Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

Г.М. КУЛИКОВ, И.В. ЖИГУЛИНА, А.Д. НАХМАН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по классическому университетскому и техническому образованию Российской Академии естествознания в качестве учебного пособия

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2011

УДК 517.91(075.8)
ББК В161.6я73
К903

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки Российской Федерации,
доктор технических наук, профессор кафедры
«Высшая математика» ФБГОУ ВПО «ТГТУ»
А.В. Богословский

Заслуженный деятель науки Российской Федерации,
доктор технических наук, профессор Военного авиационного
инженерного университета (г. Воронеж)
А.В. Коренной

Куликов, Г.М.

К903 Дифференциальные уравнения. Тестовые задания : учебное пособие / Г.М. Куликов, И.В. Жигулина, А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 80 с. – 300 экз.

ISBN 978-5-8265-1036-0

Изложены основные положения теории и методы решения задач по темам «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Системы дифференциальных уравнений». Предложены образцы решения задач и варианты тестов по каждому разделу, в том числе итоговые типовые задания.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям: 080800, 110300, 140100, 140200, 150400, 150900, 151000, 190600, 200300, 200500, 201000, 210200, 210600, 220100, 220400, 220600, 220700, 221400, 230100, 230200, 240100, 241000, 260100, 261700, 270800, 280200, 280700.

УДК 517.91(075.8)
ББК В161.6я73

ISBN 978-5-8265-1036-0

ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удаётся непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. найти уравнения, в которых неизвестные функции содержатся под знаком производной. Такие уравнения называются дифференциальными; они служат важным средством моделирования различных процессов.

Цель настоящей книги – помочь студентам в формировании их математического мышления, в выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания. В пособии предпринимается попытка разработки современного технологичного средства обучения решению обыкновенных дифференциальных уравнений, а также контроля процесса обучения. Большая часть контрольных заданий имеет тестовую форму, что позволяет расширить поле контроля и сократить время его проведения. При этом авторы не отказываются от традиционной формы заданий, которая в тестологии именуется заданиями с развёрнутым ответом.

Структура материала такова: в каждой главе излагаются основные теоретические сведения и алгоритмы решения типовых задач, далее следуют задачи для активного обучения. В контрольном блоке предлагаются теоретические упражнения, задачи для самостоятельного решения, и, наконец, задания в форме тестов.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЙ

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1.1. Общие понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной и её производные (или дифференциалы).

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной (или дифференциала).

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0\,, \tag{1.1}$$

где x – независимая переменная; $y = y(x)$ – искомая функция; $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ – её производная.

Если уравнение (1.1) можно записать в виде

$$y' = f(x, y)\,, \tag{1.2}$$

то говорят, что оно *разрешимо относительно производной*.

Часто встречается *дифференциальная форма* записи уравнения первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0\,,$$

которая удобна тем, что в качестве искомой функции может быть как $x = x(y)$, так и $y = y(x)$.

Решением (*интегралом*) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = y(x)$, превращающая это уравнение в тождество.

График функции $y = y(x)$ называется *интегральной кривой*.

Процесс решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием*.

На самом деле в процессе интегрирования определится целый класс решений:

$$y = y(x, C)\,, \tag{1.3}$$

где C – произвольная постоянная.

Класс (1.3) называется *общим решением* дифференциального уравнения; ниже мы уточним, что будем понимать под общим решением дифференциального уравнения первого порядка.

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения определяется в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$.

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости xOy.

При каждом конкретном значении $C = C_0$ получают *частное решение* $y = y(x, C_0)$.

Задача о нахождении решения дифференциального уравнения (1.2), удовлетворяющего *начальному условию* $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

Геометрически, такая задача предполагает поиск интегральной кривой, которая проходит через заданную точку с координатами (x_0, y_0).

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной (включая «предельные» случаи $C = \pm\infty$), называется его *особым решением*.

При интегрировании дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с общим решением были найдены также и особые решения.

Среди всех дифференциальных уравнений особый интерес представляют некоторые классы уравнений, для которых существуют стандартные способы аналитического решения. Ниже будут рассмотрены важнейшие из них.

1.1.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)\, g(y) \tag{1.4}$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*.

Разделим переменные, учитывая, что $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

При этом уравнение (1.4) преобразуется к виду $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$.

Интегрируя, получим общее решение: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)\,dx = C$.

Замечания.

1. Характерный признак дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными – это наличие произведений (или частных) «блоков», зависящих только от «x» или только от «y».

2. Если обе части уравнения делим на переменную величину, то необходимо отдельно рассмотреть также случай, когда она обращается в ноль. Так, постоянные $y = y_0$, для которых $g(y_0) = 0$, являются, очевидно, решениями уравнения (1.4).

3. Произвольная постоянная, возникающая при интегрировании, может быть записана в виде kC или $k\ln C$, где k – любой постоянный (ненулевой) множитель. В некоторых случаях такая запись удобна для упрощения ответа.

1.1.3. Однородные уравнения

Если уравнения $y' = f(x, y)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не изменяются при одновременной замене «x» на «kx» и «y» на «ky», то они называются *однородными*.

Однородное уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.5}$$

Однородное дифференциальное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$t = \frac{y}{x} \text{ (откуда } y' = t + t'x\text{)},$$

где $t = t(x)$ – новая неизвестная функция.

После того как новое уравнение будет проинтегрировано, следует сделать обратную замену переменных – вместо t подставить $\dfrac{y}{x}$.

1.1.4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.6}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – непрерывные (на данном интервале) функции.

Характерный признак таких уравнений – функция y и её производная y' содержатся в уравнении в первой степени.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \ n \neq 0, \ n \neq 1. \tag{1.7}$$

Существует несколько методов решения уравнений данных видов: метод вариации произвольных постоянных, метод интегрирующего множителя, метод Бернулли.

Рассмотрим *метод Бернулли*. При этом решение каждого из уравнений (1.6), (1.7) будем искать в виде

$$y = uv,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неизвестные функции.

По правилу дифференцирования произведения получим $y' = u'v + uv'$ (аргумент «x» в дальнейшем опускаем).

В этом случае линейное уравнение (1.6), например, записывается следующим образом

$$u'v + u(v' + pv) = q.$$

Множитель $v = v(x)$ можно выбрать как некоторое решение уравнения $v' + pv = 0$.

Тогда исходное уравнение оказывается эквивалентным уравнению с разделяющимися переменными $u'v = q$, общее решение которого есть некоторая $u = u(x, C)$.

Окончательно общий интеграл линейного дифференциального уравнения примет вид

$$y = v(x)u(x, C).$$

Таким образом, в процессе решения приходится дважды решать уравнения с разделяющимися переменными.

По той же схеме решается и уравнение Бернулли.

1.1.5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1.8}$$

связывающее между собой независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и её производные $y'(x)$, $y''(x)$, называется *дифференциальным уравнением второго порядка* (разрешённым относительно второй производной).

Общим решением уравнения (1.8) называется функция $y = y(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2, которая при любых значениях C_1, C_2 является решением (1.8) .

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка состоит в следующем: найти решение уравнения (1.8), удовлетворяющее заданным *начальным условиям* $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Геометрически, имеем задачу нахождения интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) и имеющей данный угловой коэффициент $y'_0 = \operatorname{tg}\alpha$ касательной в этой точке.

Краевая задача. Задача интегрирования уравнения (1.8) называется краевой, если значения искомой функции $y(x)$ и, возможно, её производных задаются не при одном и том же значении независимой переменной, а на концах некоторого фиксированного интервала. В некоторых случаях значения искомой функции или её производных могут задаваться более чем в двух точках.

Задача Коши иногда называется *одноточечной*, краевые задачи – *двухточечными* (иногда, многоточечными).

Краевая задача не всегда имеет решение, а если она его и имеет, то во многих случаях оно не является единственным. Ниже мы подробнее познакомимся с указанным понятием на примерах.

В некоторых случаях путём надлежащей замены переменных удаётся *понизить порядок дифференциального уравнения*, т.е. уравнение второго порядка решается последовательным рассмотрением двух уравнений первого порядка.

Рассмотрим три типа таких уравнений.

1. *Уравнения вида* $y'' = f(x)$, *содержащие только производную и независимую переменную*, решаются путём последовательного интегрирования:

$$y' = \int f(x)\, dx + C_1,$$

$$y = \int\left(\int f(x) dx + C_1\right) dx + C_2 .$$

2. *Уравнения вида* $F(x, y', y'') = 0$, *не содержащие искомой функции* y, допускают понижение порядка с помощью подстановки $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$.

При этом получаем два последовательно решаемых дифференциальных уравнения первого порядка:

$$F(x, y', y'') = 0 \iff \begin{cases} y' = z, \\ F(x,\ z,\ z') = 0. \end{cases}$$

3. *Уравнения вида* $F(x, y', y'') = 0$, *явно не содержащие переменную x*, допускают понижение порядка путём подстановки $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy} = pp'$.

При этом получаем два следующих последовательно решаемых уравнения первого порядка:

$$F(y, y', y'') = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y' = p(y), \\ F(y;\ p;\ p') = 0. \end{cases}$$

Формальное отсутствие аргумента *x* позволяет рассматривать функцию *p* как функцию аргумента *y*.

1.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

1.2.1. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых $y = Cx^3$.

Решение. Продифференцируем по *x* равенство $y = Cx^3$, получим $y' = 3Cx^2$. Кроме того, очевидно, $C = \dfrac{y}{x^3}$. Поэтому искомое дифференциальное уравнение принимает вид: $xy' = 3y$.

1.2.2. Зная, что $y = C\ln x$ является общим решение уравнения $xy'\ln x = y$, найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(e,1)$.

Решение. В данном случае необходимо найти решение задачи Коши с начальным условием $y(e) = 1$: $y(e) = C\ln e = 1$, откуда $C = 1$. Искомая интегральная кривая задаётся теперь уравнением $y = \ln x$.

1.2.3. Найти общее решение уравнения $xy' = (4 + y^2)\ln x$.

Решение. Имеем уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\frac{dy}{dx} = (4 + y^2)\ln x.$$

Умножим обе части уравнения на *dx*: $xdy = (4 + y^2)\ln x dx$.

Далее обе части уравнения поделим на выражение $x(4 + y^2)$, которое, очевидно, в данном уравнении не может обратиться в ноль:

$$\frac{dy}{4 + y^2} = \frac{\ln x}{x}dx.$$

Таким образом, мы разделили переменные. Интегрируем теперь обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{4+y^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx \, , \; \int \frac{dy}{2^2+y^2} = \int \ln x \, d(\ln x) \, ,$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{1}{2}C \, .$$

Итак, получено общее решение уравнения в неявном виде:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \ln^2 x + C \, .$$

1.2.4. Решить задачу Коши: $(2xy+x)dx - (x^2+1)dy = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

Решение. Перепишем уравнение в виде $x(2y+1)dx = (x^2+1)dy$ и разделим переменные. Поделив обе части уравнения на произведение $(2y+1)(x^2+1)$, получим: $\frac{x}{x^2+1}dx = \frac{dy}{2y+1}$.

Интегрируем:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{dy}{2y+1} \, ; \; \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} \, ,$$

откуда

$$\ln(x^2+1) = \ln(2y+1) + \ln C \, .$$

Упростим теперь решение, используя свойства логарифмов:

$$\ln(x^2+1) = \ln C(2y+1) \, .$$

Итак, общее решение уравнения принимает вид $x^2+1 = C(2y+1)$.

Теперь найдём значение постоянной *C*, при котором будет выполнено указанное начальное условие.

Подставляя $x=0, \; y=\frac{1}{2}$ в общее решение, получим:

$$0+1 = C\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right), \; C = \frac{1}{2} \, .$$

Таким образом, имеем решение задачи Коши:

$$x^2+1 = y+\frac{1}{2} \text{ или, в явном виде, } y = x^2+\frac{1}{2} \, .$$

Замечание 1. Для определённости считаем, что выражения, стоящие под знаком логарифма, положительны, поэтому не записываем соответствующий знак модуля.

Замечание 2. Здесь и в дальнейшем используются следующие свойства логарифмов:

$$\ln a + \ln b = \ln ab; \quad \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}; \quad k\ln a = \ln a^k;$$

$$\ln z = m \Leftrightarrow z = e^m; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln e = 1.$$

1.2.5. Найти общее решение уравнения $xy' - y + x\cos^2\frac{y}{x} = 0$.

Решение. Непосредственное разделение переменных в данном случае невозможно, но выражение $\cos^2\frac{y}{x}$ наводит на мысль об однородном уравнении вида (1.5). Действительно, поделив обе части на x, получим:

$$y' - \frac{y}{x} + \cos^2\frac{y}{x} = 0.$$

Далее сделаем подстановку $t = \frac{y}{x}$, $y' = t + t'x$:

$$t + xt' - t + \cos^2 t = 0 \quad \text{или} \quad xt' + \cos^2 t = 0.$$

Теперь решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dt}{dx} = -\cos^2 t; \quad -\frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем: $-\operatorname{tg} t = \ln x + \ln C$ или $\ln Cx + \operatorname{tg} t = 0$.

В результате обратной подстановки приходим к общему решению в неявном виде:

$$\ln Cx + \operatorname{tg}\frac{y}{x} = 0.$$

1.2.6. Решить уравнение $y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решение. Данное уравнение является линейным (см. соответствующие характерные признаки).

Сделав подстановку Бернулли $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}; \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{2\sqrt{x}}\right) = 2e^{\sqrt{x}}.$$

Полагаем $v' - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0$, тогда $u'v = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решение исходного уравнения сводится к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

1. Функцию $v = v(x)$ найдём из первого уравнения $v' - \dfrac{v}{2\sqrt{x}} = 0$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0\,,\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\,,\ \int\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx\,,\ \ln v = x^{\frac{1}{2}}\,,$$

$v = e^{\sqrt{x}}$ (выбрана одна из первообразных $v = v(x)$).

2. Подставим $v = e^{\sqrt{x}}$ во второе уравнение $u'v = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решив его, найдём общее решение $u = u(x, C)$:

$$\frac{du}{dx}e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}\,,\ du = 2\,dx\,,\ \int du = 2\int dx\,,\ u = 2x + C\,.$$

Поскольку $y = uv$, то общее решение линейного уравнения запишется в виде $y = (2x + C)e^{\sqrt{x}}$.

1.2.7. Найти решение задачи Коши $y' = \dfrac{y}{x} - y^2$, $y(1) = -1$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли с $n = 2$: $y' - \dfrac{1}{x}y = -y^2$. Полагаем $y = uv$, тогда $u'v + u\left(v' - \dfrac{v}{x}\right) = -u^2v^2$.

Решаем последовательно два уравнения.

1. Из уравнения $v' - \dfrac{v}{x} = 0$, находим функцию $v(x)$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0\,,\ \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}\,,\ \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x}\,,\ \ln v = \ln x\,,\ v = x\,.$$

2. Подставляем $v = x$ во второе уравнение $u'v = -u^2v^2$:

$$\frac{du}{dx}x = -x^2u^2\,,\ u^{-2}du = -x\,dx\,,\ -\frac{1}{u} = -\frac{x^2}{2} + C\,,\ u = \frac{2}{x^2 - 2C}\,.$$

Так как $y = uv$, то общее решение уравнения Бернулли: $y = \dfrac{2x}{x^2 - 2C}$.

Используем начальные условия $x = 1,\ y = -1$, для нахождения соответствующего значения константы C: $-1 = \dfrac{2}{1 - 2C}$, $C = \dfrac{3}{2}$.

Итак, решение задачи Коши имеет вид: $y = \dfrac{2x}{x^2 - 3}$.

1.2.8. Решить уравнение $y\,dx-\left(x+y^2\sin y\right)dy=0$.

Решение. Данное уравнение линейно относительно функции $x=x(y)$, где y – аргумент. Действительно:

$$y\frac{dx}{dy}-x-y^2\sin y=0\,,\ \frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y\sin y\,,\ x'-\frac{1}{y}x=y\sin y\,.$$

Делаем подстановку Бернулли: $x=uv,\ x'=u'v+uv'$.

Тогда получим уравнение: $u'v+u\left(v'-\dfrac{v}{y}\right)=y\sin y$.

Далее получаем два уравнения с разделяющимися переменными.

1. $v'-\dfrac{v}{y}=0$,

$$\frac{dv}{dy}=\frac{v}{y}\,,\quad \frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}\,,\quad \ln v=\ln y\,,\quad v=y\,.$$

2. $u'v=y\sin y$.

Выбрав $v=y$, получим

$$\frac{du}{dy}y=y\sin y\,,\quad du=\sin y\,dy\,,\quad u=-\cos y+C\,.$$

Общее решение уравнения: $y=Cy-y\cos y$.

1.2.9. Найти общее решение уравнения $\sin\dfrac{x}{3}-y''=6-2x$.

Решение. Имеем уравнение второго порядка, которое содержит только вторую производную искомой функции и её аргумент. Выразим явно вторую производную: $y''=\sin\dfrac{x}{3}+2x-6$.

Интегрируем: $y'=\displaystyle\int\left(\sin\frac{x}{3}+2x-6\right)dx=-3\cos\frac{x}{3}+x^2-6x+C_1$.

Для того чтобы найти функцию $y(x)$, проинтегрируем ещё раз:

$$y=\int\left(-3\cos\frac{x}{3}+x^2-6x+C_1\right)dx;\ \ y=-9\sin\frac{x}{3}+\frac{x^3}{3}-3x^2+C_1x+C_2.$$

1.2.10. Найти общее решение уравнения второго порядка

$$x\,y''=y'\ln\frac{y'}{x}\,.$$

Решение. Данное уравнение не содержит явно функции y, поэтому сделаем подстановку $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. Получим однородное уравнение первого порядка: $z' = \frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}$, которое решается с помощью замены $\frac{z}{x} = t$:

$t'x + t = t\ln t$; $\quad t'x = t(\ln t - 1)$; $\quad \frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$; $\quad \int\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \int\frac{dx}{x}$;

$\ln(\ln t - 1) = \ln C_1 x$; $\ln t - 1 = C_1 x$; $\ln t = C_1 x + 1$, откуда $t = e^{xC_1 + 1}$.

Теперь $\frac{z}{x} = e^{xC_1+1}$; $z = xe^{xC_1+1}$.

Итак, получено ещё одно уравнение первого порядка (в данном случае с разделяющимися переменными) $y' = xe^{xC_1+1}$.

Ясно, что $y = \int xe^{xC_1+1}dx$. Интегрируем «по частям»:

$$\int xe^{xC_1+1}dx = \left| \begin{matrix} x = u, & e^{xC_1+1}dx = dv \\ dx = du, & \frac{1}{C_1}e^{xC_1+1} = v \end{matrix} \right| = \frac{x}{C_1}e^{xC_1+1} - \frac{1}{(C_1)^2}e^{xC_1+1} + \text{const}.$$

Общее решение уравнения принимает вид: $y = \frac{C_1x - 1}{C_1^2}e^{xC_1+1} + C_2$.

1.2.11. Решить задачу Коши: $yy'' + \frac{9}{y^2} = 0$; $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = 9$.

Решение. Имеем уравнение, которое явно не содержит переменную x. Полагаем $y' = p(y)$, $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Следовательно, уравнение запишется в виде: $yp\frac{dp}{dy} + \frac{9}{y^2} = 0$. Разделяем переменные, затем интегрируем:

$p\,dp = -\frac{9}{y^3}dy$; $\int p\,dp = -9\int y^{-3}\,dy$, $\frac{p^2}{2} = \frac{9}{2y^2} + \frac{C_1}{2}$.

Далее получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(y')^2 = \frac{9}{y^2} + C_1.$$

Постоянную C_1 можно найти уже на этом этапе, если использовать начальные условия: $y(0) = \frac{1}{3}$, $y'(0) = 9 \;\Rightarrow\; 9^2 = 81 + C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 0$.

Остаётся решить уравнение $(y')^2 = \dfrac{9}{y^2}$ или $y' = \dfrac{3}{y}$ (при извлечении корня взят знак «плюс», так как в точке $x=0$, а значит и в некоторой её окрестности, значения y и y' имеют одинаковый знак).

Разделяя переменные, имеем: $y\,dy = 3\,dx$, $y^2 = 6x + C_2$.

Значение C_2 находим из условия $y(0) = \dfrac{1}{3}: \dfrac{1}{9} = 0 + C_2$, $C_2 = \dfrac{1}{9}$.

Следовательно, $y^2 = 6x + \dfrac{1}{9}$ или $y = \dfrac{\sqrt{54x+1}}{3}$.

1.2.12. Найти решение уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее условиям: $y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение. В данном случае имеем так называемую *краевую задачу*.

Прежде всего найдём общее решение дифференциального уравнения. Так как в уравнении отсутствует аргумент x, то сделаем подстановку третьего типа: $y' = p(y)$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.

Далее решим уравнение с разделяющимися переменными:

$$p\frac{dp}{dy} + y = 0,\ pdp = -ydy,\ \frac{p^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + \frac{C_1}{2},\ p = \sqrt{C_1 - y^2}.$$

Возвращаемся к y', получаем уравнение: $y' = \sqrt{C_1 - y^2}$.

Решаем его: $\dfrac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = dx$, $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = x + C_2$.

Интеграл в левой части равенства найдём с помощью замены переменной $y = \sqrt{C_1}\sin z$: $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{C_1}} + \text{const}$.

Итак, общее решение заданного уравнения:

$$\arcsin\frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2 \quad \text{или} \quad y = \sqrt{C_1}\sin(x + C_2).$$

Используем теперь краевые условия: $x = 0,\ y = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2},\ y = 1$.

Подставляя их в общее решение, получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{C_1}\sin C_2 = 0, \\ \sqrt{C_1}\cos C_2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} C_2 = 0, \\ \sqrt{C_1} = \dfrac{1}{\cos C_2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $y = \sin x$ является единственным решением данной краевой задачи.

1.3. БЛОК КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1.3.1. Теоретические упражнения

1. Доказать, что функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению $y = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)dx$ (предполагается, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши).

2. Пусть $f(x)$, $g(y)$ – функции, непрерывные в окрестностях точек x_0 и y_0 соответственно, $f(x_0) = 0$, $g(y_0) = 0$. Доказать, что каждая из функций $x = x_0$ и $y = y_0$ является решением уравнения $f(x)dy + g(y)dx = 0$.

3. С помощью замены переменных $t = \dfrac{y+a}{x+b}$ найти общее решение уравнения вида $y' - \dfrac{y+a}{x+b} = (x+b)f'(x)$ (здесь a, b – любые постоянные величины, f – произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

4. С помощью замены переменных $u = x + by$ найти общее решение уравнения вида $y' = \dfrac{a(x+by)+p}{x+by+q}$ (здесь a, b, p, q – любые постоянные ненулевые величины).

5. Найти общее решение уравнения $\left(kx + e^{ky} f'(y)\right)y' = 1$ ($k \neq 0$ – любая постоянная величина, f – произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

6. Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x)$ пересекаться?

7. Пусть y_1 и y_2 – два различных решения уравнения $y' + p(x)y = g(x)$. При каком соотношении между постоянными C_1 и C_2 функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ будет решением данного уравнения?

8. Найти общее решение уравнения $y' + y\varphi'(x) - \varphi(x)\varphi'(x) = 0$, где $\varphi(x)$ – заданная функция.

9. Может ли решение уравнения $y' = y$ $(y \neq 0)$ иметь точки минимума?

10. Решить уравнение $y(x) = \int\limits_0^x y(t)\,dt + x + 1$.

1.3.2. Задачи для самостоятельного решения

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

$(y+1)dx - (1-x)dy = 0$; (Ответ: $y = C(1-x) - 1$);

$e^y(1+x^2)y' = 2x(1+e^y)$; (Ответ: $y = \ln\left|Cx^2 + C - 1\right|$);

$y' = 2^{x+y}$; (Ответ: $2^x + 2^{-y} = C$);

$\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ y(0) = 1$; (Ответ: $y = \pm\sqrt{1-\arcsin^2 x}$);

$y'\sin x = y\cos x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; (Ответ: $y = \sin x$);

$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$; (Ответ: $y = \dfrac{1}{1+\ln\left|x^2-1\right|}$);

$x + xy^2 + (x^2y - y)y' = 0,\ y(0) = 1$; (Ответ: $y^2 = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$).

Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

$xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$; (Ответ: $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$);

$y' = \dfrac{x+y}{x-y}$; (Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{Cx^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$);

$x^2 y' = x^2 + xy + y^2$; (Ответ: $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\left(\ln\left|Cx\right|\right)$);

$y + \sqrt{xy} = xy'$; (Ответ: $y = \frac{x}{4}\ln^2\left|Cx\right|$);

$x^2 y' + xy - x^2 - y^2 = 0,\ y(1) = 0$; (Ответ: $\frac{x}{x-y} = \ln\left|Cx\right|$);

$xy' = y(\ln y - \ln x),\ \ y(1) = e$; (Ответ: $y = e\,x$);

$\left(y' - \frac{y}{x}\right)\operatorname{ctg}\frac{y}{x} = 1,\ y(1) = \frac{\pi}{2}$; (Ответ: $\sin\frac{y}{x} = x$).

Решить линейные уравнения или уравнения Бернулли:

$y' + 2y = 3e^x$; (Ответ: $y = \frac{3}{5}e^{3x} + Ce^{-2x}$);

$y' + y\operatorname{tg} x = \sin 2x$; (Ответ: $y = -2\cos^2 x + C\cos x$);

$y' - \frac{2y}{x+1} = y^2(x+1)^4$; (Ответ: $y = \frac{6(x+1)}{(x+1)^2 + 6C}$);

$y' - \frac{y}{x} + y^2 = 0,\ y(1) = 1$; (Ответ: $y = \frac{2x}{x^2+1}$);

$y' + y = \frac{x+3}{2},\ y(1) = \frac{1}{2}$; (Ответ: $y = \frac{x+2}{2} - e^{-x+1}$);

$y' + y = x^2 e^{-x},\ y(0) = 3$; (Ответ: $y = \frac{x^3+9}{3}e^{-x}$);

$y^2\,dx + (xy - 1)dy = 0$; (Ответ: $xy = \ln\left|Cy\right|$).

Указание: рассмотреть данное уравнение как линейное относительно $x(y)$.

Решить следующие дифференциальные уравнения, понижая их порядок:

$y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - x\sin x$;

(Ответ: $y = (x+3)\ln\left|x\right| + x\sin x - x + C_1 x + C_2$);

$x\,y'' = 1 + y'$; (Ответ: $y = \frac{C_1 x^2}{2} - x + C_2$);

$y'' x\ln x = y'$; (Ответ: $y = C_1 x\left(\ln\left|x\right| - 1\right) + C_2$);

$y'' = \left(e^{2x} + \sin 3x\right)x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$;

(Ответ: $y = \frac{x-1}{4}e^{2x} - \frac{x}{9}\sin 3x + \frac{5}{4}(x+1)$;

$\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0,\ y(0)=0, y'(0)=3;$ (Ответ: $y=3x+x^3$);

$y''\operatorname{tg} y=2(y')^2,\ y(1)=\dfrac{\pi}{4},\ y'(1)=-2.$ (Ответ: $\operatorname{ctg} y=5-4x$);

$$\begin{cases} y'''=x^2+3x-1, \\ y(0)=1,\ y'(0)=2,\ \ y''(0)=3. \end{cases}$$

(Ответ: $y=\dfrac{x^5}{60}+\dfrac{x^4}{8}-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3}{2}x^2+2x+1$).

1.3.3. Тесты

ТЕСТ 1

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y'=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}$; 2) $y'+y-xy^2=0$; 3) $x\left(y^2-4\right)dx+y\,dy=0$; 4) $y'+\dfrac{xy}{1-x^2}=\arcsin x$.	**Варианты ответов:** уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли.
Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $2x^2y''-(y')^2=0$; 2) $y''=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x$; 3) $3y\,y'-7y''=0$.	**Варианты ответов:** последовательное интегрирование обеих частей уравнения; подстановка $y'=z(x),\ y''=z'(x)$; подстановка $y'=p(y),\ y''=p\dfrac{dp}{dy}$.
Задание 3. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения $y\,dy=\dfrac{dx}{2(x+1)}$.	**Варианты ответов:** ○ $y=e^x$; ○ $y=2$; ○ $y=\dfrac{1}{x+1}$; ○ $y=\sqrt{\ln(x+1)}$.

Задание 4. Решениями уравнения $y'' = 2(x+1)+e^x$ являются функции …	**Варианты ответов:** (укажите два ответа) ○ $y = \frac{(x+1)^3}{3} + e^x + C_1 x + C_2$; ○ $y = (x+1)^3 + e^x + C_1 x + C_2$; ○ $y = x^3 + x^2 + e^x + C_1 x + C_2$; ○ $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + e^x + C_1 x + C_2$.
Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является …	**Варианты ответов:** ○ $xyy' = 1 - x^2$; ○ $ydx + \operatorname{ctg} x dy = 0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$; ○ $y' = 3y - 1$; ○ $(y'')^2 + (y')^2 = 1,\ y(0) = 1,\ y(1) = 2$.
Задание 6. Функция $y = C(x+1)$ является решением уравнения $y' + 2 = 0$, если C принимает значение …	**Укажите ответ**
Задание 7. Решите задачу Коши $\begin{cases} xy' - 6y = x, \\ y(1) = \frac{1}{6}, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y(0)$.	**Укажите ответ**
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 2xy' = 1 + y^2$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 2

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y'\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$; 2) $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$; 3) $x\left(y^2 - 4\right)dx + y\,dy = 0$; 4) $y' + 2xy = 2x^3y^3$.	**Варианты ответов:** уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли.
Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $y'' = xe^{-x}$; 2) $(y')^3 + yy'' = (y')^2$; 3) $y' + (x+1)y'' = 0$.	**Варианты ответов:** последовательное интегрирование обеих частей уравнения; подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$; подстановка $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.
Задание 3. Укажите функции, являющиеся решениями уравнения $xy^2 = y'$.	**Варианты ответов:** (укажите два ответа) ○ $y = 4 - \dfrac{2}{x^2}$; ○ $y = \dfrac{x^2}{2}$; ○ $y = -\dfrac{2}{x^2}$; ○ $y = \dfrac{2}{x^2}$.
Задание 4. Общим решением уравнения второго порядка $y'' = x^2 + x$ является функция …	**Варианты ответов:** ○ $y = \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{6}x^3 + C$; ○ $y = x^4 + x^3 + C_1x + C_2$; ○ $y = \dfrac{1}{12}x^4 + \dfrac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$; ○ $y = \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$.

Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является …	**Варианты ответов:** ○ $y'x + y + xy^2 = 0$; ○ $y'' = e^{-2x},\ y(0) = 1,\ y(2) = e^{-4}$; ○ $yy'' = (y')^2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$; ○ $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$.
Задание 6. Укажите, при каком значении C функция $y = x^3$ является решением уравнения $y' = Cx^2$.	**Укажите ответ**
Задание 7. Решите задачу Коши $\begin{cases} y' = 2e^{-2y}, \\ y\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y\left(\frac{e}{4}\right)$.	**Укажите ответ**
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $\frac{xy' - y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $\cos xy' + \sin xy = 1$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y^2y'' + 1 = 0$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 3

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $xy' - y^2\ln x + y = 0$; 2) $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$; 3) $xy' - y = x^2\cos x$; 4) $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.	**Варианты ответов:** уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли.

Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $y''x - y' = \cos\frac{y''}{x}$; 2) $7yy'' - y^2 = (y')^2$; 3) $y''\sin^4 x = \sin 2x$.	**Варианты ответов:** последовательное интегрирование обеих частей уравнения; подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$; подстановка.
Задание 3. Укажите функцию, являющуюся решением уравнения $y' = -\operatorname{tg} x$.	**Варианты ответов:** ○ $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$; ○ $y = \ln(\cos x)$; ○ $y = \frac{\sin x}{\cos x}$; ○ $y = \ln(\sin x)$.
Задание 4. Решениями уравнения $y'' = x^2 + 4x + 4$ являются функции …	**Варианты ответов:** (укажите два ответа) ○ $y = \frac{1}{12}(x-2)^4 + C$; ○ $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + C_1 x + C_2$; ○ $y = (x+2)^4 + C_1 x + C_2$; ○ $y = \frac{1}{12}(x+2)^4 + C_1 x + C_2$.
Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является …	**Варианты ответов:** ○ $y'' = \frac{e^y}{2}$; ○ $(y+1)dx + (x^2 - 2)dy = 0$; ○ $y' + (x+5)y = xy^2,\ y(0) = 2$; ○ $2yy'' = 4 + (y')^2$.
Задание 6. Укажите, при каком значении C функция $y = e^{2x+3}$ является решением уравнения $y' - 2y + C = 2$.	**Укажите ответ**

Задание 7. Решите задачу Коши $\begin{cases} xy' - y = -2xy^2, \\ y(1) = 1, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y(2)$.	**Укажите ответ**
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $x^2 y' = y(x - y)$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y' = xy + x^3 y^2$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $\left(1 - x^2\right) y'' + xy' = 0$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 4

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$; 2) $y' + xy + (2 - x)e^x y^2 = 0$; 3) $\left(1 + x^2\right) dy + y\,dx = 0$; 4) $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y \sin\dfrac{y}{x}$.	**Варианты ответов:** уравнение с разделяющимися переменными; однородное уравнение первого порядка; линейное уравнение первого порядка; уравнение Бернулли.
Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $y'' \operatorname{ctg} 3x + y' = 0$; 2) $y'' = \cos^2 x + e^{3x} + 8x^2$; 3) $(y')^2 = (2y + 3y')y''$.	**Варианты ответов:** последовательное интегрирование обеих частей уравнения; подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$; подстановка $y' = p(y),\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$.
Задание 3. Укажите функции, являющиеся решениями уравнения. $dy - 3x^2 y\,dx = 0$.	**Варианты ответов:** (укажите два ответа) ○ $y = e^{x^3}$; ○ $y = e^x + 2$; ○ $y = e^{x^3 - 1}$; ○ $y = 2e^{x^2}$.

Задание 4. Общим решением уравнения второго порядка $y'' = \cos 3x + e^{2x}$ является функция …	**Варианты ответов:** ○ $y = \frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$; ○ $y = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$; ○ $y = \cos 3x + 2e^{2x} + C_1 x + C_2$; ○ $y = -\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$.
Задание 5. Среди перечисленных задач «задачей Коши» является …	**Варианты ответов:** ○ $y''\sin^2 x = 2y$; ○ $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0,$ $y(0) = 2$; ○ $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0,\ y(1) = 1,\ y(3) = 3$; ○ $ydx - xdy + \ln x\, dx = 0$.
Задание 6. Укажите, при каком значении C функция $y = C\sin x$ является решением уравнения $y'' + y' = \cos x - \sin x$.	**Укажите ответ**
Задание 7. Решите задачу Коши $\begin{cases} y'(x+5)^2 = 4y^2, \\ y(-4) = \frac{1}{4}, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y(-3)$.	**Укажите ответ**
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $xy' - y = x \cdot \cos x$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$.	**Запишите полное решение**

2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1.1. Основные понятия, структура общего решения

Линейным дифференциальным уравнением (*ЛДУ*) *второго порядка* называется уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{2.1}$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ непрерывны на некотором интервале $(a;b)$.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (2.1) называется *линейным однородным дифференциальным уравнением* (*ЛОДУ*):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2.2}$$

а в противном случае – *линейным неоднородным* (ЛНДУ).

Общее решение $y_о$ *линейного однородного дифференциального уравнения* имеет вид

$$y_о = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{2.3}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно независимые решения этого уравнения (фундаментальная система решений), C_1, C_2 – произвольные постоянные.

При этом функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* в промежутке $(a;b)$, если их отношение $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ (в этом промежутке) не является постоянной величиной. В противном случае функции называются *линейно зависимыми*.

Для того, чтобы частные решения уравнения (2.2) $y_1(x)$ и $y_2(x)$ были линейно независимы в промежутке $(a;b)$, необходимо и достаточно, чтобы их *определитель Вронского*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке $x_0 \in (a;b)$.

Общее решение $y_{\text{н}}$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения* представляет собой сумму

$$y_{\text{н}} = y_{\text{о}} + y_{\text{ч}}, \qquad (2.4)$$

где $y_{\text{о}}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения (2.2); $y_{\text{ч}}$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения (2.1).

Остановимся подробнее на линейных уравнениях с постоянными коэффициентами, для которых существуют стандартные алгоритмы решения.

2.1.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Если в уравнении (2.2) все коэффициенты постоянны, то оно называется *линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами*

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2.5)$$

где p, q – действительные числа.

Решение этого уравнения будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$. Значения параметра λ определяются как решения квадратного уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad (2.6)$$

которое называется *характеристическим уравнением*.

Чтобы получить общее решение уравнения (2.5), следует воспользоваться следующим *алгоритмом*:

– найти корни соответствующего характеристического уравнения

$$\lambda_{1,\,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2},$$

где $D = p^2 - 4q$;

– записать фундаментальную систему решений (ФСР);

– использовать формулу (2.3) для записи $y_{\text{о}}$.

При нахождении корней характеристического уравнения (2.6) и построении ФСР возникают следующие случаи, приведённые в табл.1.

Таким образом, решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами сводится к вышеуказанной простой последовательности действий.

Таблица 1

Характеристическое уравнение		Фундаментальная система решений ЛОДУ	Вид общего решения ЛОДУ
дискриминант	корни		
$D>0$	действительные различные $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = e^{\lambda_2 x}$	$y_о = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$
$D=0$	действительные равные $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = x e^{\lambda x}$	$y_о = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x)$
$D<0$	комплексно-сопряжённые $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $i^2 = -1$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y_о = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

2.1.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0; \quad p_j = \text{const}; \quad j = \overline{1, n}\,. \qquad (2.7)$$

Фундаментальную систему решений уравнения (2.7) можно найти следующим образом.

1. Составить характеристическое уравнение (алгебраическое уравнение n-й степени с теми же коэффициентами, что и (2.7)):

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0\,. \qquad (2.8)$$

Это уравнение имеет n корней, среди которых могут быть действительные простые или кратные корни, а также пары комплексно-сопряжённых корней (простых или кратных).

2. Если все корни λ_j уравнения (2.8) простые и действительные, то получаем следующую фундаментальную систему решений уравнения:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ y_n = e^{\lambda_n x}\,.$$

3. Каждому действительному корню λ кратности k соответствует ровно k линейно независимых решений уравнения:

$$y_1 = e^{\lambda x},\ y_2 = x e^{\lambda x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}\,.$$

4. Каждой паре комплексно-сопряжённых корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ кратности m соответствует ровно $2m$ линейно-независимых решений уравнения (2.7) вида

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Получив ФСР, общее решение уравнения (2.7) записываем в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

2.1.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Речь идёт об уравнениях вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2.9}$$

где p, q – действительные числа, $f(x)$ – непрерывная на некотором интервале $(a;b)$ функция.

Общее решение ЛНДУ находится по формуле (2.4). Так как общее решение $y_{\text{о}}$ соответствующего линейного однородного уравнения легко находится по указанному выше алгоритму, то основная трудность состоит в нахождении какого-нибудь частного решения $y_{\text{ч}}$ неоднородного уравнения (2.9).

Для отыскания частного решения используют *метод вариации произвольных постоянных* (*метод Лагранжа*). Метод заключается в следующем.

Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения (2.5).

Тогда частное решение уравнения (2.9) можно представить в виде

$$y_{\text{ч}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{2.10}$$

где $C_1(x), C_2(x)$ – некоторые неизвестные функции.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ находятся с помощью системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases} \tag{2.11}$$

Можно доказать, что эта система имеет единственное решение $\{C_1'(x);\ C_2'(x)\}$.

Далее функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ восстанавливают как первообразные:

$$C_1(x)=\int C_1'(x)dx \text{ и } C_2(x)=\int C_2'(x)dx\,.$$

Когда правая часть $f(x)$ линейного неоднородного уравнения имеет специальный вид (ниже указаны возможные случаи), его частное решение $y_\text{ч}$ можно найти *методом неопределённых коэффициентов* (*методом подбора частного решения*).

Суть метода в том, что заранее можно определить структуру частного решения. Данный метод сводится к случаям, приведённым в табл. 2.

Изложим *алгоритм нахождения частного решения* $y_\text{ч}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения, правая часть которого имеет «специальный вид».

1. Определим структуру частного решения $y_\text{ч}$ (см. табл. 2).
2. Найдём производные $y_\text{ч}'$ и $y_\text{ч}''$.
3. Подставим $y_\text{ч}$, $y_\text{ч}'$ и $y_\text{ч}''$ в исходное неоднородное уравнение (2.9).
4. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x (или при синусах и косинусах, соответственно) в левой и правой части полученного тождества. Получим систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов.
5. Найдём коэффициенты, решив систему.
6. Запишем частное решение $y_\text{ч}$ с уже найденными коэффициентами.

Замечание 1.

Метод неопределённых коэффициентов может применяться и в случае, когда правая часть неоднородного уравнения представляет собой сумму нескольких функций рассмотренных выше видов.

Так, если $y_{\text{ч},1}$ и $y_{\text{ч},2}$ – частные решения соответственно уравнений

$$y''+p\,y'+q\,y=f_1(x) \text{ и } y''+p\,y'+q\,y=f_2(x),$$

то функция $y_\text{ч}=y_{\text{ч},1}+y_{\text{ч},2}$ является частным решением уравнения

$$y''+p\,y'+q\,y=f_1(x)+f_2(x).$$

Замечание 2.

При нахождении структуры частного решения важно правильно записать общий вид многочлена с неизвестными коэффициентами (см. табл. 3).

Таблица 2

Вид правой части $f(x)$ ЛНДУ	Корни характеристического уравнения	Структура частного решения $y_ч$ ЛНДУ
$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен n-й степени с *известными* коэффициентами	α – не является корнем характеристического уравнения	$y_ч=e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n-й степени с *неизвестными* коэффициентами
	α – является корнем характеристического уравнения кратности k	$y_ч=x^k e^{\alpha x}Q_n(x)$
$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(n)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены с *известными* коэффициентами	$\alpha\pm i\beta$ – не являются корнями характеристического уравнения	$y_ч=e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_N(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_N(x)\sin\beta x\right]$, где $\tilde{P}_N(x)$, $\tilde{Q}_N(x)$ – многочлены *одинаковой степени* с *неизвестными* коэффициентами; $N=\max\{n;\ m\}$.
	$\alpha\pm i\beta$ – являются корнями характеристического уравнения кратности k	$y_ч=x^k e^{\alpha x}\left[\tilde{P}_N(x)\cos\beta x+\tilde{Q}_N(x)\sin\beta x\right]$

Таблица 3

Многочлен нулевой степени	$Q_0(x) = A$, где $A = \text{const}$
Многочлен первой степени	$Q_1(x) = Ax + B$
Многочлен второй степени	$Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$
……………………………………………………………………….	
Многочлен *n*-й степени	$Q_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, где a_n, a_{n-1}, a_1, a_0 – коэффициенты многочлена.

2.1.5. Системы дифференциальных уравнений

В данном параграфе мы ограничимся рассмотрением систем двух дифференциальных уравнений. С подобными системами приходится встречаться часто в теоретической механике, сопротивлении материалов и в других приложениях математики.

Система дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \varphi(t, x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi(t, x, y), \end{cases} \tag{2.12}$$

где t – независимая переменная; $x(t)$, $y(t)$ – неизвестные функции, называется *нормальной*.

Пара функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ является *решением системы* (2.12), если каждое из уравнений системы они обращают в тождество.

Класс функций вида

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2), \\ y = y(t, C_1, C_2), \end{cases}$$

называется *общим решением системы* (2.12), если при всех значениях произвольных постоянных C_1, C_2, соответствующая пара функций $\{x, y\}$ является решением системы.

Для системы дифференциальных уравнений (2.12) можно сформулировать *задачу Коши*: найти решение

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(y_0) = y_0. \end{cases}$$

С точки зрения механики, решить систему – значит восстановить закон движения точки по известному вектору скорости

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right)\vec{j} .$$

Иногда нормальную систему дифференциальных уравнений удаётся свести к одному уравнению второго порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Это может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одной (*метод исключения*).

Если правые части уравнений системы (2.12) являются линейными функциями, то система называется *линейной*.

Ограничимся рассмотрением *линейной однородной системы с постоянными коэффициентами*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = px + qy, \end{cases} \tag{2.13}$$

где a, b, p, q – некоторые числа.

Переобозначим производные: $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$.

Тогда система (2.13) примет вид

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = px + qy. \end{cases} \tag{2.14}$$

Пусть для определённости $p \neq 0$.

Выразим x из второго уравнения системы (2.14):

$$x = \frac{1}{p}\left(y' - qy\right). \tag{2.15}$$

Дифференцируем второе уравнение системы (2.14) по переменной t:

$$y'' = px' + qy' .$$

Затем подставляем в него x' из первого уравнения системы:

$$y'' = p\left(ax + by\right) + qy' .$$

В полученное равенство вместо x подставим выражение (2.15):

$$y'' = ay' - aqy + pby + qy',$$

или

$$y'' - (a+q)y' + (aq + pb)y = 0\,. \tag{2.16}$$

Соотношение (2.16) – это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, его характеристическое уравнение можно записать с помощью определителя

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ p & q-\lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

В соответствии с корнями λ_1, λ_2 найдём фундаментальную систему решений y_1 и y_2, а затем и общее решение уравнения (2.16):

$$y = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)\,.$$

Затем из равенства (2.15) находим функцию $x(t, C_1, C_2)$. В результате будет получено общее решение системы (2.14).

2.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

2.2.1. Найти общее решение $2y'' + 2y' + 5y = 0$.

Решение. Имеем линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами.

Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$$2\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0\,,$$

$$D = 4 - 40 = -36 = 36 \cdot (-1) = 36 \cdot i^2\,,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36 i^2}}{4} = \frac{-2 \pm 6i}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} i\,.$$

Получены комплексно-сопряжённые корни, причём $\alpha = -\frac{1}{2};\ \beta = \frac{3}{2}$.

Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{3}{2}x\,,\ \ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{3}{2}x\,.$$

Записываем теперь общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$:

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{3}{2}x \right).$$

2.2.2. Решить задачу Коши: $y'' - 8y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$

Решение. Найдём общее решение линейного однородного уравнения.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, в соответствии с которыми получаем фундаментальную систему решений: $y_1 = e^{4x}$, $y_2 = xe^{4x}$.

Теперь общее решение принимает вид:

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} . \tag{2.17}$$

Подберём теперь постоянные C_1 и C_2, используя начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

Найдя производную от функции y (см. (2.17))

$$y' = e^{4x}(4C_1 + C_2 + 4xC_2), \tag{2.18}$$

подставим в равенства (2.17) и (2.18) значения $x = 0, y = 1, y' = 4$ из начальных условий:

$$\begin{cases} e^0(C + 0) = 1, \\ e^0(4C_1 + C_2 + 0) = 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, с учётом (2.17), искомое частное решение имеет вид:

$$y = e^{4x} .$$

2.2.3. Найти решение задачи Коши: $y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 8.$

Решение. Находим корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0 ,\ \lambda(\lambda + 4) = 0 ,\ \lambda_1 = 0 ,\ \lambda_2 = -4 .$$

Записываем общее решение однородного уравнения и находим его производную:

$$y_о = C_1 + C_2\, e^{-4x} ,\ y_о' = -4C_2\, e^{-4x} .$$

Используя начальные условия, получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7, \\ -4C_2 = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 9, \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Тогда частное решение однородного уравнения (решение задачи Коши) принимает вид:

$$y = 9 - 2e^{-4x} .$$

2.2.4. Найти общее решение уравнения $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$.

Решение. Данное уравнение – линейное однородное уравнение третьего порядка.

Запишем соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0 \text{ или } (\lambda + 2)^3 = 0 .$$

Отсюда получаем, что $\lambda_{1,2,3} = -2$ – действительный корень кратности $k = 3$.

Построим теперь фундаментальную систему решений

$$y_1 = e^{-2x},\ y_2 = xe^{-2x},\ y_3 = x^2e^{-2x},$$

и общее решение $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ окончательно запишем в виде в виде $y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right)$.

2.2.5. Найти общее решение уравнения $y'' + 10y' + 25y = \dfrac{x}{x^2+4}e^{-5x}$.

Решение. Согласно структуре $y_\text{н} = y_\text{о} + y_\text{ч}$ общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, рассмотрение начинаем с соответствующего линейного однородного уравнения

$$y'' + 10\,y' + 25\,y = 0 .$$

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$ являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид:

$$y_1(x) = e^{-5x},\ y_2(x) = xe^{-5x}.$$

Запишем общее решение однородного уравнения:

$$y_\text{о} = C_1e^{-5x} + C_2xe^{-5x} .$$

Для нахождения частного решения неоднородного уравнения применим метод вариации произвольных постоянных. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y_\text{ч} = C_1(x)e^{-5x} + C_2(x)xe^{-5x} .$$

Теперь нахождению подлежат функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Составляем систему уравнений для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C'(x)e^{-5x} + C_2'(x)x\,e^{-5x} = 0, \\ C_1'(x)\left(e^{-5x}\right)' + C_2'(x)\left(x\,e^{-5x}\right)' = \dfrac{x}{x^2+4}\,e^{-5x}. \end{cases}$$

Находя производные функций, содержащихся во втором уравнении, имеем:

$$\begin{cases} C'(x)e^{-5x} + C_2'(x)\,x\,e^{-5x} = 0, \\ C_1'(x)\left(-5e^{-5x}\right) + C_2'(x)\left(e^{-5x} - 5xe^{-5x}\right) = \dfrac{x}{x^2+4}\,e^{-5x}. \end{cases}$$

Разделим оба уравнения системы на e^{-5x}:

$$\begin{cases} C'(x) = -x\,C_2'(x), \\ -5C_1'(x) + C_2'(x)(1-5x) = \dfrac{x}{x^2+4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -x\,C_2'(x), \\ C_2'(x) = \dfrac{x}{x^2+4}. \end{cases}$$

Система будет иметь следующее решение:

$$\begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{x^2}{x^2+4}, \\ C_2'(x) = \dfrac{x}{x^2+4}. \end{cases}$$

Для нахождения соответствующих первообразных удобно записать эту систему в виде:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{4}{x^2+4} - 1, \\ C_2'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x}{x^2+4}. \end{cases}$$

Интегрируем каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} C_1(x) = \displaystyle\int\left(\dfrac{4}{x^2+4} - 1\right)dx, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\dfrac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2} - x, \\ C_2(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right). \end{cases}$$

Поскольку $y_ч = C_1(x)e^{-5x} + C_2(x)xe^{-5x}$, то частное решение неоднородного уравнения принимает вид

$$y_ч = \left(2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2} - x + \dfrac{x}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right)e^{-5x}.$$

Наконец, складывая $y_о$ и $y_ч$, получаем общее решение неоднородного уравнения:

$$y_н = \left(C_1 + C_2x + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2} - x + \dfrac{x}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right)e^{-5x}.$$

2.2.6. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = 3e^x$.

Решение. Начнём с соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0 .$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y_{\text{о}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} .$$

Перейдём к нахождению частного решения $y_{\text{ч}}$.

Правая часть неоднородного уравнения представляет собой произведение многочлена и экспоненты, т.е. имеет специальный вид:

$$f(x) = 3e^x = P_0(x) e^{1x} ,$$

где $\alpha = 1$ (при этом α не является корнем характеристического уравнения), $n = 0$ (степень многочлена).

Поэтому частное решение неоднородного уравнения имеет следующую структуру:

$$y_{\text{ч}} = Q_0(x)\, e^{1x} = Ae^x ,$$

где A – неизвестная константа.

Осталось определить коэффициент A.

Для этого находим производные: $y'_{\text{ч}} = Ae^x$, $y''_{\text{ч}} = Ae^x$.

Подставляем y, $y'_{\text{ч}}$, $y''_{\text{ч}}$ в исходное неоднородное уравнение:

$$Ae^x - 2Ae^x - 3Ae^x = 3e^x \text{ или } 4Ae^x = -3e^x ,$$

откуда $4A = -3$, $A = -\dfrac{3}{4}$.

Итак, частное решение неоднородного уравнения $y_{\text{ч}} = -\dfrac{3}{4} e^x$.

Общее решение неоднородного уравнения находим как сумму $y_{\text{о}} + y_{\text{ч}}$:

$$y_{\text{н}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{4} e^x .$$

2.2.7. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' = 18x - 18x^2 - 2$.

Решение. Однородное уравнение имеет вид $y'' - 6y' = 0$.

Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda = 0$ являются числа $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 6$.

Запишем общее решение однородного уравнения:

$$y_о = C_1e^0 + C_2e^{6x}\text{, т.е. } y_о = C_1 + C_2e^{6x}.$$

Найдём теперь частное решение неоднородного уравнения $y_ч$. Правая часть исходного уравнения представляет собой многочлен второй степени:

$$f(x) = -18x^2 + 18x - 2 = P_2(x)e^{0x},$$

где $\alpha = 0$ (α является корнем характеристического уравнения кратности $k = 1$); $n = 2$ (степень многочлена).

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_ч = x^1Q_2(x)e^{0x} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Осталось, подставив $y, y'_ч, y''_ч$ в уравнение, найти коэффициенты *A*, *B*, *C*.

Поскольку

$$y'_ч = 3Ax^2 + 2Bx + C,\quad y''_ч = 6Ax + 2B,$$

то

$$(6Ax + 2B) - 6\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = -18x^2 + 18x - 2,$$

$$-18Ax^2 + (6A - 12B)x + 2B - 6C = -18x^2 + 18x - 2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменой *x*, имеем:

$$\begin{cases} -18A = -18, \\ 6A - 12B = 18, \\ 2B - 6C = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -1, \\ C = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $y_ч = x^3 - x^2$, и общее решение неоднородного уравнения принимает вид:

$$y_н = y_о + y_ч = C_1 + C_2e^{6x} + x^3 - x^2.$$

2.2.8. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = 4\sin 2x$.

Решение. Найдём общее решение однородного уравнения:

$$y'' + 4y = 0;\quad \lambda^2 + 4 = 0;\quad \lambda_{12} = \pm 2i;$$

следовательно,

$$y_о = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Далее, правая часть уравнения имеет специальный вид:

$$f(x) = 4\sin 2x = 0\cos 2x + 4\sin 2x = e^{0x}\left[P_0(x)\cos 2x + Q_0(x)\sin 2x\right],$$

где $\alpha = 0$, $\beta = 2$ (числа $\alpha \pm i\beta = \pm 2i$ являются корнями характеристического уравнения кратности $k = 1$); $n = 0, m = 0$ (степени многочленов, причём $N = \max\{n, m\} = 0$).

Поэтому частное решение неоднородного уравнения будет иметь следующую структуру:

$$y_{ч} = x^1 e^{0x}\left[\tilde{P}_0(x)\cos 2x + \tilde{Q}_0(x)\sin 2x\right] = x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Далее дифференцируем

$$y'_{ч} = A\cos 2x + B\sin 2x - 2x\left(A\sin 2x - B\cos 2x\right),$$
$$y''_{ч} = -4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4x\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right).$$

Подставляя $y_{ч}$ и $y''_{ч}$ в исходное неоднородное уравнение, имеем (убедитесь в этом самостоятельно):

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin 2x$ и $\cos 2x$ в левой и правой частях полученного равенства, мы получаем систему:

$$\begin{cases} -4A = 4, \\ 4B = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{ч} = -x\cos 2x.$$

Окончательно получаем решение уравнения:

$$y_{н} = y_{о} + y_{ч} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x\cos 2x.$$

2.2.9. Найти общее решение уравнения $9y'' + 6y' + y = 3$.

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения $9y'' + 6y' + y = 0$ имеет вид:

$$y_0 = \left(C_1 + xC_2\right)e^{-\frac{x}{3}},$$

так как корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Правую часть неоднородного уравнения можно записать следующим образом:

$$f(x) = 3 = 3 \cdot e^{0 \cdot x} = P_0(x) \cdot e^{0 \cdot x},$$

где $\alpha = 0$ (α не совпадает с корнями λ_1, λ_2), $n = 0$ (степень многочлена).

Поэтому частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_ч = Q_0(x) e^{0x} = A$.

Дифференцируем: $y'_ч = y''_ч = 0$. Подставляя результаты в исходное уравнение, получим $A = 3$.

Итак, частное решение неоднородного уравнения $y_ч = 3$, а его общее решение:

$$y_н = (C_1 + xC_2) e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

2.2.10. Решить задачу Коши $y'' + 3y' + 2y = 6\cos 3x + 2\sin 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Решение. Имеем линейное неоднородное уравнение с правой частью специального вида. Найдём сначала общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + 3y' + 2y = 0;$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \ \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2;$$

$$y_о = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Рассмотрим правую часть исходного неоднородного уравнения:

$$f(x) = 6\cos 3x + 2\sin 3x = e^{0x}\left[P_0(x)\cos 3x + Q_0(x)\sin 3x\right],$$

где $\alpha = 0$, $\beta = 3$ (числа $\alpha \pm i\beta = \pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения); $n = 0, m = 0$ (степени многочленов, причём $N = \max\{n, m\} = 0$).

Поэтому частное решение неоднородного уравнения будет иметь следующую структуру:

$$y_ч = e^{0x}\left[\tilde{P}_0(x)\cos 3x + \tilde{Q}_0(x)\sin 3x\right] = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Далее,

$$y'_ч = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$y''_ч = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ в исходное неоднородное уравнение, имеем (убедитесь в этом самостоятельно):

$$(-7A + 9B)\cos 3x + (-9A - 7B)\sin 3x = 6\cos 3x + 2\sin 3x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 3x$ и $\sin 3x$ в левой и правой частях равенства, получаем систему

$$\begin{cases} -7A + 9B = 6, \\ -9A - 7B = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -6/13, \\ B = 4/13. \end{cases}$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{ч}} = -\frac{6}{13}\cos 3x + \frac{4}{13}\sin 3x .$$

Теперь общим решением неоднородного уравнения является

$$y_{\text{н}} = y_{\text{о}} + y_{\text{ч}} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{6}{13}\cos 3x + \frac{4}{13}\sin 3x .$$

Найдём его производную

$$y'_{\text{н}} = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x} + \frac{18}{13}\sin 3x + \frac{12}{13}\cos 3x$$

и используем начальные условия $x = 0,\ y = y' = 0$ для вычисления значений C_1 и C_2.

Получим систему для нахождения значений констант:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \dfrac{6}{13} = 0, \\ -C_1 - 2C_2 + \dfrac{12}{13} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = \dfrac{6}{13}. \end{cases}$$

Следовательно, решение задачи Коши примет вид

$$y = \frac{6}{13}e^{-2x} - \frac{6}{13}\cos 3x + \frac{4}{13}\sin 3x .$$

2.2.11. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = x^2 - x + 3 + x\cos x .$$

Решение. Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $y_{\text{о}} = C_1 e^x + C_2 x e^x$ (проверьте самостоятельно).

Для нахождения частного решения исходного неоднородного уравнение рассмотрим совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} y'' - 2y' + y = x^2 - x + 3, \\ y'' - 2y' + y = x\cos x. \end{array}\right.$$

Частное решение первого уравнения находим в виде

$$y_{ч,1} = Ax^2 + Bx + C ,$$

так как $\alpha = 0$ не является корнем характеристического уравнения.

После соответствующих вычислений (предлагаем выполнить их самостоятельно) получим:

$$y_{ч,1} = x^2 + 3x + 7 .$$

Частное решение второго уравнения будем искать в виде

$$y_{ч,2} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x ,$$

поскольку числа $\alpha \pm i\beta = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения.

Находя неизвестные коэффициенты *A*, *B*, *C*, *D* (проделайте действия самостоятельно), получим:

$$y_{ч,2} = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x+1)\sin x .$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y_{н} = y_{о} + y_{ч,1} + y_{ч,2} ,$$

так что теперь $y_{н} = C_1 e^x + C_2 x e^x + x^2 + 3x + 7 - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x+1)\sin x$.

2.2.12. Найти общее решение системы $\begin{cases} x' = -6x + 4y, \\ y' = \ \ 9x - 6y. \end{cases}$

Решение. Имеем линейную однородную систему с постоянными коэффициентами. Составим характеристическое уравнение (коэффициенты системы $a = -6$, $b = 4$, $p = 9$, $q = -6$):

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 4 \\ 9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

откуда $(-6-\lambda)^2 - 36 = 0$; $\lambda + 6 = \pm 6$; $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -12$.

Следовательно, получаем фундаментальную систему решений

$$y_1 = e^{0t} = 1 ; \ y_2 = e^{-12t} .$$

Находим одну из искомых функций:

$$y = C_1 + C_2 e^{-12t} .$$

Далее, из второго уравнения системы:

$$x=\frac{1}{9}\left(y'+6y\right).$$

Поскольку $y'=\left(C_1+C_2e^{-12t}\right)'=-12\,C_2e^{-12t}$, то вторая неизвестная функция:

$$x=\frac{1}{9}\left(-12C_2e^{-12t}+6C_1+6C_2e^{-12t}\right),\quad x=\frac{2}{3}\left(C_1-C_2e^{-12t}\right).$$

Итак, общее решение системы имеет вид $\begin{cases} x=\frac{2}{3}\left(C_1-C_2e^{-12t}\right), \\ y=C_1+C_2e^{-12t}. \end{cases}$

Как отмечалось ранее, это решение можно понимать как совокупность возможных траекторий (законов движения) материальной точки в плоскости, найденную по известной зависимости координат x', y' вектора скорости $\vec{v}=x'\,\bar{i}+y'\,\bar{j}$ от плоских координат этой точки.

2.3. БЛОК КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

2.3.1. Теоретические упражнения

1. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решениями которого являются функции e^{-kx} и xe^{-kx} ($k\neq 0$ – любая постоянная величина).

2. Класс функций вида $y=A\sin(x+\gamma)$ представляет собой общее решение некоторого линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (A и γ – произвольные постоянные). Каков вид этого дифференциального уравнения?

3. Известно, что функция $y=x^2e^{kx}$ является решением некоторого линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами ($k\neq 0$ – любая постоянная величина). Каков вид соответствующего ему линейного однородного дифференциального уравнения?

4. Найти решения краевой задачи $y''+\lambda^2y=0, y(0)=y(\pi)=0$, ($\lambda$ – произвольное отличное от нуля действительное число).

5. Пусть y_1 – решение дифференциального уравнения $y''+a_1(x)y'+$ $+a_2(x)y+a_3(x)=0$. Показать, что введение новой искомой функции $u=\dfrac{y}{y_1}$ приводит к дифференциальному уравнению, допускающему понижение порядка.

6. Доказать, что при замене независимой переменной $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция, линейное уравнение второго порядка остается линейным.

7. Показать, что если известно частное решение $\varphi(x)$ однородного линейного уравнения $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$, то подстановка $y=\varphi(x)u(x)$, где $u(x)$ – новая функция, приводит исходное уравнение к уравнению, допускающему понижение порядка.

8. Пусть y_1, y_2, y_3 – три независимых частных решения линейного неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка. Составить из них общее решение этого уравнения.

9. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее частные решения $y_1=x$ и $y_2=x^2$. Показать, что функции y_1 и y_2 линейно независимы. Почему равенство нулю определителя Вронского от этих функций в точке $x=0$ не приводит к противоречию независимости решений?

10) Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами a и b: $\begin{cases} x'=bx+ay, \\ y'=ax+by. \end{cases}$.

2.3.2. Задачи для самостоятельного решения

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения.

$9y''-12y'+4y=0$; (Ответ: $y=e^{\frac{2}{3}x}(C_1x+C_2)$);

$y''+2y'+10y=0$; (Ответ: $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$);

$y''+4y=0$; (Ответ: $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$);

$y''-10y'+25y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=6$; (Ответ: $y=e^{5x}(x+1)$);

$9y''+y=0,\ y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2,\ y'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$; (Ответ: $y=2\sin\frac{x}{3}$);

$y'''-2y''+y'=0$; (Ответ: $y=C_1+(C_2+C_3x)e^x$);

$y^{IV}-13y''+36y=0$; (Ответ: $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$).

Решить дифференциальные уравнения методом вариации произвольных постоянных.

$y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+1}$; (Ответ: $y=e^x(C_1+C_2x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+x\operatorname{arctg}x$);

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}\text{; (Ответ: } y = \cos 2x\left(C_1 - \ln\left|\sin x\right|\right) + \sin 2x\left(C_2 - x - \cos^2 x\right)\text{);}$$

$$4y'' + y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\text{; (Ответ: } y = C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|\text{);}$$

$$y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\text{; (Ответ: } y = C_1 + C_2 e^x + \sqrt{1 - e^{2x}} + e^x \arcsin e^x\text{);}$$

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}\text{; (Ответ: } y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x \ln\left|\sin x\right|\text{);}$$

$$y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x}\text{; (Ответ: } y = C_1 + C_2 e^x + \left(e^x + 1\right)\left[\ln\left(e^x + 1\right) - x\right] - 1\text{);}$$

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}\text{; (Ответ: } y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x - x + x\ln\left|x\right|\right)\text{).}$$

Решить неоднородные уравнения, находя их частные решения методом неопределённых коэффициентов.

$$y'' + 4y' - 5y = 2\text{; (Ответ: } y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{2}{5}\text{);}$$

$$y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1\text{; (Ответ: } y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{8}{3}x^2 + \frac{17}{4}x + \frac{127}{48}\text{);}$$

$$y'' - 2y' + 2y = (1 - x)e^{5x}\text{; (Ответ: } y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) - \frac{17x + 25}{289}e^{5x}\text{);}$$

$$y'' + 25y = \cos 5x\text{; (Ответ: } y = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x + \frac{x}{10}\cos 5x\text{);}$$

$$y'' + 3y' = e^{3x} + e^{-3x}\text{; (Ответ: } y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{18}e^{3x} - \frac{x}{3}e^{-3x}\text{);}$$

$$y'' + 4y' - 5y = x + \sin x\text{; (Ответ: } y = C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - \frac{5x + 4}{25} - \frac{2\cos x + 3\sin x}{26}\text{).}$$

Найти решения следующих однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = 6x + 4y. \end{cases} \qquad \text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^{10t} + C_2 e^t, \\ y = C_1 e^{10t} - 2C_2 e^t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x + 2y. \end{cases} \qquad \text{Ответ: } \begin{cases} x = C_2 e^{2t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 t e^t. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$$ Ответ: $\begin{cases} x = e^{4t}(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^{4t}(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y, \quad x(0) = 2,\ y(0) = 2. \end{cases}$$ Ответ: $x = y = 2e^{4t}$.

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = x + 2y, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 3. \end{cases}$$ Ответ: $\begin{cases} x = e^{5t}, \\ y = 3e^{5t}. \end{cases}$

$$\begin{cases} x' = x - 2y - z, \\ y' = -x + y + z, \\ z' = x + y. \end{cases}$$ Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + 3C_3 e^{2t}, \\ y = C_2 e^{-t} - 2C_3 e^{2t}, \\ z = C_1 - 2C_2 e^{-t} + C_3 e^{2t}. \end{cases}$

2.3.3. Тесты

ТЕСТ 1

Задание 1. Укажите уравнения, решения которых можно найти с помощью метода вариации произвольных постоянных.	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; ○ $y'' - 9y' + 20y = x^2 \cos x$; ○ $2y'' - y + 1 = 0$; ○ $y'' + y = 0$.
Задание 2. Фундаментальная система решений уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y_1 = \cos 4x,\ y_2 = \sin 4x$; ○ $y_1 = e^{-2x},\ y_2 = e^{2x}$; ○ $y_1 = e^{-2x} \cos 4x,\ y_2 = e^{-2x} \sin 4x$; ○ $y_1 = e^{-2x},\ y_2 = 1$.
Задание 3. Дано дифференциальное уравнение третьего порядка $y''' + y'' - 2y' = 0$. Корнями его характеристического уравнения являются …	**Укажите ответы:** $\lambda_1 =$; $\lambda_2 =$; $\lambda_3 =$.

Задание 4. Укажите вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 6y' = 5x$.	**Варианты ответов:** ○ $y = (Ax + B)x$; ○ $y = (Ax + B)e^{-\frac{2}{3}x}$; ○ $y = Ax + B$; ○ $y = Ax$.
Задание 5. Сопоставьте типы уравнений и их возможные решения: 1) линейное уравнение первого порядка; 2) линейное однородное уравнение второго порядка; 3) линейное неоднородное уравнение второго порядка; 4) линейное неоднородное уравнение третьего порядка.	**Варианты ответов:** $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + 2e^{3x}$; $y = (C_1 + C_2x)e^x$; $y = x + C_1e^{-x}$; $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + x^2$.
Задание 6. Функция $y = e^{2x}$ является решением дифференциального уравнения $y'' - Cy' + 2y = 0$, если C принимает значение …	**Укажите ответ**
Задание 7. По методу вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения $y'' - y' - 6y = xe^x$ следует искать в виде …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1(x)e^{3x} + C_2(x)e^{-3x}$; ○ $y = C_1(x)e^{3x} + C_2(x)e^{-2x}$; ○ $y = e^{-2x}\left[C_1(x) + xC_2(x)\right]$; ○ $y = e^{3x}\left[C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x\right]$.
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 20y = 0$, $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' - y = e^{2x}$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 5x + 6y. \end{cases}$	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 2

Задание 1. Укажите неоднородные дифференциальные уравнения, правые части которых имеют «специальный вид».	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $y'' - 4y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; ○ $y'' - 2y' + 2y = 2$; ○ $y'' + 3y' = 0$; ○ $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$.
Задание 2. Общее решение уравнения $y'' + 9y = 0$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$; ○ $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$; ○ $y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$; ○ $y = C_1 e^{-9x} + C_2 x e^{-9x}$.
Задание 3. Фундаментальная система решений уравнения третьего порядка $y''' - 4y' = 0$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$; ○ $y = C_1 + C_2 x + C_3 x e^{2x}$; ○ $y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$; ○ $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$.
Задание 4. Укажите вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения $9y'' + 6y' = 5x$.	**Варианты ответов:** ○ $y = (Ax + B)x$; ○ $y = (Ax + B)e^x$; ○ $y = Ax + B$; ○ $y = A$.
Задание 5. Сопоставьте типы уравнений и их возможные решения: 1) линейное уравнение первого порядка; 2) линейное однородное уравнение второго порядка; 3) линейное неоднородное уравнение второго порядка; 4) линейное уравнение третьего порядка.	**Варианты ответов:** $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$; $y = (e^x + C_1)x$; $y = C_1 e^{7x} + C_2 x e^{7x} + 2\cos 7x$; $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Задание 6. Функция $y = \sin Cx$ является решением дифференциального уравнения $y'' + 2C\,y = 0$, если C принимает значение …	**Укажите ответ**
Задание 7. По методу вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения $5y'' + y' - 4y = \frac{e^x}{x^2}$ следует искать в виде …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$; ○ $y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)xe^{-2x}$; ○ $y = e^{\frac{4}{5}x}\left[C_1(x) + C_2(x)x\right]$; ○ $y = C_1(x)e^{\frac{4}{5}x} + C_2(x)e^{-2x}$.
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 9y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 9$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $2y'' - y' = x + 1$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 7x + 3y, \\ y' = x + 5y. \end{cases}$	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 3

Задание 1. Укажите уравнения, решения которых можно найти с помощью метода вариации произвольных постоянных.	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $y'' + \frac{1}{4}y = \left(\cos\frac{x}{2}\right)^{-1}$; ○ $2y'' - y' = 0$; ○ $y'' + 4y = \operatorname{ctg} x$; ○ $5y'' + 2y' = e^x$.
Задание 2. Фундаментальная система решений уравнения $y'' - 4y'' + 8y = 0$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y_1 = e^{2x}\sin x,\ y_2 = e^{2x}\cos x$; ○ $y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{x}$; ○ $y_1 = e^{2x},\ y_2 = 1$; ○ $y_1 = e^{2x}\sin 2x,\ y_2 = e^{2x}\cos 2x$.

Задание 3. Дано дифференциальное уравнение третьего порядка $9y''' - y' = 0$. Корнями его характеристического уравнения являются …	**Укажите ответы:** $\lambda_1 =$; $\lambda_2 =$; $\lambda_3 =$.
Задание 4. Укажите вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = 3e^{2x}$.	**Варианты ответов:** ○ $y = Ae^{2x}$; ○ $y = (Ax + B)e^{2x}$; ○ $y = Axe^{2x}$; ○ $y = Ax$.
Задание 5. Сопоставьте типы уравнений и их возможные решения: 1) линейное уравнение первого порядка; 2) линейное однородное уравнение второго порядка; 3) линейное неоднородное уравнение второго порядка; 4) линейное уравнение третьего порядка.	**Варианты ответов:** $y = (\sin x + C_1)x^2$; $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$; $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + 12$; $y = C_1 + C_2x + C_3e^{\frac{x}{2}}$.
Задание 6. Функция $y = e^{Cx}$ является решением дифференциального уравнения $y'' - Cy = 0$, если C принимает значение …	**Укажите ответ**
Задание 7. По методу вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения $y'' + 25y = \operatorname{tg} 5x$ следует искать в виде …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1(x)\cos 5x + C_2(x)\sin 5x$; ○ $y = C_1(x)e^{5x} + C_2(x)e^{-5x}$; ○ $y = e^{-5x}[C_1(x) + xC_2(x)]$; ○ $y = e^{x}[C_1(x)\cos 5x + C_2(x)\sin 5x]$.
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 8y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$.	**Запишите полное решение**

Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x}$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 4

Задание 1. Укажите неоднородные дифференциальные уравнения, правые части которых имеют «специальный вид».	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $y'' + 6y' + 10y = 80e^{x}$; ○ $y'' - y = x\cos^2 x$; ○ $y'' - 2y' + y = x^2 - x + 3$; ○ $y'' - 9y' + 20y = 0$.
Задание 2. Общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; ○ $y = e^{x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$; ○ $y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$; ○ $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$.
Задание 3. Фундаментальная система решений уравнения третьего порядка $y''' + 7y'' = 0$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1 + C_2 e^{-7x}$; ○ $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-7x}$; ○ $y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x + C_3$; ○ $y = C_1 + C_2 e^{7x} + C_3 e^{-7x}$.
Задание 4. Укажите вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения $5y'' + y' = \sin x$	**Варианты ответов:** ○ $y = Ax\cos x$; ○ $y = A\sin x\, e^{x}$; ○ $y = (Ax + B)\sin x$; ○ $y = A\cos x + B\sin x$.

Задание 5. Сопоставьте типы уравнений и их возможные решения: 1) линейное уравнение первого порядка; 2) линейное однородное уравнение второго порядка; 3) линейное неоднородное уравнение второго порядка; 4) линейное уравнение третьего порядка.	**Варианты ответов:** $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right) + e^{-x}$; $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$; $y = x \ln x + C_1 x$; $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$.
Задание 6. Функция $y = xe^x$ является решением дифференциального уравнения $y'' - 2y' + C\,y = 0$, если C принимает значение …	**Укажите ответ**
Задание 7. По методу вариации произвольных постоянных частное решение неоднородного уравнения $4y'' + 4y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ следует искать в виде …	**Варианты ответов:** ○ $y = C_1(x)e^{\frac{1}{2}x} + C_2(x)e^{-\frac{1}{2}x}$; ○ $y = e^{\frac{1}{2}x}\left[C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x\right]$; ○ $y = C_1(x)e^{-\frac{1}{2}x} + xC_2(x)e^{-\frac{1}{2}x}$; ○ $y = e^{2x}\left[C_1(x) + xC_2(x)\right]$.
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 3y = 3x$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите систему дифференциальных уравнений $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$	**Запишите полное решение**

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СРЕДСТВАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ЗАДАЧИ ДЛЯ АКТИВНОГО ОБУЧЕНИЯ

В различных областях человеческой деятельности возникает большое число задач, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений. Характер этих задач и методику их решения можно схематически описать примерно так. Происходит некоторый процесс, например физический, химический, биологический. Нас интересует определенная функциональная характеристика этого процесса, например закон изменения со временем температуры или давления, массы, положения в пространстве. Если имеется достаточно полная информация о течении этого процесса, то можно попытаться построить его математическую модель. Во многих случаях такой моделью служит дифференциальное уравнение, одним из решений которого является искомая функциональная характеристика процесса.

Дифференциальное уравнение моделирует процесс в том смысле, что оно описывает эволюцию процесса, характер происходящих с материальной системой изменений, возможные варианты этих изменений в зависимости от первоначального состояния системы.

3.1.1. Математическая модель рекламы

Задача 1. Определить закон, по которому распространяются сведения о распродаже некоторой продукции, если скорость распространения информации (по свидетельству статистики) пропорциональна как числу знающих о распродаже, так и числу незнающих потенциальных покупателей, в сумме составляющих N человек.

Решение. Обозначим через $y(t)$ функцию, значения которой совпадают с числом потенциальных покупателей, узнавших к моменту времени о распродаже. Тогда указанная в условии пропорциональность может быть реализована в виде

$$y'(t) = ky(t)(N - y(t)), \tag{3.1}$$

где коэффициент пропорциональности k можно считать известным (он определяется экспериментально и зависит от интенсивности рекламы и др. факторов).

Найдём общее решение данного уравнения с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(N - y\right); \quad \frac{dy}{y\left(N - y\right)} = kdt ;$$

$$\int \frac{dy}{y\left(N - y\right)} = k\int dt ; \quad \frac{1}{N}\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{N - y}\right)dy = kt + \text{const} ;$$

$$\ln\left|\frac{C\,y}{N - y}\right| = kNt ; \quad \frac{Cy}{N - y} = e^{kNt} ; \quad y = \frac{N\,e^{kNt}}{C + e^{kNt}} .$$

Поделив на e^{kNt} числитель и знаменатель последней дроби, получим общее решение уравнения (3.1):

$$y(t) = \frac{N}{1 + Ce^{-kNt}}.$$

В частности, если в начальный момент о распродаже уже знали половина покупателей, т.е. задано начальное условие $y(0) = N/2$, то $y(t) = \dfrac{N}{1 + e^{-kNt}}$ – закон, по которому будут распространяться сведения о распродаже.

3.1.2. Математические модели процессов выравнивания

Математическими моделями многих процессов, в которых скорость изменения величины можно считать пропорциональной значению y этой величины, служат уравнения вида $y' = ky$.

Вместе с тем встречаются процессы, в которых скорость пропорциональна (с коэффициентом $-k$, где $k > 0$) разности между значением величины $\begin{cases} x' = 7y + x + 2, \\ y' = 7x + y + e^{t}. \end{cases}$ и некоторым постоянным значением a .

В общем случае, при заданном начальном значении y_0 величины y имеем задачу

$$\begin{cases} y' = -k\,(y - a), \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Решение этой задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными имеет вид:

$$y = a + (y_0 - a)e^{-kt}.$$

С неограниченным ростом времени наблюдения (т.е. при $t \to +\infty$) значения функции e^{-kt} стремятся к нулю, тогда значения $y = y(t)$ приближаются к a.

Говорят, что происходит стабилизация этих значений, а сам процесс называют *процессом выравнивания*.

Примеры математических моделей процессов выравнивания можно найти в физике, экономике («модель равновесия»), химии и др.

Рассмотрим теперь *задачу о нагревании* (*остывании*) *тела*.

Речь в ней идёт о выяснении характера зависимости $T = T(t)$ температуры T остывающего тела от времени t течения процесса, если скорость остывания пропорциональна разности между температурой тела и температурой T_1 окружающей среды (закон Ньютона); начальная температура T_0 тела задана.

Имеем, очевидно, задачу вида

$$T' = -k(T - T_1),\ \ T(0) = T_0,\ \ k = \text{const},\ \ k > 0\,. \tag{3.2}$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности (определяется экспериментально), зависящий как от физических свойств тела, так и от его геометрической формы.

Решение задачи (3.2) будет иметь вид:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

С течением времени происходит выравнивание температуры: она приближается к значению T_1 температуры окружающей среды.

Задача 2. Вода в открытом резервуаре имела начальную температуру 70 °С, через 10 мин температура повысилась до 65 °С, а температура окружающей резервуар среды равна 15° С. Найти температуру воды в резервуаре через 30 мин от начала наблюдений. Определить, в какой момент времени температура воды будет составлять 20 °С?

Решение. Как было показано выше, необходимо решить уравнение вида (3.2):

$$T' = -k(T - 15^{\text{o}}) \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dt} = -k\left(T - 15^{\text{o}}\right).$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{dT}{T - 15^{\text{o}}} = \int kdt\ ;\ \ln\left(T - 15^{\text{o}}\right) = kt + \ln C\ ;$$

откуда $T - 15^{\text{o}} = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C} = e^{kt}C_1$; $T = C_1e^{kt} + 15^{\text{o}}$.

Найдём постоянную величину C_1 при начальных условиях $t = 0$, $T = 70^{\text{o}}$:

$$70^{\text{o}} = C_1e^{k0} + 15^{\text{o}} \quad \text{или} \quad 55^{\text{o}} = C_1e^{0} = C_1 \cdot 1 = C_1,\ C_1 = 55^{\text{o}}\ .$$

Получили закон охлаждения воды

$$T = 55^{\circ} e^{kt} + 15^{\circ}, \qquad (3.3)$$

где t – время, T – температура воды.

Найдём постоянную величину k. Из условия задачи известно, что через $t = 10$ мин температура $T = 55\,^{\circ}C$. Подставив эти значения в уравнение (3.3), получим:

$$65^{\circ} = 55^{\circ} e^{k\cdot 10} + 15^{\circ}, \quad 50^{\circ} = 55^{\circ} e^{k\cdot 10}, \quad \frac{10}{11} = e^{10k}.$$

Прологарифмируем последнее равенство:

$$\lg 10 - \lg 11 = 10k \lg e.$$

Найдём коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{1 - \lg 11}{10 \lg e} \approx \frac{1 - 1{,}0414}{10 \cdot 0{,}4343} = -\,0{,}009532.$$

Окончательно закон охлаждения в данной задаче имеет вид:

$$T = 55^{\circ} e^{-0{,}009532\, t} + 15^{\circ}. \qquad (3.4)$$

Найдём температуру воды в резервуаре через 30 мин от начала наблюдений:

$$T = 55^{\circ} e^{-0{,}009532\, t} + 15^{\circ},$$

тогда

$$T = 55^{\circ} e^{-0,286} + 15^{\circ} \approx 56^{\circ}.$$

Найдём время, по истечении которого температура воды в резервуаре будет равна 20 °С. Для этого в (3.4) подставим значение $T = 20°$:

$$20^{\circ} = 55^{\circ} e^{-0{,}009532\, t} + 15^{\circ},$$

откуда

$$e^{-\,0{,}009532\, t} = \frac{1}{11} \approx 0{,}0909, \quad t = 251 \text{ мин} = 4 \text{ ч } 11 \text{ мин}.$$

3.1.3. Уравнение линии с заданным свойством

Как известно, угловой коэффициент касательной есть производная функции, с помощью которой записано уравнение линии, поэтому естественно ожидать, что задание линии определится решением дифференциального уравнения. Приведём примеры.

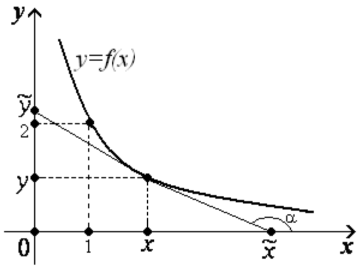

Рис. 1

Задача 3. Найти уравнение линии, проходящей через точку (1; 2), для которой отрезок любой её касательной, заключённой между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение. Поскольку заданная точка (1; 2) расположена в первой четверти, то естественно вести рассмотрение участка линии в той же четверти (рис. 1). Точку касания (x, y) будем считать расположенной там же (рассмотрение других четвертей координатной плоскости производится аналогичным образом).

При данных условиях касательная образует тупой угол α с полуосью OX. Смежный с ним угол $\pi-\alpha$ имеет тангенс, который равен отношению ординаты $\tilde{y}$ точки пересечения касательной с осью OY к абсциссе $\tilde{x}$ точки пересечения её же с осью OX.

По условию задачи, точка касания (x, y) лежит в середине этого отрезка, поэтому $\tilde{y} = 2y$, $\tilde{x} = 2x$.

Тогда получаем: $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \dfrac{2y}{2x}$ или $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{y}{x}$.

Используя геометрический смысл производной, последнее равенство можно записать в виде $y' = -\dfrac{y}{x}$, т.е. мы пришли к *дифференциальному уравнению линии* (в данном случае к уравнению с разделяющимися переменными). Решим его:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}; \int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}; \ \ln|y| = -\ln|x| + \ln C; \ \ln|yx| = \ln C .$$

Теперь общее решение уравнения имеет вид $|yx| = C$.

Расположение точки (1; 2) на линии равносильно заданию начального условия $y(1) = 2$. Выполняя подстановку значений $x = 1, y = 2$ в общее решение, находим, что $C = 2$.

Окончательно получим уравнение $|yx| = 2$, что равносильно заданию двух гипербол $xy = 2$ и $xy = -2$.

Задача 4. Найти плоские кривые, у которых кривизна постоянна.

Решение. Известно, что кривизна кривой находится из уравнения

$$\kappa(x) = \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} .$$

Найдём решение этого уравнения, полагая, что кривизна $\kappa(x) = \text{const} = K$. Порядок дифференциального уравнения понижаем с помощью подстановки $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$. Получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{z'}{\left(1+z^2\right)^{3/2}} = K . \tag{3.5}$$

Имеем:

$$\frac{dz}{dx} = K\left(1+z^2\right)^{3/2}; \quad \frac{1}{K}\frac{dz}{\left(1+z^2\right)^{3/2}} = dx; \quad \frac{1}{K}\int\frac{dz}{\left(1+z^2\right)^{3/2}} = x + C_1 .$$

Сделав подстановку $z = \operatorname{tg} t$, найдём интеграл (проверьте самостоятельно):

$$\int\frac{dz}{\left(1+z^2\right)^{3/2}} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} + \text{const} .$$

Общее решение уравнения (3.5):

$$\frac{1}{K}\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = x + C_1 .$$

Отсюда можно выразить z:

$$z = \pm\frac{(x+C_1)}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - (x+C_1)^2}} .$$

Снова получаем дифференциальное уравнение первого порядка (точнее, пару таких уравнений):

$$y' = \pm\frac{(x+C_1)}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - (x+C_1)^2}}; \quad y + C_2 = \pm\int\frac{(x+C_1)dx}{\sqrt{\frac{1}{K^2} - (x+C_1)^2}} .$$

Далее,

$$y + C_2 = \mp\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{K^2} - (x+C_1)^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{1}{K^2} - (x+C_1)^2\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{K^2} - (x+C_1)^2}$$

или, окончательно:

$$(y+C_2)^2 + (x+C_1)^2 = \frac{1}{K^2} .$$

Так как $\dfrac{1}{K} = R$ – радиус кривизны, то получаем уравнение семейства окружностей:

$$(x + C_1)^2 + (y + C_2)^2 = R^2.$$

Таким образом, плоскими кривыми с постоянной (ненулевой) кривизной могут быть только окружности.

3.1.4. Моделирование движения, описываемого вторым законом Ньютона

Если движение тела массы m происходит прямолинейно под действием силы, величина которой равна F, а ускорение движения равно a, то согласно второму закону Ньютона имеет место соотношение

$$F = ma.$$

Если $y = y(t)$ – величина пути, пройденного телом к моменту времени t, то ускорение $a = y''(t)$, поэтому $F = my''$.

В общем случае сила F зависит от трёх переменных: времени t, величин y и y':

$$my'' = F(t; y, y'). \tag{3.6}$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение второго порядка, служащее математической моделью движения, описываемого вторым законом Ньютона.

Рассмотрим несколько частных случаев (3.6).

1. Случай, когда $F = F_0 = \text{const}$.

Записав (3.6) в виде $my'' = F_0$, имеем дифференциальное уравнение второго порядка, которое решается последовательным интегрированием:

$$y' = \int \frac{F_0}{m} dt = \frac{F_0}{m} t + C_1, \quad y = \int \left(\frac{F_0}{m} t + C_1 \right) dt, \quad y = \frac{F_0}{2m} t^2 + C_1 t + C_2.$$

2. В случае, когда действующая сила обратно пропорциональна времени t, протекшему с начала движения (коэффициент пропорциональности k задан), рассмотрим временной отрезок $t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$. При этом в момент $t = 1$ скорость тела $v = 0$ и пройденное расстояние $y = 2$. Получаем задачу Коши:

$$my'' = \frac{k}{t^2}, \; y(1) = 2, \; y'(1) = 0.$$

Решаем её, последовательно интегрируя:

$$(y')' = \frac{k}{m}t^{-2}; \quad y' = -\frac{k}{m}t^{-1} + C_1.$$

Значение постоянной C_1 можно определить на основании начального условия $y'(1) = 0$:

$$0 = -\frac{k}{m} + C_1,$$

откуда

$$C_1 = \frac{k}{m}.$$

Тогда $y' = \dfrac{k}{m}(1 - t^{-1})$.

Полученное уравнение первого порядка есть снова задача интегрирования, решая которую, получаем класс функций:

$$y = \frac{k}{m}(t - \ln t) + C_2.$$

Согласно начальному условию $y(1) = 2$, находим $C_2 = 2 - \dfrac{k}{m}$.

Искомый закон движения тогда имеет вид

$$y = \frac{k}{m}(t - 1 - \ln t) + 2, \text{ при } t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

В частности, путь, пройденный к моменту $t = \dfrac{1}{2}$, равен

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{m}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + 2.$$

Задача 5. Материальная точка массой m погружается с нулевой начальной скоростью в жидкость. На неё действует сила тяжести и сила сопротивления жидкости, пропорциональная скорости погружения (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости движения точки от времени.

Решение. Согласно второму закону Ньютона, имеем:

$$ma = F_{\text{тяж}} + F_{\text{сопр}},$$

где $a = v'(t)$, $F_{\text{сопр}} = -kv$, $F_{\text{тяж}} = mg$.

Получаем линейное уравнение первого порядка относительно функции $v = v(t)$:

$$mv' = mg - kv .$$

Решаем его с помощью подстановки Бернулли, получаем общее решение:

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} .$$

Используя начальное условие $v(0) = 0$, найдём частное решение

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

3.1.5. Математическая модель колебаний материальной точки

Задача 6. Процесс колебания относительно положения равновесия материальной точки массы m под действием силы упругости $F = -k_1 y$ и внешней силы $f(t) = k_2 e^{-t}$ может быть описан уравнением (составленным на основании второго закона Ньютона)

$$my'' = -k_1 y + k_2 e^{-t},$$

где $y = y(t)$ – отклонение в момент t точки относительно положения равновесия.

Определить закон движения $y = y(t)$, если положение точки в начальный момент и при $t = 1$ заданы: $y(0) = 0,\ y(1) = 0$. Решить задачу в случае следующих значений коэффициентов пропорциональности: $k_1 = m,\ k_2 = 2m$. Определить приближённо значение y в момент $t = 5$.

Решение. Если подставить значения k_1 и k_2 в уравнение и поделить обе его части на m, то приходим к следующей краевой задаче:

$$y'' + y = 2e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Найдём сначала общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'' + y = 0; \quad \lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_{1,2} = \pm i; \quad y_{\text{о}} = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет следующую структуру:

$$y_{\text{ч}} = Ae^{-t}, \ A = \text{const} .$$

Применяя метод неопределённых коэффициентов для нахождения A, получаем $y_{\text{ч}} = e^{-t}$ (убедитесь самостоятельно).

Общее решение неоднородного уравнения принимает вид

$$y_{\text{н}} = C_1\cos t + C_2\sin t + e^{-t}.$$

Воспользуемся краевыми условиями, подставив в общее решение одновременно $t = 0$ и $y = 0$, а затем $t = 1$ и $y = 0$. Имеем систему двух линейных уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + e^0 = 0, \\ C_1\cos 1 + C_2\sin 1 + e^{-1} = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = \operatorname{ctg} 1 - (e\sin 1)^{-1}. \end{cases}$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в запись общего решения, получаем искомый закон движения

$$y = -\cos t + (\operatorname{ctg} 1 - e^{-1}\sin^{-1} 1)\sin t + e^{-t}.$$

В частности, в момент $t = 5$

$$y(5) = -\cos 5 + (\operatorname{ctg} 1 - e^{-1}\sin^{-1} 1)\sin 5 + e^{-5} \approx -0{,}47.$$

С точки зрения физики, отрицательное значение $y(5)$ означает, что точка отклонилась от положения равновесия в сторону, противоположную положению, занимаемую ею в начальный момент.

3.1.6. Математическое моделирование некоторых задач химии, динамики, сопротивления материалов и радиотехники

Задача 7. В результате химической реакции между веществами *A* и *B* образуется вещество *C*. Установить зависимость количества вещества *C* от времени, если в момент вступления в реакцию количества веществ *A* и *B* были равны соответственно *a* и *b*. Скорость реакции пропорциональна произведению реагирующих масс.

Решение. Пусть $x = x(t)$ – количество вещества *C* через время *t* после начала реакции; $\frac{dx}{dt}$ – скорость образования вещества (скорость реакции). По условию $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$, где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности. Разделяем переменные и решаем уравнение:

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt\,; \quad \frac{dx}{x-a} - \frac{dx}{x-b} = -k(b-a)dt\,; \quad \frac{x-a}{x-b} = Ce^{-k(b-a)t}.$$

Из начального условия $x(0) = 0$ находим $C = \frac{a}{b}$, тогда

$$\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}e^{-k(b-a)t}.$$

Выразим из этого равенства x, получим:

$$x(t)=ab\frac{1-e^{-k(b-a)t}}{b-ae^{-k(b-a)t}}.$$

Если $b>a$, то $x(t)\to a$ при $t\to\infty$; если $b<a$, то $x(t)\to b$ при $t\to\infty$.

Если количества веществ A и B равны, т.е. $a=b$, то уравнение реакции примет вид:

$$\frac{dx}{dt}=k\,(a-x)^2.$$

С учётом начального условия процесс реакции описывается зависимостью $x(t)=\dfrac{a^2kt}{1+akt}$ (проверьте самостоятельно).

Таким образом, $x(t)\to a$ при $t\to\infty$.

Задача 8. В сопротивлении материалов доказывается, что дифференциальное уравнение изогнутой оси простой балки постоянного сечения, несущей сплошную равномерно распределённую нагрузку интенсивностью q, имеет вид

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}=\frac{1}{EI}\left(\frac{q\,l}{2}x-\frac{q}{2}x^2\right), \tag{3.7}$$

где ω – прогиб балки в сечении с абсциссой x; EI – постоянная величина, так называемая «жёсткость на изгиб сечения балки»; l – длина балки.

Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее краевым (граничным) условиям $\omega(0)=0$, $\omega(l)=0$, т.е. в том случае, когда на концах балки прогиб равен нулю.

Решение. Уравнение (3.7) – это уравнение второго порядка, которое допускает понижение порядка. Решим его, последовательно (дважды) интегрируя:

$$\omega(x)=\frac{q\,l}{12EI}x^3-\frac{q}{24EI}x^4+C_1x+C_2.$$

Первое краевое условие даёт значение $C_2=0$, второе – значение $C_1=-\dfrac{q\,l^3}{24EI}$. Искомое решение краевой задачи есть

$$\omega(x)=-\frac{q\,l^3\,x}{24EI}\left[1-2\left(\frac{x}{l}\right)^2+\left(\frac{x}{l}\right)^3\right].$$

Задача 9. В последовательном контуре наблюдаются свободные колебания, если отсутствует внешний источник, и конденсатор был заряжен к моменту замыкания ключа S. После замыкания ключа S в момент времени $t = 0$ конденсатор разряжается через цепь с коэффициентом самоиндукции L и сопротивлением R (рис. 2). Определить напряжение u_c на обкладках конденсатора, если в начальный момент времени

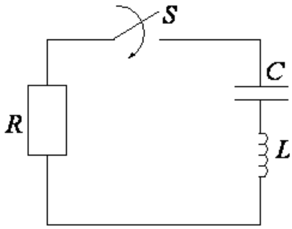

Рис. 2

$$u_c(0) = U_0\,, \quad u_c'(0) = 0\,.$$

Решение. На основании законов Кирхгофа имеем:

$$i = -C\,\frac{du_c}{dt}\,, \quad u_c = Ri + L\frac{di}{dt}\,.$$

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение, описывающее процессы в цепи:

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\alpha\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2\,u_c = 0\,, \tag{3.8}$$

где $\alpha = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$ – частота собственных колебаний.

Уравнение (3.8) – это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Поскольку в задании даны ещё начальные условия, то мы имеем задачу Коши.

Характеристическое уравнение, соответствующее (3.8):

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0\,.$$

Рассмотрим три случая для корней характеристического уравнения:

а) $D = 4\alpha^2 - 4\omega_0^2 < 0$. Тогда уравнение (3.8) имеет комплексные корни: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, $j^2 = -1$ (часто в инженерных приложениях и физике мнимая единица обозначается через j).

С учётом начальных условий $u_c(0) = U_0$, $u_c'(0) = 0$, решение задачи Коши в этом случае будет иметь вид:

$$u_c(t) = U_0\,e^{-\alpha t}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\,t + \frac{\alpha}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}\,t\right).$$

Если $\dfrac{R}{L} > 0$, то напряжение $u_c(t)$ стремится к нулю. В контуре наблюдаются периодические, с периодом $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$, затухающие по экспоненциальному закону колебания. Если $R = 0$ (т.е. отсутствует активная составляющая цепи), то напряжение на обкладках конденсатора изменяется периодически по гармоническому закону с периодом $2\pi\sqrt{LC}$: $u_c(t) = U_0 \cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$ (гармонический колебательный процесс).

б) $D = 4\alpha^2 - 4\omega_0^2 = 0$. Решение задачи Коши в данном случае имеет вид:

$$u_c(t) = U_0\, e^{-\alpha t}(1 + \alpha t).$$

Напряжение $u_c(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ и изменяется без колебаний (затухающий апериодический процесс).

в) $D = 4\alpha^2 - 4\omega_0^2 > 0$. Тогда

$$u_c(t) = \frac{U_0\, e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}\left[\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right)e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\, t} - \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\right)e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}\, t}\right].$$

Напряжение $u_c(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, колебаний нет, и конденсатор апериодически разряжается.

Задача 10. Найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k\dfrac{dy}{dt} - g, \end{cases}$ удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = \mu$, $y'(0) = \eta$ (здесь k и g – постоянные величины).

Решение. Предложенная система описывает движение снаряда с учётом сопротивления среды. Каждое уравнение системы содержит только одну неизвестную функцию. Из первого уравнения системы имеем $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k\dfrac{dx}{dt} = 0$. Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение есть $x(t) = C_1 + C_2\, e^{-kt}$.

Для вычисления констант C_1, C_2 используем начальные условия, в результате чего получим:

$$C_1 = \frac{\mu}{k},\ C_2 = -\frac{\mu}{k}.$$

Итак, частное решение первого уравнения системы принимает вид:

$$x(t) = \frac{\mu}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).$$

Второе уравнение системы – это линейное неоднородное уравнение второго порядка с правой частью специального вида:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k\frac{dy}{dt} = -g\ .$$

Общее решение второго уравнения системы:

$$y = C_3 + C_4 e^{-kt} - \frac{g}{k}t$$

(убедитесь в этом самостоятельно).

Используя начальные условия, найдём значения C_3, C_4:

$$\begin{cases} C_3 + C_4 = 0, \\ -kC_4 - g/k = \eta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_3 = -\left(\eta k + g\right)/k^2, \\ C_4 = \left(\eta k + g\right)/k^2. \end{cases}$$

Тогда решение второго уравнения системы:

$$y(t) = \frac{\eta k + g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right) - \frac{g}{k}t\ .$$

Окончательно получим параметрические уравнения траектории снаряда:

$$x(t) = \frac{\mu}{k}\left(1 - e^{-kt}\right); \quad y(t) = \frac{\eta k + g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right) - \frac{g}{k}t.$$

Если исключить параметр t из этих уравнений, то окажется, что:

$$y = -\frac{\eta k + g}{\mu} + \frac{g}{k^2}\ln\left(1 - \frac{k}{\mu}x\right).$$

Отсюда при $y = 0$ можно найти горизонтальную дальность стрельбы:

$$x = \frac{\mu}{k}\left(1 - \exp\left(\frac{(\eta k + g)k^2}{\mu g}\right)\right).$$

3.2. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Предварительные замечания.

1. При решении геометрических задач целесообразно построить чертёж. Если задача решается в прямоугольных координатах, то записать уравнение искомой кривой в виде $y = y(x)$ и выразить все упоминаемые в задаче величины через $x,\ y,\ y'$.

2. В физических задачах надо прежде всего решить, какую из величин взять за независимую переменную, а какую – за значения искомой функции; пусть, для определённости, искомая функция есть $y = y(x)$. Затем следует выразить разностное отношение неизвестной функции через величины, о которых говорится в задаче: $\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$. Далее, при переходе к пределу при $\Delta x \to 0$, получается дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию.

В большинстве задач содержатся условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения. Иногда дифференциальное уравнение можно построить более простым способом, воспользовавшись физическим смыслом производной.

Решить задачи, используя математическую модель – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

1. Найти кривую, проходящую через точку (2; 16), зная, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту же точку с началом координат.
2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (4; 1), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.
3. Кривая проходит через точку с координатами (0; –2) и обладает тем свойством, что тангенс угла наклона касательной в любой её точке равен ординате этой точки, увеличенной на три единицы. Найти уравнение этой кривой.
4. Составить уравнение линии, проходящей через точку (1; 1), для которой тангенс угла наклона каждой её касательной пропорционален квадрату ординаты точки касания.
5. Найти кривую, проходящую через точку (1; 2), для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, равен абсциссе точки касания.

6. Известно, что количество радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент. Имеется некоторое количество радиоактивного вещества. За 40 дней распалось 30% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 5% от первоначального количества?

7. В благоприятных для размножения условиях находится некоторое количество бактерий. Известно, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. Через 12 ч после начала опыта, численность некоторой популяции бактерий возросла в 3 раза. Во сколько раз увеличится число бактерий через 3 сут?

8. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. При прохождении через слой толщиной 1 м поглощается $\frac{1}{4}$ первоначального светового потока. Какая часть светового потока дойдёт до глубины 4 м? (Указание: обозначить $Q = Q(h)$ – световой поток, падающий на поверхность, тогда dQ – поглощённый световой поток при прохождении через слой воды толщиной dh).

9. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака диаметром $2R = 2$ м и высотой 4 м через круглое отверстие в дне цилиндра диаметром $2r = 0{,}06$ м. Ось цилиндра вертикальна. (Указание: зависимость уровня воды $h(t)$ в сосуде от времени t имеет вид:

$$-S(h)\frac{dh}{dt} = \sigma V(h),$$

где $S(h)$ – площадь поперечного сечения сосуда; σ – площадь отверстия в сосуде; $V(h)$ – скорость истечения жидкости, вычисляемая по закону Торричелли $V(h) = 0{,}62\sqrt{2gh}$).

10. За какое время вытечет половина воды из цилиндрического бака с диаметром 1,8 м и высотой 2,45 м через отверстие диаметром 6 см, которое находится в самой нижней части цилиндра, ось которого расположена горизонтально?

11. Температура вынутого из печи хлеба в течение 20 мин понижается от 100° до 60°. Температура воздуха 20°. Через сколько времени от начала охлаждения температура хлеба будет 30°?

12. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре 20°, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоёмкостью 0,2 и

температурой 75°. Через минуту вода нагрелась на 2°. Когда температура воды и предмета будут отличаться на 1°? Потерями тепла при нагревании сосуда и прочими пренебречь.

13. Металлическая болванка, нагретая до 420°, охлаждается в воздухе, температура которого 20°. Через 15 мин после начала охлаждения температура детали понизилась до 120°. Определить температуру болванки через 30 мин охлаждения.

14. Кусок металла с температурой 20° помещён в печь, температура которой равномерно повышается от 25° со скоростью 20° за мин. Скорость нагревания металла в 10 раз больше, чем разница температур печи и металла. Определить температуру тела через 20 мин.

15. В резервуар, содержащий 100 л 10%-го раствора соли, каждую минуту вливается 20 л воды и из него вытекает столько же литров смеси. Какое количество соли останется в резервуаре через 10 мин, если смесь непрерывно перемешивается. (Указание: рассмотреть функцию $y(t)$ – количество соли в резервуаре в момент времени t. Так как концентрация раствора непрерывно меняется, то производная данной функции $\frac{dy}{dt} = -\frac{c}{a}y$, где a – исходный объём, c – поступающий объём, при этом $y(0) = b$ – начальное содержание соли).

16. Моторная лодка движется по озеру со скоростью 20 км/ч. Через 40 с после выключения двигателя её скорость уменьшается до 8 км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Какова скорость лодки через 20 мин после остановки? (Указание: использовать второй закон Ньютона, при этом сила, действующая на лодку $F = -kv(t)$, где $v(t)$ – скорость лодки, k – коэффициент пропорциональности).

17. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5 м от начала отсчёта пути и имела скорость v_0 = 20 м/с. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с после начала движения. (Указание: обозначить $s(t)$ – пройденный путь, тогда $s'(t)$ – скорость материальной точки).

18. Автомобиль движется прямолинейно со скоростью 30 м/с. За какое время и на каком расстоянии он будет остановлен тормозами, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,3 его веса (принять g = 10 м/с^2).

19. Тело движется со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Какой путь пройдёт тело за 5 с от начала движения, если известно, что за 1 с оно проходит путь 8 м, а за 3 с – 40 м?

Решить задачи, используя математическую модель – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

20. Материальная точка массы m движется по оси Ox под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала (коэффициент пропорциональности в 4 раза больше массы точки). Среда, в которой происходит движение, оказывает сопротивление, пропорциональное скорости движения точки (коэффициент пропорциональности равен массе материальной точки). Найти закон движения.

21. Материальная точка массой m движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой, прямо пропорциональной расстоянию точки от центра притяжения. Сопротивление среды отсутствует. Определить закон движения точки, если в начальный момент времени положение точки от центра притяжения $x(0) = 20$ м, начальная скорость $x'(0) = 5$ м/с. (Указание: центр притяжения поместить в начало координат, коэффициент пропорциональности взять равным k^2m).

22. Материальная точка массой 1 кг движется по прямой из пункта A в пункт B под действием постоянной силы $F = 2$ Н. Сопротивление среды пропорционально расстоянию тела от точки B и в начальный момент времени равно $f = 1$ Н. Начальная скорость точки равна нулю. Определить закон движения точки. (Указание: рассмотреть функцию $x(t)$ – координата точки в момент времени t).

23. Найти закон движения материальной точки массой 1 кг, на которую действуют две силы: сила притяжения к неподвижному центру, пропорциональная расстоянию точки от этого центра $F_1 = -4x$, и периодическая сила, определяемая формулой $F_2 = \text{const}$.

24. Материальная точка массой 1 кг движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой, прямо пропорциональной расстоянию точки $x(t)$ от центра притяжения: $F_1 = -3x$. Сила сопротивления среды прямо пропорциональна скорости: $f = -5x'$. В начальный момент времени расстояние от неподвижного центра положительно и равно 10 м, начальная скорость точки равна 2 м/с. Найти закон движения точки.

4. ИТОГОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

ТЕСТ 1

Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4y=0$; ○ $y\frac{\partial z}{\partial x}+x=0$; ○ $x\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{dy}{dx}+x^2=y$; ○ $y'=\frac{y^2-x}{2y(x+1)}$.
Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $y'-\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\frac{y}{x}$; ○ $(y'')^2=y'$; ○ $y'=\frac{y+1}{x}$; ○ $xy''+5y'+y=0$.
Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $\begin{cases}x'=x-y,\\ y'=x+y+e^t.\end{cases}$ ○ $\begin{cases}x'=y,\\ y'=x+y.\end{cases}$ ○ $\begin{cases}x'=2x+5y,\\ y'=4x-2y.\end{cases}$ ○ $\begin{cases}x'=3x-2y+t,\\ y'=3x-4y.\end{cases}$
Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения: 1) $y''=xy$; 2) $(x+1)dy=y^2dx$; 3) $y'=2xy+y^2$; 4) $x^3y'=y(y^2+x^2)$.	**Варианты ответов:** разделение переменных, затем – интегрирование; подстановка $\frac{y}{x}=t(x)$; подстановка $y=u(x)v(x)$; подстановка $y'=z(x)$.
Задание 5. Дано $y=C_1+C_2e^{-4x}$ – общее решение дифференциального уравнения $y''+4y'=0$. Укажите значение C_1, если $C_2=-1$.	**Укажите ответ**

Задание 6. Функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$ является общим решением дифференциального уравнения …	**Варианты ответов:** ○ $y'' + y = e^x$; ○ $y' + y = e^x$; ○ $y'' + y' = 0$; ○ $y'' + 2y' + y = e^x$.
Задание 7. Частное решение линейного дифференциального уравнения $y'' + 5y' + 6y = \sin 2x$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y_ч = A\cos 2x + B\sin 2x$; ○ $y_ч = A\cos x + B\sin x$; ○ $y_ч = Ax + B$; ○ $y_ч = Ax^2$.
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $2y'' + y' - y = 2e^x$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $2xyy' = x^2 - y^2$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 2

Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $(x^2 + y)dx - xdy = 0$; ○ $y' = \frac{2y - x - 5}{2x - y + 4}$; ○ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 1$; ○ $yy'' = x^2$.
Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $yy'y'' = (y')^3$; ○ $y' = e^{2x} - e^x y$; ○ $xy' = y^2$; ○ $y'' + 6y' + 25y = 5$.
Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = -y + t^2, \\ y' = x + e^t. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = 6x + y + t, \\ y' = 5x + 2y + 1. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$

Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения: 1) $(1-x^2)y'-y=1+x$; 2) $y\cos\frac{y}{x}dx=x\,dy$; 3) $y''y=y'$; 4) $(x^2-1)dy+(y^2-4)dx=0$.	**Варианты ответов:** разделение переменных, затем – интегрирование; подстановка $\frac{y}{x}=t(x)$; подстановка $y=u(x)v(x)$; подстановка $y'=p(y)$.
Задание 5. Дано $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ – общее решение дифференциального уравнения $y''+9y=0$. Укажите значение C_2, если $C_1=2$.	**Укажите ответ**
Задание 6. Функция $y=(C_1+x)\sin x$ является общим решением дифференциального уравнения …	**Варианты ответов:** ○ $y''+5y'+4y=\sin x$; ○ $y'=\sin x$; ○ $y''+5y'+4y=0$; ○ $y'=y\,\mathrm{ctg}\,x+\sin x$.
Задание 7. Частное решение линейного дифференциального уравнения $y''+y'-12y=(16x+22)e^{4x}$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y_ч=Ae^{4x}$; ○ $y_ч=(Ax+B)e^{4x}$; ○ $y_ч=Axe^{4x}$; ○ $y_ч=Ax^2e^x$.
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $xy'-\frac{y}{x+1}=x$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y''-7y'+6y=6$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y'''=x+\sin x$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 3

Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются…	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $x\,dx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$; ○ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; ○ $\frac{d^2y}{dx^2}=x\sin x$; ○ $\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{y}=0$.

Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $y'' + y = e^{3x}(x+1)$; ○ $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$; ○ $y' + y\cos x = \sin x \cos x$; ○ $y' = 1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$.
Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $\begin{cases} x' = 2x - y + (t+1)e^{3t}, \\ y' = x + 4y + 2te^{3t}. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 4x + 6y. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = -2x + 3y, \\ y' = x. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = 5x - 4y + e^{2t}, \\ y' = 2x - y + e^{t}. \end{cases}$
Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения: 1) $y'x^2 - x^2 - y^2 = 0$; 2) $y''' = x^2 + e^{4x} + 2$; 3) $\sin^2 x\, y' = 1$; 4) $y' = 3x^2 y + x^5$.	**Варианты ответов:** разделение переменных, затем – интегрирование; подстановка $\frac{y}{x} = t(x)$; подстановка $y = u(x)v(x)$; последовательное интегрирование.
Задание 5. Дано $y = C_1 + C_2 e^{-8x}$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' + 8y' = 0$. Укажите значение C_1, если $C_2 = -2$.	**Укажите ответ**
Задание 6. Функция $y = C_1 \cos\frac{x}{4} + C_2 \sin\frac{x}{4}$ является общим решением дифференциального уравнения …	**Варианты ответов:** ○ $16y'' + y = e^x$; ○ $y'' + \frac{y}{16} = 0$; ○ $16y' + y = e^x$; ○ $y'' + 16y = 0$.
Задание 7. Частное решение линейного дифференциального уравнения $y'' - 12y' + 36y = 24\cos x$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y_ч = xA\cos x$; ○ $y_ч = A\cos 6x + B\sin 6x$; ○ $y_ч = xA\cos x$; ○ $y_ч = A\cos 6x + B\sin x$.

Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $y' + 2y = 4xe^{-2x}$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 9y = e^{x}$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 4

Задание 1. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются…	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 0$; ○ $xy' + 1 = e^{y}$; ○ $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; ○ $y'' = \sin^2\frac{x}{2}$.
Задание 2. Среди перечисленных обыкновенных дифференциальных уравнений линейными уравнениями являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $1 + (y')^2 = 2yy''$; ○ $y = xy' + (y')^2$; ○ $y'' + y' - 2y = 0$; ○ $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.
Задание 3. Из перечисленных систем дифференциальных уравнений однородными системами являются …	**Варианты ответов:** (укажите не менее двух ответов) ○ $\begin{cases} x' = 2x, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = 1 - x^2 - y^2, \\ y' = 2xy. \end{cases}$ ○ $\begin{cases} x' = 7y + x + 2, \\ y' = 7x + y + e^{t}. \end{cases}$
Задание 4. Сопоставьте каждому дифференциальному уравнению соответствующий способ решения: 1) $(x+1)y' - 2y = e^{x}$; 2) $yy'\sin x = \cos x$; 3) $y'' = e^{2y}$; 4) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.	**Варианты ответов:** разделение переменных, затем – интегрирование; подстановка $\frac{y}{x} = t(x)$; подстановка $y = u(x)v(x)$; подстановка $y' = z(x)$ или $y' = p(y)$.

Задание 5. Дано $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ – общее решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$. Укажите значение C_2, если $C_1 = 2$.	**Укажите ответ**
Задание 6. Функция $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}$ является общим решением дифференциального уравнения …	**Варианты ответов:** ○ $y''' = e^{2x}$; ○ $y''' - 4y' = 0$; ○ $y'' - 4y = 0$; ○ $y' - 4y = e^{2x}$.
Задание 7. Частное решение линейного дифференциального уравнения $y'' + y' + 2y = x^2$ имеет вид …	**Варианты ответов:** ○ $y_ч = Ax^2$; ○ $y_ч = Ae^x$; ○ $y_ч = x(Ax + B)$; ○ $y_ч = Ax^2 + Bx + C$.
Задание 8. Решите дифференциальное уравнение $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 2y' + 5y = 10$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решите дифференциальное уравнение $y''' = \cos 2x + \frac{1}{x^4}$.	**Запишите полное решение**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. – МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учебное пособие / Г.Н. Берман. – 22-е изд., перераб. – Спб. : Профессия, 2005.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для вузов. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М. : ООО «Издательство Оникс» ; ООО «Издательство «Мир и образование», 2006.
4. Каплан, И.А. Практикум по высшей математике : учебное пособие. В 2 т. Т. 2 / И.А. Каплан, В.И. Пустынников ; под общей ред. проф. В.И. Пустынникова. – 6-е изд., испр. и доп. – М. : Эксмо, 2008. (Образовательный стандарт XXI).
5. Мышкис, А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – 3-е изд., доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007.
6. Нахман, А.Д. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и их приложениям : учебное пособие / А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2005.
7. Нахман, А.Д. Дифференциальные уравнения : методическое пособие / А.Д. Нахман. – Тамбов : ТОИПКРО, 2007.
8. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу и др. ; под ред. С.Н. Федина. – 5-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2007.
9. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи : учебное пособие / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – 2-е изд., перераб. – М. : Высшая школа, 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КУЛИКОВ Геннадий Михайлович,
ЖИГУЛИНА Ирина Викторовна,
НАХМАН Александр Давидович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Учебное пособие

Редактор И.В. Калистратова
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 09.11.2011
Формат 60 × 84/16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 300 экз. Заказ № 490

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14