

**Д.Ю. МУРОМЦЕВ, Е.Н. ЯШИН**

**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ  
ДИСКРЕТНЫХ  
СИСТЕМ**

**◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФГБОУ ВПО «ТГТУ» ◆**

Учебное издание

МУРОМЦЕВ Дмитрий Юрьевич,  
ЯШИН Евгений Николаевич

# АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинка  
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 09.12.2011.  
Формат 60 × 84/16. 6,28 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 575

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14

Министерство образования и науки Российской Федерации  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»**

**Д.Ю. МУРОМЦЕВ, Е.Н. ЯШИН**

# **АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением  
по образованию в области радиотехники,  
электроники, биомедицинской техники и автоматизации  
в качестве учебного пособия*



---

Тамбов  
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
2011

УДК 681.511.22  
ББК з811.3я73-5  
М915

Рецензенты:

Доктор технических наук, доцент  
ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»  
*И.И. Пасечников*

Доктор технических наук, профессор  
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
*В.А. Погонин*

**Муромцев, Д.Ю.**

М915 Анализ и синтез дискретных систем : учебное пособие /  
Д.Ю. Муромцев, Е.Н. Яшин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО  
«ТГТУ», 2011. – 108 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1073-5.

Представлены сведения в области анализа и синтеза дискретных систем, рассмотрены вопросы дискретизации, математического моделирования, содержит методологию оценки качества переходных процессов.

Предназначено для студентов специальности 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» дневной и заочной форм обучения, бакалавров и магистров направлений 210200 «Проектирование и технология электронных средств», 211000 «Конструирование и технология электронных средств», 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также студентам других направлений при изучении дисциплин, в которых затрагиваются вопросы цифровой обработки сигналов.

УДК 681.511.22  
ББК з811.3я73-5

**ISBN 978-5-8265-1073-5**

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2011

## ВВЕДЕНИЕ

---

Дискретные системы (ДС) находят широкое применение в управлении разнообразными техническими устройствами, при этом основной составляющей ДС является микропроцессор. Область распространения ДС наиболее широкая – от простейших встроенных систем (например, музыкальные открытки, часы и т.п.), до сверхсложных комплексов управления целыми системами и производствами. Основными причинами такого положения являются простота и экономичность построения аппаратной части, которая может выполнять алгоритмы высокой сложности по программе, записанной в устройство. При этом модификация устройства с целью улучшения его характеристик зачастую происходит только заменой программного обеспечения, что открывает широкие просторы для построения универсальных микропроцессорных наборов для большого количества объектов.

ДС имеют ряд существенных преимуществ перед непрерывными системами, важнейшими из которых являются повышенная помехозащищённость и точность систем управления, ввиду того, что сигнал подвержен воздействию помех только в дискретные моменты времени. Благодаря дискретному характеру информационных сигналов, можно эффективно использовать каналы передачи сигналов управления. Производители

электронных компонентов предлагают огромный выбор микропроцессорных устройств для построения ДС, а также инструментальные средства для разработки и отладки программного обеспечения. На современном рынке обычный человек может без проблем приобрести недорогой микроконтроллер, для которого существуют свободные инструментальные средства подготовки программного обеспечения, а также запрограммировать его с помощью простейших программаторов, которые по силам собрать даже неопытному в электронике радиолюбителю.

Однако ДС имеют и некоторые недостатки, связанные, в первую очередь, с ограниченной предельной частотой работы управляющего устройства и конечной разрядностью представления чисел в микропроцессоре. Ограниченная рабочая частота сужает круг областей применения ДС, а конечная разрядная сетка требует специальных математических приёмов для устранения накопления ошибок округления. Наличие импульсов высокой частоты в ДС может значительно усложнить схемотехнику и компоновку устройства для достижения высокой степени электромагнитной совместимости и точности.

Современная теория управления располагает универсальным методом исследования ДС, основанным на использовании математического аппарата – дискретного преобразования Лапласа ( $z$ -преобразование), который позволяет максимально приблизить методологию описания ДС к методологии описания непрерывных систем. Так, например, общими определениями являются передаточная функция, частотная характеристика и т.п. Однако эта аналогия в значительной степени носит лишь формальный характер, вследствие чего теория управления ДС имеет существенные особенности, обусловленные наличием в этих системах импульсных элементов (ИЭ).

В последнее время в области теории автоматического управления отмечается очень сильное развитие методов пространства состояний, которые позволяют осуществить чёткую формализацию и механизацию вычислительных процедур для сложных и многомерных систем управления, где классические методы теории автоматического управления бессильны. К тому же синтез оптимального управления ориентирован на представлении модели системы в виде пространства состояний. Термин «пространство состояний» на самом деле является расширением давно проработанного математического аппарата матричных процедур решения различных задач в квантовой механике, аналитической динамике, при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и др. Из преимуществ пространства состояний можно выделить одинаковую формулировку различных задач, а также возможность применения ЭВМ для численного решения.

# 1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ

## 1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

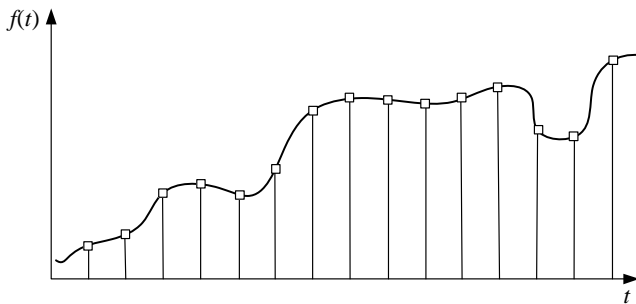
В ходе реализации алгоритма функционирования дискретной системы вычислительное устройство оперирует с отображением сигнала, представленного в численной форме. В большинстве практических случаев сигналы представляют собой непрерывные процессы, которые необходимо преобразовать таким образом, чтобы обеспечить алгоритм необходимой информацией. В дискретных системах такие задачи выполняет специальный аналоговый интерфейс ввода-вывода. При проектировании такого интерфейса к разработчику предъявляются требования глубокого понимания процесса дискретизации и устройств, осуществляющих аналого-цифровые преобразования. От правильности проектирования аналогового интерфейса будут зависеть точность и надёжность законченной системы. Для обеспечения надёжности необходимо предусмотреть варианты, когда сигнал превышает установленные нормы, и принять меры по устранению последствий.

Будем понимать под дискретизацией некоторые преобразования, заключающиеся в формировании дискретного процесса из непрерывного процесса. Дискретный процесс, таким образом, представляет собой множество отсчётов, величина которых соответствует исходному непрерывному процессу в моменты дискретизации. Под квантованием будем понимать разбиение некоторого диапазона  $D$  на конечное число  $N$  поддиапазонов (квантов)  $\Delta_i, i = \overline{0, N-1}$ . Квантование может быть равномерным или неравномерным. При равномерном квантовании каждый квант имеет величину  $\Delta = D/N$  и номер  $i$ , который однозначно определяет положение кванта и может использоваться для кодирования значения сигнала. При неравномерном квантовании кванты будут отличаться друг от друга.

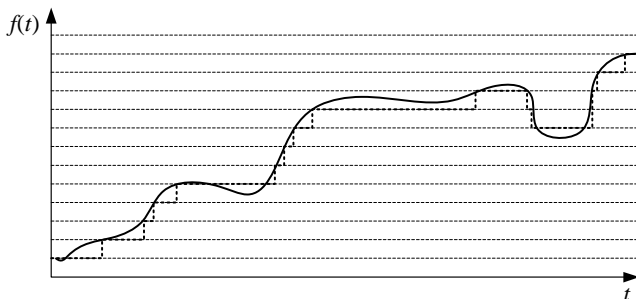
Дискретизация возможна по времени (рис. 1.1), амплитуде (рис. 1.2), а также по времени и амплитуде одновременно (рис. 1.3).

Дискретный сигнал, полученный путём дискретизации по уровню, называется импульсным. При дискретизации по уровню дискретный сигнал называется релейным. А в случае дискретизации по уровню и времени дискретный сигнал называется цифровым. В соответствии с используемым сигналом различают импульсные, релейные и цифровые дискретные системы.

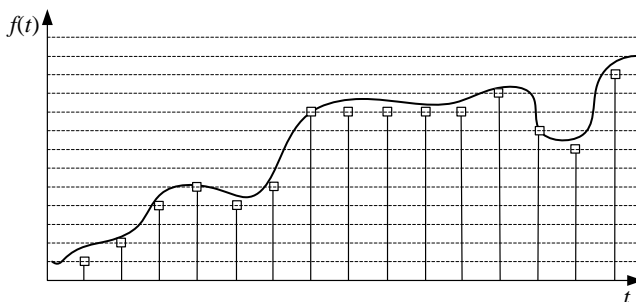
Между воздействием  $X(t)$  и реакцией  $Y(t)$  существует определённое соответствие  $Y(t) = W[X(t)]$ , где  $W$  – оператор. В зависимости от  $W$  дискретная система может быть линейной или нелинейной, стационарной или нестационарной, физически реализуемой или физически нереализуемой.



**Рис. 1.1. Дискретизация по времени**



**Рис. 1.2. Дискретизация по уровню**



**Рис. 1.3. Дискретизация по времени и по уровню**

Система является линейной, если отклик системы на сумму входных воздействий равен сумме откликов от каждого входного воздействия:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Система является однородной, если умножение воздействия на константу вызывает умножение реакции на эту же константу:

$$f(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2).$$



ДС является стационарной, если параметры дискретной системы не зависят от времени. Это означает, что одинаковые входные воздействия всегда будут приводить к одинаковым выходным реакциям, когда бы эти воздействия ни подавались.

ДС является физически реализуемой, если её реакция зависит только от входных воздействий в предыдущие моменты времени и не зависит от входных воздействий в будущие моменты времени. В дальнейшем рассматриваются линейные стационарные физически реализуемые дискретные системы.

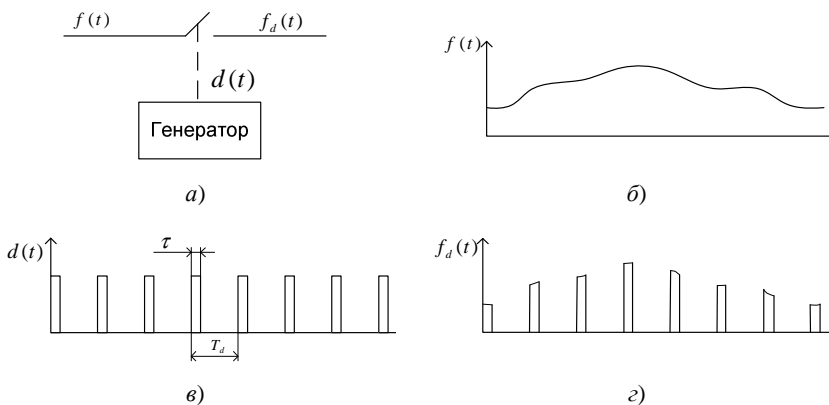
Из приведённых типов систем только импульсные дискретные системы будут являться линейными, а соответственно их можно исследовать с помощью классических методов теории управления. Реальные дискретные сигналы, как правило, являются цифровыми, однако, если число уровней квантования достаточно велико, то с достаточной степенью точности цифровой сигнал можно считать импульсным.

## 1.2. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРЕМА

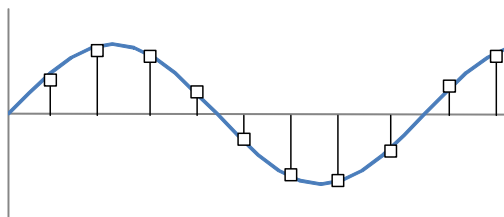
Процесс дискретизации с постоянным периодом можно наглядно представить (рис. 1.4) как управление ключом по сигналу от тактового генератора. На рисунке 1.4 непрерывный входной процесс  $x(t)$  преобразуется в отсчёты дискретного процесса  $x_d(t)$  в соответствии с сигналами управления  $d(t)$ . Ключ замкнут, когда амплитуда  $d(t)$  больше нуля. Непосредственно из рис. 1.4 видно, что дискретный процесс  $x_d(t)$  по своей форме повторяет непрерывный процесс  $x(t)$  тем точнее, чем меньше период дискретизации  $T_d$ . Однако с уменьшением периода дискретизации возрастают требования к быстродействию компонентов дискретных систем (АЦП, микро-ЭВМ, внешнее ОЗУ и др.). Таким образом, выбор частоты дискретизации необходимо производить обоснованно для достижения оптимального соответствия точности и быстродействия дискретной системы.

При дискретизации часть информации неизбежно теряется, так как поведение сигнала между отсчётами неизвестно. Однако для практического большинства непрерывных процессов возможно восстановление по дискретным отсчётам с высокой точностью при условии ограниченного спектра сигнала и правильном выборе частоты дискретизации  $f_d$ .

Известно, что любой сигнал можно представить состоящим из множества синусоид (гармоник), имеющих определённую амплитуду и фазу, а их частота отличается в целое число раз. Рассмотрим процесс дискретизации синусоиды при различном значении  $f_d$ . В случае, когда частота дискретизации много больше частоты синусоиды  $f_s$  (рис. 1.5), полученные отсчёты позволяют довольно точно восстановить исходный сигнал.



**Рис. 1.4. Дискретизация аналогового сигнала:**  
*a* – схема процесса дискретизации; *б* – исходный сигнал;  
*в* – импульсы управления ключом; *г* – дискретный по времени сигнал



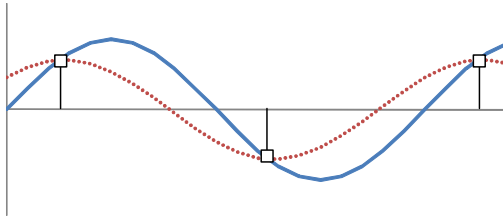
**Рис. 1.5. Дискретизация при  $f_d \gg f_s$**

Если  $f_d = f_s$ , то через отсчёты можно провести огибающую синусоиду с той же частотой, что и у исходного сигнала, но смещённую на некоторый угол (рис. 1.6). При увеличении этого угла от нуля до  $90^\circ$  амплитуда огибающей возрастает от нуля до амплитуды исходного сигнала.

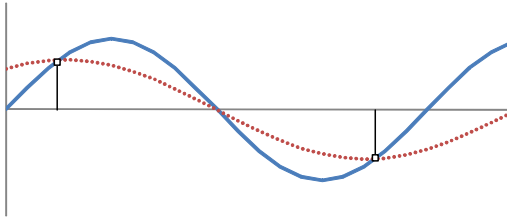
В случае  $f_d < f_s$  огибающая синусоида отличается от исходной и по частоте, и по амплитуде (рис. 1.7). Восстановить такой сигнал уже не получится, так как исходный сигнал претерпевает значительные изменения между моментами взятия отсчётов.

Для случая  $f_d = 2f_s$  огибающая полностью совпадает с исходной синусоидой (рис. 1.8). При уменьшении  $f_d$  будет наблюдаться отклонение огибающей от исходной синусоиды по частоте и амплитуде.

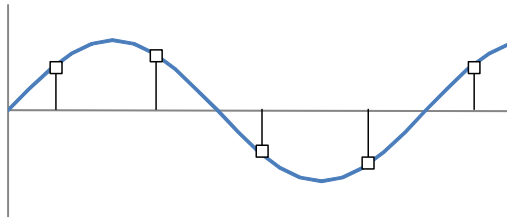
Ответ на вопрос выбора частоты дискретизации даёт теорема Котельникова. Любой непрерывный процесс с верхней частотой  $f_b$  можно полностью восстановить по его дискретным отсчётам, которые берутся с частотой дискретизации  $f_d \geq 2f_b$ .



**Рис. 1.6.** Дискретизация при  $f_d = f_s$



**Рис. 1.7.** Дискретизация при  $f_d < f_s$



**Рис. 1.8.** Дискретизация при  $f_d = 2f_s$

Обращаясь к рис. 1.4, можно увидеть, что выходной сигнал  $f_d(t)$  является произведением непрерывного сигнала  $f(t)$  и дискретизирующей последовательности  $d(t)$ . Дискретизирующую последовательность  $d(t)$  можно представить двумя единичными функциями  $\sigma(t)$ :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$d(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma(t - kT_d) - \sigma(t - kT_d - \tau)). \quad (1.1)$$

Тогда

$$f_d(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sigma(t - kT_d) - \sigma(t - kT_d - \tau)). \quad (1.2)$$

Если  $\tau \rightarrow 0$ , то (1.1) можно заменить дискретной дельта-функцией  $\delta(t)$ , определяемой следующим образом:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Выражение (1.2) несколько упростится

$$f_d(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d). \quad (1.4)$$

Помимо описания сигнала во временной области представляет интерес отображение этого сигнала в частотной области. Ведь в конечном итоге сигнал нужно будет передавать, обрабатывать, преобразовывать на устройствах, характеристики которых напрямую будут зависеть от ширины спектра сигнала. Для нахождения спектра сигнала (1.4) выразим  $d(t)$  в виде ряда Фурье, коэффициенты которого находятся по формуле

$$C_n = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t) e^{-j\omega_d n t} dt = \frac{1}{T_d}.$$

Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_d n t}, \quad (1.5)$$

где  $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$  – круговая частота дискретизации.

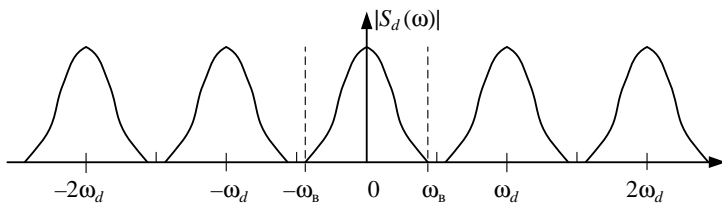
С учётом (1.5) выражение (1.4) примет вид

$$f_d(t) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_d n t}. \quad (1.6)$$

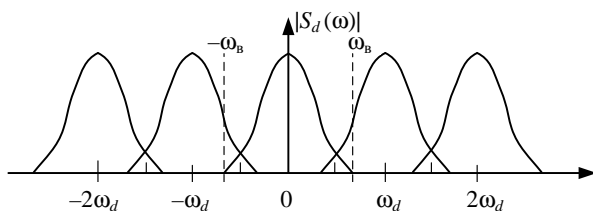
Умножение сигнала на  $e^{j\omega_d n t}$  соответствует сдвигу спектра дискретного сигнала  $S_d(\omega)$  на  $\omega_d n$ :

$$S_d(\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_d n). \quad (1.7)$$

На рисунке 1.9 показан спектр дискретного сигнала (1.7), из которого видно, что он состоит из бесконечного ряда сдвинутых на  $\omega_d$  копий спектра исходного сигнала  $f(t)$ . Теперь теорема Котельникова может быть доказана более наглядно. Если частота дискретизации будет меньше чем  $2\omega_b$ , то копии спектра будут отстоять друг от друга не достаточно далеко и произойдёт их наложение (рис. 1.10), в результате которого точно восстановить сигнал уже не получится.

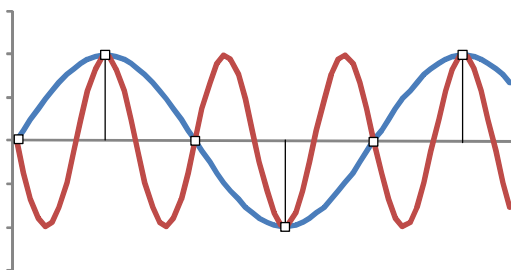


**Рис. 1.9. Спектр дискретного сигнала**



**Рис. 1.10. Наложение спектра при недостаточной частоте дискретизации**

Таким образом, можно сделать вывод, что дискретизация сигнала по времени ведёт к периодизации его спектра. Получается, что изначально ограниченный спектр сигнала стал бесконечным за счёт дискретизации. Объяснение этого эффекта лежит в самой природе дискретизации, когда ничего неизвестно о сигнале между моментами взятия отсчётов. Пусть подвергается дискретизации некоторый сигнал. Для простоты положим, что сигнал этот гармонический и представляет собой некую синусоиду (рис. 1.11). В результате дискретизации получим ряд отсчётов, которые определяют эту синусоиду. Если теперь увеличить частоту синусоиды на частоту дискретизации, то получим другую синусоиду, дискретизация которой с прежней частотой дискретизации приведёт к получению одинакового дискретного процесса, т.е. для дискретной системы эти две синусоиды являются эквивалентными. Ясно, что таких синусоид может быть бесконечное множество, что и показывает спектр дискретного сигнала.



**Рис. 1.11. Дискретизация синусоид различной частоты**

### 1.3. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ДИСКРЕТИЗИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ

При выводе уравнения (1.7) предполагалось, что длительность дискретизирующих импульсов является бесконечно малой величиной. Понятно, что на практике такие импульсы реализовать не получится, и они будут описываться выражением (1.2). Для нахождения спектра дискретного сигнала в этом случае поступают аналогично вышеприведённой методике путём представления дискретизирующих импульсом рядом Фурье и нахождения прямого преобразования Фурье. Полученный спектр (рис. 1.12) также имеет бесконечную длительность и периодичность, но его огибающая повторяет огибающую спектральной плотности дискретизирующего прямоугольного импульса с периодом  $T_d$  и длительностью  $\tau$ .

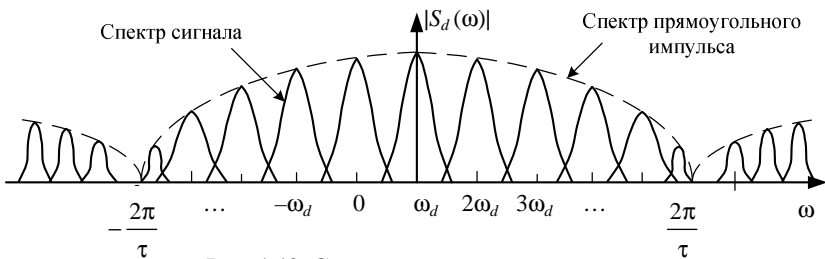


Рис. 1.12. Спектр дискретного сигнала с учётом формы дискретизирующих импульсов

### 1.4. ЭФФЕКТ НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ

Работая с реальными сигналами, разработчику следует помнить, что зачастую значительная доля энергии сигнала может выходить за рассматриваемую полосу частот. Например, сигнал содержит шумы или информативная составляющая занимает часть широкой полосы сообщения. Поэтому, если не удалить эти составляющие, тем самым искусственно ограничив ширину полосы сигнала, то в частотной области произойдёт наложение и информация о процессе будет искажена. Предварительное пропускание непрерывного сигнала через аналоговый фильтр необходимым образом подготавливает спектр сигнала к дискретизации без наложения, а сам фильтр называется фильтром защиты от наложения (ФЗН). Ввиду неидеальности передаточной характеристики ФЗН и наличия в сигнале шумов и помех наложение есть всегда, а перед разработчиком стоит задача оценки и приведения к норме этого явления путём выбора соответствующего ФЗН и частоты дискретизации.

Рассмотрим передаточную характеристику реального фильтра низкой частоты (ФНЧ) (рис. 1.13). Полоса пропускания фильтра (рис. 1.13) лежит в диапазоне от нуля до частоты среза  $\omega_s$ . На частоте среза проис-

ходит подавление амплитуды исходного сигнала на 3дБ (составляет 0,707 от исходной амплитуды). Наибольшее подавление будет происходить после частоты подавления  $\omega_A$ , а в полосе перехода между  $\omega_S$  и  $\omega_A$  амплитуды компонентов будут монотонно спадать. Разработчику необходимо подобрать такие параметры ФЗН, чтобы области частот, вызывающие наложения, подавлялись до такого уровня, который был бы неразличим для АЦП (ниже уровня шумов квантования АЦП). На практике широко применяется выбор частоты дискретизации выше, чем того требует теорема Котельникова, с запасом. Это приводит к отодвиганию зеркальных составляющих спектра сигнала и позволяет использовать ФЗН с более полой полосой перехода, что упрощает структуру ФЗН.

При квантовании аналогового сигнала происходит его округление или усечение, что связано с конечностью числа уровней квантования. Шумом квантования  $e(t) = f(t) - f_d(t), t = kT_d$  называется разность между исходным и округлённым значением сигнала. Значение шума квантования лежит в пределах  $-\frac{\Delta}{2} \leq e(t) \leq \frac{\Delta}{2}$  при округлении и  $0 \leq e(t) \leq \Delta$  при усечении.

Считая  $e(t)$  случайным процессом, имеющим равномерную плотность распределения в указанных пределах, найдём математическое ожидание  $M$  и дисперсию  $\sigma^2$  этого шума:

– при округлении

$$M = 0, \sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \tag{1.8}$$

– при усечении

$$M = \frac{\Delta}{2}, \sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \tag{1.9}$$

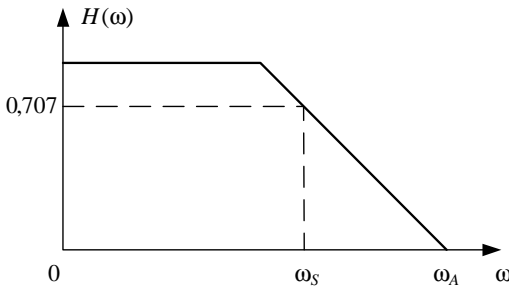


Рис. 1.13. Передаточная характеристика ФНЧ

Из (1.8) и (1.9) видно, что уменьшение интервала квантования  $\Delta = \frac{A}{2^B}$  за счёт увеличения разрядности  $B$  используемого АЦП с диапазоном входного напряжения  $A$  приводит к уменьшению среднеквадратического шума квантования  $\sigma = \sqrt{\frac{\Delta^2}{12}} = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}}$ . Для оценки уровня шума

АЦП используют отношение сигнал / шум:  $S_{\text{АЦП}} = \frac{A_{\text{СКЗ}}}{\sigma}$ , где  $A_{\text{СКЗ}}$  – среднеквадратическое значение сигнала. Исходя из предположения, что амплитуда гармонического сигнала, подаваемого на вход АЦП, равна  $A_S = \frac{A}{2}$ , т.е. размах сигнала точно соответствует диапазону входных напряжений АЦП, можно записать

$$A_{\text{СКЗ}} = \frac{A_S}{\sqrt{2}} = \frac{A}{2\sqrt{2}} = \frac{\Delta \cdot 2^B}{2\sqrt{2}},$$

тогда

$$S_{\text{АЦП}} = \frac{\Delta 2^B}{2\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{3}}{\Delta} = 2^B \sqrt{1,5} \tag{1.10}$$

или

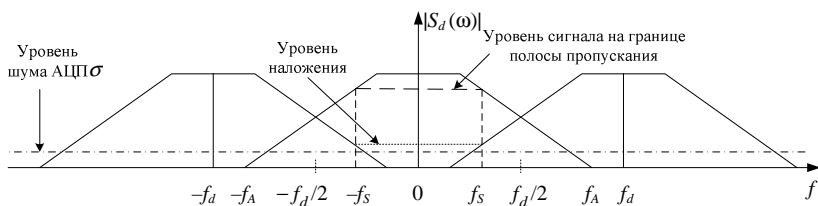
$$S_{\text{АЦП}}(\text{дБ}) = 20 \lg(2^B \sqrt{1,5}) \text{ (дБ)}. \tag{1.11}$$

При расчётах параметров дискретизации необходимо определить:

- частоту дискретизации  $f_d$ ;
- частоту среза ФЗН  $f_S$  и частоту подавления  $f_A$  (зависят от типа фильтра);
- допустимый уровень искажений от наложения спектров  $\epsilon$ ;
- разрешающую способность АЦП  $B$ .

Часть этих параметров известна заранее и необходимо определить остальные величины, используя их взаимосвязь. Обычно задаются требованиями к допустимым искажениям от наложения спектров и минимальному уровню среднеквадратического шума квантования. На рисунке 1.14 показан спектр дискретного сигнала, у которого происходит наложение из-за пологости полосы перехода и конечного значения величины подавления ФЗН, а также ведётся оцифровка с использованием АЦП.





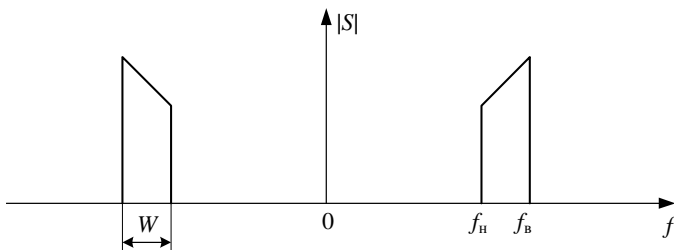
**Рис. 1.14. Наложение спектра и его характеристики**

При выбранной частоте дискретизации  $f_d$  наложение будет проявлять себя, начиная с частоты  $f_d/2$ , а уровень наложения  $A_n$  определяется величиной спектра зеркального канала. Полагая, что спектр полезного сигнала сосредоточен в полосе пропускания ФЗН, уровень наложения определяют на частоте среза  $f_s$ .

Спектр дискретного сигнала при использовании ФЗН является произведением спектра сигнала  $S(f)$  и частотной характеристики ФЗН  $H(f)$ :  $S_d(f) = H(f)S(f)$ . При широкополосном аналоговом сигнале результирующий спектр будет повторять частотную характеристику ФЗН, это допущение широко используется на практике для упрощения расчётов дискретной системы. Затухание сигнала в полосе подавления ФЗН должно быть не хуже, чем отношение сигнал/шум используемого АЦП (1.11). Прибегая к анализу графической иллюстрации спектра дискретного сигнала (рис. 1.14), можно сформулировать основные действия по расчёту параметров дискретизации: необходимо так подобрать частоту дискретизации и параметры фильтра, чтобы уровень наложения не превышал уровня шумов квантования в полосе пропускания ФЗН. Анализируя рис. 1.14, можно сделать вывод, что наложение спектров – выше уровня шумов квантования, следовательно, необходимо либо увеличить частоту дискретизации, тем самым отодвинув зеркальные спектры, либо изменить параметры фильтра таким образом, чтобы крутизна спада повысилась и на частоте  $f_s$  зеркальный спектр был меньше  $\sigma$ .

## 1.5. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПОЛОСОВЫХ СИГНАЛОВ

Бывают случаи, когда спектр сигнала представляет собой полосу частот на частотной оси (рис. 1.15), причём ширина полосы  $W$  много меньше чем  $f_n$  и  $f_b$ . Если воспользоваться теоремой Котельникова, то частота дискретизации будет  $2f_b$ , что приводит к неэффективному использованию частотного спектра, да и АЦП с высокой тактовой частотой



**Рис. 1.15. Полосовой сигнал**

не добавляет экономичности дискретной системе. Значительного уменьшения частоты дискретизации без наложения можно добиться, воспользовавшись теоремой о полосовой дискретизации:

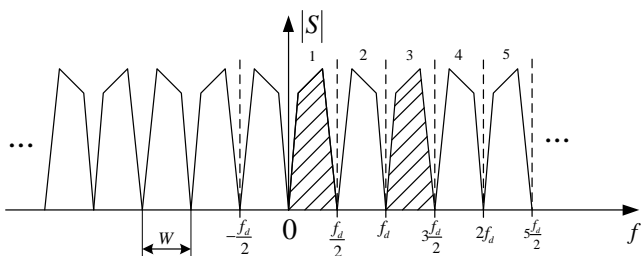
$$\frac{2f_b}{n} \leq f_d \leq \frac{2f_n}{n-1}, \quad (1.12)$$

где  $n = \text{Fix}\left(\frac{f_b}{W}\right)$  ( $\text{Fix}()$  – отбросить дробную часть).

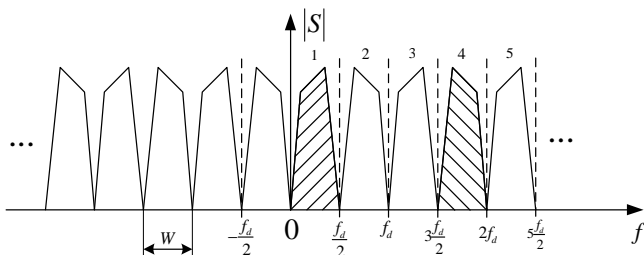
В соответствии с (1.12) полосовой аналоговый сигнал может быть дискретизирован с частотой дискретизации равной или большей удвоенной ширине спектра сигнала  $f_d \geq 2W$ . При таком способе дискретизации частотные компоненты сигнала (основной или зеркальный) должны располагаться внутри интервала  $\left[k \frac{f_d}{2}, (k+1) \frac{f_d}{2}\right]$ , где  $k$  – целое (рис. 1.16).

То есть при дискретизации вся частотная ось делится на зоны (окна) длиной  $\frac{f_d}{2}$ , внутри зоны должна уместиться рассматриваемая полоса сигнала, а каждая зона нумеруется. Если рассматриваемый полосовой сигнал попадает в нечётную зону ( $n$  – нечётное число) (зона 3 на рис. 16), то образ спектра сигнала переносится в первую зону без изменений (заштрихованные спектры на рис. 1.16) и сигнал может быть восстановлен обычным способом. В том случае, если полосовой сигнал попадает в чётную зону ( $n$  – чётное число), то при его переносе в первой зоне окажется его зеркальная копия, порядок частот спектра которой будет обратный, что необходимо учитывать при дальнейшей обработке или восстановлении.

Дискретизация полосового сигнала особенно популярна в аппаратуре связи, так как этот процесс эквивалентен аналоговой демодуляции. Таким способом исчезает необходимость использования демодулятора.



**Рис. 1.16.** Дискретизация полосового сигнала, попадающего в нечётную зону



**Рис. 1.17.** Дискретизация полосового сигнала, попадающего в чётную зону

В системах автоматики может применяться при использовании в качестве датчиков преобразователей параметра в частоту. При дискретизации полосовой сигнал предварительно пропускают через полосовой фильтр для ограничения внеполосных искажений. При выборе АЦП для дискретизации следует учитывать, что ведётся оцифровка высокочастотного сигнала, поэтому необходимо, чтобы за время выборки АЦП сигнал не успевал значительно измениться (не более  $\frac{\Delta}{2}$ ).

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

### 2.1. РЕАКЦИЯ НА ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для анализа дискретных систем во временной области можно по аналогии с непрерывными системами использовать реакцию на типовые входные воздействия при условии, что до подачи воздействия система находилась в состоянии покоя. В случае дискретных систем типовыми воздействиями будут дискретная дельта-функция  $\delta(t)$ , дискретный единичный скачок  $\sigma(t)$ , экспоненциальный сигнал, синусоидальный и др. Реакция ДС на дискретную дельта-функцию называется импульсной характеристикой ДС  $h(kT_d) = W[\delta(t)]$ , а реакция на дискретный единичный скачок – переходной характеристикой ДС  $s(kT_d) = W[\sigma(t)]$  (рис. 2.1), где  $W[x(kT_d)]$  – оператор преобразования входного сигнала в выходной.

Импульсную характеристику считают основной характеристикой ДС, так как, зная её, можно определить реакцию на любое входное воздействие. Дискретный входной процесс состоит из последовательностей отсчётов, которые можно рассматривать как дельта-функцию, умноженную на константу  $x_d(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d)$ . Ввиду бесконечно малой длительности дельта-функции сигнал  $x(t)$  за время её действия не успевает значительно измениться, именно поэтому  $x(t)$  считается константой  $x(kT_d)$  при  $t = kT_d$ . В соответствии со свойством однородности линейных систем можно

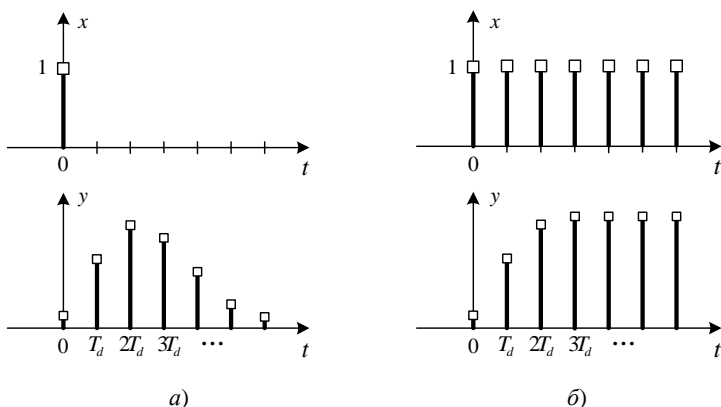


Рис. 2.1. Реакция ДС на типовые входные воздействия

сказать, что реакция ДС будет умножена на эту же константу. Ввиду того, что ДС обладает импульсной характеристикой, то она будет сохранять последствия прошедшего импульсного воздействия ещё некоторое время, в течение которого на вход ДС может поступить следующий импульс.

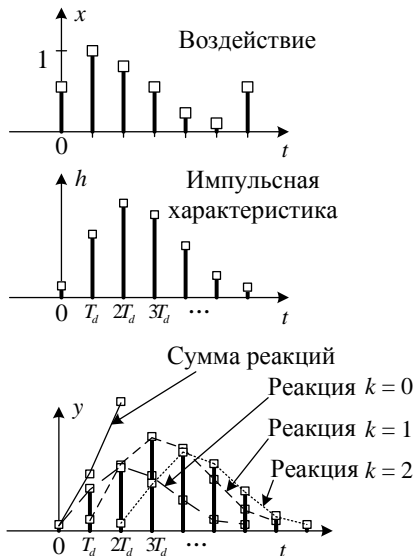
В соответствии со свойством линейности реакция ДС на входное воздействие будет равна сумме реакции на текущее воздействие и реакции системы от предыдущих воздействий в рассматриваемый момент времени:

$$y(k) = h(k) \otimes x(k) = \sum_{m=0}^k h(m)x(k-m) = \sum_{m=0}^k h(k-m)x(m), \quad (2.1)$$

где  $\otimes$  – оператор дискретной свёртки. Выражение (2.1) называется дискретной свёрткой и широко используется для расчёта реакции дискретной системы. В формуле (2.1) в целях упрощения записи опущен период дискретизации  $T_d$ . В качестве примера на рис. 2.2 показан процесс нахождения свёртки для момента времени  $k = 2$ .

Если в качестве входного воздействия взять  $\sigma(t)$ , то можно установить связь между импульсной и переходной функцией:

$$s(k) = h \otimes \sigma = \sum_{m=0}^k h(m). \quad (2.2)$$



**Рис. 2.2.** Нахождение свёртки для  $k = 2$

## 2.2. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

По аналогии с непрерывными системами, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями, ДС представляются линейными разностными уравнениями. Понятию производной в аналоговой системе соответствует конечная разность в дискретной системе, а непрерывной функции – последовательности отсчётов. На рисунке 2.3 показан дискретный процесс  $Y$  с периодом дискретизации  $T_d$ . Нулевая конечная разность равна значению дискретной функции  $\Delta_0 y_i = y_i$ . Первая конечная разность равна разности нулевых конечных разностей  $\Delta_1 y_i = \Delta_0 y_i - \Delta_0 y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$  и по своему смыслу соответствует приращению дискретной функции за период дискретизации (первой производной при нормированном периоде дискретизации). Вторая конечная разность  $\Delta_2 y_i = \Delta_1 y_i - \Delta_1 y_{i-1} = (y_i - y_{i-1}) - (y_{i-1} - y_{i-2}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$ . В общем случае  $\Delta_k y_i = \Delta_{k-1} y_i - \Delta_{k-1} y_{i-1}$ , которую можно выразить через значения дискретной функции следующим образом

$$\Delta_k y_i = y_i - k y_{i-1} + C_k^2 y_{i-2} - C_k^3 y_{i-3} + \dots - C_k^{k-1} y_{i-k+1} + y_{i-k}, \quad (2.3)$$

где  $C_k^r = \frac{k!}{r!(k-r)!}$  – число сочетаний из  $k$  по  $r$  ( $k \geq r$ ).

Для линейных систем конечно-разностное уравнение устанавливает линейное соотношение между входными и выходными дискретными процессами и по своей структуре соответствует линейному дифференциальному уравнению

$$a_0 \Delta_0 y_i + a_1 \Delta_1 y_i + \dots + a_n \Delta_n y_i = b_0 \Delta_0 x_i + b_1 \Delta_1 x_i + \dots + b_m \Delta_m x_i, \quad (2.4)$$

где  $a_j, j = \overline{0, n}, b_j, j = \overline{0, m}$  – параметры дискретной системы.

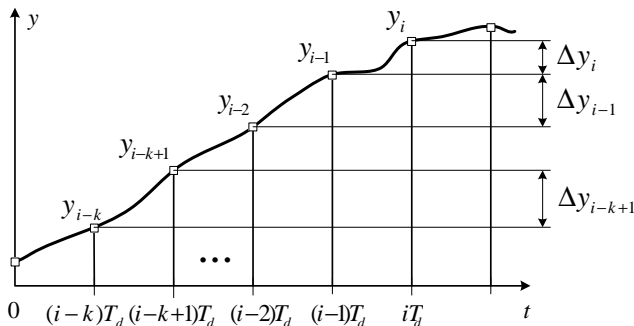


Рис. 2.3. К понятию конечных разностей

Раскрывая конечные разности (2.4) по формуле (2.3), получим разностное уравнение

$$\overline{a_0}y_i + \overline{a_1}y_{i-1} + \dots + \overline{a_n}y_{i-n} = \overline{b_0}x_i + \overline{b_1}x_{i-1} + \dots + \overline{b_m}x_{i-m}. \quad (2.5)$$

Разностное уравнение (2.5), в отличие от дифференциального, решается методом прямой подстановки известных рядов начальных значений и входного процесса, поэтому оно непосредственно описывает алгоритм вычисления реакции по известному входному воздействию. Решение разностного уравнения (2.5) можно записать в виде суммы

$$y_i = y_i^0 + y_i^X, \quad (2.6)$$

которая состоит из дискретного переходного процесса  $y_i^0$  и вынужденного процесса  $y_i^X$ . Переходной процесс представляет собой собственное движение системы под воздействием начальных условий  $y_{i-1}, \dots, y_{i-n}$  и отсутствии внешних воздействий:

$$\overline{a_0}y_i + \overline{a_1}y_{i-1} + \dots + \overline{a_n}y_{i-n} = 0. \quad (2.7)$$

Переходной процесс представляет собой частное решение при нулевых начальных условиях и заданном входном воздействии  $x_i, \dots, x_{i-m}$ :

$$\overline{a_0}y_i = \overline{b_0}x_i + \overline{b_1}x_{i-1} + \dots + \overline{b_m}x_{i-m}. \quad (2.8)$$

Похожесть структуры и характера решения линейных дифференциальных и конечно-разностных уравнений приводит ко многим аналогиям в методиках исследования непрерывных и дискретных систем.

Решив (2.5) относительно  $y_i$ , получим уравнение в рекуррентной форме

$$y_i = \frac{1}{\overline{a_0}} \left[ \sum_{j=0}^m \overline{b_j}x_{i-j} - \sum_{j=1}^n \overline{a_j}y_{i-j} \right], \quad (2.9)$$

которое представляет собой алгоритм непосредственного нахождения реакции дискретной системы. Уравнение (2.9) относится к рекурсивному типу (дискретные системы с обратной связью), так как в нём учитываются реакции системы в прошлые моменты времени, в противном случае оно будет относиться к нерекурсивному типу.

Уравнение (2.5) можно решить и в аналитическом виде [1]. Для этого решение однородного уравнения (2.7) ищется в виде  $y(t) = \lambda^t$ . Подставив это решение в (2.7), получим

$$\overline{a_0}\lambda^{iT_d} + \overline{a_1}\lambda^{(i-1)T_d} + \dots + \overline{a_n}\lambda^{(i-n)T_d} = 0$$

или

$$(\overline{a_0} + \overline{a_1}\lambda^{-T_d} + \dots + \overline{a_n}\lambda^{-nT_d})\lambda^{iT_d} = 0.$$

Произведя замену  $z = \lambda^{T_d}$ , это уравнение приводится к виду

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}z^{-1} + \dots + \overline{a_n}z^{-n} = 0,$$

или умножив на  $z^n$ :

$$\overline{a_0}z^n + \overline{a_1}z^{n-1} + \dots + \overline{a_n} = 0, \quad (2.10)$$

которое называется характеристическим уравнением, корни которого  $z_k = \lambda_k^{T_d}$ . А решением однородного разностного уравнения (2.7) будет

$$y(t) = \mathcal{K}_k^t = z_k^{\frac{t}{T_d}}.$$

Если все корни  $z_k, k = \overline{1, n}$  характеристического уравнения (2.10) простые (т.е. различные), то общее решение разностного уравнения (2.7) имеет вид

$$y^0(t) = \sum_{k=1}^n C_k z_k^{\frac{t}{T_d}}, \quad (2.11)$$

где  $C_k$  – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий системы. Если среди корней характеристического уравнения имеется кратный корень  $z_l$  кратности  $m_l$ , то ему в (2.11) соответствует слагаемое

$$\left( C_1^l + C_2^l \frac{t}{T_d} + \dots + C_{m_l}^l \left( \frac{t}{T_d} \right)^{m_l-1} \right) z_l^{\frac{t}{T_d}}. \quad (2.12)$$

Простые комплексно-сопряжённые корни  $z_{k, k+1} = \alpha \pm j\beta$  можно заменить на одно слагаемое

$$\rho^{\frac{t}{T_d}} \left( A \cos \left( \frac{t}{T_d} \varphi \right) + B \sin \left( \frac{t}{T_d} \varphi \right) \right), \quad (2.13)$$

где  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\varphi = \arctg \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)$ ,  $A, B$  – произвольные константы.

*Пример.* Пусть дискретная система описывается разностным уравнением  $2y_i + y_{i-1} - 3y_{i-2} = x_i + 4x_{i-1}$ . Найти реакцию системы на дискретную дельта-функцию, если она находилась в состоянии покоя.

Решение. Представим разностное уравнение в рекуррентной форме

$$y_i = 0,5x_i + 2x_{i-1} - 0,5y_{i-1} + 1,5y_{i-2}.$$

Так как до подачи воздействия система находилась в состоянии покоя, то  $y_{i-1} = y_{i-2} = 0$ . Пусть воздействие поступило в момент времени  $i = 0$ , тогда непосредственной подстановкой можно найти реакцию в последующие моменты времени (табл. 2.1).



## 2.1. Расчёт реакции на дискретную дельта-функцию

$i$	$x_i$	$y_i$
-2	0	0
-1	0	0
0	1	$y_0 = 0,5x_0 + 2x_{-1} - 0,5y_{-1} + 1,5y_{-2} = 0,5 \cdot 1 = 0,5$
1	0	$y_1 = 0,5x_1 + 2x_0 - 0,5y_0 + 1,5y_{-1} = 2 \cdot 1 - 0,5 \cdot 0,5 = 1,75$
2	0	$y_2 = 0,5x_2 + 2x_1 - 0,5y_1 + 1,5y_0 = -0,5 \cdot 1,75 + 1,5 \cdot 0,5 = -0,125$
3	0	$y_3 = 2,6875$
4	0	$y_4 = -1,53125$

В таблице 2.1 приведены значения  $y_i$  для  $i = \overline{-2, 4}$ , из которых следует, что реакция системы имеет колебательный характер бесконечной длительности. Так как в качестве входного воздействия бралась дискретная дельта-функция, то рассчитанная реакция ДС есть не что иное, как импульсная характеристика ДС.

Аналитическое решение данного разностного уравнения можно представить в форме (2.6)  $y(t) = y^0(t) + y^X(t)$ .

Для нахождения  $y^0(t)$  решается уравнение  $2y_i + y_{i-1} - 3y_{i-2} = 0$ , характеристическое уравнение которого  $2z^2 + z - 3 = 0$  имеет два корня  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -1,5$ . Тогда общее решение запишется в виде

$$y^0(t) = C_1 1^t + C_2 \cdot (-1,5)^t = C_1 + C_2 (-1,5)^t.$$

Функция  $y^X(t)$  представляет собой решение разностного уравнения при известном входном воздействии. В рассматриваемом случае входным воздействием является дискретная дельта-функция в момент времени  $t = 0$ . Так как в этом случае входное воздействие присутствует только в определённые моменты времени, то можно считать, что системе придаются новые начальные условия в эти моменты, а в остальное время она функционирует как свободная, т.е.  $y(t) = y^0(t) + y^X(t)$ . Для данного уравнения такими моментами будут  $t = 0, t = 1$ .

При  $t = 0$  имеем  $2y_0 + y_{-1} - 3y_{-2} = 1$ , откуда  $y_0 = 0,5$ .

При  $t = 1$  имеем  $2y_1 + y_0 - 3y_{-1} = 4$ , откуда  $y_1 = 1,75$ .

Тогда

$$y(1) = 1,75 = C_1 + C_2 (-1,5)^1 = C_1 - 1,5 \cdot C_2,$$

$$y(0) = 0,5 = C_1 + C_2 (-1,5)^0 = C_1 + C_2.$$

Решение данной системы даёт  $C_1 = 1$  и  $C_2 = -0,5$ . Окончательно получим  $y(t) = 1 - 0,5 \cdot (-1,5)^t$ . Результаты расчётов по данной формуле приведены в табл. 2.2.

## 2.2. Расчёт реакции системы по аналитическому решению

$t$	$y(t) = 1 - 0,5 \cdot (-1,5)^t$
0	0,5
1	1,75
2	-0,125
3	2,6875
4	-1,53125
5	4,796875

## 2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА

Преобразование Лапласа для непрерывных систем позволяло перейти от дифференциального уравнения  $n$ -го порядка к степенному ряду  $n$ -го порядка, что существенно упрощало анализ и синтез непрерывных систем. Для дискретных систем естественным продолжением, таким образом, будет переход от разностного уравнения к аналогичному степенному ряду.

В случае дискретных систем значение дискретного сигнала во времени можно представить как  $f_d(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d)$ . Тогда преобразование Лапласа этого сигнала будет

$$F_d(p) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_d) e^{-pt} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_d) e^{-pkT_d}, \quad (2.14)$$

где  $p = \sigma + j\omega$  – комплексное число.

Введя обозначение

$$e^{pT_d} = z, \quad (2.15)$$

выражение (2.14) можно привести к виду

$$F_d(z) = Z[f(kT_d)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_d) z^{-k}, \quad (2.16)$$

откуда следует, что дискретный процесс можно выразить в виде степенного ряда путём замены переменных (2.15), что по аналогии с непрерывными системами означает переход от конечно-разностных уравнений  $n$ -го порядка к степенному ряду  $n$ -го порядка. Выражение (2.16) получило название  $z$ -преобразования и играет такую же роль для дискретных систем, что и преобразование Лапласа для непрерывных систем.  $Z$ -преобразование определено для тех  $z$ , при которых ряд (2.16) сходится. Значения  $z$ , при которых  $F_d(z) = \pm\infty$  называются полюсами.

Если действительная часть комплексного числа  $\sigma = 0$ , то  $z = e^{j\omega T_d}$  и ряд (2.16) запишется как дискретное преобразование Фурье, которое связывает спектр дискретного сигнала с его отсчётами

$$S(\omega) = F_d \left( e^{j\omega T_d} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_d) e^{-j\omega k T_d}. \quad (2.17)$$

## 2.4. ПРИМЕРЫ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Дискретная дельта-функция

$$x(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0; \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} = 1 \cdot z^{-0} = 1. \quad (2.18)$$

Область сходимости этой функции – вся комплексная плоскость.

2. Дискретный единичный скачок

$$x(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0; \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}. \quad (2.19)$$

Ряд (2.19) является суммой геометрической прогрессии, первый член которой равен  $1 \cdot z^{-0} = 1$ , которая сходится при значении её знаменателя  $|z^{-1}| < 1$ , что соответствует  $|z| > 1$ , тогда

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \quad (2.20)$$

3. Экспоненциальная функция

$$x(k) = \begin{cases} a^k, & k \geq 0; \\ 0, & k < 0; \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^{-k}. \quad (2.21)$$

Ряд (2.21) представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом, равным 1, и знаменателем  $az^{-1}$ , который сходится при  $|az^{-1}| < 1$ , или  $|z| > |a|$ :

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}. \quad (2.22)$$

Для большого числа дискретных сигналов результаты  $z$ -преобразования сведены в табл. 2.3.

**Таблица 2.3**

№ п/п	Дискретная последовательность $x(n), n \geq 0$	Результат $z$ -преобразования $X(z)$	Область сходимости
1	$k\delta(n)$	$k$	
2	$k$	$\frac{kz}{z-1}$	$ z  > 1$
3	$kn$	$\frac{kz}{(z-1)^2}$	$ z  > 1$
4	$kn^2$	$\frac{kz(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z  > 1$
5	$ke^{-an}$	$\frac{kz}{z-e^{-a}}$	$ z  > e^{-a}$
6	$kne^{-an}$	$\frac{kze^{-a}}{(z-e^{-a})^2}$	$ z  > e^{-a}$
7	$1 - e^{-an}$	$\frac{z(1-e^{-a})}{z^2 - z(1+e^{-a}) + e^{-a}}$	$ z  > e^{-a}$
8	$\cos(an)$	$\frac{z(z - \cos a)}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z  > 1$
9	$\sin(an)$	$\frac{z \sin a}{z^2 - 2z \cos a + 1}$	$ z  > 1$
10	$e^{-an} \sin(an)$	$\frac{ze^{-a} \sin a}{z^2 - 2ze^{-a} \cos a + e^{-2a}}$	$ z  > e^{-a}$
11	$e^{-an} \cos(an)$	$\frac{ze^{-a}(ze^{-a} - \cos a)}{z^2 - 2ze^{-a} \cos a + e^{-2a}}$	$ z  > e^{-a}$
12	$\text{ch}(an)$	$\frac{(z^2 - z \text{ch } a)}{z^2 - 2z \text{ch } a + 1}$	$ z  > \text{ch } a$
13	$\text{sh}(an)$	$\frac{z \text{sh } a}{z^2 - 2z \text{ch } a + 1}$	$ z  > \text{sh } a$
14	$ka^n$	$\frac{kz}{z-a}$	$ z  > a$
15	$kna^n$	$\frac{kaz}{(z-a)^2}$	$ z  > a$
16	$2 c  p ^n \cos(n p_a + c_a)$	$\frac{z c e^{jc_a}}{z- p e^{jp_a}} + \frac{z c e^{-jc_a}}{z- p e^{-jp_a}}$	

## 2.5. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Линейность. Если  $Z[x_1(i)] = X_1(z)$  и  $Z[x_2(i)] = X_2(z)$ , то

$$Z[ax_1(i) + bx_2(i)] = aX_1(z) + bX_2(z).$$

2. Задержка на  $n$ -тактов. Если  $y(i) = x(i - n)$ , то

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(i)z^{-i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i-n)z^{-i} = z^{-n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i-n)z^{-(i-n)} = \\ &= z^{-n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j)z^{-j} = z^{-n} X(z). \end{aligned}$$

Откуда следует, что при задержке (некоторой последовательности на  $n$ -тактов необходимо умножить её  $z$ -преобразование на  $z^{-n}$ , который называется оператором задержки на  $n$ -тактов.

3. Свёртка сигналов. Пусть  $y(i) = h(i) \otimes x(i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(i-k)$  является

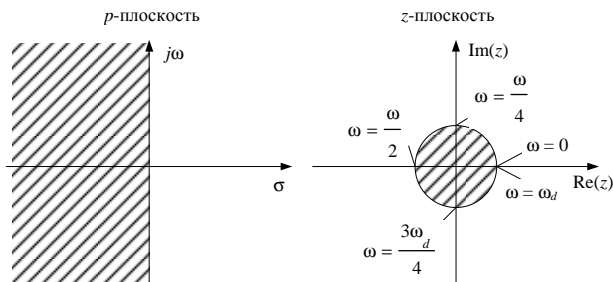
свёрткой двух бесконечных дискретных последовательностей, тогда

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(i)z^{-i} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(i-k)z^{-i} \right] = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(i-k)z^{-k} z^{-(i-k)} \right] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ h(k)z^{-k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i-k)z^{-(i-k)} \right] = \\ &= X(z) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} = X(z)H(z). \end{aligned} \tag{2.23}$$

То есть  $z$ -преобразование свёртки двух дискретных процессов равно произведению их  $z$ -преобразований. Это уравнение играет большую роль в теории дискретных систем.

4. Дифференцирование. Если  $X(z) = Z[x(k)]$ , то  $z$ -образ последовательности  $kx(k)$  можно найти, продифференцировав  $X(z)$ :

$$Z[kx(k)] = -z \frac{dX(z)}{dz}.$$



**Рис. 2.4. Отображение  $p$ -плоскости в  $z$ -плоскость**

5. Связь с преобразованием Лапласа. Вводя замену  $e^{pT_d} = z$ , где  $p = \sigma + j\omega$  является комплексной переменной Лапласа, то

$$z = e^{(\sigma + j\omega)T_d} = e^{\sigma T_d} e^{j\omega T_d}.$$

Откуда

$$|z| = e^{\sigma T_d}, \text{ а } \arg(z) = \omega T_d = \omega \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi \frac{\omega}{\omega_d},$$

где  $\omega_d$  – круговая частота дискретизации. При изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $\infty$  в  $z$ -плоскости будут отображаться концентрические окружности с радиусом  $|z| = e^{\sigma T_d}$ . Так как  $T_d > 0$ , то для этого радиуса справедливы следующие соотношения

$$|z| = 1 \text{ при } \sigma = 0; \quad |z| < 1 \text{ при } \sigma < 0; \quad |z| > 1 \text{ при } \sigma > 0,$$

из которых следует, что мнимая ось  $p$ -плоскости переходит в окружность единичного радиуса в  $z$ -плоскости, левая сторона  $p$ -плоскости отображается внутрь единичного круга  $z$ -плоскости, а правая сторона  $p$ -плоскости – на внешнюю сторону единичной окружности  $z$ -плоскости (рис. 2.4).

## 2.6. ОБРАТНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Обратное  $z$ -преобразование  $Z^{-1}$  позволяет восстанавливать дискретную последовательность по её  $z$ -образу:

$$x(k) = Z^{-1}[X(z)].$$

Умея проводить обратное  $z$ -преобразование, можно выразить исходные дискретные последовательности в виде степенных рядов, провести с ними необходимые алгебраические вычисления с целью получения  $z$ -образа выходного сигнала, и затем преобразовать их в дискретную последовательность.

Если  $z$ -образ имеет вид степенного ряда, то обратное  $z$ -преобразование находится путём определения коэффициентов у операторов задержки  $z^{-n}$ .

Если  $z$ -образ имеет вид степенного ряда, то обратное  $z$ -преобразование находится путём определения коэффициентов у операторов задержки  $z^{-n}$

$$X(z) = 2z^{-0} + 1z^{-1} - 5z^{-3} \dots, \text{ тогда } x(k) = \{2, 1, 0, -5, \dots\}.$$

$Z$ -образ дискретной системы обычно имеет дробно-рациональный вид

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}}, \quad (2.24)$$

нахождение обратного  $z$ -преобразования которого может быть выполнено одним из методов:

- 1) метод разложения в степенной ряд;
- 2) метод разложения на элементарные дроби;
- 3) метод вычетов.

Метод разложения в степенной ряд является довольно простым и пригодным для расчёта на ЭВМ. Суть его заключается в делении столбиком числителя на знаменатель, а частное будет содержать степенной ряд, обратное  $z$ -преобразование которого найти можно без труда.

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots$$

*Пример.*  $X(z) = \frac{2 + 3z^{-1} - 5z^{-2}}{4 - z^{-1} + 2z^{-2}}.$

$$\begin{array}{r} 2 + 3z^{-1} - 5z^{-2} \\ - \quad 2 - 0,5z^{-1} + 1z^{-2} \\ \hline 0 + 3,5z^{-1} - 6z^{-2} \\ - \quad \frac{3,5z^{-1} - 0,875z^{-2} + 1,75z^{-3}}{0 - 5,125z^{-2} + 1,75z^{-3}} \\ - \quad \frac{-5,125z^{-2} + 1,128125z^{-3} - 2,5625z^{-3}}{\dots} \end{array}$$

Откуда  $x(k) = \{0,5, 0,875, -1,28125, \dots\}.$

Деление в столбик довольно громоздко, поэтому более удобный вариант его проведения – рекурсивное вычисление новых коэффициентов степенного ряда на основе уже рассчитанных

$$\begin{aligned} x(0) &= b_0/a_0, \\ x(1) &= (b_1 - x(0)a_1)/a_0, \\ x(2) &= (b_2 - x(1)a_1 - x(0)a_2)/a_0, \\ x(k) &= \left( b_k - \sum_{i=1}^M x(k-i)a_i \right) / a_0, \\ b_k &= 0 \text{ при } k > N, \\ x(k-i) &= 0 \text{ при } (k-i) < 0. \end{aligned}$$

Фрагмент программы, реализующий рекурсивное вычисление обратного  $z$ -преобразования, приведён на языке С.

```

for(i=0; i <= nd; i++)
{
if (i <= N) b=B[i]; else b=0;
if (i <= M) m=i;
x[i]=0;
for(j=1; j <= m; j++)
x[i]+=A[j]*x[i-j];
x[i]=(b-x[i])/A[0];
}

```

В листинге программы  $nd$  – количество точек данных обратного  $z$ -преобразования;  $N$  – порядок многочлена числителя;  $M$  – порядок многочлена знаменателя.

Метод разложения на элементарные дроби подразумевает представить дробно-рациональное выражение (2.24) суммой простых дробей. Для каждой простой дроби по таблицам  $z$ -преобразования находится подходящая функция обратного  $z$ -преобразования. Разложение на простые дроби особенно полезно при проектировании структуры дискретной системы, которая представляется последовательным соединением отдельных простых звеньев. Если полюсы (2.24) первого порядка и  $N = M$ , то

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_M z^{-M}} = C_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \dots + \frac{C_M}{1 - p_M z^{-1}} = \\
 &= C_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{C_M z}{z - p_M} = C_0 + \sum_{k=1}^M \frac{C_k z}{z - p_k},
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

где  $p_k$  – полюсы  $X(z)$ ;  $C_k$  – коэффициенты (вычеты функции  $X(z)$ );

$$C_0 = b_N/a_M.$$

Если в (2.25)  $N < M$ , то  $C_0 = 0$ . Если  $N > M$ , то  $X(z)$  сначала сокращают до  $N \leq M$  путём деления в столбик числителя на знаменатель.

Коэффициенты  $C_k$ , связанные с полюсами  $p_k$ , находятся путём умножения (2.25) на  $(z - p_k)/z$  с последующим вычислением полученного выражения при  $z = p_k$ :

$$C_k = \left. \frac{X(z)(z - p_k)}{z} \right|_{z=p_k}. \tag{2.26}$$

Если  $X(z)$  имеет  $m$ -кратные полюсы, то разложение на элементарные дроби для таких полюсов находится в виде



$$\sum_{i=1}^m \frac{D_i}{(z-p_k)^i}, \quad (2.27)$$

где

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} \left[ (z-p_k)^m \frac{X(z)}{z} \right]_{z=p_k}. \quad (2.28)$$

*Пример.*  $X(z) = \frac{2+3z^{-1}-5z^{-2}}{4-z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{2z^2+3z^1-5}{4z^2-z^1+2}$ .

Найдём полюсы  $X(z)$  решением уравнения  $4z^2 - z^1 + 2 = 0$ .

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 4} = \frac{1 \pm \sqrt{-31}}{8}.$$

Таким образом, получаем два комплексно сопряжённых корня

$$p_1 = 0,125 + j0,696 = 0,7071e^{j1,393}; \quad p_2 = p_1^* = 0,125 - j0,696 = 0,7071e^{-j1,393}.$$

Тогда, учитывая, что  $N = M$ :

$$X(z) = \frac{2z^2 + 3z^1 - 5}{4(z-p_1)(z-p_2)} = C_0 + \frac{C_1 z}{z-p_1} + \frac{C_2 z}{z-p_2};$$

$$C_0 = b_N/a_M = \frac{-5}{2} = -2,5.$$

По формуле (2.26) определяются неизвестные коэффициенты:

$$C_1 = \frac{X(z)(z-p_1)}{z} \Big|_{z=p_1} = \frac{(2z^2+3z^1-5)}{4(z-p_1)(z-p_2)} \frac{(z-p_1)}{z} = \frac{(2z^2+3z^1-5)}{4(z-p_2)z} \Big|_{z=p_1} =$$

$$= \frac{(1e^{j2,786} + 3 \cdot 0,7071e^{j1,393} - 5)}{4(0,7071e^{j1,393} - 0,7071e^{-j1,393})0,7071e^{j1,393}} = \frac{6,0725e^{-j0,4128}}{3,937e^{-j0,1777}} =$$

$$= 1,542e^{-j0,2351} = 1,5 - j0,359;$$

$$C_2 = C_1^* = 1,542e^{j0,2351} = 1,5 + j0,359.$$

Тогда

$$X(z) = -2,5 + \frac{1,542e^{-j0,2351}z}{z-0,7071e^{j1,393}} + \frac{1,542e^{j0,2351}z}{z-0,7071e^{-j1,393}}.$$

Обращаясь к табл. 2.3, можно найти соответствие  $z$ -образов временным последовательностям в строках 1 и 16, с учётом которых

$$x(n) = -2,5\delta(n) + 2 \cdot 1,542 \cdot 0,7071^n \cos(1,393n - 0,2351).$$

Так как  $z$ -образ  $X(z)$  соответствует примеру разложения в степенной ряд, можно проверить полученный результат, вычислив значение  $x(n)$  для  $n = 0, 1, 2, \dots$  (табл. 2.4). Сравнивая полученные значения с рассчитанными ранее, можно убедиться в идентичности результатов.

С увеличением сложности  $X(z)$  метод разложения на элементарные дроби становится довольно трудоёмким.

Метод вычетов основан на вычислении контурного интеграла

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C z^{n-1} X(z) dz, \quad (2.29)$$

где  $C$  – контур интегрирования, охватывающий все полюсы  $X(z)$ . Используя теорему Коши о вычетах для рациональных многочленов, контурный интеграл (2.29) представляется суммой вычетов функции  $F(z) = z^{n-1} X(z)$  во всех полюсах внутри  $C$ . Вычет в каждом полюсе  $p_k$  с кратностью  $m$  находится по формуле

$$\text{Res}[F(z), p_k] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_k)F(z)]_{z=p_k}, \quad (2.30)$$

где  $\text{Res}[F(z), p_k]$  – вычет  $F(z)$  в точке  $z = p_k$ . Для простого полюса  $m = 1$  уравнение (2.30) запишется следующим образом

$$\text{Res}[F(z), p_k] = (z-p_k)F(z) \Big|_{z=p_k} = (z-p_k)z^{n-1}X(z) \Big|_{z=p_k}. \quad (2.31)$$

*Пример.* Вычислим обратное  $z$ -преобразование предыдущего примера

$$X(z) = \frac{2+3z^{-1}-5z^{-2}}{4-z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{2z^2+3z^1-5}{4z^2-z^1+2}.$$

## 2.4. Расчёт значений временного ряда

$n$	$x(n)$
0	$x(0) = -2,5 + 3,084 \cos(-0,2351) = -2,5 + 3 = 0,5$
1	$x(1) = -2,5 \cdot 0 + 3,084 \cdot 0,7071 \cos(1,393 - 0,2351) =$ $= 2,18 \cos(1,1579) = 0,8749$
2	$x(2) = 3,084 \cdot 0,7071^2 \cos(1,393 \cdot 2 - 0,2351) = -1,28125$
3	$x(3) = 3,084 \cdot 0,7071^3 \cos(1,393 \cdot 3 - 0,2351) = -0,7578$

Полюсы  $X(z)$  комплексно сопряжённые и равны:

$$p_1 = 0,125 + j0,696 = 0,7071e^{j1,393}; \quad p_2 = p_1^* = 0,125 - j0,696 = 0,7071e^{-j1,393}.$$

Находим  $F(z)$ :

$$F(z) = z^{n-1} X(z) = \frac{(2z^2 + 3z^1 - 5)z^{n-1}}{4(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{(2z^2 + 3z^1 - 5)z^n}{4z(z-p_1)(z-p_2)}.$$

Для  $F(z)$  таким образом добавляется ещё один полюс в точке  $z=0$ , который существует только при  $n=0$  и исчезает при  $n>0$ . На основании этого имеем два случая:

$$1. \text{ При } n=0, \quad F(z) = \frac{2z^2 + 3z^1 - 5}{4z(z-p_1)(z-p_2)}.$$

$$x(0) = \text{Res}[F(z), 0] + \text{Res}[F(z), p_1] + \text{Res}[F(z), p_2]$$

$$\text{Res}[F(z), 0] = (z-0)F(z)\Big|_{z=0} = \frac{2z^2 + 3z^1 - 5}{4(z-p_1)(z-p_2)}\Big|_{z=0} = \frac{-5}{4 \cdot 0,5} = -2,5.$$

$$\text{Res}[F(z), p_1] = (z-p_1)F(z)\Big|_{z=p_1} = \frac{2z^2 + 3z^1 - 5}{4z(z-p_2)}\Big|_{z=p_1} =$$

$$= 1,542e^{-j0,2351} = 1,5 - j0,359.$$

$$\text{Так как } p_2 = p_1^*, \text{ то } \text{Res}[F(z), p_2] = 1,542e^{j0,2351} = 1,5 + j0,359.$$

$$\text{Тогда } x(0) = -2,5 + 1,5 - j0,359 + 1,5 + j0,359 = 0,5.$$

$$2. \text{ При } n > 0, \quad F(z) = \frac{(2z^2 + 3z^1 - 5)z^n}{4z(z-p_1)(z-p_2)}.$$

$$x(n) = \text{Res}[F(z), p_1] + \text{Res}[F(z), p_2]$$

$$\text{Res}[F(z), p_1] = (z-p_1)F(z)\Big|_{z=p_1} = \frac{(2z^2 + 3z^1 - 5)z^n}{4z(z-p_2)}\Big|_{z=p_1} =$$

$$= 1,542e^{-j0,2351} \cdot 0,7071^n e^{j1,393n} = 1,542 \cdot 0,7071^n e^{j(1,393n - 0,2351)} =$$

$$= 1,542 \cdot 0,7071^n \cos(1,393n - 0,2351) + j1,542 \cdot 0,7071^n \sin(1,393n - 0,2351).$$

$$\text{Res}[F(z), p_2] = 1,542 \cdot 0,7071^n \cos(1,393n - 0,2351) -$$

$$- j1,542 \cdot 0,7071^n \sin(1,393n - 0,2351).$$

Окончательно получаем

$$x(n) = 2 \cdot 1,542 \cdot 0,7071^n \cos(1,393n - 0,2351),$$

что полностью соответствует результатам, полученным методом разложения на элементарные дроби.

## 2.7. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим модель ДС в виде конечно-разностного уравнения

$$a_0 y_i + a_1 y_{i-1} + \dots + a_n y_{i-n} = b_0 x_i + b_1 x_{i-1} + \dots + b_m x_{i-m},$$

которое связывает реакцию  $y$  ДС с воздействием  $x$ . Этим дискретным процессам можно сопоставить соответствующие  $z$ -образы

$$Z[y] = Y(z) \text{ и } Z[x] = X(z).$$

Принимая во внимание свойство  $z$ -преобразования задержанного на  $n$ -тактов сигнала

$$Z[x(i-n)] = z^{-n} X(z),$$

можно записать

$$a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z).$$

Тогда

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (2.32)$$

Отношение  $z$ -преобразованного выходного процесса к  $z$ -преобразованному входному процессу называется передаточной функцией  $H(z)$ . Зная передаточную функцию ДС, можно легко найти реакцию системы на входной дискретный процесс:

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (2.33)$$

Сравнивая выражения (2.32) и (2.23), можно заключить, что передаточная функция является  $z$ -образом импульсной характеристики ДС:

$$H(z) = Z[h[i]] \quad (2.34)$$

## 2.8. МОДЕЛЬ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕМЕНТА

Дискретная система, в которой осуществляется дискретизация сигнала по времени, преобразует исходный непрерывный сигнал в последовательность импульсов. Параметры импульсов зависят от значений этого

сигнала в дискретные моменты времени, а, соответственно, осуществляется импульсная модуляция. Такими параметрами импульсов являются амплитуда импульса  $A$ , длительность, или ширина, импульса  $\tau = \beta T_d$ , расстояние между импульсами  $T_d$  (период повторения). Величина, определяющая закон модуляции, называется модулирующей величиной. Если значениям модулирующей величины ставится в соответствие амплитуда импульсов, то модуляция называется амплитудно-импульсной (АИМ), если изменяется ширина – то широтно-импульсной (ШИМ), при изменении периода – временно-импульсной модуляцией (ВИМ).

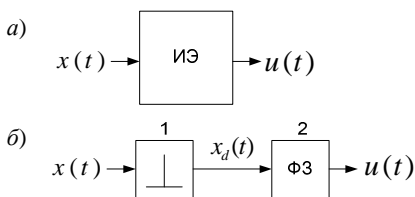
Широкий класс импульсных систем можно представить как совокупность непрерывной части и импульсного элемента. Непрерывная часть представляет собой динамическую систему определённой физической природы. Форма импульсов на выходе импульсного элемента в общем случае оказывает влияние на характер работы импульсной системы. Но если импульсы достаточно узкие [2]:

$$\begin{cases} \tau \ll T_d, \\ \tau \ll T_{\min}, \end{cases} \quad (2.35)$$

где  $T_{\min}$  – наименьшая из постоянных времени передаточной функции  $W(p)$  непрерывной части, то результат работы непрерывной части определяется не формой импульса, а его площадью, т.е. информация в таком сигнале заключена не в его амплитуде, а в его площади. Тогда, не нарушая принципа действия устройства, для его описания можно выбрать любую, удобную с позиций расчёта, форму импульсов, лишь бы они имели одинаковую с исходными площадь. Используя в качестве таких импульсов дискретные дельта-функции, дискретный сигнал запишется в виде

$$x_d(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(t) \delta(t - iT_d) = \sum_{i=0}^{\infty} x[iT_d] \delta(t - iT_d). \quad (2.36)$$

Если условия (2.35) нарушены, то представление импульсного сигнала, поступающего на непрерывную часть, можно скорректировать с помощью динамического устройства формирования импульсов (формирующее звено (ФЗ)) (рис. 2.5), которое имеет импульсную переходную функцию  $h_{\Phi}(t)$ , совпадающую с истинной формой импульса  $s_{\Phi}(t) = h_{\Phi}(t)$ . Простейшее импульсное звено 1 на рис. 2.5, б преобразует входную функцию  $x(t)$  в обобщённую решётчатую функцию (2.36). Формирующее звено 2 на рис. 2.5, б преобразует решётчатую функцию в импульсы, соответствующие реальной форме импульсного элемента  $s_{\Phi}(t)$ . Передаточная функция, как известно, равна преобразованию Лапласа от импульсной переходной функции, тогда  $W_{\Phi}(p) = L[s_{\Phi}(t)]$ .



**Рис. 2.5. Импульсный элемент (а) и его эквивалентная схема (б)**

В качестве примера найдём передаточную функцию формирующего звена, вырабатывающего прямоугольные импульсы, следующие с периодом повторения  $T_d$  и длительностью  $\tau$ ,  $\tau < T_d$ . Весовая функция в этом случае имеет вид

$$s_{\Phi}(t) = h_{\Phi}(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t < \tau; \\ 0 & \text{при } \tau \leq t < T_d, \end{cases}$$

которую можно представить в виде двух ступенчатых единичных функций (рис. 2.6)

$$s_{\Phi}(t) = h_{\Phi}(t) = A(1(t) - 1(t - \tau)).$$

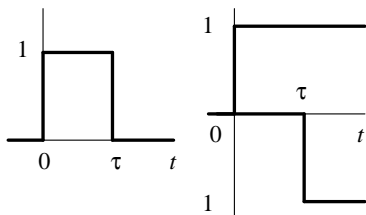
Используя теорему смещения

$$\begin{aligned} W_{\Phi}(p) &= L[s_{\Phi}(t)] = \int_0^{\infty} s_{\Phi}(t) e^{-pt} dt = A \left( \int_0^{\infty} 1(t) e^{-pt} dt - \int_0^{\infty} 1(t - \tau) e^{-pt} dt \right) = \\ &= A \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-\tau p} \right) = \frac{A(1 - e^{-\tau p})}{p}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

В частном случае, когда используется экстраполиатор нулевого порядка,  $A = 1$  и  $\tau = T_d - 0$ :

$$W_{\Phi}(p) = \frac{1 - e^{-T_d p}}{p}. \quad (2.38)$$

Таким образом, модель импульсного элемента на рис. 2.5, б позволяет достаточно гибко и адекватно отражать работу реального импульсного устройства, включённого в цепь непрерывных динамических элементов.



**Рис. 2.6. Импульсная переходная функция формирующего звена**

## 2.9. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

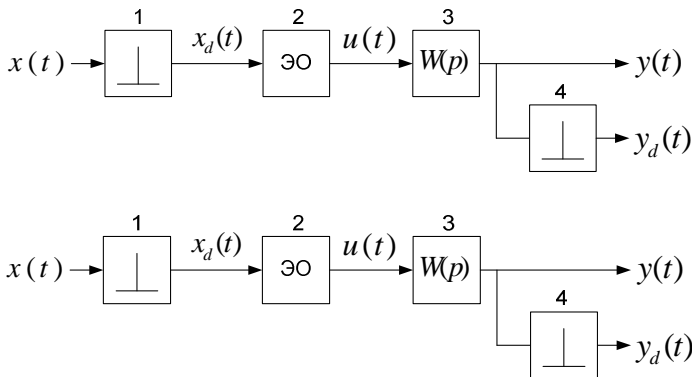
Рассмотрим систему (рис. 2.7), состоящую из импульсного элемента, представляющего собой экстраполятор нулевого порядка, и непрерывной части, имеющей передаточную функцию  $W(p)$ . Подобные системы называют импульсными фильтрами и на практике встречаются в случаях использования выхода ЦАП для управления непрерывным объектом.

Передаточная функция  $W_\Phi(p)$  формирующего звена 2 и объекта 3 образует приведённую непрерывную часть (ПНЧ) импульсного фильтра, на вход которой подаётся решётчатый сигнал. Так как сигнал  $u(t)$  является непрерывным, то передаточная функция ПНЧ  $W_n(p) = W_\Phi(p)W(p)$ . В случае экстраполятора нулевого порядка

$$W_n(p) = \frac{1 - e^{-T_d p}}{p} W(p) = (1 - e^{-T_d p}) \frac{W(p)}{p} = (1 - e^{-T_d p}) H(p). \quad (2.39)$$

В (2.39)  $H(p) = W(p)/p$  представляет собой переходную характеристику объекта  $h(t) = L^{-1}[H(p)]$  (звено 3 на рис. 2.7), которая является реакцией на единичную ступенчатую функцию Хевисайда  $1(t)$  ( $L[1(t)] = 1/p$ ). Обратное преобразование Лапласа выражения (2.39) даст импульсную характеристику (весовую функцию) ПНЧ:

$$w(t) = L^{-1}[W_n(p)] = L^{-1}[(1 - e^{-T_d p}) H(p)] = h(t) - h(t - T_d). \quad (2.40)$$



**Рис. 2.7. Структурная схема импульсного фильтра**

Выходной сигнал  $y(t)$  является непрерывным и представляет собой сумму реакций ПНЧ от каждого входного мгновенного импульса  $x_d(t) = x[iT_d]$ :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x[iT_d]w(t - iT_d), \quad (2.41)$$

где  $i$  – целая часть  $\frac{t}{T_d}$ .

Если на выход ПНЧ подключить фиктивный дискретизатор, работающий синхронно с входным, то получим последовательность мгновенных импульсов выходного сигнала

$$\begin{aligned} y_d(t) &= y(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_d) = \sum_{i=0}^{\infty} x[iT_d] \sum_{k=0}^{\infty} w(t - iT_d) \delta(t - kT_d) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x[iT_d] w((k - i)T_d) = y[kT_d]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Выражение (2.42) представляет собой дискретную свёртку входного дискретного процесса и дискретной импульсной характеристики ПНЧ. Тогда, проводя  $z$ -преобразование (2.42), получим

$$Y(z) = X(z)W(z), \quad (2.43)$$

где  $X(z) = Z[x[iT_d]]$ ;  $W(z) = Z[w[iT_d]]$  – импульсная передаточная функция ПНЧ. Используя (2.40) и свойство  $z$ -преобразования задержанного сигнала на целое число периодов дискретизации, получим

$$W(z) = Z[h(iT_d) - h(iT_d - T_d)] = H(z)(1 - z^{-1}) = \frac{z-1}{z} H(z). \quad (2.44)$$

Таким образом, введение фиктивного дискретизатора позволило рассматривать импульсный фильтр (рис. 2.7) как чисто импульсную систему, для которой применима теория  $z$ -преобразования. При этом выход чисто импульсной системы  $y_d(t)$  совпадает с выходом ПНЧ  $y(t)$  только в дискретные моменты времени, кратные периоду дискретизации.

В общем случае, дискретная передаточная функция ПНЧ  $W(z)$  получается из  $W_n(p)$  путём нахождения импульсной характеристики ПНЧ  $w(t) = L^{-1}[W_n(p)]$ . Затем  $w(t)$  путём дискретизации во времени преобразуется к дискретному виду  $w[iT_d]$  для которой находится  $z$ -изображение  $W(z) = Z[w[iT_d]]$ . В соответствии с [1] можно ввести в рассмотрение оператор  $Z_T$ , который каждой функции  $W(p) = L[w(t)]$  ставит в соответствие функцию  $W(z) = Z[w[iT_d]]$



$$W(z) = Z_T[W(p)] \quad (2.45)$$

Оператор  $Z_T$  соответствует трём последовательным операциям: обратному преобразованию Лапласа, дискретизации по времени и  $z$ -преобразованию. Так как все три указанные операции являются линейными, то оператор  $Z_T$  является линейным.

Для анализа характеристик импульсных фильтров между моментами дискретизации используется смещённая дискретная передаточная функция, которая равна  $z$ -преобразованию смещённой импульсной характеристики ПНЧ фильтра [5]. Если смещение обозначить через  $\tau$  или в относительных

единицах как  $\varepsilon = \frac{\tau}{T_d}$ , то (рис. 2.8) значения  $w(t)$  в моменты времени

$t = kT_d + \varepsilon T_d$  будут равны дискретным значениям смещённой импульсной функции  $w(t - \Delta T_d)$  в несмещённые моменты времени при времени запаздывания, равном  $\Delta = 1 - \varepsilon$ . Смещённая импульсная характеристика образуется путём включения в цепь фиктивного дискретизатора на выходе ПНЧ звена чистого запаздывания с передаточной функцией  $e^{-p\Delta T_d}$ . Тогда смещённая дискретная передаточная функция импульсного фильтра

$$W(z, \varepsilon T_d) = Z[w(t - \Delta T_d)]_{\Delta=1-\varepsilon}, \quad (2.46)$$

где  $w(t - \Delta T_d) = L^{-1}[W(p)e^{-p\Delta T_d}]$  – смещённая импульсная характеристика ПНЧ фильтра.

Принимая  $\varepsilon$  равной от нуля до единицы, можно построить множество смещённых передаточных функций, которые позволят оценить процессы в импульсном фильтре для различных дискретных моментов времени.

Так, например, смещённая дискретная передаточная функция импульсного фильтра (22)

$$W(z, \varepsilon T_d) = \frac{z-1}{z} H(z, \Delta T_d)_{\Delta=1-\varepsilon}, \quad (2.47)$$

где  $H(z, \Delta T_d)$  –  $z$ -преобразование смещённой переходной функции непрерывной части импульсного фильтра, определяемое по таблицам модифицированного  $z$ -преобразования [5].

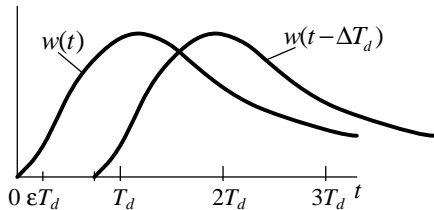


Рис. 2.8. Смещённая импульсная функция ПНЧ

Если ПНЧ импульсного фильтра состоит из параллельно включённых звеньев (рис. 2.9), то передаточные функции такого фильтра определяются по формулам

$$W(z) = \sum_{i=1}^k W_i(z),$$

$$W(z, \varepsilon T_d) = \sum_{i=1}^k W_i(z, \varepsilon T_d),$$
(2.48)

где  $k$  – число параллельно включённых звеньев.

При последовательном включении звеньев, разделённых импульсными элементами (рис. 2.10), дискретные передаточные функции находятся из соотношений

$$W(z) = \prod_{i=1}^k W_i(z),$$

$$W(z, \varepsilon T_d) = W_k(z, \varepsilon T_d) \prod_{i=1}^{k-1} W_i(z).$$
(2.49)

Если имеем последовательное соединение звеньев, не разделённых импульсными элементами (рис. 2.11), то передаточная функция последовательного соединения цепей, как известно,  $W(p) = \prod_{i=1}^k W_i(p)$ , а дискретная передаточная функция определяется выражением

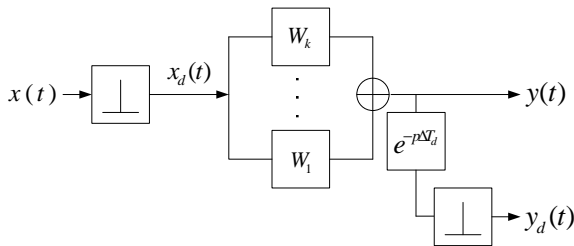


Рис. 2.9. Структурная схема с параллельным включением звеньев

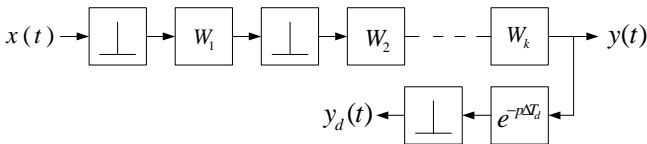
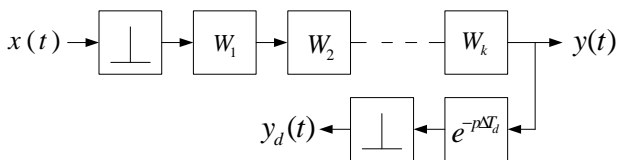


Рис. 2.10. Структурная схема с последовательным включением звеньев, разделённых импульсными элементами



**Рис. 2.11.** Структурная схема с последовательным включением звеньев, без разделения импульсными элементами

$$W(z) = Z_T [W(p)] = Z_T \left[ \prod_{i=1}^k W_i(p) \right], \quad (2.50)$$

$$W(z, \varepsilon T_d) = Z_T [W(p) e^{-p\Delta T_d}]$$

Следует иметь в виду, что

$$Z_T \left[ \prod_{i=1}^k W_i(p) \right] \neq \prod_{i=1}^k W_i(z).$$

Звено чистого запаздывания, включаемое на выходе импульсного фильтра, позволяет учитывать временное запаздывание, которое возникает вследствие запаздывающих звеньев в непрерывной части и конечного времени обработки данных в ЦВМ.

## 2.10. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Если произвольная ДС состоит из чисто импульсных дискретных звеньев, входной и выходной сигнал которых описывается рещётчатой функцией, а каждое такое звено обладает дискретной передаточной функцией, то формулы для нахождения дискретной передаточной функции всей ДС по дискретным передаточным функциям звеньев совпадают с аналогичными формулами из теории непрерывных систем. Это совпадение происходит потому, что структура дискретной системы в момент замыкания ключей совпадает с аналогичной структурой непрерывной системы.

*Пример.* Найти дискретную передаточную функцию дискретной системы, состоящей из чисто импульсных звеньев (рис. 2.12).

С учётом (2.43) для  $z$ -образа выходного сигнала можно записать

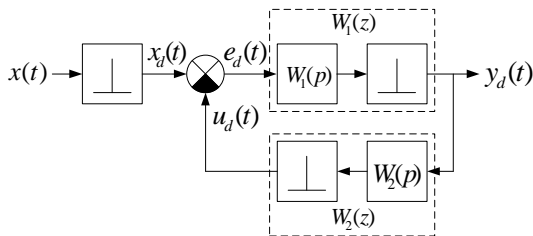
$$Y(z) = E(z)W_1(z),$$

а для сигнала обратной связи

$$U(z) = Y(z)W_2(z).$$

Тогда  $z$ -образ сигнала рассогласования (ошибки) будет равен

$$E(z) = X(z) - U(z) = X(z) - Y(z)W_2(z).$$



**Рис. 2.12.** Соединение чисто импульсных систем

Подставляя последнее выражение в первое, получим

$$Y(z) = X(z)W_1(z) - Y(z)W_2(z)W_1(z),$$

откуда

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_2(z)W_1(z)}. \quad (2.51)$$

Формула (2.51) аналогична формуле нахождения передаточной функции замкнутой непрерывной системы с отрицательной обратной связью, если известны передаточные функции её звеньев. В случае положительной обратной связи

$$W(z) = \frac{W_1(z)}{1 - W_2(z)W_1(z)}. \quad (2.52)$$

Система на рис. 2.12 останется чисто импульсной, если перенести дискретизатор в линию связи между сумматором и звеном  $W_1(p)$ , так как входные сигналы звеньев и выходной сигнал ДС по-прежнему будут представлять решётчатые функции.

Пусть произвольная ДС задана структурной схемой, представляющей собой совокупность стандартных соединений (последовательно, параллельно, соединения типа обратной связи) из простейших импульсных фильтров и непрерывных звеньев. Тогда для нахождения реакции ДС используются передаточные функции, полученные с помощью обычного и дискретного преобразования Лапласа. Обычное преобразование Лапласа используется в случаях, когда на выходе звена отсутствует дискретизатор или когда производится связь двух и более непрерывных звеньев без дискретизатора.

*Пример.* Определить математические отношения между входом и выходом системы, представленной на рис. 2.13.

Образ выходного сигнала  $y(t)$  равен

$$Y(p) = E_d(p)W_1(p) :$$

дискретному преобразованию Лапласа решётчатой функции сигнала ошибки  $e_d(t)$ , умноженному на передаточную функцию звена  $W_1(p)$ .

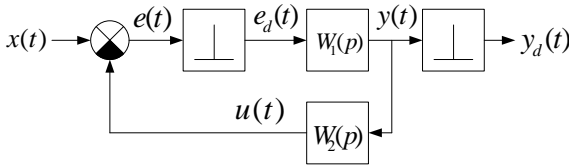


Рис. 2.13. Структурная схема ДС с непрерывной обратной связью

$$E(p) = X(p) - U(p) = X(p) - Y(p) W_2(p);$$

$$Y(p) = \left( X_d(p) - [Y(p) W_2(p)]_d \right) W_1(p). \quad (2.53)$$

Если нужно определить дискретные значения выхода, то применяют фиктивный дискретизатор, а дискретные значения реакции ДС определяются по формуле

$$Y_d(p) = X_d(p) W_{d1}(p) - [Y(p) W_2(p)]_d W_{d1}(p). \quad (2.54)$$

Ясно, что для данной ДС не удаётся однозначно определить передаточную функцию, так как в ней используется выходной сигнал дискретной и непрерывной форм.

Если перенести ключ на рис. 2.13 из линии сигнала ошибки на вход звена обратной связи (рис. 2.14), то получим следующие соотношения:

$$Y(p) = E(p) W_1(p);$$

$$E(p) = X(p) - U(p) = X(p) - Y_d(p) W_2(p);$$

$$Y(p) = (X(p) - Y_d(p) W_2(p)) W_1(p).$$

Для использования фиктивного ключа выхода ДС

$$Y_d(p) = [X(p) W_1(p)]_d - Y_d(p) [W_2(p) W_1(p)]_d. \quad (2.55)$$

Здесь также не удаётся получить соотношение в виде передаточной функции, так как формы входного и выходного сигнала различны.

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы [2].

Вывод 1. Вид аналитической связи входа с непрерывными или дискретными значениями выхода произвольной дискретной системы существенно зависит от места расположения ключей (дискретизаторов).

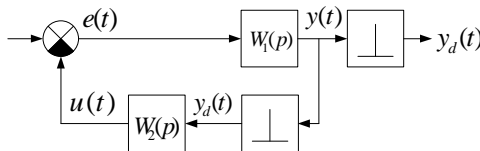


Рис. 2.14. Структурная схема ДС с непрерывным сигналом ошибки

Вывод 2. Для произвольной ДС не удаётся получить характеристику, аналогичную передаточной функции, если в математическом описании ДС используются непрерывные и дискретные формы входных и/или выходных сигналов.

Вывод 3. В некоторых частных случаях соединений произвольных ДС, например, когда  $W_2(p) = 1$  на рис. 2.13, удаётся найти передаточную функцию, связывающую вход и выход в дискретные моменты времени. Действительно, из (2.54) при  $W_2(p) = 1$  следует

$$Y_d(p) = X_d(p)W_{d1}(p) - Y_d(p)W_{d1}(p).$$

Тогда

$$W_d(p) = \frac{Y_d(p)}{X_d(p)} = \frac{W_{d1}(p)}{1 + W_{d1}(p)} \quad (2.56)$$

или в силу непосредственной связи  $z$ -преобразования с дискретным преобразованием Лапласа

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z)}. \quad (2.57)$$

Несмотря на то, что данный пример отмечен как частный случай, он имеет огромное практическое значение, так как к нему приводятся многие системы из класса импульсных следящих систем.

Вывод 4. Для получения удобного выражения описания ДС довольно часто требуется вводить синхронные фиктивные ключи в различных точках структурной схемы ДС. При этом необходимо следить, чтобы ключи не меняли характер работы всей системы, а лишь давали информацию о ней в дискретные моменты времени. Если же фиктивный дискретизатор меняет характер работы системы, то с целью приближённого описания непрерывного процесса можно преобразовать его в ступенчатый сигнал с помощью экстраполятора нулевого порядка (рис. 2.15).

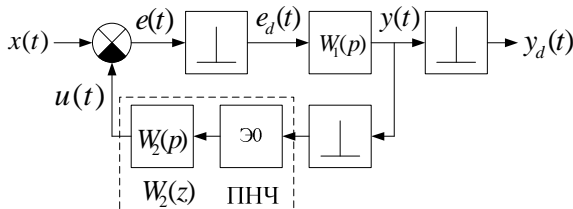
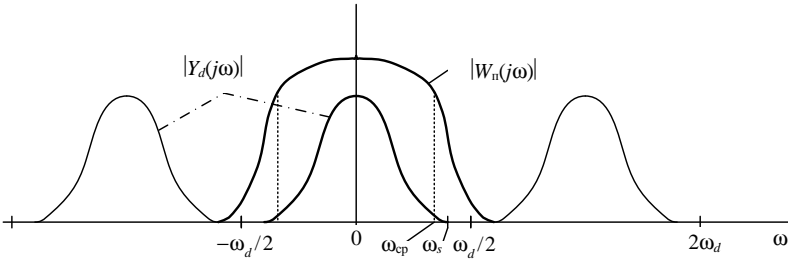


Рис. 2.15. Аппроксимация непрерывного процесса с помощью экстраполятора нулевого порядка



**Рис. 2.16.** Спектры дискретного сигнала и непрерывного звена

Тогда для цепи обратной связи (рис. 2.15) можно выразить передаточную функцию, как

$$W_n(p) = (1 - e^{-pT_d}) \frac{W_2(p)}{p},$$

или, учитывая, что вся ДС при такой замене становится чисто дискретной:

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z_T \left[ \frac{W_2(p)}{p} \right]. \quad (2.58)$$

Введение экстраполятора нулевого порядка позволяет достаточно хорошо аппроксимировать непрерывный сигнал, если:

- 1) выполняются условия теоремы Котельникова (частота сигнала  $\omega_s$  минимум в два раза меньше частоты дискретизации  $\omega_d$ );
- 2) полоса пропускания ПНЧ  $\omega_{cp} < \omega_d/2$ . Это требование следует из условия неискажённой передачи сигнала импульсным фильтром [5];

3) амплитудная частотная характеристика (АЧХ) ПНЧ в районе частоты среза уменьшается достаточно круто (рис. 2.16). Тогда через звено проходит только та часть импульсного сигнала  $y_d(t)$ , которая соответствует непрерывному сигналу  $y(t)$ .

Таким образом, произвольную дискретную систему, в составе которой содержатся как дискретные так и непрерывные элементы (непрерывно-дискретная система), с помощью  $z$ -преобразования или преобразования Лапласа удаётся исследовать лишь приближённо, да и то при соблюдении некоторых условий.

### 3. ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Традиционный подход использования для анализа и синтеза ДС передаточных функций, импульсной характеристики, нулей и полюсов позволял довольно эффективно проводить синтез ДС. Однако значительно большей универсальностью и пригодностью для автоматизированного вычисления обладают модели ДС в пространстве состояний. К тому же пространство состояний позволяет эффективно описывать ДС со многими входами и многими выходами. В пространстве состояний ДС описывается системой конечно-разностных уравнений первого порядка, называемых уравнениями состояния. Если помимо дискретных элементов система содержит и непрерывные, то пространство состояний будет содержать дифференциальные уравнения первого порядка.

При описании ДС в пространстве состояний (рис. 3.1) все используемые переменные рассматриваются как векторы-столбцы, которые разделяют на входные переменные (воздействия)  $u^T = [u_1, u_2, \dots, u_r]$ , выходные переменные (реакция)  $y^T = [y_1, y_2, \dots, y_m]$  и переменные состояния  $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ , характеризующие внутреннее состояние ДС. Состояние системы определяет необходимую информацию о прошлом, которая достаточна для полного описания будущего состояния системы, если известно значение её входов. Связывает воедино эти три объекта математическая модел

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= F[x(t), u(t), t], \\ y(t) &= Q[x(t), u(t), t],\end{aligned}$$

где  $F$  –  $n$ -мерная вектор-функция системы;  $Q$  –  $m$ -мерная вектор-функция выхода.

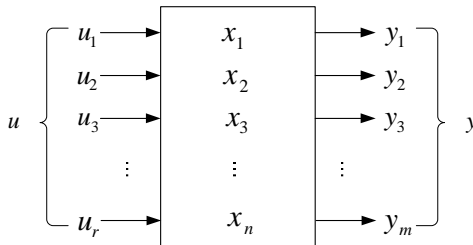


Рис. 3.1. Описание системы в пространстве состояний



Анализ ДС усложняется тем фактом, что в зависимости от способа дискретизации в ней могут содержаться различные типы сигналов, как непрерывные, так и квантованные или дискретные. Действие этих сигналов на линейный объект будет различным, что необходимо учитывать в математической модели ДС, для которой сигналы выделяются в дискретные моменты времени. Переход к описанию ДС в пространстве состояний можно осуществить различными способами [3, 6, 8]. Далее рассматриваются два способа. Первый заключается в прямом переходе от разностного уравнения путём введения в него переменных состояния; второй – основан на использовании аналитического решения векторного дифференциального уравнения непрерывной части импульсной системы с заданной формой дискретного сигнала.

1. Запись разностного уравнения ДС в векторной форме. Пусть дискретная передаточная функция ДС задана в виде

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}}$$

или

$$W(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n}. \quad (3.1)$$

Соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$y[i+n] + a_1 y[i+n-1] + \dots + a_n y[i] = b_0 x[i+m] + b_1 x[i+m-1] + \dots + b_m x[i], \quad (3.2)$$

где в квадратных скобках обозначены номера отсчётов.

Введём следующие переменные состояния:

$$\begin{aligned} z_1[i] &= y[i]; \\ z_2[i] &= y[i+1] = z_1[i+1]; \\ z_3[i] &= y[i+2] = z_2[i+1]; \\ &\vdots \\ z_n[i] &= y[i+n-1] = z_{n-1}[i+1]; \\ y[i+n] &= z_n[i+1]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для частного случая, когда в (3.2)  $b_m = 1$ ,  $b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0$ , и учитывая (3.3), можно записать

$$y[i+n] = z_n[i+1] = -a_1 z_n[i] - z_{n-1}[i] - \dots - a_n z_1[i] + x[i]. \quad (3.4)$$

Выражение (3.1) будет иметь следующий вид

$$Y(z) = \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} X(z). \quad (3.5)$$

Поскольку с помощью (3.3) определено, что переменная состояния  $z_1[i] = y[i]$ , то их  $z$ -образы также равны, т.е.  $Z_1(z) = Y(z)$ . Учитывая выражение (3.5), можно записать переменную состояния  $z_1[i]$  в разностной форме

$$a_n z_1[i] + a_{n-1} z_1[i+1] + \dots + a_1 z_1[i+n-1] + z_1[i+n] = x[i]. \quad (3.6)$$

Это уравнение можно представить в матричном виде через переменные состояния

$$\begin{bmatrix} z_1[i+1] \\ z_2[i+1] \\ \vdots \\ z_n[i+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1[i] \\ z_2[i] \\ \vdots \\ z_{n-1}[i] \\ z_n[i] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[i], \quad (3.7)$$

и уравнения выхода

$$y[i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1[i] \\ z_2[i] \\ \vdots \\ z_{n-1}[i] \\ z_n[i] \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Анализируя уравнения (3.7) и (3.8), можно выделить следующие матричные переменные:  $z$  – вектор переменных состояния;  $A$  – матрица состояний;  $B$  – матрица входа;  $C$  – матрица выхода. Тогда (3.7) и (3.8) запишутся в компактном виде

$$z[i+1] = Az[i] + Bx[i]; \quad y[i] = Cz[i]. \quad (3.9)$$

Для рассматриваемого частного случая видно, что  $y[i] = z_1[i]$ , а следовательно,  $Y(z) = Z_1(z)$  и (3.2) запишется в виде

$$z_1[i+n] + a_1 z_1[i+n-1] + \dots + a_n z_1[i] = x[i]. \quad (3.10)$$

То есть переменная состояния  $z_1[i]$  отражает влияние на выходную переменную самого позднего из учитываемых в памяти воздействий. По своей сути переменные состояния аккумулируют в себе все воздействия, которые были приложены в предшествующие текущему состоянию системы, и если известно текущее состояние системы, то для определения будущего состояния требуется лишь значение входной переменной в рассматриваемый момент времени. Таким образом, для случая, когда  $b_m \neq 1$ , а  $b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} \neq 0$  выражение (3.1) можно представить в виде

$$Y(z) = \left[ \frac{1}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} X(z) \right] (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m) = \\ = Z_1(z) (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m),$$

которому соответствует разностное уравнение

$$y[i] = b_0 z_1[i+m] + b_1 z_1[i+m-1] + b_2 z_1[i+m-2] + \dots + b_m z_1[i]. \quad (3.11)$$

В выражении (3.11)  $z_1[i]$  – решение разностного уравнения (3.10). Используя (3.3), выражение (3.11) можно представить в виде

$$y[i] = b_0 z_m[i+1] + b_1 z_m[i] + b_2 z_{m-1}[i] + \dots + b_m z_1[i]. \quad (3.12)$$

Если  $m = n$  (для случая  $m < n$  можно ввести дополнительные коэффициенты  $b$ , равные нулю), то подставляя в (3.12) выражение (3.4), для  $z_m[i+1]$  получим

$$y[i] = (b_1 - b_0 a_1) z_m[i] + (b_2 - b_0 a_2) z_{m-1}[i] + \dots + (b_m - b_0 a_m) z_1[i] + b_0 x[i],$$

которое можно записать как уравнение выхода в матричной форме

$$y[i] = [(b_m - b_0 a_m) \quad \dots \quad (b_1 - b_0 a_1)] \begin{bmatrix} z_1[i] \\ \vdots \\ z_m[i] \end{bmatrix} + b_0 x[i] \quad (3.13)$$

или в векторной форме

$$y[i] = Cz[i] + b_0 x[i].$$

Структурная схема, соответствующая разностному уравнению (3.13), показана на рис. 3.2, а блок-схема для уравнения в векторном виде – на рис. 3.3. Таким образом, уравнение состояния ДС и уравнения выхода имеют вид

$$z[i+1] = Az + Bx; \quad y[i] = Cz[i] + dx[i].$$

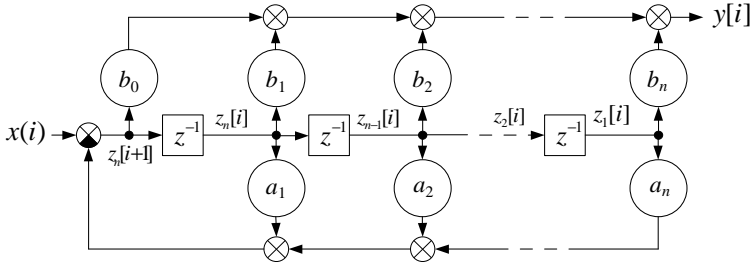


Рис. 3.2. Структурная схема разностного уравнения в переменных состояния

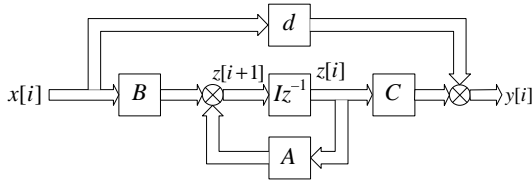


Рис. 3.3. Обобщённая блок-схема в пространстве состояний

Рассмотрим решения (3.9) для  $i \geq 0$ . При  $i = 0$  система определяется начальными условиями  $z[0] = z_0$  и  $y[0] = Cz_0$ . При  $i = 1$  получим

$$z[1] = Az[0] + Bx[0], \quad y[1] = Cz[1],$$

при  $i = 2$

$$z[2] = Az[1] + Bx[1], \quad y[2] = Cz[2],$$

при  $i = k$

$$z[k] = Az[k-1] + Bx[k-1], \quad y[k] = Cz[k].$$

Видно, что решение данного уравнения находится с помощью итерационной процедуры, когда для расчёта нового значения используется результат расчёта на предыдущем шаге. Подставляя соответствующие подстановки в итерационный алгоритм, можно выразить решение (3.9) в аналитическом виде

$$z[1] = Az[0] + Bx[0],$$

$$z[2] = Az[1] + Bx[1] = A^2 z[0] + ABx[0] + Bx[1],$$

⋮

$$z[k] = z_{CB}[k] + z_B[k] = A^k z[0] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} Bx[i], \quad (3.14)$$

где  $z_{\text{св}}[k]$  – свободная составляющая вектора состояния;  $z_{\text{в}}[k]$  – вынужденная составляющая, являющаяся реакцией на входное воздействие  $x[i]$ . Подставляя найденное решение (3.14) в уравнение для выхода, получим аналитическое решение в виде

$$y[k] = y_{\text{св}}[k] + y_{\text{в}}[k] = CA^k z[0] + \sum_{i=0}^{k-1} CA^{k-i-1} Bx[i]. \quad (3.15)$$

Анализируя (3.15) можно ввести переменные  $\Phi(0, k) = A^k$  – фундаментальная (переходная) матрица ДС, и  $w[k] = C\Phi(0, k-1)B$  – импульсная характеристика ДС. Тогда

$$y[k] = C\Phi(0, k)z[0] + \sum_{i=0}^{k-1} w[k-i]x[i]. \quad (3.16)$$

Если провести  $z$ -преобразование векторного выражения (3.9), то последовательно получим

$$\begin{aligned} zZ(z) &= AZ(z) + BX(z); \quad Y(z) = CZ(z), \\ Z(z)(zI - A) &= BX(z), \\ Z(z) &= (zI - A)^{-1} BX(z) \end{aligned}$$

и окончательно

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} BX(z) = W(z)X(z), \quad (3.17)$$

где  $W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = C(zI - A)^{-1} B$  – передаточная характеристика ДС.

2. Запись разностного уравнения в векторной форме, основанного на квантовании во времени векторного дифференциального уравнения.

Пусть имеется непрерывная система, описываемая дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, на вход которой подаётся произвольный сигнал, необходимо определить её реакцию в дискретные моменты времени. Дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка можно представить системой дифференциальных уравнений 1-го порядка в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu; \\ y &= Cx + Du. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В соответствии с теорией дифференциального исчисления решение первого уравнения (3.18) представляется в виде

$$x = x_0 + x_B,$$

где  $x_0$  – свободная составляющая системы;  $x_B$  – вынужденная составляющая. Свободная составляющая является решением однородного дифференциального уравнения

$$\dot{x} = Ax,$$

решение которого

$$x_0(t) = e^{A(t-t_k)}x(t_k). \quad (3.19)$$

Для упрощения записи обозначим  $e^{A(t-t_k)} = \Phi(t-t_k)$ , тогда выражение (3.19) запишется в виде

$$x_0(t) = \Phi(t-t_k)x(t_k). \quad (3.20)$$

Решение неоднородного уравнения будем искать методом неопределённых коэффициентов в виде, аналогичном (3.20):

$$x(t) = e^{A(t-t_k)}C(t) = \Phi(t-t_k)C(t). \quad (3.21)$$

Подставляя (3.21) в первое уравнение (3.18), получим

$$A\Phi(t-t_k)C(t) + \Phi(t-t_k)\dot{C}(t) = A\Phi(t-t_k)C(t) + Bu(t)$$

и окончательно

$$\Phi(t-t_k)\dot{C}(t) = Bu(t). \quad (3.22)$$

Решение (3.22) имеет вид

$$C(t) = \int_{t_k}^t \Phi^{-1}(s-t_k)Bu(s)ds + C_1. \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23) в (3.21), получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t-t_k) \int_{t_k}^t \Phi^{-1}(s-t_k)Bu(s)ds + \Phi(t-t_k)C_1 = \\ &= \Phi(t-t_k)C_1 + \int_{t_k}^t \Phi(t-s)Bu(s)ds. \end{aligned} \quad (3.24)$$

При  $t = t_k$

$$x(t_k) = \Phi(0)C_1,$$

откуда видно, что вектор  $C_1 = x(t_k)$  определяет начальные условия системы. Окончательно получим

$$x(t) = \Phi(t - t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^t \Phi(t - s)Bu(s)ds. \quad (3.25)$$

Так как при дискретизации по времени интересуют значение выхода системы в следующий момент времени  $t = t_k + T_d$ , то

$$x(t_k + T_d) = \Phi(T_d)x(t_k) + \int_{t_k}^{t_k + T_d} \Phi(t_k + T_d - s)Bu(s)ds. \quad (3.26)$$

Производя замену переменных  $l = t_k + T_d - s$  в определённом интеграле (3.26) и используя правило замены переменной, получим

$$\int_{t_k}^{t_k + T_d} \Phi(t_k + T_d - s)Bu(s)ds = \int_0^{T_d} \Phi(l)Bu(t_k + T_d - l)dl. \quad (3.27)$$

И окончательно

$$x(t_k + T_d) = \Phi(T_d)x(t_k) + \int_0^{T_d} \Phi(l)Bu(t_k + T_d - l)dl. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) представляет собой разностное уравнение первого порядка, связывающее предыдущее состояние системы с будущим через время, равное периоду дискретизации  $T_d$ . Интегральная компонента будет зависеть от вида дискретного сигнала, подаваемого на вход объекта, описываемого дифференциальными уравнениями.

Посмотрим, как будет выглядеть уравнение (3.28) при подаче на вход системы дискретной дельта-функции (рис. 3.4). Воздействие преобразуется с помощью дискретизатора в последовательность взвешенных дискретных дельта-функций, которые поступают на объект. Решение (3.28) будет иметь вид

$$\begin{aligned} x(t_k + T_d) &= \Phi(T_d)x(t_k) + \int_0^{T_d} \Phi(l)Bu(t_k + T_d - l)dl = \\ &= \Phi(T_d)x(t_k) + \Phi(T_d)Bu(t_k). \end{aligned} \quad (3.29)$$

При выводе (3.29) входное воздействие рассматривается в интервале от  $t_k$  до  $t_k + T_d$  и учитывается, что оно может содержать разрывы первого

рода, которые приводят к необходимости рассматривать воздействие  $u(t_k + T_d)$  слева, т.е.  $u(t_k + T_d - 0) = 0$ . Из рисунка 3.4 видно, что реакция объекта представляет собой непрерывную функцию, которая с помощью дискретизатора преобразуется в рещётчатую. После дискретизатора информация о выходном сигнале объекта между моментами дискретизации теряется. Для описания объекта в пространстве состояний с дискретизатором на входе используется выражение

$$\begin{aligned} x(t_k + T_d) &= \Phi x(t_k) + \Gamma u(t_k), \\ y(t_k) &= Cx(t_k) + Du(t_k), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где  $\Phi = e^{AT_d}$ ;  $\Gamma = e^{AT_d} B$ .

На практике широкое распространение для управления объектом получило цифро-аналоговое преобразование (ЦАП), при котором сохраняется уровень аналогового сигнала в течение всего периода дискретизации (рис. 3.5)  $u(t) = u(t_k)$ ,  $t_k \leq t < t_k + T_d$ . Значение сигнала запоминается в начале периода дискретизации, а устройство, преобразующее непрерывный сигнал в квантованный, называется экстраполятором нулевого порядка (Э0). Решение (3.28) для квантованного сигнала имеет вид

$$x(t_k + T_d) = \Phi(T_d)x(t_k) + \int_0^{T_d} \Phi(l)Bdl u(t_k). \quad (3.31)$$

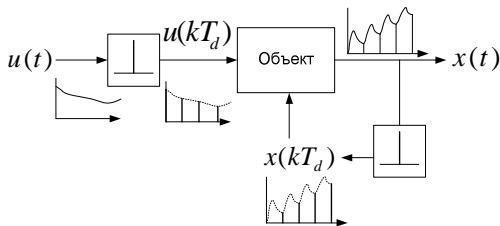


Рис. 3.4. Объект с дискретной дельта-функцией на входе

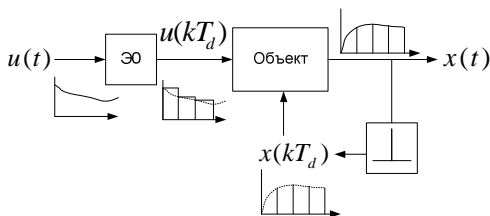


Рис. 3.5. Объект со ступенчатым воздействием на входе



Если для матрицы  $A$  существует матрица  $A^{-1}$ , то для выражения (3.30)

$$\Gamma = \int_0^{T_d} \Phi(l) B dl = \int_0^{T_d} e^{Al} B dl = A^{-1} [e^{AT_d} - I] B, \quad (3.32)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Помимо рассмотренных воздействий, на объект могут поступать сигналы с различными типами модуляции (наиболее распространённая – широко-импульсная модуляция (ШИМ)), для которых при переходе к пространству состояний в дискретном времени требуется найти матрицу  $\Gamma$  путём решения интеграла (3.29) при заданном типе входного воздействия и известном периоде дискретизации.

### 3.1. МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА

Основной сложностью при получении модели непрерывной системы в пространстве состояний дискретного времени является вычисление матричной экспоненты и её интегрирование. Существует множество способов её нахождения, из которых далее рассматриваются наиболее распространённые на практике.

Наиболее простейший метод заключается в разложении матричной экспоненты в ряд

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT_d)^i}{i!}, \\ \Gamma &= A^{-1} \left[ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT_d)^i}{i!} - I \right] B. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Вычисленное значение будет тем точнее, чем больше  $i$ , а при  $i = 1$

$$\Phi = I + AT_d, \quad (3.34)$$

что по сути представляет собой простейший метод решения дифференциальных уравнений по Эйлеру.

Более точно матричная экспонента может быть вычислена с использованием преобразования Лапласа, теоремы Гамильтона-Кэли и др. Вычисление матричной экспоненты с помощью преобразования Лапласа заключается в нахождении её образа

$$L[e^{AT_d}] = (sI - A)^{-1}. \quad (3.35)$$

Вычисляя затем обратное преобразование элементов полученной матрицы, находят искомую матричную экспоненту.

Теорема Гамильтона-Кэли наиболее часто используются для практических случаев, которая заключается в том, что любую функцию квадратной матрицы

$$f(A) = d_0 I + d_1 A + \dots + d_{n-1} A^{n-1} \quad (3.36)$$

можно вычислить через характеристический полином

$$f(\lambda_i) = d_0 + d_1 \lambda_i + \dots + d_{n-1} \lambda_i^{n-1}, \quad (3.37)$$

где  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$  – корни характеристического уравнения матрицы  $A$

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

*Пример.* Вычислить матричную экспоненту для

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{bmatrix}.$$

1. Используем разложение в степенной ряд для  $i = 2$ .

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T_d & 0 \\ 0 & 0 & T_d \\ 0 & 0 & -0,1T_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5T_d^2 \\ 0 & 0 & -0,05T_d^2 \\ 0 & 0 & 0,005T_d^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & T_d & 0,5T_d^2 \\ 0 & 1 & T_d - 0,05T_d^2 \\ 0 & 0 & 1 - 0,1T_d + 0,005T_d^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. С использованием преобразования Лапласа находится образ матричной экспоненты:

$$\begin{aligned} L[e^{AT_d}] &= (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & s+0,1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{s^2(s+0,1)} \begin{bmatrix} s(s+0,1) & (s+0,1) & 1 \\ 0 & s(s+0,1) & s \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 & \frac{1}{s^2(s+0,1)} \\ 0 & 1/s & \frac{1}{s(s+0,1)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+0,1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисляя обратное преобразование элементов полученной матрицы, находим:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_d & -10 \cdot (10 - T_d - 10e^{-0,1T_d}) \\ 0 & 1 & 10(1 - e^{-0,1T_d}) \\ 0 & 0 & e^{-0,1T_d} \end{bmatrix}.$$

3. С использованием теоремы Гамильтона-Кэли находятся корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda + 0,1 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda + 0,1) = 0.$$

Откуда  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ;  $\lambda_3 = -0,1$ .

Для матрицы третьего порядка

$$e^{AT_d} = d_0 I + d_1 A + d_2 A^2.$$

Коэффициенты  $d_0, d_1, d_2$  определяются из уравнения

$$\begin{bmatrix} e^{0T_d} \\ e^{0T_d} \\ e^{-0,1T_d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -0,1 & 0,01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

откуда сразу находится  $d_0 = 1$ . Так как коэффициент  $d_1$  этого уравнения может быть произвольным, то принимается  $d_1 = T_d$ . Тогда  $d_2 = 100(e^{-0,1T_d} + 0,1T_d - 1)$ . Окончательно получим

$$\begin{aligned} e^{AT_d} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{bmatrix} T_d + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0,01 \end{bmatrix} 100 \cdot (e^{-0,1T_d} + 0,1T_d - 1) = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & T_d & 100 \cdot (e^{-0,1T_d} + 0,1T_d - 1) \\ 0 & 1 & 10(1 - e^{-0,1T_d}) \\ 0 & 0 & e^{-0,1T_d} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ

Применяя линейные преобразования вида

$$x_t = Tx, \quad (3.38)$$

можно получать различные формы представления моделей линейных объектов управления в пространстве состояний. Такие формы стандартизируют представление объекта в пространстве состояний, что позволяет описать их меньшим числом параметров, а также облегчает обнаружение некоторых свойств объекта или системы. При некотором преобразовании может оказаться, что часть управляющих величин не входит в некоторые разностные уравнения (3.38) или часть фазовых координат не участвует в формировании вектора выходного сигнала  $y[k]$ . В первом случае система не будет полностью управляемой, а во втором – полностью наблюдаемой.

Подставляя выражение  $x = T^{-1}x_t$  в (3.18), получим

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{x}_t &= AT^{-1}x_t + Bu; \\ y &= CT^{-1}x_t + Du. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Умножая первое уравнение (3.39) слева на  $T$ :

$$\dot{x}_t = TAT^{-1}x_t + TBu,$$

приходим к стандартной записи в форме (3.18)

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= A_t x_t + B_t u; \\ y &= C_t x_t + D_t u, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где  $A_t = TAT^{-1}$ ,  $B_t = TB$ ,  $C_t = CT^{-1}$ . Аналогичные результаты можно получить и для ДС в виде (3.30), для которой  $\Phi_t = T\Phi T^{-1}$  и  $\Gamma_t = T\Gamma$ . Таким образом, можно заключить, что вид матриц  $A, B, C, \Gamma, \Phi$  зависит от используемого координатного базиса и соответствующим выбором  $T$  можно приводить матрицы пространства состояний к единому виду. К тому же канонической форме матрицы в пространстве состояний можно сопоставить определённую структуру системы в соотношении вход-выход. Наиболее часто применяемые канонические формы представлены в табл. 3.1, а соответствующие им структурные схемы изображены на рис. 3.6.

### 3.1. Канонические формы описания в пространстве состояний

Название	$A_t$	$B_t$	$C_t$	Примечание
Диагональная каноническая форма	$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_{1,d} \\ b_{2,d} \\ \vdots \\ b_{n,d} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} c_{1,d} \\ c_{2,d} \\ \vdots \\ c_{n,d} \end{bmatrix}$	Все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ простые и различные
Вертикальная сопровождающая (каноническая форма)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C^T B \\ C^T A B \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} B \end{bmatrix}$	$C_t^T = [c_{1,s} c_{2,s} \dots c_{n,s}]$ $C_t^T = [g(1) g(2) \dots g(n)]$
Каноническая форма управляемости (нормальная форма)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$	
Горизонтальная сопровождающая (каноническая форма)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C^T B \\ C^T A B \\ \vdots \\ C^T A^{n-1} B \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	$B_t^T = [b_{1,B} b_{2,B} \dots b_{n,B}]$ $B_t^T = [g(1) g(2) \dots g(n)]$
Каноническая форма наблюдаемости	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$	

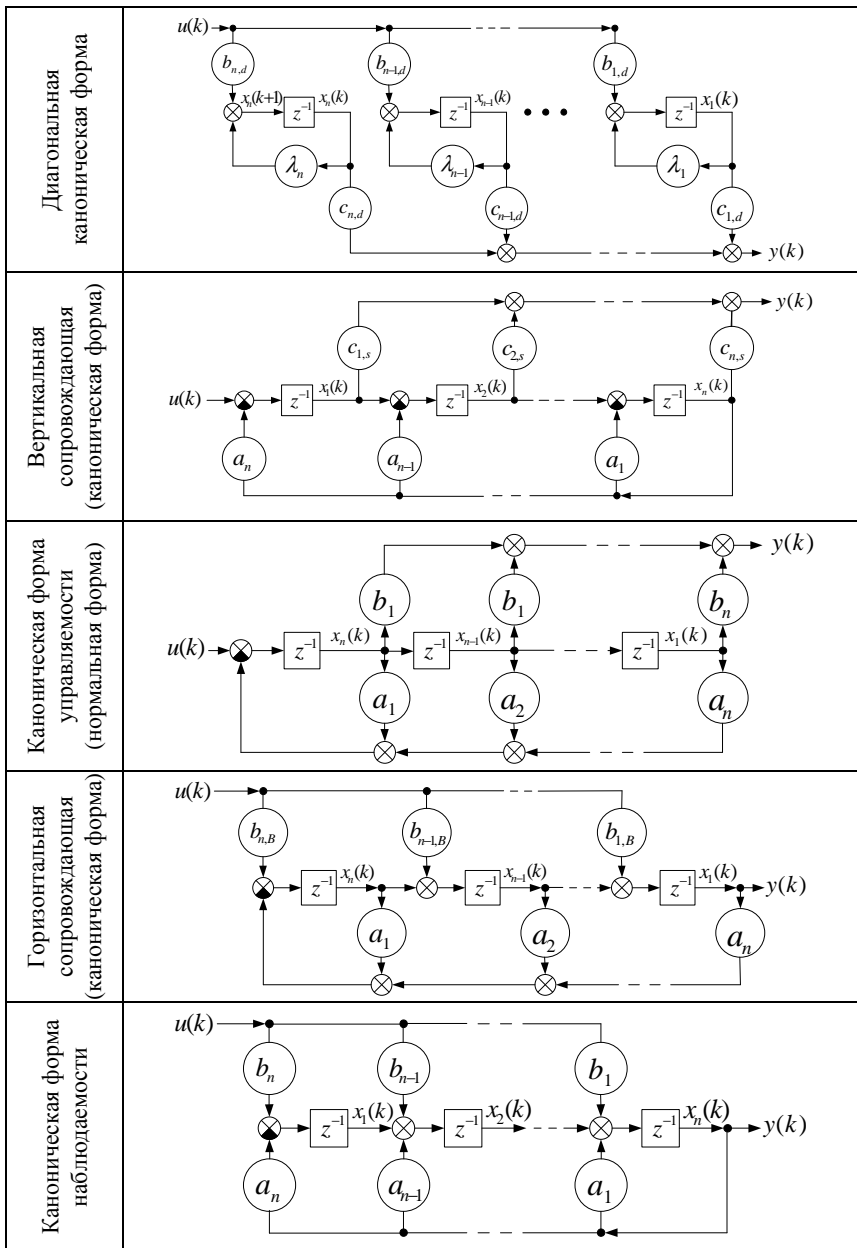


Рис. 3.6. Структурные схемы, соответствующие каноническим формам описания в пространстве состояний

### 3.3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ МОДЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим поведение модели ДС в пространстве состояний при отсутствии входного воздействия (автономная система)  $x[k] = 0, k \geq 0$ , тогда в соответствии с (3.14) и (3.15)

$$z[k+1] = A^k z[0] = Az[k],$$

$$y[k] = CA^k z[0] = Cz[k].$$

Если для  $z[0] = z^*$  при любых  $k \geq 0$  имеет место тождество  $z[k] = z^*$ , то значение  $z = z^*$  называют равновесным состоянием автономной ДС и будет выполняться  $z[k+1] = z[k] = z^*$ . Тогда

$$\begin{aligned} z^* &= Az^*, \\ (I - A)z^* &= 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

При условии, что  $\det(I - A) \neq 0$ , следует, что единственным решением (3.41) будет начало координат  $n$ -мерного пространства состояний, т.е.  $z^* = 0$ . А при  $\det(I - A) = 0$  существуют нетривиальные множества равновесных состояний, удовлетворяющие условию (3.41). В [10] показано, что ДС с равновесным состоянием асимптотически устойчива, и, следовательно,  $z[k] \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , если выполняется условие

$$|\lambda_i| < 1, i = \overline{1, n},$$

где  $\lambda_i$  – корни (полюсы) характеристического уравнения  $\det(i\lambda - A) = 0$ .

Для случая, когда  $|\lambda_i| = 0, i = \overline{1, n}$ , матрица  $A$  является нильпотентной, и, следовательно, найдется такое число  $m \in [0, n]$ , что  $A^m = 0$ . Для такой системы всегда выполняются

$$z[n] = A^n z[0] = 0,$$

т.е. имеет место следующее положение.

Переходной процесс ДС  $n$ -го порядка с нулевыми значениями всех полюсов  $p_i$  сходится из произвольного начального состояния  $z[0]$  к положению равновесия  $z^* = 0$  не более чем за  $n$  шагов.

Эти свойства автономных моделей ДС справедливы также для выходной переменной  $y[k] = Cz[k]$  и для свободных составляющих переходных процессов  $z_{св}[k]$  и  $y_{св}[k]$  возмущённых ДС.

Теперь рассмотрим поведение ДС при постоянном входном воздействии  $x[k] = u = \text{const}$ ,  $k \geq 0$ . Для асимптотически устойчивой системы справедливо постоянное значение установившихся составляющих переходного процесса  $z_{уст}[k] = z_{уст} = \text{const}$ ,  $y_{уст}[k] = y_{уст} = \text{const}$ , но тогда  $z_{уст}[k+1] = z_{уст}[k]$  и уравнение (3.14) примет вид

$$z_{уст} = Az_{уст} + Bu. \quad (3.42)$$

Откуда

$$z_{уст} = (I - A)^{-1} Bu.$$

Подставляя найденное решение в уравнение выхода (3.15), получим статическую характеристику рассматриваемой ДС

$$y_{уст} = C(I - A)^{-1} Bu. \quad (3.43)$$

Учитывая выражение для передаточной характеристики ДС (3.17) формула (3.43) примет вид

$$y_{уст} = W(1)u.$$

При условии, что  $\det(I - A) \neq 0$ , алгебраическое уравнение (3.43) имеет единственное решение, а переходные процессы с течением времени  $k \rightarrow \infty$  всегда сходятся к установившимся значениям  $z_{уст}$  и  $y_{уст}$ .

### 3.4. АНАЛИЗ СВОЙСТВ ДС В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

При решении задач управления методами пространства состояний предварительно рассматриваются некоторые свойства динамических систем, которые однозначно характеризуют возможности использования известной модели ДС для управления объектом. Такими свойствами являются *достижимость, управляемость и наблюдаемость*. Наличие этих свойств у объектов управления позволяет синтезировать управление с помощью простых математических операций.

#### 3.4.1. Достижимость и управляемость

Пусть ДС представлена моделью в пространстве состояний

$$z[k+1] = Az[k] + Bx[k], \quad (3.44)$$

$$y[k] = Cz[k], \quad (3.45)$$



где  $x[k]$  – скалярное управляющее воздействие;  $y[k]$  – скалярная выходная переменная, а также известны начальные условия  $z[0] = z_0$ . Проблема исследования, таким образом, будет состоять в анализе параметров ДС, заданных в матрицах  $A, B, C$ .

Свойство достижимости определяется как существование такого конечного момента времени  $k_f$  и такого ограниченного входного воздействия  $x[k] \in [x_{\min}, x_{\max}]$ ,  $k \in [0, k_f]$ , которое переводит начальное состояние системы  $z[0] = z_0$  в желаемое состояние  $z_f$ .

Состояние  $z[k]$  линейной системы управляемо, если существует момент времени  $k_f$  и такой ограниченный входной сигнал  $x[k] \in [x_{\min}, x_{\max}]$ ,  $k \in [0, k_f]$ , который переводит состояние системы  $z[0] \neq 0$  в состояние  $z[k_f] = 0$  (начало координат), при условии, что время  $k_f$  конечно.

Так как для непрерывных систем вида (3.44) каждое *достижимое* состояние *управляемо*, то при анализе непрерывных систем говорят только об управляемости, в то время как для ДС используют оба понятия. Сформируем необходимые критерии достижимости и управляемости ДС путём непосредственного нахождения дискретной входной последовательности  $x[k]$ , необходимой для перевода системы из начального состояния в конечное. Для этого воспользуемся аналитическим решением уравнения (3.44) с помощью выражения (3.14)

$$z[k] = A^k z[0] + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B x[i]$$

Для исследования достижимости задаются начальные условия  $z[0] = z_0$ , тогда состояние ДС через количество шагов  $k$ , равного порядку модели ДС  $k = n$ , будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} z[n] &= A^n z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} B x[i] = \\ &= A^n z_0 + A^{n-1} B x[0] + A^{n-2} B x[1] + \dots + B x[n-1] = \\ &= A^n z_0 + \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[n-1] \\ \vdots \\ x[0] \end{bmatrix} = A^n z_0 + U_D x, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где  $U_D = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$  – матрица достижимости.

Выберем  $k_f = n$ ,  $z[n] = z_f$ , тогда управляющая последовательность, согласно (3.46) будет равна

$$\begin{bmatrix} x[n-1] \\ \vdots \\ x[0] \end{bmatrix} = U_D^{-1}(z_f - A^n z_0). \quad (3.47)$$

Это алгебраическое уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда матрица достижимости  $U_D$  обратима (невырождена), тогда можно найти  $n$  уравнений, решением которых является такой управляющий сигнал, что из начального состояния  $z_0$  система перейдет в желаемое конечное состояние  $z_f$ , т.е. ранг матрицы достижимости равен  $n$  (рангом матрицы называется наибольший порядок её определителя, отличный от нуля):

$$\text{rank} U_D = n. \quad (3.48)$$

Условия управляемости могут быть получены также из выражения (3.14) для начального условия  $z[0] = z_0 \neq 0$  и конечного условия  $z_f = 0$ , если положить  $k_f = n$ :

$$0 = A^n z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1} Bx[i] = A^n z_0 + U_D x,$$

$$z_0 = -A^{-n} U_D x = -U_U x,$$

где матрица управляемости  $U_U$  равна

$$U_U = A^{-n} U_D = \begin{bmatrix} A^{-n} B & A^{-n+1} B & \dots & A^{-1} B \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} x[n-1] \\ \vdots \\ x[0] \end{bmatrix} = -U_U^{-1} z_0. \quad (3.50)$$

Сравнивая с выражением (3.47), можно заключить, что ДС будет управляемой только тогда, когда ранг матрицы управляемости равен порядку модели ДС, т.е.

$$\text{rank} U_U = n. \quad (3.51)$$

Если матрица  $A$  не вырождена, условия достижимости и управляемости эквивалентны.

Рассмотрим два характерных случая:

а)  $B$  – матрица-столбец размером  $n \times 1$ . Матрицы  $U_U$  и  $U_D$  в этом случае – квадратные. Если определитель квадратной матрицы  $n \times n$  не равен нулю, то эта матрица имеет ранг, равный  $n$ ;

б)  $B$  – матрица размером  $n \times m$ , что соответствует наличию  $m$  каналов управления. Матрицы управляемости и достижимости имеют  $n$  строк и  $n \cdot m$  столбцов, из которых можно составить  $n(m-1)+1$  квадратных матриц размерностью  $n \times n$ . Если хотя бы один из определителей этих матриц отличен от нуля, система будет полностью управляемой и ранг матрицы управляемости равен порядку системы  $n$ .

В случае, если ранг матриц достижимости или управляемости равен  $v < n$ , то ДС будет не полностью управляема, что соответствует наличию  $v$  фазовых координат  $z^1[k]$ , которые поддаются управлению, и  $n-v$  фазовых координат  $z^2[k]$ , которые не поддаются явному управлению. С учётом этого исходную модель (3.44), (3.45) не полностью управляемой ДС можно представить в виде

$$\begin{aligned} z^1[k+1] &= A_{11}z^1[k] + A_{12}z^2[k] + Bx[k], \\ z^2[k+1] &= A_{22}z^2[k], \\ y[k] &= Cz[k]. \end{aligned} \tag{3.52}$$

На рисунке 3.7 показан пример не полностью управляемой системы, описываемой выражением (3.52).

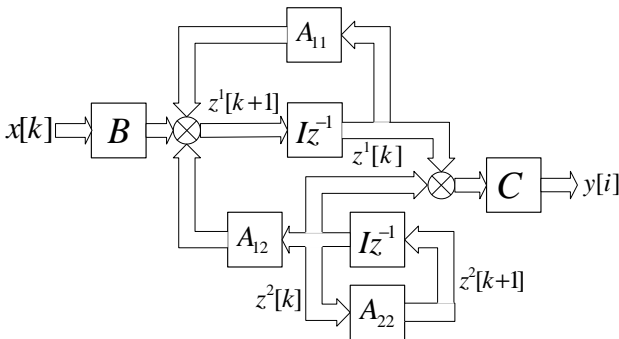


Рис. 3.7. Пример не полностью управляемой системы

### 3.4.2. Наблюдаемость

Для осуществления управления необходимо иметь информацию о текущем состоянии системы, т.е. о значениях вектора состояния  $z[k]$  в каждый момент времени. Однако судить о состоянии системы можно только с помощью физических величин  $y[k]$ , которые непосредственно поддаются измерению, тогда как некоторые из переменных состояния являются абстрактными и не имеют физических аналогов в реальной системе. Таким образом, необходимо решить задачу определения вектора состояния по известному вектору входа и измеряемому вектору выхода.

Состояние  $z[k]$  называется наблюдаемым, если в момент времени наблюдения  $k=0$  можно однозначно определить  $z[0]$  по данным измерения входных  $x[k]$  и выходных  $y[k]$  переменных на конечном интервале времени.

Для выявления формальных условий наблюдаемости воспользуемся выражением (3.15), связывающим выходную переменную с начальным состоянием системы. Действие входного сигнала считается известным, поэтому общность решения не пострадает, если предположить, что система автономна  $x[k]=0$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ . Если известны значения выходной переменной  $y[k]$  на рассматриваемом интервале  $k = \overline{0, n-1}$ , то можно записать систему уравнений

$$y[k] = CA^k z[0], k = \overline{0, n-1}. \quad (3.53)$$

Или в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} y[0] &= Cz[0], \\ y[1] &= CAz[0], \\ &\vdots \\ y[n-1] &= CA^{n-1}z[0] \end{aligned}$$

Это уравнение можно записать в матричном виде

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[n-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} z[0] \quad (3.54)$$

Состояние  $z[0]$  можно получить из (3.54) только в том случае, если матрица наблюдаемости

$$U_N = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

имеет ранг  $n$ . В том случае, если матрица наблюдаемости имеет ранг  $v < n$ , то она будет являться не полностью наблюдаемой и, следовательно, будет иметь  $v$  наблюдаемых переменных состояния  $z^1[k]$  и  $n-v$  не наблюдаемых переменных  $z^2[k]$ . Соответственно модель (3.44), (3.45) не полностью наблюдаемой ДС можно представить в виде

$$\begin{aligned} z^1[k+1] &= A_{11}z^1[k] + B_1x[k], \\ z^2[k+1] &= A_{21}z^1[k] + A_{22}z^2[k] + B_2x[k], \\ y[k] &= C_1z^1[k] \end{aligned} \quad (3.56)$$

В общем случае система может содержать четыре группы фазовых координат:

- управляемую, но ненаблюдаемую часть  $z^1[k]$ ;
- управляемую и наблюдаемую часть  $z^2[k]$ ;
- неуправляемую и ненаблюдаемую часть  $z^3[k]$ ;
- неуправляемую, но наблюдаемую часть  $z^4[k]$ .

Тогда модель для общего случая запишется в виде

$$\begin{aligned} z^1[k+1] &= A_{11}z^1[k] + A_{12}z^2[k] + A_{13}z^3[k] + A_{14}z^4[k] + B_1x[k], \\ z^2[k+1] &= A_{21}z^1[k] + A_{22}z^2[k] + B_2x[k], \\ z^3[k+1] &= A_{33}z^3[k] + A_{34}z^4[k], \\ z^4[k+1] &= A_{44}z^4[k], \\ y[k] &= C_1z^1[k]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

На практике наблюдаемыми координатами обычно считаются те из них, которые могут быть непосредственно измерены датчиками различных типов. Даже если какая-либо фазовая координата и может быть вычислена по доступным для измерения выходным величинам, обработка измеренных величин будет, во-первых, сложной и, во-вторых, затруднена наличием помех.

## 4. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

### 4.1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

При анализе динамических систем управления первостепенной задачей является решение вопроса об их устойчивости. Именно это свойство характеризует свойство системы стабильно работать в нормальных режимах и при воздействии дестабилизирующих факторов. По сути, устойчивость отражает способность системы возвращаться в равновесное состояние, из которого она выводится внешними воздействиями. Устойчивость системы является обязательным техническим требованием, от которого напрямую зависят показатели качества и точности системы автоматического управления. Выражаясь иначе, можно заключить, что только устойчивая система является управляемой.

Устойчивость линейной системы определяется не характером возмущения, а структурой самой системы. Говорят, что система устойчива «в малом», если определён факт наличия устойчивости, но не определены её границы. Система устойчива «в большом», когда определены границы устойчивости и то, что реальные отклонения не выходят за эти границы. Соответственно, и задача исследования систем на устойчивость может быть поставлена двояко:

- 1) устойчива ли система при заданном значении её параметров;
- 2) в каких диапазонах можно изменять параметры системы, не нарушая её устойчивости.

Вторая задача исследования имеет место при наладке и эксплуатации систем автоматического управления.

Система является устойчивой тогда и только тогда, когда реакция на ограниченное воздействие ограничена. Исходя из этого определения можно утверждать, что при воздействии на ДС дискретной дельта-функции  $\delta(t)$  реакция системы должна быть ограничена и стремиться к исходному состоянию с течением времени. Так как реакция ДС при воздействии на неё дискретной дельта-функции есть импульсная характеристика системы  $h(kT_d)$ , то

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(kT_d)| < \infty. \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) является необходимым и достаточным условием устойчивости по Ляпунову и сводится к требованию ограниченности суммы модуля импульсной характеристики ДС.

Если известна модель ДС в виде разностного уравнения, то импульсную характеристику можно найти непосредственной подстановкой дискретной дельта-функции в уравнение при условии, что ДС находилась в состоянии покоя. На практике обычно модель ДС представлена в виде передаточной функции или в пространстве состояний. Одним из способов определения устойчивости в таком случае является нахождение импульсной характеристики с использованием доступной модели ДС. Другие способы состоят в анализе устойчивости непосредственно по имеющейся модели ДС.

Если ДС определяется с помощью передаточной функции  $H(z)$ , то её импульсная характеристика  $h(kT_d)$  будет равна обратному  $z$ -преобразованию от  $H(z)$ . Используя для обратного  $z$ -преобразования метод вычетов, можно записать

$$\begin{aligned} h(kT_d) &= Z^{-1}[H(z)] = \sum_{i=1}^I \text{Res} [z^{k-1} H(z), p_i] = \\ &= \sum_{i=1}^I \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p_i)z^{k-1} H(z)]_{z=p_i}, \end{aligned}$$

где  $I$  – количество полюсов  $p_i$  передаточной функции  $H(z)$ ;  $m$  – кратность полюса. Общее решение этого уравнения можно представить в следующем виде

$$h(kT_d) = \sum_{i=1}^I C_i p_i^k. \quad (4.2)$$

К аналогичному выражению можно прийти при аналитическом решении разностного уравнения ДС для случая, когда входное воздействие равно нулю  $x(kT_d) = 0, k \geq 0$ , а начальные условия отличны от нуля  $y(0) \neq 0$ . При этом выход устойчивой системы, будучи выведенной из равновесия, стремится к нулю с течением времени  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(kT_d) = 0$ .

Анализируя (4.2), можно сделать вывод, что  $h(kT_d)$  будет ограниченной только в том случае, когда

$$|p_i| < 1, i = \overline{1, I}, \quad (4.3)$$

т.е. модули всех полюсов будут меньше единицы. Это значит, что для устойчивой ДС все её полюсы на  $z$ -плоскости должны лежать в области, ограниченной единичной окружностью. Если полюс находится на границе единичной окружности  $|p_i| = 1$ , то система находится на границе устойчивости.

## 4.2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Выше было сформулировано основное условие устойчивости ДС (4.3), представленное с помощью передаточной функции  $H(z)$ . Основным неудобством применения данного условия является необходимость вычисления полюсов  $H(z)$ , что превращается в трудоёмкую задачу с увеличением порядка полинома в знаменателе  $H(z)$  (характеристическое уравнение). Поэтому на практике обычно не вычисляются корни характеристического уравнения, а применяют косвенные методы исследования устойчивости. По методам вычисления и анализа они делятся на две группы: алгебраические и частотные.

Для анализа устойчивости дискретных систем можно использовать критерии устойчивости непрерывных систем, только необходимо совершить предварительное преобразование характеристического уравнения ДС таким образом, чтобы отобразить круг единичного радиуса из  $z$ -плоскости в левую половину комплексной плоскости. Такое преобразование совершается с помощью билинейного преобразования

$$z = \frac{1+w}{1-w}, \quad (4.4)$$

путём замены переменной  $z$  в характеристическом уравнении

$$F\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \bar{a}_0 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^n + \bar{a}_1 \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{n-1} + \dots + \bar{a}_n = 0.$$

После приведения к общему знаменателю и его сокращения получается новое характеристическое уравнение того же порядка

$$c_n w^n + c_{n-1} w^{n-1} + \dots + c_0 = 0, \quad (4.5)$$

где  $c_i$  – коэффициенты, являющиеся комбинациями сумм и произведений коэффициентов  $\bar{a}_i$ . Корням характеристического уравнения внутри единичного круга на  $z$ -плоскости будут соответствовать корни характеристического уравнения (4.5), лежащие (подобно непрерывным системам) в левой части плоскости  $w$ . Отсюда условием устойчивости ДС является расположение всех корней преобразованного характеристического уравнения (4.5) ДС в левой части плоскости  $w$ . Таким образом, благодаря  $z$ -преобразованию все критерии устойчивости, разработанные для исследования устойчивости непрерывных систем, могут быть использованы и для анализа ДС.



*Алгебраический критерий Рауса.* Алгоритм основан на заполнении специальной таблицы, построенной на основании коэффициентов характеристического уравнения по следующему алгоритму:

- 1) в первой строке записываются коэффициенты уравнения с чётными индексами в порядке их возрастания;
- 2) во второй строке – аналогично коэффициенты с нечётными индексами;
- 3) остальные элементы таблицы определяются по формуле:

$$c_{i,j} = c_{i-2,j+1} - r_i c_{i-1,j+1}, \quad r_i = c_{i-2,1}/c_{i-1,1}, \quad (4.6)$$

где  $i \geq 3$  – номер строки;  $j$  – номер столбца;

- 4) число строк таблицы на единицу больше порядка характеристического уравнения.

Для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса  $c_{11}, c_{21}, c_{31}, \dots$  были положительными. Если это не выполняется, то система неустойчива, а количество полюсов, расположенных за границей области устойчивости равно числу перемен знака в первом столбце.

Главное достоинство критерия Рауса – простота использования независимо от порядка характеристического уравнения. Он удобен для проведения анализа на ЭВМ. Его недостаток – малая наглядность, трудно судить о степени устойчивости системы, насколько далеко отстоит она от границы устойчивости.

*Алгебраический критерий Гурвица.* Из коэффициентов характеристического уравнения строится определитель Гурвица  $\Delta$  по алгоритму:

- 1) по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от  $c_1$  до  $c_n$ ;

#### 4.1. Таблица Рауса

$r_i$		1	2	3	
–	1	$c_{11} = c_0$	$c_{12} = c_2$	$c_{13} = c_4$	...
–	2	$c_{21} = c_1$	$c_{22} = c_3$	$c_{23} = c_5$	...
$r_3 = c_{11}/c_{21}$	3	$c_{31} = c_{12} - r_3 c_{22}$	$c_{32} = c_{13} - r_3 c_{23}$	$c_{33} = c_{14} - r_3 c_{24}$	...
$r_4 = c_{21}/c_{31}$	4	$c_{41} = c_{22} - r_4 c_{32}$	$c_{42} = c_{23} - r_4 c_{33}$	$c_{43} = c_{24} - r_4 c_{34}$	...
...	...	...	...	...	...

2) от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы определителя так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

3) на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше  $n$  ставятся нули:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \cdots & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & \cdots & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и все  $n$  главных диагональных миноров матрицы Гурвица были положительны:

$$\Delta_1 = c_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \dots$$

Число определителей Гурвица равно порядку характеристического уравнения  $n$ . Если хотя бы один из определителей меньше или равен нулю, то ДС неустойчива, а условие  $\Delta_n = 0$  определяет границу устойчивости.

Критерий Гурвица сложно применять при  $n > 5$ , так как при больших порядках возрастает число определителей, и процесс становится трудоёмким. Недостаток критерия Гурвица – малая наглядность. Достоинство – удобен для реализации на ЭВМ и позволяет определить границы устойчивости.

Алгебраические критерии устойчивости для своего применения требуют билинейного преобразования, что не совсем удобно при высоких порядках характеристического уравнения ДС. Частотные критерии не требуют дополнительных преобразований и основаны на графическом представлении поведения ДС на комплексной оси, что даёт хорошую наглядность устойчивости.

Рассмотрим характеристическое уравнение ДС

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n. \quad (4.8)$$

Это уравнение имеет  $n$  корней  $p_i, i = \overline{1, n}$ , которые могут быть действительными, комплексными и кратными. Тогда (4.8) можно представить в следующем виде

$$D(z) = a_0(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_i) \dots (z - p_n). \quad (4.9)$$

Если изобразить найденные корни характеристического уравнения (4.9) на комплексной  $z$ -плоскости (рис. 4.1), то можно увидеть, что каждый  $p_i$  корень определяет вектор, проведённый из начала координат. По условиям устойчивости все корни должны лежать в круге единичного радиуса. Если пустить по этой окружности радиус-вектор  $z = e^{j\omega T_d}$ , то каждая компонента (4.9) представляет собой разность радиуса-вектора и неподвижного вектора  $p_i$ :

$$d_i = z - p_i = |d_i| e^{j \arg(d_i)}, \quad i = 1, n, \quad (4.10)$$

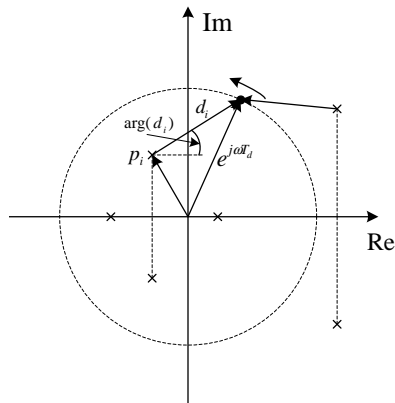
а (4.9) будет иметь следующий вид

$$D(z) = a_0 |d_1| |d_2| \dots |d_i| \dots |d_n| e^{j(\arg(d_1) + \arg(d_2) + \dots + \arg(d_i) + \dots + \arg(d_n))}. \quad (4.11)$$

Если изменять  $\omega$  от 0 до  $\frac{2\pi}{T_d}$ , то радиус-вектор совершит один оборот.

При этом векторы, лежащие внутри единичной окружности, также совершат один оборот, что означает изменение угла  $\arg(d_i)$  от 0 до  $2\pi$ , а те векторы, которые находятся вне единичной окружности, будут совершать колебательные движения и за полный оборот радиуса-вектора приращение их угла будет равно нулю. Теперь несложно определить поведение устойчивой ДС по движению вектора  $D(z)$  при  $z = e^{j\omega T_d}$ . Если изменять  $\omega$

от 0 до  $\frac{2\pi}{T_d}$ , то конец вектора  $D(e^{j\omega T_d})$  должен повернуться на угол  $2\pi n$ ,



**Рис. 4.1. Расположение корней характеристического уравнения на  $z$ -плоскости (крестиками обозначены полюсы характеристического уравнения)**

что означает совершение им  $n$  полных оборотов. Это свойство годографа является прямой аналогией частотного критерия Михайлова для непрерывных систем.

Если все коэффициенты уравнения (4.8) – действительные числа (обычно так оно и есть), то корни характеристического уравнения  $p_i$  будут представлять собой действительные, кратные или комплексно-сопряжённые числа. В таком случае расположение корней будет симметрично относительно действительной оси (рис. 4.1), а, следовательно, и траектория движения конца вектора (годограф)  $D(e^{j\omega T_d})$  при изменении  $\omega T_d$  от  $\pi$  до  $2\pi$  будет зеркальным отражением годографа  $D(e^{j\omega T_d})$  при изменении  $\omega T_d$  от 0 до  $\pi$ . При этом начало годографа лежит на действительной оси, а каждый оборот сопровождается двумя пересечениями годографа с действительной осью. С учётом этого исследование на устойчивость по частотным критериям можно упростить и сформулировать следующим образом.

Подстановкой в характеристическое уравнение (4.8)  $z = e^{j\varphi}$  изображают годограф при изменении угла  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ . ДС будет устойчивой, если годограф  $D(e^{j\varphi})$ , двигаясь против часовой стрелки, последовательно пересекает действительную ось  $n$  раз.

*Пример.* Исследовать на устойчивость ДС, характеристическое уравнение которой

$$D(z) = 5z^4 + 4z^3 - 2z^2 + z + 20, \quad n = 4.$$

Подставляется  $z = e^{j\varphi}$ :

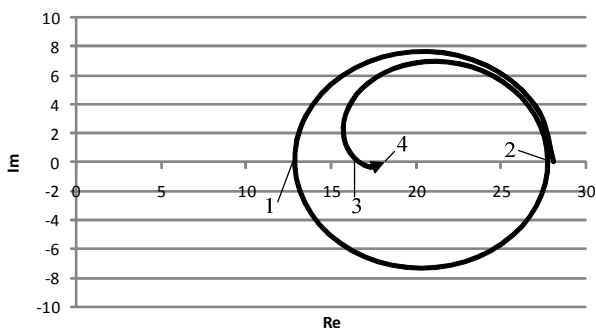
$$D(e^{j\varphi}) = 5e^{j4\varphi} + 4e^{j3\varphi} - 2e^{j2\varphi} + e^{j\varphi} + 20.$$

$$\operatorname{Re}(D(e^{j\varphi})) = 5 \cos 4\varphi + 4 \cos 3\varphi - 2 \cos 2\varphi + \cos \varphi + 20.$$

$$\operatorname{Im}(D(e^{j\varphi})) = 5 \sin 4\varphi + 4 \sin 3\varphi - 2 \sin 2\varphi + \sin \varphi.$$

Изменяя  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ , рисуется годограф данного характеристического уравнения, который приведён на рис. 4.2. Так как количество пересечений с действительной осью равно порядку системы  $n = 4$ , то данная ДС является устойчивой.

Аналог критерия устойчивости Найквиста для ДС основан на связи между формой дискретной передаточной функции разомкнутой системы  $W(z)$  и свойством устойчивости замкнутой системы. Аналог критерия Найквиста формулируется следующим образом [4]: замкнутая ДС,



**Рис. 4.2. Годограф устойчивой системы**

устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчивой, если годограф вектора  $\overline{W}(z)$ , соответствующий дискретной передаточной функции разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до  $2\pi/T_d$ , не охватывает точку на плоскости  $z$  с координатами  $(-1, j0)$ .

### **4.3. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ**

Проблема качества в ДС аналогична проблеме качества в непрерывных системах. Под качеством управления в ДС понимается форма переходного процесса, которая при качественном управлении должна отвечать заданным функциям или функционалам. Формирование критериев качества производится на подготовительной стадии проектирования путём сочетания формализованных методов и творческой деятельности проектировщика.

Критерии качества можно непосредственно задать в виде динамических характеристик выходных координат системы при типовых воздействиях или с помощью обобщённого функционала, определяемого всеми переменными системы управления. В первом случае показатели качества делятся на прямые и косвенные. Прямыми показателями качества называют числовые показатели, которые определяют по переходной характеристике. Косвенные показатели качества определяют свойства дискретной системы управления по отношению к характеристикам самой системы или формы переходного процесса, которые непосредственно не видны на графике, а получаются в результате вычислений.

### **4.4. ПРЯМЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА**

В качестве примера рассмотрим график переходного процесса (рис. 4.3) при подаче на объект единичного воздействия  $1[k]$ . Если имеются дискретные отсчёты переходной характеристики, то можно её построить,

соединяя плавной кривой значения отсчётов. Переходную характеристику можно рассчитать по модели дискретной системы. Так, например, если известна передаточная характеристика  $W(z)$  и учитывая, что входной сигнал

$$X(z) = Z[1[k]] = \frac{z}{z-1}, \text{ можно найти } z\text{-образ выходного процесса}$$

$$Y(z) = W(z) \frac{z}{z-1}. \quad (4.12)$$

Проводя обратное  $z$ -преобразование по одному из методов раздела 2 находится дискретный переходной процесс  $y[k]$ .

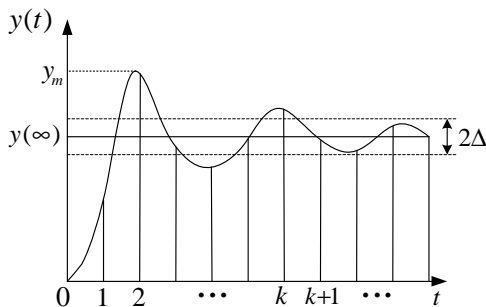
На основании графика на рис. 4.3 рассмотрим основные показатели качества управления.

Время регулирования  $t_p$  определяет минимальное время, по истечении которого отклонение переходной характеристики от установившегося значения  $y(\infty)$  не превышает заданной величины  $\Delta$ . Выбор значения  $\Delta$  определяется требованиями к точности системы управления и обычно принимают  $\Delta = (0,02 \dots 0,1)y(\infty)$ .

Перерегулирование  $\sigma$  характеризует максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения, выраженное в процентах к установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{y_m - y(\infty)}{y(\infty)} 100\%. \quad (4.13)$$

Время нарастания  $t_n$  показывает, как быстро выходная величина достигает значения, равного 90% установившейся величины  $y(\infty)$ .



**Рис. 4.3. Переходная характеристика**

#### 4.5. КОСВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

Для оценки качества ДС используются следующие косвенные показатели: корневые, частотные и суммарные (аналог интегральных для непрерывных систем).

Корневым показателем качества является степень устойчивости  $\eta^*$ , которая определяется следующим образом:

$$\eta^* = \min_i (-\ln|p_i|), \quad (4.14)$$

где  $p_i$  – корни характеристического уравнения. Степень устойчивости является косвенной мерой быстродействия системы.

Суммарная квадратичная ошибка определяется выражением

$$J^* = \sum_{i=0}^{\infty} (e[i] - e_{\infty})^2 = \sum_{i=0}^{\infty} e_n[i]^2, \quad (4.15)$$

где  $e_n[i]$  – переходная составляющая ошибки;  $e[i]$  – текущая ошибка на  $i$ -м шаге;  $e_{\infty}$  – установившаяся ошибка.

Частотные показатели определяют запас устойчивости по амплитуде и запас устойчивости по фазе.

#### 4.6. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

В установившемся режиме считается, что переходной процесс закончен, а выходной сигнал системы более не изменяется с течением времени при входном сигнале  $x(t) = B \cdot 1(t)$ ,  $z$ -образ которого  $X(z) = B \frac{z}{z-1}$ . При этом наиболее полной характеристикой качества является установившаяся ошибка  $e_{\infty}$ . Если дискретные значения функции в установившемся режиме существуют, то они могут быть найдены путём следующего предельного перехода

$$e(\infty) = e_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} W_e(z) B \frac{z}{z-1} = B W_e(1). \quad (4.16)$$

Если ошибка, определяемая (4.16), не равна нулю, то ДС называют статической, в противном случае система относится к классу астатических. Из выражения (4.16) следует, что передаточная функция ошибки  $W_e(z)$  равна нулю в точке  $z = 1$ .

## 4.7. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОШИБОК

Проанализируем, как влияет ошибка ДС при воздействии на неё некоторого произвольного входного сигнала, который относительно медленно изменяется с течением времени. В этом случае ошибка будет являться динамической величиной, которую характеризуют коэффициенты ошибок. Рассмотрим математическую запись ошибки в виде

$$E(z) = W_e(z)X(z),$$

или, переходя к оригиналам, по теореме о свёртке

$$e[k] = \sum_{i=-\infty}^k w_e[k-i]x[i] = \sum_{i=0}^{\infty} w_e[i]x[k-i]. \quad (4.17)$$

Входному дискретному процессу  $x[i]$  соответствует непрерывный процесс  $x(t)$ , который, в общем случае, имеет кусочно-непрерывные производные. Разложим функцию  $x(t - \tau)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t$ :

$$x(t - \tau) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{(l)}(t)}{l!} \tau^l, \quad x^{(l)}(t) = \frac{d^l x(t)}{dt^l}. \quad (4.18)$$

Произведём дискретизацию по времени, приняв  $t = kT_d$ ,  $\tau = iT_d$ ,  $T_d = 1$ , получим

$$x[k-i] = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{(l)}[k]}{l!} i^l. \quad (4.19)$$

Подставляем (4.19) в (4.17):

$$e[k] = \sum_{i=0}^{\infty} w_e[i] \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{(l)}[k]}{l!} i^l.$$

Поменяв порядок суммирования, получим

$$e[k] = \sum_{l=0}^{\infty} x^{(l)}[k] (-1)^l \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_e[i] i^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} x^{(l)}[k] C_l, \quad (4.20)$$

где

$$C_l = (-1)^l \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_e[i] i^l}{l!}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Коэффициенты  $C_l$  называют коэффициентами ошибки, они характеризуют качество системы в установившемся режиме. Так, коэффициент  $C_0$  называют коэффициентом позиционной ошибки,  $C_1$  – коэффициентом скоростной ошибки, а  $C_2$  – коэффициентом ошибки по ускорению.



Вычисление коэффициентов ошибок проще всего проводить не по импульсной характеристике ошибки  $w_e[i]$ , а по её передаточной функции  $W_e(z)$ , используя соотношения

$$C_l = \frac{1}{l!} W_{0l}(z) \Big|_{z=1}, l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

$W_{0l}(z)$  определяется по рекуррентной формуле

$$W_{00}(z) = W_e(z), W_{0l}(z) = T_d z \frac{dW_{0,l-1}(z)}{dz}, l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

Из формулы (4.22) следует, что коэффициент позиционной ошибки  $C_0 = W_e(1)$ . Остальные коэффициенты ошибок будут находиться дифференцированием передаточной функции ошибки  $W_e(z)$ .

Практическая значимость коэффициентов ошибки состоит в анализе статической ошибки системы при постоянных внешних воздействиях. Если статическая ошибка отлична от нуля, то система называется статической, в противном случае – астатической.

Система является астатической и обладает астатизмом  $r$ -го порядка, если первые  $r$  коэффициентов равны нулю, а  $(r+1)$ -й коэффициент ошибки отличен от нуля:

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{r-1} = 0, C_r \neq 0.$$

В соответствии с формулами (4.22), (4.23) следует, что первые  $r$  коэффициентов будут равны нулю, а  $(r+1)$ -й коэффициент ошибки не равен нулю при условии

$$\begin{aligned} W_{00}(1) &= W_e(1) = 0, \\ W_{01}(1) &= \frac{dW_{00}(1)}{dz} = 0, \dots, \\ W_{0r}(1) &= \frac{dW_{0(r-1)}(1)}{dz} = 0, \\ W_{0(r+1)}(1) &= \frac{dW_{0r}(1)}{dz} \neq 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Выразим рекуррентные производные (4.23) через передаточную функцию ошибки  $W_e(z)$ :

$$W_{01}(z) = T_d z \frac{dW_e(z)}{dz},$$

$$\begin{aligned}
W_{02}(z) &= Tz \frac{dW_{01}(z)}{dz} = Tz \left( T \frac{dW_e(z)}{dz} + Tz \frac{d^2W_e(z)}{dz^2} \right) = \\
&= T^2 \left( z \frac{dW_e(z)}{dz} + z^2 \frac{d^2W_e(z)}{dz^2} \right), \\
W_{03}(z) &= Tz \frac{dW_{02}(z)}{dz} = T^3 \left( z \frac{dW_e(z)}{dz} + 3z^2 \frac{d^2W_e(z)}{dz^2} + z^3 \frac{d^3W_e(z)}{dz^3} \right), \quad (4.25)
\end{aligned}$$

...

$$W_{0r}(z) = T^r \left( z \frac{dW_e(z)}{dz} + \dots + z^r \frac{d^r W_e(z)}{dz^r} \right).$$

Откуда видно, что выражение (4.24) возможно, если  $z=1$  является нулем кратности  $r$  передаточной функции  $W_e(z)$ :

$$W_e(z) = (z-1)^r W_e^0(z), \quad W_e^0(1) \neq 0. \quad (4.26)$$

Продифференцируем (4.26)  $r$  раз:

$$\begin{aligned}
\frac{dW_e(z)}{dz} &= r(z-1)^{r-1} W_e^0(z) + (z-1)^r \frac{dW_e^0(z)}{dz}, \\
\frac{d^2W_e(z)}{dz^2} &= r(r-1)(z-1)^{r-2} W_e^0(z) + 2r(z-1)^{r-1} \frac{dW_e^0(z)}{dz} + (z-1)^r \frac{d^2W_e^0(z)}{dz^2}, \\
&\dots \\
\frac{d^k W_e(z)}{dz^k} &= k!(z-1)^{r-k} W_e^0(z) + R(z), \quad (4.27)
\end{aligned}$$

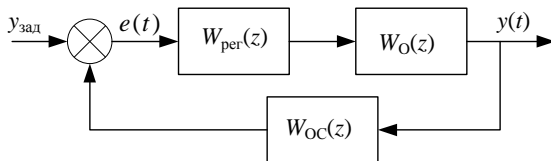
...

$$\frac{d^r W_e(z)}{dz^r} = r! W_e^0(z) + R(z), \quad \text{где } R(z)|_{z=1} = 0. \quad (4.28)$$

Подставим выражение (4.27) в (4.22) с учётом формул (4.25) и (4.27):

$$C_k = \frac{1}{k!} W_{0k}(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{k!} T^k k! (z-1)^{r-k} W_e^0(z) \Big|_{z=1}. \quad (4.29)$$

Откуда с учётом (4.26) окончательно получим формулу для расчёта первых  $r+1$  коэффициентов ошибки астатической системы с астатизмом  $r$ -го порядка



**Рис. 4.4.** Структурная схема системы управления

$$C_k = T^k (z-1)^{r-k} \left. \frac{W_e(z)}{(z-1)^r} \right|_{z=1} = \left. \frac{T^k W_e(z)}{(z-1)^k} \right|_{z=1}, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (4.30)$$

Передаточная функция ошибки имеет вид

$$W_e(z) = \frac{1}{1 + W(z)}, \quad (4.31)$$

где  $W(z)$  – передаточная функция разомкнутой системы. Тогда с учётом (4.26) передаточная функция  $W(z)$  должна иметь вид

$$W(z) = \frac{W^0(z)}{(z-1)^r}, \quad W^0(1) \neq 0, W^0(1) < \infty. \quad (4.32)$$

Пусть дискретная система состоит из регулятора, объекта и цепи обратной связи и показана на рис. 4.4. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(z) = W_{\text{per}}(z)W_O(z)W_{\text{OC}}(z).$$

Система будет астатической, если  $W_{\text{per}}(z)$ ,  $W_O(z)$  или  $W_{\text{OC}}(z)$  включают множитель  $\frac{1}{z-1}$ , который есть  $z$ -преобразование от интегрирующего звена  $\frac{1}{p}$ . Таким образом, система будет астатической, если передаточ-

ная функция разомкнутой дискретной системы содержит множитель  $\frac{1}{z-1}$  или непрерывная часть содержит интегрирующее звено. Порядок астатизма системы равняется сумме общего количества интегрирующих звеньев в непрерывной части и показателю степени выражения  $(z-1)$  в знаменателе дискретных звеньев.

## 5. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

---

Синтез ДС сводится к выбору управляющего устройства, которое образует с объектом управления некую структуру, позволяющую получить систему с желаемыми характеристиками, под которыми понимаются интересующие разработчика определённые показатели качества. Таким образом, перед разработчиками ставятся задачи синтеза функциональной структуры ДС (приборный синтез) и синтеза корректирующего устройства.

Приборный синтез состоит в выборе элементов и структуры регулятора, обеспечивающего принцип действия системы. При этом должны обеспечиваться технические условия их нормальной работы при совместном включении. Обычно разработчик на данном этапе использует сведения о параметрах протекающих процессов, физической природе переменных измерения и управления, а также имеющихся технических средствах. Полученные на этом этапе объект или часть ДС называют неизменяемой системой. Этот этап проектирования не имеет пока строгой математической основы и относится к области инженерного искусства.

Корректирующий синтез подразумевает введение таких добавочных устройств, которые улучшат качество работы неизменяемой системы и при этом не нарушат принципиальной работоспособности устройства. Из теории непрерывных систем управления известно, что коррекция может быть последовательная, параллельная, коррекция за счёт введения обратной связи и смешанная. С математических позиций все они эквивалентны, так как корректирующему контуру одного типа может быть сопоставлен корректирующий контур другого типа.

Важнейшим этапом проектирования ДС является разработка цифровых законов управления непрерывными объектами. Для решения этой задачи предложено три подхода: 1) переоборудование, которое сводится к замене непрерывного регулятора его дискретной моделью в результате аппроксимации; 2) дискретизация объекта путём построения дискретной модели непрерывного объекта и последующий синтез регулятора методами теории дискретных систем; 3) прямой синтез цифрового регулятора для непрерывного объекта без каких-либо упрощений и аппроксимаций.

Первые два подхода являются приближёнными и фактически предполагают замену одной задачи другой с целью применить известные результаты теории стационарных (непрерывных или дискретных) систем. В первом подходе игнорируется наличие цифровой части (импульсного элемента, дискретного регулятора и экстраполятора) с помощью дискретного преобразования Лапласа и используются методы синтеза непрерывных систем. При этом иногда дискретизация полученного аналогового регулятора не позволяет добиться желаемого эффекта. При использовании

второго подхода не учитывается поведение системы в промежутках между моментами квантования, что может привести к появлению скрытых колебаний и несоответствию качества полученной системы заданным критериям. Другой недостаток метода дискретизации объекта состоит в том, что требования к системе, сформулированные в непрерывном времени, не всегда легко перевести в соответствующие дискретизированные показатели качества. На современном этапе в теории дискретных систем управления основное внимание уделяется точным методам анализа и синтеза. Во многом это связано с тем, что приближённые методы проектирования могут приводить к неработоспособным решениям.

Применительно к первым двум подходам разработаны определённые методы синтеза, которые позволяют получить выражение для реализации регулятора. К этим методам относятся [13]:

- графоаналитические методы инженерного динамического синтеза САУ: корневые, корневого годографа, стандартных переходных характеристик, частотные;

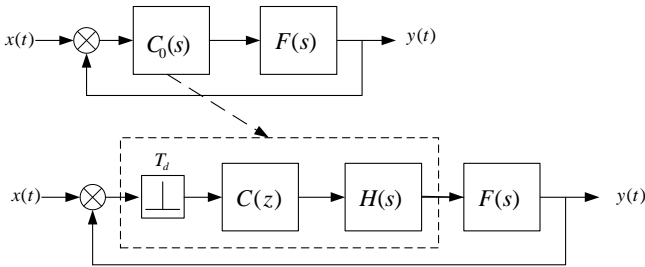
- аналитические методы оптимального и адаптивного управления;

- синтез САУ по интегральным критериям качества (функционалам) методами вариационного исчисления, динамического линейного и нелинейного математического программирования, принципом максимума Понтрягина, методом Винера-Хопфа, методами модального управления, методами аналитического конструирования оптимальных регуляторов и др.

Для третьего подхода применяются ЭВМ с использованием специализированного программного обеспечения на основе методов аналогового и цифрового моделирования САУ. По сравнению с первыми двумя методами здесь реализуется наиболее полное исследование свойств и синтез САУ с учётом всех особенностей объекта управления. Аналитические и графоаналитические методы, в свою очередь, позволяют исследовать САУ в более общем виде и найти оптимальный вариант среди множества решений.

## 5.1. ЗАДАЧА ПЕРЕОБОРУДОВАНИЯ

Допустим, что одним из методов синтеза спроектирована некоторая непрерывная система управления объектом с передаточной функцией  $F(s)$ , которая включает регулятор  $C_0(s)$ . Требуется реализовать эту систему на имеющемся цифровом оборудовании таким образом, чтобы сохранить все существенные свойства замкнутой системы. При этом непрерывный регулятор  $C_0(s)$ , как правило, заменяют цифровым регулятором, содержащим импульсный элемент (осуществляет дискретизацию), некоторый цифровой фильтр с дискретной передаточной функцией  $C(z)$  и экстраполятор  $H(s)$  (рис. 5.1).



**Рис. 5.1. Переоборудование в цифровой регулятор**

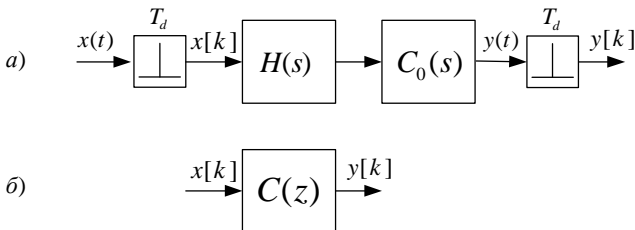
При переоборудовании имеются два варианта методов реализации [13]. К первому варианту относятся методы, которые направлены на обеспечение близости свойств отдельно взятого цифрового регулятора (например, его импульсной или переходной характеристики) к свойствам исходного непрерывного регулятора. При этом регулятор рассматривается изолированно, без учёта других элементов, поэтому нельзя гарантировать даже устойчивость переоборудованной замкнутой системы.

Цель методов второго варианта – обеспечить близость свойств замкнутых систем. Такой подход позволяет гарантировать устойчивость цифровой системы, однако приводит к значительно более сложным алгоритмам.

## 5.2. МЕТОДЫ ПЕРЕОБОРУДОВАНИЯ

### 5.2.1. Дискретизация непрерывного регулятора

Сущность данного способа переоборудования состоит в нахождении такого дискретного регулятора, чтобы его реакция на стандартные воздействия в дискретные моменты времени совпадали с реакцией непрерывного регулятора в эти же моменты времени. Дискретизация непрерывного регулятора осуществляется путём добавления импульсных элементов на его вход и выход и экстраполятора с передаточной функцией  $H(s)$  (рис. 5.2, а).



**Рис. 5.2. Дискретизация непрерывного регулятора**

Для того чтобы регуляторы на рис. 5.2 были эквивалентны, необходимо выполнение

$$C(z) = Z\{H(s)C_0(s)\}. \quad (5.1)$$

В простейшем и наиболее частом случае используется экстраполятор нулевого порядка с  $H(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$ , тогда

$$C(z) = Z\left\{\frac{1 - e^{-sT}}{s} C_0(s)\right\} = \frac{z-1}{z} Z\left\{\frac{C_0(s)}{s}\right\}. \quad (5.2)$$

Проверим, совпадут ли значения непрерывного и дискретного регуляторов при подаче на вход дискретной единичной функции  $x[k] = 1$  при  $k \geq 0$ , которая имеет изображение  $X(z) = \frac{z}{z-1}$ . Тогда в соответствии с (5.2) получим

$$Y(z) = X(z)C(z) = Z\left\{\frac{C_0(s)}{s}\right\}, \quad (5.3)$$

но  $\frac{C_0(s)}{s}$  – изображение выхода непрерывной системы при подаче на её вход единичной функции  $x(t) = 1(t)$ , которая имеет изображение  $X(s) = 1/s$ . Таким образом, при дискретизации непрерывного регулятора с экстраполятором нулевого порядка необходимо найти  $z$ -преобразование от переходной функции непрерывного регулятора  $Y_0(s) = \frac{C_0(s)}{s}$ .

Несмотря на существование математической связи между  $z$ -преобразованием и преобразованием Лапласа, переход от передаточной функции к дискретной передаточной функции, как правило, приводит к громоздким вычислениям, а при неизвестных полюсах передаточной функции, к тому же, точных решений не имеет. Поэтому в инженерной практике разработаны более простые, приближённые методы построения цифровых моделей.

### 5.2.2. Замена переменной в передаточной функции непрерывного регулятора

Рассмотрим следующее выражение, соответствующее замене переменных при переходе от преобразования Лапласа к  $z$ -преобразованию

$$z = e^{sT} = 1 + \frac{sT}{1!} + \frac{s^2 T^2}{2!} + \frac{s^3 T^3}{3!} + \dots \quad (5.4)$$

Если считать период дискретизации  $T$  достаточно малым для того, чтобы пренебречь членами второго порядка ряда (5.4), то можно выделить линейное приближение

$$z \approx 1 + sT,$$

откуда

$$s \approx \frac{z-1}{T}. \quad (5.5)$$

Выражение (5.5) позволяет получить дискретную передаточную функцию цифрового регулятора, сделав соответствующую замену переменных непосредственно в передаточной функции непрерывного регулятора

$$C(z) = C_0(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}.$$

Этот приём получил название метода прямой разности (метод левых прямоугольников), а в численных методах он известен как метод прямоугольников с упреждением.

Рассматривая первое приближение разложения

$$z = \frac{1}{e^{-sT}} = \frac{1}{1 - \frac{sT}{1!} + \frac{s^2 T^2}{2!} - \frac{s^3 T^3}{3!} + \dots}, \quad (5.6)$$

находим

$$z \approx \frac{1}{1-sT} \quad \text{и} \quad s \approx \frac{z-1}{zT}. \quad (5.7)$$

Использование подстановки (5.7) приводит к цифровой модели по методу обратной разности (метод прямоугольников).

Метод трапеций, также известный как билинейное преобразование и преобразование Тастина использует разложение вида

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} = \frac{1 + \frac{sT}{1!2} + \frac{s^2 T^2}{2!2} + \frac{s^3 T^3}{3!2} + \dots}{1 - \frac{sT}{1!2} + \frac{s^2 T^2}{2!2} - \frac{s^3 T^3}{3!2} + \dots}, \quad (5.8)$$

первое приближение которого

$$z \approx \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} = \frac{2 + sT}{2 - sT}. \quad (5.9)$$

Из выражения (5.9) следует билинейная подстановка для преобразования непрерывного регулятора в дискретный

$$s \approx \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}. \quad (5.10)$$



В качестве примера перехода к дискретным моделям рассмотрим простейшее звено интегратора с передаточной функцией  $C(s) = \frac{1}{s}$ . Преобразование по методам прямой, обратной разности и билинейное преобразование дают следующие дискретные модели:

$$C(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{T}{z-1}, \quad (5.11)$$

$$C(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{zT}{z-1}, \quad (5.12)$$

$$C(z) = \frac{1}{\frac{2}{T}z-1} = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}. \quad (5.13)$$

Рассматривая переменную  $z$  как оператор сдвига вперед на один такт и учитывая, что  $C(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ , можно выразить математические модели интегратора в конечно-разностной форме. Из выражения (5.11) следует, что

$$Y(z)(z-1) = TX(z) \quad \text{или} \quad y[k+1] = y[k] + Tx[k],$$

которое и представляет собой метод численного интегрирования методом левых прямоугольников (рис. 5.3)

Из (5.12) можно получить выражение

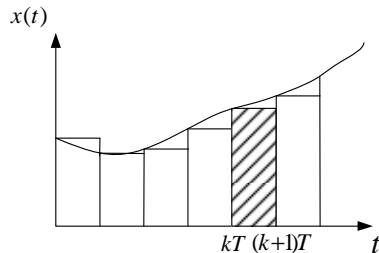
$$Y(z)(z-1) = TzX(z) \quad \text{или} \quad y[k+1] = y[k] + Tx[k+1],$$

наглядное представление которого приведено на рис. 5.4.

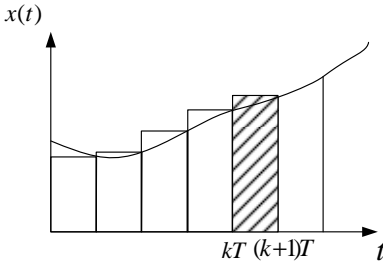
Для (5.13) аналогично получаем

$$Y(z)(z-1) = \frac{T}{2} X(z)(z+1) \quad \text{или} \quad y[k+1] = y[k] + \frac{T}{2} (x[k+1] + x[k]),$$

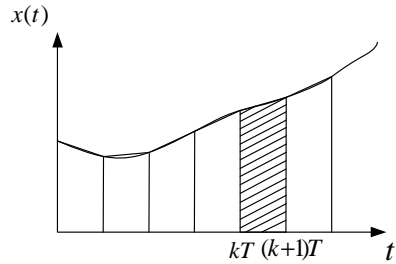
что соответствует интегрированию методом трапеций (рис. 5.5).



**Рис. 5.3. Интегрирование методом левых прямоугольников**



**Рис. 5.4. Интегрирование методом прямоугольников**



**Рис. 5.5. Интегрирование методом трапеций**

Обобщая вышеизложенное, сделаем вывод, что можно получить выражение для замены переменной  $s$  в передаточной функции непрерывного регулятора из дискретной модели интегрирующего звена. Точность полученной модели будет зависеть от полинома, которым аппроксимируется траектория функции интегратора. Для приведённых методов порядок аппроксимирующего полинома равнялся одному, а потому и дискретные регуляторы будут равны порядку непрерывного регулятора. Они достаточно хорошо моделируют непрерывный регулятор при малых периодах квантования  $T$ . При увеличении периода квантования их свойства существенно отличаются от свойств непрерывного регулятора. Повышение точности аппроксимации можно добиться повышением порядка аппроксимирующего полинома, что приводит к следующим заменам:

$$s \approx \frac{3}{T} \frac{z^2 - 1}{z^2 - 4z + 1},$$

$$s \approx \frac{10}{T} \frac{z^4 + z^3 - z - 1}{z^4 + 6z^3 + 6z^2 + 6z + 1},$$

которые соответствуют методам интегрирования Симпсона и Уэддла. При этом порядок переоборудованного регулятора будет выше порядка непрерывного.

При цифровом моделировании, как и при численном интегрировании, необходимо правильно выбрать период дискретизации, так как он является определяющим в вопросе эквивалентности дискретной модели её непрерывному аналогу. В случае, когда критерием эквивалентности является требование устойчивости цифровой модели, можно ограничиться условием Котельникова

$$T < \frac{1}{2f_c},$$

где  $f_c$  – собственная частота системы.

Если требованием условия эквивалентности выступает точность цифровой модели её непрерывному эквиваленту, то ошибка цифрового моделирования будет зависеть от выбранного метода интегрирования. Для метода прямоугольников

$$\varepsilon < \frac{\omega T A(0)}{2} (M - 1), \quad (5.14)$$

для метода билинейного преобразования

$$\varepsilon < \frac{\omega^2 T^2 A(0)}{12} (M - 1), \quad (5.15)$$

где  $\omega$  – круговая частота воспроизводимого сигнала;  $M$  – колебательность системы;  $A(0)$  – начальное значение модуля частотной характеристики.

Рассмотрим как меняется частотная характеристика переоборудованной системы, которая определяется подстановкой  $z = e^{j\omega T}$  в передаточную функцию цифрового регулятора. Очевидно, что она будет отличаться от передаточной характеристики исходного регулятора  $C_0(j\omega)$ . Пусть при переоборудовании используется преобразование Тастина, тогда

$$C(e^{j\omega T}) = C_0 \left( \frac{2 e^{j\omega T} - 1}{T e^{j\omega T} + 1} \right). \quad (5.16)$$

Приведём аргумент в правой части (5.16) к следующему виду

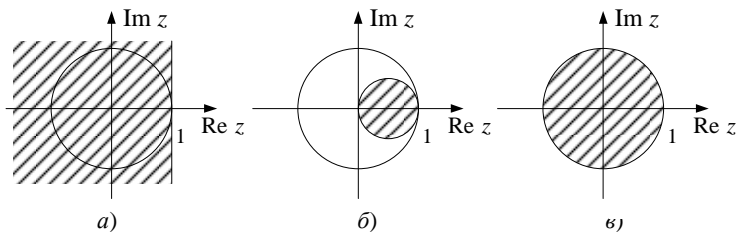
$$\frac{2 e^{j\omega T} - 1}{T e^{j\omega T} + 1} = \frac{2 e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{T \frac{e^{j\omega T}}{e^{\frac{j\omega T}{2}}} + e^{\frac{j\omega T}{2}}} = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\omega_n,$$

где  $\omega_n = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}$  – псевдочастота. Так как при угле  $\beta \leq 0,5 \operatorname{tg} \beta \approx \beta$  с погрешностью не более 10%, то

$$j\omega_n = j \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \approx j \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} = j\omega, \text{ при } \omega \leq \frac{1}{T}$$

получаем условие, при котором частотная характеристика дискретного регулятора очень близка с частотной характеристикой исходного непрерывного регулятора. Аналогично можно показать, что и другие преобразования искажают частотную характеристику регулятора.

Следующим важным вопросом является проверка устойчивости переоборудованного регулятора, ведь вполне возможно изначально устойчивую систему сделать неустойчивой в результате дискретизации. В любом случае при переоборудовании полуплоскость  $\operatorname{Re} s < 0$  отображается в некоторую полуплоскость пространства  $z$ , поэтому необходимо проследить, чтобы полюса переоборудованной системы находились в окружности единичного радиуса  $|z| < 1$ .



**Рис. 5.6. Отображение области устойчивости непрерывной системы на  $z$ -область**

Так из выражения (5.5) преобразования методом прямой разности следует, что полуплоскость  $\text{Re } s < 0$  отображается в полуплоскость  $\text{Re } z < 0$  (рис. 5.6, а). В данном случае видно, что устойчивому непрерывному регулятору может соответствовать неустойчивый дискретный регулятор после переоборудования. Из выражений (5.6, 5.7) следует, что вся отрицательная область плоскости  $s$  при переоборудовании по методу прямоугольников отображается в круг радиуса 0,5, который целиком лежит в единичном круге области  $z$  (рис. 5.6, б). В данном случае устойчивому регулятору после переоборудования будет соответствовать устойчивый дискретный регулятор, при этом даже неустойчивый регулятор при переоборудовании может стать устойчивым.

Использование билинейного преобразования (5.10) приводит к отображению всей отрицательной полуплоскости пространства  $s$  в область круга единичного радиуса пространства  $z$  (рис. 5.6, в). То есть, если регулятор до переоборудования был устойчивым, то после переоборудования его устойчивость сохраняется, и наоборот.

Необходимо отметить, что, хотя устойчивость регулятора будет обеспечена при переоборудовании, это не может гарантировать устойчивость замкнутой системы, поскольку регулятор рассматривался изолированно от остальных элементов системы.

### 5.2.3. Отображение нулей и полюсов

Из теории автоматического управления известно, что расположение нулей и полюсов однозначно определяет передаточную функцию системы управления. Между тем существует функциональная связь между расположением нулей и полюсов в  $s$ - и  $z$ -областях по закону  $z = e^{sT}$ . Таким образом, можно довольно просто переоборудовать непрерывный регулятор в дискретный, если нули и полюса дискретного регулятора будут расположены в соответствии с этим законом. Общая последовательность действий по отображению нулей и полюсов состоит в следующем.

1. Все полюса и нули функции  $C_0(s)$  преобразуются в полюса и нули, соответственно, дискретного регулятора по закону  $z = e^{sT}$ .

2. Если надо обеспечить запаздывание на один такт, то один из нулей отображается в точку  $z = \infty$ .

3. Коэффициент усиления  $K$  цифрового регулятора  $C(z)$  выбирается из условия равенства коэффициентов передачи на некоторой частоте. Так, для установившегося режима  $\omega \rightarrow 0$ , следовательно

$$\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = \lim_{s \rightarrow 1} C_0(s). \quad (5.17)$$

Если известны нули и полюса непрерывного регулятора, то его передаточная функция имеет вид

$$C_0(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{i=1}^N (s - p_i)}, \quad (5.18)$$

где  $z_i, i = \overline{1, M}$  – нули передаточной функции;  $p_i, i = \overline{1, N}$  – полюсы передаточной функции;  $K_0$  – коэффициент усиления регулятора. Далее предполагается что регулятор физически реализуем, т.е.  $M \leq N$  и, соответственно, имеет  $q = N - M$  нулей на бесконечности или  $q = N - M - 1$  для объектов с запаздыванием. Дискретный регулятор, переоборудованный данным методом, будет определяться следующим образом

$$C(z) = K \frac{\prod_{i=1}^M (z - e^{z_i T}) \prod_{i=1}^q (z + 1)}{\prod_{i=1}^N (z - e^{p_i T})}. \quad (5.19)$$

Коэффициент усиления  $K$  согласно выражению (5.17) определяется из условия

$$K \cdot 2^q \frac{\prod_{i=1}^M (1 - e^{z_i T})}{\prod_{i=1}^N (1 - e^{p_i T})} = K_0 \frac{\prod_{i=1}^M (-z_i)}{\prod_{i=1}^N (-p_i)}. \quad (5.20)$$

### 5.2.4. Сравнение различных методов переоборудования

Для сравнения различных методов переоборудования найдём амплитудно-частотные характеристики различных дискретных моделей, полученных из непрерывной. В качестве примера возьмём непрерывный регулятор с передаточной функцией  $C_0(s) = \frac{3}{s+1}$ .

– Переоборудование по методу прямой разности:

$$C_1(z) = \frac{3T}{z-1+T},$$

$$C_1(w) = \frac{3T}{e^{jwT}-1+T} = \frac{3Ta}{a^2 + \sin^2 wT} - j \frac{3T \sin wT}{a^2 + \sin^2 wT},$$

где  $a = T - 1 + \cos wT$ .

– Переоборудование по методу обратной разности:

$$C_2(z) = \frac{3Tz}{z(1+T)-1},$$

$$C_2(w) = \frac{3T(b \cos wT + (T+1)\sin^2 wT)}{b^2 + (T+1)^2 \sin^2 wT} + j \frac{3T(b \sin wT - (T+1) \sin wT \cos wT)}{b^2 + (T+1)^2 \sin^2 wT},$$

где  $b = (T+1) \cos wT - 1$ .

– Переоборудование по методу трапеций:

$$C_3(z) = \frac{3T(z+1)}{z(T+2)-2+T},$$

$$C_3(w) = \frac{3T(c(\cos wT + 1) + (T+2)\sin^2 wT)}{c^2 + (T+2)^2 \sin^2 wT} + j \frac{3T(c \sin wT - (\cos wT + 1)(T+2)\sin wT)}{c^2 + (T+2)^2 \sin^2 wT},$$

где  $c = (T+2)\cos wT - 2 + T$ .

– Отображение нулей и полюсов:

$$K \cdot 2 \frac{1}{1-e^{-T}} = 3 \frac{1}{1},$$

$$K = \frac{3}{2}(1-e^{-T}),$$

$$C_4(z) = \frac{3}{2}(1-e^{-T}) \frac{z+1}{z-e^{-T}},$$

$$C_4(w) = \frac{3}{2}(1-e^{-T}) \left( \frac{cd + \sin^2 wT}{d^2 + \sin^2 wT} + j \frac{\sin wT (d-c)}{d^2 + \sin^2 wT} \right),$$

где  $c = \cos wT + 1$ ,  $d = \cos wT - e^{-T}$ .

В таблице 5.1 приведён результат расчёта модуля частотной характеристики для полученных выражений переоборудованной непрерывной системы в дискретную. Наиболее точно повторяют свойства непрерывной системы модели, полученные методом трапеций и отображением нулей и полюсов.

## 5.1. Частотные характеристики

Частота	Непрерывная	Обратная разность	Прямая разность	Метод трапеций	Отображение нулей и полюсов
0	3	3	3	3	3
4	0,727607	0,72482655	0,724252	0,727516	0,72751
8	0,372104	0,370971476	0,370383	0,371909	0,371906
12	0,249136	0,248933831	0,248056	0,248839	0,248837
16	0,187135	0,187592052	0,186408	0,186737	0,186735
20	0,149813	0,15081124	0,149319	0,149314	0,149313
24	0,124892	0,126369445	0,124571	0,124293	0,124292
28	0,107075	0,108995581	0,106892	0,106375	0,106374
32	0,093704	0,096045253	0,093638	0,092904	0,092903
36	0,083301	0,086046396	0,083337	0,0824	0,0824
40	0,074977	0,078114628	0,075104	0,073975	0,073974
44	0,068164	0,071686672	0,068376	0,067061	0,067061
48	0,062486	0,066386795	0,062777	0,061283	0,061282
52	0,057682	0,061954789	0,058047	0,056376	0,056376
56	0,053563	0,058204764	0,054	0,052156	0,052156
60	0,049993	0,055000415	0,050499	0,048485	0,048484

### 5.2.5. Переоборудование замкнутой системы

Приведённые выше методы переоборудования подразумевают замену отдельно взятого регулятора близкой по свойствам дискретной моделью. Однако такие способы не гарантируют, что замкнутая система с переоборудованным регулятором будет устойчива и сохранит все показатели качества в пределах норм, особенно при увеличении интервала квантования. Поэтому применяют более сложные методы, которые рассматривают замкнутую систему в целом и гарантируют сохранение её свойств после переоборудования.

По аналогии с переоборудованием регулятора методы предполагают замену дискретной моделью, которая обеспечит близость частотной характеристики или реакции на стандартные воздействия замкнутой системы.

Пусть непрерывная система состоит из регулятора  $C_0(s)$  и объекта  $F(s)$  (рис. 5.1), тогда частотная характеристика имеет вид

$$W_0(j\omega) = \frac{F(j\omega)C_0(j\omega)}{1 + F(j\omega)C_0(j\omega)}.$$

Если привести структуру замкнутой системы к дискретной путём добавления фиктивных квантователей и экстраполяторов, то частотная характеристика цифровой системы определяется выражением

$$W(j\omega) = \frac{F^*(e^{j\omega})C(e^{j\omega})}{1 + F^*(e^{j\omega})C(e^{j\omega})},$$

где  $F^*(z) = Z\{F(s)H(s)\}$  – дискретная передаточная функция приведённой непрерывной части.

Близость частотных характеристик достигается минимизацией интеграла на заданном частотном диапазоне  $[\omega_1, \omega_2]$ :

$$J_\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} (W(j\omega) - W_0(j\omega))^2 d\omega \rightarrow \min. \quad (5.21)$$

Выбирая порядок регулятора  $C(z)$  с помощью выражения (5.21), производят поиск его неизвестных коэффициентов численными методами нелинейного программирования. Данный подход обеспечивает близость частотных характеристик лишь в заданном частотном диапазоне, поэтому переоборудованная замкнутая система может оказаться неустойчивой.

Следующий способ переоборудования заключается в приближении реакции цифровой и непрерывной системы на стандартные входные воздействия  $r(t)$ , имеющие изображение  $R(s)$ . Тогда реакция на это входное воздействие непрерывной системы, находившейся в состоянии покоя

$$Y_0(s) = W_0(s)R(s) = \frac{F(s)C_0(s)}{1 + F(s)C_0(s)} R(s).$$

Для дискретной соответственно

$$Y(s) = \frac{F(s)H(s)C(e^{sT})}{1 + Z\{F(s)H(s)\}C(e^{sT})} Z\{R(s)\},$$

где произведена замена переменной  $z = e^{sT}$ . Сравнивая эти два переходных процесса, необходимо добиться минимума функционала

$$J = \int_0^{\infty} (y_0(t) - y(t))^2 dt \rightarrow \min. \quad (5.22)$$

Если интеграл (5.22) сходится, то в соответствии с равенством Парсевала этот функционал можно представить в виде



$$J = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} [Y_0(-s) - Y(-s)] [Y_0(s) - Y(s)] dt \rightarrow \min. \quad (5.23)$$

Эта задача имеет точное аналитическое решение, при котором гарантируется устойчивость замкнутой системы, но порядок получаемого регулятора  $C(z)$  оказывается достаточно высоким.

### 5.3. ПОЛИНОМИНАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ

Данный метод синтеза предполагает представление непрерывной части в виде дискретной модели. При этом вся система считается чисто дискретной, что позволяет применять для синтеза регуляторов хорошо разработанные методы теории дискретных систем. Регулятор представляется в виде отношения полиномов (цифровой фильтр), параметры которого предстоит найти. Поиск параметров осуществляется на основе данных о желаемом расположении полюсов дискретной системы (задача размещения полюсов), которые, как известно, определяют качество переходного процесса. В простых случаях, когда порядок регулятора невысок, применимы графоаналитические методы, однако более универсальными являются методы поиска решения полиномиального уравнения.

Переход к эквивалентной дискретной модели системы производится путём введения импульсных элементов и экстраполяторов, которые позволяют рассматривать входные и выходные сигналы непрерывной части только в дискретные моменты времени. Для одноконтурных систем переход к эквивалентной дискретной системе решается довольно просто, путём введения импульсного элемента на входной сигнал регулятора (рис. 5.7). В этом случае непрерывный выходной сигнал  $y(t)$  объекта  $F(s)$ , как впрочем, и входной сигнал  $x(t)$ , будут рассматриваться регулятором только в дискретные моменты времени, поэтому правомерна замена непрерывных сигналов их дискретными отсчётами. Импульсный выход регулятора  $C(z)$  для преобразования в непрерывный сигнал подаётся на экстраполятор  $H(s)$ , который вместе с объектом управления  $F(s)$  образует эквивалентный дискретный объект  $P(z) = Z\{H(s)F(s)\}$ .

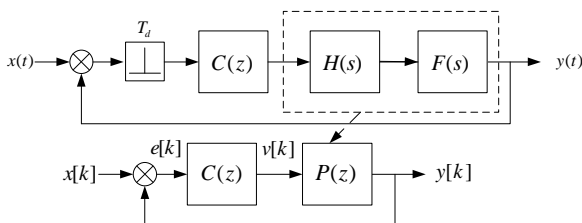


Рис. 5.7. Одноконтурная цифровая система

В результате дискретная модель объекта и ДПФ регулятора записывается в виде отношения полиномов

$$P(z) = \frac{n(z)}{d(z)}, \quad C(z) = \frac{a(z)}{b(z)}. \quad (5.24)$$

В наиболее распространённых случаях имеют дело с физически реализуемыми объектами, что подразумевает порядок полинома числителя не выше, чем порядок полинома знаменателя, причём передаточная функция объекта – строго правильная, что исключает из рассмотрения алгебраические циклы

$$\deg n(z) < \deg d(z), \quad \deg a(z) \leq \deg d(z). \quad (5.25)$$

После получения модели (5.24) можно найти аналитическое выражение для расположения полюсов дискретной системы. Расположение полюсов на комплексной оси будет определять устойчивость и качество системы в целом. Изменение параметров регулятора будет сопровождаться движением полюсов, что позволяет расположить их в заданной части комплексной плоскости. Довольно часто полюса и их движения называют модами системы, а поставленную задачу – задачей модального синтеза регулятора.

### 5.3.1. Графоаналитический метод

При решении практических задач часто желательно, чтобы порядок регулятора был наименьшим, что обеспечивает довольно простые способы синтеза. К таким регуляторам относятся пропорциональный (П), пропорционально-интегральный (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД).

П-регулятор является простейшим и представляет из себя усилитель  $C(z) = K$ . При его использовании характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$\Delta(z) = Kn(z) + d(z). \quad (5.26)$$

Тогда задача заключается в выборе такой величины  $K$ , чтобы все корни  $\Delta(z)$  были расположены в заданной области комплексной плоскости, причём устойчивым решениям соответствует область внутри единичного круга.

В случае  $K = 0$  корни характеристического полинома определяются корнями  $d(z)$ , откуда следует, что с помощью П-регулятора всегда можно стабилизировать устойчивый объект. Изменяя  $K$ , корни характеристического уравнения будут описывать на комплексной плоскости траектории, которые называют корневым годографом. Построив корневого

граф, выбирают такой коэффициент  $K$ , при котором корни расположены наилучшим образом. Конечно, не исключено, что никакое значение  $K$  не приведёт к желаемому результату.

В качестве примера рассмотрим устойчивый объект

$$P(z) = \frac{z - 0,6}{(z - 0,8)(z + 0,5)},$$

которым необходимо управлять с помощью П-регулятора.

В соответствии с (5.26) характеристическое уравнение будет следующим

$$\Delta(z) = K(z - 0,6) + (z - 0,8)(z + 0,5)$$

Корни характеристического полинома при  $K = 0$  расположены в точках  $z_1 = -0,5$ ,  $z_2 = 0,8$ , которые обозначены крестиками на рис. 5.8. При увеличении  $K$  корни движутся влево, так что когда  $K = 0,6$  корни  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0,7$ , что соответствует потере устойчивости. При уменьшении  $K$  корни движутся вправо, и система становится неустойчивой при  $K = -0,8$ , при этом  $z_1 = 0,07$ ,  $z_2 = 1$ .

Большими возможностями обладает ПИ-регулятор, передаточная функция которого равна

$$C(z) = K_p + \frac{K_i}{z-1} = \frac{K_p z + K_i - K_p}{z-1}, \quad (5.27)$$

где  $K_p$  – пропорциональная составляющая;  $K_i$  – интегральная составляющая.

Характеристический полином примет в этом случае следующий вид

$$\Delta(z) = (K_p z + K_i - K_p)n(z) + (z-1)d(z). \quad (5.28)$$

Непосредственно из (5.28) следует, что решаемая задача двумерная, а соответственно представляется в виде некоторой области на плоскости  $K_p, K_i$ . Каждому вектору этой плоскости можно сопоставить показатель качества дискретной системы и найти решение с помощью методов оптимизации. Процедура нахождения области, соответствующей устойчивым решениям, предложена Ю.И. Неймарком и называется D-разбиением.

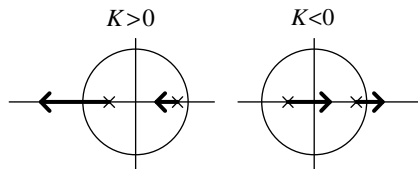


Рис. 5.8. Корневой годограф

Аналитическое решение нахождения области устойчивых решений довольно просто получается лишь для объектов первого порядка, тогда как для остальных случаев используются численные методы.

Наибольшее распространение в промышленных системах управления получил ПИД-регулятор, который имеет дискретную передаточную функцию

$$C(z) = K_p + \frac{K_i}{z-1} + \frac{K_d(z-1)}{z-e^{-1/T}}, \quad (5.29)$$

где  $K_d$  – дифференциальная составляющая.

В данном случае задача может быть решена численными методами при фиксации одного из параметров, а для оставшейся пары применить метод D-разбиения. На практике при синтезе ПИД-регулятора используют рекомендации по выбору его параметров на основе их влияния на качество переходных процессов.

### 5.3.2. Задача размещения полюсов

Дальнейшее повышение порядка регулятора позволяет управлять размещением корней более точно, а при порядке регулятора  $\deg d - 1$  полюса замкнутой системы могут быть точно размещены в произвольных точках комплексной плоскости. Это утверждение позволяет предварительно выбрать желаемый характеристический полином

$$D(z) = \prod_{i=1}^N (z - \lambda_i), \quad |\lambda_i| < 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5.30)$$

который превращает характеристический полином в полиномиальное уравнение

$$a(z)n(z) + b(z)d(z) = D(z). \quad (5.31)$$

Такая задача получила название задачи размещения полюсов, а её решением являются полиномы  $a(z)$  и  $b(z)$ , которые превращают (5.31) в тождество. Она может решаться как в пространстве состояний, так и в частотной области с помощью передаточных функций. Для одномерных систем проще получить решение в частотной области. При поиске решения полиномиального уравнения (5.31) необходимо ещё обеспечить физическую реализуемость регулятора, т.е. выполнение условия  $\deg a \leq \deg b$ .

В теории полиномиальных уравнений доказывается, что уравнение (5.31) разрешимо тогда и только тогда, когда наибольший общий множитель полиномов  $n(z)$  и  $d(z)$  является делителем желаемого характеристического полинома  $D(z)$ . В этом случае оно имеет бесконечное множество решений вида

$$\begin{aligned} a(z) &= a^*(z) + d(z)\xi(z); \\ b(z) &= b^*(z) + d(z)\xi(z), \end{aligned}$$

где  $a^*(z)$  и  $b^*(z)$  – любое решение уравнения (5.31), а  $\xi(z)$  – произвольный полином, который может равняться нулю.

Из множества решений уравнения (5.31) есть такое, что  $\deg a(z) \leq \deg d(z) - 1$ , которое называется *решением минимальной степени* относительно  $a(z)$ . При этом

$$\deg b(z) = \max\{\deg n(z) - 1, \deg D(z) - \deg d(z)\}, \quad (5.32)$$

так как, по крайней мере, два члена уравнения (5.31) должны иметь одинаковую степень.

Решение минимальной степени относительно  $b(z)$  по аналогии имеет  $\deg b(z) \leq \deg n(z) - 1$  и

$$\deg a(z) = \max\{\deg d(z) - 1, \deg D(z) - \deg n(z)\}. \quad (5.33)$$

Если

$$\deg D(z) < \deg n(z) + \deg d(z), \quad (5.34)$$

то уравнение (5.31) называют *правильным*, и оба минимальных решения совпадают.

Руководствуясь вышеприведёнными условиями, определяют порядок полиномов решения, и полиномиальное уравнение сводится к системе линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Пусть требуется решить

$$\begin{aligned} a(z)(z - 0,6) + b(z)(z - 0,8)(z + 0,5) &= z - 0,2, \\ \deg n(z) = 1, \deg d(z) = 2, \deg D(z) &= 1. \end{aligned}$$

Условие (5.34) выполняется, уравнение является *правильным*, и можно искать единственное минимальное решение по одной из формул (5.32), (5.33). Таким образом, получим  $\deg a(z) = 1$  и  $\deg b(z) = 0$ , что соответствует следующим полиномам

$$a(z) = a_1 z + a_0, \quad b(z) = b_0,$$

где  $a_1, a_0, b_0$  – неопределённые коэффициенты.

Подставляя найденное решение в общем виде в исходное уравнение и применяя метод неопределённых коэффициентов, находим

$$\begin{aligned} z^2 : a_1 + b_0 &= 0; \\ z : a_0 - 0,6a_1 - 0,3b_0 &= 1; \\ z^0 : 0,6a_0 + 0,4b_0 &= 0,2. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим  $a_1 = 1,818$ ,  $a_0 = 1,545$ ,  $b_0 = -1,818$ .

Как видно из этого примера, полученный регулятор физически нереализуем ( $\deg a(z) > \deg b(z)$ ). Посмотрим, существует ли физически реализуемый регулятор (для многих практических случаев  $\deg a(z) = \deg b(z) - 1$ ) для правильного уравнения (удовлетворяет условию (5.34)). Так как для дискретных моделей реальных объектов  $\deg n(z) < \deg d(z)$ , то из (5.32) следует, что

$$\deg b(z) \leq \deg n(z) - 1 < \deg d(z) - 1 = \deg a(z).$$

Откуда следует, что  $\deg a(z) > \deg b(z)$  и для правильного уравнения регулятор получается физически нереализуемым.

В том случае, если уравнение (5.31) неправильное, то из (5.32) следует, что

$$\deg b(z) = \deg D(z) - \deg d(z).$$

Тогда, для того чтобы регулятор был физически реализуем, необходимо выполнение условия

$$\deg b(z) \geq \deg d(z) - 1 \geq \deg a(z),$$

откуда следует

$$\deg D(z) \geq 2 \deg d(z) - 1. \quad (5.35)$$

Выражение (5.35) гарантирует, что в результате полиномиального синтеза будет получен физически реализуемый регулятор. Существуют, однако, особые случаи при специальном выборе полинома  $D(z)$ , когда можно получить физически реализуемый регулятор и при нарушении условия (5.35).

Более удобно полиномиальный синтез проводится при использовании оператора запаздывания  $\zeta = z^{-1}$ . В этом случае строго правильная

функция  $P(z) = \frac{n(z)}{d(z)}$ ,  $\deg n(z) < \deg d(z)$  преобразуется в функцию

$P(\zeta) = P(z)|_{z=\zeta^{-1}}$ , которая содержит множитель  $\zeta$  в числителе:

$$P(\zeta) = \frac{\zeta \tilde{n}(\zeta)}{\tilde{d}(\zeta)},$$

где  $\tilde{n}(\zeta)$  и  $\tilde{d}(\zeta)$  – полиномы. Тогда использование оператора запаздывания  $\zeta = z^{-1}$  в (5.31) и (5.32) вместо  $z$  позволяет всегда получать физически реализуемые регуляторы. При этом если порядок желаемого характе-

ристического полинома выбран ниже, чем  $2 \deg d(z) - 1$ , часть полюсов ДПФ замкнутой системы автоматически размещаются в точке  $z = 0$ , а их число равно  $2 \deg d(z) - 1 - \deg D(\zeta)$  (кроме особых случаев).

### 5.3.3. Конечное время переходных процессов

Отличительной чертой дискретных процессов, в отличие от непрерывных, является то, что имеется возможность создать регулятор, при котором переходные процессы в системе будут заканчиваться за конечное число периодов квантования. Такое управление часто называют аперiodическим. В этом случае все желаемые полюса в плоскости  $z$  располагаются в точке  $z = 0$ , соответственно желаемый характеристический полином  $D(z) = z^N$ . Такая постановка является частным случаем рассматриваемой выше задачи, решение которой для простоты будем производить в плоскости  $\zeta$ , а желаемый характеристический полином при этом будет  $D(\zeta) = a(\zeta)n(\zeta) + b(\zeta)d(\zeta) = 1$ .

Рассмотрим ДПФ системы на рис. 5.7

$$W(\zeta) = \frac{C(\zeta)P(\zeta)}{1 + C(\zeta)P(\zeta)} = \frac{a(\zeta)n(\zeta)}{a(\zeta)n(\zeta) + b(\zeta)d(\zeta)} = a(\zeta)n(\zeta). \quad (5.36)$$

Произведение полиномов в (5.36) даёт в итоге полином степени  $N = \deg a(\zeta) + \deg n(\zeta)$ , а это значит, что ДПФ система в этом случае представляет собой цифровой фильтр с конечной импульсной характеристикой

$$W(\zeta) = a(\zeta)n(\zeta) = v_0 + v_1\zeta + \dots + v_{N-1}\zeta^{N-1} + v_N\zeta^N,$$

где  $v_i$  – коэффициенты полинома. Это выражение использует только значения входного сигнала в текущий и предыдущие моменты времени, а значит, при подаче на вход единичного импульса переходной процесс закончится за  $N$  тактов. Выходной сигнал системы может быть вычислен как

$$y[k] = v_0r[k] + v_1r[k-1] + \dots + v_Nr[k-N].$$

### 5.3.4. Минимальное время переходных процессов

Пусть дискретная система имеет вид, показанный на рис. 5.7 с ДПФ объекта от переменной  $\zeta$ ,

$$P(\zeta) = \frac{n(\zeta)}{d(\zeta)}, \quad (5.37)$$

где  $n(\zeta)$  и  $d(\zeta)$  – полиномы ( $\deg n(\zeta) < \deg d(\zeta)$ ), а входной сигнал имеет изображение  $R(\zeta) = \frac{p(\zeta)}{q(\zeta)}$ , где  $p(\zeta)$  и  $q(\zeta)$  – полиномы. Требуется по-

строить регулятор, обеспечивающий затухание дискретного сигнала ошибки  $e[k]$  за минимальное время.

ДПФ сигнала ошибки, согласно рис. 5.7, определяется из выражения

$$W_e(\zeta) = \frac{1}{1 + C(\zeta)P(\zeta)} = \frac{b(\zeta)d(\zeta)}{a(\zeta)n(\zeta) + b(\zeta)d(\zeta)}.$$

Так как дальнейшие выкладки предполагается производить в пространстве  $\zeta$ , то с целью упрощения изображения формул этот аргумент будет опускаться при записи выражений.

Сигнал ошибки при подаче на систему входной последовательности найдём как

$$E(\zeta) = W_e(\zeta)R(\zeta) = \frac{pbd}{q(an + bd)}. \quad (5.38)$$

Для того чтобы сигнал ошибки стал равен нулю за конечное число тактов, как следует из предыдущего пункта, необходимо чтобы выражение (5.38) было полиномом, т.е. числитель должен нацело делиться на знаменатель. При этом  $\deg E(\zeta) = \min$ , а замкнутая система должна быть устойчива.

Пусть  $g(\zeta)$  – наибольший общий полиномиальный множитель полиномов  $q(\zeta)$  и  $d(\zeta)$ :

$$q(\zeta) = gq_0, \quad d(\zeta) = gd_0, \quad (5.39)$$

где  $q_0(\zeta)$  и  $d_0(\zeta)$  – полиномы, не имеющие общих множителей. Предполагая, что полином  $q_0(\zeta)$  устойчив, а полиномы  $n(\zeta)$ ,  $d_0(\zeta)$  и  $p(\zeta)$  имеют устойчивые и неустойчивые сомножители:

$$n(\zeta) = n^+ n^-, \quad d_0(\zeta) = d^+ d^-, \quad p(\zeta) = p^+ p^-. \quad (5.40)$$

Где верхние индексы «+» и «-» обозначают соответственно устойчивые (полюса расположены вне единичного круга) и строго неустойчивые полиномы (все их полюса находятся внутри единичного круга). Такое разложение полиномов на сомножители называется факторизацией.

Подставив (5.39) в (5.38), получим

$$E(\zeta) = \frac{p^+ p^- b d^+ d^-}{q_0 (a n^+ n^- + b g d^+ d^-)}.$$

Так как числитель не содержит компоненты  $q_0$ , то невозможно нацело его поделить на знаменатель, если не принять  $b(\zeta) = q_0 b_0$ , где  $b_0(\zeta)$  – полином.



Тогда

$$E(\zeta) = \frac{p^+ p^- b_0 d^+ d^-}{a n^+ n^- + q_0 b_0 g d^+ d^-}.$$

Так как знаменатель этого выражения является характеристическим уравнением замкнутой системы, то он должен удовлетворять условию устойчивости, а, следовательно, не может сократить полиномы числителя  $p^-$  и  $d^-$ , которые не удовлетворяют условию устойчивости. Тогда получим полиномиальное уравнение

$$p^+ b_0 d^+ = a n^+ n^- + q_0 b_0 g d^+ d^-. \quad (5.41)$$

Если выбрать

$$a(\zeta) = d^+ \tilde{a} \quad \text{и} \quad b_0 = n^+ \tilde{b}, \quad (5.42)$$

где  $\tilde{a}(\zeta)$  и  $\tilde{b}(\zeta)$  – некоторые полиномы, можно сократить устойчивый множитель  $n^+ d^+$  в левой и правой части (5.41), так что

$$p^+ \tilde{b} = n^- \tilde{a} + q_0 g d^- \tilde{b}.$$

Учитывая, что дискретная модель объекта (5.37) несократима, полиномы  $n^-$  и  $g d^-$  не могут иметь общих множителей. Также неустойчивый полином  $n^-$  и устойчивый  $q_0$  не имеют общих множителей. Следовательно, всегда можно выбрать полиномы  $\tilde{a}(\zeta)$  и  $\tilde{b}(\zeta)$  так, чтобы выполнялось равенство

$$p^+ = n^- \tilde{a} + q_0 g d^- \tilde{b} \quad (5.43)$$

и полином  $\tilde{b}(\zeta)$  имел минимальную степень  $\deg \tilde{b} = \deg n^- - 1$ . Так что изображение ошибки будет иметь вид

$$E(\zeta) = p^- d^- \tilde{b},$$

а количество тактов переходного процесса

$$N = \deg E(\zeta) = \deg p^- + \deg d^- + \deg n^- - 1. \quad (5.44)$$

Последнее выражение показывает, что быстродействие системы ограничивают неустойчивые нули и полюса ДПФ объекта управления  $P(\zeta)$ , а также неустойчивые нули изображения входного сигнала  $R(\zeta)$ .

Используя (5.42), получим ДПФ регулятора в виде

$$C(\zeta) = \frac{\tilde{a}}{q_0 \tilde{b}} \frac{d^+}{n^+}. \quad (5.45)$$

Характеристический полином замкнутой системы

$$\tilde{a}d^+n + q_0\tilde{b}n^+d = d^+n^+(n^-\tilde{a} + q_0gd^-\tilde{b}) = d^+n^+p^+$$

устойчив, поэтому замкнутая система устойчива и регулятор физически реализуем.

Из (5.45) следует, что регулятор компенсирует устойчивые нули и полюса объекта управления, поэтому такие регуляторы называются компенсационными. ДПФ разомкнутой системы с таким регулятором

$$C(\zeta)P(\zeta) = \frac{\tilde{a}}{q_0\tilde{b}} \frac{d^+}{n^+} \frac{n}{d}$$

сократима, поэтому в системе возможны скрытые колебания.

Компенсация допустима только для устойчивых нулей и полюсов, поскольку скомпенсированные нули и полюса становятся корнями характеристического уравнения замкнутой системы. Если полином  $p(\zeta)$  неизвестен, для определения полиномов  $\tilde{a}(\zeta)$  и  $b(\zeta)$  вместо (5.43) используют уравнение [13]

$$n^-\tilde{a} + q_0gd^-\tilde{b} = 1.$$

Тогда кратчайший переходной процесс, достижимый при неизвестном  $p(\zeta)$ , имеет длительность

$$N = \deg p + \deg d^- + \deg n^- - 1.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

Данное учебное пособие является вводным курсом в анализ и синтез цифровых систем управления. Оно позволяет познакомиться с базовыми методами и понятиями дискретных систем. Между тем, всё большее развитие получают методы, основанные на использовании дискретных моделей объектов в задачах робастного, адаптивного и оптимального управления. Для более глубокого усвоения материала читателю рекомендуется изучение дополнительной литературы.

Несмотря на большое разнообразие методов анализа и синтеза дискретных систем, все они, по сути, содержат одинаковые этапы, которые формируют жизненный цикл проектирования цифровых систем управления. Разработчику приходится анализировать сигналы, поступающие с объекта управления, определять быстродействие и обеспечивать качество управления. При этом ещё необходимо сделать по возможности экономически эффективное устройство управления из доступной элементной базы. Всё это приводит к тому, что многие этапы макетирования, анализа и синтеза приходится выполнять несколько раз, добиваясь оптимального варианта. Снижение трудоёмкости вычислений можно добиться использованием современных информационных технологий, направленных на проектирование цифровых систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Ким, Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы / Д.П. Ким. – М. : ФИЗМАТЛИБ, 2003. – 288 с.
2. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы : учеб. пособие / В.В. Солодовников и др. ; под. ред. В.В. Солодовникова. – М. : Высшая школа, 1991. – 255 с.
3. Стрейц, В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц ; пер. с англ. ; под ред. Я.З. Цыпкина. – М. : Наука : Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 296 с.
4. Михайлов, В.С. Теория управления / В.С. Михайлов. – Киев : Выща шк. : Головное изд-во, 1988. – 312 с.
5. Коновалов, Г.Ф. Радиоавтоматика : учебник / Г.Ф. Коновалов. – М. : Высшая школа, 1990. – 335 с.
6. Теория автоматического управления : учебник / С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев и др. ; под ред. В.Б. Яковлева. – М. : Высшая школа, 2003. – 567 с.
7. Зайцев, Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования / Г.Ф. Зайцев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев : Выща шк. : Головное изд-во, 1989. – 431 с.
8. Сю, Д. Современная теория автоматического управления и её применение / Д. Сю, А. Мейер ; пер. с англ. ; под ред. д-ра техн. наук проф. Ю.И. Топчеева. – М. : Машиностроение, 1972. – 544 с.
9. Куо, Б. Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо ; пер. с англ. – М. : Машиностроение, 1986. – 448 с.
10. Мирошник, И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы / И.В. Мирошник. – СПб. : Питер, 2005. – 336 с.
11. Айфичер, Э.С. Цифровая обработка сигналов: практический подход / Э.С. Айфичер, Б.У. Джервис ; пер. с англ. – 2-е изд. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
12. Шишмарев, В.Ю. Основы автоматического управления : учеб. пособие / В.Ю. Шишмарев. – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 352 с.
13. Ерофеев, А.А. Теория автоматического управления : учебник / А.А. Ерофеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : Политехника, 2003. – 302 с.
14. Поляков, К.Ю. Основы теории цифровых систем управления : учеб. пособие / К.Ю. Поляков. – СПб. : ГМТУ, 2006. – 161 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>1. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ</b> .....	5
1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ .....	5
1.2. ИМПУЛЬСНАЯ ТЕОРЕМА .....	7
1.3. ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ДИСКРЕТИЗИРУЮЩИХ ИМПУЛЬСОВ .....	12
1.4. ЭФФЕКТ НАЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ .....	12
1.5. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПОЛОСОВЫХ СИГНАЛОВ .....	15
<b>2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ</b> .....	18
2.1. РЕАКЦИЯ НА ТИПОВЫЕ ВХОДНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ .....	18
2.2. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....	20
2.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА .....	24
2.4. ПРИМЕРЫ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ .....	25
2.5. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ .....	27
2.6. ОБРАТНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ .....	28
2.7. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ .....	34
2.8. МОДЕЛЬ ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕМЕНТА .....	34
2.9. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ .....	37
2.10. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ .....	41
<b>3. ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ</b> .....	46
3.1. МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА .....	55
3.2. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ .....	58
3.3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ МОДЕЛЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ .....	61
3.4. АНАЛИЗ СВОЙСТВ ДС В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ ...	62
3.4.1. Достижимость и управляемость .....	62
3.4.2. Наблюдаемость .....	66
<b>4. ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ</b> .....	68
4.1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ .....	68
4.2. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ .....	70

4.3. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ .....	75
4.4. ПРЯМЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА .....	75
4.5. КОСВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА .....	77
4.6. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ .....	77
4.7. КОЭФФИЦИЕНТЫ ОШИБОК .....	78
<b>5. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ .....</b>	<b>82</b>
5.1. ЗАДАЧА ПЕРЕОБОРУДОВАНИЯ .....	83
5.2. МЕТОДЫ ПЕРЕОБОРУДОВАНИЯ .....	84
<b>5.2.1. Дискретизация непрерывного регулятора .....</b>	<b>84</b>
<b>5.2.2. Замена переменной в передаточной функции     непрерывного регулятора .....</b>	<b>85</b>
<b>5.2.3. Отображение нулей и полюсов .....</b>	<b>90</b>
<b>5.2.4. Сравнение различных методов переоборудования .....</b>	<b>91</b>
<b>5.2.5. Переоборудование замкнутой системы .....</b>	<b>93</b>
5.3. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ .....	95
<b>5.3.1. Графоаналитический метод .....</b>	<b>96</b>
<b>5.3.2. Задача размещения полюсов .....</b>	<b>98</b>
<b>5.3.3. Конечное время переходных процессов .....</b>	<b>101</b>
<b>5.3.4. Минимальное время переходных процессов .....</b>	<b>101</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>105</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>106</b>