутирует с A. Следовательно, в силу (1.23) и включения $D(\Lambda) \subset D(F)$

$$F^{-1}U_1(t)x = U_1(t)F^{-1}x\,,\ \ x \in D(\Lambda)\,. \qquad (1.63)$$

Покажем справедливость включения вида

$$F^{-1}[D(\Lambda)] \subset D(FB)\,. \qquad (1.64)$$

Действительно, пусть $x \in D(\Lambda)$. Покажем, что $y = F^{-1}x \in D(FB)$. В силу (1.60) $y \in D(B)$. Используя (1.58), получаем $By = BF^{-1}x = F^{-1}B\,x \in D(F)$. Итак, $y \in D(B)$, $B\,y \in D(F)$, следовательно, $y \in D(FB)$. Включение (1.64) доказано.

В силу (1.60), (1.64) справедливо включение

$$F^{-1}[D(\Lambda)] \subset D(\Lambda^2)\,. \qquad (1.65)$$

В силу (1.36), (1.37), (1.65)

$$F^{-1}(u_0' - \Lambda_1 u_0) \in D(\Lambda^2)\,. \qquad (1.66)$$

В силу условия 4) и включения (1.65)

$$F^{-1} f(s) \in D(\Lambda^2)\,. \tag{1.67}$$

Используя (1.62), (1.63), (1.66), а также включение $u_0' - \Lambda_1 u_0 \in D(\Lambda)$, получаем

$$\int_0^t U_2(t-\tau) U_1(\tau)(u_0' - \Lambda_1 u_0)\, d\tau = \int_0^t U_2(t-\tau) F[F^{-1} U_1(\tau)](u_0' - \Lambda_1 u_0)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t U_2(t-\tau) F[U_1(\tau) F^{-1}](u_0' - \Lambda_1 u_0)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t [U_2(t-\tau) F U_1(\tau)] F^{-1}(u_0' - \Lambda_1 u_0)\, d\tau = [U_2(t) - U_1(t)] F^{-1}(u_0' - \Lambda_1 u_0). \tag{1.68}$$

Аналогично, учитывая, что $f(s) \in D(\Lambda)$ и включение (1.67), приходим к формуле

$$\int_0^{t-s} U_2(t-s-\tau) U_1(\tau) f(s)\, d\tau = [U_2(t-s) - U_1(t-s)] F^{-1} f(s)\,. \tag{1.69}$$

Из (1.3), (1.68), (1.69) следует представление (1.59).

Если $\Delta = O$, то $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_0 = -(1/2)B$. Следовательно, $U_1(t) = U_2(t) = U(t)$, где $U(t)$ – полугруппа, порожденная оператором Λ_0, и формула (1.3) с учетом полугруппового свойства $U(t_1)U(t_2) = U(t_1 + t_2)$ принимает вид

$$u(t) = U(t)[u_0 + (u_0' - \Lambda_0 u_0)t] + \int_0^t U(t-s)(t-s) f(s)\, ds\,. \tag{1.70}$$

Получаем следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть выполнены следующие условия:

а) $\Delta = O$, т.е. $C = (1/4)B^2$;

б) оператор $\Lambda_0 = -(1/2)B$ является производящим оператором полугруппы $U(t)$ класса C_0;

в) $f(t) \in D(\Lambda_0^2)$ при каждом $t \in [0, \infty)$;

г) $\Lambda_0 f(t)$, $\Lambda_0^2 f(t) \in C\big([0, \infty); E\big)$;

д) $u_0 \in D(\Lambda_0^3)$, $u_0' \in D(\Lambda_0^2)$.

Тогда задача (1.1), (1.2) имеет решение вида (1.70).

Перед доказательством теоремы 1.2 сделаем несколько предварительных замечаний.

В условиях в) – д) вместо оператора Λ_0 можно записать оператор B, ибо $\Lambda_0^k = (-1)^k (1/2)^k B^k$, $D(\Lambda_0^k) = D(B^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

В силу условия б) оператор Λ_0 замкнут, $U(0) = I$,

$$U(t) \in \Phi_E^0; \tag{1.71}$$

$$U(t)x \in D(\Lambda_0);\ U'(t)x = \Lambda_0 U(t)x = U(t)\Lambda_0 x, \forall x \in D(\Lambda_0). \tag{1.72}$$

В силу (1.71)

$$U(t)v(t) \in C\big([0,\infty); E\big),\ \forall v(t) \in C\big([0,\infty); E\big). \tag{1.73}$$

Рассмотрим семейство сильно непрерывно дифференцируемых по $t \in [0,\infty)$ на множестве $Q \subset E$ оператор-функций $A(t)$:

$$\Phi_Q^1 = \big\{A(t) \in \Phi \mid A(t)x \in C^1\big([0,\infty); E\big) \text{ при каждом } x \in Q\big\}.$$

В силу (1.71), (1.72)

$$U(t) \in \Phi_{D(\Lambda_0)}^1. \tag{1.74}$$

Известно [8, с. 22], что если $A(t) \in \Phi_Q^1$, $v(t) \in C^1\big([0,\infty); E\big)$ и $v(t) \in Q$ при каждом $t \in [0,\infty)$, то $A(t)v(t) \in C^1\big([0,\infty); E\big)$ и справедлива формула $\big[A(t)v(t)\big]' = A'(t)v(t) + A(t)v'(t)$, в частности, в силу (1.74)

$$U(t)v(t) \in C^1\big([0,\infty); E\big),\ \forall v(t) \in W, \tag{1.75}$$

где

$$W = \big\{v(t) \in C^1\big([0,\infty); E\big) \mid v(t) \in D(\Lambda_0) \text{ при каждом } t \in [0,\infty)\big\},$$

и справедлива формула

$$\big[U(t)v(t)\big]' = U'(t)v(t) + U(t)v'(t). \tag{1.76}$$

Из (1.72), (1.75), (1.76) следует, что при любых фиксированных $x, y \in D(\Lambda_0)$

$$U(t)(x + yt) \in C^1\big([0,\infty); E\big), \tag{1.77}$$

$$\big[U(t)(x + yt)\big]' = U(t)(\Lambda_0 x + y + \Lambda_0 yt). \tag{1.78}$$

Пусть $\Omega_0 = \big\{h(s) \in C\big([0,\infty); E\big) \mid h(s) \in D(\Lambda_0)$ при каждом $s \in [0,\infty)$ и $\Lambda_0 h(s) \in C\big([0,\infty); E\big)\big\}$. Рассмотрим для фиксированной функции $h(s)\in\Omega_0$ две функции действительного переменного $t\in[0,\infty)$ вида

$$I(t,\, h(s)) = \int\limits_0^t U(t-s)(t-s)h(s)\,ds\,,$$

$$I_4(t,\, h(s)) = \int\limits_0^t U(t-s)\,h(s)\,ds\ .$$

Лемма 1.4. При любой фиксированной функции $h(s)\in\Omega_0$ справедливы соотношения

$$I(t,\, h(s)),\ I_4(t,\, h(s))\in C^1\big([0,\infty);E\big), \tag{1.79}$$

$$I'(t,\, h(s)) = I(t,\, \Lambda_0 h(s)) + I_4(t,\, h(s))\,, \tag{1.80}$$

$$I_4'(t,\, h(s)) = I_4(t,\, \Lambda_0 h(s)) + h(t)\ . \tag{1.81}$$

Доказательство. В силу (1.71) и включения

$$h(s)\in C\big([0,\infty);E\big) \tag{1.82}$$

подынтегральная функция $g(s,\,t) = U(t-s)(t-s)h(s)$ непрерывна по $(s,\,t)$. По условию $h(s)\in\Omega_0$, следовательно, $h(s)\in D(\Lambda_0)$ при каждом $s\in[0,\infty)$. Тогда, используя (1.76), (1.72), получаем

$$\big[g(s,\,t)\big]_t' = U'(t-s)(t-s)h(s) + U(t-s)\big[(t-s)h(s)\big]' =$$

$$= U(t-s)(t-s)\Lambda_0\, h(s) + U(t-s)h(s)\,. \tag{1.83}$$

По условию $h(s)\in\Omega_0$, следовательно,

$$\Lambda_0 h(s)\in C\big([0,\infty);E\big)\,. \tag{1.84}$$

В силу (1.71), (1.82), (1.84) из равенства (1.83) видно, что производная $\big[g(s,\,t)\big]_t'$ непрерывна по $(s,\,t)$. Таким образом, можно применить правило дифференцирования интеграла по параметру:

$$I'(t,\, h(s)) = \int\limits_0^t \big[g(s,\,t)\big]_t'\, ds + g(t,\,t)$$

или в силу равенства $g(t,\,t)=0$ и формулы (1.83)

$$I'(t,\, h(s)) = \int\limits_0^t U(t-s)(t-s)\Lambda_0 h(s)\,ds + \int\limits_0^t U(t-s)h(s)\,ds\,,$$

т.е. справедлива формула (1.80) и, кроме того, в силу (1.71), (1.82), (1.84) $I'(t,\, h(s)) \in C\big([0,\, \infty);\, E\big)$, а это означает справедливость первого из включений (1.79). В силу (1.71), (1.82) подынтегральная функция $g_4(s,\, t) = U(t-s)h(s)$ непрерывна по $(s,\, t)$. В силу (1.72)

$$\left[\, g_4(s,t)\right]_t' = U'(t-s)h(s) = U(t-s)\Lambda_0 h(s)\,, \tag{1.85}$$

откуда видно в силу (1.71), (1.84), что производная $\left[\, g_4(s,t)\right]_t'$ непрерывна по (s,t). Следовательно,

$$I_4'(t,\, h(s)) = \int_0^t \left[\, g_4(s,t)\right]_t' ds \; + g_4(t,t)$$

или в силу равенства $g_4(t,\, t) = h(t)$ и формулы (1.85)

$$I_4'(t,\, h(s)) = \int_0^t U(t-s)\Lambda_0 h(s)\, ds + h(t)\,,$$

т.е. справедлива формула (1.81) и, кроме того, в силу (1.71), (1.82), (1.84) $I_4'(t, h(s)) \in C\big([0,\, \infty);\, E\big)$, а это означает справедливость второго из включений (1.79). Лемма 1.4 доказана.

Доказательство теоремы 1.2. В силу равенства $U(0) = I$ функция (1.70) удовлетворяет первому начальному условию $u(0) = u_0$. Запишем $u(t)$ в виде

$$u(t) = U(t)[u_0 + (u_0' - \Lambda_0 u_0)\, t] + \mathrm{I}(t,\, f(s))\,. \tag{1.86}$$

В силу условия д)

$$u_0\,,\; u_0' - \Lambda_0 u_0 \in D(\Lambda_0)\,. \tag{1.87}$$

В силу (1.77), (1.78), (1.87)

$$U(t)[u_0 + (u_0' - \Lambda_0 u_0)\, t] \in C^1\big([0,\infty);\, E\big);$$

$$\big[U(t)[u_0 + (u_0' - \Lambda_0 u_0)\, t]\big]' = U(t)[\Lambda_0 u_0 + u_0' - \Lambda_0 u_0 + \Lambda_0 (u_0' - \Lambda_0 u_0)\, t] =$$

$$= U(t)[u_0' + (\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0)\, t]\,. \tag{1.88}$$

В силу условий в), г) справедливо включение $f(s) \in \Omega_0$, следовательно, в силу (1.79), (1.80)

$$I(t,\, f(s)) \in C^1\big([0,\infty);\, E\big);$$

$$I'(t,\, f(s)) = I(t,\, \Lambda_0\, f(s)) + I_4(t,\, f(s))\,. \tag{1.89}$$

В силу (1.86), (1.88), (1.89)

$$u'(t) = U(t)[u_0' + (\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0)t] + I(t, \Lambda_0 f(s)) + I_4(t, f(s)). \quad (1.90)$$

Из равенства (1.90) видно, что функция (1.70) удовлетворяет второму начальному условию $u'(0) = u_0'$. В силу условия д)

$$u_0', \ \Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0 \in D(\Lambda_0). \quad (1.91)$$

В силу (1.77), (1.78), (1.91)

$$U(t)[u_0' + (\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0)t] \in C^1([0,\infty); E);$$

$$\left[U(t)[u_0' + (\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0)t]\right]' =$$

$$= U(t)[\Lambda_0 u_0' + \Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0 + \Lambda_0(\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0)t] =$$

$$= U(t)[2\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0 + (\Lambda_0^2 u_0' - \Lambda_0^3 u_0)t]. \quad (1.92)$$

В силу условий в), г) справедливо включение $\Lambda_0 f(s) \in \Omega_0$, следовательно, в силу (1.79), (1.80)

$$\mathrm{I}(t, \Lambda_0 f(s)) \in C^1([0, \infty); E);$$

$$I'(t, \Lambda_0 f(s)) = I(t, \Lambda_0^2 f(s)) + I_4(t, \Lambda_0 f(s)). \quad (1.93)$$

В силу (1.79), (1.81)

$$I_4(t, f(s)) \in C^1([0,\infty); E);$$

$$I_4'(t, f(s)) = I_4(t, \Lambda_0 f(s)) + f(t). \quad (1.94)$$

В силу (1.90), (1.92) – (1.94) получаем равенство

$$u''(t) = U(t)[2\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0 + (\Lambda_0^2 u_0' - \Lambda_0^3 u_0)t] +$$

$$+ I(t, \Lambda_0^2 f(s)) + 2I_4(t, \Lambda_0 f(s)) + f(t). \quad (1.95)$$

В силу (1.73) и условия г) каждое из слагаемых в правой части формулы (1.95) непрерывно по t, следовательно, $u(t) \in C^2([0,\infty); E)$.

Покажем, что

$$u'(t) \in D(\Lambda_0), \ t \in [0,\infty). \quad (1.96)$$

В силу условия в), соотношений (1.72) и замкнутости оператора Λ_0 формулы (1.90), (1.95) можно записать в виде

$$u'(t) = U(t)[u_0' + (\Lambda_0 u_0' - \Lambda_0^2 u_0)t] + \Lambda_0 I(t, f(s)) + I_4(t, f(s)), \quad (1.97)$$

$$u''(t)=U(t)[2\Lambda_0 u_0'-\Lambda_0^2 u_0+(\Lambda_0^2 u_0'-\Lambda_0^3 u_0)t]+$$
$$+\Lambda_0^2 I(t,f(s))+2\Lambda_0 I_4(t,f(s))+f(t). \qquad (1.98)$$

В силу (1.72), (1.91)

$$U(t)[u_0'+(\Lambda_0 u_0'-\Lambda_0^2 u_0)t]\in D(\Lambda_0). \qquad (1.99)$$

Из представления (1.98) видно, что

$$I(t,f(s))\in D(\Lambda_0^2), \qquad (1.100)$$

$$I_4(t,f(s))\in D(\Lambda_0). \qquad (1.101)$$

В силу (1.100)

$$\Lambda_0 I(t,f(s))\in D(\Lambda_0) \qquad (1.102)$$

и включение (1.96) следует из (1.97), (1.99), (1.101), (1.102).

Покажем, исходя из представления (1.86), что

$$u(t)\in D(\Lambda_0^2),\ t\in[0,\infty), \qquad (1.103)$$

для чего, учитывая включение (1.100), достаточно доказать, что

$$U(t)[u_0+(u_0'-\Lambda_0 u_0)t]\in D(\Lambda_0^2). \qquad (1.104)$$

В силу условия д)

$$u_0+(u_0'-\Lambda_0 u_0)t\in D(\Lambda_0^2), \qquad (1.105)$$

следовательно,

$$\Lambda_0 u_0+(\Lambda_0 u_0'-\Lambda_0^2 u_0)t\in D(\Lambda_0). \qquad (1.106)$$

Учитывая включения (1.105), (1.106) и используя соотношение $U(t)\Lambda_0 x=\Lambda_0 U(t)x$, $\forall x\in D(\Lambda_0)$ (см. (1.72)), получаем

$$U(t)[\Lambda_0^2 u_0+(\Lambda_0^2 u_0'-\Lambda_0^3 u_0)t]=\Lambda_0^2 U(t)[u_0+(u_0'-\Lambda_0 u_0)t],$$

откуда следует соотношение (1.104). Включение (1.103) доказано.

Заметим, что в силу условия д)

$$u_0'+(\Lambda_0 u_0'-\Lambda_0^2 u_0)\in D(\Lambda_0). \qquad (1.107)$$

Используя формулы (1.86), (1.97), (1.98), а также включения (1.96), (1.103), (1.105), (1.107) и соотношения (1.72), получаем

$$u''(t)+Bu'(t)+Cu(t)=u''(t)-2\Lambda_0 u'(t)+\Lambda_0^2 u(t)=$$
$$=f(t)+U(t)[2\Lambda_0 u_0'-\Lambda_0^2 u_0-2\Lambda_0 u_0'+\Lambda_0^2 u_0+$$
$$+(\Lambda_0^2 u_0'-\Lambda_0^3 u_0-2\Lambda_0^2 u_0'+2\Lambda_0^3 u_0+\Lambda_0^2 u_0'-\Lambda_0^3 u_0)t]+$$
$$+(\Lambda_0^2-2\Lambda_0^2+\Lambda_0^2)I(t,f(s))+(2\Lambda_0-2\Lambda_0)I_4(t,f(s))=f(t).$$

Итак, $u''(t)+Bu'(t)+Cu(t)=f(t)$, т.е. функция (1.70) является решением уравнения (1.1). Выше было показано, что выполняются начальные условия (1.2). Теорема 1.2 доказана.

§ 2. Решение задачи Коши в терминах косинус и синус оператор-функций

Найдем решение задачи (1.1), (1.2) в терминах косинус и синус оператор-функций.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $BCx=CBx$, $x\in D(BC)\cap D(CB)$;

2) оператор $B_1=-(1/2)B$ является генератором полугруппы $U(t)$ класса C_0 и

$$CU(t)x=U(t)Cx, \quad x\in D(B^2)\cap D(C); \tag{2.1}$$

3) операторный дискриминант $Q=B_1^2-C$ с оператором B_1, удовлетворяющим условию 2), является производящим оператором сильно непрерывной косинус-оператор-функции $C(t)$ и

$$BC(t)x=C(t)Bx, \quad x\in D(B); \tag{2.2}$$

$$C(t)U(t)x=U(t)C(t)x, \quad x\in D(B); \tag{2.3}$$

$$S(t)U(t)x=U(t)S(t)x, \quad x\in D(B), \tag{2.4}$$

где $S(t)$ – синус-оператор-функция, ассоциированная с $C(t)$:

$$S(t)x=\int_0^t C(\tau)x\,d\tau, \quad x\in E; \tag{2.5}$$

4) $f(t)\in D(Q)=D(B^2)\cap D(C)$ при каждом $t\in[0,\infty)$ и

$$Bf(t)\in C\big([0,\infty);E\big); \tag{2.6}$$

$$B^2 f(t)\in C\big([0,\infty);E\big); \tag{2.7}$$

$$Cf(t)\in C\big([0,\infty);E\big); \tag{2.8}$$

5) $u_0\in D_0$, где $D_0=\{x\in D(B^3)\cap D(BC)\cap D(CB)\,|\,Cx\in E_1\}$, $E_1=\{x\in E\,|\,C(t)x\in C^1(\mathbb{R};E)\}$; $u_0'\in D_1$, где $D_1=\{x\in D(B^2)\cap D(C)\,|\,Bx\in E_1\}$.

Теорема 2.1. При выполнении условий 1) – 5) задача (1.1), (1.2) имеет решение вида

$$u(t) = U(t)\left[C(t)u_0 + S(t)(u_0' - B_1 u_0)\right] + \int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau. \quad (2.9)$$

Чтобы не обременять доказательство теоремы вспомогательными деталями, сделаем предварительно несколько замечаний, которые понадобятся в дальнейшем.

Справедливы включения

$$D_0 \subset D_1 \subset D(Q) \subset E_1. \quad (2.10)$$

Действительно, известно [2, с. 91], что $D(Q) = E_2$, где $E_2 = \{x \in E \mid C(t)x \in C^2(\mathbb{R}; E)\}$; а $E_2 \subset E_1$, следовательно, $D(Q) \subset E_1$. Включение $D_1 \subset D(Q)$ очевидно, ибо $D_1 = \{x \in D(Q) \mid Bx \in E_1\}$. Покажем, что $D_0 \subset D_1$. Пусть $x \in D_0$, тогда $x \in D(B^2)$ и $x \in D(C)$, следовательно, $x \in D(B^2) \cap D(C) = D(Q)$; кроме того, $Bx \in D(B^2)$ и $Bx \in D(C)$, следовательно, $Bx \in D(Q)$, а, значит, $Bx \in E_1$ в силу уже доказанного включения $D(Q) \subset E_1$. Получили $x \in D(Q)$ и $Bx \in E_1$, следовательно, $x \in D_1$.

В силу условий 2), 3) и формулы (2.5)

$$U(0) = I,\ C(0) = I,\ S(0) = O, \quad (2.11)$$

где I и O – соответственно единичный и нулевой операторы.

Из условия 2) следует [4, с. 17]:

$$U(t)x \in D(B),\ \forall\, x \in D(B),\ t \in [0, \infty); \quad (2.12)$$

$$U'(t)x = B_1 U(t)x,\ x \in D(B); \quad (2.13)$$

$$B_1 U(t)x = U(t)B_1 x,\ x \in D(B), \quad (2.14)$$

ибо $D(B_1) = D(B)$.

В силу теоремы о производной от интеграла по переменному верхнему пределу [25, с. 609] из формулы (2.5) следует соотношение

$$S'(t)x = C(t)x,\ x \in E. \quad (2.15)$$

В силу условия 3) имеем [4, с. 26]

$$S(t)x \in D(Q),\ \forall\, x \in E_1,\ t \in [0, \infty); \quad (2.16)$$

$$C'(t)x = QS(t)x,\ x \in E_1; \quad (2.17)$$

$$C(t)x \in D(Q),\ \forall\, x \in D(Q),\ t \in [0, \infty); \quad (2.18)$$

$$QC(t)x = C(t)Qx,\ x \in D(Q); \quad (2.19)$$

$$S(t)x \in D(Q)\,,\ \forall\, x \in D(Q)\,, t \in [0,\infty)\,; \tag{2.20}$$

$$QS(t)x = S(t)Qx\,,\ x \in D(Q)\,. \tag{2.21}$$

Из (2.2) следует, что

$$BS(t)x = S(t)Bx\,,\ x \in D(B)\,. \tag{2.22}$$

Действительно, используя формулу (2.5), замкнутость оператора B и равенство (2.2), получаем при каждом $x \in D(B)$:

$$BS(t)\,x = B\int_0^t C(\tau)\,x\,d\tau = \int_0^t BC(\tau)\,x\,d\tau = \int_0^t C(\tau)Bx\,d\tau = S(t)Bx\,.$$

Из (2.2), (2.19) следует соотношение

$$CC(t)x = C(t)Cx\,,\ x \in D(Q)\,. \tag{2.23}$$

Действительно, пусть $x \in D(Q)$. Тогда $x \in D(B)$, $Bx \in D(B)$ и в силу (2.18) $C(t)\,x \in D(Q)$ при каждом $t \in [0,\infty)$, следовательно, $C(t)\,x \in D(B^2)$, $t \in [0,\infty)$. Применяя (2.2), получаем

$$B^2C(t)x = B\big[BC(t)x\big] = B\big[C(t)Bx\big] = \big[BC(t)\big]Bx = \big[C(t)B\big]Bx = C(t)B^2x\,,$$

следовательно,

$$B_1^2C(t)x = C(t)B_1^2x\,. \tag{2.24}$$

В силу (2.19) $B_1^2C(t)x - CC(t)x = C(t)B_1^2\,x - C(t)\,Cx$, откуда следует в силу (2.24) соотношение (2.23).

Аналогично, из (2.21), (2.22) следует соотношение

$$CS(t)x = S(t)Cx\,,\ x \in D(Q)\,. \tag{2.25}$$

Наряду со множествами Φ, Φ_E^0, введенными в § 1.1, рассмотрим семейство сильно непрерывно дифференцируемых по $t \in [0,\infty)$ на множестве $H \subseteq E$ оператор-функций $A(t)$:

$$\Phi_H^1 = \left\{A(t) \in \Phi \mid A(t)\,x \in C^1\big([0,\infty); E\big) \text{ при каждом } x \in H\right\}.$$

По условию 2)

$$U(t) \in \Phi_E^0\,. \tag{2.26}$$

По условию 3) оператор-функция $C(t)$ сильно непрерывна по $t \in \mathbb{R}$ на E, следовательно,

$$C(t) \in \Phi_E^0\,. \tag{2.27}$$

В силу (2.5), (2.27)

$$S(t) \in \Phi_E^0 . \tag{2.28}$$

В силу (2.13), (2.14), (2.26)

$$U(t) \in \Phi_{D(B)}^1 . \tag{2.29}$$

Из определения множества E_1 следует, что

$$C(t) \in \Phi_{E_1}^1 . \tag{2.30}$$

В силу (2.15), (2.27)

$$S(t) \in \Phi_E^1 . \tag{2.31}$$

Замечание 2.1. Если $A(t) \in \Phi_E^0$, $g(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$, то $A(t)g(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$ [8, с. 21].

Замечание 2.2. Из замечания 2.1 следует: если $A_1(t)$, $A_2(t) \in \Phi_E^0$, то $A_1(t)A_2(t) \in \Phi_E^0$.

В силу (2.26) – (2.28) и замечания 2.2

$$C(t)U(t) \in \Phi_E^0 , \tag{2.32}$$

$$S(t)U(t) \in \Phi_E^0 , \tag{2.33}$$

$$U(t)C(t) \in \Phi_E^0 , \tag{2.34}$$

$$U(t)S(t) \in \Phi_E^0 . \tag{2.35}$$

Замечание 2.3. Если $A(t) \in \Phi_H^1$, $g(t) \in C^1\left([0, \infty); E\right)$ и $g(t) \in H$ при каждом $t \in [0, \infty)$, то $A(t)g(t) \in C^1\left([0, \infty); E\right)$ и справедлива формула (I.1.16).

Напомним также, что в дальнейшем будет неоднократно использовано правило дифференцирования интеграла по параметру (см. §1 главы I).

Доказательство теоремы 2.1. В силу (2.11) функция (2.9) удовлетворяет начальному условию $u(0) = u_0$. Покажем, что эта функция удовлетворяет начальному условию $u'(0) = u_0'$ и уравнению (1.1), которое можно записать в виде

$$u''(t) - 2B_1 u'(t) + Cu(t) = f(t),\ 0 \le t < \infty .$$

Запишем формулу (2.9) в виде

$$u(t) = U(t)w_0(t) + I_0(t) , \tag{2.36}$$

где

$$w_0(t) = C(t)u_0 + S(t)(u_0' - B_1 u_0),$$

$$I_0(t) = \int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$u'(t) = \left[U(t)w_0(t)\right]' + I_0'(t) \tag{2.37}$$

при условии, что слагаемые в правой части (2.36) дифференцируемы. В силу (2.29) и замечания 2.3, если

$$w_0(t) \in C^1\left([0,\infty); E\right), \tag{2.38}$$

$$w_0(t) \in D(B),\ t \in [0,\infty), \tag{2.39}$$

то $U(t)w_0(t) \in C^1\left([0,\infty); E\right)$ и

$$\left[U(t)w_0(t)\right]' = U'(t)w_0(t) + U(t)w_0'(t). \tag{2.40}$$

Покажем справедливость включений (2.38), (2.39). В силу (2.10) и условия 5)

$$u_0 \in E_1, \tag{2.41}$$

следовательно, в силу (2.30) $C(t)u_0 \in C^1\left([0,\infty); E\right)$. В силу (2.31) $S(t)(u_0' - B_1 u_0) \in C^1\left([0,\infty); E\right)$. Из последних двух включений следует (2.38). В силу (2.10) и условия 5)

$$u_0 \in D(Q), \tag{2.42}$$

следовательно, в силу (2.18)

$$C(t)u_0 \in D(Q),\ t \in [0,\infty). \tag{2.43}$$

В силу (2.10) и условия 5)

$$u_0' \in D(Q), \tag{2.44}$$

следовательно, в силу (2.20)

$$S(t)u_0' \in D(Q),\ t \in [0,\infty). \tag{2.45}$$

В силу условия 5) $Bu_0 \in D(B^2)$ и $Bu_0 \in D(C)$, следовательно, $Bu_0 \in D(Q)$. Тогда $B_1 u_0 \in D(Q)$ и в силу (2.20)

$$S(t)B_1 u_0 \in D(Q),\ t \in [0,\infty). \tag{2.46}$$

В силу (2.43), (2.45), (2.46) справедливо включение $w_0(t) \in D(Q)$, $t \in [0,\infty)$, откуда следует (2.39).

Итак, в силу (2.38), (2.39) справедлива формула (2.40).

В силу (2.13), (2.14), (2.39)

$$U'(t)w_0(t) = U(t)B_1 w_0(t)\,. \tag{2.47}$$

В силу (2.17), (2.41) справедливо равенство $C'(t)u_0 = QS(t)u_0$. В силу (2.21), (2.42) имеем соотношение $QS(t)u_0 = S(t)Qu_0$. Получили

$$C'(t)u_0 = S(t)Qu_0\,. \tag{2.48}$$

В силу (2.15)

$$S'(t)(u_0' - B_1u_0) = C(t)(u_0' - B_1u_0)\,. \tag{2.49}$$

В силу (2.48), (2.49)

$$w_0'(t) = S(t)Qu_0 + C(t)(u_0' - B_1u_0)\,. \tag{2.50}$$

В силу (2.40), (2.47), (2.50)

$$\begin{aligned}\left[U(t)w_0(t)\right]' &= U(t)\left[B_1C(t)u_0 + B_1S(t)(u_0' - B_1u_0)\right] + \\ &+ U(t)\left[S(t)Qu_0 + C(t)(u_0' - B_1u_0)\right].\end{aligned} \tag{2.51}$$

В силу условия 5) $u_0 \in D(B)$, следовательно, в силу (2.2)

$$B_1C(t)u_0 = C(t)B_1u_0\,. \tag{2.52}$$

В силу условия 5) $u_0' - B_1u_0 \in D(B)$, следовательно, в силу (2.22)

$$B_1S(t)(u_0' - B_1u_0) = S(t)(B_1u_0' - B_1^2u_0)\,. \tag{2.53}$$

В силу (2.52), (2.53) формулу (2.51) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\left[U(t)w_0(t)\right]' &= U(t)[C(t)B_1u_0 + S(t)(B_1u_0' - B_1^2u_0)] + \\ &+ U(t)[C(t)(u_0' - B_1u_0) + S(t)(B_1^2u_0 - Cu_0)]\end{aligned}$$

или, после приведения подобных членов,

$$\left[U(t)w_0(t)\right]' = U(t)\left[C(t)u_0' + S(t)(B_1u_0' - Cu_0)\right]. \tag{2.54}$$

Найдем $I_0'(t)$. В силу непрерывности функции $f(\tau)$, включения (2.33) и замечания 2.1 подынтегральная функция $g_0(\tau, t) = S(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)$ непрерывна по (τ, t). В силу условия 4)

$$f(\tau) \in D(B)\,,\ \tau \in [0, \infty)\,, \tag{2.55}$$

следовательно, в силу (2.29), (2.31)

$$[g_0(\tau,t)]_t' = S'(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau) + S(t-\tau)U'(t-\tau)f(\tau)\,,$$

или в силу (2.13) – (2.15)

$$\left[\, g_0(\tau,t)\right]'_t = C(t-\tau)U(t-\tau)\,f(\tau)+S(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau)\,,$$

из чего видно в силу (2.6), (2.32), (2.33) и замечания 2.1, что производная $\left[\, g_0(\tau,t)\right]'_t$ непрерывна по $(\tau,\, t)$, следовательно, применимо правило дифференцирования интеграла по параметру:

$$I_0'(t)=\int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau+\int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau)\,d\tau+$$

$$+S(0)U(0)\,f(t)\,. \tag{2.56}$$

В силу (2.11)

$$S(0)U(0)\,f(t)=0\,. \tag{2.57}$$

В силу (2.37), (2.54), (2.56), (2.57)

$$u'(t)=U(t)\left[C(t)u_0'+S(t)(B_1u_0'-Cu_0)\right]+$$

$$+\int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau)\,d\tau+\int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\,.$$

В силу (2.11) $u'(0)=u_0'$, т.е. функция (2.9) удовлетворяет второму начальному условию. Запишем $u'(t)$ в виде

$$u'(t)=U(t)w_1(t)+I_1(t)+I_2(t)\,, \tag{2.58}$$

где

$$w_1(t)=C(t)\,u_0'+S(t)(B_1u_0'-Cu_0)\,,$$

$$I_1(t)=\int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau)\,d\tau\,,$$

$$I_2(t)=\int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau\,.$$

Тогда

$$u''(t)=\left[U(t)w_1(t)\right]'+I_1'(t)+I_2'(t) \tag{2.59}$$

при условии, что слагаемые в правой части (2.58) дифференцируемы. В силу (2.29) и замечания 2.3, если

$$w_1(t)\in C^1\left([\,0,\,\infty);\,E\right), \tag{2.60}$$

$$w_1(t)\in D(B)\,,\; t\in[\,0,\,\infty)\,, \tag{2.61}$$

то $U(t)w_1(t) \in C^1\big([0,\infty); E\big)$ и

$$\big[U(t)w_1(t)\big]' = U'(t)w_1(t) + U(t)w_1'(t) . \qquad (2.62)$$

Покажем справедливость включений (2.60), (2.61).

В силу (2.10) и условия 5)

$$u_0' \in E_1 , \qquad (2.63)$$

следовательно, в силу (2.30) $C(t)u_0' \in C^1\big([0, \infty); E\big)$. В силу (2.31) $S(t)(B_1u_0' - Cu_0) \in C^1\big([0, \infty); E\big)$. Из последних двух включений следует (2.60).

В силу (2.18), (2.44)

$$C(t)u_0' \in D(Q) ,\ t \in [0, \infty) . \qquad (2.64)$$

В силу условия 5)

$$B_1 u_0' \in E_1 , \qquad (2.65)$$

следовательно, в силу (2.16)

$$S(t)B_1 u_0' \in D(Q) ,\ t \in [0, \infty) . \qquad (2.66)$$

В силу условия 5) $C u_0 \in E_1$, следовательно, в силу (2.16)

$$S(t)Cu_0 \in D(Q) ,\ t \in [0, \infty) . \qquad (2.67)$$

В силу (2.64), (2.66), (2.67) справедливо включение $w_1(t) \in D(Q)$, $t \in [0, \infty)$, откуда следует (2.61).

Итак, в силу (2.60), (2.61) имеет место формула (2.62).

В силу (2.13), (2.61)

$$U'(t)w_1(t) = B_1U(t)\, w_1(t) . \qquad (2.68)$$

В силу (2.17), (2.63)

$$C'(t)u_0' = QS(t)u_0' . \qquad (2.69)$$

В силу (2.15)

$$S'(t)(B_1u_0' - Cu_0) = C(t)(B_1u_0' - Cu_0) . \qquad (2.70)$$

В силу (2.69), (2.70)

$$w_1'(t) = QS(t)u_0' + C(t)(B_1u_0' - Cu_0) . \qquad (2.71)$$

В силу (2.62), (2.68), (2.71)

$$\big[U(t)w_1(t)\big]' = B_1U(t)\ \big[C(t)u_0' + S(t)(B_1u_0' - Cu_0)\big] +$$

$$+U(t)\ \Big[B_1^2 S(t)\, u_0' - CS(t)\, u_0' + C(t)(B_1 u_0' - Cu_0)\Big] . \qquad (2.72)$$

Запишем правую часть равенства (2.72) в форме, которая потребуется в дальнейшем.

В силу условия 5)

$$u_0' \in D(B), \tag{2.73}$$

следовательно, в силу (2.2)

$$C(t)B_1 u_0' = B_1 C(t)u_0'. \tag{2.74}$$

В силу (2.64) справедливо включение $C(t)u_0' \in D(B)$, $t \in [0, \infty)$, следовательно, в силу (2.14)

$$U(t)B_1 C(t)u_0' = B_1 U(t)C(t)u_0'. \tag{2.75}$$

В силу (2.74), (2.75)

$$U(t)C(t)B_1 u_0' = B_1 U(t)C(t)u_0'. \tag{2.76}$$

В силу (2.22), (2.73)

$$B_1 S(t)u_0' = S(t)B_1 u_0'. \tag{2.77}$$

В силу (2.16), (2.65) справедливо включение $S(t)B_1 u_0' \in D(Q)$, $t \in [0, \infty)$, следовательно, $S(t)B_1 u_0' \in D(B)$ и в силу (2.14)

$$U(t)B_1 S(t)B_1 u_0' = B_1 U(t)S(t)B_1 u_0'. \tag{2.78}$$

В силу (2.77), (2.78)

$$U(t)B_1^2 S(t)u_0' = B_1 U(t)S(t)B_1 u_0'. \tag{2.79}$$

В силу (2.23), (2.42)

$$C(t)Cu_0 = CC(t)u_0. \tag{2.80}$$

В силу (2.1), (2.43)

$$U(t)CC(t)u_0 = CU(t)C(t)u_0. \tag{2.81}$$

В силу (2.80), (2.81)

$$U(t)C(t)Cu_0 = CU(t)C(t)u_0. \tag{2.82}$$

В силу (2.1), (2.45)

$$U(t)CS(t)u_0' = CU(t)S(t)u_0'. \tag{2.83}$$

В силу (2.67)

$$S(t)Cu_0 \in D(B),\ t \in [0, \infty), \tag{2.84}$$

следовательно, в силу (2.12)

$$U(t)S(t)Cu_0 \in D(B),\ t \in [0, \infty). \tag{2.85}$$

Припишем в первых квадратных скобках в правой части равенства (2.72) выражение $S(t)(-Cu_0)+S(t)Cu_0$ (это можно сделать в силу (2.85)). Покажем, что

$$B_1U(t)S(t)Cu_0 = CU(t)S(t)B_1u_0 . \tag{2.86}$$

В силу (2.14), (2.84)

$$B_1U(t)S(t)Cu_0 = U(t)B_1S(t)Cu_0 . \tag{2.87}$$

В силу условия 5) справедливо включение $Cu_0 \in D(B)$, следовательно, в силу (2.22)

$$B_1S(t)Cu_0 = S(t)B_1Cu_0 . \tag{2.88}$$

В силу условий 1), 5)

$$B_1Cu_0 = CB_1u_0 . \tag{2.89}$$

В силу условия 5) $B_1u_0 \in D(Q)$, следовательно, в силу (2.25)

$$S(t)CB_1u_0 = CS(t)B_1u_0 . \tag{2.90}$$

В силу (2.1), (2.46)

$$U(t)CS(t)B_1u_0 = CU(t)S(t)B_1u_0 . \tag{2.91}$$

Из (2.87) – (2.91) следует (2.86). В силу (2.76), (2.79), (2.82), (2.83), (2.86) соотношение (2.72) с учетом добавления слагаемых $S(t)(-Cu_0)$ и $S(t)Cu_0$ можно записать в виде

$$\big[U(t)w_1(t)\big]' = 2B_1U(t)\big[C(t)u_0' + S(t)(B_1u_0' - Cu_0)\big] -$$
$$- CU(t)\big[C(t)u_0 + S(t)(u_0' - B_1u_0)\big],$$

т.е.

$$\big[U(t)w_1(t)\big]' = 2B_1U(t)\,w_1(t) - CU(t)\,w_0(t) . \tag{2.92}$$

Найдем $I_1'(t)$. В силу (2.6), (2.33) и замечания 2.1 подынтегральная функция $g_1(\tau,\, t) \;\; = S(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau)$ непрерывна по $(\tau,\, t)$. В силу условия 4)

$$B_1\,f(\tau) \in D(B)\,,\;\; \tau \in [\,0,\, \infty)\,, \tag{2.93}$$

следовательно, в силу (2.29), (2.31)

$$\big[g_1(\tau,\, t)\big]_t' = S'(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau) + S(t-\tau)U'(t-\tau)B_1\,f(\tau)\,,$$

или в силу (2.13) – (2.15)

$$\big[g_1(\tau,\, t)\big]_t' = C(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau) + S(t-\tau)U(t-\tau)B_1^2\,f(\tau)\,,$$

откуда видно в силу (2.6), (2.7), (2.32), (2.33) и замечания 2.1, что производная $[g_1(\tau, t)]_t'$ непрерывна по (τ, t). Значит,

$$I_1'(t) = \int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)B_1 f(\tau)\,d\tau + \int_0^t S(t-\tau)B_1U(t-\tau)B_1 f(\tau)\,d\tau +$$
$$+S(0)U(0)B_1 f(t)\,.$$

В силу (2.11) $S(0)U(0)f(t) = 0$, следовательно,

$$I_1'(t) = \int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)B_1 f(\tau)\,d\tau + \int_0^t S(t-\tau)B_1U(t-\tau)B_1 f(\tau)\,d\tau\,. \quad (2.94)$$

Запишем правую часть равенства (2.94) в форме, которая потребуется в дальнейшем. В силу (2.14), (2.55)

$$U(t-\tau)B_1 f(\tau) = B_1U(t-\tau)f(\tau)\,. \quad (2.95)$$

В силу (2.12), (2.55) $U(t-\tau)f(\tau) \in D(B)$, $\tau \in [0, t]$, $t \in [0, \infty)$, следовательно, в силу (2.2)

$$C(t-\tau)B_1U(t-\tau)f(\tau) = B_1C(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,. \quad (2.96)$$

В силу (2.95), (2.96)

$$C(t-\tau)U(t-\tau)B_1 f(\tau) = B_1C(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,. \quad (2.97)$$

В силу (2.12), (2.93) $U(t-\tau)B_1 f(\tau) \in D(B)$, $\tau \in [0, t]$, $t \in [0, \infty)$, следовательно, в силу (2.22)

$$S(t-\tau)B_1U(t-\tau)B_1 f(\tau) = B_1S(t-\tau)U(t-\tau)B_1 f(\tau)\,. \quad (2.98)$$

В силу (2.97), (2.98) и замкнутости оператора B_1 соотношение (2.94) можно записать в виде

$$I_1'(t) = B_1\int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + B_1\int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)B_1 f(\tau)\,d\tau\,,$$

т.е.

$$I_1'(t) = B_1I_2(t) + B_1I_1(t)\,. \quad (2.99)$$

Найдем $I_2'(t)$. В силу (2.3), (2.55) $I_2(t)$ можно записать в виде

$$I_2(t) = \int_0^t U(t-\tau)C(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\,.$$

В силу непрерывности функции $f(\tau)$, включения (2.34) и замечания 2.1 подынтегральная функция $g_2(\tau, t) = U(t-\tau)C(t-\tau)f(\tau)$ непрерывна по (τ, t). В силу условия 4)

$$f(\tau) \in D(Q), \ \tau \in [0, \infty), \tag{2.100}$$

следовательно, в силу (2.18) $C(t-\tau)f(\tau) \in D(Q)$, $\tau \in [0, t]$, $t \in [0, \infty)$, откуда вытекает включение

$$C(t-\tau)f(\tau) \in D(B), \ \tau \in [0, t], \ t \in [0, \infty). \tag{2.101}$$

В силу (2.10), (2.100)

$$f(\tau) \in E_1, \ \tau \in [0, \infty). \tag{2.102}$$

Учитывая (2.29), (2.30), (2.101), (2.102), получаем

$$[g_2(\tau,t)]'_t = U'(t-\tau)C(t-\tau)f(\tau) + U(t-\tau)C'(t-\tau)f(\tau)$$

или в силу (2.13), (2.17), (2.102)

$$[g_2(\tau,t)]'_t = B_1 U(t-\tau)C(t-\tau)f(\tau) + U(t-\tau)QS(t-\tau)f(\tau). \tag{2.103}$$

В силу (2.14), (2.101)

$$B_1 U(t-\tau)C(t-\tau)f(\tau) = U(t-\tau)B_1 C(t-\tau)f(\tau). \tag{2.104}$$

В силу (2.2), (2.55)

$$B_1 C(t-\tau)f(\tau) = C(t-\tau)B_1 f(\tau). \tag{2.105}$$

В силу (2.104), (2.105)

$$B_1 U(t-\tau)C(t-\tau)f(\tau) = U(t-\tau)C(t-\tau)B_1 f(\tau). \tag{2.106}$$

В силу (2.21), (2.100)

$$QS(t-\tau)f(\tau) = S(t-\tau)Qf(\tau). \tag{2.107}$$

В силу (2.103), (2.106), (2.107) получаем равенство

$$[g_2(\tau,t)]'_t = U(t-\tau)C(t-\tau)B_1 f(\tau) + U(t-\tau)S(t-\tau)Qf(\tau),$$

откуда видно, в силу (2.6) – (2.8), (2.34), (2.35) и замечания 2.1, что производная $[g_2(\tau,t)]'_t$ непрерывна по (τ, t). Учитывая формулу (2.103) и замкнутость оператора B_1, получаем

$$I'_2(t) = B_1 \int_0^t U(t-\tau)C(t-\tau)f(\tau)\,d\tau + \int_0^t U(t-\tau)QS(t-\tau)f(\tau)\,d\tau +$$
$$+U(0)C(0)f(t).$$

В силу (2.11) $U(0)C(0)f(t)=f(t)$. Тогда учитывая (2.3), (2.55) и вид оператора Q, получаем

$$I_2'(t)= f(t)+B_1\int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t U(t-\tau)B_1^2 S(t-\tau)f(\tau)\,d\tau-\int_0^t U(t-\tau)CS(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\,. \quad (2.108)$$

Запишем правую часть равенства (2.108) в форме, которая потребуется в дальнейшем. В силу (2.20), (2.100)

$$S(t-\tau)\,f(\tau)\in D(Q)\,,\ \tau\in[0,t]\,,\ t\in[0,\infty)\,, \quad (2.109)$$

следовательно, $BS(t-\tau)f(\tau)\in D(B)$, $\tau\in[0,t]$, $t\in[0,\infty)$, и в силу (2.14)

$$U(t-\tau)B_1B_1S(t-\tau)\,f(\tau)=B_1U(t-\tau)B_1S(t-\tau)f(\tau)\,. \quad (2.110)$$

В силу (2.22), (2.55)

$$B_1S(t-\tau)f(\tau)=S(t-\tau)\,B_1\,f(\tau)\,. \quad (2.111)$$

В силу (2.110), (2.111)

$$U(t-\tau)B_1^2S(t-\tau)f(\tau)=B_1U(t-\tau)S(t-\tau)B_1f(\tau)\,. \quad (2.112)$$

В силу (2.1), (2.109)

$$U(t-\tau)CS(t-\tau)f(\tau)=CU(t-\tau)S(t-\tau)f(\tau)\,. \quad (2.113)$$

В силу (2.4), (2.55)

$$U(t-\tau)S(t-\tau)f(\tau)=S(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,. \quad (2.114)$$

В силу (2.113), (2.114)

$$U(t-\tau)CS(t-\tau)f(\tau)=C\,S(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,. \quad (2.115)$$

Учитывая (2.4), (2.93), (2.112), (2.115) и замкнутость операторов B_1, C, формулу (2.108) можно записать в виде

$$I_2'(t)= f(t)+B_1\int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+$$

$$+B_1\int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau)\,d\tau-C\int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau\,,$$

т.е.

$$I_2'(t)= f(t)+B_1I_2(t)+B_1I_1(t)-C\,I_0(t)\,. \quad (2.116)$$

Подставляя в правую часть равенства (2.59) вместо $\left[U(t)w_1(t)\right]'$, $I_1'(t)$, $I_2'(t)$ их выражения из (2.92), (2.99), (2.116) и учитывая (2.36), (2.58), получаем

$$u''(t) = 2B_1U(t)w_1(t) - CU(t)w_0(t) + B_1I_2(t) + B_1I_1(t) +$$

$$+ f(t) + B_1I_2(t) + B_1I_1(t) - C\,I_0(t) =$$

$$= f(t) + 2B_1\left[U(t)w_1(t) + I_1(t) + I_2(t)\right] - C\left[U(t)w_0(t) + I_0(t)\right] =$$

$$= f(t) - Bu'(t) - Cu(t)\,.$$

Получили равенство $u''(t) = f(t) - B\,u'(t) - C\,u(t)$ или $u''(t) + B\,u'(t) + C\,u(t) = f(t)$, т.е. функция (2.9) является решением уравнения (1.1). Выше было показано, что она удовлетворяет начальным условиям (1.2).

Покажем, что

$$u(t) \in C^2\left([0, \infty); E\right). \tag{2.117}$$

Как уже отмечалось выше, справедливо включение $U(t)w_1(t) \in C^1\left([0, \infty); E\right)$. Из равенства

$$I_1'(t) = \int_0^t C(t-\tau)U(t-\tau)B_1\,f(\tau)\,d\tau + \int_0^t S(t-\tau)U(t-\tau)B_1^2\,f(\tau)\,d\tau$$

и условий (2.6), (2.7) следует, что $I_1'(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$, т.е. $I_1(t) \in C^1\left([0, \infty); E\right)$. Из равенства

$$I_2'(t) = f(t) + \int_0^t U(t-\tau)C(t-\tau)\,B_1\,f(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t U(t-\tau)\,S(t-\tau)B_1^2\,f(\tau)\,d\tau - \int_0^t U(t-\tau)\,S(t-\tau)C\,f(\tau)\,d\tau\,,$$

непрерывности функции $f(t)$ и условий (2.6) – (2.8) следует, что $I_2'(t) \in C\left([0, \infty); E\right)$, т.е. $I_2(t) \in C^1\left([0, \infty); E\right)$. Тогда в силу (2.58) $u'(t) \in C^1\left([0, \infty); E\right)$, т.е. справедливо включение (2.117). Теорема 2.1 доказана.

Глава III

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА С ОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Решение уравнения Эйлера в терминах операторной экспоненты

В банаховом пространстве E изучается уравнение Эйлера второго порядка

$$t^2 x''(t) + tAx'(t) + Bx(t) = f(t)\,, \quad 0 < t < \infty\,, \tag{1.1}$$

где $A,\ B \in L(E)$; $f(t) \in C\big([0, \infty); E\big)$. Уравнение (1.1) – это вырождающееся в точке $t = 0$ уравнение.

Везде в дальнейшем под решением уравнения (1.1) понимается его сильное решение, т.е. дважды непрерывно дифференцируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция, удовлетворяющая уравнению (1.1).

Рассмотрим стабилизирующее, т.е. устраняющее вырожденность, возмущение уравнения (1.1) малым параметром $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const}$, $\varepsilon_0 > 0$:

$$(t+\varepsilon)^2 x_\varepsilon''(t) + (t+\varepsilon)Ax_\varepsilon'(t) + Bx_\varepsilon(t) = f(t)\,, \ 0 \le t < \infty\,, \tag{1.2}$$

$$x_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\,, \ x_\varepsilon'(0) = x_{\varepsilon,0}'\,. \tag{1.3}$$

Выясним условия разрешимости задачи (1.2), (1.3) и поточечной сходимости ее решения при $\varepsilon \to 0$ к ограниченному при $t \to +0$ решению уравнения (1.1)

Заменой переменной $t = \varepsilon e^\tau - \varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к задаче вида

$$u_\varepsilon''(\tau) + (A - I)u_\varepsilon'(\tau) + Bu_\varepsilon(\tau) = g_\varepsilon(\tau)\,, \ 0 \le \tau < \infty\,, \tag{1.4}$$

$$u_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\,, \ u_\varepsilon'(0) = \varepsilon x_{\varepsilon,0}'\,, \tag{1.5}$$

где $u_\varepsilon(\tau) ::= x_\varepsilon\left(\varepsilon e^\tau - \varepsilon\right)$, $g_\varepsilon(\tau) ::= f\left(\varepsilon e^\tau - \varepsilon\right)$.

Задача (1.4), (1.5) – это задача вида (I.1.1), (I.1.2).

Рассмотрим характеристическое операторное уравнение

$$\Lambda^2 + (A - I)\Lambda + B = O \tag{1.6}$$

соответствующего однородного уравнения

$$u_\varepsilon''(\tau) + (A - I)u_\varepsilon'(\tau) + Bu_\varepsilon(\tau) = 0\,, \ 0 \le \tau < \infty\,. \tag{1.7}$$

Операторный дискриминант уравнения (1.6) имеет вид $\Delta = (A-I)^2 - 4B$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $\Delta = F^2$, где F – некоторый оператор из $L(E)$, $F \neq O$;

2) $AF = FA$;

3) $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\} < -1$, где $\eta_1 = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda \mid \lambda \in \sigma(\Lambda_1)\}$, $\eta_2 = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda \mid \lambda \in \sigma(\Lambda_2)\}$, $\sigma(\Lambda_k)$ – спектр оператора Λ_k ($k = 1, 2$); $\Lambda_{1,2} = 2^{-1}(I - A \mp F)$ – характеристические операторы уравнения (1.7);

4) начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\eta_{1\delta}} \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.8}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\eta_{\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.9}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{1-\eta_{\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.10}$$

где $\eta_{1\delta} = \eta_1 + \delta$, $\eta_\delta = \eta + \delta$, δ – сколь угодно малое фиксированное положительное число, такое что

$$\eta_\delta < -1. \tag{1.11}$$

(такое δ, можно подобрать в силу условия 3)).

Замечание 1.1. Для выполнимости условий (1.8) – (1.10) достаточно, чтобы для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*] \subset (0, \varepsilon_0]$, где ε_* – произвольное сколь угодно малое положительное число, не превосходящее ε_0, выполнялись соответственно следующие неравенства:

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \leq L_0 \varepsilon^{\eta_{1\delta} + \rho},$$

$$\left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \leq K_0 \varepsilon^{\eta_\delta + \rho},$$

$$\left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \leq T_1 \varepsilon^{\eta_\delta - 1 + \rho},$$

где L_0, K_0, T_1 – константы; L_0, K_0, $T_1 > 0$; ρ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Укажем некоторые соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

В силу условия 3) и неравенства (1.11)

$$\eta_{1\delta} < -1, \tag{1.12}$$

$$\eta_{2\delta} < -1, \tag{1.13}$$

т.е.

$$-1-\eta_{1\delta} > 0, \tag{1.14}$$

$$-1-\eta_{2\delta} > 0, \tag{1.15}$$

где $\eta_{1\delta} = \eta_1 + \delta$, $\eta_{2\delta} = \eta_2 + \delta$.

В силу малости параметра ε будем считать в дальнейшем, что $\varepsilon < 1$.

Из условия (1.9) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\eta_{1\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.16}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\eta_{2\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0. \tag{1.17}$$

Из условия (1.10) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{1-\eta_{1\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.18}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{1-\eta_{2\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0. \tag{1.19}$$

В дальнейшем понадобится также оценка роста операторной экспоненты. Пусть $H \in L(E)$, $\eta = \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(H)\}$, где $\sigma(H)$ – спектр оператора H. Тогда для произвольного сколь угодно малого фиксированного положительного числа δ справедлива оценка

$$\left\| e^{Ht} \right\| \le M_\delta\, e^{\eta_\delta t},\ 0 \le t < \infty, \tag{1.20}$$

где M_δ – некоторая постоянная, $M_\delta > 0$; $\eta_\delta = \eta + \delta$ (в частности, за счет выбора δ можно считать, что $\eta_\delta < 0$ при $\eta < 0$).

Действительно, известно [3, с. 42], что

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln\left\| e^{Ht} \right\|}{t} = \eta.$$

По определению предела, для взятого числа $\delta > 0$ найдется число $\Delta = \Delta(\delta) > 0$, такое, что для любого $t > \Delta$ выполняется

$$\eta - \delta < \frac{\ln\left\| e^{Ht} \right\|}{t} < \eta + \delta ,$$

откуда, в частности, получаем

$$\left\| e^{Ht} \right\| \le e^{(\eta+\delta)t} , \ t > \Delta . \tag{1.21}$$

Из равенства

$$\left\| e^{Ht} \right\| = \left[\left\| e^{Ht} \right\| e^{-(\eta+\delta)t} \right] e^{(\eta+\delta)t}$$

следует оценка

$$\left\| e^{Ht} \right\| \le K_\delta \, e^{(\eta+\delta)t} , \ 0 \le t \le \Delta , \tag{1.22}$$

где

$$K_\delta = \max_{0 \le t \le \Delta} \left[\left\| e^{Ht} \right\| e^{-(\eta+\delta)t} \right].$$

Полагая $M_\delta = \max\{1; K_\delta\}$, получаем из (1.21), (1.22) оценку (1.20).

В силу (1.20)

$$\left\| e^{\Lambda_1 t} \right\| \le M_{1\delta} \, e^{\eta_{1\delta} t} , \ t \in [\,0, \infty) ; \tag{1.23}$$

$$\left\| e^{\Lambda_2 t} \right\| \le M_{2\delta} \, e^{\eta_{2\delta} t} , \ t \in [\,0, \infty) , \tag{1.24}$$

где $M_{1\delta}$, $M_{2\delta}$ – некоторые постоянные; $M_{1\delta}, \ M_{2\delta} > 0$.

В дальнейшем неоднократно будут использоваться без дополнительных ссылок известные неравенства [11, с. 123, 127, 265]

$$\| Hx \| \le \| H \| \, \| x \| , \ \forall H \in L(E) , \ \forall x \in E ;$$

$$\| H_1 H_2 \| \le \| H_1 \| \, \| H_2 \| , \ \forall H_1, \ H_2 \in L(E) ;$$

$$\left\| \int_a^b h(s)\, ds \right\| \le \int_a^b \| h(s) \| ds .$$

Теорема 1.1. При выполнении условий 1), 2) задача (1.2), (1.3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение вида

$$x_\varepsilon(t) = \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} + I_{1\varepsilon}(t) + I_{2\varepsilon}(t) , \tag{1.25}$$

где $\displaystyle I_{1\varepsilon}(t) = \int_0^t \exp\left(\Lambda_2 \ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right) \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{s+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \left(\varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right) \frac{ds}{s+\varepsilon}$,

$$I_{2\varepsilon}(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\varepsilon}{\nu+s+\varepsilon}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\varepsilon}d\nu\right]\frac{ds}{s+\varepsilon}\,.$$

При выполнении условий 3), 4) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x_\varepsilon(t)=x_0(t)\,,\ t\in(0,\infty)\,, \tag{1.26}$$

где

$$x_0(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t}{\nu+s}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{\nu+s}d\nu\right]\frac{ds}{s}\,. \tag{1.27}$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Это решение ограничено при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0,\infty)$.

Теорема 1.1 справедлива в силу лемм 1.1 – 1.4, изложенных ниже.

Лемма 1.1. При выполнении условий 1), 2) задача (1.2), (1.3) имеет решение вида (1.25).

Доказательство. В силу условий 1), 2) выполняются условия теоремы I.1.1. Используя формулу (I.1.5), получаем решение задачи (1.4), (1.5):

$$u_\varepsilon(\tau)=\exp(\Lambda_1\tau)\,x_{\varepsilon,0}+\int_0^\tau\exp[\Lambda_2(\tau-\mu)]\exp(\Lambda_1\mu)\left(\varepsilon x'_{\varepsilon,0}-\Lambda_1x_{\varepsilon,0}\right)d\mu+$$

$$+\int_0^\tau\left[\int_0^{\tau-\rho}\exp\left[\Lambda_2(\tau-\rho-\mu)\right]\exp(\Lambda_1\mu)g_\varepsilon(\rho)\,d\mu\right]d\rho\,. \tag{1.28}$$

Проведя во втором слагаемом в правой части равенства (1.28) замену $\mu=\ln\dfrac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$, а в третьем слагаемом последовательно замены $\rho=\ln\dfrac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$, $\mu=\ln\dfrac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}$ и возвращаясь к переменной t, получаем решение вида (1.25) задачи (1.2), (1.3). Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. При выполнении условий 1) – 3) функция вида (1.27) определена при любом $t\in[0,\infty)$ и ограничена при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0,\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t>0$. В силу сильной непрерывности операторной экспоненты и непрерывности функции $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,\,t)=\frac{1}{s}\int\limits_0^{t-s}\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t}{\nu+s}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{\nu+s}\,d\nu$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\rho,\ t]$, где ρ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем сходимость несобственного интеграла

$$x_0(t)=\int\limits_0^t g_0(s,t)\,ds\,. \tag{1.29}$$

Для этого достаточно доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int\limits_0^t \| g_0(s,t)\|\,ds\,. \tag{1.30}$$

Используя оценки (1.23), (1.24), получаем

$$\| g_0(s,t)\| \le \frac{1}{s}\int\limits_0^{t-s}\left\|\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t}{\nu+s}\right)\right\|\left\|\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\right\|\frac{\| f(s)\|}{\nu+s}\,d\nu \le$$

$$\le\frac{1}{s}\,M_{1\delta}M_{2\delta}\int\limits_0^{t-s}\left(\frac{t}{\nu+s}\right)^{\eta_{2\delta}}\left(\frac{\nu+s}{s}\right)^{\eta_{1\delta}}\frac{\| f(s)\|}{\nu+s}\,d\nu=$$

$$=M_{1\delta}M_{2\delta}\,t^{\eta_{2\delta}}s^{-1-\eta_{1\delta}}\| f(s)\|\int\limits_0^{t-s}(\nu+s)^{\eta_1-\eta_2-1}\,d\nu\,. \tag{1.31}$$

Далее,

$$\int\limits_0^{t-s}(\nu+s)^{\eta_1-\eta_2-1}\,d\nu=\frac{(\nu+s)^{\eta_1-\eta_2}}{\eta_1-\eta_2}\Bigg|_0^{t-s}=\frac{t^{\eta_1-\eta_2}-s^{\eta_1-\eta_2}}{\eta_1-\eta_2}\,. \tag{1.32}$$

В силу (1.31), (1.32)

$$\| g_0(s,t)\|\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\eta_1-\eta_2}\,t^{\eta_{2\delta}}\| f(s)\|\left[t^{\eta_1-\eta_2}s^{-1-\eta_{1\delta}}-s^{-1-\eta_{2\delta}}\right]. \tag{1.33}$$

Тогда

$$\int\limits_0^t\| g_0(s,t)\|\,ds\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\eta_1-\eta_2}\,t^{\eta_{2\delta}}\int\limits_0^t\| f(s)\|\left[t^{\eta_1-\eta_2}s^{-1-\eta_{1\delta}}-s^{-1-\eta_{2\delta}}\right]ds\,.$$

Полагая $N(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \| f(s) \|$, получаем

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| ds \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\eta_1 - \eta_2} t^{\eta_{2\delta}} N(t) \int_0^t \left[t^{\eta_1 - \eta_2} s^{-1-\eta_{1\delta}} - s^{-1-\eta_{2\delta}} \right] ds . \quad (1.34)$$

Проведя непосредственное интегрирование, получаем

$$\int_0^t \left[t^{\eta_1 - \eta_2} s^{-1-\eta_{1\delta}} - s^{-1-\eta_{2\delta}} \right] ds = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_{1\delta} \eta_{2\delta}} t^{-\eta_{2\delta}} . \quad (1.35)$$

В силу (1.34), (1.35)

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \| ds \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\eta_{1\delta} \eta_{2\delta}} N(t) . \quad (1.36)$$

Из (1.36) следует сходимость несобственного интеграла (1.30) и тем самым сходимость несобственного интеграла (1.29), т.е. корректность определения функции $x_0(t)$. Учитывая (1.36) и неравенство

$$\| x_0(t) \| = \left\| \int_0^t g_0(s,t)\, ds \right\| \le \int_0^t \| g_0(s,t) \| ds ,$$

получаем

$$\| x_0(t) \| \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\eta_{1\delta} \eta_{2\delta}} N(t) . \quad (1.37)$$

Из оценки (1.37) видно, что функция $x_0(t)$ ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, т.е. $\sup\limits_{t \in [0,\infty)} N(t) = C < \infty$, то из (1.37) следует, что $x_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$. Лемма 1.2 доказана.

В силу (1.14), (1.15) правая часть неравенства (1.33) при $s \to +0$ сходится к нулю, следовательно,

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0 . \quad (1.38)$$

Лемма 1.3. При выполнении условий 1) – 4) справедлив предельный переход (1.26), где $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ задаются формулами (1.25), (1.27).

Доказательство. Покажем вначале, что первые два слагаемых в правой части формулы (1.25) сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Используя оценку (1.23), получаем

$$\left\| \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_{1\delta} (t+\varepsilon)^{\eta_{1\delta}} \varepsilon^{-\eta_{1\delta}} \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| . \qquad (1.39)$$

В силу (1.8) правая часть неравенства (1.39) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right] = 0 . \qquad (1.40)$$

Используя оценки (1.23), (1.24), получаем

$$\left\| I_{1\varepsilon}(t) \right\| \le \int_0^t \left\| \exp\left(\Lambda_2 \ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right) \right\| \left\| \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{s+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right\| \left\| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \frac{ds}{s+\varepsilon} \le$$

$$\le M_{1\delta} M_{2\delta} \left\| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \int_0^t \left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right)^{\eta_{2\delta}} \left(\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\eta_{1\delta}} \frac{ds}{s+\varepsilon} =$$

$$= M_{1\delta} M_{2\delta} \left\| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \frac{(t+\varepsilon)^{\eta_{2\delta}}}{\varepsilon^{\eta_{1\delta}}} \int_0^t (s+\varepsilon)^{\eta_1 - \eta_2 - 1} ds . \qquad (1.41)$$

Далее,

$$\int_0^t (s+\varepsilon)^{\eta_1 - \eta_2 - 1} ds = \frac{(s+\varepsilon)^{\eta_1 - \eta_2}}{\eta_1 - \eta_2} \Bigg|_0^t = \frac{(t+\varepsilon)^{\eta_1 - \eta_2} - \varepsilon^{\eta_1 - \eta_2}}{\eta_1 - \eta_2} . \qquad (1.42)$$

В силу (1.41), (1.42)

$$\left\| I_{1\varepsilon}(t) \right\| \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\eta_1 - \eta_2} \Big[(t+\varepsilon)^{\eta_{1\delta}} \varepsilon^{-\eta_{1\delta}} \left\| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| -$$

$$- (t+\varepsilon)^{\eta_{2\delta}} \varepsilon^{-\eta_{2\delta}} \left\| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \Big] .$$

В силу неравенства

$$\left\| \varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \le \varepsilon \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| + \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\|$$

получаем

$$\left\| I_{1\varepsilon}(t) \right\| \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\eta_1 - \eta_2} \Big[(t+\varepsilon)^{\eta_{1\delta}} \left(\varepsilon^{1-\eta_{1\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| + \varepsilon^{-\eta_{1\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right) +$$

$$+ (t+\varepsilon)^{\eta_{2\delta}} \left(\varepsilon^{1-\eta_{2\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| + \varepsilon^{-\eta_{2\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right) \Big] . \qquad (1.43)$$

В силу (1.16) – (1.19) правая часть неравенства (1.43) при $\varepsilon \to 0$ сходится к нулю, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{1\varepsilon}(t)=0\,. \tag{1.44}$$

Для справедливости предельного перехода (1.26) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds=\int_0^t g_0(s,t)\,ds\,, \tag{1.45}$$

где $g_0(s,t)$ – подынтегральная функция в правой части формулы (1.27), $g_\varepsilon(s,t)$ имеет вид

$$g_\varepsilon(s,t)=\frac{1}{s+\varepsilon}\int_0^{t-s}\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\varepsilon}{\nu+s+\varepsilon}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\varepsilon}\,d\nu\,.$$

Для справедливости (1.45) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\left\|\,g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\right\|ds=0\,. \tag{1.46}$$

Запишем разность $g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\;=\int_0^\varepsilon[\,h(\kappa,\nu,s,t)]'_\kappa\;d\kappa\,, \tag{1.47}$$

где

$$h(\kappa,\nu,s,t)=\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s}\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\,d\nu.$$

Запишем $h(\kappa,\nu,s,t)$ в виде

$$h(\kappa,\nu,s,t)=\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s}p(\kappa,\nu,s,t)\,d\nu\,,$$

где

$$p(\kappa,\nu,s,t)\;=\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\,.$$

Тогда

$$\left[\,h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa=-\frac{1}{(s+\kappa)^2}\int_0^{t-s}p(\kappa,\nu,s,t)\,d\nu\;+$$

$$+\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s}\left[\,p(\kappa,\nu,s,t)\,\right]'_\kappa\,d\nu\,. \tag{1.48}$$

Имеем

$$\left[\,p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa} =$$

$$=\Lambda_2\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\left[-\frac{t-s-\nu}{t+\kappa}\right]\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}+$$

$$+\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\Lambda_1\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{\nu}{s+\kappa}\right]\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}+$$

$$+\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}\right].$$

Из условия 2) следует равенство

$$\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1. \tag{1.49}$$

В силу (1.49)

$$\Lambda_2\,e^{\Lambda_1 t}=e^{\Lambda_1 t}\Lambda_2\,. \tag{1.50}$$

Учитывая (1.50) получаем

$$\left[\,p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa} =$$

$$=\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{t-s-\nu}{(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_2 f(s)-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_2 f(s)-\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}\right]. \tag{1.51}$$

В силу (1.48), (1.51)

$$\left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa} =$$

$$=\int\limits_0^{t-s}\exp\left(\Lambda_2\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda_1\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}-\right.$$

$$-\frac{t-s-\nu}{(s+\kappa)(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_2 f(s)-\frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_1 f(s)-$$

$$\left.-\frac{f(s)}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\right]d\nu\,.$$

Тогда

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa} \right\| \le \int\limits_0^{t-s} \left[\left\| \exp\left(\Lambda_2 \ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\right\| \left\| \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\right\| \times \right.$$

$$\times\left[\frac{\| f(s)\|}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)} + \frac{t-s-\nu}{(s+\kappa)(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\|\Lambda_2 f(s)\| + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2}\|\Lambda_1 f(s)\| + \frac{\| f(s)\|}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\right]\right] d\nu\,. \quad (1.52)$$

В силу (1.23), (1.24)

$$\left\| \exp\left(\Lambda_2 \ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\right\| \le M_{2\delta}\left(\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)^{\eta_{2\delta}}, \quad (1.53)$$

$$\left\| \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\right\| \le M_{1\delta}\left(\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\eta_{1\delta}}. \quad (1.54)$$

Далее,

$$\frac{t-s-\nu}{(t+\kappa)(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2} = \frac{t-s-\nu}{t+\kappa}\,\frac{1}{s+\kappa}\,\frac{1}{\nu+s+\kappa}\,\frac{1}{\nu+s+\kappa} \le$$

$$\le \frac{1}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}\,; \quad (1.55)$$

$$\frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2} = \frac{1}{(s+\kappa)^2}\,\frac{\nu}{\nu+s+\kappa}\,\frac{1}{\nu+s+\kappa} \le$$

$$\le \frac{1}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}\,; \quad (1.56)$$

$$\frac{1}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2} = \frac{1}{s+\kappa}\,\frac{1}{\nu+s+\kappa}\,\frac{1}{\nu+s+\kappa} \le$$

$$\le \frac{1}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)}\,. \quad (1.57)$$

В силу (1.52) – (1.57)

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa \right\| \le M_{1\delta} M_{2\delta} \frac{(t+\kappa)^{\eta_{2\delta}}}{(s+\kappa)^{2+\eta_{1\delta}}} \left[2\| f(s)\| + \|\Lambda_1 f(s)\| + \|\Lambda_2 f(s)\|\right] \times$$

$$\times \int_0^{t-s} (\nu+s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2-1} d\nu .$$

Полагая $N_1(t) = \max_{0\le s\le t} \|\Lambda_1 f(s)\|$, $N_2(t) = \max_{0\le s\le t} \|\Lambda_2 f(s)\|$, получаем оценку вида

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa \right\| \le M_{1\delta} M_{2\delta} \left[2N(t) + N_1(t) + N_2(t) \right] \frac{(t+\kappa)^{\eta_{2\delta}}}{(s+\kappa)^{2+\eta_{1\delta}}} \times$$

$$\times \int_0^{t-s} (\nu+s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2-1} d\nu . \qquad (1.58)$$

Имеем

$$\int_0^{t-s} (\nu+s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2-1} d\nu = \frac{(t+\kappa)^{\eta_1-\eta_2} - (s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2}}{\eta_1-\eta_2} . \qquad (1.59)$$

Заметим, что выражение в правой части (1.59) неотрицательно. Тогда

$$\frac{(t+\kappa)^{\eta_1-\eta_2} - (s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2}}{\eta_1-\eta_2} = \left| \frac{(t+\kappa)^{\eta_1-\eta_2} - (s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2}}{\eta_1-\eta_2} \right| =$$

$$= \frac{\left|(t+\kappa)^{\eta_1-\eta_2} - (s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2}\right|}{|\eta_1-\eta_2|} \le \frac{(t+\kappa)^{\eta_1-\eta_2} + (s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2}}{|\eta_1-\eta_2|} . \qquad (1.60)$$

В силу (1.59), (1.60)

$$\int_0^{t-s} (\nu+s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2-1} d\nu \le \frac{(t+\kappa)^{\eta_1-\eta_2} + (s+\kappa)^{\eta_1-\eta_2}}{|\eta_1-\eta_2|} . \qquad (1.61)$$

В силу (1.58), (1.61)

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa \right\| \le$$

$$\le P(t)\left[(t+\kappa)^{\eta_{1\delta}} (s+\kappa)^{-2-\eta_{1\delta}} + (t+\kappa)^{\eta_{2\delta}} (s+\kappa)^{-2-\eta_{2\delta}}\right], \qquad (1.62)$$

где

$$P(t) = \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{|\eta_1-\eta_2|} \left[2N(t) + N_1(t) + N_2(t) \right].$$

В силу (1.12), (1.13)

$$(t+\kappa)^{\eta_{1\delta}} \le t^{\eta_{1\delta}}, \ (t+\kappa)^{\eta_{2\delta}} \le t^{\eta_{2\delta}}. \qquad (1.63)$$

В силу (1.62), (1.63)

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa} \right\| \le P(t)\left[t^{\eta_{1\delta}}(s+\kappa)^{-2-\eta_{1\delta}} + t^{\eta_{2\delta}}(s+\kappa)^{-2-\eta_{2\delta}}\right]. \qquad (1.64)$$

Из (1.47) следует неравенство

$$\| g_{\varepsilon}(s,t) - g_0(s,t) \| \le \int_0^{\varepsilon} \left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t)\right]'_{\kappa} \right\| d\kappa. \qquad (1.65)$$

В силу (1.64), (1.65)

$$\| g_{\varepsilon}(s,t) - g_0(s,t) \| \le$$

$$\le P(t)\left[t^{\eta_{1\delta}} \int_0^{\varepsilon} (s+\kappa)^{-2-\eta_{1\delta}} d\kappa + t^{\eta_{2\delta}} \int_0^{\varepsilon} (s+\kappa)^{-2-\eta_{2\delta}} d\kappa \right]. \qquad (1.66)$$

Далее,

$$\int_0^{\varepsilon} (s+\kappa)^{-2-\eta_{1\delta}} d\kappa = \frac{1}{-1-\eta_{1\delta}}\left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{1\delta}} - s^{-1-\eta_{1\delta}}\right], \qquad (1.67)$$

$$\int_0^{\varepsilon} (s+\kappa)^{-2-\eta_{2\delta}} d\kappa = \frac{1}{-1-\eta_{2\delta}}\left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{2\delta}} - s^{-1-\eta_{2\delta}}\right]. \qquad (1.68)$$

В силу (1.66) – (1.68)

$$\| g_{\varepsilon}(s,t) - g_0(s,t) \| \le \frac{P(t)t^{\eta_{1\delta}}}{-1-\eta_{1\delta}}\left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{1\delta}} - s^{-1-\eta_{1\delta}}\right] +$$

$$+ \frac{P(t)t^{\eta_{2\delta}}}{-1-\eta_{2\delta}}\left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{2\delta}} - s^{-1-\eta_{2\delta}}\right].$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_{\varepsilon}(s,\, t) - g_0(s,\, t) \| ds \le \frac{P(t)t^{\eta_{1\delta}}}{-1-\eta_{1\delta}} \int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{1\delta}} - s^{-1-\eta_{1\delta}}\right] ds +$$

$$+ \frac{P(t)t^{\eta_{2\delta}}}{-1-\eta_{2\delta}} \int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{2\delta}} - s^{-1-\eta_{2\delta}}\right] ds. \qquad (1.69)$$

В силу (1.12), (1.13) имеем $-\eta_{1\delta} > 1$, $-\eta_{2\delta} > 1$. Тогда

$$\int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{1\delta}} - s^{-1-\eta_{1\delta}}\right]ds = \frac{1}{-\eta_{1\delta}}\left[(t+\varepsilon)^{-\eta_{1\delta}} - \varepsilon^{-\eta_{1\delta}} - t^{-\eta_{1\delta}}\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0, \quad (1.70)$$

$$\int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\eta_{2\delta}} - s^{-1-\eta_{2\delta}}\right]ds = \frac{1}{-\eta_{2\delta}}\left[(t+\varepsilon)^{-\eta_{2\delta}} - \varepsilon^{-\eta_{2\delta}} - t^{-\eta_{2\delta}}\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0. \quad (1.71)$$

Из (1.69) – (1.71) следует соотношение (1.46) и тем самым равенство (1.45). В силу (1.25), (1.40), (1.44), (1.45) справедлив предельный переход (1.26). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. При выполнении условий 1) – 3) предельная функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (1.27), является решением уравнения (1.1).

Доказательство. Запишем $x_0(t)$ в виде

$$x_0(t) = \int_0^t g_0(s,t)\,ds,$$

где

$$g_0(s,t) = \int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu,$$

$$w(\nu,s,t) = \exp\left(\Lambda_2 \ln\frac{t}{\nu+s}\right)\exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{s(\nu+s)}.$$

Найдем $x_0'(t)$. Для этого обоснуем возможность применения правила дифференцирования интеграла по параметру, т.е. покажем, что подынтегральная функция $g_0(s,t)$ и ее производная $[g_0(s,t)]_t'$ непрерывны по (s,t). Используя соотношение (1.38), доопределим $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s\to+0} g_0(s,t) = 0.$$

Следовательно, $g_0(s,t)$ непрерывна по (s,t). Далее, используя (1.50), получаем

$$[w(\nu,s,t)]_t' = \exp\left(\Lambda_2 \ln\frac{t}{\nu+s}\right)\exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{t\,s(\nu+s)}. \quad (1.72)$$

Заметим, что функция $w(\nu,s,t)$ и ее производная $[w(\nu,s,t)]_t'$ непрерывны по (ν,t). Следовательно,

$$\left[g_0(s,t)\right]_t' = \int_0^{t-s} \left[w(\nu,s,t)\right]_t' \, d\nu + w(t-s,s,t) . \qquad (1.73)$$

Запишем (1.72) в виде

$$\left[w(\nu,s,t)\right]_t' = \frac{1}{t} \Lambda_2 w(\nu,s,t) . \qquad (1.74)$$

Заметим, что

$$w(t-s,s,t) = \frac{1}{t} \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} . \qquad (1.75)$$

В силу (1.73) – (1.75)

$$\left[g_0(s,t)\right]_t' = \frac{1}{t} \Lambda_2 \int_0^{t-s} w(\nu,s,t) \, d\nu + \frac{1}{t} \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s}$$

или

$$\left[g_0(s,t)\right]_t' = \frac{1}{t} \Lambda_2 \, g_0(s,t) + \frac{1}{t} \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} . \qquad (1.76)$$

Используя оценку (1.23), получаем

$$\left\| \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} \right\| \le M_{1\delta} \, t^{\eta_{1\delta}} \left\| f(s) \right\| s^{-1-\eta_{1\delta}} . \qquad (1.77)$$

В силу (1.14) правая часть неравенства (1.77) сходится к нулю при $s \to +0$. Следовательно,

$$\lim_{s \to +0} \left[\exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} \right] = 0 . \qquad (1.78)$$

В силу (1.38), (1.78) из (1.76) следует, что

$$\lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t)\right]_t' = 0 . \qquad (1.79)$$

Соотношение (1.79) позволяет доопределить производную $\left[g_0(s,t)\right]_t'$ по непрерывности в нуле:

$$\left.\left[g_0(s,t)\right]_t'\right|_{s=0} = \lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t)\right]_t' = 0 .$$

Таким образом, производная $\left[g_0(s,t)\right]_t'$ непрерывна по (s,t). Имеем

$$x_0'(t) = \int_0^t [g_0(s,t)]_t' \, ds + g_0(t,t)$$

или с учетом того, что $g_0(t,t) = 0$,

$$x_0'(t) = \int_0^t [g_0(s,t)]_t' \, ds \,. \tag{1.80}$$

Найдем $x_0''(t)$. Для этого покажем вначале, что производная $[g_0(s,t)]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t). В силу (1.72), (1.73), (1.75) получаем равенство

$$[g_0(s,t)]_t' = \frac{1}{t} \int_0^{t-s} \exp\left(\Lambda_2 \ln \frac{t}{\nu + s}\right) \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{\nu + s}{s}\right) \frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu + s)} \, d\nu +$$

$$+ \frac{1}{t} \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} \,. \tag{1.81}$$

Подынтегральная функция

$$q(\nu, s, t) = \exp\left(\Lambda_2 \ln \frac{t}{\nu + s}\right) \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{\nu + s}{s}\right) \frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu + s)}$$

непрерывна по (ν, t). Учитывая равенство (1.50), получаем

$$[q(\nu, s, t)]_t' = \exp\left(\Lambda_2 \ln \frac{t}{\nu + s}\right) \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{\nu + s}{s}\right) \frac{\Lambda_2^2 f(s)}{t\, s(\nu + s)} \,. \tag{1.82}$$

Из (1.82) видно, что производная $[q(\nu, s, t)]_t'$ непрерывна по (ν, t). Тогда, используя (1.81), получаем

$$[g_0(s,t)]''_{t^2} = -\frac{1}{t^2} \int_0^{t-s} q(\nu, s, t) \, d\nu + \frac{1}{t} \int_0^{t-s} [q(\nu, s, t)]_t' \, d\nu +$$

$$+ \frac{1}{t} q(t - s, s, t) - \frac{1}{t^2} \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} + \frac{1}{t^2} \Lambda_1 \exp\left(\Lambda_1 \ln \frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} \,. \tag{1.83}$$

Заметим, что

$$q(\nu, s, t) = \Lambda_2 w(\nu, s, t) \,. \tag{1.84}$$

В силу (1.82)

$$\left[q(\nu,s,t)\right]'_t = \frac{1}{t}\Lambda_2^2 w(\nu,s,t)\,. \tag{1.85}$$

Далее,

$$q(t-s,s,t) = \frac{1}{t}\,\Lambda_2 \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,. \tag{1.86}$$

В силу (1.83) – (1.86) справедливо представление

$$\left[\,g_0(s,t)\right]''_{t^2} = -\frac{1}{t^2}\Lambda_2\int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu + \frac{1}{t^2}\Lambda_2^2\int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{t^2}\Lambda_2 \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} + \frac{1}{t^2}\,(\Lambda_1 - I)\exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}$$

или

$$\left[\,g_0(s,t)\right]''_{t^2} =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\,(\Lambda_2^2 - \Lambda_2)\,g_0(s,t) + (\Lambda_1 + \Lambda_2 - I)\exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,\right]. \tag{1.87}$$

В силу (1.38), (1.78) из (1.87) следует, что

$$\lim_{s\to+0}\left[\,g_0(s,t)\right]''_{t^2} = 0\,.$$

Следовательно, производную $\left[\,g_0(s,t)\right]''_{t^2}$ можно доопределить по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}\Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0}\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} = 0\,.$$

Значит, производная $\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t). Учитывая (1.80), получаем

$$x_0''(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}\,ds + \left[g_0(s,t)\right]'_t\Big|_{s=t}\,. \tag{1.88}$$

Учитывая равенство $g_0(t,t) = 0$, получаем из (1.76)

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t\Big|_{s=t} = \frac{f(t)}{t^2}\,. \tag{1.89}$$

В силу (1.87) – (1.89) справедливо равенство

$$x_0''(t) =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[f(t) + (\Lambda_2^2 - \Lambda_2)\int_0^t g_0(s,t)\,ds + (\Lambda_1 + \Lambda_2 - I)\int_0^t \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds\right]$$

или, в силу равенства $\Lambda_1 + \Lambda_2 - I = -A$,

$$x_0''(t) = \frac{1}{t^2}\left[f(t) + (\Lambda_2^2 - \Lambda_2)\,x_0(t) - A\,I(t)\right], \tag{1.90}$$

где

$$I(t) = \int_0^t \exp\left(\Lambda_1 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds\,.$$

В силу непрерывности функции $f(t)$ и замкнутости операторов Λ_2, A из равенств (1.27), (1.90) следует, что $x_0''(t) \in C\big((0,\infty); E\big)$, т.е. $x_0(t) \in C^2\big((0,\infty); E\big)$.

В силу (1.76), (1.80) справедливо представление

$$x_0'(t) = \frac{1}{t}\left[\Lambda_2 x_0(t) + I(t)\right]. \tag{1.91}$$

Используя формулы (1.90), (1.91), имеем

$$t^2 x_0''(t) + tA\,x_0'(t) + Bx_0(t) = f(t) + (\Lambda_2^2 - \Lambda_2)\,x_0(t) - A\mathrm{I}(t) +$$

$$+ A\Lambda_2 x_0(t) + AI(t) + Bx_0(t) = f(t) + [\Lambda_2^2 + (A - I)\Lambda_2 + B]\,x_0(t) = f(t)$$

в силу того, что $\Lambda_2^2 + (A - I)\Lambda_2 + B = O$, ибо Λ_2 – корень характеристического уравнения (1.6). Лемма 1.4 доказана.

Теорема 1.1 доказана.

Пусть $\Delta = O$ и $A \neq I$. Тогда $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_0 = 2^{-1}(I - A)$, следовательно, $\exp(\Lambda_1 t) = \exp(\Lambda_2 t) = \exp(\Lambda_0 t)$. Формулы (1.25), (1.27) принимают вид

$$x_\varepsilon(t) = \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[x_{\varepsilon,0} + \left(\varepsilon\, x_{\varepsilon,0}' - \Lambda_0 x_{\varepsilon,0}\right)\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right] +$$

$$+ \int_0^t \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,\frac{f(s)}{s+\varepsilon}\,ds\,; \tag{1.92}$$

$$x_0(t) = \int_0^t \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right) \ln\frac{t}{s}\, \frac{f(s)}{s}\, ds\,. \qquad (1.93)$$

Пусть спектр оператора A удовлетворяет следующему условию:

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{\lambda>3}\,, \qquad (1.94)$$

где $\mathbb{C}_{\lambda>3} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda > 3\}$. В силу теоремы об отображении спектра: $\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A))$ [5, с. 314] из включения (1.94) следует, что спектр оператора $\Lambda_0 = 2^{-1}(I - A)$ удовлетворяет условию

$$\sigma(\Lambda_0) \subset \mathbb{C}_{\lambda<-1}\,, \qquad (1.95)$$

где $\mathbb{C}_{\lambda<-1} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda < -1\}$.

Положим $\eta = \max\{\mathrm{Re}\,\lambda \mid \lambda \in \sigma(\Lambda_0)\}$. В силу того, что спектр оператора является замкнутым множеством [7, с. 235], из условия (1.95) следует неравенство

$$\eta < -1\,. \qquad (1.96)$$

В силу (1.20) справедлива оценка

$$\left\| e^{\Lambda_0 t} \right\| \le M_\delta\, e^{\eta_\delta t}\,,\ t \in [\,0, \infty\,)\,, \qquad (1.97)$$

где M_δ – некоторая постоянная, $M_\delta > 0$; $\eta_\delta = \eta + \delta$, δ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Учитывая неравенство (1.96), будем считать в дальнейшем, что число δ выбрано таким образом, что

$$\eta_\delta < -1\,, \qquad (1.98)$$

т.е.

$$-1 - \eta_\delta > 0\,. \qquad (1.99)$$

Пусть начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\, \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \varepsilon^{-\eta_\delta} \ln\frac{1}{\varepsilon} \right] = 0\,, \qquad (1.100)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\, \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \varepsilon^{1-\eta_\delta} \ln\frac{1}{\varepsilon} \right] = 0\,. \qquad (1.101)$$

Замечание 1.2. Для выполнимости условий (1.100), (1.101) достаточно, чтобы для любого $\varepsilon \in (\,0, \varepsilon_*\,] \subset (\,0, \varepsilon_0\,]$, где ε_* – произвольное сколь угодно малое положительное число, не превосходящее ε_0, выполнялись соответственно следующие неравенства

$$\| x_{\varepsilon,0} \| \le L_0 \varepsilon^{\eta\delta+\rho} ,$$

$$\| x'_{\varepsilon,0} \| \le T_1 \varepsilon^{\eta\delta-1+\rho} ,$$

где L_0, T_1 – константы; L_0, $T_1 > 0$; ρ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Теорема 1.2. Пусть $\Delta = O$ и $A \ne I$. Тогда задача (1.2), (1.3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение вида (1.92). При выполнении условий (1.94), (1.100), (1.101) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t) , \ t \in (0, \infty) , \tag{1.102}$$

где $x_0(t)$ задается формулой (1.93). Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Это решение ограничено при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Теорема 1.2 справедлива в силу лемм 1.5 – 1.8, изложенных ниже.

Лемма 1.5. Задача (1.2), (1.3) при $\Delta = O$, $A \ne I$ имеет решение вида (1.92).

Доказательство. Напомним, что заменой переменной $t = \varepsilon e^\tau - \varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к задаче (1.4), (1.5). В силу теоремы I.1.2 задача (1.4), (1.5) имеет решение вида

$$u_\varepsilon(\tau) = \exp(\Lambda_0 \tau)\left[u_0 + (u'_0 - \Lambda_0 u_0)\tau \right] + \\ + \int_0^\tau \exp\left[\Lambda_0 (\tau - \mu) \right] (\tau - \mu) \, g_\varepsilon(\mu) \, d\mu . \tag{1.103}$$

Проведя в интеграле в правой части формулы (1.103) замену $\mu = \ln \dfrac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$ и возвращаясь к переменной t, получаем решение вида (1.92) задачи (1.2), (1.3). Лемма 1.5 доказана.

Лемма 1.6. При выполнении условия (1.94) функция вида (1.93) определена при любом $t \in (0, \infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу сильной непрерывности операторной экспоненты и непрерывности функции $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\ln\frac{t}{s}\,\frac{f(s)}{s} \tag{1.104}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\rho,\ t]$, где ρ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем сходимость несобственного интеграла

$$x_0(t) = \int_0^t g_0(s,t)\,ds\,. \tag{1.105}$$

Используя оценку (1.97) и неравенство (1.99), получаем

$$\|\,g_0(s,\ t)\,\| \le \left\|\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\right\| \ln\frac{t}{s}\,\frac{\|\,f(s)\,\|}{s} \le$$

$$\le M_\delta\, t^{\eta_\delta}\,\|\,f(s)\,\|\, s^{-1-\eta_\delta} \ln\frac{t}{s} \underset{s\to+0}{\longrightarrow} 0\,, \tag{1.106}$$

ибо при любом $\rho > 0$

$$\lim_{s\to+0}\left[s^{\rho}\ln\frac{t}{s}\right] = 0\,. \tag{1.107}$$

Из (1.106) следует, что

$$\lim_{s\to+0} g_0(s,t) = 0\,. \tag{1.108}$$

Используя соотношение (1.108), доопределим функцию $g_0(s,\ t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s\to+0} g_0(s,t) = 0\,. \tag{1.109}$$

Таким образом, значение $s = 0$ является устранимой точной разрыва подынтегральной функции $g_0(s,\ t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла (1.105).

В силу (1.106) справедлива оценка

$$\int_0^t \|\,g_0(s,t)\,\|\,ds \le M_\delta\, t^{\eta_\delta} N(t) \int_0^t s^{-1-\eta_\delta}\ln\frac{t}{s}\,ds\,, \tag{1.110}$$

где $N(t)=\max\limits_{0\le s\le t}\| f(s)\|$. Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая справедливость предельного перехода (1.107) при $\rho=-\eta_\delta$, получаем

$$\int_0^t s^{-1-\eta_\delta}\ln\frac{t}{s}\,ds=\frac{t}{\eta_\delta^2}\,t^{-\eta_\delta}\,. \tag{1.111}$$

В силу (1.110), (1.111) имеем

$$\int_0^t \| g_0(s,\,t)\|\,ds\le\frac{M_\delta}{\eta_\delta^2}N(t)\,. \tag{1.112}$$

Учитывая оценку (1.112) и неравенство

$$\| x_0(t)\|=\left\|\int_0^t g_0(s,\,t)\,ds\right\|\le\int_0^t\| g_0(s,\,t)\|\,ds\,,$$

получаем

$$\| x_0(t)\|\le\frac{M_\delta}{\eta_\delta^2}N(t)\,. \tag{1.113}$$

Из оценки (1.113) видно, что функция $x_0(t)$ ограничена при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, т.е. $\sup\limits_{t\in[0,\infty)} N(t)=C<\infty$, то из (1.113) следует ограниченность $x_0(t)$ на $(0,\,\infty)$. Лемма 1.6 доказана.

Лемма 1.7. При выполнении условий (1.94), (1.100), (1.101) справедлив предельный переход (1.102), где функции $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ заданы формулами (1.92), (1.93).

Доказательство. Покажем вначале, что внеинтегральные члены в правой части формулы (1.92) сходятся к нулю при $\varepsilon\to0$. Из условия (1.100) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\| x_{\varepsilon,0}\|\,\varepsilon^{-\eta_\delta}\right]=0\,. \tag{1.114}$$

Используя оценку (1.97) и соотношение (1.114), получаем

$$\left\|\exp\!\left(\Lambda_0\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0}\right\|\le M_\delta\,(t+\varepsilon)^{\eta_\delta}\,\varepsilon^{-\eta_\delta}\| x_{\varepsilon,0}\|\underset{\varepsilon\to0}{\to}0\,,$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0}\right]=0\,. \qquad (1.115)$$

В силу (1.97), (1.101) имеем

$$\left\|\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\varepsilon x'_{\varepsilon,0}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right\| \le M_\delta\,(t+\varepsilon)^{\eta_\delta}\left\|x'_{\varepsilon,0}\right\|\varepsilon^{1-\eta_\delta}\,\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}=$$

$$=M_\delta\,(t+\varepsilon)^{\eta_\delta}\left[\left\|x'_{\varepsilon,0}\right\|\varepsilon^{1-\eta_\delta}\,\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]\frac{\ln\dfrac{t+\varepsilon}{\varepsilon}}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon}}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0\,, \qquad (1.116)$$

ибо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\dfrac{t+\varepsilon}{\varepsilon}}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon}}=1\,. \qquad (1.117)$$

Из (1.116) видно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\varepsilon x'_{\varepsilon,0}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right]=0\,. \qquad (1.118)$$

Используя соотношения (1.97), (1.100), (1.117), получаем

$$\left\|\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)(-\Lambda_0\,x_{\varepsilon,0})\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right\|\le$$

$$\le M_\delta\,(t+\varepsilon)^{\eta_\delta}\,\varepsilon^{-\eta_\delta}\left\|\Lambda_0\right\|\left\|x_{\varepsilon,0}\right\|\,\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}=$$

$$=M_\delta\,(t+\varepsilon)^{\eta_\delta}\left\|\Lambda_0\right\|\left[\left\|x_{\varepsilon,0}\right\|\varepsilon^{-\eta_\delta}\,\ln\frac{1}{\varepsilon}\right]\frac{\ln\dfrac{t+\varepsilon}{\varepsilon}}{\ln\dfrac{1}{\varepsilon}}\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0\,,$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)(-\Lambda_0\,x_{\varepsilon,0})\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right]=0\,. \qquad (1.119)$$

В силу (1.115), (1.118), (1.119) для справедливости предельного перехода (1.102) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds=\int_0^t g_0(s,t)\,ds\,, \qquad (1.120)$$

где $g_0(s,t)$ задается формулой (1.104), $g_\varepsilon(s,t)$ имеет вид

$$g_\varepsilon(s,\,t) = \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,\frac{f(s)}{s+\varepsilon}\,.$$

Для справедливости равенства (1.120) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,\,t)\right\| ds = 0\,. \qquad (1.121)$$

Запишем разность $g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,\,t) - g_0(s,\,t) = \int_0^\varepsilon [\,h(\kappa,\,s,\,t)]'_\kappa\,d\kappa\,, \qquad (1.122)$$

где

$$h(\kappa,s,t) = \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,\frac{f(s)}{s+\kappa}\,.$$

Учитывая, что

$$\left[\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right]'_\kappa = -\frac{t-s}{(t+\kappa)(s+\kappa)}\,, \qquad (1.123)$$

получаем

$$[h(\kappa,s,t)]'_\kappa = -\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{t-s}{t+\kappa}\,\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,\frac{\Lambda_0\,f(s)}{(s+\kappa)^2} -$$

$$-\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{t-s}{t+\kappa}\,\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2} -$$

$$-\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2}\,. \qquad (1.124)$$

Обозначая через W_1, W_2, W_3 слагаемые в правой части равенства (1.124), получаем в силу (1.122)

$$g_\varepsilon(s,\,t) - g_0(s,\,t) = \int_0^\varepsilon W_1\,d\kappa + \int_0^\varepsilon W_2\,d\kappa + \int_0^\varepsilon W_3\,d\kappa\,,$$

откуда

$$\left\| g_\varepsilon(s,\,t) - g_0(s,\,t)\right\| \le \int_0^\varepsilon \|W_1\|\,d\kappa + \int_0^\varepsilon \|W_2\|\,d\kappa + \int_0^\varepsilon \|W_3\|\,d\kappa\,.$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \, ds \le \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_1\| \, d\kappa \right] ds +$$

$$+ \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_2\| \, d\kappa \right] ds + \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_3\| \, d\kappa \right] ds \, . \qquad (1.125)$$

Покажем, что каждое из слагаемых в правой части неравенства (1.125) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Положим $N_0(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \| \Lambda_0 f(s) \|$. Применяя оценку (1.97) и неравенство $(t+\kappa)^{-1} \le t^{-1}$, получаем

$$\|W_1\| \le P_1(t) \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\eta_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa},$$

где $P_1(t) = M_\delta \dfrac{N_0(t)}{t}$. Тогда

$$\int_0^\varepsilon \|W_1\| \, d\kappa \le P_1(t) \mathrm{I}_1(\varepsilon, s, t) \, , \qquad (1.126)$$

где

$$I_1(\varepsilon, s, t) = \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\eta_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa} \, d\kappa \, .$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_1(\varepsilon, s, t) = \frac{1}{-1-\eta_\delta} \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right)^{1+\eta_\delta} \ln \frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} - \left(\frac{t}{s} \right)^{1+\eta_\delta} \ln \frac{t}{s} \right] +$$

$$+ \frac{1}{-1-\eta_\delta} I_2(\varepsilon, s, t) \, , \qquad (1.127)$$

где

$$I_2(\varepsilon, s, t) = \int_0^t \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{1+\eta_\delta} \frac{t-s}{(t+\kappa)(s+\kappa)} \, d\kappa \, .$$

Так как $0 \le s \le t$, то $(t+\kappa)^{-1} \le (s+\kappa)^{-1}$, следовательно,

$$I_2(\varepsilon, s, t) \le I_3(\varepsilon, s, t) \, , \qquad (1.128)$$

где

$$I_3(\varepsilon, s, t) = \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{1+\eta_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \, d\kappa \, .$$

Будем считать за счет выбора числа $\delta > 0$, что $\eta_\delta = \eta + \delta \neq -2$, т.е. $2 + \eta_\delta \neq 0$. Тогда

$$I_3(\varepsilon,\ s,\ t) = -\int_0^{\varepsilon} \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{1+\eta_\delta} d\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right) =$$

$$= \frac{1}{-2-\eta_\delta} \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{2+\eta_\delta}\Bigg|_0^{\varepsilon} = \frac{1}{-2-\eta_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{2+\eta_\delta}\right]. \quad (1.129)$$

В силу соотношений (1.128), (1.129) получаем

$$I_2(\varepsilon, s, t) \leq \frac{1}{-2-\eta_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{2+\eta_\delta}\right]. \quad (1.130)$$

В силу (1.127), (1.130) справедливо неравенство

$$I_1(\varepsilon, s, t) \leq \frac{1}{-1-\eta_\delta}\left\{\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\eta_\delta} \ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} - \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\eta_\delta} \ln\frac{t}{s}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-2-\eta_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{2+\eta_\delta}\right]\right\}. \quad (1.131)$$

В силу (1.126), (1.131)

$$\int_0^{\varepsilon} \|W_1\|\, d\kappa \leq \frac{P_1(t)}{-1-\eta_\delta}\left\{\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\eta_\delta} \ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} - \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\eta_\delta} \ln\frac{t}{s}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-2-\eta_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{2+\eta_\delta}\right]\right\}.$$

Тогда

$$\int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_1\|\, d\kappa\right] ds \leq$$

$$\leq \frac{P_1(t)}{-1-\eta_\delta}\left\{\int_0^t \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\eta_\delta} \ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} - \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\eta_\delta} \ln\frac{t}{s}\right] ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{-2-\eta_\delta}\int_0^t \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{2+\eta_\delta}\right] ds\right\}. \quad (1.132)$$

Найдем каждый из интегралов в правой части неравенства (1.132). Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_4(\varepsilon,t)=\int_0^t\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\eta_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,ds=(t+\varepsilon)^{1+\eta_\delta}\int_0^t(s+\varepsilon)^{-1-\eta_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,ds=$$

$$=(t+\varepsilon)^{1+\eta_\delta}\left[\frac{1}{\eta_\delta}\varepsilon^{-\eta_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}+\frac{1}{\eta_\delta^2}\left[(t+\varepsilon)^{-\eta_\delta}-\varepsilon^{-\eta_\delta}\right]\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\frac{t}{\eta_\delta^2},\quad(1.133)$$

ибо из условия (1.98) следует неравенство $-\eta_\delta>0$, в силу которого справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-\eta_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right]=0.$$

Далее, используя формулу (1.111), получаем

$$I_5(t)=\int_0^t\left(\frac{t}{s}\right)^{1+\eta_\delta}\ln\frac{t}{s}\,ds=t^{1+\eta_\delta}\int_0^t s^{-1-\eta_\delta}\ln\frac{t}{s}\,ds=$$

$$=t^{1+\eta_\delta}\frac{1}{\eta_\delta^2}t^{-\eta_\delta}=\frac{t}{\eta_\delta^2}.\quad(1.134)$$

В силу (1.133), (1.134) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_4(\varepsilon,t)-I_5(t)\right]=0.\quad(1.135)$$

Далее,

$$I_6(\varepsilon,t)=\int_0^t\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\eta_\delta}ds=(t+\varepsilon)^{2+\eta_\delta}\int_0^t(s+\varepsilon)^{-2-\eta_\delta}\,ds=$$

$$=\frac{(t+\varepsilon)^{2+\eta_\delta}}{-1-\eta_\delta}\left[(t+\varepsilon)^{-1-\eta_\delta}-\varepsilon^{1-\eta_\delta}\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\frac{t}{-1-\eta_\delta},\quad(1.136)$$

ибо $-1-\eta_\delta>0$ (см. (1.99)). Далее,

$$I_7(t)=\int_0^t\left(\frac{t}{s}\right)^{2+\eta_\delta}ds=t^{2+\eta_\delta}\int_0^t s^{-2-\eta_\delta}\,ds=\frac{t}{-1-\eta_\delta}.\quad(1.137)$$

В силу (1.136), (1.137) справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_6(\varepsilon,t)-I_7(t)\right]=0.\quad(1.138)$$

В силу (1.135), (1.138) правая часть неравенства (1.132) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \right] ds = 0 \,. \qquad (1.139)$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \right] ds = 0 \,. \qquad (1.140)$$

Используя оценку (1.97) и неравенство $(t+\kappa)^{-1} \le t^{-1}$, получаем

$$\| W_2 \| \le P_2(t) \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\eta_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \,,$$

где $P_2(t) = M_\delta \dfrac{N(t)}{t}$, $N(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \| f(s) \|$. Тогда

$$\int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \le P_2(t) \, \mathrm{I}_8(\varepsilon, s, t) \,, \qquad (1.141)$$

где

$$I_8(\varepsilon, s, t) = \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\eta_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2} \, d\kappa \,.$$

Имеем

$$I_8(\varepsilon, s, t) = -\int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\eta_\delta} d\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right) =$$

$$= \frac{1}{-1-\eta_\delta} \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right)^{1+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s} \right)^{1+\eta_\delta} \right] . \qquad (1.142)$$

В силу (1.141), (1.142) справедливо неравенство

$$\int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \le \frac{P_2(t)}{-1-\eta_\delta} \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right)^{1+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s} \right)^{1+\eta_\delta} \right] .$$

Тогда

$$\int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \right] ds \le \frac{P_2(t)}{-1-\eta_\delta} \int_0^t \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right)^{1+\eta_\delta} - \left(\frac{t}{s} \right)^{1+\eta_\delta} \right] ds \,. \qquad (1.143)$$

Далее,

$$I_9(\varepsilon,\, t) = \int\limits_0^t \left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\eta_\delta} ds =$$

$$= \frac{1}{-\eta_\delta}(t+\varepsilon)^{1+\eta_\delta}\left[(t+\varepsilon)^{-\eta_\delta} - \varepsilon^{-\eta_\delta}\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{t}{-\eta_\delta}\,; \qquad (1.144)$$

$$I_{10}(t) = \int\limits_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\eta_\delta} ds = \frac{t}{-\eta_\delta}\,. \qquad (1.145)$$

В силу (1.144), (1.145)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_9(\varepsilon,t) - I_{10}(t)\right] = 0\,. \qquad (1.146)$$

В силу (1.146) правая часть неравенства (1.143) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, откуда следует соотношение (1.140).

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^t \left[\int\limits_0^\varepsilon \|W_3\|\, d\kappa\right] ds = 0\,. \qquad (1.147)$$

Применяя оценку (1.97), получаем

$$\|W_3\| \le P_3(t)\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\eta_\delta} \frac{1}{(s+\kappa)^2}\ \ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,,$$

где $P_3(t) = M_\delta N(t)$. Или в силу неравенства $\ln\tau \le \tau$,

$$\|W_3\| \le P_3(t)\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{1+\eta_\delta} \frac{1}{(s+\kappa)^2}\,.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\varepsilon \|W_3\|\, d\kappa \le P_3(t)\,\mathrm{I}_{11}(\varepsilon, s, t)\,, \qquad (1.148)$$

где

$$I_{11}(\varepsilon, s, t) = \int\limits_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{1+\eta_\delta} \frac{d\kappa}{(s+\kappa)^2}\,.$$

В силу (1.98) справедливо неравенство $1+\eta_\delta < 0$, следовательно, $(t+\kappa)^{1+\eta_\delta} \le t^{1+\eta_\delta}$. Тогда

$$I_{11}(\varepsilon,s,t)\le t^{1+\eta_\delta}\int_0^\varepsilon (s+\kappa)^{-3-\eta_\delta}\,d\kappa =$$

$$=\frac{t^{1+\eta_\delta}}{-2-\eta_\delta}\left[(s+\varepsilon)^{-2-\eta_\delta}-s^{-2-\eta_\delta}\right]. \qquad (1.149)$$

В силу (1.148), (1.149)

$$\int_0^\varepsilon \|W_3\|\,d\kappa \le P_4(t)\left[(s+\varepsilon)^{-2-\eta_\delta}-s^{-2-\eta_\delta}\right],$$

где $P_4(t)=\dfrac{t^{1+\eta_\delta}}{-2-\eta_\delta}\,P_3(t)$. Тогда

$$\int_0^t\left[\int_0^\varepsilon \|W_3\|\,d\kappa\right]ds \le P_4(t)\int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-2-\eta_\delta}-s^{-2-\eta_\delta}\right]ds =$$

$$=\frac{P_4(t)}{-1-\eta_\delta}\left[(t+\varepsilon)^{-1-\eta_\delta}-\varepsilon^{-1-\eta_\delta}-t^{-1-\eta_\delta}\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

откуда следует соотношение (1.147).

Из соотношений (1.139), (1.140), (1.147) и неравенства (1.125) вытекает равенство (1.121), следовательно, справедлив предельный переход (1.102). Лемма 1.7 доказана.

Лемма 1.8. При выполнении условия (1.94) предельная функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (1.93), является решением уравнения (1.1).

Доказательство. Исходя из формулы (1.105), найдем $x_0'(t)$. В силу (1.109) подынтегральная функция $g_0(s,t)$ непрерывна по (s,t). Покажем, что ее производная $\left[g_0(s,t)\right]_t'$ непрерывна по (s,t). Имеем

$$\left[g_0(s,t)\right]_t' = \frac{1}{t}\,\Lambda_0 \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\ln\frac{t}{s}\,\frac{f(s)}{s}+\frac{1}{t}\exp\left(\Lambda_0\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}$$

или

$$\left[g_0(s,t)\right]_t' = \frac{1}{t}\,\Lambda_0\, g_0(s,t)+\frac{1}{t}\exp\left(\Lambda_0\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}. \qquad (1.150)$$

Используя неравенства (1.97), (1.99), получаем

$$\left\| \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\right\| \le \left\|\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\right\| \frac{\| f(s)\|}{s} \le$$

$$\le M_\delta t^{\eta_\delta} \| f(s) \| s^{-1-\eta_\delta} \underset{s\to+0}{\to} 0, \qquad (1.151)$$

ибо $\| f(s) \| \underset{s\to+0}{\to} \| f(0) \|$. Из (1.151) видно, что

$$\lim_{s\to+0}\left[\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\right] = 0. \qquad (1.152)$$

В силу соотношений (1.108), (1.152) и замкнутости оператора Λ_0 из формулы (1.150) следует, что

$$\lim_{s\to+0}\left[g_0(s,t)\right]'_t = 0. \qquad (1.153)$$

Используя соотношение (1.153), доопределим производную $[g_0(s, t)]'_t$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t \Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0}\left[g_0(s,t)\right]'_t = 0.$$

Таким образом, производная $\left[g_0(s,t)\right]'_t$ непрерывна по (s,t). Следовательно,

$$x_0'(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]'_t ds + g_0(t,t),$$

или в силу того, что $g_0(t,t) = 0$,

$$x_0'(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]'_t ds. \qquad (1.154)$$

Найдем $x_0''(t)$. Для этого покажем, что производная $\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t). Запишем $\left[g_0(s,t)\right]'_t$ в виде

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t = \frac{1}{t}\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\ln\frac{t}{s}\,\frac{\Lambda_0 f(s)}{s} + \frac{1}{t}\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}.$$

Тогда

$$\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} = \frac{1}{t^2}\left[\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)\left(\ln\frac{t}{s}\right)(\Lambda_0^2 - \Lambda_0)\frac{f(s)}{s} + \right.$$

$$\left. + \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right)(2\Lambda_0 - I)\frac{f(s)}{s} \right]. \tag{1.155}$$

Применяя оценку (1.97), получаем

$$\left\| \left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} \right\| \le \frac{1}{t^2}\left[M_\delta t^{\eta_\delta}\left(s^{-1-\eta_\delta} \ln\frac{t}{s}\right)\left\|\Lambda_0^2 - \Lambda_0\right\| \left\| f(s)\right\| + \right.$$

$$\left. + M_\delta t^{\eta_\delta} s^{-1-\eta_\delta} \left\|2\Lambda_0 - I\right\| \left\| f(s)\right\| \right.. \tag{1.156}$$

В силу соотношений (1.99), (1.107) имеем

$$\lim_{s\to+0}\left(s^{-1-\eta_\delta} \ln\frac{t}{s}\right) = 0\,. \tag{1.157}$$

В силу (1.157) правая часть неравенства (1.156) сходится к нулю при $s \to +0$, следовательно,

$$\lim_{s\to+0} \left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} = 0\,. \tag{1.158}$$

Используя соотношение (1.158), доопределим производную $\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} \Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0} \left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} = 0\,.$$

Таким образом, производная $\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t). Следовательно, в силу (1.154)

$$x_0''(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} ds + \left[g_0(s,t)\right]'_t \Big|_{s=t}\,. \tag{1.159}$$

Запишем формулу (1.155) в виде

$$\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} = \frac{1}{t^2}\left[(\Lambda_0^2 - \Lambda_0)\, g_0(s,t) + (2\Lambda_0 - I)\exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s} \right].$$

Тогда

$$\int_0^t \left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} \, ds = \frac{1}{t^2}\Big[(\Lambda_0^2 - \Lambda_0)\, x_0(t) + (2\Lambda_0 - I)\, \mathrm{I}(t)\Big], \qquad (1.160)$$

где

$$I(t) = \int_0^t \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{f(s)}{s}\, ds \qquad (1.161)$$

(сходимость несобственного интеграла (1.161) следует из соотношения (1.152)). В силу (1.150)

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t \Big|_{s=t} = \frac{f(t)}{t^2}. \qquad (1.162)$$

В силу (1.159), (1.160), (1.162)

$$x_0''(t) = \frac{1}{t^2}\Big[f(t) + (\Lambda_0^2 - \Lambda_0)\, x_0(t) + (2\Lambda_0 - I)\, I(t)\Big]. \qquad (1.163)$$

Из записи производной $x_0''(t)$ в виде

$$x_0''(t) = \frac{1}{t^2}\left[f(t) + \int_0^t \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right) \ln\frac{t}{s}\, \frac{(\Lambda_0^2 - \Lambda_0) f(s)}{s}\, ds + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \exp\left(\Lambda_0 \ln\frac{t}{s}\right) \frac{(2\Lambda_0 - I) f(s)}{s}\, ds \right]$$

следует в силу непрерывности функции $f(t)$ включение $x_0''(t) \in C\big((0, \infty); E\big)$, а это означает, что $x_0(t) \in C^2\big((0, \infty); E\big)$.

В силу (1.150), (1.154)

$$x_0'(t) = \frac{1}{t}\left[\Lambda_0 x_0(t) + I(t)\right]. \qquad (1.164)$$

Используя формулы (1.163), (1.164), получаем

$$t^2 x_0''(t) + tA\, x_0'(t) + B x_0(t) =$$

$$= f(t) + \Big[\Lambda_0^2 + (A - I)\Lambda_0 + B\Big] x_0(t) + (2\Lambda_0 - I + A)\, I(t) = f(t),$$

ибо $\Lambda_0^2+(A-I)\Lambda_0+B=O$, $2\Lambda_0-I+A=O$ в силу равенств $\Lambda_0=(1/2)(I-A)$, $B=(1/4)(A-I)^2$. Показано, что функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Лемма 1.8 доказана

Теорема 1.2 доказана.

Замечание 1.3. Если $\|f(t)\|$ при $t\to+0$ является бесконечно малой порядка α:

$$\lim_{t\to+0}\frac{\|f(t)\|}{t^{\alpha}}=K\neq 0,\ \infty, \tag{1.165}$$

то утверждение теоремы 1.2 остается в силе при менее ограничительном условии на операторный коэффициент A, нежели условие $\sigma(A)\subset\mathbb{C}_{\lambda>3}$, а именно, при условии

$$\sigma(A)\subset\mathbb{C}_{\lambda>3-2\alpha}, \tag{1.166}$$

где $\mathbb{C}_{\lambda>3-2\alpha}=\{\lambda\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}\lambda>3-2\alpha\}$.

Действительно, в этом случае, используя оценку (1.97) и условие (1.165), получаем

$$\|g_0(s,t)\|\le M_\delta\left(\frac{t}{s}\right)^{\eta_\delta}\ln\frac{t}{s}\,\frac{\|f(s)\|}{s}=$$

$$=M_\delta t^{\eta_\delta}\frac{\|f(s)\|}{s^{\alpha}}s^{-1-\eta_\delta+\alpha}\ln\frac{t}{s}\underset{s\to+0}{\longrightarrow}0,$$

ибо в силу (1.166) справедливо неравенство $-1-\eta_\delta+\alpha>0$ и в силу (1.107)

$$\lim_{s\to+0}\left[s^{-1-\eta_\delta+\alpha}\ln\frac{t}{s}\right]=0.$$

Пусть $\Delta=O$ и $A=I$, тогда $B=O$, $\Lambda_0=O$. В этом случае уравнение (1.1) и задача (1.2), (1.3) принимают следующий вид:

$$t^2x''(t)+t\,x'(t)=f(t),\ 0<t<\infty, \tag{1.167}$$

$$(t+\varepsilon)^2x_\varepsilon''(t)+(t+\varepsilon)\,x_\varepsilon'(t)=f(t),\ 0\le t<\infty, \tag{1.168}$$

$$x_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0},\ x_\varepsilon'(0)=x_{\varepsilon,0}'. \tag{1.169}$$

Формулы (1.92), (1.93) принимают вид

$$x_\varepsilon(t) = x_{\varepsilon,0} + \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}\, \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} + \int_0^t \ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\, \frac{f(s)}{s+\varepsilon}\, ds\,, \tag{1.170}$$

$$x_0(t) = \int_0^t \ln\frac{t}{s}\, \frac{f(s)}{s}\, ds\,. \tag{1.171}$$

Исходя из формул (1.170), (1.171), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.3. Задача (1.168), (1.169) имеет решение вида (1.170). Если начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условиям вида

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_{\varepsilon,0} = 0\,;$$

$$\left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \le \varepsilon^{-1+\delta},\ \varepsilon\in(0,\, \varepsilon_*]\subset(0,\, \varepsilon_0]\,,$$

где δ, ε_* – произвольные сколь угодно малые фиксированные положительные числа, а функция $f(t)$ удовлетворяет условию вида

$$\lim_{s\to +0} \frac{\| f(s) \|}{s^{1+\rho}} = K \ne 0,\ \infty\,,$$

где ρ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t)\,,\ t\in(0,\infty)\,,$$

где $x_0(t)$ задается формулой (1.171). Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.167). Это решение ограничено при $t\to +0$.

§ 2. Решение уравнения Эйлера в терминах косинус и синус оператор-функций

Найдем решение задачи (1.2), (1.3) и уравнения (1.1) в терминах косинус и синус оператор-функций.

Напомним, что заменой переменной $t = \varepsilon e^\tau - \varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к задаче (1.4), (1.5).

Пусть $\Lambda = (1/2)(I - A)$. В этом параграфе также используются следующие обозначения: для любого $Q\in L(E)$ $\sigma(Q)$ – спектр оператора Q, $\mu_Q = \min\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(Q)\}$, $\nu_Q = \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(Q)\}$, $\omega_Q = \max\{\nu_Q, -\mu_Q\}$. Заметим, что $\omega_Q \geq 0$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) операторный дискриминант $\Delta = (A - I)^2 - 4B$ удовлетворяет условию $\Delta = F^2$, где $F \in L(E)$, $F \neq O$;

2) $AF = FA$;

3) $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_{\lambda > 3}$, где $\mathbb{C}_{\lambda > 3} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > 3\}$;

4) в предположении, что выполнены условия 1) – 3) справедливо неравенство $\omega_F < 2(-1 - \nu_\Lambda)$;

5) $\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \leq L_0 \varepsilon^{-1}$, $\left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \leq L_1 \varepsilon^{-2}$, где L_0, L_1 – постоянные; L_0, $L_1 > 0$.

Замечание 2.1. Так как $\omega_F \geq 0$, то для корректности условия 4) необходимо, чтобы выполнялось неравенство $-1 - \nu_\Lambda > 0$.

Последнее неравенство следует из условия 3) (см. (1.96)).

В дальнейшем понадобятся косинус-оператор-функция с производящим оператором $\Delta_1 = \frac{1}{4}\Delta = \frac{1}{4}F^2$:

$$C(t) = C\left(t, \frac{1}{4}F^2\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}Ft} + e^{-\frac{1}{2}Ft}\right) \tag{2.1}$$

и ассоциированная с ней синус-оператор-функция

$$S(t) = S\left(t, \frac{1}{4}F^2\right) = \int_0^t C(\tau)\, d\tau\,. \tag{2.2}$$

Напомним, что для функций (2.1), (2.2) справедливы формулы (I.2.3) – (I.2.5), (I.2.8).

Замечание 2.2. Если $F \in GL(E) = \{Q \in L(E) \mid \exists Q^{-1} \in L(E)\}$, то $S(t)$ можно записать в виде

$$S(t) = S\left(t, \frac{1}{4}F^2\right) = F^{-1}\left(e^{\frac{1}{2}Ft} - e^{-\frac{1}{2}Ft}\right).$$

Теорема 2.1. При выполнении условий 1), 2) задача (1.2), (1.3) при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ имеет решение вида

$$x_\varepsilon(t)=\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[\,C\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0}+S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}-\Lambda x_{\varepsilon,0}\right)\,\right]+$$

$$+\int_0^t S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\frac{f(\tau)}{\tau+\varepsilon}\,d\tau\,. \qquad (2.3)$$

При выполнении условий 3) – 5) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t)=x_0(t)\,,\; t\in(0,\infty)\,, \qquad (2.4)$$

где

$$x_0(t)=\int_0^t S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\,. \qquad (2.5)$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Это решение ограничено при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0,\infty)$.

Теорема 2.1 справедлива в силу лемм 2.1 – 2.4, изложенных ниже.

Лемма 2.1. При выполнении условий 1), 2) функция (2.3) является решением задачи (1.2), (1.3).

Доказательство. Заменой переменной $t=\varepsilon e^s-\varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к задаче вида (1.4), (1.5) с $\tau=s$, т.е. к задаче

$$u''_\varepsilon(s)+(A-I)u'_\varepsilon(s)+Bu_\varepsilon(s)=g_\varepsilon(s)\,,\; 0\le s<\infty\,, \qquad (2.6)$$

$$u_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0}\,,\; u'_\varepsilon(0)=\varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}\,, \qquad (2.7)$$

где $u_\varepsilon(s)=x_\varepsilon\left(\varepsilon e^s-\varepsilon\right)$, $g_\varepsilon(s)=f\left(\varepsilon e^s-\varepsilon\right)$. Задача (2.6), (2.7) – это задача вида (I.1.1), (I.1.2). В силу условий 1), 2) выполняются условия теоремы I.2.1. В силу формулы (I.2.6) задача (2.6), (2.7) имеет решение

$$u_\varepsilon(s)=\exp(\Lambda s)\left[C(s)x_{\varepsilon,0}+S(s)\left(\varepsilon\, x'_{\varepsilon,0}-\Lambda x_{\varepsilon,0}\right)\right]+$$

$$+\int_0^s S(s-\rho)\exp[\Lambda(s-\rho)]\,g_\varepsilon(\rho)\,d\rho\;. \qquad (2.8)$$

После замены переменной $\rho=\ln\left((\tau+\varepsilon)/\varepsilon\right)$ в интеграле в правой части формулы (2.8) и возвращения к прежней переменной t формула (2.8) принимает вид (2.3). Лемма 2.1 доказана.

Для обоснования предельного перехода (2.4) потребуются оценки сверху для нормы косинус и синус оператор-функций с производящим оператором Q^2, где $Q \in L(E)$, т.е. для функций

$$C(t) = C(t,\, Q^2) = \frac{1}{2}\left(e^{Qt} + e^{-Qt}\right),\ S(t) = S(t,\, Q^2) = \int_0^t C(\tau)\, d\tau\,.$$

В силу оценки (1.20) для любого $\delta > 0$ найдется такая постоянная $M_\delta > 0$, что

$$\left\| e^{Qt} \right\| \le M_\delta\, e^{\nu_Q^\delta t},\ 0 \le t < \infty\,, \tag{2.9}$$

где $\nu_Q^\delta = \nu_Q + \delta$.

Замечание 2.3. В силу неравенства (2.9) для любого $\rho > 0$ найдется такая постоянная $N_\rho > 0$, что

$$\left\| e^{-Qt} \right\| \le N_\rho\, e^{\nu_{-Q}^\delta t},\ 0 \le t < \infty\,, \tag{2.10}$$

где $\nu_{-Q}^\rho = \nu_{-Q} + \rho$ или $\nu_{-Q}^\rho = -\mu_Q + \rho$, ибо $\nu_{-Q} = -\mu_Q$.

Замечание 2.4. В силу неравенств (2.9), (2.10) справедлива оценка

$$\| C(t) \| \le K_{\delta,\rho}\, e^{\omega_Q^{\delta,\rho} t},\ 0 \le t < \infty\,, \tag{2.11}$$

где $K_{\delta,\rho} = \max\{M_\delta,\ N_\rho\}$, $\omega_Q^{\delta,\rho} = \max\left\{\nu_Q^\delta, \nu_{-Q}^\rho\right\}$.

Замечание 2.5. Используя оценку (2.11), получаем

$$\| S(t) \| \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega_Q^{\delta,\rho}}\left(e^{\omega_Q^{\delta,\rho} t} - 1 \right),\ 0 \le t < \infty\,. \tag{2.12}$$

Действительно,

$$\| S(t) \| \le \int_0^t \| C(\tau) \| d\tau \le K_{\delta,\rho} \int_0^t e^{\omega_Q^{\delta,\rho} \tau} d\tau = \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega_Q^{\delta,\rho}}\, e^{\omega_Q^{\delta,\rho} \tau} \Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega_Q^{\delta,\rho}}\left(e^{\omega_Q^{\delta,\rho} t} - 1 \right).$$

Лемма 2.2. Пусть выполнены условия 1) – 4). Тогда функция (2.5) определена при любом $t \in (0,\infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничена на $(0,\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу непрерывности синус-оператор-функции, операторной экспоненты и функции $f(\tau)$ подынтегральная функция

$$g_0(\tau, t) = S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}, \tag{2.13}$$

представляющая собой композицию операторной и векторной функций, непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\Delta, t]$, Δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем, что

$$\lim_{\tau\to+0} g_0(\tau, t) = 0. \tag{2.14}$$

В силу оценки (2.12) при $Q = \frac{1}{2}F$ имеем

$$\left\| S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\right\| \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\left(\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} - 1\right). \tag{2.15}$$

В силу оценки (2.9) для любого $\delta' > 0$ найдется такая постоянная $M_{\delta'} > 0$, что

$$\left\|\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\right\| \le M_{\delta'}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}}, \tag{2.16}$$

где $\nu^{\delta'}_{\Lambda} = \nu_{\Lambda} + \delta'$.

Положим $N(t) = \max\limits_{0\le\tau\le t}\| f(\tau)\|$.

В силу неравенств (2.15), (2.16) получаем

$$\begin{aligned}\| g_0(\tau, t)\| &\le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}\,t} - 1\right]\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{\| f(\tau)\|}{\tau} \le \\ &\le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} N(t) t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}}\,\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \underset{\tau\to+0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned} \tag{2.17}$$

ибо в силу условия 4) и за счет выбора δ, ρ, δ' можно считать, что

$$-1 - \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda} > 0. \tag{2.18}$$

Действительно,

$$\omega_F < 2(-1-\nu_\Lambda) \Rightarrow \omega_{\frac{1}{2}F} = \max\left\{\nu_{\frac{1}{2}F}, -\mu_{\frac{1}{2}F}\right\} < -1-\nu_\Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nu_{\frac{1}{2}F} < -1-\nu_\Lambda, -\mu_{\frac{1}{2}F} < -1-\nu_\Lambda \Rightarrow \nu_{\frac{1}{2}F} + \delta = \nu^{\delta}_{\frac{1}{2}F} < -1-\nu_\Lambda, -\mu_{\frac{1}{2}F} + \rho =$$

$$= \nu^{\rho}_{\frac{1}{2}F} < -1-\nu_\Lambda \Rightarrow \max\left\{\nu^{\delta}_{\frac{1}{2}F}, \nu^{\rho}_{-\frac{1}{2}F}\right\} = \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} < -1-\nu_\Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} < -1-\nu^{\delta'}_\Lambda \Rightarrow -1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_\Lambda > 0 .$$

Из соотношения (2.17) следует справедливость равенства (2.14).

Используя (2.14), доопределим функцию $g_0(\tau, t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{\tau\to+0} g_0(\tau,t) = 0 . \qquad (2.19)$$

Итак, точка $\tau = 0$ является устранимой точкой разрыва подынтегральной функции $g_0(\tau,\, t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла $\int\limits_0^t g_0(\tau,\, t)\,d\tau$, т.е. существование функции (2.5).

Используя (2.17), получаем

$$\left\| \int\limits_0^t g_0(\tau,t)\,d\tau \right\| \le \int\limits_0^t \| g_0(\tau,t) \| d\tau \le$$

$$\le \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} N(t)\, t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_\Lambda} \int\limits_0^t \tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_\Lambda} d\tau =$$

$$= \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} N(t)\, t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_\Lambda} \left. \frac{\tau^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_\Lambda}}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_\Lambda} \right|_0^t = \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}\left(-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_\Lambda\right)} N(t),$$

ибо в силу неравенства (2.18)

$$-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda} > 0\,. \tag{2.20}$$

Получена оценка

$$\left\| \int_0^t g_0(\tau,t)\,d\tau \right\| \le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}\left(-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}\right)} N(t)\,, \tag{2.21}$$

из которой следует ограниченность функции (2.5) при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$:

$$\sup_{t\in[0,\infty)} N(t) = C < \infty.$$

то из оценки (2.21) следует ограниченность функции (2.5) на $(0,\infty)$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. При выполнении условий 1) – 5) справедлив предельный переход (2.4).

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. Покажем вначале, что внеинтегральные члены в правой части формулы (2.3) сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. В силу оценки (2.9) при $Q = \Lambda$ справедливо неравенство

$$\left\| \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right\| \le M_{\delta'} \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}}. \tag{2.22}$$

В силу оценки (2.11) при $Q = \dfrac{1}{2}F$ справедливо неравенство

$$\left\| C\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right\| \le K_{\delta,\rho} \left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}. \tag{2.23}$$

В силу (2.22), (2.23) и условия 5) получаем

$$\left\| \exp\left(\Lambda \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) C\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le$$

$$\le M_{\delta'}K_{\delta,\rho}L_0(t+\varepsilon)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \varepsilon^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

в силу (2.18), откуда следует сходимость первого внеинтегрального члена в правой части (2.3) к нулю при $\varepsilon \to 0$. В силу (2.12) при $Q = \dfrac{1}{2}F$ имеем

$$\left\| S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right\| \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}-1\right] \le \frac{K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\left(\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}. \qquad (2.24)$$

В силу (2.22), (2.24) и условия 5) получаем

$$\left\| \exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\varepsilon x'_{\varepsilon,0}\right\| \le$$

$$\le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} L_1(t+\varepsilon)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\,\varepsilon^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

откуда следует сходимость второго внеинтегрального члена в (2.3) к нулю при $\varepsilon\to 0$. В силу (2.22), (2.24) и условия 5) имеем

$$\left\| \exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\frac{1}{2}(A-I)x_{\varepsilon,0}\right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} L_0\|A-I\|(t+\varepsilon)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\,\varepsilon^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

откуда следует сходимость третьего внеинтегрального члена в (2.3) к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Для справедливости соотношения (2.4) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(\tau,\,t)\,d\tau = \int_0^t g_0(\tau,\,t)\,d\tau, \qquad (2.25)$$

где

$$g_\varepsilon(\tau,t) = S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\frac{f(\tau)}{\tau+\varepsilon},$$

$g_0(\tau,t)$ задается формулой (2.13). Для справедливости (2.25) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t [g_\varepsilon(\tau,\,t)-g_0(\tau,\,t)]\,d\tau = 0. \qquad (2.26)$$

В силу оценки

$$\left\|\int_0^t [\,g_\varepsilon(\tau,\,t)-g_0(\tau,\,t)]\,d\tau\right\| \le \int_0^t \|g_\varepsilon(\tau,\,t)-g_0(\tau,\,t)\|\,d\tau$$

для справедливости (2.26) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left\| g_\varepsilon(\tau,t) - g_0(\tau,t) \right\| d\tau = 0\,. \qquad (2.27)$$

Запишем разность $g_\varepsilon(\tau,t) - g_0(\tau,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(\tau,t) - g_0(\tau,t) = \int_0^\varepsilon \left[S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{f(\tau)}{\tau+\kappa}\right]'_\kappa d\kappa\,. \qquad (2.28)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в (2.28) через $h(\kappa,\tau,t)$. Тогда

$$\left[h(\kappa,\tau,t)\right]'_\kappa = \left[S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\right]'_\kappa \exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{f(\tau)}{\tau+\kappa} +$$

$$+ S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\left[\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\right]'_\kappa \frac{f(\tau)}{\tau+\kappa} +$$

$$+ S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\left(\frac{f(\tau)}{\tau+\kappa}\right)'_\kappa .$$

Используя формулу (1.123) при $s=\tau$, получаем

$$\left[h(\kappa,\tau,t)\right]'_\kappa = -C\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{t-\tau}{t+\kappa}\,\frac{f(\tau)}{(\tau+\kappa)^2} -$$

$$- S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\Lambda\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{t-\tau}{t+\kappa}\,\frac{f(\tau)}{(\tau+\kappa)^2} -$$

$$- S\left(\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)\frac{f(\tau)}{(\tau+\kappa)^2}\,. \qquad (2.29)$$

Обозначая через W_1, W_2, W_3 слагаемые в правой части (2.29), получаем в силу (2.28)

$$g_\varepsilon(\tau,t) - g_0(\tau,t) = \int_0^\varepsilon W_1\,d\kappa + \int_0^\varepsilon W_2\,d\kappa + \int_0^\varepsilon W_3\,d\kappa\,,$$

откуда

$$\left\| g_\varepsilon(\tau,t) - g_0(\tau,t) \right\| \le \int_0^\varepsilon \left\|W_1\right\| d\kappa + \int_0^\varepsilon \left\|W_2\right\| d\kappa + \int_0^\varepsilon \left\|W_3\right\| d\kappa\,.$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(\tau,t) - g_0(\tau,t) \| \, d\tau \le \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \right] d\tau +$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_2 \| \, d\kappa \right] d\tau + \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \| W_3 \| \, d\kappa \right] d\tau . \qquad (2.30)$$

В силу (2.9), (2.11) имеем

$$\| W_1 \| \le M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa} \right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa} \right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{t-\tau}{t+\kappa} \frac{\| f(s) \|}{(\tau+\kappa)^2} \le$$

$$\le M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \frac{N(t)}{t} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa} \right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{t-\tau}{(\tau+\kappa)^2} .$$

Тогда

$$\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \le M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \frac{N(t)}{t} \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa} \right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{t-\tau}{(\tau+\kappa)^2} \, d\kappa =$$

$$= -M_{\delta'} K_{\delta,\rho} \frac{N(t)}{t} \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa} \right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} d\left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa} \right) =$$

$$= \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{N(t)}{t} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa} \right)^{1+\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} + \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \Bigg|_0^\varepsilon =$$

$$= \frac{M_{\delta'} K_{\delta,\rho}}{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{N(t)}{t} \left[\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} - \left(\frac{\tau}{t} \right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \right].$$

Обозначив выражение перед квадратными скобками через $P_1(t)$, получаем оценку

$$\int_0^\varepsilon \| W_1 \| \, d\kappa \le P_1(t) \left[\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon} \right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} - \left(\frac{\tau}{t} \right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F} - \nu^{\delta'}_{\Lambda}} \right].$$

Тогда

$$\int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_1\|\, d\kappa\right] d\tau \le P_1(t) \int_0^t \left[\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} - \left(\frac{\tau}{t}\right)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right] d\tau =$$

$$= \frac{P_1(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \left[(t+\varepsilon)\left(\frac{\tau+\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \Bigg|_0^t - t\left(\frac{\tau}{t}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \Bigg|_0^t \right] =$$

$$= \frac{P_1(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \left[(t+\varepsilon)\left[1-\left(\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right] - t \right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

в силу (2.20), откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_1\|\, d\kappa\right] d\tau = 0\,. \tag{2.31}$$

Аналогично, в силу (2.9), (2.12) имеем

$$\|W_2\| \le \frac{1}{2}\|I-A\| \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} \frac{N(t)}{t} \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{t-\tau}{(\tau+\kappa)^2}\,.$$

Проведя те же выкладки, что и выше, получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \|W_2\|\, d\kappa\right] d\tau = 0\,. \tag{2.32}$$

В силу (2.9), (2.12) справедливо неравенство

$$\|W_3\| \le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} N(t) \left(\frac{t+\kappa}{\tau+\kappa}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \frac{1}{(\tau+\kappa)^2}\,.$$

Тогда

$$\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|\,d\kappa \le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}N(t)\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{\tau+\kappa}{t+\kappa}\right)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{d\kappa}{(\tau+\kappa)^2}\le$$

$$\le \frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}}\frac{N(t)}{t^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}}\int_0^{\varepsilon}(\tau+\kappa)^{-2-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\,d\kappa=$$

$$=\frac{M_{\delta'}K_{\delta,\rho}N(t)\,t^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}}{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}\left(-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}\right)}(\tau+\kappa)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^{\varepsilon}.$$

Обозначив последнюю дробь через $P_3(t)$, получаем оценку

$$\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|\,d\kappa \le P_3(t)\left[(\tau+\varepsilon)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right].$$

Тогда

$$\int_0^{t}\left[\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|\,d\kappa\right]d\tau \le P_3(t)\int_0^{t}\left[(\tau+\varepsilon)^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right]d\tau=$$

$$=\frac{P_3(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\left[(\tau+\varepsilon)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^{t}-\tau^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\Bigg|_0^{t}\right]=$$

$$=\frac{P_3(t)}{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\left[(t+\varepsilon)^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-\varepsilon^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}-t^{-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0$$

в силу (2.20), откуда следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t}\left[\int_0^{\varepsilon}\|W_3\|\,d\kappa\right]d\tau=0\,. \qquad (2.33)$$

Из соотношений (2.30) – (2.33) следует (2.27). Лемма 2.3 доказана.

Замечание 2.6. В силу условия 2) справедливы равенства

$$AC(t) = C(t)A\,, \tag{2.34}$$

$$S(t)A = AS(t)\,. \tag{2.35}$$

Действительно, равенство (2.34) следует из формулы

$$C(t) = C\left(t,\, \frac{1}{4}F^2\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}Ft} + e^{-\frac{1}{2}Ft}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}F^{2k}}{2^{2k}(2k)!}\,.$$

Используя (2.2), (2.34) и замкнутость оператора *A*, получаем для любого $v \in E$

$$AS(t)v = A\int_0^t C(\tau)v\,d\tau = \int_0^t AC(\tau)v\,d\tau = \int_0^t C(\tau)Av\,d\tau = S(t)Av\,,$$

что означает справедливость равенства (2.35).

Лемма 2.4. При выполнении условий 1) – 5) предельная функция (2.5) является решением уравнения (1.1).

Доказательство. В силу (2.19) подынтегральная функция $g_0(\tau,t)$ непрерывна по (τ,t). Применяя вторую из формул (I.2.4), получаем

$$\left[g_0(\tau,t)\right]'_t = \frac{1}{t}C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau} + \frac{1}{t}\,S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\Lambda\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}$$

или в силу (2.35)

$$\left[g_0(\tau,t)\right]'_t = \frac{1}{t}C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau} + \Lambda\frac{1}{t}\,g_0(\tau,t)\,. \tag{2.36}$$

Покажем, что

$$\lim_{\tau\to+0}\left[g_0(\tau,t)\right]'_t = 0\,. \tag{2.37}$$

В силу (2.14) для этого достаточно показать, что первое слагаемое в правой части равенства (2.36) сходится к нулю при $\tau \to +0$. Используя оценки (2.9), (2.11), получаем

$$\left\|\frac{1}{t}C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}\right\| \le \frac{1}{t}K_{\delta,\rho}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}} M_{\delta'}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\frac{\|f(\tau)\|}{\tau} \le$$

$$\le M_{\delta'}K_{\delta,\rho}N(t)\,t^{-1+\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}+\nu^{\delta'}_{\Lambda}}\,\tau^{-1-\omega^{\delta,\rho}_{\frac{1}{2}F}-\nu^{\delta'}_{\Lambda}} \underset{\tau\to+0}{\longrightarrow} 0$$

в силу (2.18), откуда следует вышесказанное утверждение. Используя (2.37), доопределим $[\,g_0(\tau,\,t)]'_t$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(\tau,t)\right]'_t \Big|_{\tau=0} = \lim_{\tau\to+0}\left[g_0(\tau,t)\right]'_t = 0\,. \qquad (2.38)$$

В силу (2.38) производная $\left[g_0(\tau,t)\right]'_t$ непрерывна по (τ,t). Следовательно, можно применить формулу дифференцирования интеграла по параметру:

$$x_0'(t) = \left[\int_0^t g_0(\tau,\, t)\, d\tau\right]' = \int_0^t \left[g_0(\tau,t)\right]'_t d\tau + g_0(t,t)\,.$$

В силу того, что $S(0)=O,\ \ e^{Qt}\Big|_{t=0} = I$, получаем

$$g_0(t,t) = S(0)I\,\frac{f(t)}{t} = 0\,.$$

Тогда

$$x_0'(t) = \int_0^t \left[g_0(\tau,t)\right]'_t d\tau\,. \qquad (2.39)$$

Далее, учитывая соотношения (2.36), (I.2.4), получаем

$$\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2} = -\frac{1}{t^2} C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau} +$$

$$+\frac{1}{t^2}\frac{1}{4}F^2 S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau} + \frac{1}{t^2}\, C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\Lambda\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau} +$$

$$+\Lambda\left[-\frac{1}{t^2}\, g_0(\tau,t) + \frac{1}{t}\left[g_0(\tau,t)\right]'_t\right].$$

В силу (2.36) имеем

$$C\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(\Lambda\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau} = t\,\left[g_0(\tau,t)\right]'_t - \Lambda\, g_0(\tau,t)$$

Тогда, учитывая равенство (2.34), получаем

$$\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2} = -\frac{1}{t}\left[g_0(\tau,t)\right]'_t + \Lambda\frac{1}{t^2}\, g_0(\tau,t) + \frac{1}{4}F^2\frac{1}{t^2}\, g_0(\tau,t) +$$

$$+\Lambda\frac{1}{t}\left[g_0(\tau,t)\right]'_t - \Lambda^2\frac{1}{t^2}\, g_0(\tau,t) - \Lambda\frac{1}{t^2}\, g_0(\tau,t) + \Lambda\frac{1}{t}\left[g_0(\tau,t)\right]'_t =$$

$$= -\frac{1}{t}A\left[g_0(\tau,t)\right]'_t + \frac{1}{4}\left[F^2 - (I-A)^2\right]\frac{1}{t^2}\, g_0(\tau,t) =$$

$$= -\frac{1}{t}A\left[g_0(\tau,t)\right]'_t - \frac{1}{t^2}B\, g_0(\tau,t)\,,$$

ибо в силу условия 1) справедливо равенство $F^2-(I-A)^2=-4B$. Итак,

$$\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2}=-\frac{1}{t}A\left[g_0(\tau,t)\right]'_t-\frac{1}{t^2}B\,g_0(\tau,t)\,. \tag{2.40}$$

В силу (2.14), (2.37), (2.40) получаем соотношение

$$\lim_{\tau\to+0}\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2}=0\,. \tag{2.41}$$

Используя (2.41), доопределим $\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2}$ по непрерывности в нуле:

$$\left.\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2}\right|_{\tau=0}=\lim_{\tau\to+0}\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2}=0\,. \tag{2.42}$$

В силу (2.42) производная $\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2}$ непрерывна по (τ,t). Следовательно, можно еще раз применить формулу дифференцирования интеграла по параметру. Учитывая (2.36), (2.39), (2.40) а также соотношения $C(0)=I$, $g_0(t,t)=0$, получаем

$$x_0''(t)=\left[\int_0^t\left[g_0(\tau,t)\right]'_t\,d\tau\right]'=\int_0^t\left[g_0(\tau,t)\right]''_{t^2}\,d\tau+\left.\left[g_0(\tau,t)\right]'_t\right|_{\tau=t}=$$

$$=-\frac{1}{t}A\int_0^t\left[g_0(\tau,t)\right]'_t\,d\tau-\frac{1}{t^2}B\int_0^t g_0(\tau,t)\,d\tau+\frac{1}{t}C(0)\frac{f(t)}{t}+\Lambda\frac{1}{t}g_0(t,t)=$$

$$=-\frac{1}{t}A\,x_0'(t)-\frac{1}{t^2}Bx_0(t)+\frac{f(t)}{t^2}\,.$$

Итак,

$$x_0''(t)=-\frac{1}{t}A\,x_0'(t)-\frac{1}{t^2}Bx_0(t)+\frac{f(t)}{t^2}\,, \tag{2.43}$$

следовательно, $t^2x_0''(t)+tAx_0'(t)+Bx_0(t)=f(t)$, т.е. функция (2.5) является решением уравнения (1.1)

Из формулы (2.43) видно, что $x_0''(t)\in C\left((0,\infty);E\right)$, т.е. $x_0(t)\in C^2\left((0,\infty);E\right)$. Лемма 2.4 доказана.

Теорема 2.1 доказана.

Глава IV
УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Случай позитивного операторного дискриминанта

В банаховом пространстве E изучается вырождающееся в точке $t=0$ уравнение

$$t^2 x''(t)+tAx'(t)+Bx(t)=f(t),\ 0<t<\infty, \tag{1.1}$$

где $f(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$; $A,\ B\in N(E)$; $N(E)$ – множество замкнутых неограниченных линейных операторов, действующих из E в E, с плотными в E областями определения.

Рассмотрим стабилизирующее возмущение уравнения (1.1) малым параметром $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0=\mathrm{const}$, $\varepsilon_0>0$:

$$(t+\varepsilon)^2 x''_\varepsilon(t)+(t+\varepsilon)Ax'_\varepsilon(t)+Bx_\varepsilon(t)=f(t),\ 0\le t<\infty, \tag{1.2}$$

$$x_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0},\ x'_\varepsilon(0)=x'_{\varepsilon,0}. \tag{1.3}$$

Выясним вопрос об условиях разрешимости задачи (1.2), (1.3) и поточечной сходимости ее решения при $\varepsilon\to 0$ к ограниченному при $t\to+0$ решению уравнения (1.1).

В дальнейшем будет использован операторный дискриминант $\Delta=(A-I)^2-4B$. Заметим, что область определения оператора Δ имеет вид $D(\Delta)=D(A^2)\cap D(B)$.

Пусть выполняются следующие условия:

1) $\Delta=F^2$, где F – некоторый оператор из $N(E)$;

2) характеристические операторы $\Lambda_{1,2}=(1/2)(I-A\mp F)$ являются производящими операторами полугрупп $U_1(t)$, $U_2(t)$ класса C_0;

3) $AFx=FAx$, $x\in D(\Lambda^2)$, где $D(\Lambda^2)::=D(\Lambda_1^2)=D(\Lambda_2^2)=$
$=D(\Lambda_1\Lambda_2)=D(\Lambda_2\Lambda_1)=D(A^2)\cap D(B)\cap D(AF)\cap D(FA)$;

4) $f(t)\in D(\Lambda^2)$ при каждом $t\in[0,\infty)$;

5) $Af(t)$, $F\,f(t)$, $A^2 f(t)$, $AF\,f(t)$, $Bf(t)\in C\big([0,\infty);E\big)$;

6) $x_{\varepsilon,0}\in D_1$, $x'_{\varepsilon,0}\in D(\Lambda^2)$, где

$$D_1=D(A^2)\cap D(AB)\cap D(AF)\cap D(FA)\cap D(FB);$$

7) типы ω_1, ω_2 полугрупп $U_1(t)$, $U_2(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\omega = \max\{\omega_1, \omega_2\} < -1; \tag{1.4}$$

8) начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\omega_{1\delta}} \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.5}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\omega_{\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.6}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{1-\omega_{\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \right] = 0, \tag{1.7}$$

где $\omega_{1\delta} = \omega_1 + \delta$, $\omega_\delta = \omega + \delta$, δ – сколь угодно малое фиксированное положительное число, такое что

$$\omega_\delta < -1. \tag{1.8}$$

Замечание 1.1. Условия, при которых данный оператор *H*, действующий в банаховом пространстве *E*, является квадратом некоторого оператора *T* и вид этого оператора T см. в [10, с. 169].

Замечание 1.2. Для выполнимости условий (1.5) – (1.7) достаточно, чтобы для $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_*] \subset (0, \varepsilon_0]$, где ε_* – произвольное сколь угодно малое положительное число, не превосходящее ε_0, выполнялись соответственно следующие неравенства:

$$\left\| x_{\varepsilon,0} \right\| \le L_0 \varepsilon^{\omega_{1\delta}+\rho},$$

$$\left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \le K_0 \varepsilon^{\omega_\delta+\rho},$$

$$\left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| \le T_1 \varepsilon^{\omega_\delta-1+\rho},$$

где L_0, K_0, T_1 – константы; L_0, K_0, $T_1 > 0$; ρ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Укажем некоторые соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем.

В силу неравенств (1.4), (1.8)

$$\omega_{1\delta} < -1, \tag{1.9}$$

$$\omega_{2\delta} < -1, \tag{1.10}$$

т.е.

$$-1 - \omega_{1\delta} > 0, \tag{1.11}$$

$$-1-\omega_{2\delta}>0, \qquad (1.12)$$

где $\omega_{2\delta}=\omega_2+\delta$.

В силу малости параметра ε будем считать в дальнейшем, что $\varepsilon<1$.

Из условия (1.6) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-\omega_{1\delta}}\left\|\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right\|\right]=0, \qquad (1.13)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-\omega_{2\delta}}\left\|\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right\|\right]=0. \qquad (1.14)$$

Из условия (1.7) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{1-\omega_{1\delta}}\left\|x'_{\varepsilon,0}\right\|\right]=0, \qquad (1.15)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{1-\omega_{2\delta}}\left\|x'_{\varepsilon,0}\right\|\right]=0. \qquad (1.16)$$

Известно [1, с. 211], что если $\omega-$ тип полугруппы $U(t)$ класса C_0, то

$$\left\|U(t)\right\| \le M_\delta \exp(\omega_\delta t),\ 0\le t<\infty,$$

где $M_\delta=\text{const}$, $M_\delta>0$; $\omega_\delta=\omega+\delta$, δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Следовательно, в силу условия 2)

$$\left\|U_1(t)\right\| \le M_{1\delta} \exp(\omega_{1\delta} t),\ 0\le t<\infty, \qquad (1.17)$$

$$\left\|U_2(t)\right\| \le M_{2\delta} \exp(\omega_{2\delta} t),\ 0\le t<\infty, \qquad (1.18)$$

где $M_{1\delta}$, $M_{2\delta}=\text{const}$; $M_{1\delta}$, $M_{2\delta}>0$; δ – сколь угодно малое фиксированное положительное число, такое что выполняются неравенства (1.9), (1.10).

В силу условия 2) имеем [4, с. 17]

$$U_1'(t)\,x=\Lambda_1 U_1(t)\,x,\ \Lambda_1 U_1(t)\,x=U_1(t)\Lambda_1\,x,\ \ x\in D(\Lambda), \qquad (1.19)$$

$$U_2'(t)\,x=\Lambda_2 U_2(t)\,x,\ \Lambda_2 U_2(t)\,x=U_2(t)\Lambda_2\,x,\ \ x\in D(\Lambda), \qquad (1.20)$$

где $D(\Lambda)::=D(\Lambda_1)=D(\Lambda_2)=D(A)\cap D(F)$; и операторы Λ_1, Λ_2 замкнуты. Кроме того,

$$U_1(0)=I,\ U_2(0)=I. \qquad (1.21)$$

Теорема 1.1. При выполнении условий 1) – 6) задача (1.2), (1.3) при каждом $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ имеет решение вида

$$x_\varepsilon(t)=U_1\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0}+I_{1\varepsilon}(t)+I_{2\varepsilon}(t)\,, \tag{1.22}$$

где

$$I_{1\varepsilon}(t)=\int_0^t U_2\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)U_1\left(\ln\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left(\varepsilon\,x'_{\varepsilon,0}-\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right)\frac{ds}{s+\varepsilon}\ ,$$

$$I_{2\varepsilon}(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\nu+s+\varepsilon}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\varepsilon}\,d\nu\right]\frac{ds}{s+\varepsilon}\,.$$

При выполнении условий 7), 8) справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x_\varepsilon(t)=x_0(t)\,,\ t\in(0,\infty)\,, \tag{1.23}$$

где

$$x_0(t)=\int_0^t\left[\int_0^{t-s}U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{f(s)}{\nu+s}\,d\nu\right]\frac{ds}{s}\,. \tag{1.24}$$

Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Это решение ограничено при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0,\infty)$.

Теорема 1.1 справедлива в силу доказываемых ниже лемм 1.1 – 1.4.

Лемма 1.1. При выполнении условий 1) – 6) задача (1.2), (1.3) имеет решение вида (1.22).

Доказательство. Заменой переменной $t=\varepsilon e^\tau-\varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к стандартной задаче Коши

$$u''_\varepsilon(\tau)+(A-I)\,u'_\varepsilon(\tau)+Bu_\varepsilon(\tau)=g_\varepsilon(\tau)\,,\ 0\le\tau<\infty\,, \tag{1.25}$$

$$u_\varepsilon(0)=x_{\varepsilon,0}\,,\ u'_\varepsilon(0)=\varepsilon\,x'_{\varepsilon,0}\,, \tag{1.26}$$

где $u_\varepsilon(\tau)::=x_\varepsilon(\varepsilon e^\tau-\varepsilon)$, $g_\varepsilon(\tau)::=f(\varepsilon e^\tau-\varepsilon)$.

Задача (1.25), (1.26) – это задача вида (II.1.1), (II.1.2). В силу условий 1) – 6) выполняются условия теоремы II.1.1. Используя формулу (II.1.3), получаем решение задачи (1.25), (1.26)

$$u_\varepsilon(\tau)=U_1(\tau)\,x_{\varepsilon,0}+\int_0^t U_2(\tau-\mu)U_1(\mu)\left(\varepsilon\,x'_{\varepsilon,0}-\Lambda_1 x_{\varepsilon,0}\right)d\mu+$$

$$+\int_0^\tau\left[\int_0^{\tau-\rho}U_2(\tau-\rho-\mu)U_1(\mu)\,g_\varepsilon(\rho)\,d\mu\right]d\rho\,. \tag{1.27}$$

Проведя во втором слагаемом в правой части равенства (1.27) замену $\mu = \ln \frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$, а в третьем слагаемом последовательно замены $\rho = \ln \frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}$, $\mu = \ln \frac{\nu + s + \varepsilon}{s+\varepsilon}$ и возвращаясь к переменной t, получаем решение вида (1.22) задачи (1.2), (1.3). Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. При выполнении условий 1) – 5) и 7) функция вида (1.24) определена при любом $t \in (0, \infty)$ и ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0, \infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0, \infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t > 0$. В силу сильной непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ и непрерывности $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,t) = \frac{1}{s} \int_0^{t-s} U_2\left(\ln \frac{t}{\nu + s}\right) U_1\left(\ln \frac{\nu + s}{s}\right) \frac{f(s)}{\nu + s}\, d\nu \tag{1.28}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\Delta, t]$, Δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем сходимость несобственного интеграла

$$x_0(t) = \int_0^t g_0(s,t)\, ds\,. \tag{1.29}$$

Для этого достаточно доказать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^t \left\| g_0(s,t) \right\| ds\,. \tag{1.30}$$

Используя оценки (1.17), (1.18), получаем

$$\left\| g_0(s,t) \right\| \le \frac{1}{s} \int_0^{t-s} \left\| U_2\left(\ln \frac{t}{\nu+s}\right) \right\| \left\| U_1\left(\ln \frac{\nu+s}{s}\right) \right\| \frac{\left\| f(s) \right\|}{\nu+s}\, d\nu \le$$

$$\le \frac{1}{s} M_{1\delta} M_{2\delta} \int_0^{t-s} \left(\frac{t}{\nu+s}\right)^{\omega_{2\delta}} \left(\frac{\nu+s}{s}\right)^{\omega_{1\delta}} \frac{\left\| f(s) \right\|}{\nu+s}\, d\nu =$$

$$= M_{1\delta} M_{2\delta}\, t^{\omega_{2\delta}} s^{-1-\omega_{1\delta}} \left\| f(s) \right\| \int_0^{t-s} (\nu+s)^{\omega_1 - \omega_2 - 1}\, d\nu\,. \tag{1.31}$$

Далее,

$$\int_0^{t-s}(\nu+s)^{\omega_1-\omega_2-1}\,d\nu=\left.\frac{(\nu+s)^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2}\right|_0^{t-s}=\frac{t^{\omega_1-\omega_2}-s^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2}\,. \qquad (1.32)$$

В силу соотношений (1.31), (1.32) получаем неравенство

$$\|g_0(s,t)\|\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\omega_1-\omega_2}t^{\omega_{2\delta}}\|f(s)\|\left[t^{\omega_1-\omega_2}s^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}}\right]. \qquad (1.33)$$

Тогда

$$\int_0^t\|g_0(s,t)\|\,ds\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\omega_1-\omega_2}t^{\omega_{2\delta}}\int_0^t\|f(s)\|\left[t^{\omega_1-\omega_2}s^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}}\right]ds\,.$$

Полагая $N(t)=\max\limits_{0\le s\le t}\|f(s)\|$, получаем

$$\int_0^t\|g_0(s,t)\|\,ds\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\omega_1-\omega_2}t^{\omega_{2\delta}}N(t)\int_0^t\left[t^{\omega_1-\omega_2}s^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}}\right]ds\,. \qquad (1.34)$$

Проведя непосредственное интегрирование, получаем

$$\int_0^t\left[t^{\omega_1-\omega_2}s^{-1-\omega_{1\delta}}-s^{-1-\omega_{2\delta}}\right]ds=\frac{\omega_1-\omega_2}{\omega_{1\delta}\omega_{2\delta}}\,t^{-\omega_{2\delta}}\,. \qquad (1.35)$$

В силу соотношений (1.34), (1.35)

$$\int_0^t\|g_0(s,t)\|\,ds\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\omega_{1\delta}\omega_{2\delta}}\,N(t)\,. \qquad (1.36)$$

Из неравенства (1.36) следует сходимость несобственного интеграла (1.30) и тем самым корректность определения функции $x_0(t)$. Учитывая (1.36), а также неравенство

$$\|x_0(t)\|=\left\|\int_0^t g_0(s,t)\,ds\right\|\le\int_0^t\|g_0(s,t)\|\,ds\,,$$

получаем оценку вида

$$\|x_0(t)\|\le\frac{M_{1\delta}M_{2\delta}}{\omega_{1\delta}\omega_{2\delta}}\,N(t)\,. \qquad (1.37)$$

Из (1.37) видно, что функция $x_0(t)$ ограничена при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$, т.е. $\sup\limits_{t\in[0,\infty)}N(t)=C<\infty$, то из (1.37) следует, что $x_0(t)$ ограничено на $(0,\infty)$. Лемма 1.2 доказана.

Заметим, что в силу (1.11), (1.12) правая часть неравенства (1.33) сходится к нулю при $s \to +0$. Следовательно,

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0 . \tag{1.38}$$

Лемма 1.3. При выполнении условий 1) – 8) справедлив предельный переход (1.23), где $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ задаются формулами (1.22), (1.24).

Доказательство. Покажем вначале, что первые два слагаемых в правой части формулы (1.22) сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Используя оценку (1.17), получаем

$$\left\| U_1\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_{1\delta}\,(t+\varepsilon)^{\omega_{1\delta}}\,\varepsilon^{-\omega_{1\delta}} \left\| x_{\varepsilon,0} \right\| . \tag{1.39}$$

В силу (1.5) правая часть неравенства (1.39) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, следовательно

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[U_1\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right) x_{\varepsilon,0} \right] = 0 . \tag{1.40}$$

Используя оценки (1.17), (1.18), получаем

$$\| I_{1\varepsilon}(t) \| \le \int_0^t \left\| U_2\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right) \right\| \left\| U_1\left(\ln\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right\| \left\| \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \frac{ds}{s+\varepsilon} \le$$

$$\le M_{1\delta} M_{2\delta} \left\| \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \int_0^t \left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{\omega_{2\delta}} \left(\frac{s+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\omega_{1\delta}} \frac{ds}{s+\varepsilon} =$$

$$= M_{1\delta} M_{2\delta} \left\| \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \frac{(t+\varepsilon)^{\omega_{2\delta}}}{\varepsilon^{\omega_{1\delta}}} \int_0^t (s+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2-1}\, ds . \tag{1.41}$$

Далее,

$$\int_0^t (s+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2-1}\, ds = \left. \frac{(s+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2} \right|_0^t = \frac{(t+\varepsilon)^{\omega_1-\omega_2} - \varepsilon^{\omega_1-\omega_2}}{\omega_1-\omega_2} . \tag{1.42}$$

В силу соотношений (1.41), (1.42) получаем

$$\| I_{1\varepsilon}(t) \| \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_1-\omega_2} \Big[(t+\varepsilon)^{\omega_{1\delta}}\,\varepsilon^{-\omega_{1\delta}} \left\| \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| -$$

$$- (t+\varepsilon)^{\omega_{2\delta}}\,\varepsilon^{-\omega_{2\delta}} \left\| \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \Big],$$

или в силу неравенства $\left\| \varepsilon\, x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \le \varepsilon \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| + \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\|$ имеем

$$\left\| I_{1\varepsilon}(t) \right\| \le \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\omega_1 - \omega_2} \left[(t+\varepsilon)^{\omega_{1\delta}} \left(\varepsilon^{1-\omega_{1\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| + \varepsilon^{-\omega_{1\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right) + \right.$$

$$\left. + (t+\varepsilon)^{\omega_{2\delta}} \left(\varepsilon^{1-\omega_{2\delta}} \left\| x'_{\varepsilon,0} \right\| + \varepsilon^{-\omega_{2\delta}} \left\| \Lambda_1 x_{\varepsilon,0} \right\| \right) \right]. \tag{1.43}$$

В силу (1.13) – (1.16) правая часть неравенства (1.43) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_{1\varepsilon}(t) = 0\,. \tag{1.44}$$

Для справедливости (1.23) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t g_\varepsilon(s,t)\, ds = \int_0^t g_0(s,t)\, ds\,, \tag{1.45}$$

где $g_0(s,t)$ задается формулой (1.28), $g_\varepsilon(s,t)$ имеет вид

$$g_\varepsilon(s,t) = \frac{1}{s+\varepsilon} \int_0^{t-s} U_2\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\nu+s+\varepsilon} \right) U_1\left(\ln \frac{\nu+s+\varepsilon}{s+\varepsilon} \right) \frac{f(s)}{\nu+s+\varepsilon}\, d\nu\,.$$

Для справедливости (1.45) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \right\| ds = 0\,. \tag{1.46}$$

Запишем разность $g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon \left[h(\kappa,\nu,s,t) \right]'_\kappa\, d\kappa\,, \tag{1.47}$$

где

$$h(\kappa,\nu,s,t) = \frac{1}{s+\kappa} \int_0^{t-s} U_2\left(\ln \frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa} \right) U_1\left(\ln \frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa} \right) \frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\, d\nu\,.$$

Запишем $h(\kappa,\nu,s,t)$ в виде

$$h(\kappa,\nu,s,t) = \frac{1}{s+\kappa} \int_0^{t-s} p(\kappa,\nu,s,t)\, d\nu\,,$$

где

$$p(\kappa,\nu,s,t) = U_2\left(\ln \frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa} \right) U_1\left(\ln \frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa} \right) \frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\,.$$

Тогда

$$[h(\kappa,\nu,s,t)]'_\kappa = -\frac{1}{(s+\kappa)^2}\int_0^{t-s} p(\kappa,\nu,s,t)\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{s+\kappa}\int_0^{t-s}\left[p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa\,d\nu\,. \tag{1.48}$$

Из (1.19) видно, что

$$U_1(t)\,x\in D(\Lambda)\,,\ \ x\in D(\Lambda)\,. \tag{1.49}$$

В силу условия 4) имеем

$$f(s)\in D(\Lambda)\,. \tag{1.50}$$

В силу (1.49), (1.50) справедливо включение

$$U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{\nu+s+\kappa}\in D(\Lambda)\,.$$

Следовательно, при нахождении производной $\left[p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa$ можно использовать соотношения (1.19), (1.20). Учитывая соотношение (II.1.11), получаем

$$\left[p(\kappa,\nu,s,t)\right]'_\kappa =$$

$$=U_2'\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\left[-\frac{t-s-\nu}{t+\kappa}\right]U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}+$$

$$+U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U_1'\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{\nu}{s+\kappa}\right]\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}+$$

$$+U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}\right]=$$

$$=U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{t-s-\nu}{(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\,\Lambda_2\,f(s)-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\,\Lambda_1\,f(s)-\frac{f(s)}{(\nu+s+\kappa)^2}\right]. \tag{1.51}$$

В силу равенств (1.48), (1.51) имеем

$$[h(\kappa,\nu,s,t)]'_{\kappa} =$$

$$= \int_0^{t-s} U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right) U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\left[-\frac{f(s)}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)} - \right.$$

$$-\frac{t-s-\nu}{(s+\kappa)(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_2 f(s) - \frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2}\Lambda_1 f(s) -$$

$$\left. -\frac{f(s)}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\right] d\nu \ .$$

Тогда

$$\left\| [h(\kappa,\nu,s,t)]'_{\kappa} \right\| \le \int_0^{t-s} \left[\left\| U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\right\| \left\| U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\right\| \times \right.$$

$$\times \left[\frac{\| f(s)\|}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)} + \frac{t-s-\nu}{(s+\kappa)(t+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\|\Lambda_2 f(s)\| + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\nu}{(s+\kappa)^2(\nu+s+\kappa)^2}\|\Lambda_1 f(s)\| + \frac{\| f(s)\|}{(s+\kappa)(\nu+s+\kappa)^2}\right]\right] d\nu \ . \quad (1.52)$$

В силу оценок (1.17), (1.18) справедливы неравенства

$$\left\| U_2\left(\ln\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)\right\| \le M_{2\delta}\left(\frac{t+\kappa}{\nu+s+\kappa}\right)^{\omega_{2\delta}}, \quad (1.53)$$

$$\left\| U_1\left(\ln\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)\right\| \le M_{1\delta}\left(\frac{\nu+s+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\omega_{1\delta}}. \quad (1.54)$$

В силу неравенств (1.52) – (1.54), (III.1.55) – (III.1.57) имеем

$$\left\| [h(\kappa,\nu,s,t)]'_{\kappa} \right\| \le M_{1\delta} M_{2\delta} \frac{(t+\kappa)^{\omega_{2\delta}}}{(s+\kappa)^{2+\omega_{1\delta}}} \left[2\| f(s)\| + \|\Lambda_1 f(s)\| + \|\Lambda_2 f(s)\| \right] \times$$

$$\times \int_0^{t-s} (\nu+s+\kappa)^{\omega_1-\omega_2-1} d\nu \ .$$

Полагая $N_1(t) = \max\limits_{0\le s\le t}\|\Lambda_1 f(s)\|$, $N_2(t) = \max\limits_{0\le s\le t}\|\Lambda_2 f(s)\|$, получаем

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t) \right]'_{\kappa} \right\| \le M_{1\delta} M_{2\delta} \left[2N(t) + N_1(t) + N_2(t) \right] \frac{(t+\kappa)^{\omega_{2\delta}}}{(s+\kappa)^{2+\omega_{1\delta}}} \times$$

$$\times \int_0^{t-s} (\nu + s + \kappa)^{\omega_1 - \omega_2 - 1} d\nu \,. \tag{1.55}$$

Имеем

$$\int_0^{t-s} (\nu + s + \kappa)^{\omega_1 - \omega_2 - 1} d\nu = \frac{(t+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2} - (s+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2}}{\omega_1 - \omega_2} \,. \tag{1.56}$$

Заметим, что выражение в правой части (1.56) неотрицательно. Тогда

$$\frac{(t+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2} - (s+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2}}{\omega_1 - \omega_2} = \left| \frac{(t+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2} - (s+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2}}{\omega_1 - \omega_2} \right| =$$

$$= \frac{\left| (t+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2} - (s+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2} \right|}{\left| \omega_1 - \omega_2 \right|} \le \frac{(t+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2} + (s+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2}}{\left| \omega_1 - \omega_2 \right|} \,. \tag{1.57}$$

В силу соотношений (1.56), (1.57) получаем

$$\int_0^{t-s} (\nu + s + \kappa)^{\omega_1 - \omega_2 - 1} d\nu \le \frac{(t+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2} + (s+\kappa)^{\omega_1 - \omega_2}}{\left| \omega_1 - \omega_2 \right|} \,. \tag{1.58}$$

В силу неравенств (1.55), (1.58) имеем

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t) \right]'_{\kappa} \right\| \le$$

$$\le P(t) \left[(t+\kappa)^{\omega_{1\delta}} (s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}} + (t+\kappa)^{\omega_{2\delta}} (s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}} \right], \tag{1.59}$$

где

$$P(t) = \frac{M_{1\delta} M_{2\delta}}{\left| \omega_1 - \omega_2 \right|} \left[2N(t) + N_1(t) + N_2(t) \right].$$

В силу (1.9), (1.10) справедливы неравенства

$$(t+\kappa)^{\omega_{1\delta}} \le t^{\omega_{1\delta}} \,, \; (t+\kappa)^{\omega_{2\delta}} \le t^{\omega_{2\delta}} \,. \tag{1.60}$$

В силу неравенств (1.59), (1.60) получаем

$$\left\| \left[h(\kappa,\nu,s,t) \right]'_{\kappa} \right\| \le P(t) \left[t^{\omega_{1\delta}} (s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}} + t^{\omega_{2\delta}} (s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}} \right]. \tag{1.61}$$

Из представления (1.47) следует, что

$$\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \le \int_0^\varepsilon \left\| [h(\kappa,\nu,s,t)]'_\kappa \right\| d\kappa . \qquad (1.62)$$

В силу неравенств (1.61), (1.62) имеем

$$\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \le$$

$$\le P(t)\left[t^{\omega_{1\delta}} \int_0^\varepsilon (s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}} d\kappa + t^{\omega_{2\delta}} \int_0^\varepsilon (s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}} d\kappa \right]. \qquad (1.63)$$

Далее,

$$\int_0^\varepsilon (s+\kappa)^{-2-\omega_{1\delta}} d\kappa = \frac{1}{-1-\omega_{1\delta}} \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{1\delta}} \right], \qquad (1.64)$$

$$\int_0^\varepsilon (s+\kappa)^{-2-\omega_{2\delta}} d\kappa = \frac{1}{-1-\omega_{2\delta}} \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}} \right]. \qquad (1.65)$$

В силу соотношений (1.63) – (1.65) получаем

$$\| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| \le \frac{P(t) t^{\omega_{1\delta}}}{-1-\omega_{1\delta}} \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{1\delta}} \right] +$$

$$+ \frac{P(t) t^{\omega_{2\delta}}}{-1-\omega_{2\delta}} \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}} \right].$$

Тогда

$$\int_0^t \| g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) \| ds \le \frac{P(t) t^{\omega_{1\delta}}}{-1-\omega_{1\delta}} \int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{1\delta}} \right] ds +$$

$$+ \frac{P(t) t^{\omega_{2\delta}}}{-1-\omega_{2\delta}} \int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}} \right] ds . \qquad (1.66)$$

В силу (1.9), (1.10) имеем $-\omega_{1\delta} > 1$, $-\omega_{2\delta} > 1$. Тогда

$$\int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{1\delta}} - s^{-1-\omega_{1\delta}} \right] ds =$$

$$= \frac{1}{-\omega_{1\delta}} \left[(t+\varepsilon)^{-\omega_{1\delta}} - \varepsilon^{-\omega_{1\delta}} - t^{-\omega_{1\delta}} \right] \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0 , \qquad (1.67)$$

$$\int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-1-\omega_{2\delta}} - s^{-1-\omega_{2\delta}}\right] ds =$$

$$= \frac{1}{-\omega_{2\delta}} \left[(t+\varepsilon)^{-\omega_{2\delta}} - \varepsilon^{-\omega_{2\delta}} - t^{-\omega_{2\delta}}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 . \qquad (1.68)$$

Из (1.66) – (1.68) следует соотношение (1.46). Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. При выполнении условий 1) – 5) и 7) предельная функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (1.24), является решением уравнения (1.1).

Доказательство. Запишем $x_0(t)$ в виде

$$x_0(t) = \int_0^t g_0(s,t)\, ds ,$$

где

$$g_0(s,t) = \int_0^{t-s} w(\nu, s, t)\, d\nu ,$$

$$w(\nu, s, t) = U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right) U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right) \frac{f(s)}{s(\nu+s)} .$$

Найдем $x_0'(t)$. Для этого обоснуем корректность применимости правила дифференцирования интеграла по параметру, а именно, покажем, что подынтегральная функция $g_0(s,t)$ и ее производная $[g_0(s,t)]_t'$ непрерывны по (s,t). Используя соотношение (1.38), доопределим $g_0(s,t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,t) = \lim_{s \to +0} g_0(s,t) = 0 .$$

Следовательно, $g_0(s,t)$ непрерывна по (s,t).

В силу (1.49), (1.50) справедливо включение

$$U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right) \frac{f(s)}{s(\nu+s)} \in D(\Lambda) .$$

Следовательно, при нахождении производной $[w(\nu, s, t)]_t'$ можно использовать соотношения (1.20):

$$[w(\nu, s, t)]_t' = U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right) U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right) \frac{\Lambda_2 f(s)}{ts(\nu+s)} . \qquad (1.69)$$

В силу непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ функция $w(\nu,s,t)$ и ее производная $[w(\nu,s,t)]_t'$ непрерывны по (ν,t). Следовательно,

$$[g_0(s,t)]_t' = \int_0^{t-s} [w(\nu,s,t)]_t' \, d\nu + w(t-s,s,t) . \tag{1.70}$$

Запишем (1.69) в виде

$$[w(\nu,s,t)]_t' = \frac{1}{t} \Lambda_2 w(\nu,s,t) . \tag{1.71}$$

Учитывая равенства (1.21), получаем

$$w(t-s,s,t) = \frac{1}{t} U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} . \tag{1.72}$$

В силу (1.70) – (1.72) справедливо равенство

$$[g_0(s,t)]_t' = \frac{1}{t} \Lambda_2 \int_0^{t-s} w(\nu,s,t) \, d\nu + \frac{1}{t} U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}$$

или

$$[g_0(s,t)]_t' = \frac{1}{t} \Lambda_2 \, g_0(s,t) + \frac{1}{t} U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} . \tag{1.73}$$

Используя оценку (1.17), получаем

$$\left\| U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} \right\| \le M_{1\delta} \, t^{\omega_{1\delta}} \| f(s) \| \, s^{-1-\omega_{1\delta}} . \tag{1.74}$$

В силу (1.11) правая часть неравенства (1.74) сходится к нулю при $s \to +0$. Следовательно,

$$\lim_{s\to+0} \left[U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} \right] = 0 . \tag{1.75}$$

В силу (1.38), (1.75) из равенства (1.73) следует, что

$$\lim_{s\to+0} [g_0(s,t)]_t' = 0 . \tag{1.76}$$

Соотношение (1.76) позволяет доопределить производную $[g_0(s,t)]_t'$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t \Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0}\left[g_0(s,t)\right]'_t = 0\,.$$

Таким образом, производная $[g_0(s,t)]'_t$ непрерывна по (s,t). Следовательно,

$$x_0'(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]'_t ds + g_0(t,t)$$

или с учетом того, что $g_0(t,t)=0$,

$$x_0'(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]'_t ds\,. \tag{1.77}$$

Покажем, что производная $\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t). В силу соотношений (1.69), (1.70), (1.72) получаем

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t = \frac{1}{t}\int_0^{t-s} U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right) U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu+s)}\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{t}\,U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,. \tag{1.78}$$

В силу сильной непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ подынтегральная функция

$$q(\nu,s,t) = U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right) U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu+s)}$$

непрерывна по (ν,t). В силу условия 4)

$$\Lambda_2 f(s) \in D(\Lambda)\,. \tag{1.79}$$

В силу (1.49), (1.79) справедливо включение

$$U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2 f(s)}{s(\nu+s)} \in D(\Lambda)\,.$$

Следовательно, при нахождении производной $[q(\nu,s,t)]'_t$ можно использовать соотношения (1.20):

$$\left[q(\nu,s,t)\right]'_t = U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right) U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right)\frac{\Lambda_2^2 f(s)}{t\,s(\nu+s)}\,. \tag{1.80}$$

В силу сильной непрерывности полугрупп $U_1(\bullet)$, $U_2(\bullet)$ производная $[q(\nu,s,t)]'_t$ непрерывна по (ν,t). В силу включения (1.50) при нахождении производной второго слагаемого в правой части (1.78) по переменной *t* можно использовать соотношения (1.19). Получаем

$$[g_0(s,t)]''_{t^2} = -\frac{1}{t^2}\int_0^{t-s} q(\nu,s,t)\,d\nu + \frac{1}{t}\int_0^{t-s}[q(\nu,s,t)]'_t\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{t}\,q(t-s,s,t) - \frac{1}{t^2}\,U_1\!\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} + \frac{1}{t^2}\,\Lambda_1 U_1\!\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}. \quad (1.81)$$

Заметим, что

$$q(\nu,s,t) = \Lambda_2 w(\nu,s,t). \quad (1.82)$$

В силу соотношения (1.80) имеем

$$[q(\nu,s,t)]'_t = \frac{1}{t}\Lambda_2^2 w(\nu,s,t). \quad (1.83)$$

Учитывая (1.21), получаем

$$q(t-s,s,t) = \frac{1}{t}\,\Lambda_2 U_1\!\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}. \quad (1.84)$$

В силу (1.81) – (1.84) имеем

$$[g_0(s,t)]''_{t^2} = -\frac{1}{t^2}\Lambda_2\int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu + \frac{1}{t^2}\Lambda_2^2\int_0^{t-s} w(\nu,s,t)\,d\nu +$$

$$+\frac{1}{t^2}\Lambda_2 U_1\!\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s} + \frac{1}{t^2}\,(\Lambda_1 - I)\,U_1\!\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}$$

или

$$[g_0(s,t)]''_{t^2} =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[(\Lambda_2^2 - \Lambda_2)\,g_0(s,t) + (\Lambda_1 + \Lambda_2 - I)\,U_1\!\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\right]. \quad (1.85)$$

В силу (1.38), (1.75) из равенства (1.85) вытекает, что

$$\lim_{s\to+0}\,[g_0(s,t)]''_{t^2} = 0.$$

Следовательно, производную $[g_0(s,t)]''_{t^2}$ можно доопределить по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}\Big|_{s=0} = \lim_{s\to+0}\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2} = 0\,.$$

Значит, производная $\left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t).

Учитывая равенство (1.77), получаем

$$x_0''(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t)\right]''_{t^2}\,ds + \left[g_0(s,t)\right]'_t\Big|_{s=t}. \qquad (1.86)$$

Учитывая равенство $g_0(t,t)=0$ и соотношения (1.21), получаем из (1.73)

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t\Big|_{s=t} = \frac{f(t)}{t^2}. \qquad (1.87)$$

В силу (1.85) – (1.87) имеем

$$x_0''(t) =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[f(t) + (\Lambda_2^2 - \Lambda_2)\int_0^t g_0(s,t)\,ds + (\Lambda_1+\Lambda_2-I)\int_0^t U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds\right],$$

т.е.

$$x_0''(t) = \frac{1}{t^2}\left[f(t) + (\Lambda_2^2-\Lambda_2)\,x_0(t) - (\Lambda_1+\Lambda_2-I)\,I(t)\right], \qquad (1.88)$$

где

$$I(t) = \int_0^t U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds\,.$$

В силу (1.73), (1.77) справедливо равенство

$$x_0'(t) = \frac{1}{t}\left[\Lambda_2\, x_0(t) + I(t)\right]. \qquad (1.89)$$

Используя формулы (1.88), (1.89), имеем

$$t^2 x_0''(t) + tA\,x_0'(t) + Bx_0(t) = f(t) + (\Lambda_2^2-\Lambda_2)\,x_0(t) +$$
$$+(\Lambda_1+\Lambda_2-I)\,I(t) + A\Lambda_2 x_0(t) + AI(t) + Bx_0(t) =$$
$$= f(t) + \left[\Lambda_2^2 + (A-I)\Lambda_2 + B\right]x_0(t) + (\Lambda_1+\Lambda_2-I+A)\,I(t) = f(t)$$

в силу того, что Λ_2 – корень характеристического уравнения $\Lambda^2+(A-I)\Lambda+B=O$, и $\Lambda_1+\Lambda_2=I-A$.

Используя условие 4), соотношения (1.19), (1.20) и (II.1.11), запишем производную $x_0''(t)$ в виде

$$x_0''(t) =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[f(t) + \int_0^t \left[\int_0^{t-s} U_2\left(\ln\frac{t}{\nu+s}\right) U_1\left(\ln\frac{\nu+s}{s}\right) \frac{(\Lambda_2^2 - \Lambda_2) f(s)}{\nu+s}\, d\nu \right] \frac{ds}{s} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t U_1\left(\ln\frac{t}{s}\right) \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - I) f(s)}{s}\, ds \right]. \qquad (1.90)$$

Из (1.90) видно в силу условий 3) – 5), что $x_0''(t) \in C\big((0,\infty); E\big)$, а это означает справедливость включения $x_0(t) \in C^2\big((0,\infty); E\big)$. Лемма 1.4 доказана.

Теорема 1.1 доказана.

§ 2. Случай нулевого операторного дискриминанта

Пусть $\Delta = O$. Тогда $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_0 = (1/2)(I - A)$, следовательно, $U_1(t) = U_2(t) = U(t)$, где $U(t)$ – полугруппа, порожденная оператором Λ_0, и формулы (1.22), (1.24) с учетом полугруппового свойства $U(t_1)U(t_2) = U(t_1 + t_2)$ принимают вид

$$x_\varepsilon(t) = U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[x_{\varepsilon,0} + \left(\varepsilon x_{\varepsilon,0}' - \Lambda_0 x_{\varepsilon,0}\right)\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right] +$$

$$+ \int_0^t U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,\frac{f(s)}{s+\varepsilon}\, ds, \qquad (2.1)$$

$$x_0(t) = \int_0^t U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\ln\frac{t}{s}\,\frac{f(s)}{s}\, ds. \qquad (2.2)$$

Пусть выполняются следующие условия:

а) операторный дискриминант $\Delta = (A - I)^2 - 4B$ является нулевым оператором, т.е. $B = (1/4)(A - I)^2$;

б) оператор $\Lambda_0 = (1/2)(I - A)$ является производящим оператором полугруппы $U(t)$ класса C_0;

в) $f(t) \in D(A^2)$ при каждом $t \in [0,\infty)$;

г) $Af(t)$, $A^2 f(t) \in C([0,\infty); E)$;

д) $x_{\varepsilon,0} \in D(A^3)$, $x'_{\varepsilon,0} \in D(A^2)$;

е) тип ω полугруппы $U(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega < -1; \tag{2.3}$$

ж) начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varepsilon^{-\omega_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \| \right] = 0, \tag{2.4}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\| \Lambda_0 x_{\varepsilon,0} \| \varepsilon^{-\omega_\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right] = 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\| x'_{\varepsilon,0} \| \varepsilon^{1-\omega_\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right] = 0, \tag{2.6}$$

где $\omega_\delta = \omega + \delta$, δ – произвольное сколь угодно малое фиксированное положительное число.

Учитывая неравенство (2.3), будем считать в дальнейшем, что число δ выбрано таким образом, что

$$\omega_\delta < -1. \tag{2.7}$$

В силу (2.7)

$$-1 - \omega_\delta > 0. \tag{2.8}$$

В силу условия б) справедлива оценка [1, с. 211]

$$\| U(t) \| \le M_\delta \exp(\omega_\delta t), \ 0 \le t < \infty, \tag{2.9}$$

где M_δ – некоторая постоянная, $M_\delta > 0$; $\omega_\delta = \omega + \delta$, причем положительное число δ в оценке (2.9) выберем таким образом, чтобы выполнялось неравенство (2.7).

Заметим, что $D(\Lambda_0) = D(A)$.

Тогда в силу условия в) справедливо включение

$$f(t) \in D(\Lambda_0^2), \ t \in [0,\infty), \tag{2.10}$$

В силу условия г) имеем

$$\Lambda_0 f(t), \ \Lambda_0^2 f(t) \in C([0,\infty); E). \tag{2.11}$$

В силу условия д)

$$x_{\varepsilon,0} \in D(\Lambda_0^3), \ x'_{\varepsilon,0} \in D(\Lambda_0^2). \tag{2.12}$$

В силу условия б) имеем [4, с. 17]

$$U(0)=I\ ; \tag{2.13}$$

$$U'(t)\,x=\Lambda_0 U(t)\,x\ ,\ \Lambda_0 U(t)\,x=U(t)\Lambda_0 x\ ,\ x\in D(\Lambda_0)\ , \tag{2.14}$$

кроме того, $\overline{D(\Lambda_0)}=E$ и оператор Λ_0 замкнут.

Теорема 2.1. При выполнении условий а) – д) задача (1.2), (1.3) при каждом $\varepsilon\in(0,\,\varepsilon_0]$ имеет решение вида (2.1). Если дополнительно выполняются условия е), ж), то справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t)=x_0(t)\ ,\ t\in(0\,,\infty)\ , \tag{2.15}$$

где $x_0(t)$ задается формулой (2.2). Предельная функция $x_0(t)$ является решением уравнения (1.1). Это решение ограничено при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0\,,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0\,,\infty)$.

Теорема 2.1 справедлива в силу доказываемых ниже лемм 2.1 – 2.4.

Лемма 2.1. При выполнении условий а) – д) задача (1.2), (1.3) имеет решение вида (2.1).

Доказательство. Заменой переменной $t=\varepsilon e^{\tau}-\varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к задаче (1.25), (1.26), т.е. к задаче вида (II.1.1), (II.1.2). В силу условий а) – д) выполняются условия теоремы II.1.2. Используя формулу (II.1.70), получаем решение задачи (1.25), (1.26):

$$u_\varepsilon(\tau)=U(\tau)\Big[\,x_{\varepsilon,0}+\Big(\varepsilon\,x'_{\varepsilon,0}-\Lambda_0 x_{\varepsilon,0}\Big)\tau\,\Big]+$$

$$+\int_0^{\tau}U(\tau-\rho)\,(\tau-\rho)\,g_\varepsilon(\rho)\,d\rho\,. \tag{2.16}$$

После замены переменной $\rho=\ln\big((s+\varepsilon)/\varepsilon\big)$ в интеграле в правой части формулы (2.16) и возвращения к переменной t формула (2.16) принимает вид (2.1). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. При выполнении условий а) – г), е) функция вида (2.2) определена при любом $t\in(0,\,\infty)$ и ограничена при $t\to+0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\,\infty)$, то $x_0(t)$ ограничено на $(0,\,\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное фиксированное $t>0$. В силу сильной непрерывности полугруппы $U(t)$ и непрерывности $f(s)$ подынтегральная функция

$$g_0(s,\,t)=U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\ln\frac{t}{s}\,\frac{f(s)}{s} \tag{2.17}$$

непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом промежутке $[\Delta, t]$, Δ – произвольное сколь угодно малое положительное число. Покажем сходимость несобственного интеграла

$$x_0(t) = \int_0^t g_0(s,\, t)\, ds\,. \tag{2.18}$$

Используя оценку (2.9), неравенство (2.8) и соотношение (III.1.107), получаем

$$\| g_0(s,t) \| \le \left\| U\left(\ln\frac{t}{s}\right) \right\| \ln\frac{t}{s}\, \frac{\| f(s) \|}{s} \le$$

$$\le M_\delta\, t^{\omega_\delta} \| f(s) \| s^{-1-\omega_\delta} \ln\frac{t}{s} \underset{s \to +0}{\to} 0\,. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что

$$\lim_{s \to +0} g_0(s,\, t) = 0\,. \tag{2.20}$$

Используя соотношение (2.20), доопределим функцию $g_0(s,\, t)$ по непрерывности в нуле:

$$g_0(0,\, t) = \lim_{s \to +0} g_0(s,\, t) = 0\,. \tag{2.21}$$

Итак, значение $s = 0$ является устранимой точкой разрыва подынтегральной функции $g_0(s,t)$. Отсюда следует сходимость несобственного интеграла (2.18), т.е. существование функции (2.2).

В силу (2.19) справедлива оценка

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds \le M_\delta\, t^{\omega_\delta} N(t) \int_0^t s^{-1-\omega_\delta} \ln\frac{t}{s}\; ds\,, \tag{2.22}$$

где $N(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \| f(s) \|$. Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая справедливость предельного перехода (III.1.107) при $\rho = -\omega_\delta$, получаем

$$\int_0^t s^{-1-\omega_\delta} \ln\frac{t}{s}\; ds = \frac{1}{\omega_\delta^2}\, t^{-\omega_\delta}\,. \tag{2.23}$$

В силу (2.22), (2.23) имеем

$$\int_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds \le \frac{M_\delta}{\omega_\delta^2} N(t)\,. \tag{2.24}$$

Учитывая (2.24) и неравенство

$$\| x_0(t) \| = \left\| \int_0^t g_0(s,t)\, ds \right\| \le \int_0^t \| g_0(s,t) \|\, ds ,$$

получаем

$$\| x_0(t) \| \le \frac{M_\delta}{\omega_\delta^2} N(t) . \qquad (2.25)$$

Из оценки (2.25) видно, что функция $x_0(t)$ ограничена при $t \to +0$. Если функция $f(t)$ ограничена на $[0,\infty)$: $\sup\limits_{t\in[0,\infty)} N(t) = C < \infty$, то из неравенства (2.25) следует ограниченность $x_0(t)$ на $(0, \infty)$. Лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. При выполнении условий а) – ж) справедлив предельный переход (2.15), где функции $x_\varepsilon(t)$, $x_0(t)$ заданы формулами (2.1), (2.2).

Доказательство. Покажем вначале, что внеинтегральные члены в правой части формулы (2.1) сходятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Используя соотношения (2.4), (2.9), получаем

$$\left\| U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right\| \le M_\delta (t+\varepsilon)^{\omega_\delta} \varepsilon^{-\omega_\delta} \| x_{\varepsilon,0} \| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0 ,$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) x_{\varepsilon,0} \right] = 0 . \qquad (2.26)$$

В силу (2.6), (2.9), (III.1.117) имеем

$$\left\| U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \varepsilon x'_{\varepsilon,0} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right\| \le M_\delta (t+\varepsilon)^{\omega_\delta} \| x'_{\varepsilon,0} \| \varepsilon^{1-\omega_\delta} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} =$$

$$= M_\delta (t+\varepsilon)^{\omega_\delta} \left[\| x'_{\varepsilon,0} \| \varepsilon^{1-\omega_\delta} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right] \frac{\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0 . \qquad (2.27)$$

Из (2.27) видно, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[U\left(\ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \varepsilon x'_{\varepsilon,0} \ln \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} \right] = 0 . \qquad (2.28)$$

Используя соотношения (2.5), (2.9), (III.1.117), получаем

$$\left\| U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)(-\Lambda_0 x_{\varepsilon,0})\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right\| \le$$

$$\le M_\delta\,(t+\varepsilon)^{\omega_\delta}\left\|\Lambda_0 x_{\varepsilon,0}\right\|\varepsilon^{-\omega_\delta}\ \ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon} =$$

$$= M_\delta\,(t+\varepsilon)^{\omega_\delta}\left[\left\|\Lambda_0 x_{\varepsilon,0}\right\|\varepsilon^{-\omega_\delta}\ \ln\frac{1}{\varepsilon}\right]\frac{\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0,$$

следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)(-\Lambda_0 x_{\varepsilon,0})\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right] = 0\,. \qquad (2.29)$$

В силу (2.26), (2.28), (2.29) для справедливости предельного перехода (2.15) осталось показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t g_\varepsilon(s,t)\,ds = \int_0^t g_0(s,t)\,ds\,, \qquad (2.30)$$

где $g_0(s,t)$ задается формулой (2.17), $g_\varepsilon(s,t)$ имеет вид

$$g_\varepsilon(s,t) = U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,\frac{f(s)}{s+\varepsilon}\,.$$

Для справедливости равенства (2.30) достаточно показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \left\|g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)\right\|ds = 0\,. \qquad (2.31)$$

Запишем разность $g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t)$ в виде

$$g_\varepsilon(s,t)-g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon \left[h(\kappa,s,t)\right]'_\kappa\,d\kappa\,, \qquad (2.32)$$

где

$$h(\kappa,s,t) = U\left(\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,\frac{f(s)}{s+\kappa}\,.$$

В силу (2.10) справедливо включение $f(s)\in D(\Lambda_0)$. Тогда, используя соотношения (2.14), (III.1.123), получаем

$$\left[h(\kappa,s,t)\right]'_{\kappa} = -U\left(\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{t-s}{t+\kappa}\ \ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\ \frac{\Lambda_0 f(s)}{(s+\kappa)^2} -$$

$$-U\left(\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\frac{t-s}{t+\kappa}\ \frac{f(s)}{(s+\kappa)^2} - U\left(\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\ \frac{f(s)}{(s+\kappa)^2}\,. \quad (2.33)$$

Обозначая через W_1, W_2, W_3 слагаемые в правой части равенства (2.33), получаем в силу (2.32)

$$g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t) = \int_0^\varepsilon W_1\, d\kappa + \int_0^\varepsilon W_2\, d\kappa + \int_0^\varepsilon W_3\, d\kappa,$$

откуда следует неравенство

$$\|\, g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)\,\| \le \int_0^\varepsilon \|W_1\|\, d\kappa + \int_0^\varepsilon \|W_2\|\, d\kappa + \int_0^\varepsilon \|W_3\|\, d\kappa.$$

Тогда

$$\int_0^t \|\, g_\varepsilon(s,t) - g_0(s,t)\,\|\, ds \le \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_1\|\, d\kappa\right] ds +$$

$$+\int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_2\|\, d\kappa\right] ds + \int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_3\|\, d\kappa\right] ds\,. \quad (2.34)$$

Покажем, что каждое из слагаемых в правой части неравенства (2.34) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Положим $N_0(t) = \max\limits_{0 \le s \le t} \|\Lambda_0 f(s)\|$ (эта запись корректна в силу первого включения из (2.11)). Применяя оценку (2.9) и неравенство $(t+\kappa)^{-1} \le t^{-1}$, получаем

$$\|W_1\| \le P_1(t)\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\omega_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2}\ \ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,,$$

где $P_1(t) = M_\delta \dfrac{N_0(t)}{t}$. Тогда

$$\int_0^\varepsilon \|W_1\|\, d\kappa \le P_1(t)\, I_1(\varepsilon,s,t)\,, \quad (2.35)$$

где

$$I_1(\varepsilon,s,t)=\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\omega_\delta}\frac{t-s}{(s+\kappa)^2}\ln\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,d\kappa\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_1(\varepsilon,s,t)=\frac{1}{-1-\omega_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}-\left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t}{s}\right]+$$

$$+\frac{1}{-1-\omega_\delta}I_2(\varepsilon,s,t)\,, \tag{2.36}$$

где

$$I_2(\varepsilon,s,t)=\int_0^{t}\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{1+\omega_\delta}\frac{t-s}{(t+\kappa)(s+\kappa)}\,d\kappa\,.$$

Так как $0\le s\le t$, то $(t+\kappa)^{-1}\le(s+\kappa)^{-1}$, следовательно,

$$I_2(\varepsilon,s,t)\le I_3(\varepsilon,s,t)\,, \tag{2.37}$$

где

$$I_3(\varepsilon,s,t)=\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{1+\omega_\delta}\frac{t-s}{(s+\kappa)^2}\,d\kappa\,.$$

Будем считать за счет выбора числа $\delta>0$, что $\omega_\delta=\omega+\delta\ne-2$, т.е. $2+\omega_\delta\ne 0$. Тогда

$$I_3(\varepsilon,s,t)=-\int_0^{\varepsilon}\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{1+\omega_\delta}d\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)=$$

$$=\frac{1}{-2-\omega_\delta}\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{2+\omega_\delta}\Bigg|_0^{\varepsilon}=\frac{1}{-2-\omega_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\omega_\delta}-\left(\frac{t}{s}\right)^{2+\omega_\delta}\right]. \tag{2.38}$$

В силу соотношений (2.37), (2.38) получаем

$$I_2(\varepsilon,s,t)\le\frac{1}{-2-\omega_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\omega_\delta}-\left(\frac{t}{s}\right)^{2+\omega_\delta}\right]. \tag{2.39}$$

В силу (2.36), (2.39) имеем

$$I_1(\varepsilon,s,t)\le\frac{1}{-1-\omega_\delta}\left\{\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}-\left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t}{s}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-2-\omega_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\omega_\delta}-\left(\frac{t}{s}\right)^{2+\omega_\delta}\right]\right\}. \qquad (2.40)$$

В силу (2.35), (2.40) справедливо неравенство

$$\int_0^\varepsilon\|W_1\|\,d\kappa\le\frac{P_1(t)}{-1-\omega_\delta}\left\{\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}-\left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t}{s}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-2-\omega_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\omega_\delta}-\left(\frac{t}{s}\right)^{2+\omega_\delta}\right]\right\}.$$

Тогда

$$\int_0^t\left[\int_0^\varepsilon\|W_1\|\,d\kappa\right]ds\le$$

$$\le\frac{P_1(t)}{-1-\omega_\delta}\left\{\int_0^t\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}-\left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t}{s}\right]ds+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{-2-\omega_\delta}\int_0^t\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\omega_\delta}-\left(\frac{t}{s}\right)^{2+\omega_\delta}\right]ds\right\}. \qquad (2.41)$$

Найдем каждый из интегралов в правой части неравенства (2.41). Используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$I_4(\varepsilon,t)=\int_0^t\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,ds=(t+\varepsilon)^{1+\omega_\delta}\int_0^t(s+\varepsilon)^{-1-\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\,ds=$$

$$=(t+\varepsilon)^{1+\omega_\delta}\left[\frac{1}{\omega_\delta}\varepsilon^{-\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}+\frac{1}{\omega_\delta^2}\left[(t+\varepsilon)^{-\omega_\delta}-\varepsilon^{-\omega_\delta}\right]\right]\underset{\varepsilon\to0}{\to}\frac{t}{\omega_\delta^2}, \qquad (2.42)$$

ибо из условия (2.7) следует неравенство $-\omega_\delta>0$, в силу которого справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\varepsilon^{-\omega_\delta}\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right]=0.$$

Далее, используя формулу (2.23), получаем

$$I_5(t)=\int\limits_0^t\left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\ln\frac{t}{s}\,ds=t^{1+\omega_\delta}\int\limits_0^t s^{-1-\omega_\delta}\ln\frac{t}{s}\,ds=$$

$$=t^{1+\omega_\delta}\,\frac{1}{\omega_\delta^2}\,t^{-\omega_\delta}=\frac{t}{\omega_\delta^2}\,. \tag{2.43}$$

В силу (2.42), (2.43) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_4(\varepsilon,t)-I_5(t)\right]=0\,. \tag{2.44}$$

Далее,

$$I_6(\varepsilon,t)=\int\limits_0^t\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{2+\omega_\delta}ds=(t+\varepsilon)^{2+\omega_\delta}\int\limits_0^t(s+\varepsilon)^{-2-\omega_\delta}\,ds=$$

$$=\frac{(t+\varepsilon)^{2+\omega_\delta}}{-1-\omega_\delta}\left[(t+\varepsilon)^{-1-\omega_\delta}-\varepsilon^{-1-\omega_\delta}\right]\underset{\varepsilon\to 0}{\to}\frac{t}{-1-\omega_\delta}\,, \tag{2.45}$$

ибо $-1-\omega_\delta>0$ (см. (2.8)). Далее,

$$I_7(t)=\int\limits_0^t\left(\frac{t}{s}\right)^{2+\omega_\delta}ds=t^{2+\omega_\delta}\int\limits_0^t s^{-2-\omega_\delta}\,ds=\frac{t}{-1-\omega_\delta}\,. \tag{2.46}$$

В силу (2.45), (2.46) справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[I_6(\varepsilon,t)-I_7(t)\right]=0\,. \tag{2.47}$$

В силу (2.44), (2.47) правая часть неравенства (2.41) сходится к нулю при $\varepsilon\to 0$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\varepsilon\|W_1\|\,d\kappa\right]ds=0\,. \tag{2.48}$$

Докажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\varepsilon\|W_2\|\,d\kappa\right]ds=0\,. \tag{2.49}$$

Положим $N(t)=\max\limits_{0\le s\le t}\|\,f(s)\|$. Используя оценку (2.9) и неравенство $(t+\kappa)^{-1}\le t^{-1}$, получаем

$$\|W_2\| \le P_2(t)\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\omega_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2},$$

где $P_2(t) = M_\delta \dfrac{N(t)}{t}$. Тогда

$$\int_0^\varepsilon \|W_2\|\, d\kappa \le P_2(t)\, I_8(\varepsilon, s, t), \tag{2.50}$$

где

$$I_8(\varepsilon, s, t) = \int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\omega_\delta} \frac{t-s}{(s+\kappa)^2}\, d\kappa.$$

Имеем

$$I_8(\varepsilon, s, t) = -\int_0^\varepsilon \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right)^{\omega_\delta} d\left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa}\right) =$$

$$= \frac{1}{-1-\omega_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\right]. \tag{2.51}$$

В силу (2.50), (2.51)

$$\int_0^\varepsilon \|W_2\|\, d\kappa \le \frac{P_2(t)}{-1-\omega_\delta}\left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\right].$$

Тогда

$$\int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_2\|\, d\kappa\right] ds \le \frac{P_2(t)}{-1-\omega_\delta} \int_0^t \left[\left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta} - \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta}\right] ds. \tag{2.52}$$

Далее,

$$I_9(\varepsilon, t) = \int_0^t \left(\frac{t+\varepsilon}{s+\varepsilon}\right)^{1+\omega_\delta} ds =$$

$$= \frac{1}{-\omega_\delta}(t+\varepsilon)^{1+\omega_\delta}\left[(t+\varepsilon)^{-\omega_\delta} - \varepsilon^{-\omega_\delta}\right] \underset{\varepsilon \to 0}{\rightarrow} \frac{t}{-\omega_\delta}; \tag{2.53}$$

$$\mathrm{I}_{10}(t) = \int_0^t \left(\frac{t}{s}\right)^{1+\omega_\delta} ds = \frac{t}{-\omega_\delta}. \tag{2.54}$$

В силу (2.53), (2.54)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[I_9(\varepsilon, t) - I_{10}(t) \right] = 0\,. \tag{2.55}$$

В силу (2.55) правая часть неравенства (2.52) сходится к нулю при $\varepsilon \to 0$, откуда следует соотношение (2.49).

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t \left[\int_0^{\varepsilon} \left\| W_3 \right\| d\kappa \right] ds = 0\,. \tag{2.56}$$

Применяя оценку (2.9), получаем

$$\left\| W_3 \right\| \le P_3(t) \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{\omega_\delta} \frac{1}{(s+\kappa)^2}\, \ln \frac{t+\kappa}{s+\kappa}\,,$$

где $P_3(t) = M_\delta N(t)$. Или, в силу неравенства $\ln \tau \le \tau$,

$$\left\| W_3 \right\| \le P_3(t) \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{1+\omega_\delta} \frac{1}{(s+\kappa)^2}\,.$$

Тогда

$$\int_0^{\varepsilon} \left\| W_3 \right\| d\kappa \le P_3(t)\, I_{11}(\varepsilon, s, t)\,, \tag{2.57}$$

где

$$I_{11}(\varepsilon, s, t) = \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{t+\kappa}{s+\kappa} \right)^{1+\omega_\delta} \frac{d\kappa}{(s+\kappa)^2}\,.$$

В силу (2.7) справедливо неравенство $1+\omega_\delta < 0$, следовательно, $(t+\kappa)^{1+\omega_\delta} \le t^{1+\omega_\delta}$. Тогда

$$I_{11}(\varepsilon, s, t) \le t^{1+\omega_\delta} \int_0^{\varepsilon} (s+\kappa)^{-3-\omega_\delta}\, d\kappa =$$

$$= \frac{t^{1+\omega_\delta}}{-2-\omega_\delta} \left[(s+\varepsilon)^{-2-\omega_\delta} - s^{-2-\omega_\delta} \right]. \tag{2.58}$$

В силу (2.57), (2.58)

$$\int_0^{\varepsilon} \left\| W_3 \right\| d\kappa \le P_4(t) \left[(s+\varepsilon)^{-2-\omega_\delta} - s^{-2-\omega_\delta} \right],$$

где $P_4(t)=\dfrac{t^{1+\omega_\delta}}{-2-\omega_\delta}\,P_3(t)$. Тогда

$$\int_0^t \left[\int_0^\varepsilon \|W_3\|\,d\kappa\right] ds \le P_4(t) \int_0^t \left[(s+\varepsilon)^{-2-\omega_\delta} - s^{-2-\omega_\delta}\right] ds =$$

$$= \frac{P_4(t)}{-1-\omega_\delta}\left[(t+\varepsilon)^{-1-\omega_\delta} - \varepsilon^{-1-\omega_\delta} - t^{-1-\omega_\delta}\right] \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

откуда следует соотношение (2.56).

Из соотношений (2.48), (2.49), (2.56) и неравенства (2.34) вытекает (2.31), следовательно, справедлив предельный переход (2.30). Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. При выполнении условий а) – г), е) предельная функция $x_0(t)$, задаваемая формулой (2.2), является решением уравнения (1.1).

Доказательство. Исходя из формулы (2.18), найдем $x_0'(t)$. В силу (2.21) подынтегральная функция $g_0(s,t)$ непрерывна по (s,t). Покажем, что ее производная $\left[g_0(s,t)\right]_t'$ непрерывна по (s,t). В силу (2.10) справедливо включение $f(s)\in D(\Lambda_0)$. Следовательно, в силу (2.14)

$$\left[g_0(s,t)\right]_t' = \frac{1}{t}\,\Lambda_0 U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\ln\frac{t}{s}\,\frac{f(s)}{s} + \frac{1}{t}\,U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}$$

или

$$\left[g_0(s,t)\right]_t' = \frac{1}{t}\,\Lambda_0\, g_0(s,t) + \frac{1}{t}\,U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}. \qquad (2.59)$$

Используя оценку (2.9), получаем

$$\left\| U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\right\| \le \left\| U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\right\| \frac{\|f(s)\|}{s} \le$$

$$\le M_\delta\, t^{\omega_\delta}\, \|f(s)\|\, s^{-1-\omega_\delta} \underset{s\to +0}{\longrightarrow} 0, \qquad (2.60)$$

ибо $-1-\omega_\delta>0$ и $\|f(s)\| \underset{s\to +0}{\longrightarrow} \|f(0)\|$. Из (2.60) видно, что

$$\lim_{s\to +0}\left[U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\right] = 0. \qquad (2.61)$$

В силу соотношений (2.20), (2.61) и замкнутости оператора Λ_0 из формулы (2.59) следует, что

$$\lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t) \right]'_t = 0 . \qquad (2.62)$$

Используя (2.62), доопределим производную $\left[g_0(s,t) \right]'_t$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t) \right]'_t \Big|_{s=0} = \lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t) \right]'_t = 0 .$$

Таким образом, производная $[g_0(s,t)]'_t$ непрерывна по (s,t). Следовательно,

$$x'_0(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t) \right]'_t ds + g_0(t,t) .$$

Учитывая (2.13), получаем $g_0(t,t) = 0$. Тогда

$$x'_0(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t) \right]'_t ds . \qquad (2.63)$$

Найдем $x''_0(t)$. Для этого покажем, что производная $\left[g_0(s,t) \right]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t). Запишем $\left[g_0(s,t) \right]'_t$ в виде

$$\left[g_0(s,t) \right]'_t = \frac{1}{t} U\left(\ln\frac{t}{s} \right) \ln\frac{t}{s} \, \frac{\Lambda_0 f(s)}{s} + \frac{1}{t} U\left(\ln\frac{t}{s} \right) \frac{f(s)}{s} .$$

В силу (2.10) справедливо включение $\Lambda_0 f(s) \in D(\Lambda_0)$. Тогда, используя (2.14), получаем

$$\left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} = \frac{1}{t^2} \left[U\left(\ln\frac{t}{s} \right) \left(\ln\frac{t}{s} \right) (\Lambda_0^2 - \Lambda_0) \frac{f(s)}{s} + \right.$$

$$\left. + U\left(\ln\frac{t}{s} \right) (2\Lambda_0 - I) \frac{f(s)}{s} \right] . \qquad (2.64)$$

Применяя оценку (2.9), получаем

$$\left\| \left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} \right\| \le \frac{1}{t^2} \left[M_\delta \, t^{\omega_\delta} \left(s^{-1-\omega_\delta} \ln \frac{t}{s} \right) \left\| (\Lambda_0^2 - \Lambda_0) \, f(s) \right\| + \right.$$

$$\left. + M_\delta \, t^{\omega_\delta} s^{-1-\omega_\delta} \left\| (2\Lambda_0 - I) \, f(s) \right\| \right. . \qquad (2.65)$$

В силу соотношения (III.1.107) и неравенства (2.8) имеем

$$\lim_{s \to +0} \left(s^{-1-\omega_\delta} \ln \frac{t}{s} \right) = 0 \,. \qquad (2.66)$$

В силу включений (2.11) получаем

$$\lim_{s \to +0} \left\| (\Lambda_0^2 - \Lambda_0) \, f(s) \right\| = \left\| (\Lambda_0^2 - \Lambda_0) \, f(0) \right\| , \qquad (2.67)$$

$$\lim_{s \to +0} \left\| (2\Lambda_0 - I) \, f(s) \right\| = \left\| (2\Lambda_0 - I) \, f(0) \right\| . \qquad (2.68)$$

В силу (2.66) – (2.68) правая часть неравенства (2.65) сходится к нулю при $s \to +0$, следовательно,

$$\lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} = 0 \,. \qquad (2.69)$$

Используя соотношение (2.69), доопределим производную $\left[g_0(s,t) \right]''_{t^2}$ по непрерывности в нуле:

$$\left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} \bigg|_{s=0} = \lim_{s \to +0} \left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} = 0 \,.$$

Таким образом, производная $\left[g_0(s,t) \right]''_{t^2}$ непрерывна по (s,t). Следовательно, в силу (2.63)

$$x_0''(t) = \int_0^t \left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} \, ds + \left[g_0(s,t) \right]'_t \bigg|_{s=t} . \qquad (2.70)$$

Запишем формулу (2.64) в виде

$$\left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} = \frac{1}{t^2} \left[(\Lambda_0^2 - \Lambda_0) \, g_0(s,t) + (2\Lambda_0 - I) U \left(\ln \frac{t}{s} \right) \frac{f(s)}{s} \right] .$$

Тогда

$$\int_0^t \left[g_0(s,t) \right]''_{t^2} \, ds = \frac{1}{t^2} \left[(\Lambda_0^2 - \Lambda_0) \, x_0(t) + (2\Lambda_0 - I) \, I(t) \right] , \qquad (2.71)$$

где

$$I(t)=\int_0^t U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{f(s)}{s}\,ds \tag{2.72}$$

(сходимость несобственного интеграла (2.72) следует из соотношения (2.61)). В силу (2.59)

$$\left[g_0(s,t)\right]'_t\Big|_{s=t}=\frac{f(t)}{t^2}\,. \tag{2.73}$$

В силу (2.70), (2.71), (2.73) получаем

$$x_0''(t)=\frac{1}{t^2}\left[f(t)+(\Lambda_0^2-\Lambda_0)\,x_0(t)+(2\Lambda_0-I)\,I(t)\right]. \tag{2.74}$$

Из записи производной $x_0''(t)$ в виде

$$x_0''(t)=\frac{1}{t^2}\left[f(t)+\int_0^t U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\ln\frac{t}{s}\,\frac{(\Lambda_0^2-\Lambda_0)\,f(s)}{s}\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^t U\left(\ln\frac{t}{s}\right)\frac{(2\Lambda_0-I)\,f(s)}{s}\,ds\right]$$

следует в силу (2.11) включение $x_0''(t)\in C\big((0,\infty);E\big)$, а это означает, что $x_0(t)\in C^2\big((0,\infty);E\big)$.

В силу (2.59), (2.63) имеем

$$x_0'(t)=\frac{1}{t}\left[\Lambda_0\,x_0(t)+I(t)\right]. \tag{2.75}$$

Используя формулы (2.74), (2.75), получаем

$$t^2x_0''(t)+t\,A\,x_0'(t)+Bx_0(t)=$$

$$=f(t)+(\Lambda_0^2-\Lambda_0+A\Lambda_0+B)\,x_0(t)+(2\Lambda_0-I+A)\,I(t)=f(t)\,,$$

в силу того, что Λ_0 – корень характеристического уравнения $\Lambda^2+(A-I)\Lambda+B=O$ и $2\Lambda_0-I+A=O$ (по условию $B=(1/4)\,(A-I)^2$). Лемма 2.4 доказана.

Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Решение уравнения Эйлера в терминах косинус и синус оператор-функций

Пусть

1) $ABx = BAx$, $x \in D(AB) \cap D(BA)$;

2) оператор $\Lambda_0 = (1/2)(I - A)$ является генератором полугруппы $U(t)$ класса C_0 и

$$BU(t)\,x = U(t)Bx\,,\ x \in D(A^2) \cap D(B)\,;$$

3) операторный дискриминант $\Delta_1 = \Lambda_0^2 - B$ с оператором Λ_0, удовлетворяющим условию 2), является производящим оператором сильно непрерывной косинус-оператор-функции $C(t)$ и для любого $x \in D(A)$

$$AC(t)x = C(t)A\,x\,,$$

$$C(t)U(t)x = U(t)C(t)x\,,$$

$$S(t)U(t)x = U(t)S(t)x\,,$$

где $S(t)$ – синус-оператор-функция, ассоциированная с $C(t)$:

$$S(t)\,x = \int_0^t C(\tau)\,x\,d\tau\,,\ x \in E\,;$$

4) $f(t) \in D(\Delta_1) = D(A^2) \cap D(B)$ при каждом $t \in [\,0\,,\infty)$ и $A\,f(t)$, $A^2 f(t)$, $B\,f(t) \in C\big([\,0,\infty);\,E\,\big)$;

5) $x_{\varepsilon,0} \in D_0$, где $D_0 = \{\,x \in D(A^3) \cap D(AB) \cap D(BA)\,|\,Bx \in E_1\,\}$,

$$E_1 = \{\,x \in E\,|\,C(t)\,x \in C^1(\mathbb{R}\,;E)\,\}\,;\ x'_{\varepsilon,0} \in D_1\,,\ \text{где}$$

$$D_1 = \{\,x \in D(A^2) \cap D(B)\,|\ \ Bx \in E_1\,\}\,.$$

Заменой переменной $t = \varepsilon\,e^s - \varepsilon$ задача (1.2), (1.3) сводится к задаче (1.25), (1.26) с $\tau = s$, т.е. к задаче

$$u''_\varepsilon(s) + (A - I)\,u'_\varepsilon(s) + B\,u_\varepsilon(s) = g_\varepsilon(s)\,,\ 0 \le s < \infty\,, \tag{3.1}$$

$$u_\varepsilon(0) = x_{\varepsilon,0}\,,\ u'_\varepsilon(0) = \varepsilon\,x'_{\varepsilon,0}\,, \tag{3.2}$$

где $u_\varepsilon(s) = x_\varepsilon\left(\varepsilon\,e^s - \varepsilon\right)$, $g_\varepsilon(s) = f\left(\varepsilon\,e^s - \varepsilon\right)$.

Задача (3.1), (3.2) – это задача вида (II.1.1), (II.1.2). В силу условий 1) – 5) выполняются условия теоремы II.2.1. В силу формулы (II.2.9) задача (3.1), (3.2) имеет решение

$$u_\varepsilon(s) = U(s)\Big[C(s)x_{\varepsilon,0} + S(s)\big(\varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_0 x_{\varepsilon,0}\big)\Big] +$$

$$+\int_0^s S(s-\rho)U(s-\rho)\, g_\varepsilon(\rho)\,d\rho\ . \qquad (3.3)$$

После замены переменной $\rho = \ln((\tau+\varepsilon)/\varepsilon)$ в интеграле в правой части формулы (3.3) и возвращения к прежней переменной t формула (3.3) принимает вид

$$x_\varepsilon(t) = U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left[C\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)x_{\varepsilon,0} + S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\big(\varepsilon x'_{\varepsilon,0} - \Lambda_0 x_{\varepsilon,0}\big)\right] +$$

$$+\int_0^t S\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)U\left(\ln\frac{t+\varepsilon}{\tau+\varepsilon}\right)\frac{f(\tau)}{\tau+\varepsilon}\,d\tau\,. \qquad (3.4)$$

Итак, при выполнении условий 1) – 5) задача (1.2), (1.3) имеет решение вида (3.4).

При условиях, обеспечивающих сходимость несобственного интеграла

$$x_0(t) = \int_0^t S\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)U\left(\ln\frac{t}{\tau}\right)\frac{f(\tau)}{\tau}\,d\tau\,,$$

и условиях на начальные значения $x_{\varepsilon,0}$, $x'_{\varepsilon,0}$, обеспечивающих сходимость внеинтегральных членов в правой части формулы (3.4) к нулю при $\varepsilon \to 0$, справедлив предельный переход

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = x_0(t)\,,\quad t\in(0,\infty)\,,$$

и предельная функция $x_0(t)$ является ограниченным при $t\to +0$ решением уравнения (1.1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с малым положительным параметром ε при производных неизвестной функции, порядок которых при $\varepsilon = 0$ не понижается, но уравнения приобретают особенности в виде сингулярностей, используются в различных прикладных вопросах, в частности, в ряде задач гидродинамики. В связи с этим приходится изучать поведение решений таких уравнений при $\varepsilon \to 0$.

Предложенный в данной книге конструктивный метод получения ограниченных в точке вырождения решений вырождающихся линейных дифференциальных уравнений можно применять при исследовании вырождающихся нелинейных дифференциальных уравнений, а также вырождающихся уравнений иного типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

2. Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Сер. Матем. анализ. – ВИНИТИ, 1990. – Т. 28. – С. 87 – 202.

3. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.

4. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. – М.: Физматлит, 1995. – 176 с.

5. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

6. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.

7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

8. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

9. Крейн С.Г., Фомин В.И. Малые возмущения сингулярных дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // ДАН СССР. – 1990. – Т. 314, № 1. – С. 77 – 79.

10. Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений. – М.: Наука, 1988. – 312 с.

11. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.

12. Фомин В.И. Сингулярное дифференциальное уравнение с малым параметром в случае переменного ограниченного операторного коэффициента // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 8. – С. 1350 – 1354.

13. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярного дифференциального уравнения с постоянным неограниченным операторным коэф-

фициентом // Дифференциальные уравнения. – 1989. – Т. 25, № 9. – С. 1629 – 1630.

14. Фомин В.И. Малые возмущения сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1989. – 15 с.

15. Фомин В.И. Метод малых регулярных возмущений при исследовании сингулярных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, № 12. – С. 1712.

16. Фомин В.И. О малом стабилизирующем возмущении сингулярного дифференциального уравнения с постоянным оператором и вырождающимся коэффициентом общего вида // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 183 – 190.

17. Фомин В.И. О слабо вырождающемся линейном дифференциальном уравнении первого порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 10. – С. 1433 – 1435.

18. Фомин В.И. Малые стабилизирующие возмущения векторного уравнения Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1568 – 1569.

19. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1140–1141.

20. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 8. – С. 1130 – 1133.

21. Фомин В.И. Об уравнении Эйлера второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 483 – 488.

22. Фомин В.И. Об одном семействе решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 3. – С. 427 – 428.

23. Фомин В.И. О решении задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве в

терминах косинус и синус оператор-функций // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и технич. науки. – 2010. – Т. 15, вып. 2. – С. 519 – 525.

24. Фомин В.И. О линейном дифференциальном уравнении второго порядка в банаховом пространстве в случае негативного операторного дискриминанта // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и технич. науки. – 2008. – Т. 13, вып. 1. – С. 38 – 42.

25. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. 2-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2002. – 880 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

ФОМИН Василий Ильич

ВЕКТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

ISBN 978-5-4442-0022-3

9 785444 200223

Сдано в набор 05.07.2012 г.
Подписано в печать 12.12.2012 г. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,90. Уч.-изд. л. 8,5
Тираж 400 экз. Заказ № 625

ООО «Издательский дом «Спектр»,
119048, Москва, ул. Усачева, д. 35, стр. 1
Http://www.idspektr.ru. E-mail: idspektr@rambler.ru

Подготовлено к печати и отпечатано в Издательско-полиграфическом центре ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14

По вопросам приобретения книги обращаться
по телефону 8(4752)638108
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru