Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

Н.П. ПУЧКОВ, В.В. СКОМОРОХОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Рекомендовано Учёным советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов технических специальностей

Тамбов
• Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ» •
2011

УДК 51(075.8)
ББК В11я73-4
П909

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г.Р. Державина»
Е.С. Жуковский

Кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
А.Д. Нахман

Пучков, Н.П.

П909 Высшая математика : практикум / Н.П. Пучков, В.В. Скоморохов. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 80 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1024-7.

Представлены краткий информационный материал рекомендательного характера, типовые задачи с иллюстрациями и решениями, что позволит студентам самостоятельно подготовиться к выполнению контрольных работ и тестированию.

Предназначен для студентов инженерно-технических специальностей.

УДК 51(075.8)
ББК В11я73-4

ISBN 978-5-8265-1024-7

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2011

ВВЕДЕНИЕ

Переход с 2011 г. высшего профессионального образования России на уровневую систему предполагает использование компетентностного подхода в процессе обучения студентов, когда системно формируются знание, умение, навыки (ЗУН) обучающихся, а также их личностные качества, позволяющие компетентно использовать ЗУН в производственной деятельности, быть конкурентоспособным специалистом.

Большую роль в процессе формирования профессиональных компетенций играют математические компетенции и, в частности, технологии их формирования у первокурсников. Несмотря на то, что первокурсники в условиях лимитированного времени вынуждены изучать достаточно объёмный новый теоретический материал по математике, должны одновременно быть созданы необходимые условия для решения практических задач, в процессе чего наиболее продуктивно развиваются умения, формируются навыки и также такие личностные качества, как целеустремленность, ответственность, работоспособность, самостоятельность и т.п.

Учебными программами предусмотрен периодический контроль усвоения математических знаний, формирования необходимых умений и навыков в виде тематических контрольных работ. Их проведению должно предшествовать, наряду с практическими занятиями, самостоятельная работа студентов, включающая элементы изучения и закрепления теоретического материала, самопроверки и самоконтроля.

При написании данного пособия мы стремились обозначить конечную цель как выполнения контрольной работы по данному разделу курса высшей математики, а всё остальное – как методику подготовки к её выполнению, включая:

1) необходимый теоретический материал, изложенный как справочный материал;
2) необходимые умения, как инструмент решения математических задач;
3) необходимый объём заданий для самостоятельного выполнения, обеспечивающий, на наш взгляд, формирование соответствующих навыков;
4) образцы выполнения типовых заданий;
5) условия для самоконтроля – ответы к заданиям для самостоятельного решения;
6) тайм-контроль – указание времени, достаточного для решения задачи (чтобы своевременно выполнить контрольную работу).

Наша методика строится таким образом, чтобы ответить на вопрос: как студент, получивший примерный вариант предстоящей проверочной контрольной работы, должен продумать, организовать свою самоподготовку, чтобы успешно справиться с выполнением заданий? В своём представлении технологии самоподготовки мы ориентируемся на студентов с уровнем первичных знаний «ниже среднего»; более подготовленные студенты могут использовать другие, наиболее оптимальные по содержанию промежуточные выкладки.

Тема 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
(типовые задания)

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 1 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 7\\ -1 & -3 & 7\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-6 & -9 & -6\\ 3 & -8 & -3\\ 2 & 2 & 7\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $F = AB - 9D.$

2. Вычислить определитель четвёртого порядка, используя метод его разложения по элементам «опорной» строки (или столбца) и представлении его, таким образом, как алгебраической суммы определителей третьего порядка. Рекомендуется предварительно в «опорной» строке (столбце) путём преобразований, использующих свойства определителей, получить максимальное количество нулей.

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -5 & -1\\ 8 & 7 & -3 & -3\\ -4 & -2 & 7 & -1\\ 6 & 3 & -5 & 2\end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 = 0,\\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1,\\ -5x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1\end{cases}$$

а) методом Гаусса;

б) по формулам Крамера;

в) матричным способом.

Чтобы выполнить первое задание, необходимо знать правила:

1) умножение матрицы на число (в данном случае на (-9));

2) сложение матриц (возможно при их одинаковой размерности);

3) умножение матриц (возможно при условии, что число столбцов матрицы, стоящей первым сомножителем, равно числу строк матрицы, стоящей вторым сомножителем).

С учётом того, что последовательность арифметических действий над матрицами та же, что над числами, последовательно находим:

1) промежуточную матрицу $C_1 = AB$;

2) матрицу $C_2 = (-9)D$;

3) матрицу $F = C_1 + C_2$.

Перемножим матрицы $A_{3\times 2}$ и $B_{2\times 3}$. Результирующая будет C размера 3×3, состоящая из элементов

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

По правилу умножения матриц имеем:

$$c_{11} = \langle \text{1-я строка } A \rangle \langle \text{1-й столбец } B \rangle = \begin{pmatrix} -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= -4 \cdot (-3) + 7 \cdot (-1) = 5;$$

$$c_{12} = \langle \text{1-я строка } A \rangle \langle \text{2-й столбец } B \rangle = \begin{pmatrix} -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= -4 \cdot 9 + 7 \cdot (-3) = -57;$$

$$c_{13} = \langle \text{1-я строка } A \rangle \langle \text{3-й столбец } B \rangle = \begin{pmatrix} -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= -4 \cdot 7 + 7 \cdot 7 = 21;$$

аналогично находим, что

$$c_{21} = 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) = -2; \quad c_{31} = 7 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-1) = -18;$$

$$c_{22} = 1 \cdot 9 + (-1) \cdot (-3) = 12; \quad c_{32} = 7 \cdot 9 + (-3) \cdot (-3) = 72;$$

$$c_{23} = 1 \cdot 7 + (-1) \cdot 7 = 0; \quad c_{33} = 7 \cdot 7 + (-3) \cdot 7 = 28.$$

Таким образом, получаем $C = \begin{pmatrix} 5 & -57 & 21 \\ -2 & 12 & 0 \\ -18 & 72 & 28 \end{pmatrix}.$

Далее, умножим матрицу D на число 9:

$$9D = 9 \begin{pmatrix} -6 & -9 & -6 \\ 3 & -8 & -3 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -54 & -81 & -54 \\ 27 & -72 & -27 \\ 18 & 18 & 63 \end{pmatrix}.$$

В результате имеем

$$AB-9D=\begin{pmatrix}5 & -57 & 21\\ -2 & 12 & 0\\ -18 & 72 & 28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-54 & -81 & -54\\ 27 & -72 & -27\\ 18 & 18 & 63\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5-(-54) & -57-(-81) & 21-(-54)\\ -2-27 & 12-(-72) & 0-(-27)\\ -18-18 & 72-18 & 28-63\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59 & 24 & 75\\ -29 & 84 & 27\\ -36 & 54 & -35\end{pmatrix}.$$

Чтобы выполнить второе задание, необходимо *знать*:

1) свойства определителей, позволяющие осуществлять преобразования, не изменяющие величины определителя;

2) правило разложения определителя по элементам строки (столбца) и сведения, таким образом, процесса вычисления определителя высокого порядка к нахождению алгебраической суммы определителей более низкого порядка; при этом надо знать понятие алгебраического дополнения к данному элементу матрицы;

3) правило вычисления определителя третьего порядка.

Нам дан определитель четвертого порядка. Его вычисление можно свести к нахождению алгебраической суммы произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на соответствующие им алгебраические дополнения (имеются в виду алгебраические дополнения элементов матрицы, которой соответствует данный определитель). Очевидно, что наличие в выбранной строке определителя нулей упрощает процесс его вычисления, так как делает ненужным нахождение соответствующего алгебраического дополнения (его произведение на ноль даёт ноль).

Преобразуем исходный определитель таким образом, чтобы четвертый столбец содержал элементы: $-1, 0, 0, 0$. В качестве «опорного» для преобразования выберем элемент, стоящий в первой строке и четвёртом столбце.

Ход преобразований: умножаем первую строку последовательно на (–3), (–1), (2) и складываем соответственно со второй, третьей и четвёртой строками:

2	1	–5	–1		– первая строка;
–6	–3	15	3		– первая строка умножается на (–3);
				⊕	
8	7	–3	–3		– вторая строка;
2	4	12	0		– «новая» вторая строка;
–2	–1	5	1		– первая строка умножается на (–1);
				⊕	

–4	–2	7	1	– третья строка;
$\boxed{-6 \quad -3 \quad 12 \quad 0}$				– «новая» третья строка;
4	2	–10	–2	– первая строка умножается на (2);
			⊕	
6	3	–5	2	– четвёртая строка;
$\boxed{10 \quad 5 \quad -15 \quad 0}$				– «новая» четвёртая строка.

В результате получим определитель, в котором все элементы четвёртого столбца, кроме первого, равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 \\ 10 & 5 & -15 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по элементам четвёртого столбца, получим[1]

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 \\ 10 & 5 & -15 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 12 \\ -6 & -3 & 12 \\ 10 & 5 & -15 \end{vmatrix} =$$

(вынесем из первой строки общий множитель (2) из второй – (3) из третьей – (5))

$$= 2\cdot3\cdot5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 30\cdot(3+16-12+12-12-4) = 30\cdot3 = 90.$$

При вычислении определителя третьего порядка мы использовали известное правило (Саррюса). В то же время, используя тот же приём «обнуления» некоторых элементов строки (столбца), можно свести вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителя второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 16 \\ 0 & -3 & -15 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 16 \\ -3 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = (-3)\cdot(15-16) = 3.$$

[1]В кружке обозначаем «опорный, ненулевой элемент».

Здесь мы первую строку умножили последовательно на 2, затем на (-2) и сложили соответственно сначала со второй, затем с третьей строкой; после получения двух нулей в первом столбце мы разложили определитель по его элементам; в полученном определителе второго порядка общий множитель (-3) вынесли из первого столбца.

В принципе и в определителе второго порядка можно «обнулять» элементы. Так,

$$\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) = -1.$$

Таким образом, используя метод «обнуления» некоторых элементов строки (столбца), можно в конечном итоге свести вычисление определителя любого порядка к вычислению определителя второго порядка.

Студенту предоставляется право выбора: довести процесс вычисления определителя до вычисления определителя третьего порядка (используя метод «обнуления» элементов) и применить затем правило Саррюса или продолжить процесс обнуления элементов вплоть до определителя второго порядка. Последняя схема имеет практическое применение при решении систем линейных уравнений (метод Гаусса). Рассмотрим её (схему) на примере выполнения третьего задания: решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, \\ -5x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

а) Методом Гаусса.

Составим расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

и проведём необходимые элементарные преобразования строк: складываем первую строку со второй, предварительно умножив её на $\frac{3}{2}$, и с третьей, умножив её на $\frac{5}{2}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & | & 1 \\ 0 & 5/2 & 1/2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \text{(умножим 2-ю и 3-ю строки на 2)} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 7 & 1 & | & 2 \\ 0 & 5 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \text{(умножив 2-ю строку на –5/7 прибавляем к 3-й)} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 7 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2/7 & | & 4/7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 7 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

(мы умножили на 7 последнюю строку и разделили на 2).

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ \qquad 7x_2 + x_3 = 2, \\ \qquad\qquad x_3 = 2. \end{cases}$$

Из неё, «двигаясь снизу вверх», последовательно находим

$$x_3 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = -1.$$

б) По формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \qquad \text{где} \qquad \Delta \neq 0,$$

находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ -5 & 5 \end{matrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \cdot (-5) + 1 \cdot (-3) \cdot 5 -$$

$$-(1 \cdot 5 \cdot (-5) + 2 \cdot (-1) \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-2)) = 1 \neq 0.$$

Последовательно заменяя в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом из правых частей уравнений, находим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

тогда $x_1 = \dfrac{-1}{1} = -1,\quad x_2 = \dfrac{0}{1} = 0,\quad x_3 = \dfrac{2}{1} = 2.$

в) Для нахождения решения системы матричным способом запишем систему уравнений в матричной форме $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$, где A^{-1} матрица, обратная матрице A, существует, если $|A| \neq 0$ и имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдём A^{-1}. Имеем $\Delta = \det A = 1 \neq 0$. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot(-2) - (-1)\cdot 5 = -5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -((-3)\cdot(-2) - (-1)\cdot(-5)) = -1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 5 - 5\cdot(-5) = 10;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3;\qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 1;\qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -5;\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 10 & -5 & 7 \end{pmatrix},$$

откуда решение системы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 10 & -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = -1,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 2.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

Вариант 1

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 9 \\ -3 & -2 & 9 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $F = AB + 7C$.

2. Вычислить определитель четвёртого порядка, используя метод его разложения по элементам «опорной» строки (или столбца) и представлении его, таким образом, как алгебраической суммы определителей третьего порядка. Рекомендуется предварительно в «опорной» строке (столбце) путём преобразований, использующих свойства определителей, получить максимальное количество нулей.

$$\begin{vmatrix} -1 & -8 & 6 & -6 \\ 5 & 3 & -5 & 2 \\ 5 & -5 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & -8 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

а) методом Гаусса;
б) по формулам Крамера;
в) матричным способом.

Вариант 2

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -6\\ 6 & -5\\ -4 & -9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 6\\ 0 & -7 & -4\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -5 & -7\\ 7 & -7 & -2\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $F = AB + 2C$.

2. Вычислить определитель четвёртого порядка, используя метод его разложения по элементам «опорной» строки (или столбца) и представлении его, таким образом, как алгебраической суммы определителей третьего порядка. Рекомендуется предварительно в «опорной» строке (столбце) путем преобразований, использующих свойства определителей, получить максимальное количество нулей.

$$\begin{vmatrix}7 & 2 & -1 & 5\\ -9 & -1 & 7 & -6\\ -5 & -4 & -7 & -4\\ -5 & -3 & -6 & -4\end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}5x_1-4x_2-5x_3=6,\\ x_1+2x_2+2x_3=-2,\\ x_1-3x_2-3x_3=3\end{cases}$$

а) методом Гаусса;
б) по формулам Крамера;
в) матричным способом.

Вариант 3

1. Даны матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-8 & 7 & 9\\ 8 & -2 & -8\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6 & 2 & -8\\ 4 & -7 & 5\\ -8 & 8 & -8\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $F = AB - 3C$.

2. Вычислить определитель четвёртого порядка, используя метод его разложения по элементам «опорной» строки (или столбца) и представлении его, таким образом, как алгебраической суммы определителей третьего порядка. Рекомендуется предварительно в «опорной» строке (столбце)

путём преобразований, использующих свойства определителей, получить максимальное количество нулей.

$$\begin{vmatrix} -3 & -8 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & -6 & -3 \\ -8 & -5 & -4 & -8 \\ 7 & 5 & -7 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

а) методом Гаусса;
б) по формулам Крамера;
в) матричным способом.

Тема 2. ВЕКТОРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

При изучении этой темы спектр типовых заданий более широкий (по сравнению с темой «Линейная алгебра»), поэтому варианты контрольной работы имеют различные наборы задач, и мы их приводим в конце изложения темы как задания для тестового контроля. Чтобы успешно подготовиться к такой контрольной работе, необходимо самостоятельно прорешать каждый тип из перечисленных далее задач, сгруппированных по шести разделам.

Раздел 1. ВЕКТОРЫ

Условие освоения этого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

1) понятие вектора, способ его задания, правила осуществления линейных операций над векторами;

2) понятие базиса векторов, способа представления любого вектора в базисе;

3) понятие скалярного, векторного и смешанного произведения векторов, а также их свойства;

уметь:

1) определять взаимное расположение векторов (находить угол между векторами, находить неизвестный вектор, знать условия, связывающие его взаимным расположением с другими векторами, находить разложение вектора по базису);

2) находить площадь геометрических фигур, построенных на векторах;

3) находить объёмы геометрических фигур, построенных на векторах.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Если точки A, B, C заданы своими координатами (x, y, z): $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, то векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ заданы координатами:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ \ y_2 - y_1,\ \ z_2 - z_1);$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1,\ \ y_3 - y_1,\ \ z_3 - z_1);$$

$$\overrightarrow{BC} = (x_3 - x_2,\ \ y_3 - y_2,\ \ z_3 - z_2).$$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ заданы своими координатами в виде

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \text{то}$$

• их сумма $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ \ a_y + b_y,\ \ a_z + b_z)$;

• произведение вектора $\vec{a}$ на число λ, $\vec{b}$ на число κ

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z), \quad \kappa\vec{b} = (\kappa b_x, \kappa b_y, \kappa b_z);$$

• скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

• длина вектора $\vec{a}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

• длина вектора $\vec{b}$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{b}, \vec{b})}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2};$$

• угол φ между векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$

$$\varphi = \arccos\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \quad \vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a}, \vec{b}) = 0;$$

• векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}; \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0};$$

• площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|.$$

Если, кроме векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ дан вектор $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$, то

• $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, если $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \neq 0$, а вектор $\vec{d} = d_1\vec{a} + d_2\vec{b} + d_3\vec{c}$ – разложение вектора $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ в этом базисе.

• смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (результат скалярного произведения вектора $\vec{c}$ на векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$;

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$;

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка $\Leftrightarrow$ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$;

• объём треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right|.$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ (С РЕШЕНИЯМИ) ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

1. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $A(3, 6, 4)$, $B(2, 7, 3)$, $C(4, 6, 5)$.

Решение. Так как $\varphi = \arccos\dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,\ 1,\ -1), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1).$$

Находим:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -1\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -2;$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3};$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2}=\sqrt{2}.$$

Следовательно, $\varphi=\arccos\left(\dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)=\arccos\left(\dfrac{-\sqrt{6}}{3}\right)\approx 2{,}53.$

2. Найти вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(1,1,1)$ и $\vec{b}=(-3,\,6,\,6)$ и удовлетворяет условию $(\vec{c},\,\vec{d})=-9$, если вектор $\vec{d}=(0,1,0)$.

Решение. Пусть $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$, тогда из условия задачи можно записать:

$$(\vec{c},\,\vec{a})=0,\quad x+y+z=0;$$

$$(\vec{c},\,\vec{b})=0,\quad -3x+6y+6z=0;$$

$$(\vec{c},\,\vec{d})=-9,\quad y=-9.$$

Объединяем полученные уравнения в систему с неизвестными x, y, z. Её решение: $x=0$, $y=-9$, $z=9$. Таким образом $\vec{c}=(0,\,-9,\,9)$.

3. Найти площадь ΔABC, если известны координаты его вершин: $A(3,\,6,\,4)$, $B(2,\,7,\,3)$, $C(4,\,6,\,5)$.

Решение. Известно, что $S_\Delta=\dfrac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]|$. Находим

$$\overrightarrow{AB}=(2-3,\ 7-6,\ 3-4)=(-1,\ 1,\ -1);$$

$$\overrightarrow{AC}=(4-3,\ 6-6,\ 5-4)=(1,\ 0,\ 1);$$

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-\vec{k}=(1,0,\ -1).$$

Окончательно имеем

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

4. Показать, что векторы $\vec{a} = (-1, -1, 1)$, $\vec{b} = (0, -1, -1)$, $\vec{c} = (-1, 1, 1)$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{d} = (0, 5, -1)$ по этому базису.

Решение. Если определитель составленный из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не равен 0, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис. Имеем

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким образом, тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – базис.

Обозначим координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ через x, y, z. Тогда

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = (-x, -x, x) + (0, -y, -y) + (-z, z, z) =$$

$$= (-x + 0 - z, \quad -x - y + z, \quad x - y + z),$$

с другой стороны $\vec{d} = (0, 5, -1)$, поэтому

$$(0, 5, -1) = (-x - z, \ -x - y + z, \ x - y + z),$$

а это возможно только в случае равенства соответствующих координат:

$$\begin{cases} -x - z = 0, \\ -x - y + z = 5, \\ x - y + z = -1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $x = -3$, $y = 1$, $z = 3$. Итак, $\vec{d} = (-3, 1, 3)$.

5. Выяснить, какой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правой или левой), если $\vec{a} = (0, -1, 2)$, $\vec{b} = (-2, -1, 0)$, $\vec{c} = (-2, -1, -2)$.

Решение. Вычисляем

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

т.е. тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

6. Найти объём пирамиды $ABCD$, если известны координаты ее вершин: $A(3,\ -7,\ 1)$, $B(2,\ -8,\ 1)$, $C(2,\ -8,\ 2)$, $D(4,\ -7,\ 0)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,\ -1,\ 1);$$

$$\overrightarrow{AD} = (1,\ 0,\ -1);$$

их смешанное произведение:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

Так как объём пирамиды равен $\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$, то $V = \frac{1}{6}$.

Раздел 2. ПРЯМАЯ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

Усвоение этого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

1) различные способы задания уравнения прямой на плоскости: общее, каноническое, параметрические;

2) понятия направляющего и нормального векторов прямой;

уметь:

1) осуществлять переход от одного уравнения прямой к другому;

2) определять (по уравнению) взаимное расположение прямых на плоскости (угол между прямыми; условия параллельности, перпендикулярности);

3) решать треугольники: находить неизвестные элементы треугольника по известным данным, включая и расстояния.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Направляющим для данной прямой ℓ называется вектор $\vec{a} = (a_x,\ a_y)$, параллельный этой прямой. Очевидно, что таких векторов бесконечно много; они характеризуются тем, что их соответствующие координаты пропорциональны: если $\vec{b} = (b_x,\ b_y)$ также направляющий для прямой ℓ, то $a_x = tb_x$, $a_y = tb_y$, $t - \text{const}$. Направляющий вектор может быть задан и парой точек, принадлежащих самой прямой.

Нормальным для данной прямой ℓ называется вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный этой прямой: $\vec{n} \perp \ell$. Очевидно, что таких векторов бесконечно много и они обладают таким же свойством, которое выше указано для направляющих векторов.

Если $M_0(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая прямой ℓ, $\vec{a} = (a_x, a_y)$ – её направляющий вектор, то

$\dfrac{x - x_0}{a_x} = \dfrac{y - y_0}{a_y}$ – каноническое уравнение прямой ℓ,

$\begin{cases} x = a_x t + x_0, \\ y = a_y t + y_0, \end{cases}$ где $-\infty < t < \infty$ – параметрические уравнения прямой ℓ.

Если $\vec{N} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой ℓ, то $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение прямой ℓ на координатной плоскости; постоянная C определяется как $C = -Ax_0 - By_0$, где (x_0, y_0) – координаты точки, принадлежащие прямой ℓ. Общее уравнение прямой равносильно уравнению $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Очевидно, что вектор $\vec{n} = (-B, A)$ будет направляющим для данной прямой, так как $\vec{n} \perp \vec{N}$ (их скалярное произведение $(\vec{n}, \vec{N}) = -BA + AB = 0$).

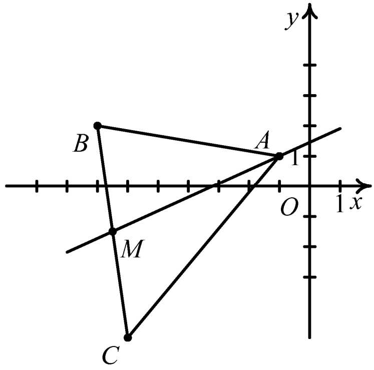
Расстояние от точки (на плоскости) до прямой определяется как длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую; в частности, если $M_0(x_0, y_0)$, а прямая $Ax + By + C = 0$, то расстояние

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ (С РЕШЕНИЯМИ) ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

Во всех рассматриваемых ниже задачах предполагается делать чертёж. Это, на наш взгляд, повышает уровень наглядности задачи, формирует умение геометрических построений, даёт возможность осуществлять «геометрическую проверку» решения.

7. В треугольнике ABC найти уравнение медианы, проведённой из вершины A, если $A(-1, 1)$, $B(-7, 2)$, $C(-6, -5)$. Сделать чертёж.



Решение. По условию $M(x_M, y_M)$ – середина отрезка BC, поэтому

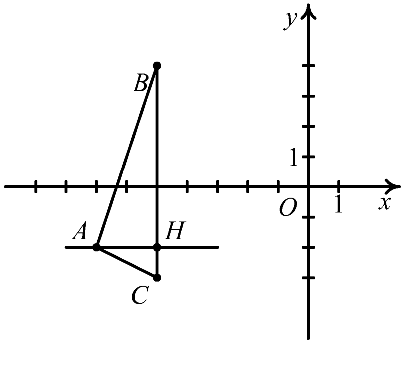
$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-7+(-6)}{2} = -\frac{13}{2};$$

$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2+(-5)}{2} = -\frac{3}{2},$$

а $M\left(-\frac{13}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. Тогда $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{13}{2}+1, -\frac{3}{2}-1\right) = \left(-\frac{11}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ – направляющий вектор медианы AM, а её уравнение

$$\frac{x-(-1)}{-\frac{11}{2}} = \frac{y-1}{-\frac{5}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{x+1}{11} = \frac{y-1}{5}.$$

8. В треугольнике ABC найти уравнение высоты, проведённой из вершины A, если $A(-7, -2)$, $B(-5, 4)$, $C(-5, -3)$. Сделать чертёж.



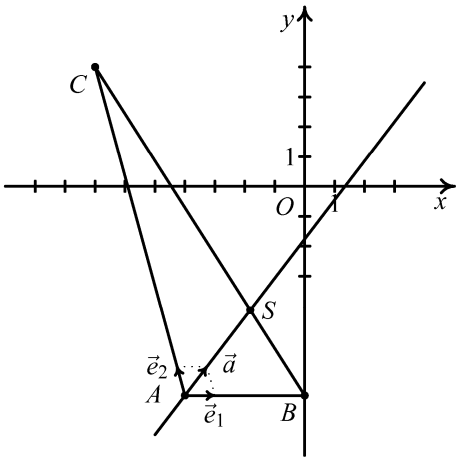
Решение. AH – высота ΔABC: $AH \perp BC$, вектор $\overrightarrow{BC} = (0, -7)$ – нормальный для высоты AH. Учитывая, что AH содержит точку $A(-7, 2)$, уравнение AH

$$0(x-(-7))-7(y-(-2))=0,$$

$$-7(y-(-2))=0,$$

$$y+2=0.$$

9. В треугольнике ABC найти уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A, если $A(-4, -7)$, $B(0, -7)$, $C(-7, 4)$. Сделать чертёж.



Решение. Биссектриса AS проходит через точку $A(-4, -7)$ и делит $\angle CAB$ пополам. Очевидно, что вектор $\vec{a}$, направляющий для биссектрисы AS: $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, где $\vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$, $\vec{e}_2 = \dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ – единичные вектора. Имеем

$$\overrightarrow{AB} = (4, 0), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2+0^2} = 4;$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3, 11), \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2+(11)^2} = \sqrt{130};$$

$$\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \frac{1}{4}(4, 0) + \frac{1}{\sqrt{130}}(-3, 11) =$$

$$= (1, 0) + \left(\frac{-3}{\sqrt{130}}, \frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{130}}, \frac{11}{\sqrt{130}}\right).$$

Тогда уравнение прямой, проходящей через точку A и имеющей направляющий вектор $\vec{a}$:

$$\frac{x-(-4)}{1-\dfrac{3}{\sqrt{130}}}=\frac{y-(-7)}{\dfrac{11}{\sqrt{130}}},$$

$$\frac{x+4}{\sqrt{130}-3}=\frac{y+7}{11}.$$

10. Точка $A(3, 3)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $-4x-y+5=0$. Вычислить площадь этого квадрата.

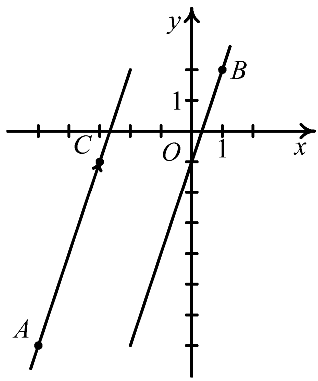
Решение. Точка $A(3, 3)$ не принадлежит данной прямой, так как $-4(3)-(3)+5=-10\neq 0$. Расстояние от точки A до данной прямой

$$\rho=\frac{|-4\cdot 3-1\cdot 3+5|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{17}}$$

является длиной стороны искомого квадрата, а его площадь

$$S_{\square}=\rho^2=\left(\frac{10}{\sqrt{17}}\right)^2=\frac{100}{17}=5\frac{15}{17}.$$

11. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно прямой, проходящей через точки A и C, если $A(-5, -7)$, $B(1, 2)$, $C(-3, -1)$. Сделать чертёж.



Решение. Искомая прямая проходит через точку B и имеет направляющий вектор

$$\overrightarrow{AC} = (2,\ 6)$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{6}, \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3},$$

$$3(x-1) = 1(y-2), \quad 3x-3 = y-2,$$

$$3x - y - 1 = 0.$$

Раздел 3. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Усвоение материала этого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

1) различные способы задания (уравнения) плоскости в пространстве (общее, с заданным нормальным вектором и «опорной» точкой, проходящей через три заданные точки);

2) определение нормального вектора плоскости, угла между плоскостями;

уметь:

1) осуществлять переход от одного уравнения плоскости к другому (так как при решении различных задач более удобным бывает использование уравнения определённого вида);

2) определять взаимное расположение плоскостей в пространстве (угол между плоскостями, условия параллельности, перпендикулярности, находить линию пересечения плоскостей);

3) находить уравнение плоскостей, используя условия их взаимного расположения с заданными (своими уравнениями) плоскостями.

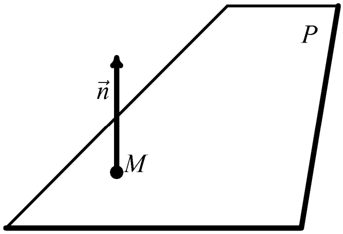
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Нормальным к данной плоскости P называется вектор $\vec{N} = (A,\ B,\ C)$, если $\vec{N} \perp P$.

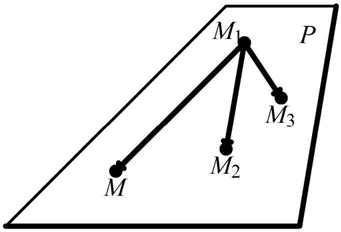
Если $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ – точка, принадлежащая плоскости P, а $\vec{N} = (A,\ B,\ C)$ – её нормальный вектор, то

$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ – уравнение этой плоскости;

$Ax + By + Cz + D = 0$ – называют общим уравнением плоскости в пространстве; очевидно, что $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.



Если $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, $M_3(x_3,\, y_3,\, z_3)$ принадлежат плоскости P



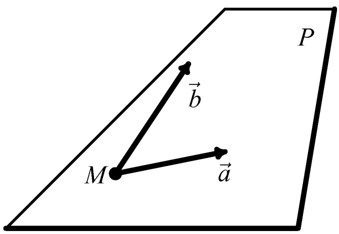
Уравнение этой плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

то оно выражает условие компланарности трёх векторов.

Последнее уравнение имеет место и в том случае, когда $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$ – точка плоскости P, а векторы $\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x,\, b_y,\, b_z)$ параллельны плоскости P: $\vec{a} \parallel P$, $\vec{b} \parallel P$, но $\vec{a}$ не параллелен $\vec{b}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$



Если плоскости P_1 и P_2 заданы общими уравнениями $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ – соответственно, их нормальные вектора.

Двугранный угол, образованный пересечением плоскостей P_1 и P_2, равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$:

$$\varphi = \arccos\frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|};\quad P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2;\quad P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2.$$

Если $\varphi \neq 0$, то плоскости пересекаются по прямой, которая определяется уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

и называется общими уравнениями прямой в пространстве.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ ОБОЗНАЧЕННЫХ ВЫШЕ УМЕНИЙ

12. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(5, -3, 6)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = (-3, -2, 0)$.

Решение.

$$-3(x-5) - 2(y-(-3)) + 0(z-6) = 0,$$

$$-3x + 15 - 2y - 6 = 0,$$

$$-3x - 2y + 9 = 0.$$

13. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(3, -2, 4)$ параллельно плоскости $4x - 7y + 6z + 6 = 0$.

Решение. Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором данной плоскости $\vec{N} = (4, -7, 6)$; следовательно, уравнение искомой плоскости примет вид

$$4(x-3) - 7(y+2) + 6(z-4) = 0,$$

или

$$4x - 7y + 6z - 50 = 0.$$

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-7, 0, 4)$ перпендикулярно плоскостям $3x+5y-6z+7=0$ и $-4x-3y-5z+3=0$.

Решение. Очевидно, что нормальные вектора данных плоскостей $\vec{N}_1=(3, 5, -6)$, $\vec{N}_2=(-4, -3, -5)$ параллельны искомой плоскости, поэтому справедливо условие

$$\begin{vmatrix} x-(-7) & y-0 & z-4 \\ 3 & 5 & -6 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

являющееся, по сути, уравнением искомой плоскости.

Раскрывая определитель по первой строке, имеем

$$\begin{vmatrix} x+7 & y & z-4 \\ 3 & 5 & -6 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}(x+7)-\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}y+\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}(z-4)=$$

$$=-43(x+7)+39y+11(z-4)=-43x+39y+11z-345,$$

$$-43x+39y+11z-345=0.$$

Уравнение искомой плоскости

$$43x-39y-11z+345=0.$$

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-5, -4, -2)$ и $B(-4, -2, -4)$ перпендикулярно плоскости $x+5y-5z-4=0$.

Решение. Векторы $\overrightarrow{AB}=(1, 2, -2)$ и $\vec{N}=(1, 5, -5)$ – нормальный для заданной плоскости параллельны для искомой плоскости, проходящей через точку $A(-5, -4, -2)$, поэтому

$$\begin{vmatrix} x-(-5) & y-(-4) & z-(-2) \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$y+z+6=0.$$

16. Определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей $-5x-2y+3z-2=0$ и $-5x+5y+6z-5=0$.

Решение. $\vec{N}_1 = (-5,\ -2,\ 3)$, $\vec{N}_2 = (-5, 5, 6)$, $\varphi = \arccos\dfrac{(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}$.

$$(\vec{N}_1,\ \vec{N}_2) = -5(-5)+(-2)\cdot 5+3\cdot 6 = 33;$$

$$|\vec{N}_1| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2+(3)^2} = \sqrt{38},\quad |\vec{N}_2| = \sqrt{(-5)^2+(5)^2+(6)^2} = \sqrt{86}.$$

$$\cos\varphi = \frac{33}{\sqrt{38}\sqrt{86}};$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{33}{\sqrt{38}\sqrt{86}}\right) \approx 0{,}95541.$$

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(7,\ 3,-7)$, $B(7,\ 4,\ -7)$, $C(7,\ 1,\ -9)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 0);$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, -2, 2);$$

$$\begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-(-7) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$2x-14 = 0,\quad x-7 = 0.$$

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2,\ -3,\ -3)$ и $B(-2,\ -2,\ -2)$ параллельно вектору $\vec{d} = (1, 0, 0)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (0, 1, 1);$$

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-(-3) & z-(-3) \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+3 & z+3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(x+2) - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(y+3) + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(z+3) = 0,$$

$$y - z = 0.$$

Раздел 4. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Усвоение материала этого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

Различные способы задания (уравнения) прямой в пространстве (канонические, общие, параметрические);

уметь:

1) осуществлять переход от одного уравнения прямой к другому;
2) определять взаимное расположение прямых в пространстве;
3) находить уравнения прямых, используя условия их взаимного расположения с заданными прямыми.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

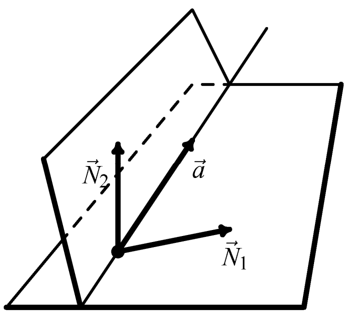
• Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, принадлежащая прямой ℓ, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ – её направляющий вектор, то

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$ – канонические уравнения прямой ℓ;

$$\begin{cases} x = a_x t + x_0, \\ y = a_y t + y_0, \quad -\infty < t < \infty \\ z = a_z t + z_0, \end{cases}$$ – параметрические уравнения;

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$ – общие уравнения прямой (как линия пересечения плоскостей $P_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $P_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$).

• Вектор $\vec{a} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2]$ – направляющий вектор прямой ℓ, где $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$



• Взаимное расположение прямых определяется взаимным расположением их направляющих векторов.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

19. Найти направляющий вектор прямой

$$\begin{cases} -7x-4y+2z-2=0, \\ 4x-7z-4=0. \end{cases}$$

Решение.

$$\vec{N}_1=(-7,\ -4,\ 2);\quad \vec{N}_2=(4,\ 0,\ -7);$$

$$\vec{l}=[\vec{N}_1,\vec{N}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -7 \end{vmatrix}=28\vec{i}-41\vec{j}+16\vec{k}=(28,\ -41,\ 16).$$

20. Найти угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=7t+4, \\ y=3t+6, \\ z=5, \end{cases}\quad \begin{cases} x=-4t-6, \\ y=t-7, \\ z=-2t+3. \end{cases}$$

Решение. Направляющие векторы этих прямых:

$$\vec{l}_1=(7,3,0);\quad \vec{l}_2=(-4,\ 1,-2);\quad \varphi=\arccos\frac{(\vec{l}_1,\vec{l}_2)}{|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|};$$

$$(\vec{l}_1,\vec{l}_2)=7(-4)+(3)\cdot 1+0(-2)=-25,$$

$$|\vec{l}_1|=\sqrt{(7)^2+(3)^2+(0)^2}=\sqrt{58},\quad |\vec{l}_2|=\sqrt{(-4)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{21};$$

$$\cos\varphi=\frac{-25}{\sqrt{58}\sqrt{21}},$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{-25}{\sqrt{58}\sqrt{21}}\right)\approx 2{,}8102.$$

21. Составить общие уравнения прямой, проходящей через точки $A(3,1,-6)$ и $B(5,-3,-4)$. Результатом пересечения каких плоскостей является прямая, проходящая через точки A и B и направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (2;\,-4;\,2)\,,$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-(-6)}{2},$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+6}{1},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-2}, \\ \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+6}{1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} -2(x-3) = y-1, \\ y-1 = -2(z+6), \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x-y+7=0, \\ y+2z+11=0. \end{cases}$$

22. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $C(-3,\,-4,\,6)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} 2x+5y+3z+6=0, \\ -7x-5y-6z+6=0. \end{cases}$$

Решение.

$$\vec{N}_1 = (2,\,5,\,3), \quad \vec{N}_2 = (-7,\,-5,\,-6),$$

$$\vec{l} = [\vec{N}_1,\,\vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 3 \\ -7 & -5 & -6 \end{vmatrix} = (-15,\,-9,\,25);$$

$$\frac{x-(-3)}{-15} = \frac{y-(-4)}{-9} = \frac{z-(6)}{25}\,,$$

$$\frac{x+3}{-15} = \frac{y+4}{-9} = \frac{z-6}{25}\,.$$

23. Доказать, что две прямые

$$\begin{cases} x-2y-3z+1=0, \\ -2x+y+7z-2=0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x=-t+2, \\ y=-t+1, \\ z=4t+1 \end{cases}$$

перпендикулярны.

Решение. Данные прямые перпендикулярны, если перпендикулярны их направляющие вектора. Направляющий вектор первой прямой определим как результат векторного произведения нормальных векторов для плоскостей, образующих в пересечении данную прямую. Имеем

$$\vec{N}_1 = (1, -2, -3), \quad \vec{N}_2 = (-2, 1, 7);$$

направляющий вектор первой прямой

$$\vec{n}_1 = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (-11, -1, -3).$$

Направляющий вектор второй прямой

$$\vec{n}_2 = (-1, -1, 4).$$

Находим скалярное произведение этих векторов:

$$(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = -11(-1) + (-1)(-1) + (-3)(4) = 0,$$

так как $(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = 0$, то $\vec{l}_1 \perp \vec{l}_2$.

24. Доказать, что две прямые

$$\begin{cases} -x - y - z - 7 = 0, \\ 3x + y + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x = -2, \\ y = t - 3, \\ z = -t + 1 \end{cases}$$

параллельны.

Решение. Данные прямые перпендикулярны, если перпендикулярны их направляющие вектора. Направляющий вектор первой прямой определим как результат векторного произведения нормальных векторов для плоскостей, образующих в пересечении данную прямую. Имеем

$$\vec{N}_1 = (-1, -1, -1), \quad \vec{N}_2 = (3, 1, 1);$$

направляющий вектор первой прямой

$$\vec{n}_1 = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 2).$$

Направляющий вектор второй прямой

$$\vec{n}_2 = (0, 1, -1).$$

Их связь можно представить как

$$\vec{n}_1 = -2\vec{n}_2,$$

т.е. $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$.

Раздел 5. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Усвоение материала этого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

определение угла между прямой и плоскостью, условие взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве;

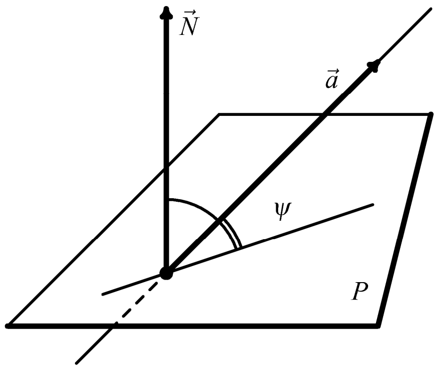
уметь:

1) находить угол между прямой и плоскостью;

2) находить уравнения прямой (плоскости), используя условия их взаимного расположения с заданными плоскостями (прямыми).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Углом прямой ℓ с плоскостью P называется наименьший угол, образованный этой прямой с её проекцией на плоскость P.



Если

$$\ell: \frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}, \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

$$P: Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{N} = (A, B, C),$$

то

$$\psi = \arcsin\frac{|(\vec{N}, \vec{a})|}{|\vec{N}|\cdot|\vec{a}|}.$$

$$\ell \parallel P \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{N}; \quad \ell \perp P \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{N}.$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

25. Определить угол между плоскостью $P: \ 2x + y + z + 5 = 0$ и прямой ℓ:

$$\begin{cases} x = -2t - 2, \\ y = t + 1, \\ z = 2t + 7. \end{cases}$$

Решение. Пусть это угол ψ, тогда $\psi = \arcsin\dfrac{|(\vec{N}, \vec{n})|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{n}|}$, где $\vec{N}$ – нормальный вектор плоскости P, а $\vec{n}$ – направляющий вектор прямой ℓ.

$$\vec{N} = (2, \ 1, \ 1), \quad \vec{n} = (-2, \ 1, \ 2), \quad (\vec{N}, \vec{n}) = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = -1,$$

$$|\vec{N}| = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\psi = \arcsin\frac{|(\vec{N}, \vec{n})|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{n}|} = \arcsin\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) \approx 0{,}13650.$$

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 0, 1)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = -4t + 4, \\ z = 7t - 5. \end{cases}$$

Решение.

$$\vec{n} = (2, -4, 7),$$

$$2(x-1) - 4y + 7(z-1) = 0,$$

$$2x - 2 - 4y + 7z - 7 = 0,$$

$$2x - 4y + 7z - 9 = 0.$$

27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(4, -7, -6)$ перпендикулярно к плоскости $-3x - y + 2z - 5 = 0$.

Решение.

$$\begin{cases} x = -3t + 4, \\ y = -t - 7, \\ z = 2t - 6. \end{cases}$$

28. Найти точку B^*, симметричную точке B относительно плоскости B.

Решение.

$$\begin{cases} x = 3t - 4, \\ y = -3t - 3, \\ z = 7t - 1. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости

$$3(3t-4) - 3(-3t-3) + 7(7t-1) + 3 = 0,$$

$$9t - 12 + 9t + 9 + 49t - 7 + 3 = 0, \quad 67t = -7,$$

найдём $t = -\dfrac{7}{67}$, откуда

$$x_P = 3\left(-\frac{7}{67}\right) - 4 = -289/67;$$

$$y_P = -3\left(-\frac{7}{67}\right) - 3 = -180/67;$$

$$z_P = 7\left(-\frac{7}{67}\right) - 1 = -116/67.$$

Координаты симметричной точки найдутся из формул

$$x_P = \frac{x_B + x_{B^*}}{2}; \quad y_P = \frac{y_B + y_{B^*}}{2}; \quad z_P = \frac{z_B + z_{B^*}}{2}, \text{ т.е.}$$

$$x_{B^*} = 2x_P - x_B; \quad y_{B^*} = 2y_P - y_B; \quad z_{B^*} = 2z_P - z_B.$$

Таким образом,

$$x_{B^*} = -310/67; \quad y_{B^*} = -159/67; \quad z_{B^*} = -165/67.$$

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5, 1, -4)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} 4x - 7y - 3z + 4 = 0, \\ -4x - 7y + 6z + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z-(-4) \\ 4 & -7 & -3 \\ -4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-63x - 12y - 56z + 103 = 0.$$

Раздел 6. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Усвоение материала этого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

1) общее уравнение кривых второго порядка на плоскости и канонические уравнения трех линий второго порядка на плоскости: эллипса, гиперболы и параболы;

2) основные параметры, характеризующие эти линии, методы их определения на основе известного канонического уравнения;

3) геометрические свойства этих линий, включая их изображение на плоскости;

уметь:

преобразовывать общее уравнение линии второго порядка (на плоскости) в каноническое, используя правила выделения полного квадрата и переноса начала координат

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

1. Приведение общего уравнения кривой II-го порядка к каноническому виду.

• Общее уравнение кривой второго порядка на плоскости (xOy) имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ – некоторые числа, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

• Общее уравнение можно упростить, если выбрать другую систему координат $(x'O'y')$ путем операций поворота координатных осей на определенный угол (при этом коэффициент B становится равным нулю) и параллельного переноса координатных осей (начала координат), в результате чего исчезают члены уравнения, содержащие x и y в первой степени.

• Алгебраически перенос начала координат сопряжен с операцией выделения полного квадрата в квадратном трехчлене $x^2 + px + q$. Ставится задача найти такие d и f, чтобы

$$x^2 + \underline{p}x + \underline{\underline{q}} = (x+d)^2 + f \equiv x^2 + \underline{2d}x + \underline{\underline{d^2 + f}}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, находим, что

$$p = 2d, \quad \text{тогда} \quad d = p/2,$$

$$q = d^2 + f, \quad \text{тогда} \quad f = q - d^2 = q - p^2/4.$$

Таким образом, $x^2 + px + q = (x + p/2)^2 + q - p^2/4$.

• Квадратный трёхчлен

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Если обозначить $x' = x + \dfrac{b}{2a}$ (что равносильно переносу начала координат на величину $\dfrac{b}{2a}$) и $c' = c - \dfrac{b^2}{4a}$, то $ax^2 + bx + c = a(x')^2 + c'$ – более простое выражение.

• Если в общем уравнении $B = 0$, $AC \neq 0$, то его левую часть можно преобразовать следующим образом:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey + F =$$

$$= A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F =$$

$$= A\left[\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}\right] + C\left[\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{E^2}{4C^2}\right] + F =$$

$$= A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}.$$

Если принять $x' = x + \dfrac{D}{2A}$, $y' = y + \dfrac{E}{2C}$ (т.е. перенести начало координат в точку $\left(-\dfrac{D}{2A}, -\dfrac{E}{2C}\right)$ и обозначить $F' = -F + \dfrac{D^2}{4A} + \dfrac{E^2}{4C}$), то исходное уравнение запишется в виде

$$A(x')^2 + C(y')^2 = F'.$$

• Если A и C имеют одинаковые знаки $AC > 0$, то этот же знак имеет и F'. Обозначим $\frac{F'}{A} = a^2 > 0$, $\frac{F'}{C} = b^2 > 0$, a и b некоторые числа, тогда уравнение запишется в виде $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение эллипса – одного из трех видов кривой второго порядка.

• Если A и C имеют различные знаки, например $A > 0$, $C < 0$, то обозначая $\frac{F'}{A} = a^2 > 0$, $\frac{F'}{C} = -b^2 < 0$, получим $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение гиперболы

• Если в общем уравнении $A = 0$ и $B = 0$, то

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{E^2}{4C} + Dx + F =$$

$$= C\left[\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{D}{C}\left(\frac{E^2}{4CD} - \frac{F}{D} - x\right)\right].$$

Обозначая $y + \frac{E}{2C} = y'$, $\frac{D}{C}\left(\frac{E^2}{4CD} - \frac{F}{D} - x\right) = 2px'$, получим $(y')^2 = 2px'$ – уравнение параболы.

Аналогично, если $B = 0$ и $C = 0$, то можно получить $(x')^2 = 2py'$ также уравнение параболы.

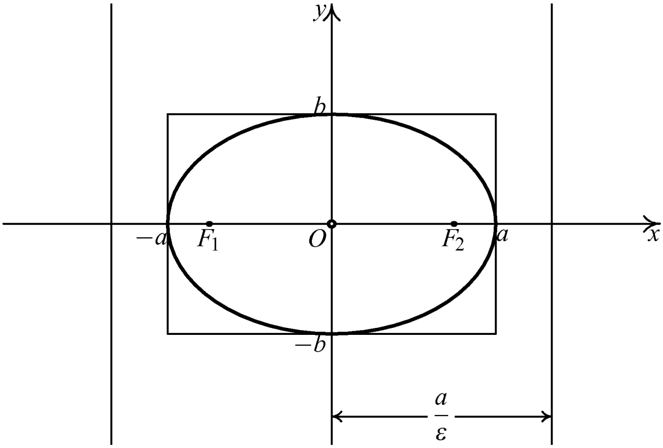
2. Исследование свойств линий второго порядка по их каноническому уравнению.

• **Эллипс** имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a \geq b > 0$. При $a = b$ эллипс есть окружность. Число a называется *большой полуосью*, число b – *малой полуосью*. Точка $O(0, 0)$, называется *центром*, точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ – *вершинами*. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются *фокусами*. Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* (очевидно, что $0 \leqslant \varepsilon < 1$), при $\varepsilon \neq 0$ прямые

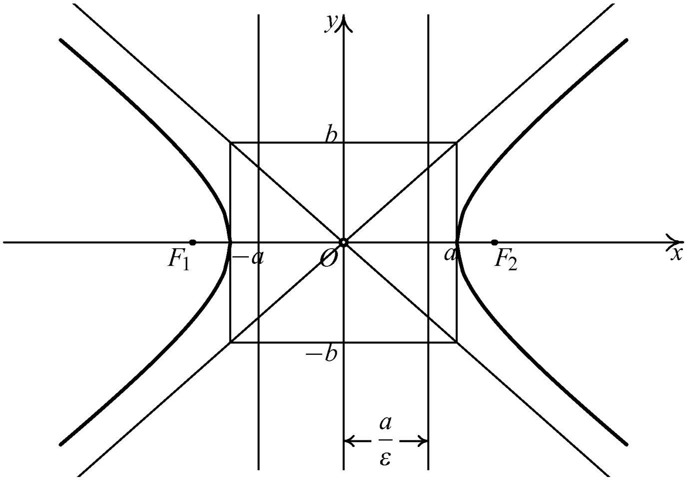
$x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами*. Фокус $(c, 0)$ и директриса $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ называются правыми, а фокус $(-c, 0)$ и директриса $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ – левыми. Фокус и директриса называются одноименными, если они оба – правые или оба – левые.



• **Гипербола** имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

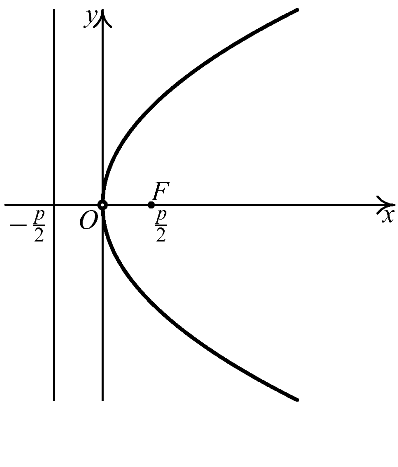
где $a > 0$, $b > 0$. Число a, называется *действительной полуосью*, число b – *мнимой полуосью*. Точка $O(0, 0)$ называется *центром*, точки $(\pm a, 0)$ и $(0, \pm b)$ – *вершинами*. Точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются *фокусами*. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* (очевидно, что $\varepsilon > 1$). Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами*. Фокус $(c, 0)$ и директриса $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ называются правыми, а фокус $(-c, 0)$ и директриса $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ – левыми. Фокус и директриса называются одноименными, если они оба – правые или оба – левые. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы.



• **Парабола** имеет каноническое уравнение

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Число p называют *параметром параболы*. *Вершиной* параболы является начало координат, *фокусом* – точка $F(p/2,\ 0)$. *Директрисой* параболы является прямая $x = -p/2$. *Эксцентриситет* параболы равен 1.



ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

30. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$4x^2+9y^2+32x-54y+109=0.$$

Путём преобразования (выделение полного квадрата, переноса начала координат) привести это уравнение к каноническому виду; определить тип, основные числовые характеристики; сделать схематический чертёж.

Решение. Перепишем уравнение так:

$$4(x^2+8x)+9(y^2-6y)=-109.$$

Дополняя выражения в скобках до полных квадратов, получим

$$4(x^2+8x+16)+9(y^2-6y+9)=64+81-109,$$

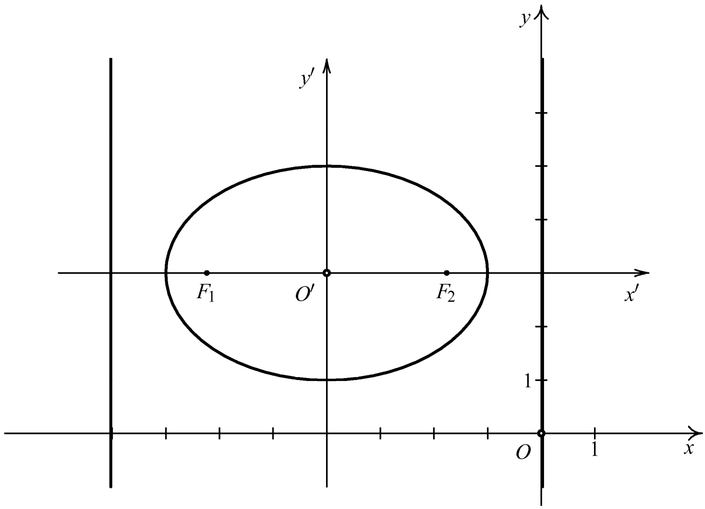
или после преобразований

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Перенесём начало координат в точку $O'(-4,3)$ полагая $x'=x+4$, $y'=y-3$, будем иметь

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

Это есть уравнение эллипса. Центр его лежит в точке (–4, 3), а полуоси равны $a=3$ и $b=2$.



31. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 54y - 53 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$4(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 6y) = 53.$$

Дополняя выражения в скобках до полных квадратов, получим

$$4(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 6y + 9) = 64 - 81 + 53,$$

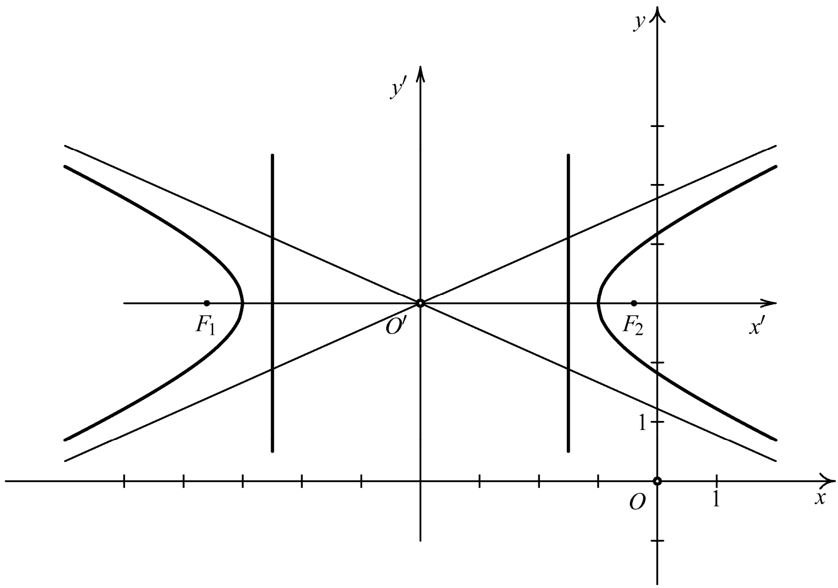
или после преобразований

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Перенесём начало координат в точку $O'(-4, 3)$, полагая $x' = x + 4$, $y' = y - 3$, будем иметь

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Это уравнение гиперболы с центром в точке (–4, 3). Действительная полуось её равна $a = 3$, а мнимая равна $b = 2$.



32. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$y^2 - 4x - 2y + 9 = 0.$$

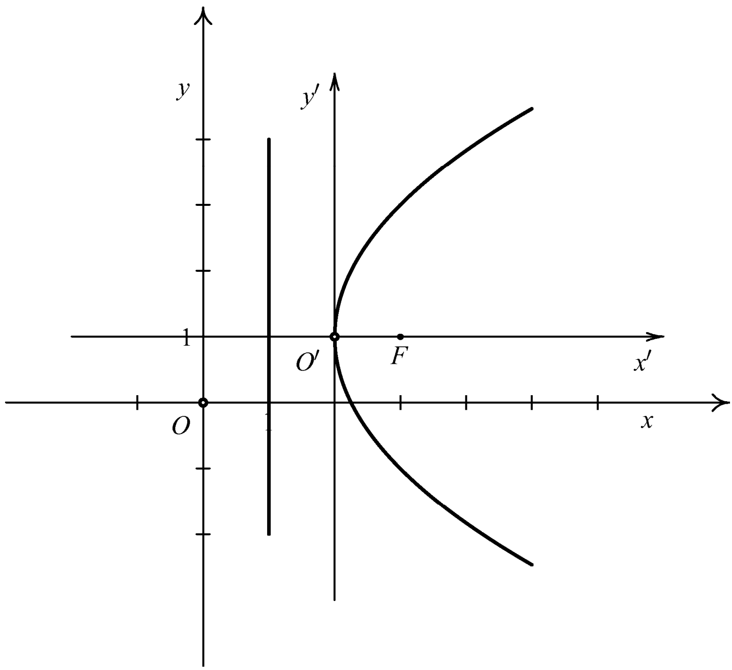
Решение. Перепишем уравнение так:

$$y^2 - 2y + 1 = 4x - 8,$$

или после преобразований

$$(y-1)^2 = 4(x-2).$$

Вершина параболы находится в точке $O'(2,1)$, параметр $p = 2$, а ветвь параболы направлена в положительную сторону оси Ox. Перенесём начало координат в точку $O'(2,1)$, полагая $x' = x - 2$, $y' = y - 1$, будем иметь $y'^2 = 4x'$.



ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

Тема: Векторы

1. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB}$, где $A(-1,-6,5)$, $B(-1,-5,6)$, $C(-1,-7,5)$.

2. Найти вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(0,-1,-1)$ и $\vec{b}=(-1,5,-4)$ и удовлетворяет условию $(\vec{c},\vec{d})=1$, если вектор $\vec{d}=(1,-1,0)$.

3. Найти площадь ΔABC, если известны координаты его вершин: $A(4,5,4)$, $B(5,5,4)$, $C(4,6,3)$.

4. Показать, что векторы $\vec{a}=(-1,-1,1)$, $\vec{b}=(-1,-1,0)$, $\vec{c}=(1,-1,1)$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{d}=(-2,2,-2)$ по этому базису.

5. Выяснить, какой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правой или левой), если $\vec{a}=(0,-1,2)$, $\vec{b}=(-2,-1,0)$, $\vec{c}=(-2,-1,-2)$.

6. Найти объём пирамиды $ABCD$, если известны координаты её вершин: $A(-1,3,-7)$, $B(0,2,-8)$, $C(-1,2,-8)$, $D(0,4,-7)$.

Тема: Прямая на плоскости

7. В треугольнике ABC найти уравнение медианы, проведённой из вершины A, если $A(0,-5)$, $B(3,-2)$, $C(4,4)$. Сделать чертёж.

8. В треугольнике ABC найти уравнение высоты, проведённой из вершины A, если $A(-7,6)$, $B(6,-7)$, $C(0,4)$. Сделать чертёж.

9. В треугольнике ABC найти уравнение биссектрисы, проведённой из вершины A, если $A(3,5)$, $B(-6,7)$, $C(-4,-3)$. Сделать чертёж.

10. Точка $A(-2,-2)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $-2x-y-2=0$. Вычислить площадь этого квадрата.

11. Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно прямой, проходящей через точки A и C, если $A(-2,-4)$, $B(1,5)$, $C(-5,-4)$.

Тема: Плоскость в пространстве

12. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(-5,-2,3)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=(-2,-5,5)$.

13. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(-5,5,-4)$ параллельно плоскости $z+3=0$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2,-6,2)$ перпендикулярно плоскостям $7x+3y-7z=0$ и $-x+y+z-5=0$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4,4,0)$ и $B(6,3,-1)$ перпендикулярно плоскости $x-2y-3z-3=0$.

16. Определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей $-3x+3y+2z-3=0$ и $-x+2y-2z+1=0$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2,4,-6)$, $B(0,4,-5)$, $C(-4,4,-8)$.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-6,-7,3)$ и $B(-6,-8,2)$ параллельно вектору $\vec{d}=(1,0,-1)$.

Тема: Прямая в пространстве

19. Найти направляющий вектор прямой

$$\begin{cases} 6x-7y-5z-6=0, \\ 6x-3y-4z+6=0. \end{cases}$$

20. Найти угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x=-5, \\ y=t+4, \\ z=-t+1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=t+4, \\ y=-6t-4, \\ z=-3t+3. \end{cases}$$

21. Составить общие уравнения прямой, проходящей через точки $A(6,0,6)$ и $B(1,6,-3)$. Результатом пересечения каких плоскостей является прямая, проходящая через точки A и B и направляющим вектором $\overrightarrow{AB}$.

22. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $C(6,2,2)$ параллельно прямой:

$$\begin{cases} -7x-5y+5z-4=0, \\ -x-y-z-7=0. \end{cases}$$

23. Доказать, что две прямые

$$\begin{cases} x-2y-3z+1=0, \\ -2x+y+7z-2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=-t+2, \\ y=-t+1, \\ z=4t+1 \end{cases}$$

перпендикулярны.

24. Доказать, что две прямые

$$\begin{cases} -3x-4y-3z-6=0, \\ -6x+y+6z-2=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=7t-3, \\ y=-12t-4, \\ z=9t+1 \end{cases}$$

параллельны.

Тема: Прямая и плоскость в пространстве

25. Определить угол между плоскостью P: $2x+6y+3z+4=0$ и прямой ℓ

$$\begin{cases} x=-4t+7, \\ y=t-3, \\ z=5t+3. \end{cases}$$

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4,\,-7,\,-2)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} x=-3t+5, \\ y=-7t+5, \\ z=-3. \end{cases}$$

27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(1,\,0,\,7)$ перпендикулярно к плоскости $-3x-3y+2z-4=0$.

28. Найти точку B^*, симметричную точке $B(5,\,3,\,7)$ относительно плоскости $x+7y-3z+5=0$.

29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1,\,1,\,5)$ перпендикулярно прямой

$$\begin{cases} -x+y-z=0, \\ 2x-3z+2=0. \end{cases}$$

30. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

1) $x^2+9y^2+4x+18y+4=0$;

2) $x^2-y^2-2x+2y-1=0$;

3) $y^2+10x+10y+45=0$.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Длина вектора $\vec{a}=(3,\lambda,-1)$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}$ равна $\sqrt{35}$, если λ имеет значение … .

Укажите ***не менее двух*** *вариантов ответа.*

1) ☐ 5; 2) ☐ $\sqrt{34}$; 3) ☐ -5; 4) ☐ $-\sqrt{34}$.

2. Укажите соответствие между парами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и значениями m, при которых они коллинеарны.

1) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}+3m\vec{k}$;

2) $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{k}$, $\vec{b}=(-3,0,m)$;

3) $\vec{a}=(1,2,-3)$, $\vec{b}=(-2,5m,6)$;

1) ☐ $m=-6$;

2) ☐ $m=-\dfrac{4}{5}$;

3) ☐ $m=-\dfrac{2}{3}$;

4) ☐ $m=\dfrac{2}{3}$;

5) ☐ $m=6$.

3. Даны векторы $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{k}-3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$, тогда $-2\vec{a}-\vec{b}$ равно …

1) ☐ $\vec{i}-4\vec{j}+4\vec{k}$; 2) ☐ $-\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$;

3) ☐ $3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$; 4) ☐ $\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$.

4. Если система векторов $\vec{a}=(2,-1)$ и $\vec{b}=(\alpha,-3)$ образует базис на плоскости, то …

1) ☐ $\alpha=6$; 2) ☐ $\alpha>0$;

3) ☐ $\alpha\neq 6$; 4) ☐ α – любое действительное число.

5. Векторы $\vec{a}=(4,-3,-2)$ и $\vec{b}=(\alpha,2\alpha,5)$ перпендикулярны при α, равном …

1) ☐ 5; 2) ☐ $\sqrt{10}$; 3) ☐ -5; 4) ☐ 0.

6. Скалярное произведение векторов $3\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}=\vec{a}-2\vec{b}$, где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$ равно …

1) □ 4; 2) □ $\sqrt{5}$; 3) □ 1; 4) □ 0.

7. Если векторы $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$ и $\vec{b}=(0,\ 1,\ 3)$, то $(\vec{a},\ \vec{b})$ равно …

1) □ 1; 2) □ 5; 3) □ 4; 4) □ 0.

8. Если векторы $|\vec{a}|=1$ и $|\vec{b}|=2,\ \ \vec{a}\perp\vec{b},$ то ... .

*Укажите **не менее двух** вариантов ответа.*

1) □ $[\vec{a},\ \vec{b}]=2;$ 2) □ $(\vec{a},\ \vec{b})=0;$

3) □ $(\vec{a},\ \vec{b})=2;$ 4) □ $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}.$

9. Векторное произведение векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ равно …

1) □ 0; 2) □ $2[\vec{b},\ \vec{a}];$

3) □ $[\vec{a},\ \vec{a}]-[\vec{b},\ \vec{b}];$ 4) □ $[\vec{a},\ \vec{a}]+2[\vec{a},\ \vec{b}]+[\vec{b},\ \vec{b}].$

10. Если $|\vec{a}|=2,\ \ |\vec{b}|=1$ угол между равен 60°, то … .

*Укажите **не менее двух** вариантов ответа.*

1) □ $[\vec{a},\ \vec{b}]=\sqrt{3};$ 2) □ $(\vec{a},\ \vec{b})=2;$

3) □ $(\vec{a},\ \vec{b})=1;$ 4) □ $|[\vec{a},\ \vec{b}]|=\sqrt{3}.$

11. Если векторы $\vec{a}=(1,\ 2,\ -1)$, $\vec{b}=(-1,\ 0,\ 1)$, $\vec{c}=(1,\ 1,\ 0)$, то $(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ равно …

1) □ 0; 2) □ 1; 3) □ 2; 4) □ 3.

12. Если векторы $\vec{a}=(1,\ 2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ 1,\ 2)$ и $\vec{c}=(2,\ 3,\ 1)$, то объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен …

1) □ 0; 2) □ 18; 3) □ 6; 4) □ 2.

13. Площадь треугольника ABC можно вычислить по формуле …

1) □ $S=\dfrac{1}{2}[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}];$ 2) □ $S=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC});$

3) □ $S=\dfrac{1}{2}|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})|;$ 4) □ $S=\dfrac{1}{2}|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]|.$

14. Косинус угла A в треугольнике ABC вычисляется по формуле …

1) ☐ $\cos\angle A = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$; 2) ☐ $\cos\angle A = \dfrac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$;

3) ☐ $\cos\angle A = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{|\overrightarrow{CB}|}$; 4) ☐ $\cos\angle A = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|}$.

15. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ вычисляется по формуле …

1) ☐ $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$; 2) ☐ $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}|}$;

3) ☐ $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}{|\overrightarrow{AC}|}$; 4) ☐ $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|}$.

16. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть вычислена по формуле …

1) ☐ $S = [\vec{a}, \vec{b}]$; 2) ☐ $S = (\vec{a}, \vec{b})$;

3) ☐ $S = |(\vec{a}, \vec{b})|$; 4) ☐ $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$.

17. Объём тетраэдра $ABCD$ может быть вычислен по формуле …

1) ☐ $V = \dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$; 2) ☐ $V = \dfrac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}$;

3) ☐ $V = \dfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$; 4) ☐ $V = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

18. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ ортогональны тогда и только тогда, когда …

1) ☐ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$; 2) ☐ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$;

3) ☐ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = \vec{0}$; 4) ☐ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$.

19. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и коллинеарны тогда и только тогда, когда …

1) ☐ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$; 2) ☐ $\overrightarrow{AB} > \overrightarrow{CD}$;

3) ☐ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = \vec{0}$; 4) ☐ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] \neq 0$.

20. Нормальный вектор плоскости $x-5y+z-3=0$ имеет координаты …

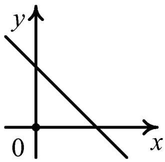
1) ☐ $(1,-5,1)$; 2) ☐ $(1,-5,1,-3)$;
3) ☐ $(1,-5,-3)$; 4) ☐ -3.

21. Установите соотношение между уравнением прямой и её угловым коэффициентом:

1) $x+2y-1=0$;
2) $y-5=0$;
3) $x+3=0$.

1) ☐ 0;
2) ☐ не существует;
3) ☐ $\frac{1}{2}$;
4) ☐ $-\frac{1}{2}$;
5) ☐ 1.

22. Графику функции $y=kx+b$ соответствуют следующие значения k и b:



1) ☐ $k>0,\ b>0$;
2) ☐ $k>0,\ b<0$;
3) ☐ $k<0,\ b<0$;
4) ☐ $k<0,\ b>0$.

23. Если плоскость $Ax+By-2z-5=0$ проходит через точку $M(1,-1,0)$, то разность коэффициентов A и B равна …

1) ☐ 5; 2) ☐ ∞; 3) ☐ 0; 4) ☐ 5.

24. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+2y-3=0$, равен …

1) ☐ 4; 2) ☐ 3; 3) ☐ 2; 4) ☐ 1.

25. Расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ равно ... .

Ответом на задание должно быть ***целое число или конечная десятичная дробь****.*

Ответ: ☐

26. Уравнение $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ на плоскости определяет …

1) ☐ эллипс; 2) ☐ гиперболу;

3) ☐ параболу; 4) ☐ пару прямых.

27. Если малая полуось эллипса равна 4, а расстояние между его фокусами равно 9, то каноническое уравнение эллипса имеет вид …

1) ☐ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) ☐ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$;

3) ☐ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; 4) ☐ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{81}=1$.

28. Определить полуоси a и b эллипса $x^2+4y^2=1$.

1) ☐ $a=1,\ b=4$; 2) ☐ $a=1,\ b=\frac{1}{2}$;

3) ☐ $a=1,\ b=2$; 4) ☐ $a=1,\ b=\frac{1}{4}$.

29. Вершина параболы $y^2=2x-2$ находится в точке A:

1) ☐ $A(1,\ 0)$; 2) ☐ $A(0,\ 1)$;

3) ☐ $A(2,\ 0)$; 4) ☐ $A(-1,\ 0)$.

30. Уравнения асимптот у гиперболы $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ имеют вид …

1) ☐ $y=\pm\frac{4}{5}x$; 2) ☐ $x=\pm\frac{4}{5}$;

3) ☐ $y=\pm\frac{16}{25}x$; 4) ☐ $y=\pm\frac{25}{16}x$.

31. Определить направляющий вектор прямой, заданной пересечением двух плоскостей $\begin{cases} x-y+z-1=0, \\ x+z=0. \end{cases}$

1) ☐ $(1,-1,\ 1)$; 2) ☐ $(1,\ 0,\ 1)$;

3) ☐ $(-1,\ 0,\ 1)$; 4) ☐ $(1,-1,\ 2)$.

32. Установить, какая из приведённых точек лежит на прямой $x = y+1 = \dfrac{z-1}{-1}$:

1) ☐ $(2, 1, -1)$; 2) ☐ $(2, -1, 1)$;
3) ☐ $(2, 1, 0)$; 4) ☐ $(1, 2, 2)$.

33. Найдите расстояние от точки $A(1, -1, 1)$ до плоскости $x-y+z-6=0$:

1) ☐ 3; 2) ☐ $-\sqrt{3}$; 3) ☐ $\sqrt{3}$; 4) ☐ 0.

34. Уравнением плоскости, проходящей через точку $M(1, 0, -1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{N} = (1, 2, 3)$, является …

1) ☐ $x+2y+3z+2=0$; 2) ☐ $x-z+2=0$;
3) ☐ $x+2y+3z-2=0$; 4) ☐ $z=x-2$.

35. Укажите, какая из приведённых плоскостей является перпендикулярной данной $2x-3y+5=0$:

1) ☐ $-6x-y+3z+7=0$; 2) ☐ $x-z-1=0$;
3) ☐ $-2x+3y-5=0$; 4) ☐ $3x+2y+3z+7=0$.

36. Укажите, какая из приведённых плоскостей является параллельной данной $2x-3y+z-5=0$:

1) ☐ $-2x+3y-z+11=0$; 2) ☐ $2x-6y+2z-5=0$;
3) ☐ $x+y+z+11=0$; 4) ☐ $x-3y+2z-5=0$.

37. Найти расстояние от точки $O(0, 0)$ до прямой $3x+4y-5=0$:

1) ☐ 0; 2) ☐ –5; 3) ☐ 5; 4) ☐ 1.

38. Укажите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, 2)$, на прямую $2x-y+3=0$:

1) ☐ $x-2y+3=0$; 2) ☐ $\dfrac{x-1}{-2} = y-2$;
3) ☐ $x-2y-5=0$; 4) ☐ $-x+y+z=0$.

39. Уравнением прямой, параллельной прямой $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{2}$, является …

1) □ $2x-3y+3=0$; 2) □ $\frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}$;

3) □ $3x+2y+1=0$; 4) □ $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}$.

Ответы на тестовые задания:

1. 1 и 3. **2.** 1→3, 2→5, 3→2. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 2. **8.** 2 и 4. **9.** 2. **10.** 3 и 4. **11.** 3. **12.** 2. **13.** 4. **14.** 1. **15.** 4. **16.** 4. **17.** 3. **18.** 1. **19.** 3. **20.** 1. **21.** 1→4, 2→1, 3→2. **22.** 4. **23.** 1. **24.** 3. **25.** 6. **26.** 2. **27.** 1. **28.** 2. **29.** 1. **30.** 1. **31.** 3. **32.** 1. **33.** 3. **34.** 1. **35.** 4. **36.** 1. **37.** 4. **38.** 2. **39.** 1.

Тема 3. ПРЕДЕЛЫ И ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
(типовые задания)

Контрольная работа 3 состоит из трёх заданий на нахождение пределов и шести – на нахождение производных.

Выполнение заданий из раздела «Пределы» требует знаний правил раскрытия неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, а также первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Теоретические знания, необходимые для выполнения заданий, носят достаточно прикладной (к каждому типу задач) характер, поэтому рассмотрим примеры решения типовых для данной контрольной работы задач.

1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-3}{2x-1}$.

При $x\to+\infty$ и числитель $(6x-3)$, и знаменатель $(2x-1)$ также стремятся к $+\infty$. Поэтому имеет место неопределённость типа $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы её раскрыть, преобразуем (под знаком предела) числитель и знаменатель следующим образом:

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-3}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\frac{3}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\frac{6}{2}=3.$$

2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1}$.

Решение. Раскрываем неопределённость $\dfrac{\infty}{\infty}$ следующим образом:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x-3-\sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-3-\sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-3}{2x-1}-\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{6-\frac{3}{x}}{2-\frac{1}{x}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=3-\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=3+\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+4}-\sqrt{5x^2-3x-1}\right)$.

Решение. Здесь имеет место неопределённость типа $(\infty-\infty)$. Для её раскрытия умножим и разделим исходное выражение на $\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{5x^2-3x-1}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+4}-\sqrt{5x^2-3x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2+x+4}-\sqrt{5x^2-3x-1}\right)\left(\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{5x^2-3x-1}\right)}{\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{5x^2-3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{5x^2-3x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{5+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+\sqrt{5-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+12x+9}{2x^2+11x+15}$.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$; так как $x=-3$ обращает в ноль как числитель, так и знаменатель и таким образом трёхчлены, стоящие в числителе и знаменателе делятся на $(x+3)$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to-3}\frac{3x^2+12x+9}{2x^2+11x+15}=\lim_{x\to-3}\frac{3(x+3)(x+1)}{2(x+3)\left(x+\frac{5}{2}\right)}=\lim_{x\to-3}\frac{3(x+1)}{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}=\frac{3(-3+1)}{2\left(-3+\frac{5}{2}\right)}=6.$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+8}-\sqrt{6}}{x-2}$.

Решение. Здесь также неопределённость $\dfrac{0}{0}$. Переведём иррациональность из числителя в знаменатель.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3x+8}-\sqrt{6}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+8}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+8-6}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(3x+3)}{x^2-4x-5}$.

Решение. Так как $x\neq -1$ под знаком предела, то

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(3(x+1))}{(x+1)(x-5)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin(3(x+1))}{(x+1)}\cdot\frac{1}{x-5}=3\lim_{x\to -1}\frac{\sin(3(x+1))}{3(x+1)}\cdot\frac{1}{x-5}=$$

$$=3\cdot 1\cdot\frac{1}{-1-5}=-\frac{1}{2}.$$

Здесь мы использовали первый замечательный предел:

$$\lim_{x+1\to 0}\frac{\sin(3(x+1))}{3(x+1)}=1.$$

Для выполнения заданий по разделу «Производные» необходимо *знать*:

1. Правила дифференцирования:

Если $u(x)$ и $v(x)$ – функции, имеющие производные, c – некоторая постоянная, то

1) $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$;

2) $(cu(x))'=cu'(x)$;

3) $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

4) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Если $u(x)$ и $v(x)$ – функции, имеющие производные u'_v и v'_x, то производная сложной функции

$$u(v(x))'=u'_v\,v'_x.$$

Если для функции $u(x)$ существует обратная $x(u)$, то

$$x'(u) = \frac{1}{u'(x)}.$$

2. Формулы дифференцирования:

1) $(u^n)' = nu^{n-1}$;

2) $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$;

3) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}$;

4) $(a^u)' = a^u \ln a$;

5) $(e^u)' = e^u$;

6) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}$;

7) $(\ln u)' = \frac{1}{u}$;

8) $(\sin u)' = \cos u$;

9) $(\cos u)' = -\sin u$;

10) $(\mathrm{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u}$;

11) $(\mathrm{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}$;

12) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$;

13) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$;

14) $(\mathrm{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}$;

15) $(\mathrm{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}$.

Выработать навыки нахождения производных можно прорешав достаточное количество задач. Продемонстрируем это на следующих, типовых для контрольной работы, примерах.

1. Найти производную функции y', если $y = \operatorname{tg}(7x+5)\cdot\lg(3x+1)$.

Решение.

$$y' = \operatorname{tg}'(7x+5)\lg(3x+1) + \operatorname{tg}(7x+5)\lg'(3x+1) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(7x+5)}(7x+5)'\lg(3x+1) + \operatorname{tg}(7x+5)\frac{1}{(3x+1)\ln 10}(3x+1)' =$$

$$= \frac{7}{\cos^2(7x+5)}\lg(3x+1) + \operatorname{tg}(7x+5)\frac{3}{(3x+1)\ln 10}.$$

2. Найти производную функции y', если $y = \operatorname{ctg} x^5 + \dfrac{\operatorname{ctg}(3x-1)}{\arcsin x}$.

Решение.

$$y' = \operatorname{ctg}' x^5 + \left(\frac{\operatorname{ctg}(3x-1)}{\arcsin x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x^5}(x^5)' + \frac{\operatorname{ctg}'(3x-1)\arcsin x - \operatorname{ctg}(3x-1)\arcsin' x}{\arcsin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x^5}5x^4 + \frac{-\dfrac{1}{\sin^2(3x-1)}(3x-1)'\arcsin x - \operatorname{ctg}(3x-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} =$$

$$= -\frac{5x^4}{\sin^2 x^5} + \frac{-\dfrac{3}{\sin^2(3x-1)}\arcsin x - \operatorname{ctg}(3x-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}.$$

3. Найти производную функции y', если $y = \arccos^5(x^2+7x-14)$.

Решение.

$$y' = (\arccos^5(x^2+7x-14))' = 5\arccos^4(x^2+7x-14)\arccos'(x^2+7x-14) =$$

$$= 5\arccos^4(x^2+7x-14)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+7x-14)^2}}\right)(x^2+7x-14)' =$$

$$= -5\arccos^4(x^2+7x-14)\frac{2x+7}{\sqrt{1-(x^2+7x-14)^2}}.$$

4. Найти производную функции y', если $y = (\sin(2x-7))^{7x^2-7x-6}$.

Решение.

$$y = (e^{\ln\sin(2x-7)})^{7x^2-7x-6} = e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)},$$

$$y' = e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\Big((7x^2-7x-6)'\ln\sin(2x-7)+$$

$$+(7x^2-7x-6)(\ln\sin(2x-7))'\Big)=$$

$$= e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\left((14x-7)\ln\sin(2x-7)+\right.$$

$$\left.+(7x^2-7x-6)\frac{1}{\sin(2x-7)}\sin'(2x-7)\right)=$$

$$= e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\left((14x-7)\ln\sin(2x-7)+\right.$$

$$\left.+(7x^2-7x-6)\frac{1}{\sin(2x-7)}\cos(2x-7)\cdot(2x-7)'\right)=$$

$$= e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\left((14x-7)\ln\sin(2x-7)+\right.$$

$$\left.+(7x^2-7x-6)\frac{1}{\sin(2x-7)}\cos(2x-7)\cdot 2\right)=$$

$$= (\sin(2x-7))^{7x^2-7x-6}\Big((14x-7)\ln\sin(2x-7)+2(7x^2-7x-6)(2x-7)\Big).$$

5. Найти производную функции y'_x, если $x = \operatorname{arcctg}(\operatorname{arcctg} y \ln y)$.

Решение.

$$y'_x = \frac{1}{x'_y};$$

$$x'_y = -\frac{1}{1+(\operatorname{arcctg} y\ln y)^2}(\operatorname{arcctg} y\ln y)' =$$

$$= -\frac{1}{1+(\operatorname{arcctg} y\ln y)^2}(\operatorname{arcctg}' y\ln y+\operatorname{arcctg} y\ln' y) =$$

$$= -\frac{1}{1+(\operatorname{arcctg} y\ln y)^2}\left(\frac{1}{1+y^2}\ln y+\operatorname{arcctg} y\frac{1}{y}\right).$$

$$y'_x = \frac{1}{-\dfrac{1}{1+(\operatorname{arcctg} y \ln y)^2}\left(\dfrac{1}{1+y^2}\ln y + \operatorname{arcctg} y \dfrac{1}{y}\right)}.$$

6. Найти производную функции y'_x, если $\begin{cases} x = 5t - 7 + t, \\ y = 3t^2 + 4t - 8 + \log_3 t. \end{cases}$

Решение.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};$$

$$x'_t = 5 + \frac{1}{1+t^2};$$

$$y'_t = 6t + 4 + \frac{1}{t\ln 3};$$

$$y'_x = \frac{6t + 4 + \dfrac{1}{t\ln 3}}{5 + \dfrac{1}{1+t^2}}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

Вариант 1

1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{7x^2 - 3x + 4} - \sqrt{7x^2 + 2x - 2}\right);$

2) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{7x^2 + 9x + 2}{2x^2 + 4x + 2};$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+2}{6x-1}\right)^{5x};$

2. Найти $y'(x)$, если:

1) $y = \sin(3x+1)\cdot\ln(8x-7);$

2) $y = \sin x^5 + \dfrac{\sin(3x+1)}{\ln x}$;

3) $y = \sin^5(x^2 + 5x - 8)$;

4) $y = (\sin(3x+1))^{7x^2+4x-2}$;

5) $x = \lg(8^y - e^y)$;

6) $\begin{cases} x = 3t + 9 + \sin t, \\ y = 3t^2 + 7t - 7 + \ln t. \end{cases}$

Вариант 2

1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x + 3} - \sqrt{9x^2 - 3x + 1} \right)$;

2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 3x}}{x+1}$;

3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\arcsin(3x-9)}{x^2 - 5x + 6}$.

2. Найти $y'(x)$, если:

1) $y = \cos(5x+6)\sqrt{6x-1}$;

2) $y = \cos x^3 + \dfrac{\cos(5x+6)}{\sqrt{x}}$;

3) $y = \cos^7(x^2 + 4x - 5)$;

4) $y = (\cos(3x-5))^{5x^2-2x+7}$;

5) $x = \operatorname{arcctg}(\ln y + \sin y)$;

6) $\begin{cases} x = 8t + 4 + \cos t, \\ y = 3t^2 - 7t + 8 + \sqrt{t}. \end{cases}$

Вариант 3

1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+3-\sqrt{5x^2+2x+1}}{5x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2-x-5}{5x^2-2x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+5}{7x-2}\right)^{5x}$.

2. Найти $y'(x)$, если:

1) $y=\operatorname{tg}(7x+5)\lg(3x+1)$;

2) $y=\operatorname{tg}x^2+\dfrac{\operatorname{tg}(7x+5)}{\lg x}$;

3) $y=\operatorname{tg}^7(x^2+3x-4)$;

4) $y=(\operatorname{tg}(6x-1))^{7x^2+8x+7}$;

5) $x=\log_8(\cos y+\operatorname{ctg}y)$;

6) $\begin{cases} x=3t+6+\operatorname{tg}t, \\ y=3t^2+5t+3+\sqrt[3]{t}. \end{cases}$

Тема 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Раздел 1. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебный материал этой темы условно можно разделить на два раздела: частные производные и дифференциал функции двух переменных – это вводный математический аппарат и экстремумы функции двух переменных – математический аппарат для решения прикладных задач.

Условие освоения первого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

1) понятие частных производных, правила их нахождения;

2) понятия производной функции по заданному направлению и градиента функции, формулы их нахождения;

3) формулы для нахождения касательной плоскости и нормали к поверхности;

4) формулы для нахождения дифференциалов первого и второго порядка функции двух переменных;

уметь:

1) находить частные производные (в общем то любого порядка) функции двух переменных, градиент и производную по заданному направлению;

2) находить дифференциал функции двух переменных;

3) находить уравнения касательной плоскости и нормали к заданной поверхности, в заданной точке.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

• **Частные производные первого порядка**

Частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ функции двух переменных $z = f(x, y)$ по переменной x, вычисляется по правилу дифференцирования функции z как функции только одной переменной x; переменная y при этом (только в процессе дифференцирования) имеет статус (считается) постоянной (числа).

Вторая частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ находится при аналогичном предположении: y – переменная; x – постоянная.

• **Градиент функции**

Градиентом функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным функции в этой точке:

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A, \ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A \right).$$

В направлении градиента функция имеет наибольший рост.

• **Касательная плоскость к поверхности**

Если поверхность в трёхмерном пространстве задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A (y - y_0).$$

• **Нормаль к поверхности**

Нормалью к поверхности в трёхмерном пространстве называется прямая линия, перпендикулярная к касательной плоскости и проходящая через точку касания.

Если поверхность в трёхмерном пространстве задана уравнением

$$z = f(x, y),$$

то уравнение нормали к поверхности в точке $A(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

• **Производная по направлению, заданному вектором**

Производной $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}$ от функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0)$ по направлению, заданному вектором $\vec{a} = (a_x, a_y)$, называется число, которое находится по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_A a_x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_A a_y\right).$$

Производная функции по направлению, заданному вектором $\vec{a}$, равна скалярному произведению градиента этой функции на единичный вектор, задающий направление $\vec{a}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \left(\operatorname{grad} z, \ \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right).$$

• **Первый дифференциал функции**

Первый дифференциал функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $A(x_0, y_0)$ определяется по формуле

$$dz\Big|_A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A dx + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A dy \tag{1}$$

и является в рассматриваемой точке A функцией двух переменных $dx,\ dy$.

• **Частные производные высших порядков**

Частные производные функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ второго порядка определяются по формулам:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Отметим, что имеет место теорема: ***если смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, непрерывны, то их значения не зависят от порядка дифференцирования***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

• **Второй дифференциал функции**

Второй дифференциал функции двух переменных $z = f(x,\ y)$ в точке $A(x_0,\ y_0)$ определяется по формуле

$$d^2 z\Big|_A = d(dz) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_A dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_A dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_A dy^2, \tag{2}$$

так же, как и первый дифференциал, является в рассматриваемой точке A функцией двух переменных $dx,\ dy$.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

1. Найти частные производные функции

$$z = 3x^2 y^3 + 4x^2 + 5y + 7.$$

Решение. Функция z – функция двух независимых переменных x и y. При нахождении частной производной функции z по независимой переменной x (переменная y, как и любая только от неё функция $\varphi(y)$ рассматривается как постоянное число, поэтому $\varphi(y)'_x = 0$; $(\varphi(y)\, f(x))'_x = \varphi(y)\, f'(x)$.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2y^3 + 4x^2 + 5y + 7)}{\partial x} = \frac{\partial(3x^2y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(4x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(5y)}{\partial x} + \frac{\partial(7)}{\partial x} =$$

$$= 3y^3\frac{\partial(x^2)}{\partial x} + 8x + 0 + 0 = 3y^3 \cdot 2x + 8x = 6xy^3 + 8x.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2y^3 + 4x^2 + 5y + 7)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(4x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(5y)}{\partial y} + \frac{\partial(7)}{\partial y} =$$

$$= 3x^2\frac{\partial(y^3)}{\partial y} + 0 + 5 + 0 = 3x^2 \cdot 3y^2 + 5 = 9x^2y^2 + 5.$$

2. Найти частные производные и дифференциал функции

$$z = x^2y + y + x^3$$

в точке $M(1, 2)$.

Решение. Вначале находим частные производные в точке $M(1, 2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,2) = \left(2xy + 3x^2\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 4 + 3 = 7;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = \left(x^2 + 1\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = 1 + 1 = 2.$$

Согласно формуле (1) , получаем, что дифференциал функции в точке $M(1, 2)$ равен

$$dz(1,2) = 7dx + 2dy.$$

3. Найти d^2z функции $z = x^2y^3$ в точке $M(1,1)$.

Решение. Воспользуемся формулой (2), для чего определим все частные производные, входящие в неё.

Вначале найдём частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) = y^3\frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) = x^2\frac{\partial(y^3)}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Продифференцировав их ещё раз, находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = 2y^3\frac{\partial x}{\partial x} = 2y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) = 3x^2\frac{\partial(y^2)}{\partial y} = 6x^2y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2) = 3y^2\frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 6xy^2.$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M(1, 1)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M) = \left(2y^3\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M) = \left(6x^2y\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(M) = \left(6xy^2\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6.$$

Следовательно,

$$d^2z(M) = 2dx^2 + 12dxdy + 6dy^2.$$

4. Дана функция $z = x^3y - y^3 + xy$ и точка $M(1, -1)$.

Найти:

1) $\mathrm{grad}\, z(M)$;

2) производную этой функции в точке M по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, где точка $O(0, 0)$ – начало координат.

Решение. 1. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2 + x.$$

Значения производных в точке $M(1,\ -1)$ являются координатами вектора $\operatorname{grad} z(M)$. Таким образом,

$$\operatorname{grad} z(M) = (-4,\ -1).$$

2. Имеем

$$\operatorname{grad} z(M) = (-4,\ -1);$$

$$\overrightarrow{OM} = (1,\ -1);$$

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2};$$

$$\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial \overrightarrow{OM}} = -4\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

5. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 + 3y^2$ в точке, для которой $x = 1,\ \ y = 1$.

Решение. Найдём аппликату точки касания

$$z = z(1,\ 1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 5.$$

Таким образом, точка касания имеет координаты (1, 1, 5).

Определяем частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2 + 3y^2)}{\partial x} = 4x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial (2x^2 + 3y^2)}{\partial y} = 6y.$$

Вычисляем значения частных производных в точке касания:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,\ 1) = 4 \cdot 1 = 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=6\cdot 1=6.$$

Подставляя эти значения и координаты точки касания в уравнения, получим уравнение касательной плоскости

$$z-5=4(x-1)+6(y-1),$$

или

$$4x+6y-z-5=0,$$

уравнение нормали

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-5}{-1}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

1. Найти частные производные функции

$$z=x^5y^2+3x^2+y+5x.$$

2. Найти частные производные функции и дифференциал функции

$$z=7x^3y+5xy^5$$

в точке $M(1,-1)$.

3. Найти d^2z функции $z=9x^7y^3-xy^2+1$ в точке $M(1,-1)$.

4. Дана функция $z=-y^2+2xy+x^3$ и точка $M(3,1)$. Вычислить:

1) $\operatorname{grad} z(M)$;

2) производную этой функции в точке M по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, где точка $O(0,0)$ – начало координат.

5. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2+y^2-6x+5y+1$ в точке, для которой $x=1$, $y=1$.

Раздел 2. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Условие освоения этого раздела предполагает, что студент должен *знать*:

• понятие критических (стационарных) точек функции;
• необходимые условия экстремума;
• достаточные условия экстремума;

• общую схему исследования функции на экстремум;

• понятие условного экстремума;

• схему исследования функции на условный экстремум;

• правило решения задач на наибольшее (наименьшее) значение функции в заданной ограниченной области.

уметь:

• находить экстремумы функции $z = f(x, y)$;

• находить наибольшее и наименьшее значения функции;

• решать прикладные математические задачи на экстремумы.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется критической для функции $z = f(x, y)$, если либо функция не дифференцируема в этой точке, либо обе частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в этой точке равны нулю.

Критические точки являются точками, где могут быть экстремумы функции (поэтому их называют «подозрительные на экстремум»).

Будем рассматривать только такую ситуацию, когда частные производные функции существуют и равны нулю. Точка, в которой функция дифференцируема и в которой частные производные равны нулю, называется стационарной точкой этой функции.

• **Необходимые условия экстремума**

Для того чтобы дифференцируемая функция $z = z(x, y)$ могла иметь в точке M локальный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке были выполнены равенства

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(M) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(M) = 0. \end{cases}$$

• **Достаточные условия экстремума**

Пусть:

1) $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = z(x, y)$.

2) $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$ – дифференциал второго порядка функции $z = f(x, y)$.

3) $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A$, $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B$, $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C$ – значения частных производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ и в этом случае

$$\left. d^2 z\right|_{M_0} = d(dz) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = F(dx, dy)$$

– дифференциал $d^2 z$ есть функция F только от dx и dy.

Тогда можно сформулировать два адекватных условия, позволяющих ответить на вопрос о наличии экстремума в точке M_0.

1. Если при любых значениях dx и dy, одновременно не обращающихся в нуль, функция $d^2 z$:

1) положительна, то в рассматриваемой стационарной точке минимум;

2) отрицательна, то в рассматриваемой стационарной точке максимум;

3) меняет знак, то в рассматриваемой стационарной точке экстремума нет.

2. Пусть определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \Delta,$$

тогда:

1) если $\Delta > 0$, то экстремум в точке M_0 есть при $A < 0$ – максимум, при $A > 0$ – минимум;

2) если определитель $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ не имеет в точке M_0 локального экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то экстремум может быть, может не быть и требуются дополнительные исследования (данный метод не даёт ответ на наличие экстремума).

• Процесс исследования функции двух переменных $z = f(x, y)$ на экстремум сводится к следующей схеме:

1) отыскиваются стационарные точки M_0, $M_1, \ldots,$ M_n функции z

2) для каждой точки находят

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix};$$

3) в случае $\Delta < 0$ в рассматриваемой критической точке экстремума нет, в случае $\Delta = 0$ необходимы дополнительные исследования;

4) в случае $\Delta > 0,\ \ A > 0$ в рассматриваемой стационарной точке минимум; в случае $\Delta > 0,\ \ A < 0$ в рассматриваемой стационарной точке максимум.

• Задачи нахождения экстремума функции $z = f(x,\ y)$ в случае, когда переменные x и y связаны дополнительным условием $\varphi(x,\ y) = 0$ называют задачами на условный экстремум.

• Метод решения задачи на условный экстремум – исследование на экстремум функции Лагранжа $L(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda\varphi(x,\ y)$ – функции трёх переменных $x,\ \ y,\ \ \lambda.$

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi(x,\ y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi(x,\ y)}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x,\ y) = 0. \end{cases}$$

Критические точки: $M_1(x_1,\ y_1,\ \lambda_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ \lambda_2),\ ...,\ M_k(x_k,\ y_k,\ \lambda_k)$. На экстремум исследуется каждая критическая точка согласно методике, описанной выше.

• Если уравнение связи $\varphi(x,\ y) = 0$ задано в виде $y = \psi(x),$ то $z = f(x,\ y) = f(x,\ \psi(x)) = F(x)$ – функция одной переменной. Её критические точки $x_1,\ ...,\ x_k$ определяют критические точки функции $z = f(x,\ y)$: $(x_1,\ \psi(x_1)),\ ...,\ (x_k,\ \psi(x_k)).$

• Решение задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции $z = f(x,\ y)$ в замкнутой области D, заданной уравнением своей границы $\varphi(x,\ y) = 0,$ состоит из трёх этапов:

1) находятся критические точки функции $z = f(x,\ y),$ принадлежащие открытой области D;

2) находятся критические точки функции $z = f(x,\ y)$ при условии связи $\varphi(x,\ y) = 0$ (на границе области D);

3) сравниваются значения $z = f(x,\ y)$ во всех найденных (по п. 1 и 2) критических точках и выбирается наибольшее и наименьшее.

Таким образом, при решении такого рода задач достаточные условия экстремума не используются.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

1. Исследовать функцию на экстремумы:

$$z = 2x^3y^2 - 3x^2 - 2y^2 + 10.$$

Решение. Сначала найдём критические точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y^2 - 6x = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x^3y - 4y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(xy^2 - 1) = 0, \\ y(x^3 - 1) = 0. \end{cases}$$

Существуют три критические точки $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$, $M_3(1, -1)$.
Находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12xy^2 - 6;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^3 - 4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12x^2 y.$$

Их значения:
1) в точке $M_1(0, 0)$

$$A = \left(12xy^2 - 6\right)\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = -6;$$

$$B = \left(12x^2y\right)\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0;$$

$$C = \left(4x^3 - 4\right)\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}} = -4;$$

определитель

$$\Delta = AC - B^2 = (-6)\cdot(-4) - 0 = 24 > 0; \quad A = -6 < 0,$$

следовательно, точка M_1 является точкой максимума, причём

$$z_{\max} = z(0, 0) = 0;$$

2) в точке $M_2(1, 1)$

$$A = \left(12xy^2 - 6\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 6;$$

$$B = \left(12x^2 y\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 12;$$

$$C = \left(4x^3 - 4\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 - 12 \cdot 12 = -144 < 0,$$

следовательно, в этой точке экстремума нет;

3) в точке $M_3(1, -1)$

$$A = \left(12xy^2 - 6\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = 6;$$

$$B = \left(12x^2 y\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = -12;$$

$$C = \left(4x^3 - 4\right)\Big|_{\substack{x=1\\y=-1}} = 0,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 0 - (-12) \cdot (-12) = -144 < 0,$$

следовательно, в этой точке экстремума нет.

2. Найти экстремальные значения функции $z = xy$ на прямой $x - y = 0$.

Решение. Функция Лагранжа

$$L = L(x,\ y,\ \lambda) = xy + \lambda(x - y).$$

Находим точки, подозрительные на экстремум из системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial(xy+\lambda(x-y))}{\partial x} = y+\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial(xy+\lambda(x-y))}{\partial y} = x-\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial(xy+\lambda(x-y))}{\partial \lambda} = x-y = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y = -\lambda, \\ x = \lambda, \\ 2\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Существует единственная подозрительная на экстремум точка $M(0, 0, 0)$,

При $\lambda = 0$ функция Лагранжа имеет вид

$$L = xy.$$

Её вторые производные

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0,$$

второй дифференциал в точке M:

$$d^2 L = 2dxdy.$$

Из условия связи $x-y=0$ соотношение между дифференциалами dx и dy

$$dx = dy,$$

так как $d(x-y) = dx - dy$ и равно нулю, поэтому

$$d^2 L = 2(dx)^2.$$

Поскольку второй дифференциал $d^2 L$ везде, за исключением $dx = 0,$ положительный, то точка $M(0, 0)$ является точкой минимума.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - xy + y^2 - x - y$$

в замкнутой области D, ограниченной осями координат $x = 0$, $y = 0$ и прямой $x + y = 3$.

Решение. Граница области D представляет собой треугольник OAB (рис. 1) и на различных сторонах этого треугольника задана различными уравнениями, поэтому решение задачи нахождения наибольшего и наименьшего значения в такой области складывается из задачи нахождения:

• стационарных точек функции в открытой области D (внутри треугольника);

• стационарных точек функции на сторонах OA, AB, OB, границами которых являются, в свою очередь, точки O, A, B;

• сравнении значений функции во всех стационарных точках, а также в точках O, A, B и выбору из них наибольшего и наименьшего.

Из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - y - 1 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y - x - 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

находим, что стационарная точка функции z в открытой области D одна: $M_1(1, 1)$, в которой

$$z(M_1) = z(1, 1) = -1.$$

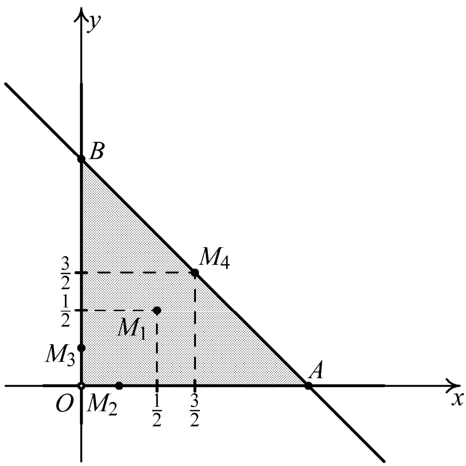


Рис. 1

1. На прямой OA: $y = 0$ и функция z принимает вид

$$z = x^2 - x \quad (0 \leqslant x \leqslant 3).$$

Так как на отрезке $[0, 3]$ функция z непрерывна, то она достигает на нём как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в стационарных точках функции, где $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим прежде всего стационарную точку

$$\frac{dz}{dx} = 2x - 1; \quad 2x - 1 = 0; \quad x = \frac{1}{2}.$$

В точке $M_2\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

$$z(M_2) = z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

На концах отрезка OA

$$z(O) = z(0, 0) = 0; \quad z(A) = z(3, 0) = 6.$$

2. На прямой OB: $x = 0$ и функция z принимает вид

$$z = y^2 - y \quad (0 \leqslant y \leqslant 3).$$

Эта функция – функция одной независимой переменной y. Её наименьшее и наибольшее значения определяются при сравнении значений в стационарных точках из интервала $(0, 3)$ и значений на концах отрезка $[0, 3]$.

Стационарная точка находится из условия $\frac{dz}{dy} = 2y - 1 = 0, \quad y = \frac{1}{2}$, а $M_3\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

$$z(M_3) = z\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

В точке B

$$z(B) = z(0, 3) = 6.$$

3. На отрезке прямой AB, заданной уравнением

$$x + y = 3,$$

функция z имеет вид

$$z = 3x^2 - 9x + 6.$$

Её стационарная точка $x = \frac{3}{2}$, так как

$$\frac{dz}{dx} = 6x - 9, \quad 6x - 9 = 0.$$

Находим соответствующее значение y. Из $y = 3 - x$ следует, что

$$y = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

(надо следить за тем, чтобы исследуемые точки принадлежали рассматриваемой области).

В точке $M_4\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$,

$$z(M_4) = z\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

На концах отрезка AB значения функции уже найдены.

Сравнивая теперь все полученные, в пунктах 1), 2) и 3) значения функции z, заключаем, что в заданной замкнутой области $z_{\max} = 6$ достигается в точках $A(3, 0)$ и $B(0, 3)$, а $z_{\min} = -1$ в точке $M_1(1, 1)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ЗНАНИЙ И ФОРМИРОВАНИЯ УМЕНИЙ

1. Исследовать функцию на экстремумы

$$z = x^3 + y^3 - 6xy.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$z = x^2 y + xy^2 - xy$$

в замкнутой области, ограниченной осями координат и прямыми $x = 1$ и $y = 2$.

3. Найти экстремальные значения функции $z = x + y$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение изложенного в пособии материала и методики подготовки к контрольным работам, как надеются авторы, послужит руководством наилучшему усвоению базового программного материала, поможет индивидуализировать обучение, облегчить его, заинтересовать, сформировать уверенность в положительных результатах учебной деятельности первокурсника, так как неудовлетворительные результаты контрольных испытаний заметно влияют на психологическое состояние студента: теряется уверенность в успешности своей учебной деятельности, заинтересованность в получении профессионального образования в данном вузе.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ПУЧКОВ Николай Петрович,
СКОМОРОХОВ Виктор Викторович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Практикум

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано в печать 16.09.2011
Формат 60×84/16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 315

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14