

Министерство образования и науки Российской Федерации  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»**

**В.Е. БУЛАНОВ, А.Н. ГУЗАЧЁВ**

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Часть 1

Утверждено Учёным советом университета  
в качестве учебного пособия



---

Тамбов

◆ Издательство ФГБОУ ВПО ТГТУ ◆

2012

ББК Н112я73-5  
УДК 624.04(075)  
Б907

Рецензенты:  
Доктор технических наук,  
профессор ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»  
*А.А. Арзамасцев*

Доктор технических наук,  
профессор ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
*П.В. Монастырёв*

**Буланов, В.Е.**  
Б907 Строительная механика : в 2 ч. : учебное пособие / В.Е. Буланов, А.Н. Гузачёв. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – Ч. 1. – 80 с. – ISBN 978-5-8265-1168-8.

Даны общие положения по изучению тем первой части курса «Строительная механика», вопросы для самопроверки, задания для контрольных работ, примеры их выполнения; предложены тесты, список рекомендуемой литературы.

Предназначено для студентов заочного отделения специальностей 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270105 «Городское строительство и хозяйство».

ББК Н112я73-5  
УДК 624.04(075)

**ISBN 978-5-8265-1168-8**

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2012

## ВВЕДЕНИЕ

Для студентов строительных специальностей строительная механика является одной из базовых дисциплин. Задача строительной механики заключается в переходе от общих разделов физики, теоретической механики, теории упругости к непосредственному проектированию сооружений.

Многообразие и сложность задач, стоящих перед строительной механикой, приводят к невозможности её изучения в рамках одного курса и вызывают деление его на ряд связанных между собой дисциплин: сопротивление материалов, прикладная теория упругости и пластичности, строительная механика самолёта, строительная механика корабля, строительная механика стержневых систем и др. Цель строительной механики стержневых систем, называемой обычно просто строительной механикой, но уже в узком смысле слова, – вооружить будущего инженера знаниями, необходимыми для проектирования сооружений промышленного и гражданского строительства.

Обеспечение прочности и надёжности сооружений в сочетании с высокой экономичностью возможны только при высокой квалификации инженера и овладении им современными методами строительной механики, получившими большое развитие за последние годы в связи с внедрением в практику проектирования электронных вычислительных машин.

Умение решать задачи строительной механики – это есть умение проектировать сооружения, умение оценивать их прочность и надёжность.

В программе курса строительной механики указано, что не все вопросы, включённые в неё, являются в равной мере необходимыми для различных строительных специальностей, и количества часов, отводимого учебными планами, недостаточно для изложения материала в полном объёме. Поэтому кафедрам дано право при составлении рабочих программ курса определять глубину проработки тех или иных тем и разделов с учётом количества часов и специфики данной специальности.

## ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К изучению строительной механики следует приступать после усвоения дифференциального и интегрального исчисления, основ матричной алгебры, теоретической механики и сопротивления материалов. Из курса сопротивления материалов студенту известны общие положения оценки прочности, жёсткости и устойчивости применительно к простым системам (балкам, брусам, стержням), употребляемым часто как самостоятельные сооружения или входящим в состав сложных конструкций. Строительная механика изучает сооружения, состоящие из большого числа элементов, на основе общих принципов разрабатывает и совершенствует методы точного и приближённого расчёта сложных систем (балок, арок, ферм, рам, пластинок, оболочек, пространственных конструкций).

Главной формой изучения курса строительной механики является самостоятельная работа с учебниками и учебными пособиями. Умение самостоятельно работать с книгой необходимо не только при подготовке, но и в практической деятельности инженера.

В методических указаниях к каждой задаче даны ссылки на учебную литературу, необходимую для изучения данной темы.

В качестве основного рекомендуется учебник [8]. При его отсутствии могут быть использованы учебники [6], [14] и другие, приведённые в списке рекомендованной литературы. В строительной механике большое значение имеет умение решать конкретные задачи. Поэтому в дополнение к учебнику для приобретения навыков в решении задач следует использовать пособия [1], [7], [11], [12], [14], [15].

Изучение строительной механики следует начинать с проработки теории по учебнику, причём на первом этапе рекомендуется внимательно прочитать изучаемый раздел, обратив особое внимание на общий подход к изучаемому вопросу и принципы решения избираемого класса задач. При этом сначала не обязательно запоминание всех формул и выводов. Когда будет усвоена общая методика, следует прочитать материал снова, составить краткий конспект и сделать необходимые выводы.

После этого следует перейти к разбору решения задач, используя рекомендованные пособия, и лишь затем приступить к самостоятельному решению задач и выполнению необходимых контрольных работ. Без изучения теории приступать к самостоятельному решению задач невозможно, так как только знание теории позволяет решать любые задачи во всём их многообразии.

В случае, когда студент имеет возможность регулярно посещать лекции, то это не освобождает его от самостоятельной работы с учебником и пособиями, так как, во-первых, лекции читаются только по основным разделам, а, во-вторых, посещение лекций даёт возможность получить лишь общее знакомство с курсом. Глубокое усвоение любого предмета достигается только в процессе самостоятельной работы.

## Раздел I

### Тема 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Основные элементы плоских сооружений: стержни и пластинки. *Стержнем* называют элемент, у которого размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной. *Пластинкой* называют элемент, ограниченный двумя плоскостями, один размер (толщина) которого мал по сравнению с двумя другими. *Оболочка* – конструкция, ограниченная двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами. Другими словами, оболочка – это искривлённая пластинка.

Под *идеальным шарниром* будем понимать узловое соединение стержней, в котором не возникает сил трения, и усилия на стержни передаются строго через центр шарнира.

*Расчётной схемой* называют идеализированную, упрощённую схему действительного сооружения, но в которой отражаются его основные свойства. *Стержневым сооружением* называется система соединённых между собой стержней, которая неподвижно прикреплена к земле и предназначена для восприятия заданной нагрузки.

Строительная механика использует те же гипотезы, что и сопротивление материалов: 1) об идеальной упругости тела; 2) о непрерывности строения материи; 3) об изотропности материала; 4) об однородности материала; 5) гипотеза Бернулли о плоских сечениях бруса при деформации; 6) о плоскостном законе распределения нормальных напряжений в брус; 7) о независимости действия сил при малых деформациях; 8) о пропорциональности напряжений и деформаций (закон Гука).

*Литература:* [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

#### Вопросы для самопроверки

1. Что такое расчётная схема?
2. Какие гипотезы используются в курсе строительной механики?

### Тема 2. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Кинематический анализ – это исследование расчётной схемы сооружения (системы), выполняемое до начала расчёта с целью определения кинематического качества системы (геометрической неизменяемости, мгновенной изменяемости или геометрической изменяемости), а в случае геометрической неизменяемости системы – также для выявления её статической определимости или неопределимости.

Кинематический анализ позволяет своевременно обнаружить системы, расчёт которых либо вообще невозможен методами механики деформируемых тел – геометрически изменяемые системы, либо может выполняться с использованием особых подходов – системы мгновенно изменяемые. Кроме того, в результате кинематического анализа выясняется, как именно предстоит рассчитывать систему – достаточно ли для определения усилий в системе одних только уравнений статики (в случае статически определимой системы) или необходимо рассматривать все три стороны задачи расчёта деформируемой системы – статическую, геометрическую и физическую (если система статически неопределимая). Сооружения должны быть *геометрически неизменяемы*, т.е. сохранять геометрическую форму, заданную при возведении. Геометрически неизменяемые сооружения могут менять форму только в результате деформаций стержней.

*Степень свободы* системы называется число независимых геометрических перемещений, определяющих её положение. Степень свободы  $W$  определяется по формуле

$$W = 3D - 2Ш - C_0, \quad (1)$$

где  $D$  – число дисков,  $Ш$  – число простых шарниров;  $C_0$  – число опорных стержней. Если  $W > 0$  – система подвижна, если  $W < 0$  – система может быть неизменяемой и неподвижной с лишними связями, если  $W = 0$  – система может быть неизменяемой и неподвижной с необходимым числом связей. Формула (1) является необходимым, но недостаточным условием и должна быть дополнена анализом геометрической структуры системы.

При кинематическом анализе сооружений используется ряд понятий.

*Плоская кинематическая цепь* – подвижное соединение нескольких дисков, которые перемещаются параллельно одной плоскости.

*Кинематическая пара* – кинематическая цепь из двух дисков.

*Низшая кинематическая пара* – кинематическая пара, относительное движение обоих дисков которой является наиболее связанным, а траектории всех точек – совершенно однообразными.

*Изменяемость системы*  $V$  есть степень свободы уменьшенная на 3, т.е.

$$V = W - 3. \quad (2)$$

В основе образования геометрически неизменяемых систем лежит шарнирный треугольник. Соединяя диски по правилу треугольника, можно получить сложные геометрически неизменяемые фигуры.

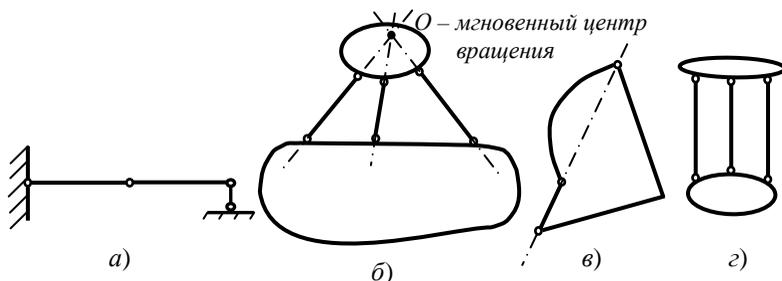


**Рис. 1. Низшие кинематические пары:**

*a* – простой шарнир; *б* – ползун

В геометрически неизменяемой системе каждый следующий узел должен крепиться к предыдущему двумя стержнями.

*Мгновенно изменяемые системы* (рис. 2) имеют малую подвижность и не пригодны в качестве сооружений.



**Рис. 2. Мгновенно изменяемые системы**

При проектировании сооружений следует придерживаться следующих правил:

а) при прикреплении нового узла двумя стержнями осевые линии стержней не должны располагаться на одной прямой, т.е. три шарнира не должны находиться на одной прямой (рис. 2, а);

б) стержни, соединяющие диски, не должны пересекаться в одной точке (рис. 2, б);

в) два диска можно соединить шарниром и стержнем, причём стержень не должен пересекать шарнир (рис. 2, в);

г) стержни, соединяющие диски, не должны быть параллельными (рис. 2, з).

Перемещение *мгновенного центра вращения* (полюса) и его скорость равны нулю.

*Литература:* [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

### **Вопросы для самопроверки**

1. Что такое кинематический анализ? Его назначение? Основные понятия ?

2. Каковы признаки мгновенно изменяемых систем?

3. Дайте определение диска. Что может быть диском? Что такое диск «земля» и какими свойствами он наделяется?

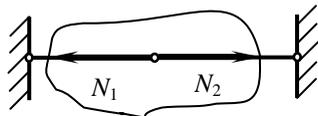
### Тема 3. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СООРУЖЕНИЙ

При расчёте сооружений необходимо определить:

1. Реакции между дисками, в том числе и опорные реакции.
2. Внутренние усилия в любом сечении каждого диска (изгибающие моменты, нормальные и поперечные силы, крутящие моменты).
3. Поперечные сечения всех дисков.
4. Деформации во всех точках сооружения.

По характеру расчёта сооружения разделяются на статически определимые и статически неопределимые.

*Статически определимыми сооружениями* называются сооружения, в которых все внутренние усилия можно определить при помощи уравнений статики. Осадки опор, размеры поперечных сечений, физические свойства материалов, температурные воздействия в уравнения равновесия не входят и поэтому на величину внутренних усилий не влияют. При отсутствии внешней нагрузки внутренние усилия в статически определимых сооружениях равны нулю. Если этого нет, то система мгновенно изменяема (рис. 3).



$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0;$$
$$\Sigma x = N_1 - N_2 = 0; N_1 = N_2 = ?$$

Рис. 3.

#### Многопролётные статически определимые балки

*Многопролётные статически определимые балки* (рис. 4, а, в) представляют собой систему простых балок. Для упрощения расчёта многопролётные балки представляют в виде поэтажных схем (рис. 4, б, г).

*Присоединённой балкой* называется балка, которую можно удалить без нарушения неизменяемости оставшейся части. Присоединённую систему можно рассчитывать независимо от оставшейся части, причём опорные реакции присоединённой балки будут служить внешними силами для оставшейся.

Используются те же правила знаков, что и в сопротивлении материалов.

Знак изгибающего момента устанавливается по знаку кривизны изогнутого бруса и зависит от выбранного направления осей внешней неподвижной системы координат  $z$ . Если ось  $y$  направить в обратную сторону, то знак кривизны, а следовательно, и момента изменится на обратный. Этим правилом знаков пользуются при определении перемещений бруса и при определении формы изогнутой оси. При построении эпюр изгибающих моментов используется другое правило знаков (правило относительных знаков), при котором знак момента не зависит от направления внешних

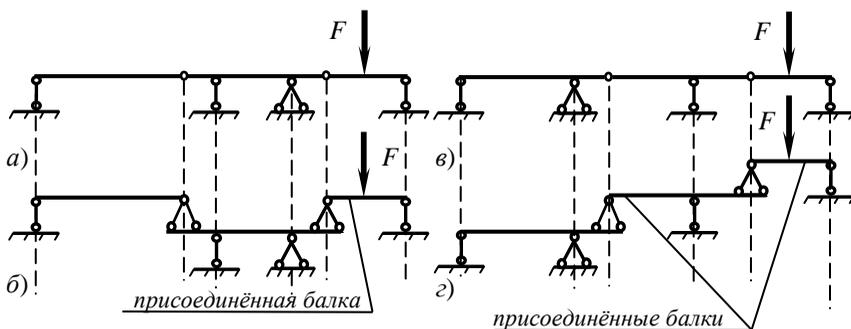


Рис. 4

осей. Эпюра моментов строится на оси бруса, и ордината момента откладывается в сторону выпуклости упругой линии, т.е., как говорят, эпюра моментов строится на растянутом волокне. Этому правилу можно дать и другое толкование. Если сумма моментов сил, действующих на *левую часть* бруса, даёт равнодействующий момент, направленный *по часовой стрелке*, то ордината изгибающего момента в сечении откладывается вниз. Если же равнодействующий внешний момент *слева* от сечения направлен *против* часовой стрелки, ордината изгибающего момента откладывается вверх.

Для сил, лежащих справа от сечения, имеет место обратная зависимость: в случае равнодействующего момента, направленного по часовой стрелке, – вверх, а в случае равнодействующего момента, направленного против часовой стрелки, – вниз.

Определим поперечные силы  $Q$ .

Во всех случаях поперечная сила для прямого бруса равна сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения. Отсюда устанавливается правило знаков для поперечной силы. Если сумма внешних сил, лежащих по левую сторону от сечения, даёт равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила в сечении считается *положительной*, вниз – *отрицательной*. Справа вниз – знак «плюс», справа вверх – знак «минус». Это правило иллюстрируется схемой, показанной на рис. 5.

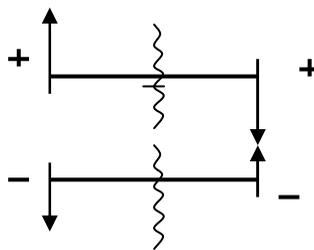


Рис. 5

Между эпюрами изгибающих моментов и эпюрами поперечных сил существует определённая закономерность.

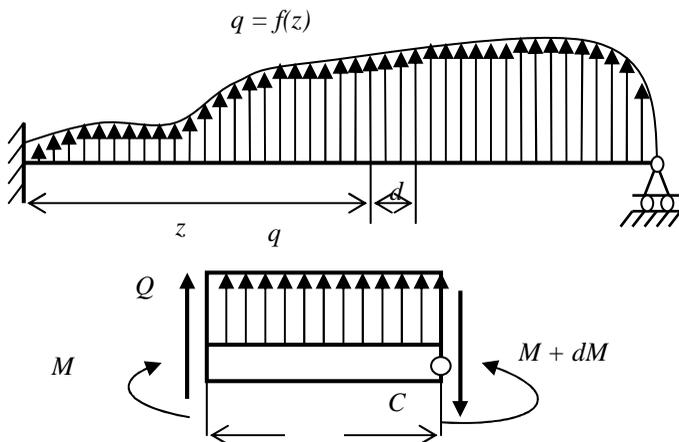


Рис. 6. Дифференциальные зависимости

Поперечная сила  $Q$  представляет собой производную от изгибающего момента  $M$  по длине бруса. Докажем, что эта закономерность действительно имеет место.

Пусть брус закреплён произвольным образом и нагружен в общем случае распределённой нагрузкой интенсивности  $q = f(z)$ . Принятое направление для  $q$  будем считать положительным (рис. 6).

Выделим из бруса элемент длиной  $dz$  и в произведённых сечениях приложим моменты  $M$  и  $M + dM$ , а также поперечные силы  $Q$  и  $Q + dQ$ . Направления для этих силовых факторов приняты положительными в соответствии с обусловленным выше правилом знаков. В пределах малого отрезка  $dz$  нагрузку  $q$  можно считать распределённой равномерно.

Приравняем нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось и сумму моментов относительно поперечной оси  $C$  (рис. 6)

$$Q + qdz - Q - dQ = 0;$$

$$M + Qdz + qdz \frac{dz}{2} - M - dM = 0.$$

Производя упрощения и отбрасывая величину высшего порядка малости, получим

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = Q.$$

Таким образом, поперечная сила действительно представляет собой производную от изгибающего момента по длине бруса. Производная же от поперечной силы даёт интенсивность внешней распределённой нагрузки  $q$ .

Из соотношений можно сделать некоторые общие выводы о характере эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для прямого бруса.

Если брус нагружен равномерно распределённой нагрузкой интенсивности  $q = \text{const}$ , очевидно, функция  $Q$  будет линейной, а  $M$  – квадратичной.

Если брус нагружен сосредоточенными силами или моментами, то в промежутках между точками их приложения интенсивность  $q = 0$ . Следовательно,  $Q = \text{const}$ , а  $M$  является линейной функцией  $z$ . В точках приложения сосредоточенных сил эпюра  $Q$  претерпевает скачок на величину внешней силы, а в эпюре  $M$  возникает соответствующий излом (разрыв в производной).

*Литература:* [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

### Вопросы для самопроверки

1. Как определяются поперечные силы и моменты в разрезных балках?
2. Что такое «поэтажная схема» и как она строится?

### Тема 4. УЧЁТ ПОДВИЖНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Изучение подвижной нагрузки начнём с *единичного груза*  $P = 1$ , который медленно перемещается по сооружению без динамического воздействия, сохраняя своё направление.

График, изображающий закон изменения какого-либо одного фактора (изгибающего момента, поперечной силы, опорной реакции) для одного определённого сечения в зависимости от положения единичного груза, который без толчков и ускорений медленно движется по сооружению, называется *линией влияния* этого фактора.

Построим линию влияния опорной реакции  $R_A$  балки, изображённой на рис. 7, а. Запишем:

$$-a \leq x \leq l + b; \sum M_B = R_A l - P(l - x) = 0, \text{ откуда } R_A = (l - x)/l,$$

поэтому при  $x = 0$  имеем  $R_A = 1$ , при  $x = l$  находим  $R_A = 0$ ; при  $x = -a$  определяем  $R_A = (l + a)/l$  и, наконец, при  $x = l + b$  определяем  $R_A = -b/l$ . Строим линию влияния опорной реакции  $R_A$  (рис. 7, б).

Аналогичные вычисления проводим для линии влияния опорной реакции  $R_B$ :

$$\sum M_A = R_B l - Px = 0, \text{ откуда } R_B = x/l \text{ (рис. 7, в).}$$

Построим линию влияния изгибающего момента  $M_1$  в сечении 1. Пусть груз  $P = 1$  переместился влево от сечения 1. Отбросим мысленно левую часть балки и рассмотрим оставшуюся правую часть:  $M_1 = R_B(l - c)$ , т.е. линия влияния  $M_1$  может быть получена из линии влияния опорной

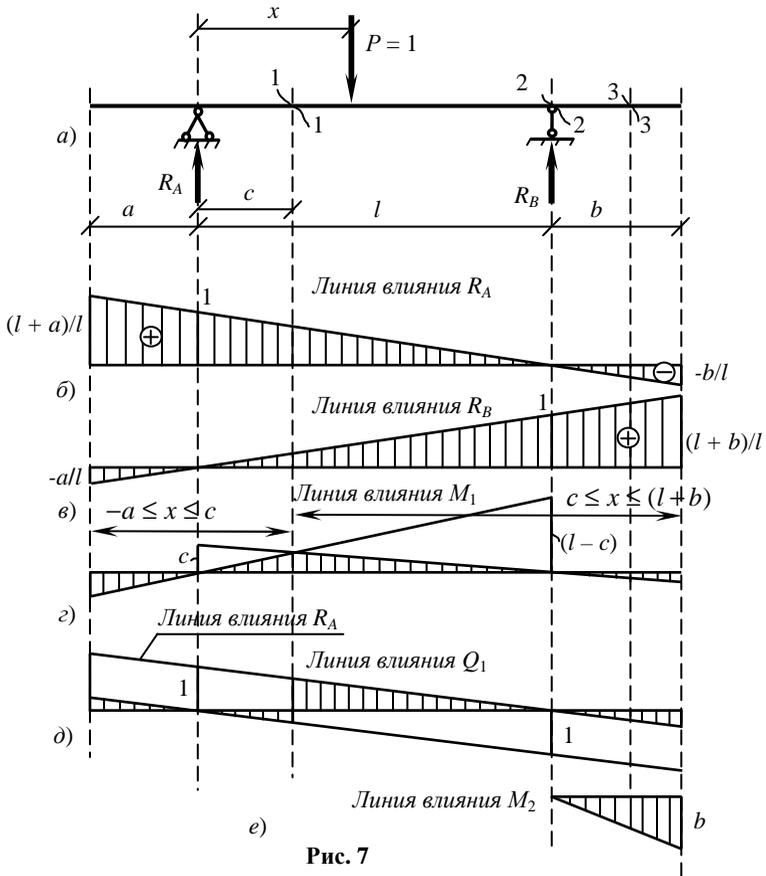


Рис. 7

реакции  $R_B$  (рис. 7, в) путём умножения её на величину  $(l - c)$ . Таким образом, мы построили линию влияния изгибающего момента  $M_1$  в сечении 1, когда груз  $P = 1$  перемещается по левой части балки ( $-a \leq x \leq c$ ).

Предположим теперь, что груз переместился вправо от сечения 1, тогда, рассматривая только левую часть балки, имеем  $M_1 = R_A c$ , т.е. линия влияния  $M_1$  может быть получена из линии влияния опорной реакции  $R_A$  (рис. 7, б) путём умножения её на величину  $c$ . Таким образом, мы построили линию влияния изгибающего момента в сечении 1, когда груз  $P = 1$  перемещается на участке  $- \leq x \leq l + b$ .

Построим линию влияния поперечной силы  $Q_1$  в сечении 1. Пусть груз находится слева от сечения 1, тогда из рассмотрения правой части находим:  $Q_1 = -R_B$ , т.е. линия влияния  $Q_1$  есть линия влияния опорной ре-

акции  $R_B$ , взятая с противоположным знаком. Если груз  $P = 1$  находится справа от сечения 1, тогда из рассмотрения левой части получаем:  $Q_1 = R_A$ , что действительно для правой части балки (рис. 7, д).

Эпюры показывают изменение внутренних силовых факторов по длине в зависимости от заданной нагрузки. По эпюрам определяют положение опасного сечения. Линия влияния определяет *опасное положение нагрузки* для данного сечения.

Линии влияния многопролетных статически определимых балок строятся на основании линий влияния однопролетных балок с помощью поэтажной схемы.

*Литература:* [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

### Вопросы для самопроверки

1. Понятие о линиях влияния.
2. Статический метод построения линий влияния реакций опор, поперечных сил, изгибающих моментов в простых балках.

## Тема 5. ЗАГРУЗКА ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

### Действие вертикальных сосредоточенных сил

Пусть для однопролетной балки построена линия влияния изгибающего момента в сечении 1 (рис. 8). Тогда для определения изгибающего момента в сечении 1 от действия трёх сосредоточенных сил необходимо записать:  $M_1 = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3$ .

В общем виде влияние вертикальных сосредоточенных сил можно учесть при помощи формулы

$$s_k = \sum_1^n F_i y_i, \quad (1)$$

где  $s_k$  – может быть или изгибающим моментом, или поперечной силой, или опорной реакцией;  $n$  – число действующих сосредоточенных сил.

### Действие сплошной неравномерно распределённой нагрузки

Пусть на рис. 9 изображена линия влияния какого либо фактора.

Тогда

$$ds_k = q_x dx y_x, \quad s_k = \int_b^c q_x y_x dx. \quad (2)$$

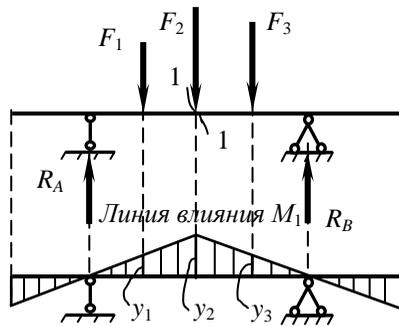
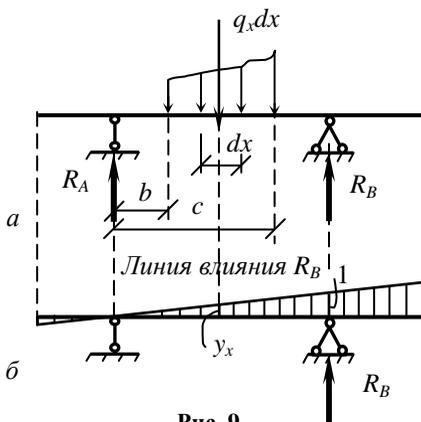


Рис. 8



Если  $q_x = \text{const} = q$ , то из формулы (2) получаем

$$s_k = q \int_b^c y_x dx = qA(b, c),$$

где  $A(b, c)$  – площадь участка линии влияния, вдоль которого распределена нагрузка.

### Действие сосредоточенного момента

Заменим сосредоточенный момент  $m$  парой сил

$$m = Fa,$$

тогда по формуле (1) и согласно рис. 10 имеем:

$$s_1 = Fy_1 - Fy_2 = F(y_1 - y_2) = Fa(y_1 - y_2)/a = Fa \operatorname{tg} \alpha = m \operatorname{tg} \alpha.$$

Литература: [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

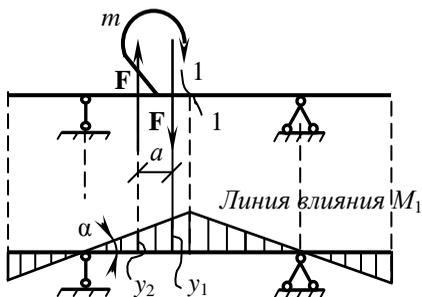


Рис. 10

### Вопросы для самопроверки

1. Определение усилий по линиям влияния от действия сосредоточенной силы.
2. Определение усилий по линиям влияния от действия распределённой нагрузки.
3. Определение усилий по линиям влияния от действия сосредоточенного момента.

линиям влияния от действия сосредоточенного момента.

## Тема 6. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ПРИ УЗЛОВОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ. НЕВЫГОДНОЕ ЗАГРУЖЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

Пусть требуется построить линию влияния изгибающего момента в сечении  $k$  (рис. 11, а), если груз  $P = 1$  перемещается по балке 1–2–3–4. Пусть груз  $P = 1$  движется по балке 2–3, тогда

$$R_1 = \frac{d-x}{d}, \quad R_2 = \frac{x}{d},$$

но  $R_1$  и  $R_2$  действуют на балку 5–6, тогда согласно формуле (1) имеем

$$M_k = R_1 y_1 + R_2 y_2 = Py = y.$$

Учитывая, что  $y_1$  и  $y_2$  – числа, получаем

$$y = (d - x)y_1/d + xy_2/d = y(x)$$

между этими точками провести прямые линии.

– уравнение прямой линии на участке 2–3.

Линия влияния поперечной силы  $Q_k$  в сечении  $k$  показана на рис. 11, в.

При действии на сооружение узловой нагрузки надо на обычную линию влияния снести узлы и между этими точками провести прямые линии.

В дальнейшем понадобится следующая теорема:

Если система сил расположена на прямолинейном участке (рис. 12), то её можно заменить равнодействующей, т.е.

$$S_k = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3 + \dots + F_iy_i = Ry_0,$$

где  $R$  – равнодействующая сил  $F_i$

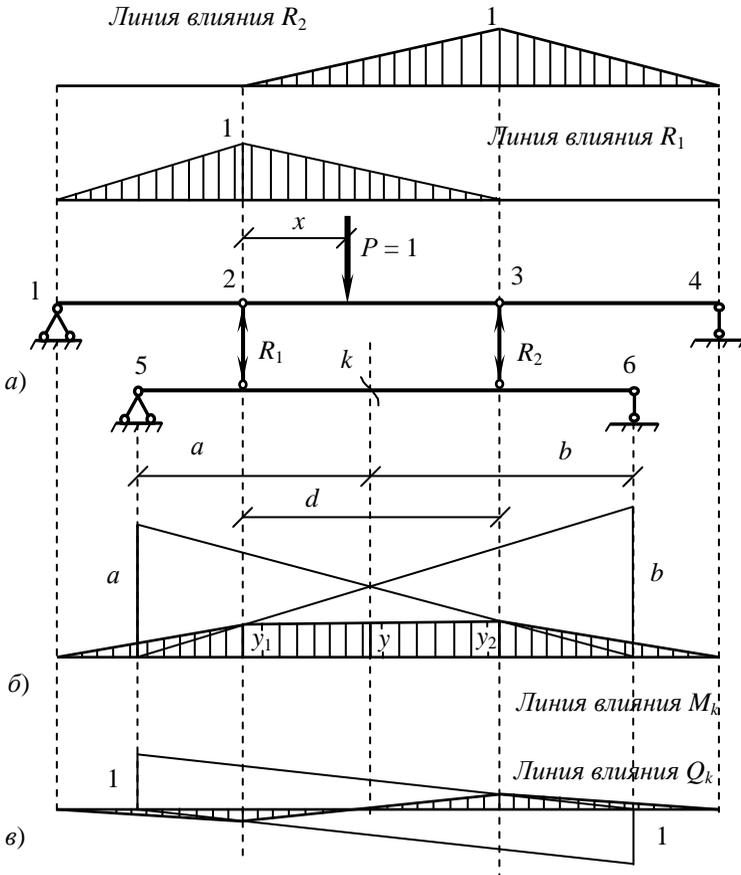


Рис. 11

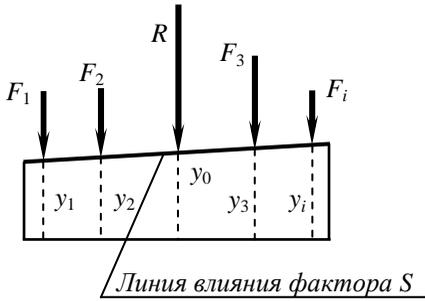


Рис. 12

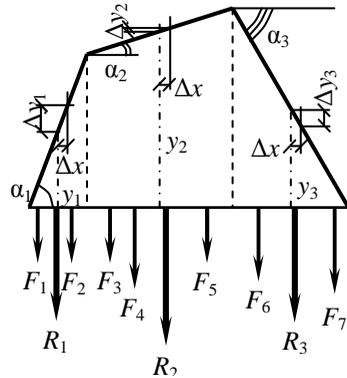


Рис. 13

Пусть дана линия влияния какого-либо фактора (рис. 13), тогда на основании теоремы, приведённой выше, имеем

$$S_k = R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3 = \sum_{i=1}^n R_i y_i. \quad (1)$$

Предположим, что все силы сдвинулись вправо, тогда

$$S_k + \Delta S_k = R_1 (y_1 + \Delta y_1) + R_2 (y_2 + \Delta y_2) + R_3 (y_3 - \Delta y_3). \quad (2)$$

Вычтем из выражения (2) значение фактора (1):

$$\Delta S_k = R_1 \Delta y_1 + R_2 \Delta y_2 - R_3 \Delta y_3. \quad (3)$$

Согласно рис. 13 имеем

$$\Delta y_i = \Delta x \operatorname{tg} \alpha_i,$$

где  $i=1, 2, 3$ . Подставляя  $\Delta y_i$  в формулу (3), получаем

$$\begin{aligned} \Delta S_k &= \Delta x (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 + R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - R_3 \operatorname{tg} \alpha_3) = \\ &= \Delta x \sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \end{aligned} \quad (4)$$

Предположим, что на рис. 14 изображён график изменения  $S_k$ . Рассмотрим точку  $S_{k, \max}$ . Если  $\Delta x > 0$ , то получаем, что  $S_k$  уменьшается, т.е.  $\Delta S_k < 0$ . Следовательно, формула (4) даёт

$$\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0. \quad (5)$$

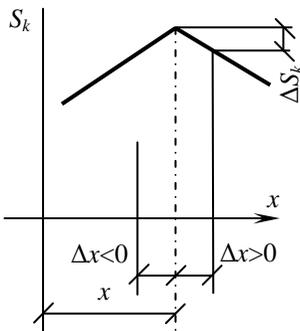


Рис. 14

Если же  $\Delta x < 0$ , то  $S_k$  тоже уменьшается или  $\Delta S_k < 0$ , а из формулы (4) получаем

$$\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0. \quad (6)$$

Чтобы  $\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i$  меняла знак, необходимо, чтобы при сдвиге грузов менялись значения  $R_i$ . Это возможно, когда один из грузов находится в вершине линии влияния. Этот груз называют *критическим*. Задачу решают методом попыток, т.е. постепенно все грузы ставят на вершину линии влияния.

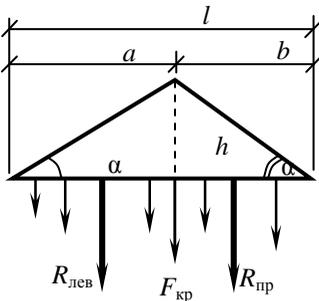


Рис. 15

Рассмотрим треугольную линию влияния (рис. 15). Систему грузов  $F_i$  установим так, чтобы один из грузов был в вершине. Тогда

$$\Delta F = R_{\text{лев}} + R_{\text{пр}} + F_{\text{кр}}.$$

Пусть грузы переместились вправо, тогда на основании условия (5) запишем:

$$R_{\text{лев}} \operatorname{tg} \alpha_1 - (R_{\text{пр}} + F_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha_2 < 0, \text{ или}$$

$$R_{\text{лев}} \operatorname{tg} \alpha_1 - (\Sigma F - R_{\text{лев}}) \operatorname{tg} \alpha_2 < 0,$$

$$\text{или } R_{\text{лев}} (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) < \Sigma F \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (7)$$

Согласно рис. 15 имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = h/a, \operatorname{tg} \alpha_2 = h/b.$$

Подставим эти значения в формулу (7)

$$R_{\text{лев}} (h/a + h/b) < h \Sigma F / b,$$

откуда находим

$$R_{\text{лев}} < a \Sigma F / l. \quad (8)$$

Рассмотрим сдвигку грузов влево, тогда на основании формулы (6) получаем

$$R_{\text{лев}} \operatorname{tg} \alpha_1 + F_{\text{кр}} \operatorname{tg} \alpha_1 > R_{\text{пр}} \operatorname{tg} \alpha_2, \text{ или } (R_{\text{лев}} + F_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha_1 > (\Sigma F - R_{\text{лев}} - F_{\text{кр}}) \operatorname{tg} \alpha_2,$$

$$\text{или } (R_{\text{лев}} + F_{\text{кр}}) (\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2) > \Sigma F \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Окончательно из последнего выражения определяем

$$R_{\text{лев}} + F_{\text{кр}} > \Sigma F (a/l). \quad (9)$$

В общем случае задача решается в следующем порядке:

1) по всей длине  $l$  находят  $\Sigma F$ ; 2) проверяют выполнение неравенств (8) и (9); 3) если эти неравенства не выполняются, то берут за  $F_{\text{кр}}$  другую силу  $F_i$ , и одновременно проверяют, не меняется ли  $\Sigma F$ .

Литература: [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

## Вопросы для самопроверки

1. Линии влияния при узловой передаче нагрузки.
2. Определение невыгоднейшего (расчётного) нагружения линий влияния сосредоточенной силой.

## Тема 7. ПЛОСКИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФЕРМЫ

*Фермой* называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены её жёстких узлов шарнирами.

В фермах стержни соединены в узлах или на болтах, или на сварке, т.е. жёстко. Однако, как показывают сравнительные расчёты при действии на ферму узловой нагрузки усилия в ферме с шарнирными узлами и жёсткими узлами мало отличаются. Например, усилия в идеальной ферме с шарнирами на 10% больше усилий в болтовых фермах. Будем рассматривать только фермы с идеальными шарнирами. В таких фермах при узловом действии нагрузки в стержнях будут возникать только сжимающие или растягивающие усилия.

### Классификация ферм

1. *По назначению:*
  - а) фермы пролётных строений мостов; б) крановые фермы; в) фермы каркасов промышленных зданий; г) фермы башенного типа.
2. *По характеру опорных закреплений:*
  - а) балочные, б) арочные, в) консольные, г) неразрезные.
3. *По очертанию опорных поясов:*
  - а) фермы с параллельными поясами, б) фермы с полигональными поясами.
4. *По системе решётки:*
  - а) фермы с треугольной решёткой, б) шпренгельные фермы, в) фермы с раскосной решёткой, г) многорешётчатые фермы, д) фермы с ромбической решёткой.
5. *По методу расчёта:*
  - а) статически определимые, б) статически неопределимые.

До определения усилий в стержнях ферм необходимо вычислить общее число неизвестных  $n$ :  $n = C + C_0$ , где  $C$  – число стержней фермы,  $C_0$  – число опорных стержней. Для каждого узла фермы составляются два уравнения равновесия:  $\sum x = 0$  и  $\sum y = 0$ , следовательно, общее число уравнений равно  $2Y$ , где  $Y$  – число узлов. Таким образом, для статически определимой фермы необходимо выполнение условия:

$$2Y = C + C_0 \text{ или } W = 2Y - C - C_0. \quad (1)$$

Формула (1) даёт возможность провести кинематический анализ. В структурном анализе надо доказать, что диски фермы соединены между собой по закону жёсткого треугольника.

## Аналитические методы расчёта ферм

Для расчёта простых ферм применяются различные методы. Рассмотрим их на конкретном примере (рис. 16).

### Метод вырезания узлов.

Вырежем узел 4 (рис. 17) и рассмотрим его равновесие (рис. 18):

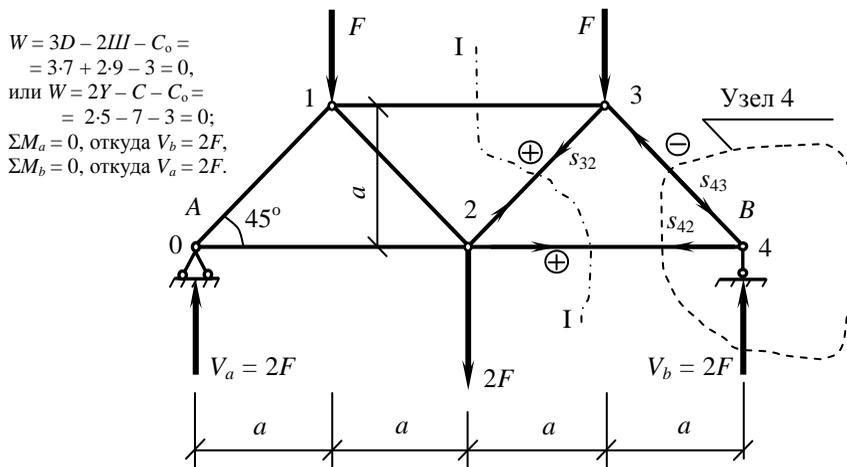


Рис. 16

$$\Sigma y = s_{43} \cos 45^\circ + 2F = 0, \text{ откуда } s_{43} = -2F / \cos 45^\circ,$$

знак (-) показывает, что стержень 3-4 сжат, следовательно, на рис. 17 необходимо изменить направление усилия  $s_{43}$ . Затем составляем

$$\Sigma x = -s_{42} + s_{43} \cos 45^\circ = 0, \text{ тогда } s_{42} = s_{43} \cos 45^\circ = 2F.$$

В дальнейшем следует применить следующий порядок вырезания узлов: узел 3, узел А, узел 1.

Если в узле сходятся три стержня, из которых два направлены одинаково и нет нагрузки, то усилие в отдельно направленном стержне равно нулю (рис. 18).

При вырезании узлов необходимо, чтобы число неизвестных усилий в нём не превышало двух.

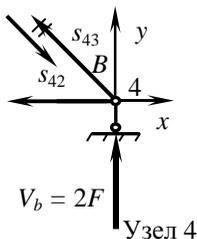


Рис. 17

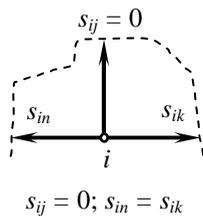


Рис. 18

### **Метод моментных точек**

Проведём сечение I–I и отбросим левую часть фермы (рис. 16). Для оставшейся части точка 3 будет моментной

$$\Sigma M_3 = V_b a - s_{42} a = 0, \text{ тогда } s_{42} = V_b = 2F.$$

### **Метод полного сечения (способ проекций)**

Рассмотрим сечение I–I. Отбросим левую часть, а для оставшейся части составим условие

$$\Sigma y = -s_{32} \sin 45^\circ - F + V_b = 0, \text{ откуда } s_{32} = (-F + V_b) / \sin 45^\circ = F / \sin 45^\circ.$$

Линия влияния усилия в стержне фермы представляет собой график изменения усилия в рассматриваемом стержне, когда груз  $P = 1$  медленно движется по нижнему или верхнему поясу фермы без толчков и ускорений. Тот пояс фермы, по которому движется единичный груз, называется *грузовым поясом*.

Рассмотрим ферму, показанную на рис. 19. Для построения линии влияния опорной реакции  $R_b$  необходимо взять

$$\Sigma M_1 = R_b l - Px = 0, \text{ тогда } R_b = x/l.$$

Аналогично запишем

$$\Sigma M_{12} = R_a l - P(l - x) = 0, \text{ откуда } R_a = (l - x)/l.$$

Для построения линии влияния усилия  $s_{75}$  в стержне 5–7 проведём разрез I–I. Предположим, что груз справа от сечения. В этом случае рассмотрим левую часть фермы:

$$\Sigma M_6 = R_a 3d + s_{75} r = 0, \text{ поэтому } s_{75} = -R_a 3d/r,$$

т.е. линия влияния  $s_{75}$  для правой части есть линия влияния  $R_a$ , умноженная на  $3d/r$  и взятая со знаком  $(-)$ . Предполагая, что груз  $P = 1$  слева от сечения I–I и рассматривая равновесие правой части фермы, находим

$$\Sigma M_6 = R_b 3d + s_{75} r = 0, \text{ откуда } s_{75} = -R_b 3d/r.$$

Сечение I–I можно использовать для построения линии влияния усилия  $s_{56}$ . Если единичный груз справа от сечения, то из рассмотрения левой части фермы определяем:  $\Sigma M_1 = s_{56} c = 0$  и  $s_{56} = 0$ .

Если груз  $P = 1$  слева от сечения, то, рассматривая правую часть, получаем  $\Sigma M_1 = R_b l + s_{56} c = 0$ , тогда  $s_{56} = -R_b l/c$ .

Для построения линии влияния усилия  $s_{76}$  в стержне 6–7 вырежем узел 7 (рис. 19) и рассмотрим его равновесие (рис. 20) при условии, что грузовой пояс – нижний:

$$\Sigma x = s_{75} \cos \alpha - s_{79} \cos \alpha = 0,$$

поэтому  $s_{75} = s_{79}$ ;

$$\Sigma y = -s_{76} + (s_{75} + s_{79}) \sin \alpha = 0,$$

откуда  $s_{76} = 2s_{75} \sin \alpha$ , т.е. линия влияния усилия  $s_{76}$  есть линия влияния усилия  $s_{75}$ , умноженная на  $2 \sin \alpha$  и взятая со знаком  $(+)$ , так как в стержне 6–7 – растяжение.

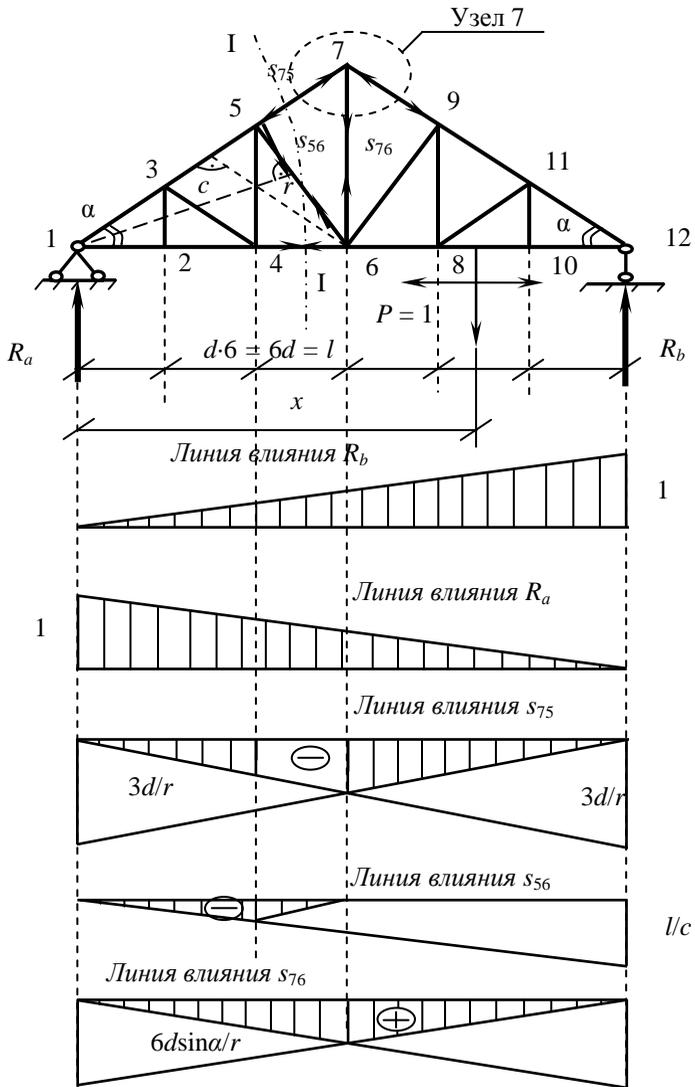


Рис. 19

### Расчёт шпренгельных ферм

Шпренгельные фермы образуются из простых ферм путём введения дополнительных стержней, работающих на местную нагрузку.

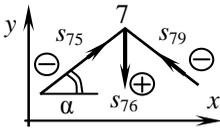


Рис. 20

Фермы с простой решёткой без дополнительных стержней называют *основными*.

Шпренгели, представляющие собой элементы грузового пояса, называются *грузовыми*, а представляющие собой элементы другого пояса – *негрузовыми* (рис. 21).

В шпренгельной (составной) ферме может быть три типа стержней:

- 1) *основные* – элементы основной фермы (рис. 21, *a* – стержни, обозначенные как *ос.*);
- 2) *дополнительные* – элементы шпренгеля, работающие только на местную нагрузку (рис. 21, *a* – стержни, обозначенные как *д.*);
- 3) *сложные* – элементы шпренгеля, работающие и на местную, и на любую нагрузку (рис. 21, *a* – стержни, обозначенные как *с.*).

Рассмотрим построение линий влияния усилий в стержнях фермы, показанной на рис. 23. Пусть требуется построить линию влияния усилия  $s_{33}$ . Проведём сечение I–I. Предположим, что груз  $P = 1$  справа от сечения I–I, тогда из рассмотрения левой части получаем:

$$\sum y = V_a - s_{33}' \cos \varphi = 0, \quad s_{33}' = V_a / \cos \varphi.$$

Если груз  $P = 1$  слева от сечения I–I, то

$$\sum y = V_b + s_{33}' \cos \varphi = 0, \quad s_{33}' = -V_b / \cos \varphi.$$

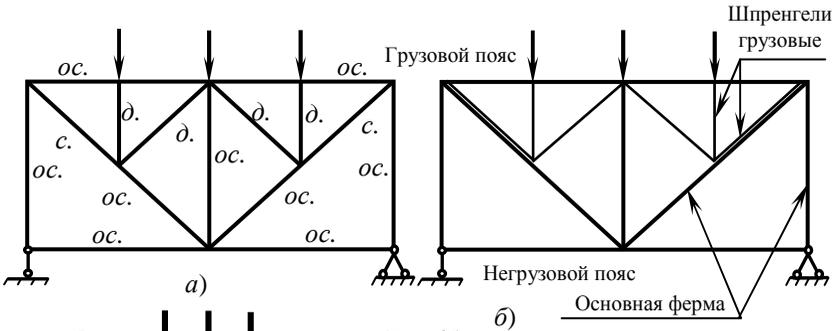


Рис. 21

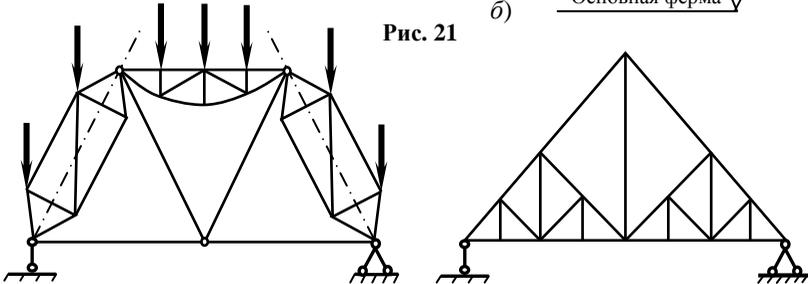


Рис. 22

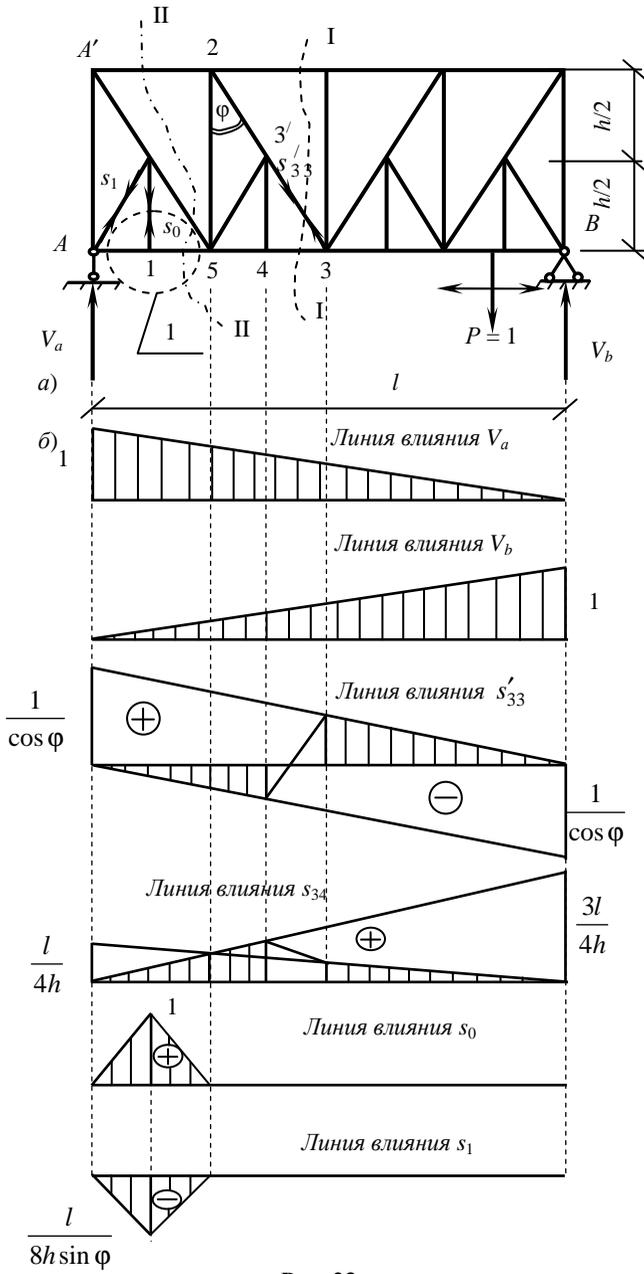


Рис. 23

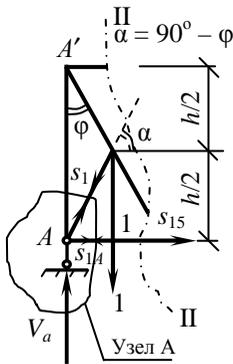


Рис. 24

Вспользуемся сечением I-I и для построения линии влияния усилия  $s_{34}$ . Пусть груз справа от сечения:

$$\Sigma M_2 = V_a l / 4 - s_{34} h = 0, \quad s_{34} = \frac{V_a l}{4h}.$$

Если же груз слева от сечения, то, рассматривая правую часть шпренгельной фермы, получаем:

$$\Sigma M_2 = V_b 3l / 4 - s_{34} h = 0, \quad s_{34} = \frac{3V_b l}{4h}.$$

Для построения линии влияния усилия  $s_0$  вырежем узел 1 (рис. 23, а). Если груз  $P = 1$  в точке 1, то  $s_0 = 1$ , а если – в точках А или 5, то  $s_0 = 0$ .

Рассмотрим построение линии влияния усилия  $s_1$ . Если груз  $P = 1$  находится в точке А, то естественно, что  $s_1 = 0$ , а если единичный груз находится в точке 5, то из рассмотрения линии влияния  $s_0$  имеем, что  $s_0 = 0$ , а используя рис. 23, получаем, что и  $s_1 = 0$ .

Предположим, что груз находится в точке 1. Проведя сечение II – II (рис. 23, а), и рассматривая рис. 24, запишем  $\Sigma M_{A'} = s_{15} h - 1 \cdot l / 8 = 0$ , откуда находим  $s_{15} = l / (8h)$ .

Из рассмотрения узла 1 определяем:  $s_{1A} = s_{15}$ . И наконец, рассматривая узел А, вычисляем

$$\Sigma x = s_{1A} + s_1 \cos \alpha = 0,$$

откуда находим  $s_1 = -s_{1A} / \cos \alpha = -s_{15} / \cos \alpha = -l / (8h \cos \alpha)$ .

Линии влияния  $s_0$  и  $s_1$  подтверждают, что дополнительные элементы шпренгеля работают только на местную нагрузку.

*Литература:* [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

### Вопросы для самопроверки

1. Фермы. Особенности работы элементов, составляющих ферму, по сравнению с работой балки.
2. Классификация ферм по очертанию поясов, типу решётки, условиям опирания, уровню езды.
3. Аналитический метод расчёта ферм (способ вырезания узлов, способ моментной точки, способ проекций, способ совместных сечений). Определение усилий в стержнях ферм в частных случаях. Выявление нулевых стержней.
4. Основные правила проверки усилий в стержнях ферм.
5. Построение линий влияния усилий для плоских балочных ферм.
6. Понятие о работе и расчёте шпренгельных ферм.

## Тема 8. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ АРКИ

*Трёхшарнирная система*, в том числе *трёхшарнирная арка*, есть статически определимая система. Опорные реакции раскладываем на вертикальную составляющую и составляющую, направленную по линии *пятых шарниров – распор*.

Тогда от действия вертикальных внешних сил имеем (рис. 25, а):

$$V_A = V_A^o, V_B = V_B^o, H = M_C^o / f,$$

где  $V_A^o, V_B^o$  – реакции простой балки (рис. 25, б),  $M_C^o$  – момент левых или правых сил относительно точки  $C$ .

Изгибающий момент, поперечную и нормальную силы в сечении  $x-x$  трёхшарнирной арки можно определить по формулам:

$$M_x = M_x^o - Hy, \quad Q_x = Q_x^o \cos \varphi - H \sin \varphi = dM_x / ds,$$

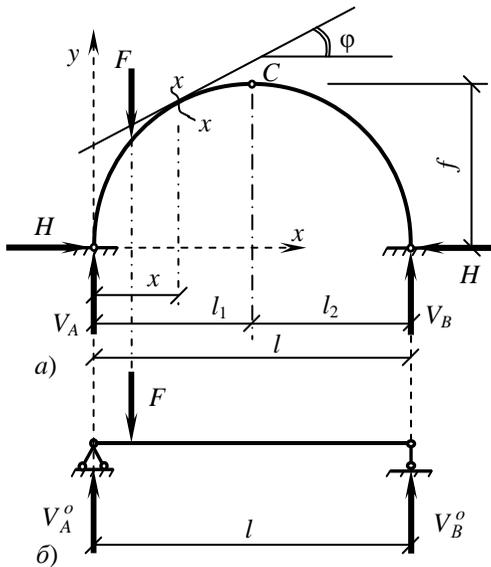


Рис. 25

$$N_x = -Q_x^o \sin \varphi - H \cos \varphi. \quad (1)$$

В арках резко уменьшается изгибающий момент, что видно из первой формулы системы (1).

## Линии влияния трёхшарнирных арок

Рассматривая рис. 26 и рис. 27, определяем:

$$\Sigma M_A = V_B l - 1 \cdot x = 0, \text{ а } V_B = x/l,$$

$$\Sigma M_B = V_A l - 1 \cdot (l-x) = 0, \text{ а } V_A = (l-x)/l,$$

$$M_C = [V_A l_1 - 1 \cdot (l_1 - x)] - Hf = 0, \text{ а } H = M_C^o / f.$$

Из первой формулы системы (1) имеем, что  $M_k = M_k^o - H y_k$  (рис. 26, б).

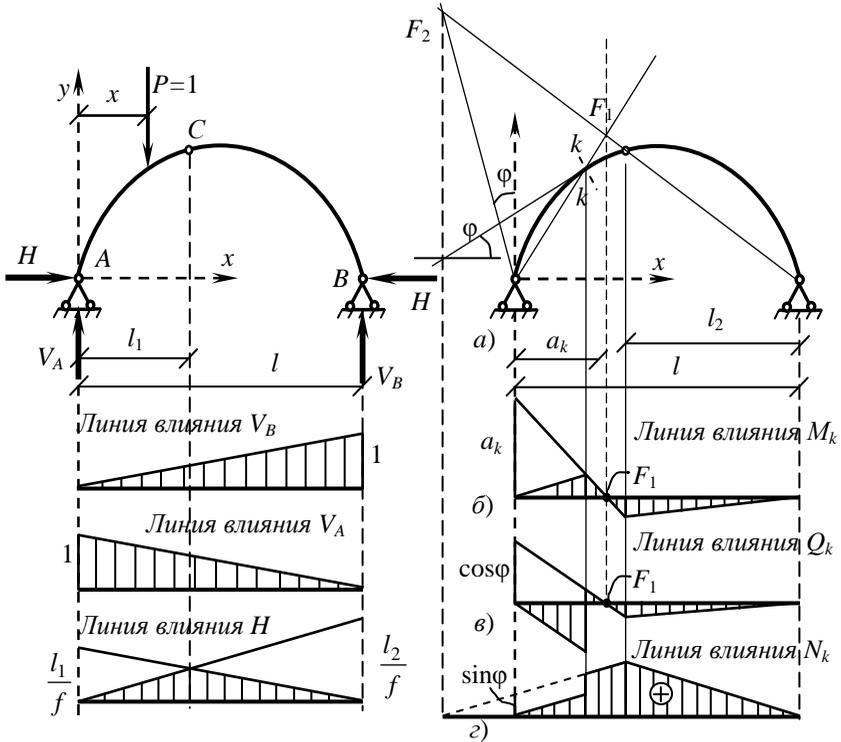


Рис. 26

Рис. 27

Из второй формулы системы (1) имеем

$$Q_k = Q_k^o \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k \quad (\text{рис. 27, в}).$$

Из третьей формулы системы (1) получаем

$$N_k = -Q_k^o \sin \varphi_k - H \cos \varphi_k \quad (\text{рис. 27, з}).$$

*Литература:* [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

## Вопросы для самопроверки

1. Арки. Основные понятия. Классификация арок по наличию шарниров, затяжки, по очертанию оси.
2. Аналитическое определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях арки.
3. Приемы построения линий влияния опорных реакций, распора и внутренних силовых факторов для трёхшарнирной арки. Построение линий влияния изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

## Тема 9. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает его деформацию. В реальных случаях нагрузка возрастает медленно. Плавное приложение нагрузки называется *статическим*.



Рис. 28

*Упругой системой* называется такая система, которая после удаления нагрузки возвращается в начальное недеформированное состояние. *Линейно-деформируемыми системами* называются такие, в которых перемещения и деформации выражаются линейными однородными функциями внешних сил  $F_i$ . Например, для рис. 28 имеем

$$\Delta = \alpha F, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – коэффициент, зависящий от материала, схемы и размера сооружения.

Увеличим нагрузку  $F$  на  $dF$ . Это вызовет увеличение перемещения на  $d\Delta$ . Составим выражение элементарной работы  $dW$ , отбрасывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:

$$dW = (F + dF)d\Delta = Fd\Delta + dFd\Delta \approx Fd\Delta, \text{ но } d\Delta = \alpha dF, \text{ тогда } dW = F\alpha dF \text{ и}$$

$$W = \int_0^F \alpha F dF = \alpha \int_0^F F dF = \alpha F^2 / 2,$$

а с учётом формулы (1) получаем *теорему Клайперона*

для сосредоточенной нагрузки  $F$ :  $W = F\Delta/2$ ;

для сосредоточенного момента  $M$ :  $W = M\vartheta/2$ , где  $\vartheta$  – угол поворота поперечного сечения стержня;

для распределённой нагрузки  $q$ :  $W = qS/2$ , где  $S$  – площадь эпюры перемещения на участке действия этой распределённой нагрузки.

При вычислении работы применяется принцип независимости действия сил, например, работа внешних сил, изображённых на рис. 29, равна

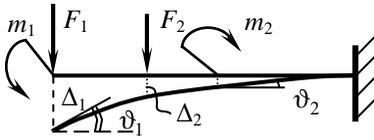


Рис. 29

$$W = \frac{F_1 \Delta_1}{2} + \frac{F_2 \Delta_2}{2} + \frac{m_1 \vartheta_1}{2} - \frac{m_2 \vartheta_2}{2}.$$

Выразим работу внешних сил через внутренние усилия.

Подсчитаем элементарную работу нормальных сил  $N$  (рис. 30):

$$dW_N = \frac{N \Delta x}{2} = \frac{N}{2} \frac{N dx}{EA} = \frac{N^2 dx}{2EA}; \quad (2)$$

работу поперечных сил  $Q$  (рис. 31), полагая, что  $\operatorname{tg} \gamma = \Delta y / dx \approx \gamma$ ,

$$dW_Q = \frac{Q \Delta y}{2} = \frac{Q}{2} \gamma dx = \frac{Q dx}{2} \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{2} \frac{dx}{G} k \frac{Q}{A} = k \frac{Q^2 dx}{2GA}, \quad (3)$$

где  $k$  – поправочный коэффициент, учитывающий неравномерное распределение касательных напряжений  $\tau$  по поперечному сечению. И наконец, подсчитаем элементарную работу изгибающих моментов  $M$  (рис. 32):

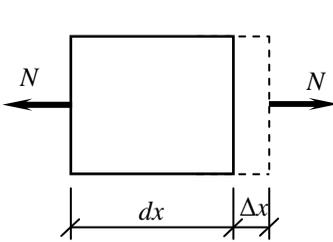


Рис. 30

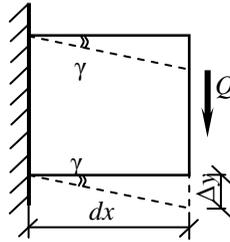


Рис. 31

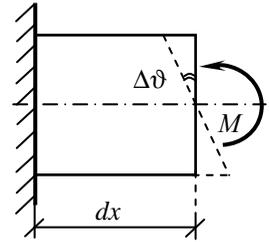


Рис. 32

$$dQ_M = \frac{M \Delta \vartheta}{2} = \frac{M}{2} \frac{M dx}{EI} = \frac{M^2 dx}{2EI}. \quad (4)$$

Суммируя три результата (2 – 4), получим значение элементарной работы от внутренних сил:

$$dW = \frac{N^2 dx}{2EA} + k \frac{Q^2 dx}{2GA} + \frac{M^2 dx}{2EI}. \quad (5)$$

Формула (5) для системы брусьев примет вид

$$W = \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA}}_{3\%} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_0^l k \frac{Q^2 dx}{2GA}}_{1\%} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI}}_{96\%}. \quad (6)$$

На основании закона сохранения энергии  $W = U$ , где  $U$  – потенциальная энергия.

Подсчёты показывают, что для системы, работающей на изгиб, первый член формулы (6) составляет около 3%, второй – около 1%, третий – порядка 96%.

## Принцип возможных перемещений

Рассмотрим систему в состоянии равновесия под действием заданных сил. *Возможными перемещениями* называются ничтожно малые упругие перемещения, вызываемые какими-либо силами, температурой или перемещениями опор, которые по своему характеру принимаются как бесконечно малые. Когда система совершает возможные перемещения, величина и направление внешних и внутренних сил, отвечающих её исходному состоянию, остаются неизменными, а поэтому их работа будет без коэффициента  $1/2$ .

*Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)*

Введём обозначение:  $\Delta_{mn}$  – перемещение в направлении силы « $m$ » от силы « $n$ ». Под перемещением будем понимать смещение и угол поворота, а под силой – силу и момент. Рассмотрим два состояния (рис. 33), для которых

$$W_{11} = F_1\Delta_{11}/2, W_{22} = F_2\Delta_{22}/2,$$

или

$$W_{11} = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_1^2 dx}{2EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{N_1^2 dx}{2EA} + \sum_1^n \int_0^l k \frac{Q_1^2 dx}{2GA};$$

$$W_{22} = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_2^2 dx}{2EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{N_2^2 dx}{2EA} + \sum_1^n \int_0^l k \frac{Q_2^2 dx}{2GA}.$$

Приложим к балке последовательно сначала силу  $F_1$ , а затем силу  $F_2$  (рис. 33, а), тогда

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{22} = F_1\Delta_{11}/2 + F_1\Delta_{12} + F_2\Delta_{22}/2. \quad (7)$$

Приложим обе силы одновременно (рис. 34, б), в этом случае

$$W = F_1(\Delta_{11} + \Delta_{12})/2 + F_2(\Delta_{22} + \Delta_{21})/2. \quad (8)$$

Приравнявая выражения (7) и (8), получим *теорему о взаимности работ (теорему Бетти)*:

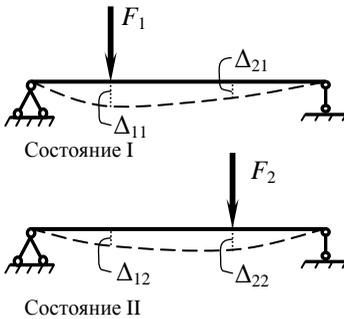


Рис. 33

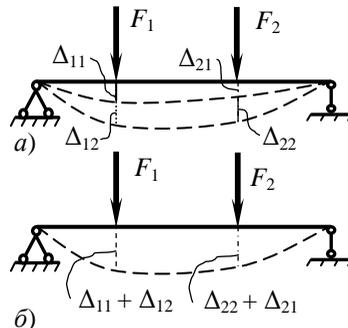


Рис. 34

«Возможная работа внешних или внутренних сил первого состояния на соответствующих перемещениях второго состояния равна возможной работе внешних или внутренних сил второго состояния на соответствующих перемещениях первого состояния», т.е.

$$F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}, \text{ или } W_{12} = W_{21}. \quad (9)$$

*Теорема о взаимности перемещений (теорема Максвелла)*

На основании теоремы о взаимности работ (9) имеем  $F_1 \delta_{12} = F_2 \delta_{21}$ , но если принять, что  $F_1 = F_2 = 1$ , тогда получаем  $\delta_{12} = \delta_{21}$ , или в общем виде

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (10)$$

«Перемещение точки приложения первой единичной силы по её направлению, вызванное второй единичной силой, равно перемещению точки приложения второй единичной силы по её направлению, вызванному первой единичной силой»

*Литература:* [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

### Вопросы для самопроверки

1. Теорема о взаимности работ (теорема Бетти).
2. Потенциальная энергия деформации плоских систем, выраженная через работу внутренних сил.

### Тема 10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ИНТЕГРАЛ МОРА

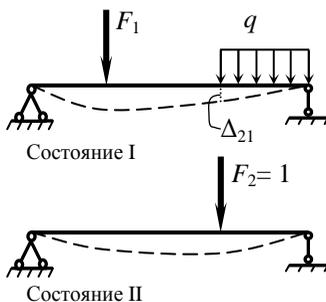
Рассмотрим два состояния (рис. 35). Составим выражение работы  $W_{21}$ , т.е. работы силы  $F_2 = 1$  на перемещении  $\Delta_{21}$ :

$$W_{21} = F_2 \Delta_{21} = \Delta_{21}. \quad (1)$$

Согласно формуле (7) получаем

$$W_{12} = W - W_{11} - W_{22}, \quad (2)$$

где



$$W = \sum_1^n \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA} + \sum_1^n \int_0^l k \frac{Q^2 dx}{2GA}, \quad (3)$$

$M$ ,  $N$ ,  $Q$  – это моменты, нормальные и поперечные силы от суммарного действия сил  $F_1$  и  $F_2$ :

$$M = M_1 + M_2, N = N_1 + N_2, Q = Q_1 + Q_2. \quad (4)$$

Значения (4) подставляем в формулу (3), а результат и выражения для  $W_{11}$  и  $W_{22}$  – в формулу (2). В итоге получим

Рис. 35

$$W_{12} = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_1 M_2 dx}{EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{N_1 N_2 dx}{EA} + \sum_1^n \int_0^l k \frac{Q_1 Q_2 dx}{GA}, \quad (5)$$

а с учётом равенства (1) имеем

$$W_{21} = W_{12} = \Delta_{21} = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_1 \bar{M}_2 dx}{EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{N_1 \bar{N}_2 dx}{EA} + \sum_1^n \int_0^l k \frac{Q_1 \bar{Q}_2 dx}{GA}, \quad (6)$$

где чёрточки показывают, что эти значения возникают от единичных сил.

Формулу (6) можно записать в общем виде:

$$\Delta_{mk} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_m M_k dx}{EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{N}_m N_k dx}{EA} + \sum_1^n \int_0^l k \frac{\bar{Q}_m Q_k dx}{GA}. \quad (7)$$

Выражение (7) – это формула для определения перемещений в конкретном сечении конструкции или *интеграл Мора (формула Мора)*.

При расчёте балок и рам учитывают влияние только изгибающих моментов  $M$ , а влиянием  $N$  и  $Q$  пренебрегают.

### Правило Верещагина

«Интеграл произведения двух функций, из которых одна линейная, а другая – произвольная, равен площади произвольной функции, умноженной на ординату из прямоугольной функции, лежащей под центром тяжести площади произвольной функции».

Например, имеем две эпюры моментов  $M_F$  и  $\bar{M}_1$  (рис. 36), тогда по формуле (7) получаем при использовании правила Верещагина:

$$\Delta_{1F} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_F dx}{EI} = \frac{A_{MF} y_C}{EI}. \quad (8)$$

Запишем ещё три положения, вытекающие из правила Верещагина:

1. Ордината  $y_C$  должна быть взята из прямолинейной эпюры. Если обе эпюры – прямолинейные, то ординату  $y_C$  можно брать из любой.

2. Перемножаемые эпюры не должны иметь изломов. При их наличии эпюры необходимо перемножать по участкам.

3. Для перемножения двух прямолинейных эпюр (рис. 37) можно использовать формулу

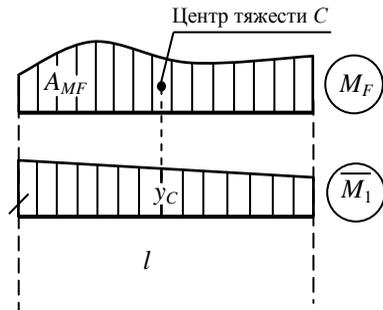


Рис. 36

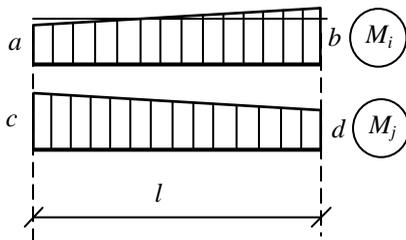


Рис. 37

$$\frac{1}{EI} \int_0^l M_i M_j dx = \frac{1}{EI} \frac{l}{6} (2ac + 2bd + ad + cb).$$

**Пример.** Пусть дана балка, нагруженная равномерно распределённой нагрузкой  $q$  (рис. 38). Вычислим прогиб балки в точке  $C$  при ее изгибной жёсткости  $EI = \text{const}$ . При расчёте учитываем только влияние изгибающих моментов, поэтому принимаем интеграл Мора в виде (8):

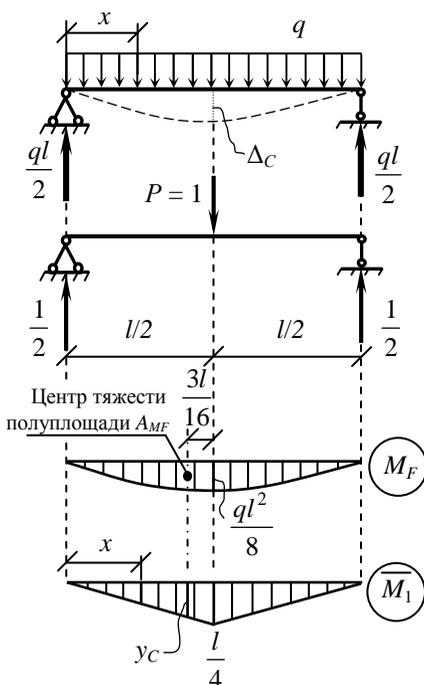


Рис. 38

$$\Delta_C = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_F}{EI} dx = \frac{A_{MF} y_C}{EI}, \quad (9)$$

где  $M_F = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$ ,  $\bar{M}_1 = \frac{x}{2}$ ,

$$A_{MF} = \frac{2}{3} \frac{l}{2} \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^3}{24}, \quad y_C = \frac{5}{32} l.$$

Вычисляем перемещение  $\Delta_C$  при помощи интеграла Мора (9):

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \\ &= \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left( \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{5ql^4}{384EI}. \end{aligned}$$

Вычисляем перемещение  $\Delta_C$  при помощи интеграла Мора (9), но с использованием правила перемножения эпюр Верещагина:

$$\begin{aligned} \Delta_C &= \frac{A_{MF} y_C}{EI} = \frac{2}{EI} \frac{ql^3}{24} \frac{5l}{32} = \\ &= \frac{5ql^4}{384EI}. \end{aligned}$$

Литература: [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

### Вопросы для самопроверки

1. Определение перемещений методом Мора. Интеграл Мора.
2. Вычисление интеграла Мора по формулам Верещагина, Симпсона и трапеций.

**Тема 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ**

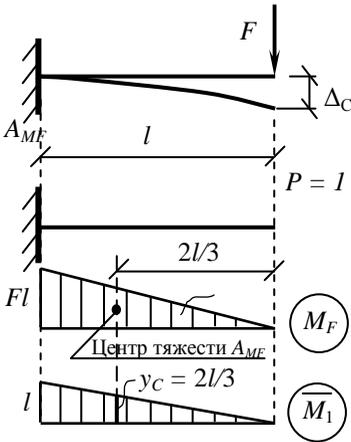


Рис. 39

Данную тему рассмотрим на конкретных примерах.

**Пример 1.** Определим прогиб конца консоли (рис. 39). Построим грузовую эпюру моментов и эпюру изгибающих моментов от единичной силы, приложенной на конце консоли (рис. 39). Используя правило Верещагина, имеем:

$$\Delta_C = \frac{A_{MF} y_C}{EI} = \frac{1}{EI} Fl \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Fl^3}{3EI}.$$

**Пример 2.** Определим горизонтальное смещение точки C рамы, изображённой на рис. 40.

Построим эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки ( $M_F$ ) и от силы  $P = 1$ , приложенной в точке C по направлению искомого горизонтального смещения ( $\bar{M}_1$ ), тогда

$$\Delta_C^{\text{гор}} = \frac{-1}{EI} \frac{1}{2} Fhh \frac{2}{3} h - \frac{1}{E2I} \frac{1}{2} Fhah = -\frac{Fh^2}{EI} \left( \frac{h}{3} + \frac{a}{4} \right).$$

Знак (-) в ответе означает, что горизонтальное смещение точки C и направление единичной силы  $P = 1$  не совпадают.

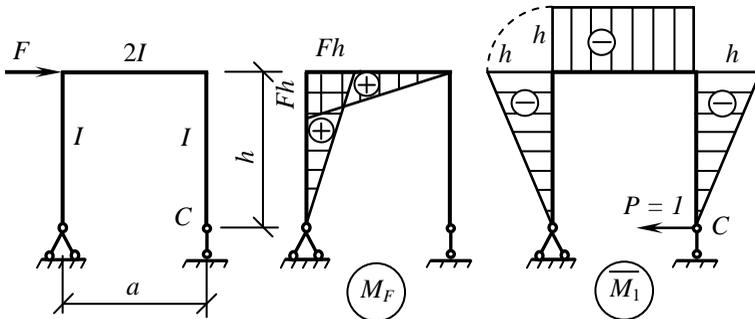
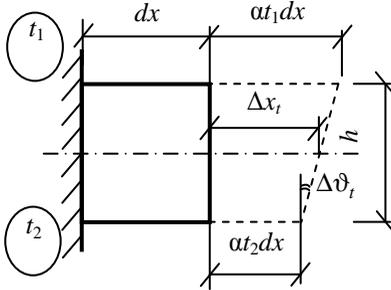


Рис. 40

## Температурные перемещения

Перепишем интеграл Мора (7) в виде:

$$\Delta_{mk} = \sum_0^l \int \bar{M}_m \Delta \vartheta_k + \sum_0^l \int \bar{N}_m \Delta x_k + \sum_0^l \int \bar{Q}_m \Delta y_k, \quad (1)$$



**Рис. 41**

Формулой Мора в приведённом виде можно пользоваться для определения перемещений системы, вызванных действием температуры. Если верхнее волокно элемента стержня нагрето на  $t_1$ , а нижнее – на  $t_2$  градусов Цельсия, то, принимая прямолинейный закон распределения температуры по высоте поперечного сечения, будем иметь (рис. 41) для симметричного поперечного сечения:

$$\Delta x_t = \frac{\alpha(t_1 + t_2)}{2} dx, \quad \Delta \vartheta_t = \frac{\alpha(t_1 - t_2)}{h} dx,$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения.

Деформации сдвига в элементе от действия температуры не возникают.

Подставив найденные значения  $\Delta x_t$  и  $\Delta \vartheta_t$  в выражение (1), получим формулу для нахождения температурных перемещений

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{(t_1 - t_2)}{h} \int \bar{M}_m dx + \sum \alpha \frac{(t_1 + t_2)}{2} \int \bar{N}_m dx. \quad (2)$$

Предполагается, что вдоль каждого стержня заданное изменение температуры одинаково и высота  $h$  каждого элемента системы постоянна по всей его длине.

Если стержневая система содержит только прямолинейные или ломаные стержни постоянного сечения, то формула (2) может быть переписана в более простой форме

$$\Delta_{mt} = \sum \alpha \frac{(t_1 - t_2)}{h} \Omega_{\bar{M}} + \sum \alpha \frac{(t_1 + t_2)}{2} \Omega_{\bar{N}}, \quad (3)$$

где  $\Omega_{\bar{M}}$  и  $\Omega_{\bar{N}}$  – площади единичных эпюр  $\bar{M}_m$  и  $\bar{N}_m$ . Если деформации элемента  $dx$  от температуры и от единичной силы аналогичны, то знак

соответствующего члена формулы (3) будет положительным, если деформации будут не совпадать, то необходимо брать знак (-).

**Пример 1.** Определить горизонтальное перемещение подвижной опоры  $B$  при изменении температуры по рис. 42. Высоту поперечного сечения принять  $h = a/10$ .

Строим единичные эпюры  $\bar{M}_m$  и  $\bar{N}_m$  (рис. 42, б, в) от приложенной в точке  $B$  в направлении искомого перемещения единичной силы  $P = 1$ . Затем определяем площади единичных эпюр:

для ригеля:  $\Omega_{\bar{M}} = ab/2$ ,  $\Omega_{\bar{N}} = 1 \cdot a = a$ ; для стойки:  $\Omega_{\bar{M}} = b^2/2$ ,  $\Omega_{\bar{N}} = b^2/a$ .

Определяем температурные параметры:

для ригеля:  $t_1 = 40^\circ$ ,  $t_2 = 10^\circ$ ; для стойки  $t_1 = 20^\circ$ ,  $t_2 = 10^\circ$ .

По формуле (3) находим:

$$\Delta_{mt} = -\alpha \underbrace{\frac{40^\circ - 10^\circ}{h} \frac{1}{2} ab + \alpha \frac{40^\circ + 10^\circ}{2} a}_{\text{ригель}} - \alpha \underbrace{\frac{20^\circ - 10^\circ}{h} \frac{b^2}{2} + \alpha \frac{20^\circ + 10^\circ}{2} \frac{b^2}{a}}_{\text{стойка}} =$$

$$= \alpha(-150b - 35b^2/a + 25a).$$

Знак (+) нужно поставить перед членом с  $\Omega_{\bar{N}}$ , так как изменение температуры вызывает удлинение стойки и ригеля так же, как и действие единичной (рис. 42). Перед членом с  $\Omega_{\bar{M}}$  стоит знак (-), так как температурное воздействие вызывает удлинение внешних волокон ригеля и стойки (рис. 42, а), а изгибающий момент  $\bar{M}_m$  от действия единичной силы  $P = 1$ , наоборот, вызывает укорочение внешних волокон (рис. 42, б).

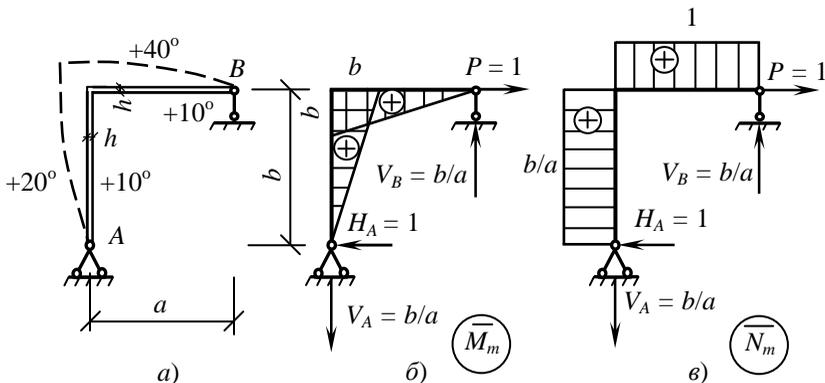


Рис. 42

При определении перемещений от действия на сооружение температуры нельзя пренебрегать членом формулы, зависящим от продольной силы.

*Определение перемещений от осадки опор*

Осадки опор могут быть случайными (просадки грунта, оползень, размыв грунта) при отсутствии нагрузки на сооружение или могут возникать под действием нагрузки в результате податливости основания.

**Перемещения от случайных осадок опор**

Пусть шарнирно подвижная опора рамы, изображенной на рис. 43, *а*, переместилась вертикально на величину  $\Delta$ . Определим вертикальное перемещение точки *k*. Для этого создадим единичное состояние данной системы и в направлении искомого перемещения  $\Delta_k$  приложим силу  $P = 1$  (рис. 43, *б*). Опорную реакцию, возникающую в том же опорном стержне, переместившись вертикально на величину  $\Delta$ , обозначим через  $R$ . Составим уравнение равновесия (рис. 43, *б*)

$$\Sigma M_A = Pl - R \cdot 2l = 0,$$

и находим опорную реакцию  $R = 1/2$ .

На основании теоремы о взаимности работ для двух состояний, показанных на рис. 43, *а*, *б*, составим условие:

$$W_{12} = W_{21}, \text{ или } 0 = (P\Delta_k - R\Delta),$$

откуда находим

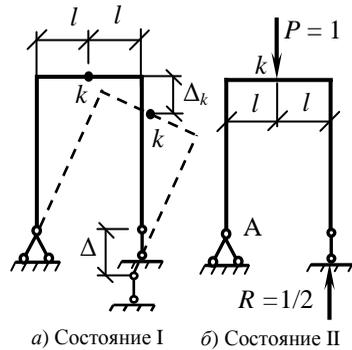
$$\Delta_k = R\Delta = \Delta/2.$$

Работа сил первого состояния на перемещениях второго состояния  $W_{12} = 0$ , так как сил в первом состоянии нет. Второе слагаемое правой части формулы Бетти взято с отрицательным знаком, так как направление силы  $R$  и перемещения  $\Delta$  не совпадают.

При перемещениях опор статически определимого сооружения по направлениям опорных закреплений внутренние усилия в сооружении не возникают.

Таким образом, для определения перемещения или угла поворота, возникающего в статически определимом сооружении от смещения его опор в направлении опорных закреплений, необходимо:

- выбрать единичное состояние сооружения, считая смещающуюся опору неподвижной;
- загрузить сооружение в направлении искомого перемещения единичной силой или моментом;
- определить реакции в тех опорных связях единичного состояния, которые по условию задачи смещаются;



**Рис. 43**

- составить выражение работы сил единичного состояния на перемещениях действительного и приравнять эту работу нулю;
- решить полученное уравнение относительно искомого перемещения.

### Перемещения от нагрузки, вызывающей упругие осадки

Пусть под действием нагрузки  $q$  трёхшарнирная рама получает равные вертикальные осадки опор  $\Delta = V/k_o$  (рис. 44, а), где  $k_o$  – коэффициент оседания опоры (или жёсткость упругого основания, Н/м, которая численно равна силе, вызывающей единичное смещение). Найдём вертикальное перемещение шарнира  $C$ , учитывая только влияние изгибающих моментов  $M_F$  (рис. 44, б). Приложим единичную силу  $P = 1$  в шарнире  $C$  по направлению искомого перемещения и строим единичную эпюру  $\bar{M}_k$  (рис. 44, в).

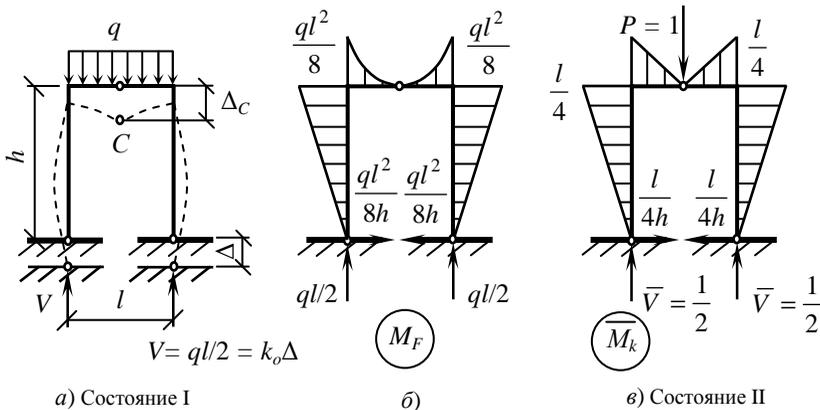


Рис. 44

Применим теорему о взаимности работ ( $W_{12} = W_{21}$ )

$$\sum \int \frac{M_F \bar{M}_k}{EI} ds = P \Delta_C - 2\bar{V} \Delta = \Delta_C - 2\bar{V} \Delta,$$

$$\Delta_C = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_k}{EI} ds + 2\bar{V} \Delta = \sum \int \frac{M_F \bar{M}_k}{EI} ds + \Delta.$$

Литература: [4, гл. 1]; [5, гл. 1]; [7, гл. 1].

## Вопросы для самопроверки

1. Определение перемещений от действия нагрузки.
2. Определение перемещений от действия температуры.
3. Определение перемещений от осадки опор.

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Каждый студент-заочник в 6 семестре выполняет по строительной механике 3 контрольные работы, предусмотренные учебным планом. В первую контрольную работу входят задачи 1 и 2, во вторую – 3 или 4 (по указанию преподавателя) и в третью – 5 и 6.

Исходные данные для решения задач выбираются студентом из прилагаемых к условиям задач таблиц в соответствии с личным учебным шифром (номер зачётной книжки и две цифры, выданные преподавателем) и первыми шестью буквами русского алфавита, которые следует расположить под шифром, например:

шифр 2 8 7 0 5 2 ;  
буквы а б в г д е .

Из каждого вертикального столбца таблицы, обозначенного внизу буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы.

Работы, выполненные с нарушением этих указаний, не засчитываются.

Приступать к решению контрольных заданий следует только после изучения соответствующего раздела курса и самостоятельного решения рекомендованных задач. Если основные положения теории усвоены слабо и студент не усвоил примеры, разобранные в курсе, то при выполнении контрольных работ возникнут большие затруднения.

Каждая контрольная работа должна выполняться на одном листе стандартного размера А1 (594×841) или А2 (594×420), с размещением на нём всех чертежей и необходимых расчётов. Размещение чертежей и расчётов на одном листе значительно облегчает выполнение работы, так как позволяет избежать многих ошибок, связанных с тем, что при решении задач все числовые величины берутся из чертежей. Можно выполнять контрольные работы на миллиметровке.

В угловом штампе, который располагается в нижней правой части листа, указывается: фамилия студента, название специальности, название дисциплины, номер контрольной работы, учебный шифр, год издания используемых методических указаний.

Листы складываются до формата А4 (210×297). На обложке контрольной работы должны быть написаны: фамилия, имя и отчество сту-

дента (полностью), название специальности, название дисциплины, номер контрольной работы, дата отсылки работы, точный почтовый адрес.

Перед решением каждой задачи надо написать полностью её условие с числовыми данными, вычертить заданную схему в масштабе и указать на ней в числах все величины, необходимые для расчёта.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными объяснениями и схемами.

При пользовании формулами или данными, отсутствующими в учебнике, необходимо указать источник (автора, название, страницу, номер формулы).

Необходимо указывать размерность всех величин и подчеркивать окончательные результаты.

Получив после рецензирования (очного или заочного) контрольную работу, студент должен обратить внимание на все замечания, даже если работа зачтена. В случае незачёта работы необходимо выполнить требуемые исправления на том же листе (если позволяет место) или на отдельных листах и представить всю работу целиком на повторную рецензию. Отдельно от работы исправления не рассматриваются. Нельзя стирать или заклеивать отмеченные преподавателем ошибки.

Несамостоятельно выполненные задания не дают возможности преподавателю-рецензенту вовремя заметить недостатки в работе студента-заочника. В результате студент не приобретает необходимых знаний и оказывается неподготовленным к экзамену.

## Раздел II

### КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ. ЗАДАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ

#### Контрольная работа 1

#### Задача 1

#### РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ МНОГОПРОЛЁТНОЙ БАЛКИ

*Задание.* Для балки, выбранной согласно варианту (табл. 1, рис. 1.1), требуется:

- а) построить эпюры  $M$  и  $Q$  (аналитически);
- б) построить линии влияния всех опорных реакций и линии влияния  $M$  и  $Q$  для заданного сечения;
- в) определить по линиям влияния реакции опор и усилия  $M$  и  $Q$  в заданном сечении от действия нагрузки.

**Таблица 1**

№ строки	№ схемы	№ сечения	$l_1$	$l_2$	$a$	$b$	$c$	$q$ , кН/м	$P$ , кН	$M$ , кН·м	
			м								
1	1	1	10	8	1	2	3	1	2	2	
2	2	2	14	7	2	3	3	2	3	3	
3	3	3	8	9	3	1	2	3	4	4	
4	4	4	12	6	1	4	3	1	5	2	
5	5	1	9	11	2	2	1	2	6	3	
6	6	2	11	10	3	3	4	3	2	4	
7	7	3	7	12	1	1	2	1	3	2	
8	8	4	6	15	2	1	1	2	4	3	
9	9	1	5	14	3	1	1	3	5	4	
0	0	2	13	13	1	2	4	1	6	2	
	а	д	г						в	б	а

#### Методические указания

Перед решением задачи студенту необходимо повторить правила построения и проверки эпюр  $M$  и  $Q$  из курса сопротивления материалов, изучить теорию линий влияния (см. [6, гл. 5–6]; [8, гл. 3]; [14, гл. 3]) и понять принцип расчёта статически определимых многопролётных балок, основанный на использовании поэтажных схем (см. [6, §49]; [8, §4.1]; [14, §14]).

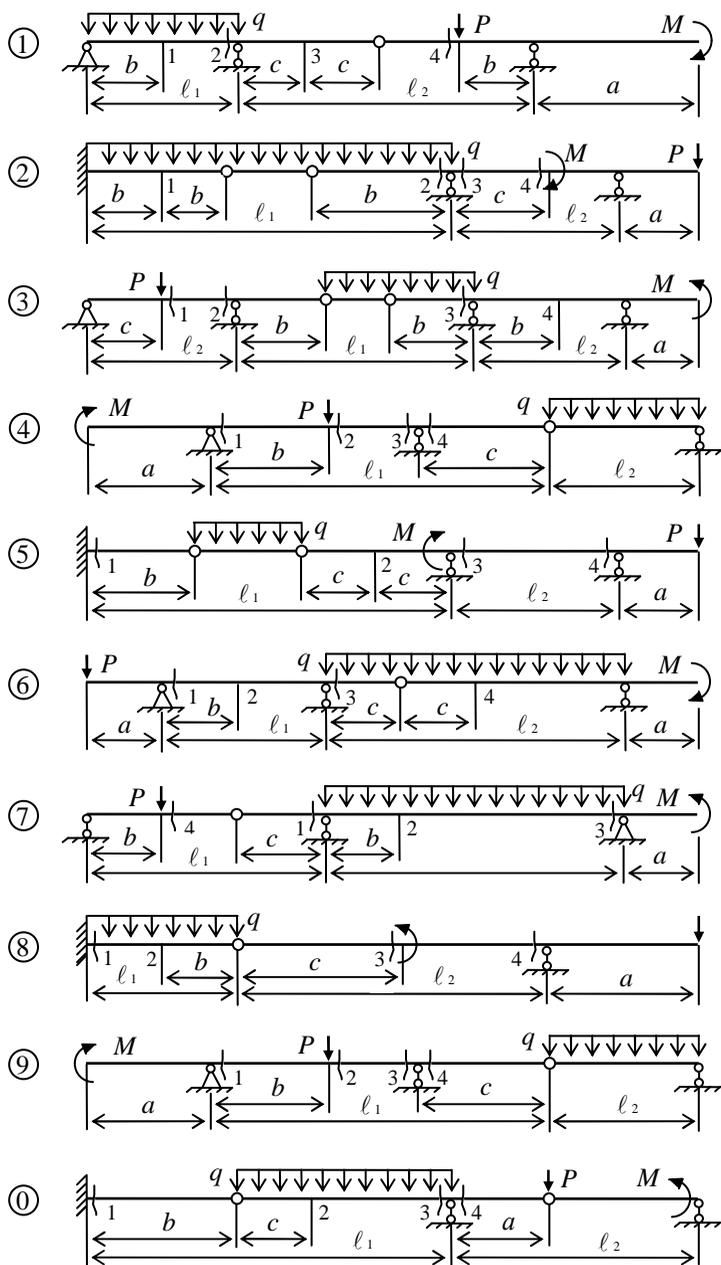


Рис. 1.1

Для построения эпюр  $M$  и  $Q$  в статически определимой многопролётной балке удобнее пользоваться схемой взаимодействия основных и второстепенных частей конструкции (позтажной схемой), которую следует расположить непосредственно под схемой заданной балки.

При построении позтажной схемы нужно вначале выделить основные балки, что легко делается мысленным удалением шарниров, соединяющих балки между собой. Те балки, которые окажутся способными самостоятельно нести нагрузку (заделанные или имеющие две наземные опоры), будут основными. Второстепенные балки имеют только одну наземную опору или не имеют их вовсе. Недостающими опорами для них служат соединительные шарниры.

После построения позтажной схемы заданную балку можно рассматривать как ряд простых балок.

Нагрузка, приложенная к балкам нижнего яруса позтажной схемы, не вызывает усилий в вышележащих балках. Это обстоятельство обуславливает последовательность расчёта многопролётной балки: расчёт начинается с самых верхних балок, после которых по очереди рассматриваются нижележащие балки.

Особенность задачи заключается в том, что для расчёта нижележащих балок необходимо знать силы взаимодействия в шарнирах, являющихся опорными реакциями для вышележащих балок и нагрузкой для нижележащих. Для расчёта схемы каждой отдельной балки должны быть вычерчены отдельно, а эпюры  $M$  и  $Q$  можно строить на общей базе под позтажной схемой. Ординаты эпюры моментов откладываются со стороны растянутых волокон (положительные вниз от оси). Знаков на эпюре моментов обычно не ставят, но обязательно надо проставлять значения характерных ординат с указанием размерности. При построении эпюры поперечных сил положительные ординаты откладываются вверх и на эпюрах обязательно проставляются знаки.

Для построения линий влияния следует вычертить ещё раз позтажную схему, но уже без нагрузки. Обычно линии влияния строятся в два этапа. На первом этапе строится линия влияния искомого усилия в пределах той отдельной балки, к которой относится исследуемое сечение (или опора). На втором этапе добавляется продолжение линии влияния, обусловленное взаимодействием отдельных балок.

### **Пример 1.**

*Задание.* Для балки (рис. 1.2) требуется:

- а) построить эпюры  $M$  и  $Q$  (аналитически);
- б) построить линии влияния всех опорных реакций и линии влияния  $M$  и  $Q$  для заданного сечения;
- в) определить по линиям влияния реакции опор и усилия  $M$  и  $Q$  в заданном сечении от действия нагрузки.

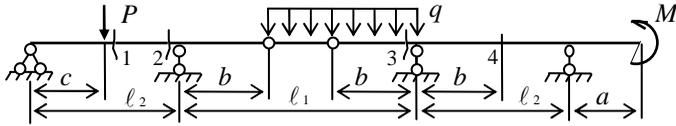


Рис. 1.2

Дано: сечение 2;  $l_1 = 10$  м;  $l_2 = 8$  м;  $a = 1$  м;  $b = 2$  м;  $c = 3$  м;  $q = 1$  кН·м;  $P = 5$  кН;  $M = 3$  кН·м.

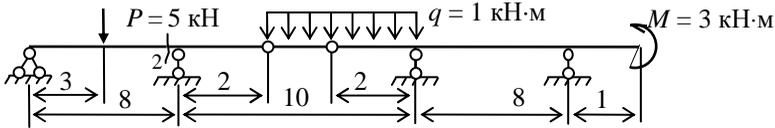


Рис. 1.3

Схема для задачи (рис. 1.3).

Решение.

1. Строим поэтажную схему.

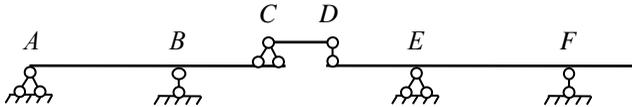


Рис. 1.4

2. Рассматриваем балку CD (рис. 1.5).

Покажем и вычислим реакции опор:

$$\sum M_C = 0; R_D \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0; R_D = 3 \text{ кН.}$$

$$\sum M_D = 0; R_C \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0; R_C = 3 \text{ кН.}$$

Проверка реакций опор:

$$\sum F_y = 0; R_C + R_D - q \cdot 6 = 3 + 3 - 6 = 0;$$

Реакции опор найдены верно.

Участок CD:  $z \in [0; 6]$ :

$$Q(z) = R_C - qz; Q(0) = 3 \text{ кН}; Q(6) = -3 \text{ кН};$$

$$Qz = 0 \text{ при } z = 3/1 = 3 \text{ м};$$

$$M(z) = R_C z - qz^2/2;$$

$$M(0) = 0 \text{ кН·м};$$

$$M(3) = 4,5 \text{ кН·м};$$

$$M(6) = 0 \text{ кН·м.}$$

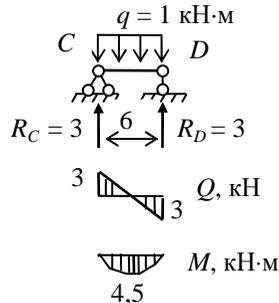
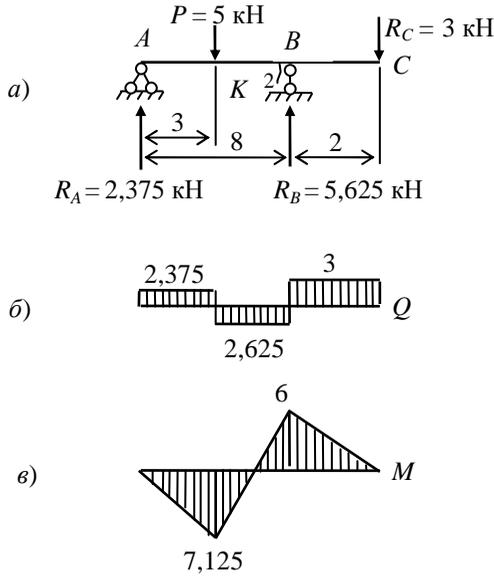


Рис. 1.5

По найденным значениям строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 1.5, б, в).  
 3. Рассматриваем балку  $ABC$  (рис. 1.6).



**Рис. 1.6**

Покажем и вычислим реакции опор:

$$\sum M_A = 0; P \cdot 3 - R_B \cdot 8 + R_C \cdot 10 = 0; R_B = 5,625 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_B = 0; -P \cdot 5 + R_A \cdot 8 + R_C \cdot 2 = 0; R_A = 2,375 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

*Проверка реакций опор:*

$$\sum F_y = 0; R_A - P + R_B - R_C = 2,375 - 5 + 5,625 - 3 = 8 - 8 = 0;$$

Реакции опор найдены верно

Участок  $AK$ :  $z \in [0; 3]$ :

$$Q(z) = R_A = 2,375 \text{ кН}; M(z) = R_A z; M(0) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; M(3) = 7,125 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Участок  $KB$ :  $z \in [0; 5]$ :

$$Q(z) = R_A - P = -2,625 \text{ кН}; M(z) = R_A (3 + z) - Pz;$$

$$M(0) = 7,125 \text{ кН} \cdot \text{м}; M(5) = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Участок  $CB$ :  $z \in [0; 2]$ :

$$Q(z) = P_C = 3 \text{ кН}; M(z) = -R_C z; M(0) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; M(2) = -6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

По найденным значениям строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 1.6, б, в).

4. Рассматриваем балку  $DEF$  (рис. 1.7).

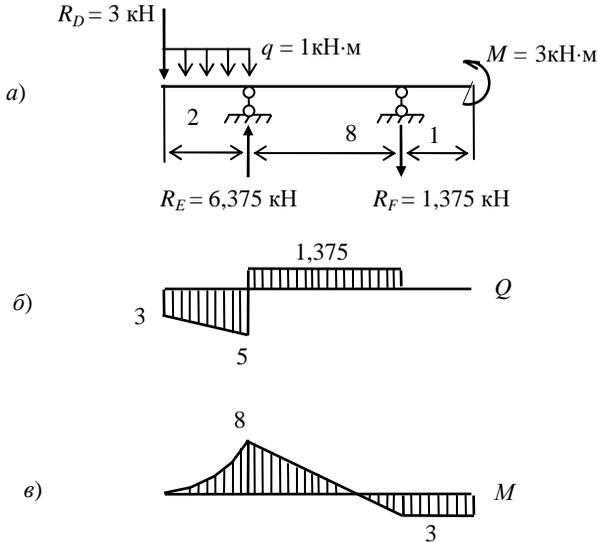


Рис. 1.7

Покажем и вычислим реакции опор:

$$\sum M_E = 0; R_D \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - R_F \cdot 8 + M = 0; R_F = 1,375 \text{ кН.}$$

$$\sum M_F = 0; R_D \cdot 10 + q \cdot 2 \cdot 9 - R_E \cdot 8 + M = 0; R_E = 6,375 \text{ кН.}$$

Проверка реакций опор:

$$\sum F_y = 0; -R_D - q \cdot 2 + R_E - R_F = 6,375 - 6,375 = 0;$$

Реакции опор найдены верно.

Участок  $AK$ :  $z \in [0; 3]$ :

$$Q(z) = R_A = 2,375 \text{ кН}; M(z) = R_A z; M(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M(3) = 7,125 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Участок  $DE$ :  $z \in [0; 2]$ :

$$Q(z) = -R_D - qz; Q(0) = -3 \text{ кН}; Q(2) = -5 \text{ кН}; M(z) = -R_D \cdot z - q \cdot z^2/2;$$

$$M(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M(2) = -8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Участок  $LF$ :  $z \in [0; 1]$ :

$$Q(z) = 0 \text{ кН}; M(z) = M = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

Участок  $FE$ :  $z \in [0; 8]$ :

$Q(z) = -R_F = 1,375$  кН;  $M(z) = M - R_F \cdot z$ ;  $M(0) = 3$  кН·м;  $M(8) = -8$  кН·м;  
По найденным значениям строим эпюры  $Q$  и  $M$  (рис. 1.8, а, б).

5. Окончательно получаем следующие эпюры  $Q$  и  $M$

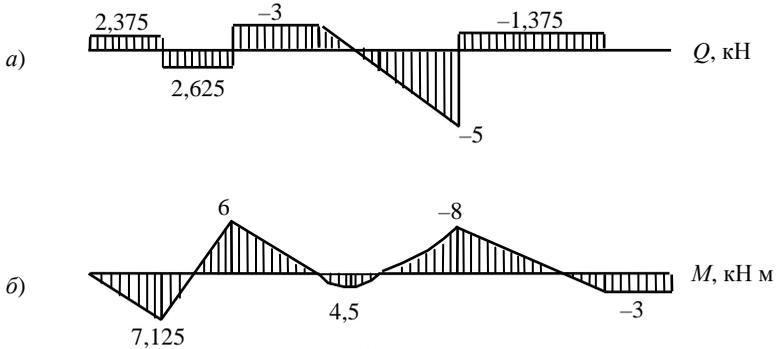


Рис. 1.8

6. Строим линии влияния опорных реакций и внутренних усилий (рис. 1.9).

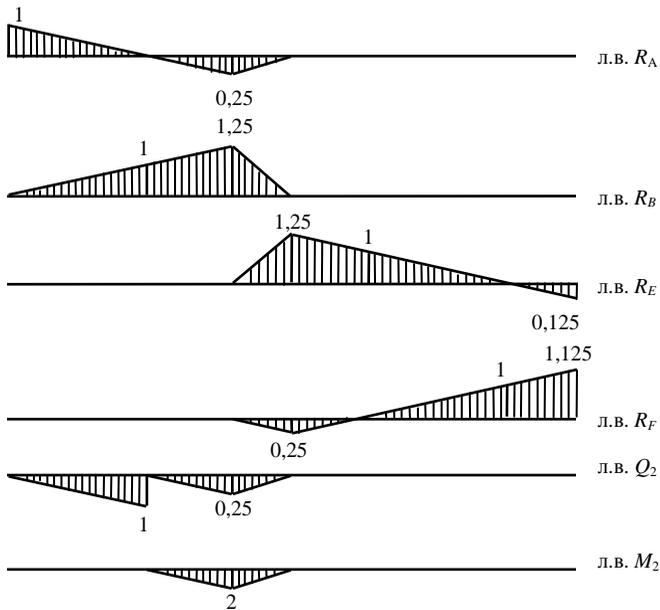


Рис. 1.9

7. Вычисляем реакции опор и внутренние усилия по линиям влияния

$$R_A = 5 \cdot \frac{5}{8} - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 6 = 2,375; \quad R_B = 5 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 6 = 5,625;$$

$$R_E = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 6 + 1 \cdot \frac{1,25+1}{2} \cdot 2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = 6,375;$$

$$R_F = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot (6+2) + 3 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -1,375;$$

$$Q_2 = 5 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,25 \cdot 6 = -2,625; \quad M_2 = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = -6.$$

Задача 2

### РАСЧЁТ ТРЁХШАРНИРНОЙ АРКИ

*Задание.* Для сплошной трёхшарнирной арки (рис. 2.1) с выбранными по шифру из табл. 2 размерами и нагрузкой требуется:

а) определить аналитически момент, поперечную и нормальную силы в сечении  $K$  от действия постоянной нагрузки;

б) построить линии влияния  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для сечения  $K$  и по ним найти значения  $M$ ,  $Q$  и  $N$  от той же постоянной нагрузки.

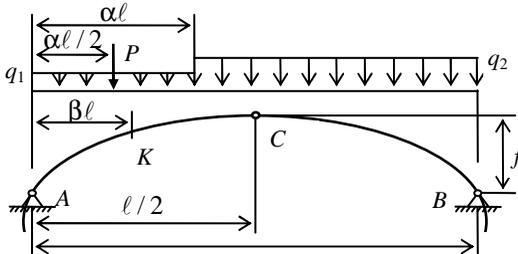


Рис. 2.1

### Методические указания

К решению данной задачи следует приступить после изучения методики расчёта трёхшарнирных арок (см. [6, § 66 – 77]; [8, § 4.2]; [14, гл. 5]).

Схему арки надо вычертить, определив по уравнению её оси достаточное число точек (не менее пяти, включая замковый шарнир) и проведя через них плавную кривую. На схему надо нанести все заданные размеры и нагрузку. Для точки  $K$  надо вычислить координаты и, кроме того, значения синуса и косинуса угла наклона касательной.

Таблица 2

№ строки	Очертание оси арки	$\ell$ , м	$f/\ell$	$\beta$	$\alpha$	$P$ , кН	$q_1$ , кН/м	$q_2$ , кН/м
1	Окружность	26	0,30	0,20	0,12	2	0	2
2	Парабола	36	0,31	0,25	0,14	3	3	0
3	Окружность	18	0,32	0,30	0,16	4	0	4
4	Парабола	28	0,33	0,35	0,18	5	5	0
5	Окружность	20	0,34	0,40	0,22	6	0	6
6	Парабола	32	0,35	0,60	0,24	2	6	0
7	Окружность	22	0,36	0,65	0,26	3	0	5
8	Парабола	34	0,37	0,70	0,28	4	4	0
9	Окружность	24	0,38	0,75	0,32	5	0	3
0	Парабола	30	0,39	0,80	0,34	6	2	0
	в	г	д	е	г	в	б	б

Ординаты точек оси арки и углы наклона касательных определяются по следующим уравнениям:

а) при очертании оси по параболе

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{\ell^2} (\ell - 2x);$$

б) при очертании оси по окружности

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2} - R + f,$$

где  $R = \frac{f}{2} + \frac{\ell^2}{8f}$ ;  $\sin \varphi = \frac{\ell - 2x}{2R}$ ;  $\cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}$ .

Следует помнить, что для правой половины арки угол наклона касательной отрицателен.

Вычисление значений опорных реакций, моментов, поперечных и продольных сил в заданных точках надо иллюстрировать необходимыми формулами.

Для построения линий влияния  $M$ ,  $Q$  и  $N$  надо сначала построить линию влияния распора и подсчитать значение её характерной ординаты. На окончательных линиях влияния должны быть проставлены числовые значения всех характерных ординат, определение которых должно быть приведено в расчёте. Линии влияния надо строить под схемой арки в том же линейном масштабе. Пример построения линий влияния усилий (см. теоретическую часть).

### Пример.

**Задание.** Для сечения  $K$  сплошной трёхшарнирной арки (рис. 2.2) требуется:

а) определить аналитически внутренние усилия  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  от действия заданной нагрузки;

б) построить линии влияния реакции и по линиям влияния найти их значения от действия заданной нагрузки.

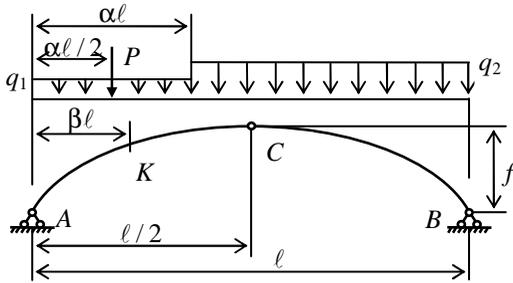


Рис. 2.2

Дано: очертание оси парабола;  $l = 26$  м;  $f/l = 0,31$ ;  $\beta = 0,3$ ;  $\alpha = 0,12$ ;  $P = 6$  кН;  $q_1 = 0$ ;  $q_2 = 3$  кН·м.

**Решение.**

1. Определяем положение сечения  $K$ :

$$x = 7,8 \text{ м}; y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); y = \frac{4 \cdot 8,06}{26^2} 7,8(26-7,8) = 6,77 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4f}{l^2} (l-2x); \operatorname{tg} \varphi = \frac{4 \cdot 8,06}{26^2} (26-2 \cdot 7,8) = 0,496;$$

$$\varphi = 29,31^\circ; \sin \varphi = 0,444; \cos \varphi = 0,896.$$

2. Находим реакции опор:

$$\sum M_B = 0 \text{ кН}; \sum M_A = 0 \text{ кН}; \sum M_C^{\text{np}} = 0 \text{ кН}.$$

Схема для задачи рис. 2.3

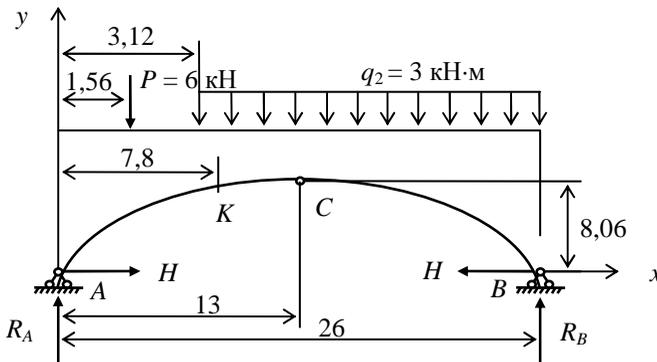


Рис. 2.3

3. Вычисляем балочные усилия в сечении  $K$ :

$$Q^0 = R_A - P - q(x_K - 3,12) = 35,84 - 6 - 3 \cdot 4,68 = 15,8 \text{ кН};$$

$$M^0 = R_A \cdot 7,8 - P \cdot 6,24 - q \cdot 4,68^2 / 2 =$$

$$= 35,84 \cdot 7,8 - 6 \cdot 6,24 - 3 \cdot \frac{4,68^2}{2} = 209,26 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. Вычисляем усилия в сечении  $K$  арки:

$$M_K = M^0 - H y_K = 209,26 - 31,13 \cdot 6,77 = -1,49 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_K = Q^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = 15,8 \cdot 0,896 - 31,13 \cdot 0,444 = 0,335 \text{ кН};$$

$$N_K = -Q^0 \sin \varphi_K - H \cos \varphi_K = -15,8 \cdot 0,444 - 31,13 \cdot 0,896 = -34,91 \text{ кН}.$$

5. Строим линии влияния реакций 2.4.

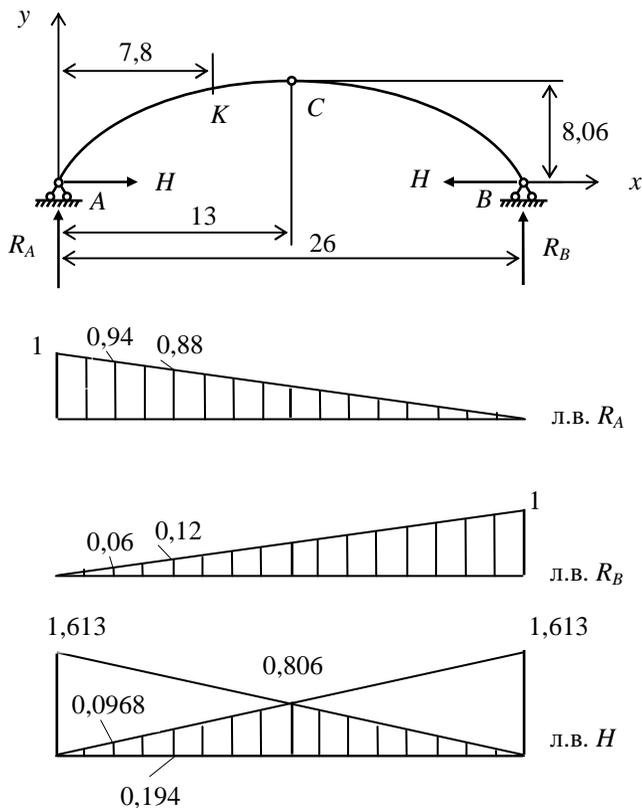


Рис. 2.4

6. Вычисляем значения усилий по линиям влияния.

$$R_A = 6 \cdot 0,94 + 3 \cdot 0,5 \cdot 0,88 \cdot 22,88 = 35,84 \text{ кН};$$

$$R_B = 6 \cdot 0,06 + 3 \cdot \frac{0,12+1}{2} \cdot 22,88 = 38,8 \text{ кН};$$

$$H = 6 \cdot 0,0968 + 3 \cdot 0,5 \cdot (0,806 \cdot 26 - 0,194 \cdot 3,12) = 31,11 \text{ кН}.$$

Контрольная работа 2

Задача 3

### РАСЧЁТ ПРОСТОЙ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

*Задание.* Для фермы (рис. 3.1) с выбранными по шифру из табл. 3 размерами и нагрузкой требуется:

- определить (аналитически) усилия во всех стержнях фермы;
- построить линии влияния усилий в стержнях заданной панели;
- по линиям влияния найти значения усилий от заданной нагрузки и сравнить их со значениями, полученными аналитически.

Таблица 3

№ строки	№ схемы	$\ell$ , м	$h$ , м	$P$ , кН	№ панели	№ строки	№ схемы	$\ell$ , м	$h$ , м	$P$ , кН	№ панели
1	1	26	3	2	2	6	6	32	4	3	3
2	2	36	4	3	3	7	7	22	5	2	4
3	3	18	5	2	4	8	8	34	6	3	5
4	4	28	6	3	5	9	9	24	3	2	2
5	5	20	3	2	2	0	0	30	4	3	3
	в	г	д	е	а		в	г	д	е	а

### Методические указания

Ферма – это геометрически неизменяемая система, расчётная схема которой состоит из прямых стержней, соединённых в узлах идеальными шарнирами.

Перед решением задачи студенту необходимо изучить способы вычисления усилий в стержнях статически определимых ферм и построение для этих усилий линий влияния (см. [1, § 2.4]; [6, гл. 7]; [8, § 4.3]; [14, § 19 – 24]).

Усилие в каждом стержне следует определять непосредственно через нагрузку и опорные реакции, а не одно через другое, т.е. для вычисления

каждого усилия надо найти рациональный способ (вырезания узлов; моментной точки; проекций). Помимо названных способов необходимо иметь представление и о других способах расчёта, которые применяются для более сложных ферм: способ замкнутого сечения; способ совместных сечений; способ замены связей.

При определении усилий необходимо показывать используемые сечения, приводить соответствующие уравнения, а все величины, входящие в них, должны быть указаны на чертеже. Необходимые геометрические характеристики (углы и размеры) надо определять аналитически, а не брать по масштабу.

Построение линий влияния должно сопровождаться необходимыми расчётными формулами. Линии влияния строятся под схемой фермы; на них должны быть проставлены числовые значения ординат под всеми узлами. Найденные значения усилий по линиям влияния надо сравнить с результатами аналитического определения. Пример расчёта и построения линий влияния в простой ферме (см. теоретическую часть).

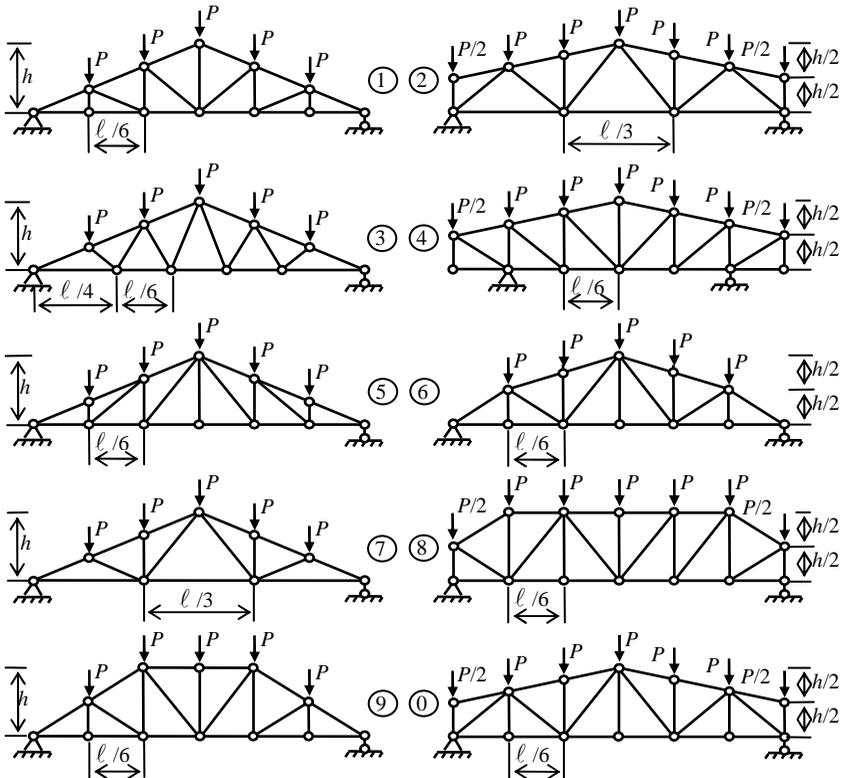


Рис. 3.1

#### Задача 4

### РАСЧЁТ СЛОЖНОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

*Задание.* Для шпренгельной фермы (рис. 4.1) с выбранными по шифру из табл. 4 размерами и нагрузкой требуется:

- а) определить (аналитически) усилия во всех стержнях заданной панели от действия постоянной нагрузки;
- б) построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- в) установить наиболее опасное положение временной нагрузки для каждого стержня отдельно и найти величины максимальных и минимальных усилий;
- г) определить максимальные и минимальные значения расчётных усилий во всех стержнях заданной панели (с учётом постоянной нагрузки).

**Таблица 4**

№ строки	№ схемы	$d$ , м	Постоянная нагрузка $P$ , кН	№ панели (считая слева)	$h$ , м	Временная нагрузка $P_{вр}$ , кН
1	1	3,0	12,0	2	1,4	16,0
2	2	3,5	12,5	3	2,0	17,0
3	3	4,0	13,0	4	1,9	18,0
4	4	4,5	13,5	5	1,6	18,5
5	5	3,6	11,5	2	1,8	17,5
6	6	4,2	11,0	3	1,5	19,0
7	7	2,7	20,0	4	2,1	20,0
8	8	3,2	19,0	5	2,2	22,5
9	9	3,3	18,0	2	2,3	24,0
0	0	3,4	17,5	3	1,7	23,0
	б	в	г	а	д	е

#### Методические указания

Ферма – это геометрически неизменяемая система, расчётная схема которой состоит из прямых стержней, соединённых в узлах идеальными шарнирами.

Панелью фермы считается расстояние между узлами основной решётки, следовательно, должно быть определено восемь усилий.

Постоянная и временная нагрузки для схем 2, 4, 6, 7, 8 приложены в узлах нижнего пояса, а для остальных схем – в узлах верхнего пояса.

Перед решением задачи студенту необходимо изучить способы вычисления усилий в стержнях статически определимых шпренгельных

ферм и построение для этих усилий линий влияния (см. [1, § 2.4]; [6, гл. 7]; [8, § 4.3]; [14, § 19 – 25]).

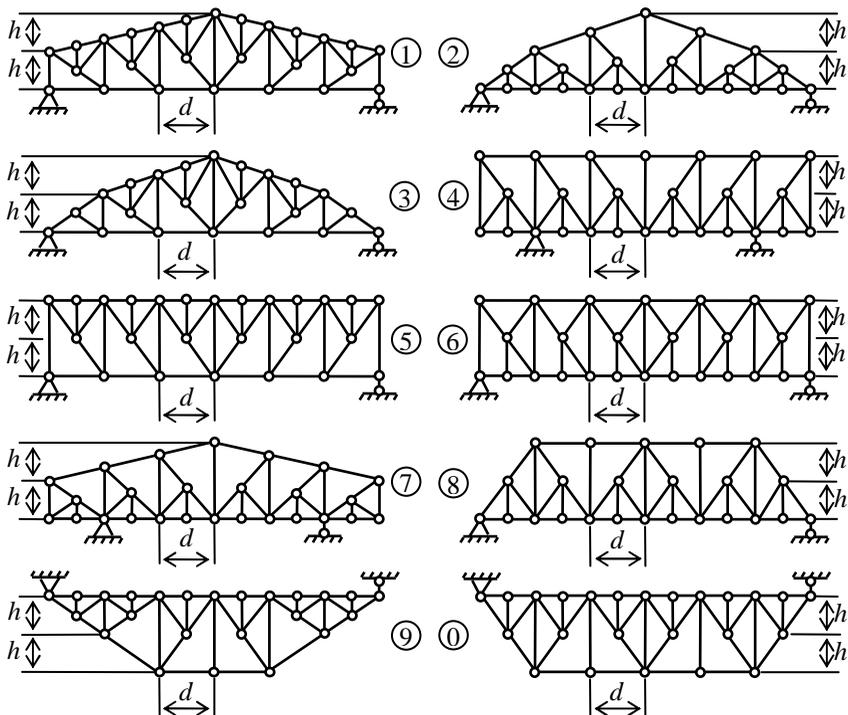


Рис. 4.1

Усилие в каждом стержне следует определять непосредственно через нагрузку и опорные реакции, а не через какое-либо другое, уже найденное усилие. Этого не удаётся сделать лишь в некоторых случаях, например для средней стойки в схеме 1.

Особенностью расчёта шпренгельных ферм является то, что для некоторых стержней нельзя провести удачного сечения (пересекающего не более трёх стержней). В связи с этим появляется необходимость переходить к схеме взаимодействия шпренгеля с основной решёткой. Для успешного расчленения заданной фермы на основную и шпренгель необходимо твёрдо усвоить типы шпренгелей.

Следует иметь в виду, что в большинстве случаев (для всех заданных схем) усилия в элементах, входящих и в шпренгель, и в основную решётку, удаётся определить, рассматривая непосредственно заданную ферму. В связи с этим рекомендуется сначала рассмотреть заданную схему и най-

ти все усилия, для которых возможно провести удачное сечение. Остальные усилия определяются из рассмотрения только шпренгеля или только основной решётки. При этом в работе обязательно нужно приводить схемы шпренгеля и основной решётки отдельно с указанием узловой нагрузки, полученной в результате передачи местной нагрузки со шпренгеля в узлы основной решётки.

Производя определение усилий, надо приводить все схемы, разрезы и указывать все величины, входящие в расчётные формулы. Геометрические характеристики (плечи, углы и пр.) должны быть определены аналитически, а не по масштабу.

При построении линий влияния схемы фермы (заданная, основная и шпренгель) должны быть вычерчены заново, без нагрузки. Должны быть приведены все сечения и расчёты, а на полученных линиях влияния должны быть проставлены числовые значения ординат под каждым узлом фермы.

Для определения максимальных усилий от временной нагрузки надо загрузить все узлы, которым соответствуют положительные значения ординат линии влияния. Для определения минимальных усилий – узлы, соответствующие отрицательным ординатам линии влияния.

Максимальное расчётное усилие определяется суммой усилий от постоянной нагрузки и максимального усилия от временной нагрузки. Минимальное расчётное усилие равно сумме усилия от постоянной нагрузки и минимального усилия от временной нагрузки. Максимальные и минимальные расчётные усилия должны быть определены для всех восьми стержней и сведены в таблицу. Пример оформления записи приведён ниже.

**Таблица подсчёта расчётных усилий**

№ стержня	Усилие от постоянной нагрузки, кН	Усилия от временной нагрузки, кН		Расчётные усилия, кН	
		максимальное	минимальное	максимальное	минимальное
1–2	5,5	8,3	–0,2	13,8	5,3
2–3	–6,4	0,4	–9,2	–6,0	–15,6

**Пример.** Для шпренгельной фермы (рис. 4.2) требуется:

- определив (аналитически) усилия во всех стержнях заданной панели от действия постоянной нагрузки;
- построить линии влияния усилий в тех же стержнях;
- установить наиболее опасное положение временной нагрузки для каждого стержня отдельно и найти величины максимальных и минимальных усилий;

г) определить максимальные и минимальные значения расчетных усилий во всех стержнях заданной панели (с учетом постоянной нагрузки).

Дано:  $d = 4,2$  м;  $P = 11$  кН; панель 3;  $h = 3,5$  м;  $P_{вр} = 20$  кН.

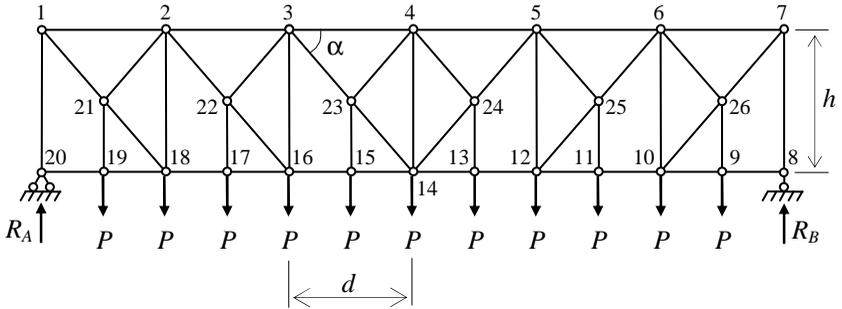


Рис. 4.2

Решение:

а) определяем (аналитически) усилия во всех стержнях заданной панели от действия постоянной нагрузки.

Находим реакции опор  $R_A = R_B = P \cdot 11 / 2 = 11 \cdot 11 / 2 = 60,5$  кН.

Предварительно определим характеристики угла  $\alpha$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = h/d = 3,5/4,2 = 0,7778, \quad \sin \alpha = 0,6139, \quad \cos \alpha = 0,7894.$$

Проводим сечение I-I и рассматриваем равновесие левой отсечённой части фермы (рис. 4.3):

$$\sum M_3 = 0; \quad R_A \cdot 2d - P(1,5 + 1 + 0,5)d + N_{15-16}h = 0,$$

$$N_{15-16} = (R_A \cdot 2d - P(1,5 + 1 + 0,5))d/h,$$

$$N_{15-16} = (60,52 + 11(1,5 + 1 + 0,5))4,2/3,5 = 105,6 \text{ кН}.$$

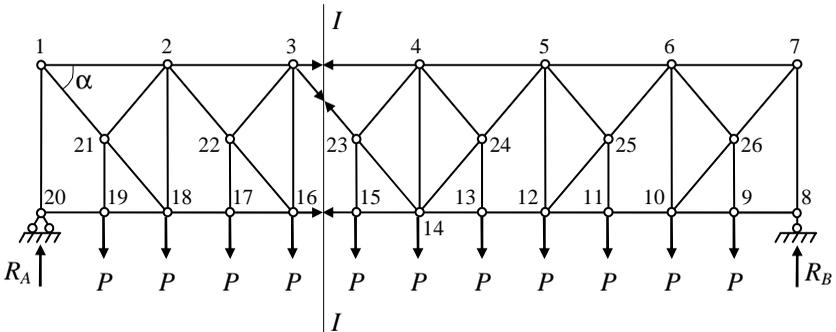


Рис. 4.3

$$\sum M_{14} = 0; R_A 3d - P(2,5 + 2 + 1,5 + 1)d + N_{3-4}h = 0,$$

$$N_{3-4} = (-R_A 3 + P(2,5 + 2 + 1,5 + 1))d/h,$$

$$N_{3-4} = (-60,5 \cdot 3 + 11(2,5 + 2 + 1,5 + 1))4,2/3,5 = -125,4 \text{ кН}.$$

$$\sum F_y = 0; R_A - P \cdot 4 - N_{3-23} \sin \alpha = 0,$$

$$N_{3-23} = (R_A 3 - P \cdot 4)/\sin \alpha, N_{3-23} = (60,5 - 11 \cdot 4)/0,6139 = 26,88 \text{ кН}.$$

Вырезаем узел 15 (рис. 4.4).

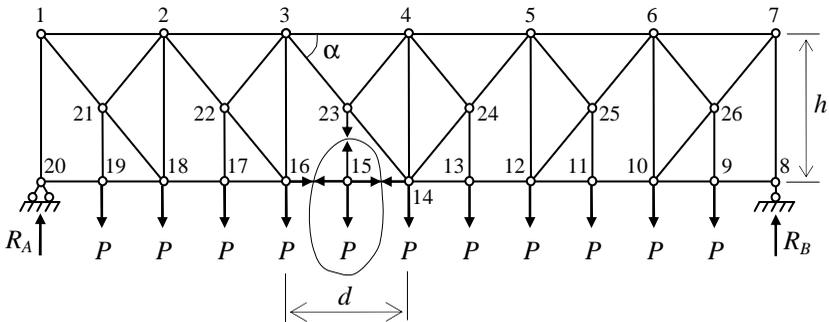


Рис 4.4

$$\sum y = 0.$$

$$-P + N_{15-23} = 0, N_{15-23} = P, N_{15-23} = 11 \text{ кН}.$$

$$\sum F_x = 0.$$

$$N_{14-15} - N_{15-16} = 0, N_{14-15} = N_{15-16} = 105,6 \text{ кН}.$$

Выделяем шпренгель из заданной панели (рис. 4.5).

Рассматриваем равновесие узла 23 шпренгеля.

$$\sum F_y = 0; -\Pi + 2N_{4-23}\sigma \sin \alpha = 0,$$

$$N_{4-23} = \Pi/(2\sigma \sin \alpha), N_{4-23} = 11/(2 \cdot 0,6139) = 8,96 \text{ кН}.$$

Удаляем из фермы все шпренгели, заменив их реакциями (рис. 4.6).

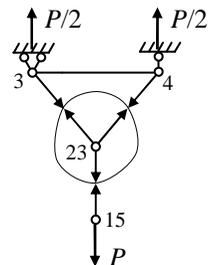


Рис. 4.5

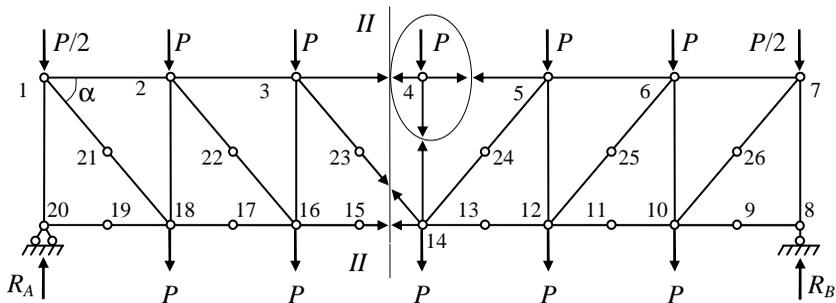


Рис. 4.6

Проводим сечение II-II и рассматриваем равновесие левой отсечённой части фермы.

$$\sum F_y = 0, R_A - P \cdot 4,5 - N_{14-23} \sin \alpha = 0, N_{14-23} = (R_A - P \cdot 4,5) / \sin \alpha,$$

$$N_{14-23} = (60,5 - 11 \cdot 4,5) / 0,6139 = 17,92 \text{ кН.}$$

Вырезаем узел 4.

$$\sum F_y = 0, -P + N_{4-14} = 0, N_{4-14} = -P = -11 \text{ кН;}$$

б) строим линии влияния реакций опор (рис. 4.7).

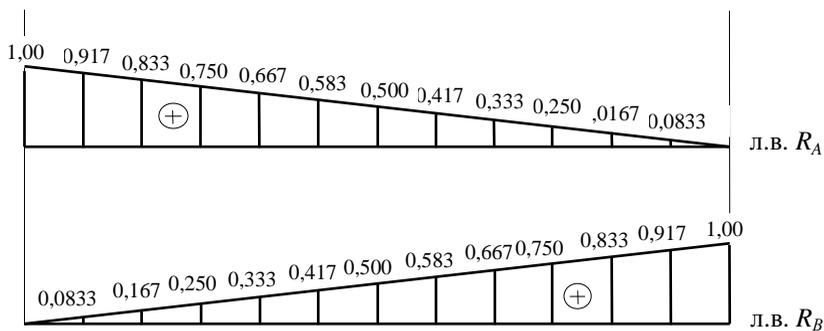


Рис. 4.7

Строим линию влияния  $N_{15-16}$  (рис. 4.7).  $\sum M_3 = 0$ .

$$N_{15-16}^{\text{лев}} = R_B \cdot 4d/h = R_B \cdot 4 \cdot 4,2/3,5 = 4,8R_B,$$

$$N_{15-16}^{\text{пр}} = R_A \cdot 2d/h = R_A \cdot 2 \cdot 4,2/3,5 = 2,4R_A.$$

Проверка. Найдём усилие в стержне, загрузив линию влияния.

$$N_{15-16} = 11 (0,4 + 0,8 + 1,2 + 1,6 + 1,4 + 1,2 + 1 + 0,8 + 0,6 + 0,4 + 0,2) = 105,6 \text{ кН.}$$

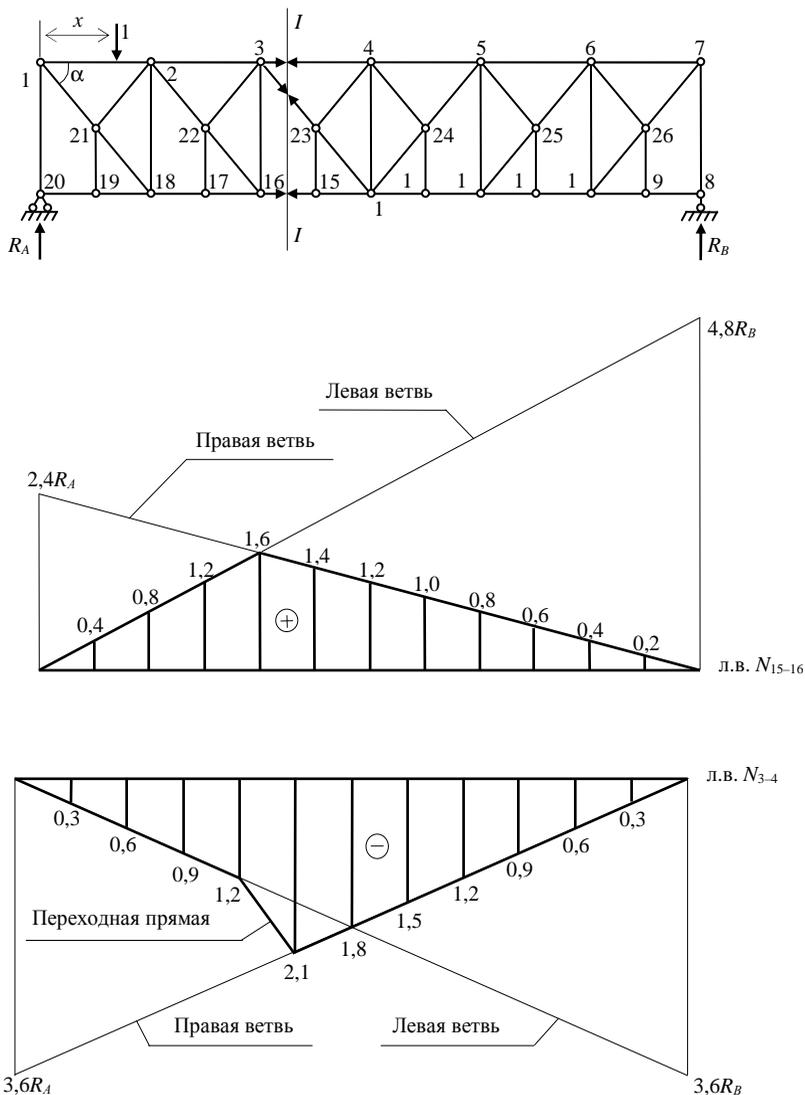


Рис. 4.8

Строим линию влияния  $N_{3-4}$  (рис. 4.8).  $\sum M_{14} = 0$ .

$$N_{3-4}^{\text{лев}} = -R_B \cdot 3d/h = -R_B \cdot 3 \cdot 4,2/3,5 = -3,6R_B,$$

$$N_{3-4}^{\text{пр}} = -R_A \cdot 3d/h = -R_A \cdot 2 \cdot 4,2/3,5 = 3,6R_A.$$

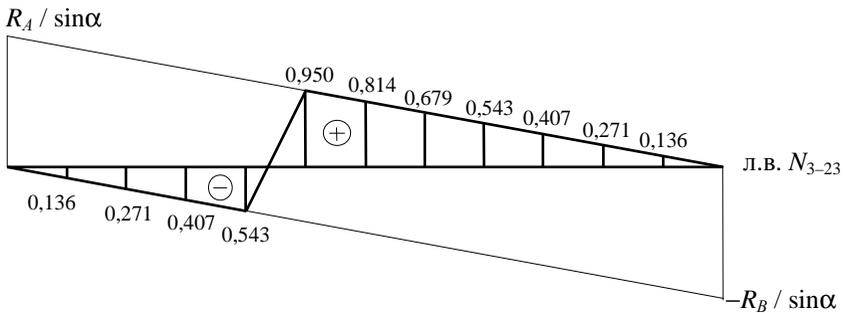
*Проверка*

$$N_{3-4} = -11(0,3 + 0,6 + 0,9 + 1,2 + 2,1 + 1,8 + 1,5 + 1,2 + 0,9 + 0,6 + 0,3) = -125,4 \text{ кН.}$$

Строим линию влияния  $N_{3-23}$  рис 4.9.  $\sum F_y = 0$ .

$$N_{3-23}^{\text{лев}} = -R_B / \sin \alpha = -R_B / 0,6139,$$

$$N_{3-23}^{\text{пр}} = R_A / \sin \alpha = -R_A / 0,6139.$$



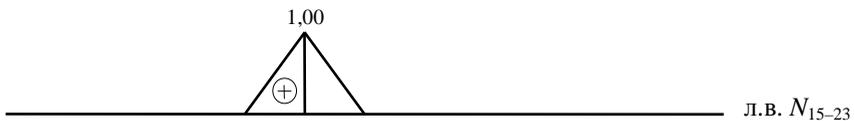
**Рис. 4.9**

*Проверка*

$$N_{3-23} = 11 (-0,136 - 0,271 - 0,407 - 0,543 + 0,95 + 0,814 + 0,679 + 0,543 + 0,407 + 0,271 + 0,136).$$

$$N_{3-23}^{\text{лев}} = 26,87 \text{ кН.}$$

Строим линию влияния  $N_{15-23}$  (рис 4.10)



**Рис. 4.10**

Проверка

$$N_{15-23} = 11 \text{ кН.}$$

Строим линию влияния  $N_{14-15}$  (рис. 4.11)

$$N_{14-15} = N_{15-16} \cdot$$

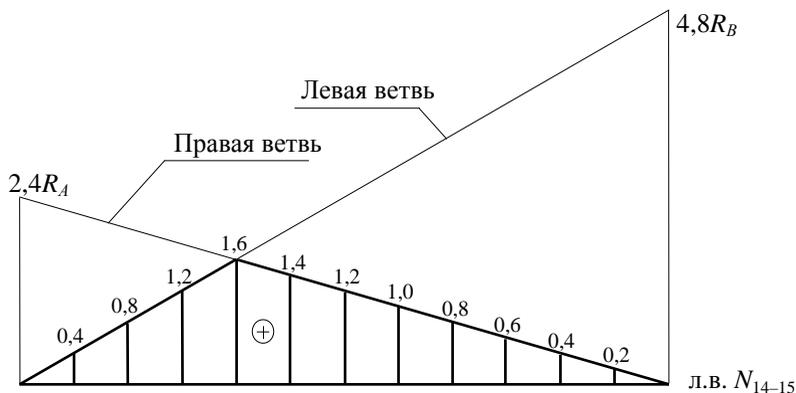


Рис. 4.11

Проверка

$$N_{14-15} = 11(0,4 + 0,8 + 1,2 + 1,6 + 1,4 + 1,2 + 1 + 0,8 + 0,6 + 0,4 + 0,2) = 105,6 \text{ кН,}$$

Строим линию влияния  $N_{4-23}$  (рис. 4.12)

$$N_{15-23} / 2(\sin \alpha)$$

$$N_{4-23} = N_{15-23} / (2 \cdot 0,6139) = N_{15-23} / 1,2278.$$



Рис. 4.12

Проверка

$$N_{4-23} = 11 \cdot 0,814 = 8,95 \text{ кН.}$$

Строим линию влияния  $N_{14-23}$  (рис. 4.13)

$$\sum Fy = 0.$$

$$N_{14-23}^{\text{лев}} = -R_B / \sin \alpha = -R_B / 0,6139,$$

$$N_{14-23}^{\text{пр}} = R_A / \sin \alpha = R_A / 0,6139.$$

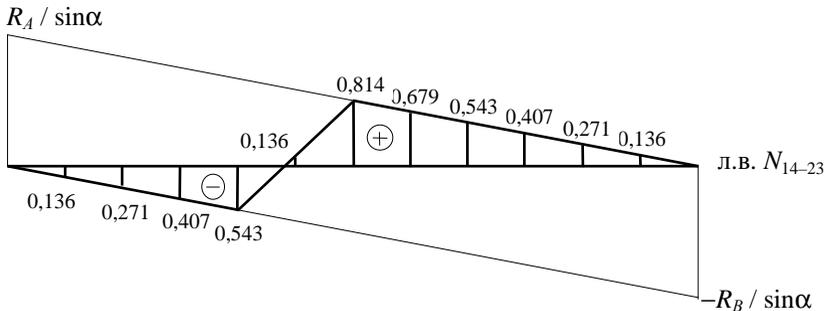


Рис. 4.13

*Проверка*

$$N_{14-23} = 11(-0,136 - 0,271 - 0,407 - 0,543 + 0,136 + 0,814 + 0,679 + 0,543 + 0,407 + 0,271 + 0,136)$$

$$N_{14-23} = 17,92 \text{ кН.}$$

Строим линию влияния  $N_{4-14}$  (рис. 4.14).

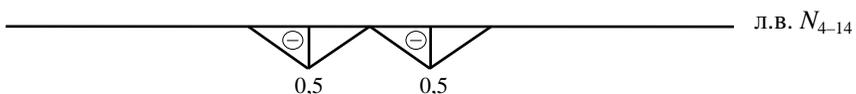


Рис 4.14

*Проверка*

$$N_{4-14} = 11(-0,5 - 0,5) = -11 \text{ кН;}$$

в) установим наиболее опасное положение временной нагрузки для каждого стержня отдельно и найдём величины максимальных и минимальных усилий.

**Стержень 15–16.**

$$N_{15-16 \text{ max}}^{\text{вр}} = p^{\text{вр}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{15-16 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot (0,4 + 0,8 + 1,2 + 1,6 + 1,4 + 1,2 + 1 + 0,8 + 0,6 + 0,4 + 0,2) = 192 \text{ кН.}$$

$$N_{15-16 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}}, N_{15-16 \min}^{\text{BP}} = 0.$$

### Стержень 3–4.

$$N_{3-4 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{3-4 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot (0,3 + 0,6 + 0,9 + 1,2 + 2,1 + 1,8 + 1,5 + 1,2 + 0,9 + 0,6 + 0,3) = -228 \text{ кН.}$$

$$N_{3-4 \max}^{\text{BP}} = 0, N_{3-4 \min}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}},$$

### Стержень 3–23.

$$N_{3-23 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{3-23 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot (0,95 + 0,814 + 0,679 + 0,543 + 0,407 + 0,271 + 0,136) = 76 \text{ кН.}$$

$$N_{3-23 \min}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}},$$

$$N_{3-23 \min}^{\text{BP}} = 20(-0,136 - 0,271 - 0,407 - 0,543) = -27,14 \text{ кН.}$$

### Стержень 15–23.

$$N_{15-23 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{15-23 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ кН, } N_{15-23 \min}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}},$$

$$N_{15-23 \min}^{\text{BP}} = 0.$$

### Стержень 14–15.

$$N_{14-15 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{14-15 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot (0,4 + 0,8 + 1,2 + 1,6 + 1,4 + 1,2 + 1 + 0,8 + 0,6 + 0,4 + 0,2) = 192 \text{ кН.}$$

$$N_{14-15 \min}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}}, N_{14-15 \min}^{\text{BP}} = 0.$$

### Стержень 4–23.

$$N_{4-23 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{4-23 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot 0,814 = 16,28 \text{ кН, } N_{4-23 \min}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}}, N_{4-23 \min}^{\text{BP}} = 0.$$

### Стержень 3–23.

$$N_{3-23 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{3-23 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot (0,136 + 0,814 + 0,679 + 0,543 + 0,407 + 0,271 + 0,136) = 59,72 \text{ кН.}$$

$$N_{3-23 \min}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}},$$

$$N_{3-23 \max}^{\text{BP}} = 20 \cdot (-0,136 - 0,271 - 0,407 - 0,543) = -27,14 \text{ кН.}$$

### Стержень 4–14.

$$N_{4-14 \max}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"+"}}$$

$$N_{4-14 \max}^{\text{BP}} = 0, N_{4-14 \min}^{\text{BP}} = p^{\text{BP}} \sum y_i^{\text{"-"}}; N_{4-14 \min}^{\text{BP}} = 20(-0,5 - 0,5) = -20 \text{ кН;}$$

г) определяем максимальные и минимальные значения расчётных усилий во всех стержнях заданной панели (с учётом постоянной нагрузки).

Стержень	Усилие от постоянной нагрузки, кН	Усилия от временной нагрузки, кН		Расчётные усилия, кН	
		max	min	max	min
15–16	105,6	192	0	297,6	105,6
3–4	-125,4	0	-228	-125,4	-353,4
3–23	26,88	76	-27,14	102,88	-0,26
15–23	11	20	0	31	11
14–15	105,6	192	0	297,6	105,6
4–23	8,96	16,28	0	25,24	8,96
14–23	17,92	59,72	-27,14	77,64	-9,22
4–14	-11	0	-20	-11	-31

## Контрольная работа 3

### Задача 5

#### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКЕ

*Задание.* Для балки (рис. 5.1) с выбранными по шифру из табл. 5 размерами и нагрузкой определить прогиб одного из сечений.

**Таблица 5**

№ строки	№ схемы	$\ell$ , м	$q$ , кН/м	$P$ , кН	№ сечения	№ строки	№ схемы	$\ell$ , м	$q$ , кН/м	$P$ , кН	№ сечения
1	1	6	2	3	1	6	6	13	4	5	3
2	2	8	3	2	2	7	7	14	2	5	1
3	3	9	4	5	3	8	8	15	3	2	2
4	4	10	3	2	1	9	9	16	4	3	3
5	5	12	2	3	2	0	0	18	3	2	1
	е	г	д	в	а		е	г	д	в	а

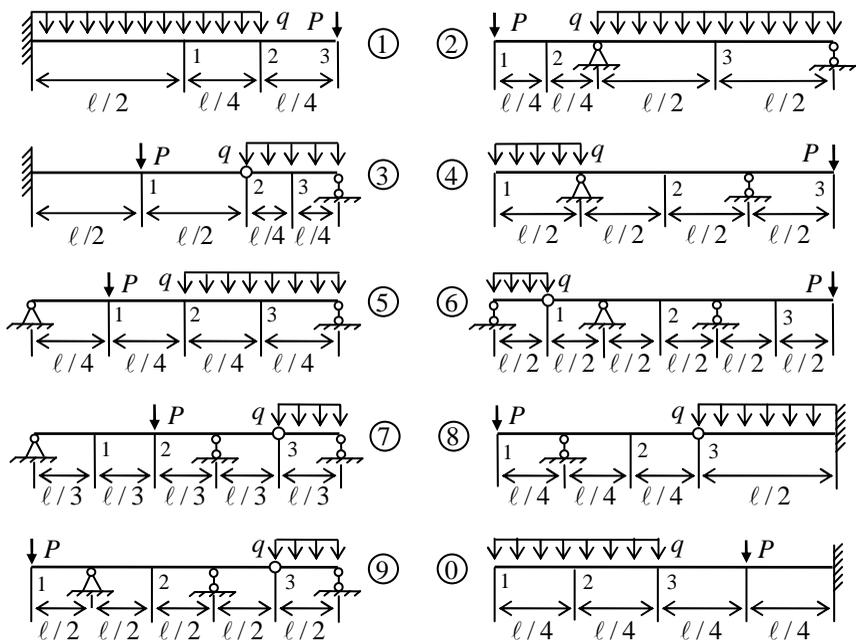


Рис. 5.1

### Методические указания

Расчёт сооружений на жёсткость связан с определением их деформаций, т.е. вычислением перемещений отдельных точек. Кроме того, умение определять перемещения является основой для расчёта статически неопределимых систем, поэтому усвоение этой темы имеет большое значение для второй части курса.

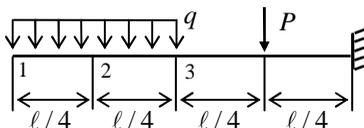
Решению задачи должно предшествовать изучение энергетических методов определения перемещений (см. [1, § 3.1–3.2]; [6, гл. 11]; [8, § 5.2 – 5.11]; [14, гл. 7]). Особое внимание надо уделить теоремам о взаимности работ и взаимности перемещений.

Перемещения следует определять с помощью интеграла Мора путём численного перемножения эпюр любым подходящим способом по формулам Верещагина, Симпсона, трапеций.

Построение эпюр моментов (грузовых и единичных) следует сопровождать расчётами. Сами эпюры надо строить со стороны растянутых волокон.

Изгибную жёсткость для всех участков балки принять одинаковой.

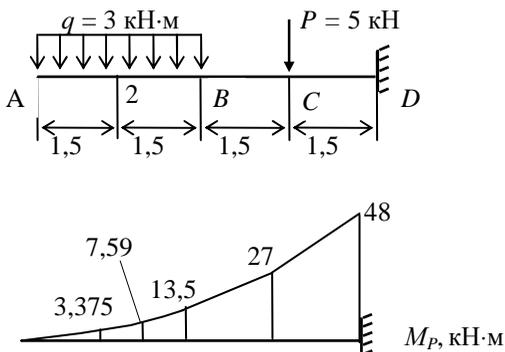
**Задание.** Для балки определить прогиб сечения 2 (рис. 5.2).  
 Дано:  $\ell = 6$  м;  $q = 3$  кН/м;  $P = 5$  кН.



**Рис. 5.2**

**Решение.**

1. Рассматриваем грузовое состояние (рис. 5.3). Запишем уравнения грузовых моментов на каждом силовом участке (начало координат сечения совпадает с началом участка)



**Рис. 5.3**

Участок  $AB$ :  $z \in [0; 3]$  м;

$$M(z) = -3z^2/2; \quad M(0) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(3) = -13,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(1,5) = -3,375 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M(2,25) = -7,59 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Участок  $BC$ :  $z \in [0; 1,5]$  м;

$$M(z) = -3 \cdot 3(1,5 + z); \quad M(0) = -13,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(1,5) = -27 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Участок  $CD$ :  $z \in [0; 1,5]$  м;

$$M(z) = -3 \cdot 3(3 + z) - Pz; \quad M(0) = -27 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M(1,5) = -48 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

По полученным значениям строим эпюру  $M_p$ .

2. Рассматриваем единичное состояние (рис. 5.4)

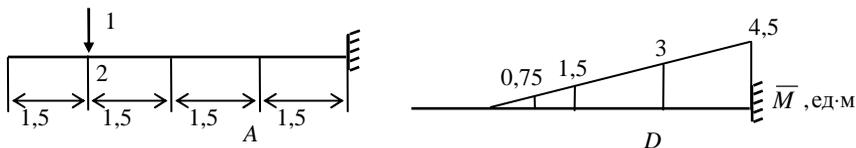


Рис. 5.4

Запишем уравнения моментов на каждом силовом участке от действия единичной силы, приложенной в сечении 2:

Участок A2:

$$z \in [0; 1,5] \text{ м}; M(z) = 0.$$

Участок 2D:

$$z \in [0; 4,5] \text{ м}; M(z) = -1z; M(0) = 0 \text{ ед·м}; M(0,75) = -0,75 \text{ ед·м}; \\ M(3) = -3 \text{ ед·м}; M(4,5) = -4,5 \text{ ед·м}$$

По полученным значениям строим эпюру  $\bar{M}$ .

3. Вычисляем перемещение, используя интеграл Мора

$$\Delta = \frac{1,5}{6EI} (4 \cdot 7,59 \cdot 0,75 + 13,5 \cdot 1,5) + \frac{1,5}{6EI} (2 \cdot 13,5 \cdot 1,5 + 2 \cdot 27 \cdot 3 + 3 \cdot 13,5 + 27 \cdot 1,5) + \\ + \frac{1,5}{6EI} (2 \cdot 27 \cdot 3 + 2 \cdot 48 \cdot 4,5 + 3 \cdot 48 + 27 \cdot 4,5) = \frac{317}{EI}$$

Поскольку значение положительно, перемещение происходит в направлении действия единичной силы (т.е. вниз).

Задача 6

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЕ

*Задание.* Для рамы (рис. 6.1) с выбранными по шифру из табл. 6 размерами и нагрузкой требуется определить полное перемещение и угол поворота одного из сечений. Принять жёсткость горизонтальных участков равной  $EJ_1$  и жёсткость вертикальных участков равной  $EJ_2$ .

#### Методические указания

При выполнении данной задачи надо следовать указаниям к задаче 5. Кроме того, поскольку в данной задаче жёсткости отдельных стержней различны и заданы только их соотношения, искомые перемещения должны быть выражены через  $EJ_1$  или  $EJ_2$ .

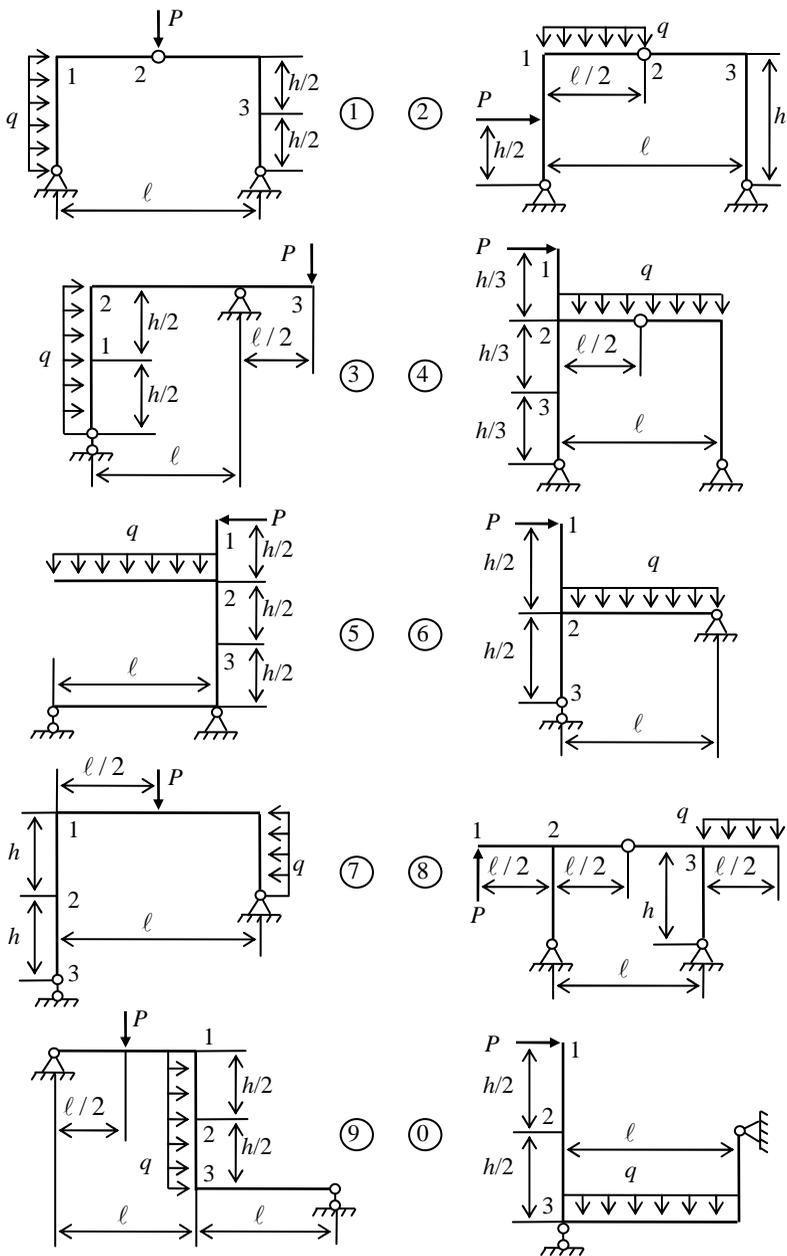


Рис. 6.1

Таблица 6

№ строки	№ схемы	$\ell$ , м	$q$ , кН/м	$P$ , кН	№ сечения	$h$ , м	$J_2 : J_1$
1	1	6	2	3	1	5	1:2
2	2	8	3	2	2	6	1:3
3	3	9	4	5	3	7	2:3
4	4	10	3	2	1	8	3:2
5	5	12	2	3	2	9	3:5
6	6	13	4	5	3	10	4:3
7	7	14	2	5	1	12	3:4
8	8	15	3	2	2	13	5:3
9	9	16	4	3	3	14	3:1
0	0	18	3	2	1	15	2:1
	д	г	в	е	а	г	б

Особое внимание здесь следует обратить на построение эпюр моментов, поскольку в курсе сопротивления материалов обычно ограничиваются построениями эпюр в сравнительно простых балках. Прежде чем строить любую эпюру (от нагрузки или единичную), как известно, необходимо определить опорные реакции. При этом надо не забывать о возможности возникновения горизонтальных составляющих опорных реакций в соответствующей опоре или в обеих (когда задана трёхшарнирная рама).

При решении данной задачи полезно и весьма эффективно применить матричную форму расчёта.

Пример. Для рамы (рис. 6.2) требуется определить горизонтальное перемещение сечения № 1.

Дано:  $\ell = 6$  м;  $q = 3$  кН·м;  $P = 5$  кН;  $h = 5$  кН·м;  $I_2 : I_1 = 3 : 1$ .

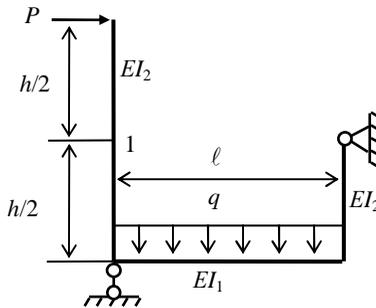


Рис. 6.2

*Решение.*

1. Рассматриваем грузовое состояние (рис. 6.3). Покажем и определим реакции опор:

$$\sum F_x = 0; \quad H_D = P = 5 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; \quad P \cdot 2,5 + R_B \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 = 0; \quad R_B = 6,917 \text{ кН};$$

$$\sum F_y = 0; \quad R_B + V_D - q \cdot 6 = 0; \quad V_D = 11,083 \text{ кН}.$$

*Проверка реакций опор:*

$$\sum M_C = 0; \quad 5 \cdot 5 - 3 \cdot 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2,5 + 6,917 \cdot 6 = 66,5 - 66,5 = 0.$$

Реакции определены верно.

Запишем уравнения грузовых моментов на каждом силовом участке (начало координат сечения совпадает с началом участка).

Участок AB:

$$z \in [0; 5] \text{ м}; \quad M(z) = -Pz; \quad M(0) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M(5) = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок BC:

$$z \in [0; 6] \text{ м}; \quad M(z) = -P \cdot 5 + R_B z - qz^2/2;$$

$$M(0) = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M(3) = 32,25 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

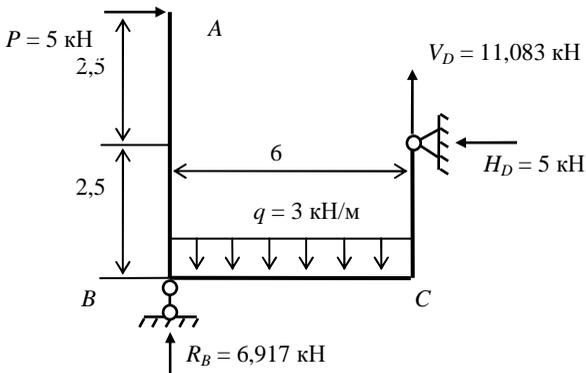
$$M(6) = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок DC:

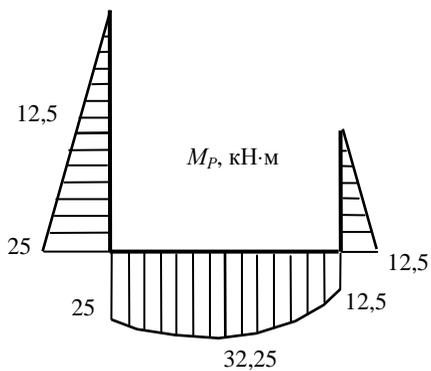
$$z \in [0; 2,5] \text{ м}; \quad M(z) = H_D \cdot z;$$

$$M(0) = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M(2,5) = 12,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По полученным значениям строим эпюру  $M_P$  (рис. 6.4)

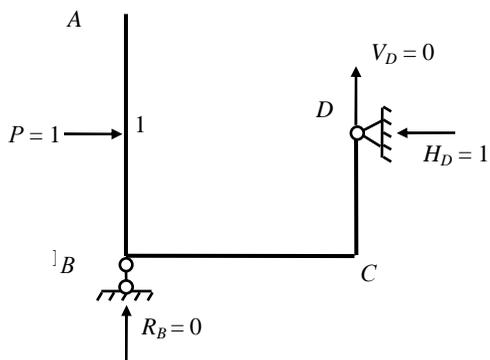


**Рис. 6.3**

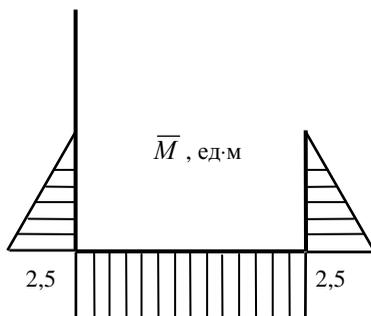


**Рис. 6.4**

2. Рассматриваем единичное состояние, в котором в направлении искомого перемещения прикладываем единичную силу (рис. 6.5)



**Рис. 6.5**



**Рис. 6.6**

Участок  $AI$ :

$$z \in [0; 2,5] \text{ м}; M(z) = 0.$$

Участок  $IB$ :

$$z \in [0; 2,5] \text{ м}; M(z) = Pz; \\ M(0) = 0 \text{ ед}\cdot\text{м}; M(2,5) = 2,5 \text{ ед}\cdot\text{м}.$$

Участок  $BC$ :

$$z \in [0; 6] \text{ м}; M(z) = P \cdot 2,5 = 2,5.$$

Участок  $DC$ :

$$z \in [0; 2,5] \text{ м}; M(z) = H_D z; \\ M(0) = 0 \text{ ед}\cdot\text{м}; M(2,5) = 2,5 \text{ ед}\cdot\text{м}.$$

По полученным значениям строим эпюру  $\bar{M}$  (рис. 6.6)

3. Вычисляем перемещение.

$$\Delta = \frac{2,5}{6 \cdot 3EI_1} (2 \cdot 2,5 \cdot 2,5 + 2,5 \cdot 12,5) + \frac{6}{6EI_1} (2,5 \cdot 2,5 + 4 \cdot 2,5 \cdot 32,25 + 2,5 \cdot 12,5) + \\ + \frac{2,5}{6 \cdot 3EI_1} (2 \cdot 2,5 \cdot 12,5) = \frac{129}{EI_1}.$$

Поскольку значение положительно, перемещение происходит в направлении действия единичной силы (т.е. вправо).

### Раздел III

#### ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ

1. Связями в строительной механике называются:

- а) силы, которые изменяют механическое состояние движения или покоя тела;
- б) силы, с которыми тела действуют на данное тело;
- в) тела, стесняющие движение данного тела;
- г) тела, после удаления которых механическое состояние данного тела не изменится.

2. Жёсткая заделка в плоской системе уменьшает степень свободы на:

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

3. Шарнирно подвижная опора в плоской системе уменьшает степень свободы на:

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

4. Шарнирно неподвижная опора в плоской системе уменьшает степень свободы на:

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

5. Простой шарнир в плоской системе уменьшает степень свободы на:

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

6. Одиночная связь в плоской системе уменьшает степень свободы на:  
 а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.
7. Реакция жёсткой заделки в случае плоской системы сил даёт количество неизвестных:  
 а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.
8. В строительной механике реакциями связей называются:  
 а) силы, равные и противоположные активным силам, действующим на тело;  
 б) силы, оказывающие на тело действие, противоположное действию связей;  
 в) силы, приложенные к связям со стороны тела, на которое наложены связи;  
 г) силы, оказывающие на тело то же механическое действие, как и связи, наложенные на тело.
9. Укажите системы, пригодные для строительных конструкций:  
 а) мгновенно изменяемые;  
 б) почти мгновенно изменяемые;  
 в) геометрически изменяемые;  
 г) геометрически неизменяемые.
10. Укажите, сколько степеней свободы в плоскости имеет диск:  
 а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.
11. Укажите число, непригодное для степени свободы плоской системы:  
 а) 0; б) -2; в) 0,5; г) 101.
12. Связь, удаление которой не меняет кинематические свойства системы, называется:  
 а) лишней связью;  
 б) необходимой связью;  
 в) ложной связью;  
 г) идеальной связью.
13. Укажите правильную формулу для вычисления степени свободы плоской системы, состоящей из дисков, шарниров и одиночных связей:  
 а)  $3Д + 3Ш + С$ ;  
 б)  $Д + Ш + С$ ;  
 в)  $Д - 2Ш - 3С$ ;  
 г)  $3\ddot{A} - 2\ddot{O} - \ddot{N}$ .
14. Укажите правильную формулу для определения изгибающих моментов в сечениях трёхшарнирной арки:  
 а)  $M = M_B + H \cdot y$ ; б)  $M = M_B - H \cdot f$ ; в)  $M = M_B - H \cdot y$ ;  
 г)  $M = M_B + H \cdot f$ .
15. Ниже приведены свойства рациональной оси арки. Укажите неверное утверждение:

- а) во всех сечениях арки с рациональной осью внутренние усилия равны нулю;
- б) рациональная ось арки определяется формой эпюры изгибающих моментов в простой балке;
- в) рациональная ось арки совпадает с кривой давления;
- г) при рациональной оси арки объём материала арки наименьший.

### Правильные ответы

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ответ	в	в	а	б	б	а	в	г	г	в	в	а	г	в	а

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА». ЧАСТЬ 1

1. Цели и задачи курса. Понятие о расчётной схеме.
2. Основные элементы конструкций и сооружений: стержни, пластинки, оболочки.
3. Основные допущения, используемые в курсе «Строительная механика».
4. Опоры плоских систем, их реакции. Виды нагрузок.
5. Классификация сооружений (статически определимые и неопределимые, распорные и безраспорные, плоские и пространственные, стержневые, тонкостенные, массивы).
6. Анализ геометрической неизменяемости плоских сооружений. Основные понятия и определения: системы изменяемые и неизменяемые, степень свободы, изменяемость системы, степень изменяемости системы, понятие о дисках, степень свободы диска на плоскости и в пространстве.
7. Понятие о кинематических связях. Связи простые и сложные (кратные), кинематическая и статическая характеристика связей.
8. Определение числа степеней свободы, составленных из дисков (плоские системы).
9. Число степеней свободы систем, свободных и прикреплённых к земле.
10. Понятие о фиктивном шарнире и фиктивном стержне.
11. Основные принципы образования геометрически неизменяемых систем, примеры.
12. Мгновенно изменяемые системы, статические и кинематические признаки мгновенно изменяемых систем.
13. Признаки изменяемости плоских сложных систем с достаточным числом связей.
14. Понятие о линиях влияния и огибающих эпюрах.
16. Статический метод построения линий влияния в простых балках.
1. 16. Линии влияния реакций опор, поперечных сил и изгибающих моментов.
17. Определение усилий по линиям влияния от действия сосредоточенной нагрузки, распределённой нагрузки, сосредоточенного момента.
18. Линии влияния при узловой передаче нагрузки.
19. Линии влияния усилия для многопролётных статически определимых балок.
20. Загружение линий влияния подвижной нагрузкой. Определение расчётного нагружения линий влияния сосредоточенной силой, распределённой нагрузкой, системой связанных сосредоточенных грузов.
21. Критерий невыгодного положения системы связанных грузов для многоугольной линии влияния (загружение на максимум, минимум).

22. Критерий невыгодного нагружения для треугольной линии влияния.

23. Загружение треугольной линии влияния подвижной распределённой нагрузкой постоянной интенсивности, имеющей заданные и любые разрывы.

24. Определение положения опасного сечения и расчётного положения системы связанных грузов для однопролётной балки.

25. Трёхшарнирные системы. Арки. Трёхшарнирная арка. Основные понятия. Основное отличие работы трёхшарнирной арки от простой балки.

26. Аналитическое и графическое определение опорных реакций в трёхшарнирной арке от неподвижной нагрузки.

27. Определение величины распора от вертикальной нагрузки.

28. Многоугольник равнодействующих, многоугольник и кривая давления, приёмы их построения.

29. Аналитическое определение внутренних силовых факторов в поперечных сечениях арки.

30. Понятие о рациональном очертании контура арки.

31. Приёмы построения линий влияния опорных реакций, распора и внутренних силовых факторов для трёхшарнирной арки.

32. Построение линий влияния изгибающих моментов, поперечных и продольных сил с помощью нулевой точки. Определение координат нулевых точек.

33. Расчёт статически определимых плоских ферм. Основные понятия и определения. Особенности работы элементов, составляющих ферму, по сравнению с работой балки.

34. Классификация ферм по очертанию верхнего и нижнего поясов, по типу решётки, условиям опирания, по назначению, уровню езды.

35. Анализ геометрической неизменяемости ферм.

36. Аналитический способ расчёта ферм с использованием метода сечений (способ Риттера, способ вырезания узлов, способ проекций, способ совместных сечений).

37. Определение усилий в стержнях в частных случаях. Выявление нулевых стержней.

38. Определение усилий в стержнях сложных ферм по методу замены связей.

39. Основные правила проверки определения усилий в стержнях фермы.

40. Построение линий влияния усилий для плоских балочных ферм. Сечения консольные и междуопорные.

41. Понятие о работе и расчёте шпренгельных ферм.

42. Энергетический метод определения перемещений. Универсальность энергетического метода. Основа метода – принципа виртуальных

работ. Понятие о возможных перемещениях. Теорема о взаимности работ. (теорема Бетти).

43. Потенциальная энергия деформации плоских систем, выраженная через работу внешних и внутренних силовых факторов.

44. Определение перемещений методом Мора. Интеграл Мора.

45. Вычисление интеграла Мора методом Верещагина.

46. Определение относительных (взаимных) перемещений.

47. Определение перемещений при изменении температуры и осадки опор.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все инженерные сооружения требуют предварительного расчёта для их надёжной работы при минимальных затратах. Учебная дисциплина «Строительная механика» позволяет рассчитывать на прочность, жёсткость и устойчивость сложные стержневые системы.

Знание дисциплины «Строительная механика» составляет основу профессиональной квалификации инженеров, конструкторов и расчётчиков. Навыки и опыт, полученные при изучении строительной механики, используются архитекторами, инженерами-проектировщиками на всех этапах проектирования, начиная от составления архитектурного замысла и заканчивая назначением размеров деталей. Знания строительной механики необходимы также мастерам, прорабам при изготовлении конструкций, их перевозке, монтаже, эксплуатации, ремонте.

Кто правильно осваивает этот предмет, не просто заучивает формулы, а пытается понять физический смысл задачи, почувствовать работу конструкции, найти слабые места и предложить варианты решения задачи – развивает в себе инженерную интуицию. Хороший специалист не только делает расчёты с требуемой точностью, но и предвидит конечный результат. При наличии компьютеров и стандартных программ более значимыми становятся умения творчески мыслить, выполнять проверки полученных результатов, находить возможные логические ошибки и грамотно исправлять их.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч. I. Статически определимые системы : учебное пособие / Н.Н. Анохин. – М., 1999. – 335 с.
2. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, В.И. Кузнецов. – М., 1962.
3. Дарков, А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М., 1986.
4. Дыховичный, А.И. Строительная механика / А.И. Дыховичный. – М., 1966.
5. Жемочкин, Б.Н. Статика сооружений / Б.Н. Жемочкин, Д.П. Пашевский. – М., 1959.
6. Киселёв, В.А. Строительная механика. Общий курс / В.А. Киселёв. – М., 1986.
7. Кроткова, Л.В. Учебное пособие к практическим занятиям по строительной механике / Л.В. Кроткова. – М., 1994.
8. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М., 1996.
9. Рабинович, И.М. Основы строительной механики стержневых систем / И.М. Рабинович. – М., 1960.
10. Ржаницын А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. – М., 1991.
11. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / под ред. Г.К. Клейна. – М., 1973.
12. Сборник задач по теории сооружений / под ред. И.М. Рабиновича. – М., 1962.
13. Селюков, В.М. Расчётно-проектировочные работы по строительной механике / В.М. Селюков. – Минск, 1982.
14. Снитко, Н.К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М., 1980.
15. Строительная механика / под ред. А.В. Даркова. – М., 1976.
16. Строительная механика. Руководство к практическим занятиям / под ред. Ю.И. Бутенко. – Киев, 1984.
17. Строительная механика в примерах и задачах / А.В. Киселёв, А.М. Афанасьев, В.А. Ермоленко и др. – М., 1968.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>Раздел I. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ</b> .....	3
Тема 1. Основные понятия .....	5
Тема 2. Кинематический анализ сооружений .....	5
Тема 3. Расчёт статически определимых сооружений .....	8
Тема 4. Учёт подвижной статической нагрузки .....	11
Тема 5. Загрузка линий влияния .....	13
Тема 6. Линии влияния при узловом действии нагрузки. Невыгодное загрузеие линий влияния .....	14
Тема 7. Плоские статически определимые фермы .....	18
Тема 8. Статически определимые арки .....	25
Тема 9. Основные теоремы об упругих линейно- деформируемых системах .....	27
Тема 10. Определение перемещений. Интеграл Мора .....	30
Тема 11. Определение перемещения сечения стержня плоской статически определимой стержневой системы при действии внешней нагрузки .....	33
<b>Порядок выполнения контрольных работ</b> .....	38
<b>Раздел II. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ. ЗАДАНИЯ И     ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ</b> .....	40
<b>Раздел III. ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ</b> .....	72
<b>Вопросы к экзамену по курсу «Строительная механика» Часть 1</b> ....	75
<b>Заключение</b> .....	78
<b>Список литературы</b> .....	79

Учебное издание

БУЛАНОВ Владимир Евгеньевич,  
ГУЗАЧЁВ Александр Николаевич

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА**

Часть 1

Учебное пособие

Редактор О.М. Г у р ь я н о в а  
Инженер по компьютерному макетированию М.А. Ф и л а т о в а

Подписано в печать 28.12.2012  
Формат 60 × 84/16. 4,65 усл. печ. л. Заказ № 655

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14