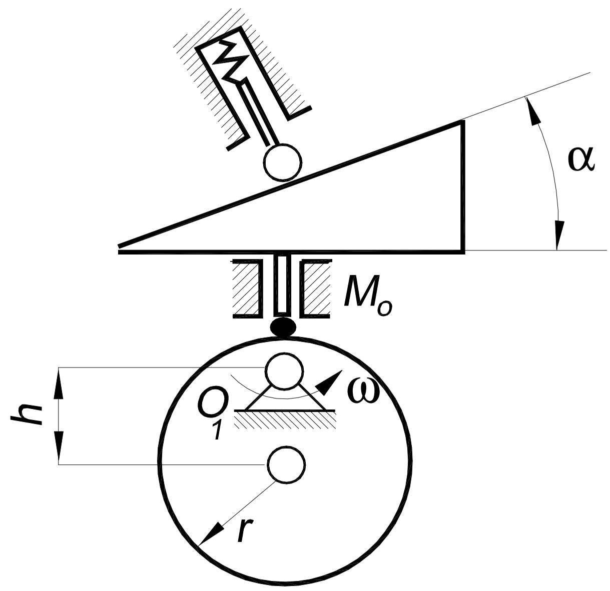
А.И. ПОПОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА



♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ГОУ ВПО ТГТУ ♦

ГИМН МЕХАНИКОВ

Верны мы все термеху
Не по приказу сверху,
Хоть верности мы этой
Совсем и не клялись.

Живём мы по законам,
Завещанным Ньютоном,
Как здорово, что все мы здесь
Сегодня собрались!

И пусть низка зарплата,
Не нажили мы злата,
Но на гуманитариев
Мы смотрим сверху вниз.

Нам принцип Галилея
Всех принципов важнее,
Как здорово, что все мы здесь
Сегодня собрались!

Мы все сегодня рады
Гостям Олимпиады.
Эй, Оренбург, с погодой
Смотри, не осрамись!

Пусть наши «Даламберы»
Приврали чуть в примерах,
Как здорово, что все мы здесь
Сегодня собрались!

И пусть сегодня вроде
Мы будто бы не в моде,
Не унывай, товарищ,
Поверь мне и держись!

И твёрдо верь ты также
В механику Лагранжа,
Как здорово, что все мы здесь
Сегодня собрались!

Александр Сергеевич Зиновьев, доцент Оренбургского государственного университета

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет»

А.И. ПОПОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Рекомендовано Учебно-методическим объединением по университетскому политехническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Технологические машины и оборудование»

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

ББК В21я73
УДК 531(075): 378.14
П58

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой
«Техническая физика и теоретическая механика»
Белорусского государственного университета транспорта
А.О. Шимановский

Доктор технических наук, профессор кафедры
«Теоретическая механика и теория механизмов и машин»
ГОУ ВПО «Ижевский государственный технический университет»
А.Э. Пушкарёв

Попов, А.И.

П58 Теоретическая механика : сборник задач для творческого саморазвития личности студента / А.И. Попов. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 188 с. – 400 экз. – ISBN 978-5-8265-0956-2.

Содержит рекомендации по организации творческого саморазвития студентов при решении олимпиадных задач, краткие сведения по истории олимпиадного движения, оригинальные задачи и задачи повышенной сложности по теоретической механике, предложенные на всесоюзных, всероссийских и других олимпиадах различного уровня с 1981 по 2010 годы. Приведены ответы и указания для самооценки решения задач.

Рекомендовано для студентов высших учебных заведений дневной и заочной форм обучения, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 151000 – Технологические машины и оборудование, а также может быть использовано в процессе самостоятельной работы при углублённом изучении теоретической механики, при подготовке к участию в студенческих олимпиадах и в системе непрерывного профессионального образования.

ББК В21я73
УДК 531(075): 378.14

ISBN 978-5-8265-0956-2

Прошла олимпиада. А человек? Ему необходимо расти дальше. Естественно, такой богатый потенциал, как развитая способность решать задачи, не должен пропадать. Нужен ли такой человек науке? (*антитезу этого вопроса сейчас сложно задать*). *Правда, олимпиадные задачи отличаются от научных. Первые требуют быстрого решения, яркой вспышки, да и решение в них есть и известно, вторым озарение тоже необходимо (это и составляет прелесть научной работы), но приходит оно после долгих, иногда многолетних размышлений уже над одной проблемой* (*обязанность мудрого педагога – предложить олимпийцу такую задачу*), *а решение ее – это только начало следующей работы. То есть вместо множества коротких задач – одна большая. Вместо краткой мощной концентрации в один день – упорная работа в течение нескольких лет. Но объединяют олимпиаду и научную работу творческое прозрение и реализация всех сторон души человека.*

Победитель Всесоюзной олимпиады
по теоретической механике 1985 года,
доктор технических наук, профессор
А.Э. Пушкарёв

Попов Андрей Иванович – кандидат педагогических наук, доцент ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», член жюри Всероссийской студенческой олимпиады по теоретической механике с 1993 года, член методической комиссии Центральной группы управления Всероссийской студенческой олимпиады (2005), член учебно-методической комиссии по специальности «Управление инновациями» УМО по университетскому политехническому образованию. Награждён нагрудным знаком «За развитие научно-исследова-тельской работы студентов» (2006).

Область научных интересов: проблемы развития творческих способностей в вузе, формирование профессиональных компетенций специалистов инновационной сферы.

Автор более 110 научных статей и методических публикаций, монографий «Методологические основы и практические аспекты организации олимпиадного движения по учебным дисциплинам в вузе» (в соавторстве), «История становления и тенденции развития олимпиадного движения по теоретической механике», 8 учебных пособий, посвящённых различным аспектам креативного профессионального становления через включение обучающихся в олимпиадное движение и рекомендованных к использованию Минобрнауки РФ и УМО по университетскому политехническому образованию.

Учебное издание

ПОПОВ Андрей Иванович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник задач
для творческого саморазвития
личности студента

Редактор И.В. К а л и с т р а т о в а
Инженер по компьютерному макетированию М.А. Ф и л а т о в а

Подписано в печать 29.11.2010
Формат 60 × 84/16. 10,93 усл. печ. л. Тираж 400 экз. Заказ № 589

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Процесс формирования в России инновационной экономики требует особого внимания к проблеме обеспечения качества высшего профессионального образования, что предопределяет его ориентированность на личность как основную ценность и нацеленность на обеспечение максимально благоприятных условий для саморазвития этой личности и формирования академических, социально-личностных и профессиональных компетенций специалиста, и в первую очередь, творческих компетенций.

Основными факторами, определяющими степень овладения творческими компетенциями как базовыми для конкурентоспособного выпускника вуза являются: инициатива и творчество; нацеленность на саморазвитие; готовность к командной деятельности, как в роли участника команды, так и её лидера; самоорганизация своей деятельности; мобильность подготовки, обеспечивающая профессиональную адаптацию с учётом динамики социально-экономических преобразований в народнохозяйственной сфере; коммуникабельность в познавательной деятельности и готовность к конструктивному восприятию альтернативных подходов к решению проблем; стремление к самостоятельности и ответственности за принятые решения и, прежде всего, креативный уровень интеллектуальной активности.

Формирование творческих компетенций наиболее активно происходит при самостоятельной познавательной деятельности при изучении дисциплин, определяемых ФГОС. Одной из ключевых дисциплин в подготовке бакалавра по направлению 151000 «Технологические машины и оборудование» является механика – наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел.

Механика, являясь научной основой важнейших областей техники, продолжает интенсивно развиваться. Это стимулируется появлением новых прогрессивных технологий и инновационных производств, автоматизацией производственных процессов, созданием новых высокотехнологичных машин и механизмов, освоением макро- и микромира. Прогресс современного производства невозможен без широкого взаимодействия науки и техники при реализации инновационных проектов.

Механическим движением называют изменение с течением времени взаимного положения тел в пространстве. Примеры таких явлений встречаются повсюду: газовые и жидкостные потоки в машинах и аппаратах, различные транспортные средства (автомобили, корабли, самолёты), механизмы, машины. К тому же состояние покоя, в котором находятся различные опорные конструкции и производственные сооружения, является частным случаем движения. При взаимодействии материальных тел друг с другом происходит изменение движения этих тел или изменение их формы.

Перечень проблем, рассматриваемых в механике, практически необъятен и с развитием этой науки он непрерывно пополняется, образовывая подчас самостоятельные области, связанные с изучением механики твёрдых деформируемых тел, жидкостей и газов. Современная механика представляет собой целый комплекс общих и специальных дисциплин, посвящённых проектированию и расчёту различных статических и динамических конструкций, сооружений, механизмов, машин, аппаратов, необходимых для развития инновационного производства.

Однако всё это многообразие опирается на ряд основных понятий, законов, принципов, методов, общих для всех областей механики. Рассмотрение этих общих закономерностей движения материальных тел и методов их применения и составляет предмет теоретической (или общей) механики.

При изучении какого-либо явления необходимо выделять в нём наиболее существенное, главное, абстрагируясь от других незначительных сторон явления. В результате этого исследуются некоторые модели (схемы) реальных тел, процессов, явлений. Такими научными абстракциями являются все вводимые в теоретической механике исходные положения и понятия, модели материальных тел, схемы их взаимодействий.

Самостоятельное решение творческих задач по теоретической механике в технических вузах и в классических университетах является одним их существенных элементов организации творческого саморазвития в процессе изучения этой дисциплины, которое способствует более системному и глубокому усвоению профессиональных знаний, даёт возможность сформировать у студентов готовность к творческой деятельности, развить креативный характер мышления. Всё это помогает подготовить конкурентоспособного специалиста к профессиональной деятельности в современных рыночных условиях по разработке и продвижению инновационных проектов на предприятиях машиностроительного кластера.

В данном пособии собран банк уникальных творческих задач по теоретической механике, даны методические указания по решению задач и ответы для самоконтроля. Студенты, заинтересованные в углублённом изучении отдельных вопросов теоретической механики и в более широкой практике по решению задач, необходимые материалы могут найти в учебной литературе, список которой даётся в конце книги.

Приведённые примеры достаточно полно отражают возможности рассматриваемых творческих задач в процессе творческого саморазвития личности обучающихся, при этом самостоятельная работа студентов с использованием учебного пособия проводится параллельно с аудиторными занятиями и обеспечивается консультациями преподавателей.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений дневных и заочных форм обучения, обучающихся по направлению подготовки 151000 – «Технологические машины и оборудование», а также для тех, кто изучает теоретическую механику самостоятельно. Материал книги изложен так, что им можно пользоваться при изучении теоретической механики по полной и сокращённым программам других специальностей втузов, входящих в УМО по университетскому политехническому образованию.

Организация самостоятельной работы с использованием данного пособия предполагает несколько этапов.

1. Самостоятельное изучение студентом раздела дисциплины по источникам (из списка рекомендованной литературы).
2. Самостоятельное решение студентом творческих задач в соответствии с собственным уровнем креативности при использовании ответов и указаний. Базовый уровень подготовки соответствует творческим задачам средней сложности.

3. Совместная творческая деятельность группы студентов при решении олимпиадных задач повышенной и высокой сложности в рамках факультативных занятий по дисциплине и в студенческих кружках.

4. Использование задач пособия или их модификаций в качестве конкурсных заданий при проведении вузовского тура Всероссийской студенческой олимпиады.

При подготовке пособия автором использован опыт организации олимпиадного движения по теоретической механике профессора Тамбовского государственного технического университета Владимира Ивановича Попова, доцента Омского политехнического института Валерия Алексеевича Тышкевича, доцента Томского политехнического института Михаила Петровича Шумского.

1. РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ТВОРЧЕСКОГО САМОРАЗВИТИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В процессе самообразования и развития своей креативности Вы последовательно проходите три уровня готовности к решению творческих профессиональных задач, предполагающих:

- на первом уровне решение задач повышенной трудности, требующих глубокого понимания изучаемого курса, нестандартной комбинации имеющихся знаний, способности к анализу субъективно существующего информационного поля и определение условий его достаточности;
- на втором уровне постановка и решение типовых ситуационных производственных задач, в том числе и в экстремальных внешних условиях;
- на третьем уровне решение творческих задач, основанных на исследовании профессионально-ориентированных ситуаций и предполагающих самостоятельное формулирование проблемы и её решение.

Необходимо учитывать, что большинство задач, предлагаемых Вам в пособиях и учебниках, имеют стандартную, привычную конструкцию, подразумевающую достижение искомого результата по заданной процедуре, и являются лишь слабым подобием реальных жизненных процессов. В процессе же профессиональной деятельности Вы как специалист, как правило, будете сталкиваться с производственными ситуациями, в которых действуют неопределённые, вероятностные условия, излишние, противоречивые и недостающие данные, когда нужно принимать решения в экстремальных условиях ограничения времени и (или) использования материальных и финансовых ресурсов. Производственные ситуации такого рода неизбежно возникают в условиях инновационной экономики, в процессе освоения или разработки новых производственных технологий и оборудования.

Творческие задачи, включённые в пособие, отражают в себе профессиональный и социальные контексты будущей профессиональной деятельности, и предполагают не только хорошее знание изучаемой дисциплины и умения пользоваться этими знаниями, но и требует от Вас творческого акта, т.е. построения некоторой неочевидной цепочки рассуждений, приводящей к созданию субъективно нового.

Решение Вами творческой задачи должно включать следующие этапы:

- погружение в информационное поле предполагаемой задачи через постановку проблемы, восприятие условий и описание проблемы;
- разработка информационно-логической модели задачи через установление взаимосвязи между исходными данными, выявление основных законов и границ их применения при решении данной задачи;
- проверка адекватности разработанной модели условиям постановки задачи;
- разработка алгоритмической структуры задачи, определение её оптимальности;
- разработка технологии реализации алгоритмической структуры задачи, проведение анализа адекватности технологии предложенным средствам реализации;
- проведение анализа полученных результатов с позиции корректности постановки проблемы, адекватности разработанной информационно-логической модели постановке проблемы, оптимальности алгоритмической структуры и эффективности технологии реализации.

При этом Вы должны учитывать основные факторы, препятствующие успешному нахождению решения творческой задачи:

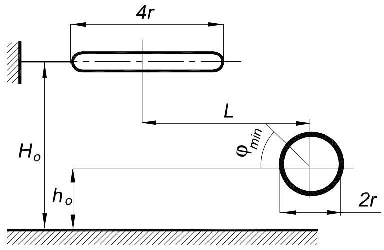
- на этапе погружения в информационное поле некоторые значащие элементы информации могут остаться невостребованными, и недостаток или избыток данных вызовет психологический дискомфорт;
- на этапе разработки информационно-логической модели взаимосвязь между основными структурными элементами может устанавливаться без учёта основных закономерностей протекания процесса, что не позволяет говорить об адекватности модели поставленной проблеме;
- практически всегда отсутствует проверка промежуточных этапов решения и конечного результата на адекватность, что является недопустимым для специалиста, претендующего на конкурентоспособность.

При организации творческого саморазвития по теоретической механике представляется возможным выделить пять классов наиболее распространённых творческих задач, ранжированных нами по возрастанию воздействия на процесс развития креативности.

1. Задачи, в основе которых лежит знакомая (например, по школе) проблемная ситуация.
2. Задачи на знание базового курса и рассчитанные на комбинирование известных способов решения задач в новый способ.
3. Информационно-перегруженные, неполнопоставленные, с размытыми условиями, требующие способности к «видению проблемы».
4. С парадоксальной формулировкой, «провоцирующие» на ошибку, с неопределенным, неоднозначным ответом.
5. Задачи, обеспечивающие междисциплинарные связи.

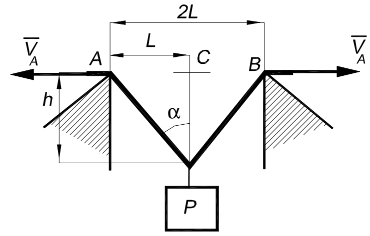
Приведём примеры из каждого класса задач по теоретической механике.

Пример 1. Под каким наименьшим углом к горизонту φ_{min} следует бросить баскетбольный мяч, чтобы он пролетел сверху сквозь кольцо, не ударившись в него. Толщиной кольца, изменением скорости мяча за время пролёта через кольцо и сопротивлением воздуха пренебречь.

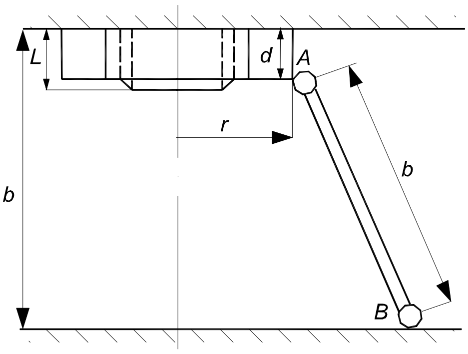


П р и м е р 2. Груз P поднимается с помощью двух тросов, движущихся в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями ($\overline{V}_A = -\overline{V}_B$).

Определить скорость и ускорение груза.



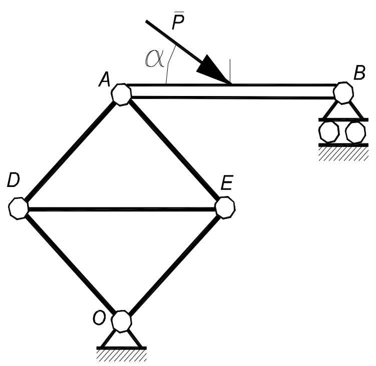
П р и м е р 3. На вертикально выступающую из горизонтальной плоскости часть шпильки длиной l навернута однородная гайка толщиной d и весом P. К гайке на расстоянии r от её оси с помощью цилиндрического шарнира присоединён однородный стержень AB длиной b и весом Q, конец которого опирается на гладкую горизонтальную плоскость. Расстояние между плоскостями равно b. Резьба правая с постоянным шагом. Приняв, что при самоотвинчивании гайки в результате взаимодействия со шпилькой ускорение её центра тяжести C постоянно, найти скорость и ускорение точки B в момент схода гайки со шпильки, если давление на опору в этот момент равно половине веса системы, и гайка к этому моменту совершила пять оборотов. Вычисления провести при $r = d = l = b/2$ и $P = Q$.

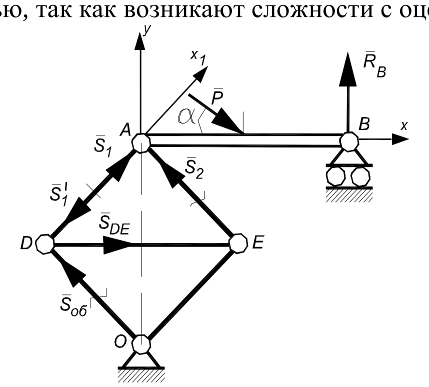


Комментарий. Данный тип задач, отражающий контекст профессиональной деятельности, лучше всего подходит для подготовительной стадии олимпиадного движения. На состязательной стадии применять такие задачи не рекомендуется, так как на их осмысление уйдёт значительное время.

П р и м е р 4. Горизонтальная балка AB левым концом A шарнирно соединена со стержневым квадратом $ADOE$, установленным так, что $AO \perp AB$; правый конец B балки закреплён на шарнирно-подвижной опоре. К середине балки приложена сила P под некоторым углом α. Пренебрегая весом стержней квадрата, соединённого между собой и с опорой O шарнирно, а также весом балки по сравнению с силой P определить, при каком угле α усилие в диагональном стержне квадрата будет минимальным.

Комментарий. Очевидность подхода к решению «усыпляет» сознание обучающегося, и он действует в соответствии с усвоенным алгоритмом. Такого типа задачи активизируют мыслительные процессы, но включать их в состязательную стадию следует с большой осторожностью, так как возникают сложности с оценкой их решения.





П р и м е р 5. Мальчик бежит с постоянной скоростью V и с помощью водила катит перед собой обод, имеющий форму эллипса с полуосями a и b ($a > b$). Точка касания водила с ободом находится на постоянной высоте h над землёй. Выразить угловую скорость ω обода, катящегося без проскальзывания, как функцию от α, β. Вычислить ω при $OX \perp MN$.

Комментарий. Решение этой задачи предполагает большие математические выкладки. Рекомендуется использовать такого рода задачи для обеспечения междисциплинарных связей.

При организации творческого саморазвития по теоретической механике на основе данного пособия Вам необходимо повторить темы, включенные в примерную программу учебной дисциплины.

1. Статика. Понятие силы, момента силы относительно точки и оси, пары сил. Методы преобразования систем сил. Условия и уравнения равновесия твёрдых тел под действием различных систем сил. Центр тяжести твёрдого тела и его координаты.

2. Кинематика. Предмет кинематики. Способы задания движения точки. Скорость и ускорение точки. Вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Плоское движение твёрдого тела и движение плоской фигуры в её плоскости. Абсолютное и относительное движение точки. Сложное движение твёрдого тела.

3. Динамика. Предмет динамики. Законы механики Галилея-Ньютона. Задачи динамики. Прямолинейные колебания материальной точки.

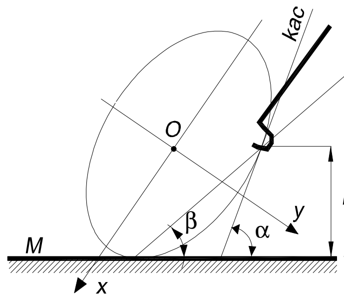
4. Механическая система. Дифференциальные уравнения движения механической системы. Количество движения материальной точки и механической системы. Момент количества движения материальной точки относительно центра и оси. Кинетическая энергия материальной точки и механической системы.

5. Общие теоремы динамики. Понятие о силовом поле. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы. Метод кинетостатики. Определение динамических реакций подшипников при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Связи и их уравнения. Принцип возможных перемещений.

6. Обобщённые координаты системы. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщённых координатах или уравнение Лагранжа второго рода. Явления удара. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе.

В каждом блоке задач данного пособия есть задачи высокой сложности (7 – 10 баллов), повышенной сложности (5–6 баллов), средней сложности (3–4 балла). Для некоторых задач повышенной сложности в разделе «Ответы и указания» приведены также указания по поиску решения.

В случае невозможности найти решение в процессе самостоятельной работы даже после анализа указаний и ответа, приведённых в учебном пособии, Вам необходимо обратиться за консультацией к своему преподавателю.



2. ИСТОРИЯ ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ВСЕСОЮЗНЫЕ ОЛИМПИАДЫ (1981 – 1991)

Проведение олимпиад по теоретической механике в большинстве технических вузов СССР началось ещё в середине 1970-х гг. на уровне академических групп и внутривузовского тура, а первые олимпиады в некоторых вузах (например, МВТУ им. Н.Э. Баумана) проводились уже в середине 1950-х гг.

В 1981 г. Минвузом СССР и Секретариатом ЦК ВЛКСМ было принято решение о проведении Всесоюзного тура олимпиады по теоретической механике под эгидой «Студент и научно-технический прогресс» с целью повышения качества подготовки будущих специалистов, более полного развития способностей и дарований студенческой молодёжи, привития им навыков самостоятельной работы и умений принимать правильные решения в экстремальных условиях.

С этого момента проведение олимпиад приняло более организованный характер, предполагающий поэтапное проведение туров (I – внутривузовского, II – республиканского и III – Всесоюзного), что позволило сделать предметную олимпиаду по теоретической механике массовым соревнованием студентов. В III туре участвовали представители всех 15 союзных республик и городов Москвы и Ленинграда.

За всю историю Всесоюзный тур (III заключительный тур) проводился в трёх вузах СССР. С 1981 г. первые пять лет проводился в Ижевском механическом институте, в 1986 – 90 гг. III тур проводился в Белорусском политехническом институте (БПИ) в Минске, а в 1991 г. – в Пермском политехническом институте, но в связи с начавшимся распадом СССР на III тур в том году приехали команды только РСФСР, Беларуси, Украины, Узбекистана, Азербайджана, Туркмении, Таджикистана и городов Москвы и Ленинграда.

Победителями олимпиад в 1982 – 1985 гг. были студенты: Ленинградского политехнического института Д.В. Файнгауз, МВТУ им. Н.Э. Баумана М.Б. Демидов, Московского авиационного института А.И. Иващенко, Ижевского механического института А.Э. Пушкарёв.

За пять лет в олимпиадах, проводимых в Белорусском политехническом институте, приняли участие 251 студент из 70 вузов страны. Среди участников было 16 студенток. Во время проведения олимпиад в Минске в них участвовало 7 иностранных студентов. Во Всероссийских олимпиадах, которые пришли на смену Всесоюзным, также принимают участие значительное количество иностранных студентов, которые занимают высокие места (обычно это граждане Вьетнама).

Лучшие достижения во время олимпиад в Минске показали студенты Москвы, Ленинграда и РСФСР. Призёрами олимпиады стали 6 студентов Ленинграда, 4 – Москвы, 4 – РСФСР и 1 – БССР (табл. 1).

Студенты следующих вузов неоднократно занимали 1 – 10 места в конкурсе: ЛГТУ (Ленинград) – 5 раз, ТТУ (Таллин) – 4 раза, МГТУ им. Н.Э. Баумана, МСИИ, МАИ (Москва), БПИ (Минск) – 3 раза. Замечательного успеха добился Тамбовский институт химического машиностроения (ТИХМ), студенты которого, подготовленные профессором Владимиром Ивановичем Поповым стали победителями заключительного тура олимпиады 1986 и 1990 гг. Дважды входили в десятку сильнейших студенты МИНиГ (Москва) и ЛИТМО (Ленинград), КПИ (Кишинев), Н-НПИ (Н. Новгород). Не все действительно сильные вузы представлены в этом списке, так как РСФСР с более чем сотней технических вузов на Всесоюзной олимпиаде могла быть представлена командой только из трёх студентов.

1. Результаты призёров олимпиады (в скобках указан суммарный балл конкурсного задания, балл призёров)

Год / Место	1986 (56)	1987 (57)	1988 (56)	1989 (55)	1990 (51)
1	А. Попов (27), ТИХМ, Тамбов	С. Баранов (45,5), ЧПИ, Челябинск	С. Шубин (38,5), МСИИ, Москва	В. Синиль-щиков (49,5), ЛМИ, Ленинград	А. Тялин (32), ТИХМ, Тамбов
2	И. Цигельский (22), МИНиГ, Москва	Д. Шкловский (37), ЛИТМО, Ленинград	И. Минков (35,5), МИНиГ, Москва	М. Славутич (46,5), ЛГТУ, Ленинград	В. Малышев (28,5), НПИ, Н. Новгород
3	Д. Явид (21), БПИ, Минск	Т. Ойхберг (36), ЛГТУ, Ленинград	А. Киселёв (34), ЛИТМО, Ленинград	В. Щигулов (43), ЛКИ, Ленинград	Т. Ноготков (24,5), МГТУ, Москва

III тур Всесоюзной олимпиады проводился как личное первенство. Места в неофициальном командном первенстве определялись по суммарным баллам трёх студентов-участников конкурса (или по баллу меньшего числа участников, если команда прибывала на олимпиаду в неполном составе) (табл. 2). Место команды по итогам пяти лет установлено по сумме баллов команды за все годы (1-е место – 416, 2-е – 407,5, …, 17-е – 41).

2. Результаты выступления команд на Всесоюзных олимпиадах в 1986 – 1990 гг.

Команда	1986	1987	1988	1989	1990	Место по итогам пяти лет
	место					
Азербайджана	–	15	9	13	–	16
Армении	7	10	10	11	10	10–11
БССР	1	6	4	6	4	4
Грузии	15	13	16	11	12–13	13
Казахстана	13	11	14	10	5	9
Киргизии	–	14	15	14	14	15
Латвии	10–11	–	12	15	12–13	14
Литвы	10–11	9	11	7–8	–	10–11
Молдовы	12	7	6	9	8	8
РСФСР	2–3	2	5	3	1	3
Таджикистана	14	12	13	12	11	12
Туркмении	8	16	17	17	15	17
Узбекистана	6	8	8	4	9	7
УССР	9	4	3	5	6	5
Эстонии	5	5	7	7–8	7	6
Ленинграда	4	1	2	1	3	1
Москвы	2–3	3	1	2	2	2

Огромный вклад в развитие олимпиадного движения на этапе Всесоюзных олимпиад внесли большие энтузиасты своего дела В.И. Попов, В.А. Тышкевич, С.А. Ляпцев, Г.И. Дубровина, Р.М. Подгаец, С.Г. Березина, М.П. Шумский, В.К. Тарасов (Россия), Н.И. Горбач, Б.И. Лапушина и Е.Н. Ламбина (Белоруссия), Р.М. Дружинина (Узбекистан), К.Р. Кенк (Эстония), и др.

После первых двух пятилетних циклов в 1991 г. проведение Всесоюзной олимпиады по теоретической механике было поручено Пермскому политехническому институту (с 1992 г. – Пермский государственный технический университет). В 1991 г. Госкомитет РСФСР по делам науки и высшей школы не запланировал проведение Всероссийской олимпиады, и поэтому Оргкомитетом было принято решение совместить Всероссийскую олимпиаду с Всесоюзной. На Всесоюзную олимпиаду 1991 г. наряду с командами союзных республик (которые к тому времени уже объявили о своём государственном суверенитете), Москвы и Санкт-Петербурга, были приглашены команды десяти экономических регионов России. Такой принцип организации Всесоюзной олимпиады был более справедливым для Российской Федерации, которая раньше, кроме команд Москвы и Ленинграда, была представлена только одной сборной командой.

На приглашение откликнулись и прибыли на олимпиаду команды 6 союзных республик – Азербайджана, Белоруссии, Таджикистана, Туркмении, Узбекистана и Украины. Вузы прибалтийских республик отказались участвовать, а в остальных республиках или шла война, или экономический кризис поразил всю экономику, поэтому студенты этих республик не смогли приехать. Из России в олимпиаде приняли участие команда Москвы, команды восьми регионов (Центрального, Центрально-Чернозёмного, Волго-Вятского, Северо-Кавказского, Поволжского, Уральского, Западно-Сибирского и Восточно-Сибирского), а также команда хозяев олимпиады – Пермского политехнического института.

Всего в олимпиаде 1991 г. участвовали 44 студента из 23 городов и 26 вузов. Первые четыре места заняли украинские и белорусские студенты: Геннадий Степанов (Донецк), Виталий Кравец (Запорожье), Игорь Герасимович (Могилёв) и Эдуард Цвирко (Минск). Призёрами Российского первенства стали Роберт Балоян (Краснодар), Олег Харгелия (Пермь) и Тихон Протасов (Москва).

Основным новшеством в программе олимпиады стало проведение командного компьютерного конкурса, где студентам предлагалось с помощью ЭВМ решить задачу по теоретической механике, не имеющую аналитического решения. Победителями этого конкурса, ставшего впоследствии традиционным, также стали украинские студенты.

ВСЕРОССИЙСКИЕ ОЛИМПИАДЫ (1982 – 2010)

Всероссийские олимпиады как II тур Всесоюзной олимпиады проводились с 1982 г. В 1982, 1983, 1986 – 1990 гг. они проводились в Омском политехническом институте, в 1984 и 1985 гг. – в Алтайском политехническом институте (г. Барнаул). Наивысших результатов здесь добились студенты А.Ф. Валлер (Астраханский технологический институт рыбной промышленности, 1982), Е.Б. Кивенко (Томский политехнический институт, 1983), С.Р. Ашихмин (Казанский авиационный институт, 1984), В.М. Серов (Куйбышевский авиационный институт, 1985), А.И. Попов (Тамбовский институт химического машиностроения, 1986), С.В. Баранов (Челябинский политехнический институт, 1987), Р.Е. Гильманов (Казанский авиационный институт, 1988), А.И. Кудашов (Горьковский политехнический институт, 1989), А.В. Морозов (Ижевский механический институт, 1990).

В 1991 г. отдельная олимпиада РСФСР не проводилась, а победитель среди российских вузов определялся по итогам выступления студентов России на Всесоюзной олимпиаде.

В 1992 г. олимпиада проводилась уже в ранге Межреспубликанской. В связи с усилением экономического кризиса она собрала рекордно малое число участников – всего 21 студента из 15 вузов. Олимпиада проводилась на борту теплохода, совершавшего рейс Пермь – Чайковский – Пермь.

В олимпиаде приняли участие команды 3 республик (Азербайджана, Беларуси, Украины), 4 регионов России (Центрально-Черноземного, Волго-Вятского, Поволжского, Уральского) и команда ПГТУ. Победителем в теоретическом и компьютерном конкурсах стала команда Украины.

Начиная с 1993 г., Всероссийская олимпиада является III (заключительным) туром олимпиады. Из республик бывшего СССР приехали на олимпиаду 1993 г. только две команды – Беларуси и Узбекистана.

С 1993 г. Всероссийская олимпиада стала проводиться в загородном пансионате. Число участников возросло – 42 студента из 22 вузов. Победителями теоретического конкурса стали Олег Гусев (Ярославль), Константин Вешняков (Нижний Новгород) и Наиль Мубинов (Пермь). В компьютерном конкурсе победила команда пермских студентов, второе и третье места заняли команды Санкт-Петербурга и Нижнего Новгорода.

С 1994 г. в олимпиаде стали участвовать не только студенты технических вузов, но и студенты-механики классических университетов (студенты Уральского государственного университета им. А.М. Горького). Это расширение было сделано сознательно с тем, чтобы сохранить олимпиадное движение в период экономического кризиса, дать возможность приезжать на олимпиаду студентам тех вузов, которые изыскали для этого финансовые возможности.

В период экономического кризиса указанные меры дали ожидаемые результаты, и число участников заключительного тура ВСО продолжало расти и в 1995 г. достигло 50 человек. Победителями теоретического конкурса в 1994 г. стали Марат Сабирзянов (Ижевск), Алексей Монастыренко и Иван Мороз (Санкт-Петербург), в 1995 г. – Алексей Гун (Челябинск), Александр Пределин (Екатеринбург) и Валерий Вуколов (Самара). В компьютерном конкурсе в 1994 г. победу одержала команда Ижевска, а в 1995 г. – команда Санкт-Петербурга.

Из зарубежных участников с 1994 г. остались только представители Республики Беларусь, которые и поныне приезжают на Всероссийские олимпиады.

Все годы проведения олимпиад в Перми активную работу по подготовке и проведению олимпиад выполняли Ю.И. Няшин, Р.Н. Рудаков, Ю.В. Калашников, Р.М. Подгаец, В.В. Шишляев.

В Перми сформировался коллектив высококлассных преподавателей, энтузиастов олимпиад, ставший основой состава жюри всех последующих Всероссийских олимпиад: С.Г. Березина (Ижевск), Г.И. Дубровина, С.А. Ляпцев, А.Н. Красовский (Екатеринбург), В.В. Прудников, Е.И. Яковлев (Москва), О.Н. Скляр (Минск), Р.М. Подгаец (Пермь), Г.В. Куча (Оренбург), М.П. Щевелёва (Челябинск), А.И. Попов (Тамбов) и многие другие.

С 1996 г. базовым вузом Всероссийских олимпиад стал Уральский государственный университет (г. Екатеринбург), который совместно с Уральским государственным техническим университетом – УПИ и Уральской государственной горно-геологической академией организовывал проведение олимпиад. В это время предметные олимпиады испытывают второе рождение – из года в год увеличивается число участников олимпиад, растёт их профессиональный уровень. Если в 1992 г. в финальном туре в Перми участвовал 21 студент из 15 вузов, то в 1999 г. в Екатеринбурге уже было 107 студентов из 40 вузов России.

Победителями в 1996 г. стали А.А. Брагин (МГТУ им. Н.Э. Баумана), К.Н. Гуляев (Пермский ГТУ), А.А. Гун (ЧГТУ) в теоретическом конкурсе и Р.М. Ганопольский (ТГУ) в компьютерном; в 1997 г. П.М. Островский, Д.С. Любшин (оба МФТИ) и С.В. Кравчинский (МАДИ) в теоретическом конкурсе; и Р.Ф. Марданов (КГУ) и А.В. Кудюков, О.В. Столбов (оба ПГТУ) в компьютерном; в 1998 г. Р.Ф. Марданов (КГУ), А.П. Бондарев (Новочеркасский ПИ), М.А. Кудринский (ПГУ) в теоретическом конкурсе; и К.С. Челюдских (УрГУ) и команда Новочеркасска в компьютерном конкурсе.

В 1999 г. в теоретическом конкурсе победили В.С. Пестун (МФТИ), М.А. Кудринский (ПГУ), Р.Ф. Марданов (КГУ). В компьютерном конкурсе победили Р.Ю. Компанеец (МФТИ), Р.Ф. Марданов (КГУ), В.С. Пестун (МФТИ) и команда МФТИ.

Огромный вклад в развитие олимпиадного движения в период проведения ВСО в Екатеринбурге внесли профессор А.Н. Красовский – бессменный председатель Оргкомитета, профессора С.А. Ляпцев и Ю.Ф. Долгий, доцент Н.А. Клинских – авторский коллектив, задачи которого являются образцом олимпиадных задач.

В 2001 г. олимпиадное движение по теоретической механике отметило своеобразный юбилей – 20-летие проведения Всесоюзных и Всероссийских олимпиад. В юбилейной олимпиаде в г. Екатеринбурге, проводимой Уральским госуниверситетом и Уральским государственным техническим университетом (УПИ) участвовало более сорока команд по 2-3 участника в команде.

В 2001 г. победили М.В. Форенталь (ЮУрГУ), Т.Ю. Гатанов, Р.Ю. Компанеец (оба МФТИ). В 2003 г. пробеду праздновали А.Ю. Гостоев, В.М. Муравьёв, Д.Р. Нургалиев (все – МФТИ).

С 2004 по 2008 гг. базовым вузом являлся Казанский государственный университет им. В.И. Ленина. Большой вклад в сохранение и развитие традиций олимпиадного движения внесли профессор, академик АН РТ Ю.Г. Коноплёв – председатель Оргкомитета и доцент А.И. Муштари – автор задач ряда олимпиад.

В 2004 г. места распределились следующим образом: 1 место – С.А. Дробыш (Москва), 2 место – Е.Е Гилёв. (Южно-Уральский государственный университет), 3 место – Д.Т. Ахияров (Уфимский государственный нефтяной технический университет), А.В. Гладких (Казанский государственный технологический университет), В.В. Дудин (Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет).

В 2005 г. полную победу праздновали представители школы физтеха и классических университетов: 1 место – А.Ю. Бродский (МФТИ), 2 место –А.А. Фортунатов (МФТИ), 3 место – Е.В. Донцов (НГУ).

В 2006 г. успех был на стороне этих же команд, студенты которых заняли семь мест в восьмерке лучших: 1 место – Е.В. Мозгунов, 2 место – И.С. Ерофеев (МФТИ), 3 место – Е.В. Донцов (НГУ, кстати, призёр 2005 г.). В их стройные ряды смог вклиниться только Р.А. Керимов (БГТУ «ВОЕНМЕХ»), поделивший 4–5 места.

В 2007 г. 1 место занял А.М. Киселёв (МФТИ), 2 место – К.А. Корнишин (РГУНГ), 3 место – П.А. Гусихин (МФТИ).

Во Всероссийских олимпиадах участвовали и продолжают участвовать, и не без успеха, студенты из Беларуси. Например, в 2005 г. студент из Гомеля Е.С. Мандрик (БелГУТ) занял 5 место сразу после студентов МФТИ и НГУ.

В 2009 – 2010 г. Всероссийская олимпиада проводилась в Южно-Российском государственном техническом университете (Новочеркасском политехническом институте). Автором и вдохновителем олимпиады в Новочеркасске является мэр г. Новочеркасска, профессор кафедры теоретической механики А.И. Кондратенко.

ЗОНАЛЬНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

При переходе от Всесоюзной олимпиады к Всероссийской в качестве II (регионального) тура стал рассматриваться зональный тур. Наиболее широко и на высоком методическом и организационном уровнях проходила зональная олимпиада Уральского региона (затем олимпиада Урала и Поволжья), на которую приезжали студенты не только из региональных вузов, но и со всей России и команда республики Беларусь. Высокое качество проведения олимпиад, их сильное мотивирующее воздействие на студентов и преподавателей было обеспечено усилиями кафедры теоретической механики Оренбургского государственного университета во главе с доцентом Г.В. Куча и кафедры теоретической механики Южно-Уральского государственного университета и её доцента М.П. Щевелёвой.

Во время проведения олимпиады в Оренбурге был предложен конкурс «Брейн-ринг», который в разные годы существенно отличался, но основная идея этого конкурса оставалась неизменной – это прежде всего командный конкурс. Он нацелен на выявление лидеров в студенческом коллективе, формирование готовности у участников олимпиады к эффективному распределению обязанностей между членами коллектива в экстремальных ситуациях.

В качестве нововведения можно рассматривать реализацию на новом, более высоком уровне принципа сплочения олимпиадного сообщества и социального влияния через обеспечение неформального общения между студентами-участниками олимпиады и преподавателями-руководителями команд. При проведении олимпиад в Оренбурге и Челябинске обеспечивалось не только совместное проживание членов команд и преподавателей в живописных местах этих городов, но и совместная культурная, спортивная и научная программы, т.е. все участники олимпиады на несколько дней становились единым коллективом.

Другим центром региональных олимпиад является МВТУ им. Н.Э. Баумана, где накоплен большой опыт олимпиадного движения по теоретической механике, как на уровне вузовских олимпиад, так и на уровне олимпиад г. Москвы. Первая олимпиада по теоретической механике по свидетельству старейших преподавателей кафедры теоретической механики вуза была проведена в 1953 г. Она проводилась примерно по той же системе, что и сейчас, но документов о той олимпиаде не сохранилось.

С начала 70-х гг. внутривузовская олимпиада проводилась ежегодно.

В 1970 – 80-е гг. олимпиадным движением по теоретической механике (ТМ) были охвачены многие вузы г. Москвы. В Московских городских олимпиадах по ТМ участвовало более тридцати вузов единовременно.

В команду входило 10 студентов, командный зачёт вёлся по результатам 5 лучших студентов. Кафедра «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана вместе с другими техническими университетами (МГАДИ, МАМИ и др.) явилась инициатором возобновления традиции проведения Московской городской олимпиады после перерыва в трудные 90-е гг. Эта работа проводилась в соответствии с решениями Научно-методического совета Российской Федерации по теоретической механике. Председателями секции по олимпиадам были В.В. Дубинин, а затем Е.И. Яковлев и в настоящее время Г.И. Дубровина.

В Московской олимпиаде сейчас участвуют 10 – 12 вузов. Команда состоит из пяти участников, которые являются зачётниками. Обычно студентам выдаётся по 5(7) задач, из них по одной задаче по статике и кинематике, остальные – по динамике.

МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Международные олимпиады по теоретической механике являются продолжателем традиций Всесоюзных олимпиад. После провозглашения суверенитета бывшими союзными республиками связи между образовательными учреждения по всем вопросам, в том числе, по вопросам проведения олимпиад стали ослабевать. С 1994 г. только команда республики Беларусь постоянно участвовала в заключительном туре Всероссийской олимпиады. Длительное время команда Беларуси, включающая студентов Белорусского национального технического университета и Белорусского государственного университета транспорта, приезжала также и на олимпиады зональные, проводимые в Уральском и Поволжском регионах: сначала в Оренбургском государственном университете, затем в Южно-Уральском государственном университете (Челябинск), причём студенты братской республики показывали высокий уровень знаний, и неоднократно становились призёрами.

С 2001 г. на открытую олимпиаду республики Беларусь стали приезжать и студенты из российских вузов: Санкт-Петербурга, Оренбурга, Тамбова, Челябинска. Постепенно количество российских команд росло.

В 2001 – 2004 гг. открытая олимпиада республики Беларусь проводилась в Минске на базе Белорусского национального технического университета (бывшего Белорусского политехнического института), где были сильны традиции проведения Всесоюзных олимпиад. С 2005 г. открытая олимпиада республики Беларусь проводится в Гомеле на базе Белорусского государственного университета транспорта. Теперь эта олимпиада получила статус Международной, в ней участвуют студенты Беларуси, России, Украины, Польши и других стран.

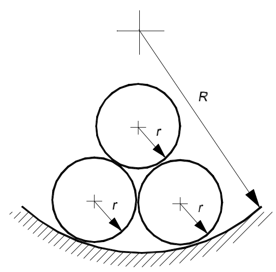
Большой вклад в возобновление Международных олимпиад внесли О.Н. Скляр и А.О. Шимановский.

Подводя итоги рассмотрению истории олимпиадного движения по теоретической механике, можно констатировать, что накоплен большой опыт творческого саморазвития студентов и формирования у них творческих компетенций, нравственных характеристик и лидерских качеств.

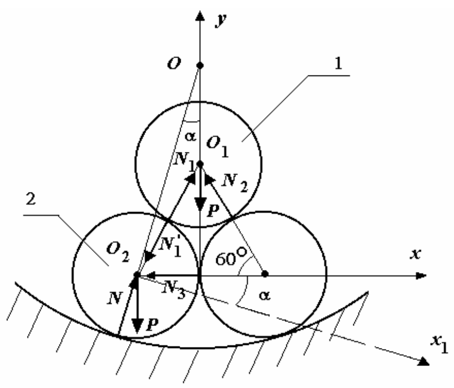
3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

---

1 (Тамбов, ТГТУ, 1996, 4 балла). Три одинаковые трубы радиуса r находятся в равновесии в неподвижно закреплённой трубе радиуса R, располагаясь в два ряда. Все трубы малого радиуса касаются друг друга, при этом трубы нижнего ряда касаются также трубы большего радиуса. Найти наибольшее значение R, при котором равновесие системы еще возможно



Решение.



Равновесие трубы 1:

$$\sum X = 0, \quad N_1 \cos 60^\circ - N_2 \cos 60^\circ = 0; \quad N_1 = N_2.$$

$$\sum Y = 0, \quad N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ - P = 0; \quad N_1 = N_2 = \frac{P}{\sqrt{3}} = N_1'.$$

Равновесие трубы 2:

$$\sum X = 0, \quad P \sin\alpha - N_3 \cos\alpha - N_1' \cos\left(60^\circ + \alpha\right) = 0 .$$

В момент начала раскатывания

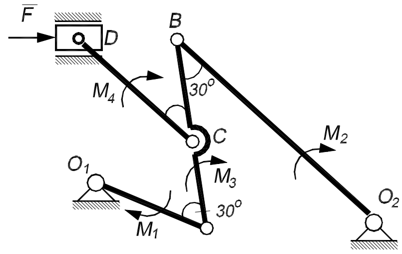
$$N_3 = 0.$$

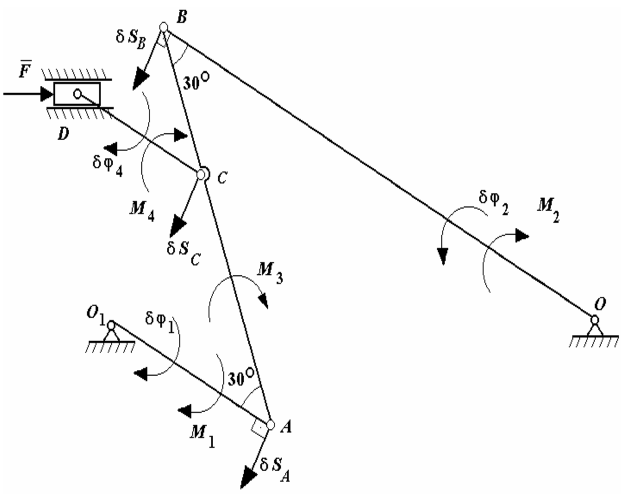
$$P \sin\alpha - \frac{P}{\sqrt{3}} \cos\left(60^\circ + \alpha\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9},$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{14}; \quad R = r + \frac{r}{\sin\alpha} = r\left(1 + 2\sqrt{7}\right) \approx 6{,}3r.$$

Ответ: Трубы не раскатятся при $R < 6{,}3r$.

2 (Тамбов, ТГТУ, 1996, 3 балла). Плоский механизм находится в горизонтальной плоскости в равновесии под действием силы F и системы пар сил с моментами M_1, M_2, M_3, M_4. Углы указаны на рисунке, размеры звеньев $O_1A = l$, $O_2B = 2l$, $CD = 1{,}5l$. Выразить момент M_4 через остальные данные.





Согласно принципу возможных перемещений:

$$\sum \delta A = 0.$$

$$M_1 \delta\varphi_1 - M_2 \delta\varphi_2 + M_3 \cdot 0 + M_4 \delta\varphi_4 + F \cdot 0 = 0.$$

Тело AB совершает мгновенно-поступательное движение,

$$\delta\varphi_3 = 0.$$

М.ц.с. звена CD расположен в точке D,

$$\delta S_D = 0.$$

$$\delta S_A = \delta S_B = \delta S_C = \delta S$$

$$\delta S_A = \delta\varphi_1 l, \quad \delta S_B = \delta\varphi_2 2l, \quad \delta S_C = \delta\varphi_4 \frac{3l}{2};$$

$$M_1 \frac{\delta S}{l} - M_2 \frac{\delta S}{2l} + M_4 \frac{\delta S}{1{,}5l} = 0.$$

Ответ : $M_4 = \frac{3}{4}\left(M_2 - 2M_1\right)$.

3 (М., 1984, 8 баллов). Диск массой m и радиусом r, двигаясь в вертикальной плоскости, прыгает по горизонтальному полу. Известно, что в момент отскока: скорость его нижней точки меняется на противоположную, кинетическая энергия не меняется. Найти последовательность точек удара о пол. Центр масс совпадает с геометрическим центром диска.

Решение. В плоскости движения введём систему координат O_{xy}. Через x, y, φ обозначим координаты центра диска и угол поворота диска. Перед i-м ударом скорость центра диска $\overline{V}_{i-1}\left(\dot{x}_{i-1}, \dot{y}_{i-1}\right)$, угловая скорость $\dot{\varphi}_{i-1}$. Соответствующие величины после удара $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{\varphi}_i$. Скорость нижней точки диска $\overline{U}\left(\dot{x} + r\dot{\varphi}, \dot{y}\right)$; кинетическая энергия $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$.

Первое и второе условие задачи записывается в виде:

$$\dot{x}_{i-1} + r\dot{\varphi}_{i-1} = -\dot{x}_i - r\dot{\varphi}_i, \qquad (1)$$
$$\dot{y}_{i-1} = -\dot{y}_i, \qquad (2)$$
$$m\left(\dot{x}_{i-1}^2 + \dot{y}_{i-1}^2\right) + J\dot{\varphi}_{i-1}^2 = m\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2\right) + J\dot{\varphi}_i^2. \qquad (3)$$

Введём начальные условия. Пусть перед первым ударом

$$\dot{x}_0 = a, \; \dot{y}_0 = -b, \; \dot{\varphi}_0 = \Omega, \; (b > 0).$$

Уравнение (2) полностью определяет движение центра масс диска по вертикали и интервалы времени между ударами: они одинаковы и равны $\tau = \frac{2b}{g}$. Преобразуем уравнение (3):

$$m\left(\dot{x}_{i-1} - \dot{x}_i\right)\left(\dot{x}_{i-1} + \dot{x}_i\right) + m\left(\dot{y}_{i-1}^2 - \dot{y}_i^2\right) = J\left(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}\right)\left(\dot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_{i-1}\right)$$

и упростим его, учитывая уравнения (1) и (2):

$$mr\left(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}\right) = J\left(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}\right). \qquad (4)$$

Уравнение (4) может быть получено иначе. В момент удара на диск действует ударный импульс. Его вертикальная составляющая влияет только на $\dot{y}$. Действие горизонтальной составляющей определяется уравнениями: $m\left(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}\right) = S_{ix}$, $J\left(\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_{i-1}\right) = rS_{ix}$. Исключив импульс, придём к уравнению (4). Из этого следует, что второе условие задачи – условие постоянства кинетической энергии – лишнее; задача разрешима без него. Решая совместно уравнения (1) и (4), получим $\left(J_P = J + mr^2\right)$:

$$J_P\,\dot{x}_i = \left(mr^2 - J\right)\dot{x}_{i-1} - 2rJ\dot{\varphi}_{i-1};$$
$$J_P\,\dot{\varphi}_i = -\left(mr^2 - J\right)\dot{\varphi}_{i-1} - 2mr\,\dot{x}_{i-1}. \qquad (5)$$

Двукратным применением формул (5) находим: $\dot{x}_{i+2} = \dot{x}_i$, $\dot{\varphi}_{i+2} = \dot{\varphi}_i$. Таким образом, установлено, что $\dot{x}, y, \dot{y}, \dot{\varphi}$ – периодические функции времени с периодом 2τ. Определим приращения координаты x при двух последовательных ударах диска о плоскость:

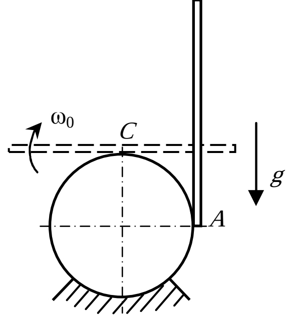
$$\delta_1 = x_2 - x_1 = \dot{x}_1\tau = \frac{2b}{g}\cdot\frac{\left(mr^2 - J\right)a - 2rJ\Omega}{J + mr^2};$$
$$\delta_2 = x_3 - x_2 = \dot{x}_2\tau = \dot{x}_0\tau = \frac{2ab}{g}.$$

Последовательность координат точек удара диска о пол $x_{i+1} = x_i + \delta_i$, где $\delta_i = \delta_2$, если $i = 2n$; и $\delta_i = \delta_1$, если $i = 2n+1$.

Подбирая начальные условия, можно выделить различные варианты движения диска: подскоки на месте $\left(\dot{x}_0 \neq 0, \dot{\varphi}_0 = 0\right)$; перескоки влево-вправо (со сменой направления вращения) между двумя точками $\left(mr\,\dot{x}_0 = J\dot{\varphi}_0\right)$; подскоки с равномерным продвижением в одном направлении и с сохранением постоянной угловой скорости $\left(\dot{x}_0 = -r\dot{\varphi}_0\right)$; чередование подскоков на месте и перескоков в одном направлении $\left(\dot{x}_0 = 0, \dot{\varphi}_0 \neq 0\right)$ и т.д.

4 (Россия, 2007, 6 баллов)*. Однородный стержень массой m и длиной $l = \pi R$ лежит на цилиндрической поверхности радиуса R. В этом положении центр тяжести стержня C контактирует с поверхностью, а его скорость равна нулю. Какую начальную угловую скорость ω_0 надо сообщить стержню, чтобы при достижении им вертикального положения величина

* Автор задач 4, 5 – А.И. Муштари (Казань).



нормальной реакции в точке A была равна mg? Поверхность абсолютно шероховата, т.е. движение стержня происходит без проскальзывания. Считаем установленным, что на рассматриваемом участке движение происходит без отрыва стержня от поверхности.

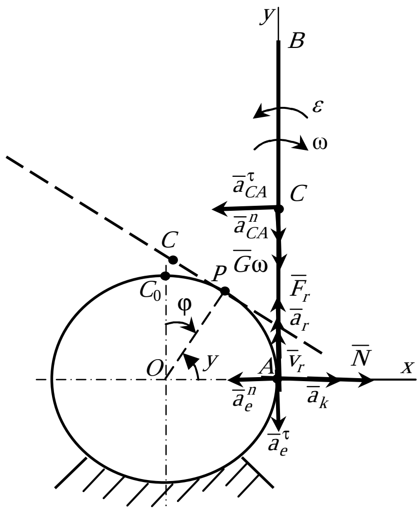
Решение.

1 способ. Произвольное положение стержня AB во время движения указано пунктиром. Это движение является сложным.

Переносное движение: вращение с проскальзыванием вокруг неподвижного центра O с поворотом на угол φ, при котором точка C всё время контактирует с цилиндром. Переносные угловая скорость и угловое ускорение равны абсолютным угловой скорости и угловому ускорению стержня:

$$\omega_e = \omega_a = \omega,\ \varepsilon_e = \varepsilon_a = \varepsilon .$$

Относительное движение: поступательное движение стержня AB вдоль прямой AB в направлении точки B. Для удовлетворения условию отсутствия проскальзывания величина относительного перемещения $s_r = PC$ должна равняться длине дуги $\overset{\frown}{C_0P}$, т.е.



$$s_r = R\varphi ; \qquad (1)$$

$$v_r = R\omega ,\ a_r = R\varepsilon . \qquad (2)$$

Формально абсолютное ускорение мгновенного центра скоростей P имеет вид: $\bar{a}_P = \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_r + \bar{a}_k$. Однако в течение всего движения $a_e^{\tau} = R\varepsilon$. Из (2): $a_e^{\tau} = a_r$, при этом $\bar{a}_e^{\tau} \uparrow\downarrow \bar{a}_r$. Поэтому $\bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_r = 0$. Отсюда

$$\bar{a}_P = \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_k ; \qquad (3)$$

$$a_e^n = R\omega^2 ,\ a_k = 2\omega v_r = 2R\omega^2 . \qquad (4)$$

Ускорение Кориолиса $\bar{a}_k$ играет в этой задаче ключевую роль! Если его ошибочно пропустить, то далее N ошибочно получилась бы отрицательной.

При вертикальном положении стержня точка P совпадает с концом стержня A и ускорение $\bar{a}_A$ вычисляется по формулам (3), (4).

Полная реакция поверхности имеет касательную и нормальную составляющие $\bar{F}_{\tau}$ и $\bar{N}$. При данном положении стержня дифференциальные уравнения его движения имеют вид:

$$ma_{Cx} = N ; \qquad (5)$$

$$ma_{Cy} = -G + F_{\tau} ;$$

$$J_{Cz}\varepsilon = N(l/2) . \qquad (6)$$

Так как $J_{Cz} = ml^2/12$, из (6)

$$\varepsilon = \frac{6N}{ml} . \qquad (7)$$

Ускорение центра тяжести C

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^{\tau} + \bar{a}_{CA}^{n} . \qquad (8)$$

С учётом (4), (7)

$$a_{Cx} = -a_e^n + a_k - a_{CA}^{\tau} = -R\omega^2 + 2R\omega^2 - (l/2)\varepsilon = R\omega^2 - 3N/m . \qquad (9)$$

Учитываем (9) в (5):

$$N = (1/4)mR\omega^2 . \qquad (10)$$

Так как по условию $N = mg$, то из (10) следует:

$$\omega^2 = 4g/R . \qquad (11)$$

По теореме об изменении кинетической энергии $T - T_0 = A_G$. Так как в конечном положении точка A – мгновенный центр скоростей (МЦС), а в начальном положении точка C – МЦС, то

$T = J_{Az}\omega^2/2 = ml^2\omega^2/6$;

$T_0 = J_{Cz}\omega_0^2/2 = ml^2\omega_0^2/24$.

$$A_G = -mg\left(\frac{l}{2} - R\right) = -mgR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

$$\frac{ml^2\omega^2}{6} - \frac{ml^2\omega_0^2}{24} = -mgR\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{4} - \frac{g}{R}\frac{6}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Учитываем (11):

$$\frac{4g}{R} = \frac{\omega_0^2}{4} - \frac{g}{R\pi^2}(3\pi - 6).$$

$$\omega_0 = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}\left(4\pi^2 + 3\pi - 6\right)} \approx 4{,}170\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

2 способ. К тому же результату можно прийти другим путём, не используя кинематические соотношения (1 – 4). Запишем теорему об изменении кинетической энергии для произвольного угла $\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, где ϕ отсчитывается от горизонтальной оси x против часовой стрелки:

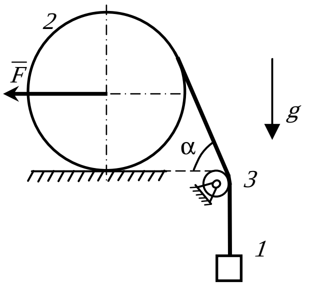
$$\frac{1}{2}mR^2\left[\frac{\pi^2}{12} + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)^2\right]\dot{\phi}^2 - T_0 = -mgR\left[\sin\phi + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\cos\phi - 1\right].$$

Дифференцируя по времени, получим угловое ускорение:

$$\ddot{\phi} = \frac{\frac{g}{R}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\sin\phi + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)\dot{\phi}^2}{\frac{\pi^2}{12} + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)^2}.$$

При $\phi = 0$ получим: $\ddot{\phi} = \frac{3\omega^2}{2\pi}$. Тогда из (7) $\frac{6N}{ml} = \frac{3\omega^2}{2\pi}$. Приходим к ключевому соотношению (11): $\omega^2 = 4g/R$. Далее решение как в способе 1.

Ответ. $\omega_0 = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}\left(4\pi^2 + 3\pi - 6\right)} \approx 4{,}170\sqrt{\frac{g}{R}}$.

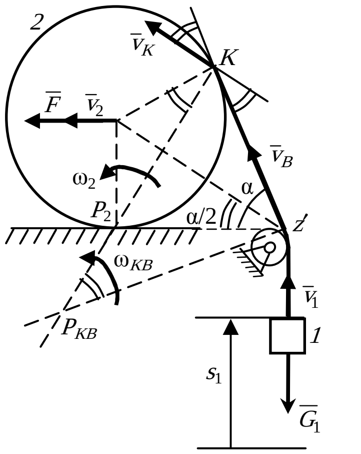


5 (Россия, 2007, 8 баллов). Под действием горизонтальной силы $F = 2mg$, приложенной к центру катушки *2* массой m, наматывающаяся на катушку нить поднимает груз *1* массой m. При этом нить огибает гладкий блок *3* пренебрежимо малых размеров и массой. Катушка, однородный цилиндр радиуса R, катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Определите скорость и ускорение груза *1*, а также силу натяжения нити в момент, когда угол наклона нити $\alpha = 60°$. Вначале, при $\alpha_0 = 90°$, система находилась в покое.

Решение. Вначале установим кинематические связи.

1-й (геометрический) способ построения кинематических соотношений. Скорость точки K нити при соприкосновении с диском совпадает со скоростью точки K', принадлежащей диску. Обоснуем это. Через малый промежуток времени dt после контакта с диском точки K и K', очевидно, двигаются совместно по единой траектории и поэтому имеют одинаковые скорости. Ускорения $\bar{a}$ и точки K, и точки K' в данной задаче – вектора конечной величины (ударных явлений здесь нет). Значит, $d\bar{v} = \bar{a}\,dt$ – малые вектора и для K, и для K'. Поэтому перед этим, за время dt, т.е. в сам момент соприкосновения с диском, скорости K и K' должны мало отличаться от друга. А если устремить dt к нулю, то отличие исчезнет. Итак, $\bar{v}_K = \bar{v}_{K'}$. (Заметим, что, в отличие от скоростей, ускорения K и K' различны!)

Участок нити KB между K и точкой B верхнего касания нити с блоком в данный момент времени движется как твёрдое тело, совершающее мгновенное плоское движение (мгновенное, так как в следующий момент времени KB искривится). $\bar{v}_K \perp KP_2$, где P_2 – МЦС



для диска *2*. Очевидно, $\overline{v}_B$ параллелен *KB*. Строим P_{KB} – МЦС для *KB*.

Очевидно, $v_1 = v_B$. Из ΔBKP_2 угол $P_2\widehat{K}B = 90^\circ - (\alpha/2)$. Поэтому угол между $\overline{v}_K$ и KB равен $\alpha/2$. По теореме о проекциях скоростей для KB $v_B = v_K\cos(\alpha/2)$. Учтём, что $\omega_2 = \dfrac{v_2}{R} = \dfrac{v_K}{2R\cos(\alpha/2)}$. Связывая все эти соотношения, получаем

$$v_2 = \frac{v_1}{2\cos^2(\alpha/2)}. \qquad (1)$$

Найдём также ω_{KB}. Из геометрии:

$$BP_{KB} = KB\,\mathrm{ctg}(\alpha/2), \quad KB = BP_2 = R\,\mathrm{ctg}(\alpha/2).$$

$$\omega_{KB} = \frac{v_B}{BP_{KB}} = \frac{v_1}{R}\mathrm{tg}^2(\alpha/2). \qquad (2)$$

Найдём зависимости $s_1 = s_1(\alpha)$, $s_2 = s_2(\alpha)$. В начале движения было $BP_2 = R$. Поэтому

$$s_2 = R(\mathrm{ctg}(\alpha/2) - 1). \qquad (3)$$

Из формулы (1):

$$ds_2 = \frac{ds_1}{2\cos^2(\alpha/2)}. \qquad (4)$$

Взяв дифференциал от (3), получим $ds_2 = -\dfrac{R}{2\sin^2(\alpha/2)}d\alpha$. Подставляем в (4) и интегрируем:

$$R\int\limits_{\pi/2}^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}\right)d\alpha = \int\limits_0^{s_1} ds_1. \qquad (5)$$

$$s_1 = R\big(2\mathrm{ctg}(\alpha/2) + \alpha - 2 - (\pi/2)\big). \qquad (6)$$

Все кинематические соотношения построены. 2-й способ приведён в конце решения.

Для определения v_1, a_1 применим теорему об изменении кинетической энергии системы. Учитывая, что диск катится без проскальзывания, после стандартных преобразований получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{3mv_2^2}{4} = Fs_2 - mgs_1. \qquad (7)$$

С учётом (1), перепишем (7) в виде:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{16\cos^4(\alpha/2)}\right)v_1^2 = g(2s_2 - s_1), \qquad (8)$$

Дифференцируем (8) по времени с учётом, что в левой части оба множителя переменны:

$$\frac{3\sin(\alpha/2)}{8\cos^5(\alpha/2)}\,\dot{\alpha}\,v_1^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{16\cos^4(\alpha/2)}\right)2v_1a_1-0=g(2v_2-v_1)\,. \qquad (9)$$

Здесь $\dot{\alpha}=-\omega_{KB}$. Знак «–», так как направления отсчёта угла α (по часовой стрелке) и направление ω_{KB} (против часовой стрелки) противоположны. Учитываем (2) в (9). В правой части (9) учитываем (1). Тогда

$$-\frac{3\sin^3(\alpha/2)}{8\cos^7(\alpha/2)}\cdot\frac{v_1^3}{R}+\left(1+\frac{3}{8\cos^4(\alpha/2)}\right)v_1a_1=g\left(\frac{1}{\cos^2(\alpha/2)}-1\right)v_1\,. \quad (10)$$

Так как (10) справедливо при любых значениях $v_1\neq 0$, то v_1 можно сократить. Окончательное соотношение между v_1 и a_1:

$$-\frac{3\sin^3(\alpha/2)}{8\cos^7(\alpha/2)}\cdot\frac{v_1^2}{R}+\left(1+\frac{3}{8\cos^4(\alpha/2)}\right)a_1=g\,\mathrm{tg}^2(\alpha/2)\,. \qquad (11)$$

Дифференциальное уравнение движения груза *1* $ma_1=T-mg$, откуда

$$T=m(g+a_1)\,. \qquad (12)$$

При $\alpha=\pi/3$ получаем следующие значения.

Из (6): $s_1=R(2\sqrt{3}-2-(\pi/6))$. Из (3): $s_2=R(\sqrt{3}-1)$. Тогда из (8):

$$v_1=\sqrt{\frac{\pi}{5}gR}\approx 0{,}793\sqrt{gR}\,.$$

Из (11): $a_1=\frac{1}{5}\left(1+\frac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)g\approx 0{,}248\,g$.

Из (12): $T=\frac{1}{5}\left(6+\frac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)mg\approx 1{,}248\,mg$.

2-й (аналитический) способ построения кинематических соотношений.

Точка нити M_0 перемещается в положение *M*. Перемещение s_1 равно разности длины нити от *B* до *M* и длины нити от *B* до M_0, т.е.

$$s_1=(BK+\overset{\frown}{KM})-BM_0\,. \qquad (13)$$

Так как треугольники ABK и ABP_2 одинаковы, то $BK=BP_2=s_2+R$. Далее, длины дуг: $\overset{\frown}{KM}=\overset{\frown}{LM}-\overset{\frown}{KL}$. Но $\overset{\frown}{LM}=R\varphi$, где φ – угол поворота диска, $\varphi=s_2/R$. Значит, $\overset{\frown}{LM}=s_2$. Далее, $\overset{\frown}{KL}=R\beta$, где угол

$$\beta=\overset{\frown}{LAK}=\overset{\frown}{P_2AK}-90^\circ=180^\circ-\alpha-90^\circ=90^\circ-\alpha\,.$$

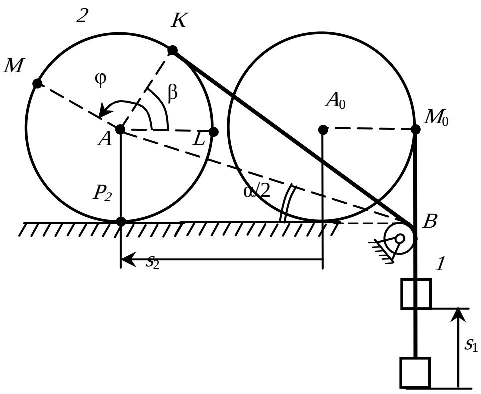
Поэтому $\overset{\frown}{KM}=s_2-R((\pi/2)-\alpha)$. Наконец, $BM_0=R$. Все это подставляем в (13):

$$s_1=2s_2-R((\pi/2)-\alpha)\,. \qquad (14)$$

В правую часть формулы (8) удобно сразу подставить:

$$g(2s_2-s_1)=gR((\pi/2)-\alpha)\,. \qquad (15)$$

Подставляя (3) в (14), получаем (6): $s_1=R\big(2\,\mathrm{ctg}(\alpha/2)+\alpha-2-(\pi/2)\big)$.



Далее, $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \dfrac{AP_2}{BP_2} = \dfrac{R}{s_2 + R}$, откуда $\alpha = 2\operatorname{arctg}\dfrac{R}{s_2 + R}$. Подставляем это в (14):

$$s_1 = 2s_2 - R\left((\pi/2) - 2\operatorname{arctg}\frac{R}{s_2 + R}\right) \qquad (16)$$

и дифференцируем (16) по времени. После довольно длинных преобразований придём к соотношению (1) между v_1 и v_2.

Наконец, дифференцируя (6) по времени, получим: $v_1 = R\left(\dfrac{-1}{\sin^2(\alpha/2)} + 1\right)\dot{\alpha}$, откуда

$$\dot{\alpha} = -\frac{v_1}{R}\operatorname{tg}^2(\alpha/2), \qquad (17)$$

что с учётом $\dot{\alpha} = -\omega_{KB}$ соответствует (2).

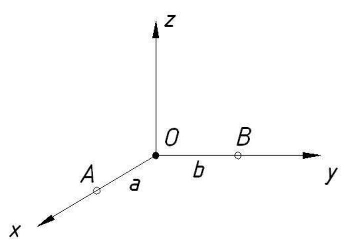
Ответ. $v_1 = \sqrt{\dfrac{\pi}{5}gR} \approx 0{,}793\sqrt{gR}$. $a_1 = \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)g \approx 0{,}248\,g$. Сила натяжения нити $T = \dfrac{1}{5}\left(6 + \dfrac{2\pi}{15\sqrt{3}}\right)mg \approx 1{,}248\,mg$.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ТВОРЧЕСКОГО САМОРАЗВИТИЯ ПО СТАТИКЕ

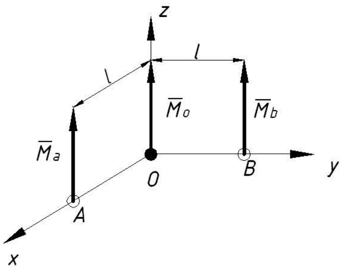
4.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ СТАТИКИ

1 (СССР, 1986, 4 балла). К твердому телу приложены две пары сил с моментами m_1 и m_2, расположенными в плоскостях $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, соответственно. Определить проекции $\overline{m}$ момента результирующей пары на координатные оси.

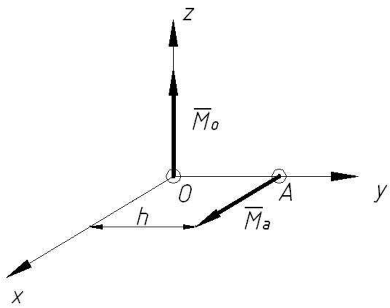
2 (СССР, 1987, 7 баллов). Главные моменты некоторой системы сил относительно центров O, A и B одинаковы по величине $M_O = M_A = M_B = m$. Главный вектор этой системы сил по величине равен V и параллелен оси z; $OA = a$, $OB = b$. Определить углы, составляемые главными моментами M_O, M_A, M_B с плоскостью xOy.



3 (БССР, 1986, 3 балла). Главные моменты системы сил относительно центров O, A, B направлены, как указано на чертеже, и равны по величине: $M_O = M$, $M_A = 4M$, $M_B = 5M$. Докажите, что система сил приводится к равнодействующей, определите модуль равнодействующей.



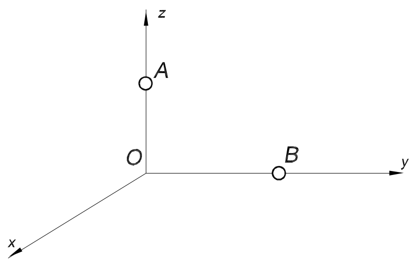
4 (БССР, 1987). Главные моменты системы сил относительно центров O и A равны M_O и M_A и направлены, как указано на чертеже. Докажите, что система сил не имеет равнодействующей. Определите проекцию главного вектора системы на плоскость XOZ.



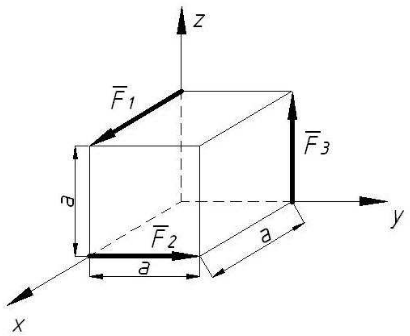
5 (БССР, 1983). Сформулировать в аналитической форме условие, при котором две силы P_1 (P_{1X}, P_{1Y}, P_{1Z}) и P_2 (P_{2X}, P_{2Y}, P_{2Z}), приложенные соответственно в точках A_1 (a_1, b_1, c_1), A_2 (a_2, b_2, c_2), лежат в одной плоскости.

6 (БССР, 1985). M_O, M_A и M_B – главные моменты пространственной системы сил относительно центров O, A, B соответственно; $M_O = 3Fhk$;

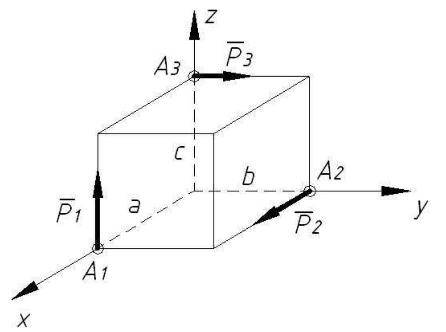
$M_A = 3Fhk$; $M_B = 5Fh$; $OA = OB = h$. Определить модуль главного вектора этой системы сил.



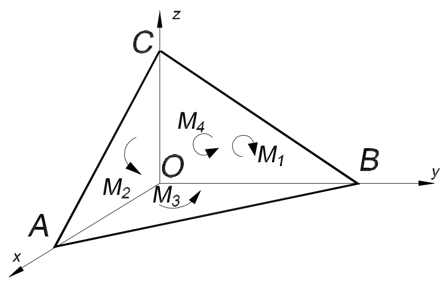
7 (Л., 1984, 3 балла). Какую наименьшую по величине и параллельную оси OX силу Q надо приложить к кубу, чтобы система четырёх сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, Q имела равнодействующую? Считать $F_1 = F_2 = F_3 = F$.



8 (Л., 1983). На тело действуют три силы: $\vec{P}_1 = P\vec{k}$, $\vec{P}_2 = P\vec{i}$, $\vec{P}_3 = P\vec{j}$, приложенные в точках $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(0, b, 0)$, $A_3(0, 0, c)$, соответственно. Какой должна быть зависимость между a, b и c, чтобы система сил приводилась к равнодействующей?

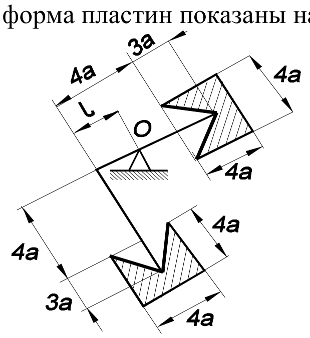


9 (Белорус. политех. ин-т, 1982). К тетраэдру *OABC* приложены пары сил с моментами M_1, M_2, M_3, M_4, расположенные в плоскостях *YOZ*, *ZOX*, *XOY* и *ABC*, соответственно. Определить момент результирующей пары сил, если M_1 = 4 Н · м; M_2 = 3 Н · м; M_3 = 1 Н · м; M_4 = 3 Н · м; *OA* = *OB* = *OC*.

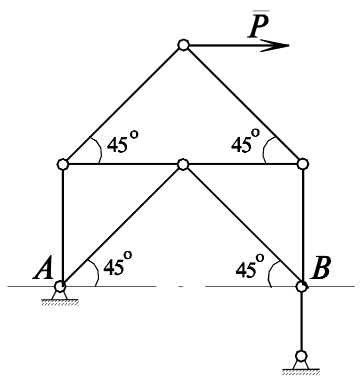


4.2. РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

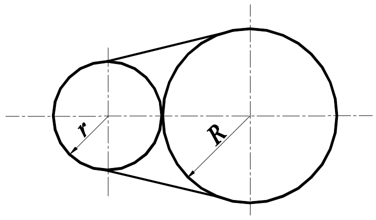
1 (СССР, 1984, 4 балла). Жёсткая конструкция, состоящая из двух одинаковых тяжёлых однородных пластин, соединённых тонким, изогнутым под прямым углом стержнем пренебрежимо малого веса, удерживается в равновесии на опоре *O*. Считая коэффициент трения стержня об опору равным *f*, найти максимальное значение *l*, при котором тело будет удерживаться на опоре в равновесии. Размеры и форма пластин показаны на рисунке.



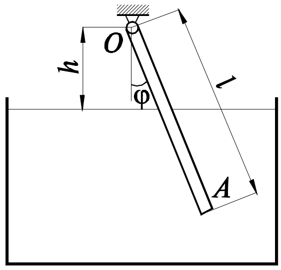
2 (СССР, 1986, 3 балла). Определить усилие *S* в стержне *AB* плоской фермы, закреплённой и нагруженной, как указано на рисунке.



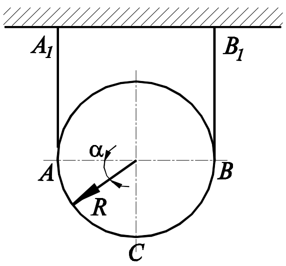
3 (СССР, 1987, 4 балла). Два диска радиусами *R* и *r*, расположенные на горизонтальной плоскости, стянуты упругой нитью жёсткостью *c*. Диски давят друг на друга с силами, равными *Q*. Как изменится длина нити, если её перерезать? Трение отсутствует.



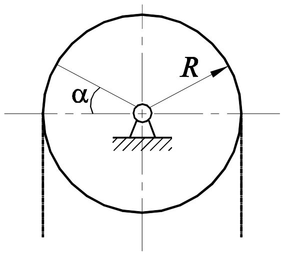
4 (СССР, 1988, 10 баллов). Тонкий однородный стержень OA длины l концом O закреплён шарнирно на высоте h над горизонтальной поверхностью жидкости, в которую опущен второй его конец. Плотность жидкости равна ρ, плотность стержня kρ (k и ρ – постоянные). Определить значения угла φ при равновесии стержня. Исследовать устойчивость положений равновесия.



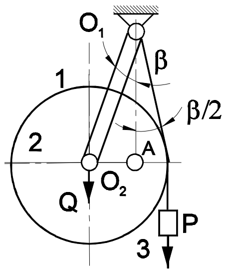
5 (СССР, 1988, 4 балла). Однородный диск весом P и радиусом R удерживается в равновесии с помощью невесомой нити, концы которой прикреплены к потолку. Найти натяжение нити и давление на единицу длины нити как функцию угла α на участке ACB. Ветви нерастяжимой нити AA_1 и BB_1 вертикальны, трение не учитывать.



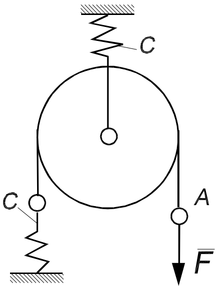
6 (РСФСР, 1985, 3 балла). Однородная цепь веса P и длины $2\pi R$ перекинута через гладкий блок, имеющий горизонтальную ось. Определить в случае равновесия силу натяжения цепи T_α в её произвольном поперечном сечении.



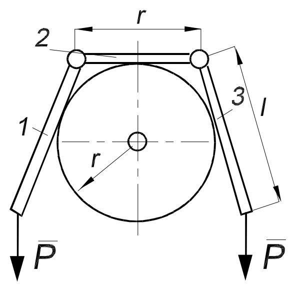
7 (РСФСР, 1989, 3 балла). Цилиндр *2* веса Q и радиуса r соединён шарнирным невесомым стержнем O_1O_2 длиной $2r$ с опорой O_1; к оси O_1 прикреплён на нити груз *3*. Система находится в равновесии; при этом вертикальная прямая O_1A делит угол β пополам. Определить вес P груза *3*.



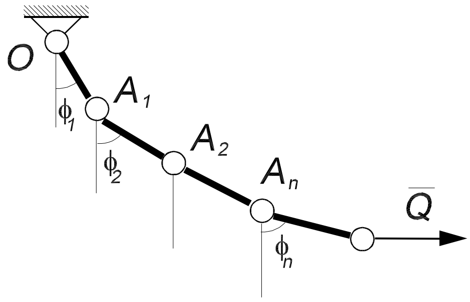
8 (Арм. ССР, 1987). На сколько переместится конец перекинутой через подвижный блок нити (точка *A*), если к нему приложить силу $\overline{F}$? Жесткость пружины *c*.



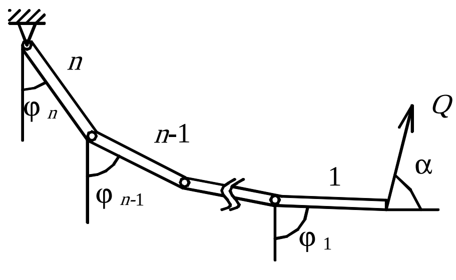
9 (БССР, 1983, 3 балла). Три невесомых стержня, расположенных в вертикальной плоскости, опираются на цилиндр радиуса *r*. Средний стержень длиной *r* – горизонтален, боковые стержни имеют одинаковую длину *l*. Определить давление среднего стержня на цилиндр в зависимости от длины *l* боковых стержней, если к их концам приложены одинаковые силы $\overline{P}$, направленные вертикально вниз.



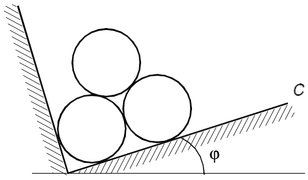
10 (БССР, 1982). Цепь, состоящая из *n* одинаковых стержней, подвешена в вертикальной плоскости. *P* – вес одного стержня; *Q* – заданная горизонтальная сила; *O*, A_1, A_2, ..., A_n – шарниры. Найти углы φ_k (k = 1, 2, ..., *n*) стержней с вертикалью в положении равновесия.



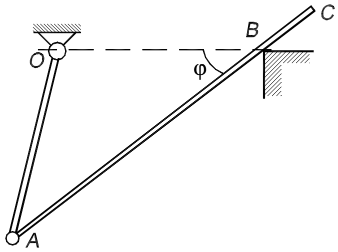
11 (Россия, 1996, 3 балла). Система, состоящая из *n* одинаковых однородных стержней веса *P* каждый, подвешена в вертикальной плоскости. Один конец этой системы шарнирно закреплён, а на второй действует сила *Q*, образующая угол α с горизонтом ($P > Q\sin\alpha$). Определить углы, которые образуют стержни с вертикалью в положении равновесия. Трением в шарнирах пренебречь.



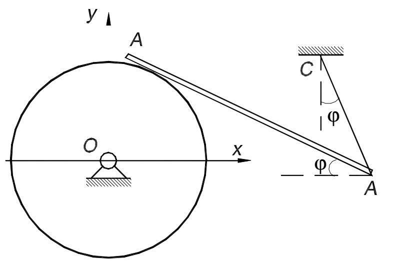
12 (Россия, 1997, 3 балла). Три гладких однородных цилиндра опираются на две взаимно перпендикулярные плоскости *AB* и *BC*. Каков наименьший угол наклона φ плоскости *BC*, при котором система сохраняет равновесие?



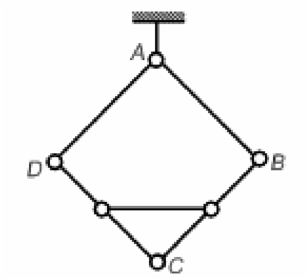
13 (Россия, 1998, 5 баллов). Два однородных стержня: *OA* длиной *l*, весом *P* и *AC* длиной 2*l*, весом 2*P*, соединены шарниром *A*. Стержень *OA* укреплён шарнирно, а стержень *AC* опирается на острие *B*. Определить, при каком угле φ система находится в равновесии в вертикальной плоскости, если расстояние *OB* = l (отрезок *OB* – горизонтальный).



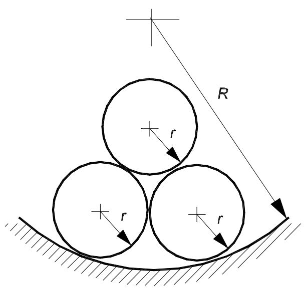
14 (Россия, 2000, 5 баллов). Тонкий однородный стержень длиной 2*r* опирается на шероховатый диск радиуса *r* и удерживается в равновесии невесомой нитью длины *r*. Определить координаты точки *C* прикрепления нити, если угол наклона стержня с горизонталью равен φ и нить составляет с вертикалью также угол φ. Трением в шарнире *O* пренебречь.



15 (Тамбов, ТИХМ, 1992, 4 балла). Стороны ромба *ABCD*, подвешенного в точке *A*, сделаны из тяжёлых однородных стержней, соединённых шарнирно. Середины сторон *BC* и *CD* соединены невесомым стержнем-распоркой, которая фиксирует ромб. Зная вес *P* ромба и длины его диагоналей *AC* = *a* и *BD* = *b*, определить усилие в распорке.

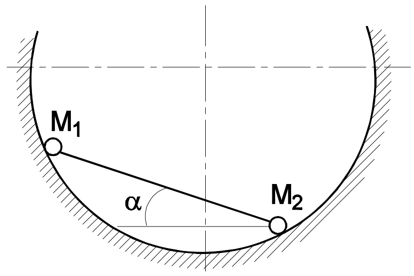


16 (Тамбов, ТГТУ, 1996, 4 балла). Три одинаковые трубы радиуса *r* находятся в равновесии в неподвижно закреплённой трубе радиуса *R*, располагаясь в два ряда. Все трубы малого радиуса касаются друг друга, при этом трубы нижнего ряда касаются также трубы большего радиуса. Найти наибольшее значение *R*, при котором равновесие системы еще возможно.

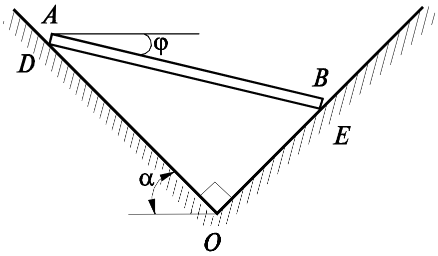


4.3. СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

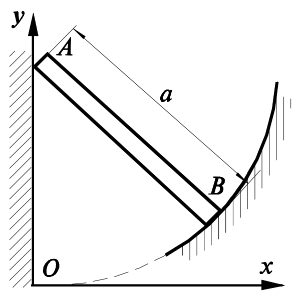
1 (СССР, 1986, 3 балла). Две тяжелые точки M_1 и M_2 соединены между собой невесомым жёстким стержнем, находящимся внутри гладкой сферы. Длина стержня и радиус сферы равны. Определить при равновесии угол α между стержнем и горизонтом, если масса точки M_2 в два раза больше массы точки M_1.



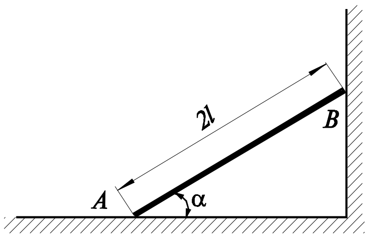
2 (СССР, 1990, 5 баллов). Концы расположенного в вертикальной плоскости тяжёлого однородного стержня могут скользить в прорезях взаимно перпендикулярных плоскостей *OD* и *OE*. Плоскость *OD* составляет с горизонтом угол α. Пренебрегая трением, определить значение угла φ при равновесии стержня. Будет ли положение равновесия стержня устойчивым?



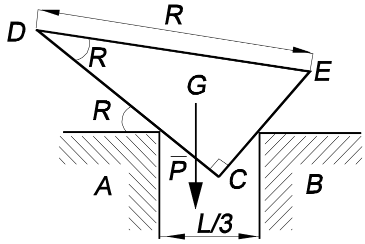
3 (РСФСР, 1982, 3 балла). Однородный стержень длины *a* опирается одним концом *A* на гладкую вертикальную стенку, другим *B* – на гладкий профиль, расположенный в вертикальной плоскости. Какова должна быть форма профиля, чтобы стержень мог оставаться в покое в любом положении?



4 (РСФСР, 1987, 3 балла). Однородный стержень *AB* весом *G* опирается на шероховатые горизонтальную и вертикальную плоскости. Угол α и коэффициент *f* трения таковы, что стержень не находится в равновесии. Определить величину и направление наименьшей силы *P*, которая должна быть приложена в центре тяжести стержня для того, чтобы стержень в данном положении был неподвижным.

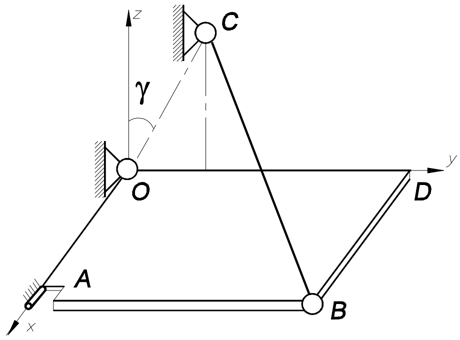


5 (Аз. ССР, 1984, 3 балла). Гладкий однородный прямоугольный клин с указанными на рисунке размерами и веса *P* вложен прямым углом между краями двух столов одинаковой высоты, находящихся друг от друга на расстоянии $l/3$. Один из острых углов клина равен α. Найти положение равновесия клина и давление клина на опоры в точках *A* и *B*.

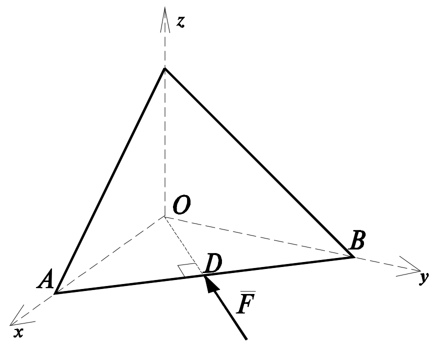


4.4. РАВНОВЕСИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

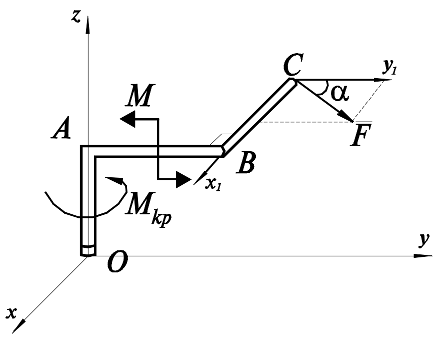
1 (СССР, 1983, 10 баллов). Тяжёлая тонкая однородная прямоугольная плита *OABD* весом *Q* удерживается в горизонтальном положении сферическим шарниром *O*, цилиндрическим шарниром *A* и тонким тяжёлым стержнем *CB* весом *P*. Стержень прикреплён сферическими шарнирами к плите в точке *B* и к вертикальной стене в точке *C*. Считая трение во всех шарнирах пренебрежимо малым и угол γ известным, найти составляющую реакции цилиндрического шарнира *A*, параллельную оси *Oy*.



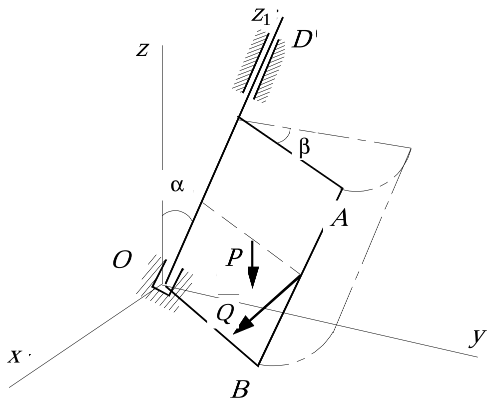
2 (СССР, 1988, 5 баллов). Однородная равносторонняя пластинка веса *P* стороной *AB* = *l* опирается на горизонтальный пол *XOY*, её стороны *AC* и *BC* касаются стен *XOZ* и *YOZ*. Пренебрегая трением, определить силу $\vec{F}$ (лежащую в плоскости *XOY*), удерживавшую пластинку в равновесии.



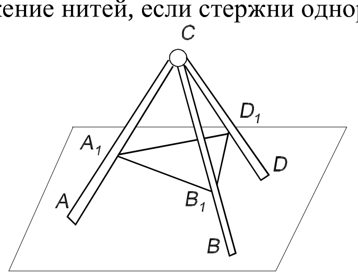
3 (СССР, 1989, 4 балла). Конец *O* ломаного стержня *OABC* жёстко защемлён. Стержень нагружен крутящим моментом $M_{кр}$, парой сил с моментом *M*, расположенной в плоскости *YOZ*, и силой *F*. Сила *F* расположена в плоскости X_1CY_1 (X_1//*X*, Y_1// *Y*) и составляет с осью Y_1 угол α = 60°. Определить модуль реактивного момента заделки, если *OA* = *a*, *AB* = *b*, *BC* = *c*. Проведите вычисления при *a* = 1 м, *b* = 2 м, *c* = 0,5 м, *F* = 2 Н, $M_{кр}$ = 0,5 Н·м, *M* = 1 Н·м.



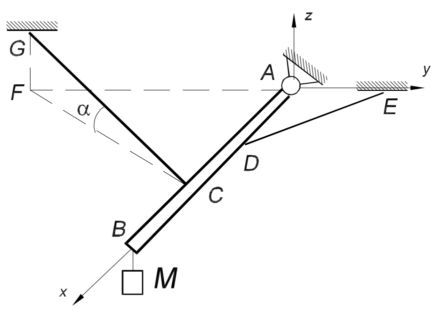
4 (Аз. ССР, 1984, 3 балла). Дверь *OBAD* может вращаться вокруг оси *OZ* при пренебрежимо малом трении в подшипниках *O* и *D*. Ось *OZ* образует с вертикалью угол α. Под действием только своего веса дверь остаётся в вертикальной плоскости zOz_1. Найти положение равновесия двери, если к середине ребра AB приложена сила Q, перпендикулярная плоскости её полотна. Считая дверь однородной прямоугольной пластиной с размерами $2a$ и $2b$ ($AD = 2a$, $OD = 2b$) и веса P, определить реакции опор O и D.



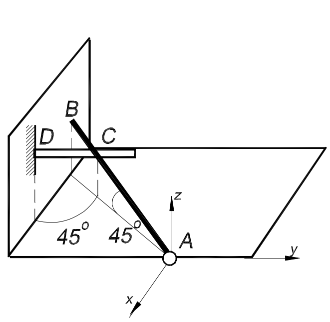
5 (БССР, 1984). Стержни CA, CB и CD одинаковой длины соединены в точке C сферическим шарниром, концами A, B, D опираются на гладкую горизонтальную плоскость. Середины стержней A_1, B_1, D_1 связаны нитями, длины которых в два раза меньше длин стержней. Определить натяжение нитей, если стержни однородные и масса каждого равна M.



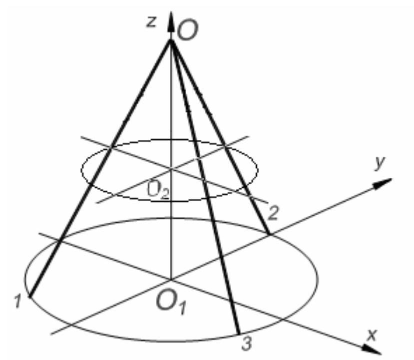
6 (Каз.ССР, 1985, 3 балла). Однородная балка AB весом P и длиной $4a$ прикреплена к вертикальной стене сферическим шарниром A и удерживается перпендикулярно стене невесомыми растяжками DE и GC, причём DE лежит в горизонтальной плоскости, а GC составляет с этой плоскостью угол α. К концу B балки подвешен груз M весом Q. Определить реакцию шарнира A и натяжение растяжек, если $AE = AD = DC = a$, $AF = 2a$.



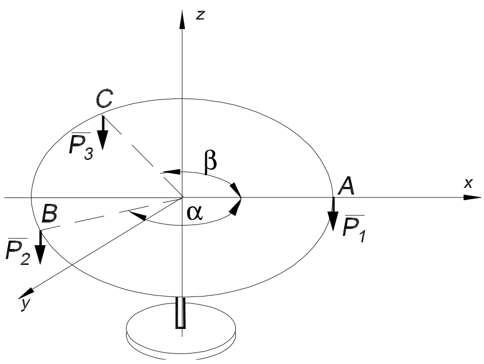
7 (Новочеркасск. политех. ин-т, 1982). Однородная балка AB весом P, прикреплённая к полу шарниром A, опирается концом B на гладкую вертикальную стену, а промежуточной точкой C на гладкий стержень DC, заделанный в стену перпендикулярно к её плоскости. Балка с плоскостью пола и её горизонтальная проекция с плоскостью стены составляет равные углы по 45°. Определить реакцию шарнира A и реакции опор в точках B и C, если $AB = 4\ BC$.



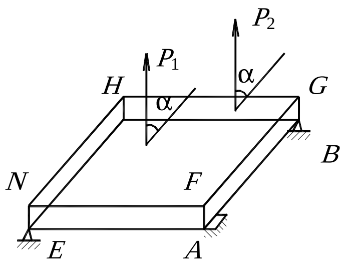
8 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Круглое кольцо радиуса R посредством трёх нитей одинаковой длины, прикреплённых к кольцу в равноотстоящих друг от друга точках, подвешено к неподвижной точке O. На образовавшийся таким образом конус надето меньшее кольцо радиуса r, равного с первым веса. Кольцо это при равновесии системы делит нити пополам. Найти отношение расстояний колец от точки O.



9 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Круглая невесомая пластинка покоится в горизонтальном положении, опираясь центром на остриё O. Разместить по окружности пластинки, не нарушая равновесия, грузы P_1 = 1,5 кН, P_2 = 1 кН, P_3 = 2 кН в точках A, B и C, т.е. найти углы α и β.

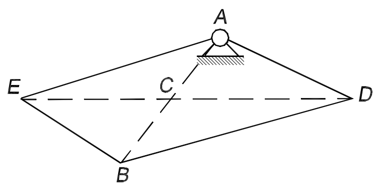


10 (СНГ, 1992, 3 балла). Прямоугольная однородная плита весом Q соединена с неподвижной опорой цилиндрическим шарниром A и сферическим шарниром B. Плита удерживается в горизонтальном положении остриём E, упирающимся в гладкую поверхность нижней грани плиты. К верхней грани плиты $FGHN$ приложены две параллельные силы, равные P и лежащие в плоскости этой грани. Линии действия сил образуют острый угол α со стороной NH, а центр тяжести плиты находится от них на равных расстояниях. Определить реакции опор, если известно, что $AF = AB/5 = AE/10$.

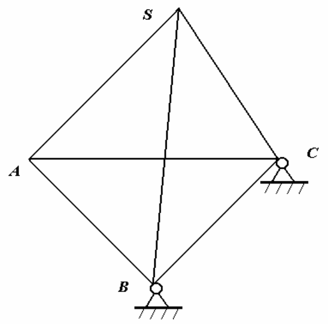


11 (Россия, 1993, 4 балла). Однородный горизонтально расположенный квадрат $ADBE$ весом P с диагоналями AB = DE = $2l$ прикреплён в точке A к неподвижной опоре сферическим шарниром. Квадрат уравновешен некоторой дополнительной системой активных сил, о которой известно:

1) линия действия равнодействующей этой системы проходит через точку B; 2) если к этой системе добавить вес квадрата, то при приведении новой системы сил к точке D её главный момент равен $Pl\sqrt{5}/2$. Определить реакцию шарнира A, пренебрегая толщиной квадрата.

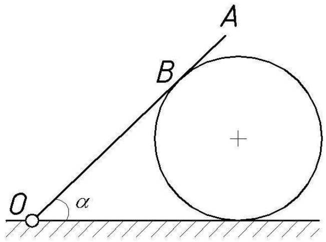


12 (Тамбовский ин-т хим. машиностр., 1993, 4 балла). Треугольная пирамида $SABC$ с равными рёбрами и весом P расположена так, что её основание ABC горизонтально, а вершины B и C закреплены с помощью неподвижных шарниров. В центре тяжести каждой боковой грани приложены силы, равные по модулю P и направленные перпендикулярно к граням вовнутрь пирамиды. Какую надо приложить в вершине S силу F, параллельную вектору $\overline{AB}$, чтобы пирамида находилась в данном положении в равновесии? Трение в шарнирах не учитывать.

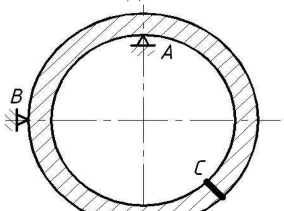


4.5. ЗАДАЧИ С ТРЕНИЕМ

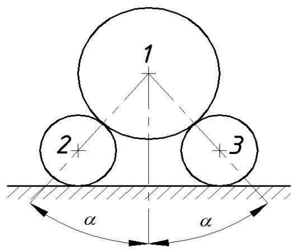
1 (СССР, 1982, 3 балла). Тяжёлая балка OA, закреплённая одним концом в шарнире O, опирается в точке B на шар весом P, лежащий на неподвижной горизонтальной плоскости. Определить угол α при равновесии, если коэффициент трения шара о балку и горизонтальную плоскость одинаков и равен f. Трение качения отсутствует.



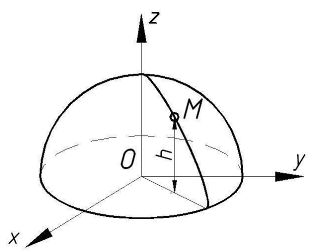
2 (СССР, 1983, 3 балла). Однородное кольцо весом P свободно опирается в точках A и B на неподвижные призмы, которые расположены, соответственно, на вертикальном и горизонтальном диаметрах кольца. Считая коэффициенты трения кольца о призмы одинаковыми, определить такое их значение, при котором точечный груз C весом Q, закреплённый в любом месте правой половины кольца, будет оставлять последнее в покое. Поперечными размерами кольца пренебречь.



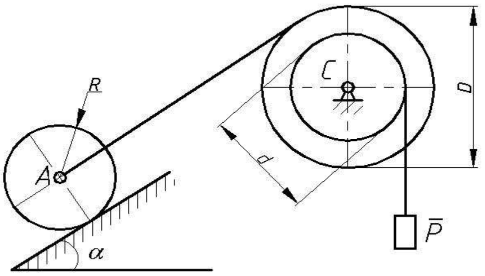
3 (СССР, 1986, 4 балла). Цилиндр *1* веса Q_1 опирается на два одинаковых цилиндра веса Q_2, как показано на рисунке. Коэффициент трения скольжения между цилиндрами равен f. Определить максимальный угол α и минимальный коэффициент трения f_0 между цилиндрами *2* и *3* и опорной поверхностью.



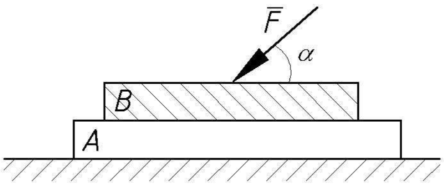
4 (СССР, 1987, 5 баллов). Поверхность параболического купола описывается уравнением $z = H - (x^2 + y^2)/H$. На высоте h на купол был положен груз. При каких значениях h возможно равновесие груза, если коэффициент трения между грузом и куполом f?



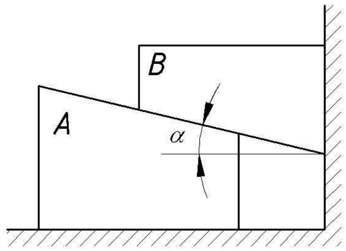
5 (СССР, 1987, 6 баллов). Цилиндр веса Q и радиуса R лежит на шероховатой плоскости, наклонённой к горизонту под углом α, и удерживается тросом, намотанным на барабан ступенчатого вала диаметра D. На барабан диаметра d намотан трос, к концу которого подвешен груз веса P. Коэффициент трения качения цилиндра A о плоскость равен δ, коэффициент трения скольжения равен f, при этом $\operatorname{tg} \alpha > \delta/R$, $f > \delta/R$. При каких значениях P система будет находиться в равновесии?



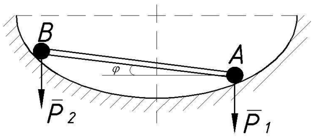
6 (СССР, 1989, 6 баллов). На верхней грани прямоугольного бруса A веса P_1 находится прямоугольный брус B веса P_2. Брус A опирается нижней гранью на горизонтальную плоскость, причём коэффициент трения между ними равен f_1. Коэффициент трения между брусками A и B равен f_2. К брусу B приложили силу под углом α к горизонту. При каких значениях силы F система будет оставаться в равновесии?



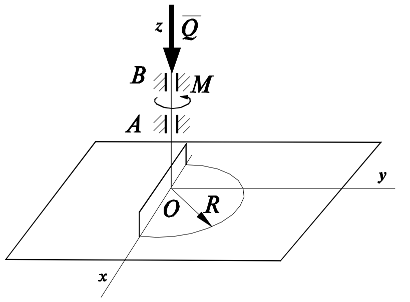
7 (СССР, 1990, 4 балла). Призма B опирается на клин A и вертикальную стену. Массы призмы и клина одинаковы. Трение между клином и призмой пренебрежимо мало. Коэффициенты трения между клином и полом, призмой и стеной одинаковы и равны f. Наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол α. При каких значениях f призма и клин будут оставаться в покое?



8 (РСФСР, 1982, 3 балла). Система, состоящая из двух шаров A и B с весами P_1 и P_2 ($P_1 > P_2$) и соединяющего их невесомого стержня длиной l, помещена в сферическую чашу радиуса $r = 0{,}5\sqrt{2}\,l$, коэффициент трения скольжения шаров о поверхность чаши равен f. Найти наименьшее значение угла φ между стержнем и горизонтом, при котором система может находиться в покое внутри чаши. Размерами шаров пренебречь.

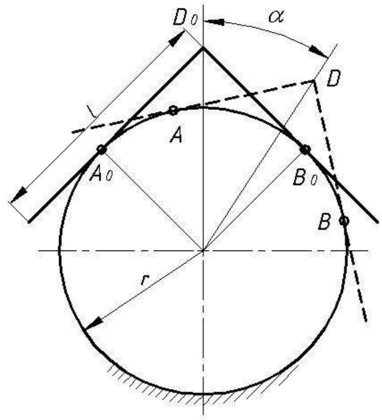


9 (РСФСР, 1984, 5 баллов). Жёсткая стержневая фигура опирается равномерно полуокружностью на негладкую горизонтальную плоскость. Пренебрегая весом фигуры и трением в подшипниках A и B, определить для случая покоя наибольший движущий момент M и соответствующие реакции опор, если даны: радиус R, вертикальная сила Q и коэффициент сцепления f ($OA = AB = R$).

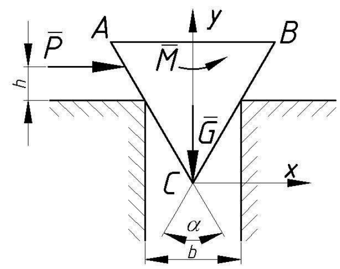


10 (РСФСР,1987, 5 баллов). Плоский угольник состоит из двух одинаковых тонких однородных стержней. Стержни жёстко соединены между собой в вершине D под углом 90°. Угольник установлен на неподвижную горизонтальную шероховатую цилиндрическую опору радиуса r, коэффициент трения скольжения f_0 = 0,268. Угольник поворачивают по часовой стрелке на угол α из начального положения A_0B_0, останавливают и затем освобождают без толчка. После освобождения угольника возможны два случая: 1) в точке B стержень соприкасается с опорой; 2) в точке B между ними имеется небольшой зазор $\Delta l << r$.

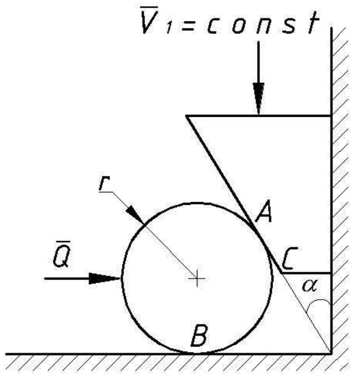
Опишите качественно дальнейшее движение угольника после его освобождения и определите предельные значения угла α, при которых угольник будет иметь различные состояния равновесия – безразличное, устойчивое, неустойчивое. Сопротивлением перекатывания пренебречь.



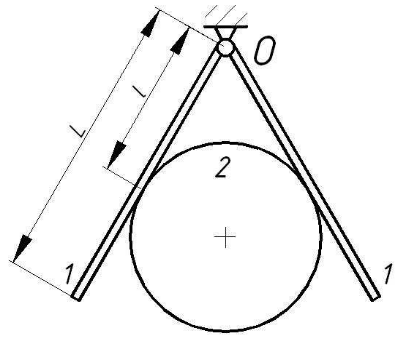
11 (РСФСР, 1988, 5 баллов). В паз шириной b помещена негладкая призма весом G, сечение которой – равнобедренный треугольник с углом α при вершине C. К призме приложена пара сил с моментом M и наименьшая уравновешивающая сила P, перпендикулярная силе G и параллельная оси x, при которой призма будет находиться в покое. Определить реакцию связи и силу P. Дано: коэффициент трения f, $\alpha = 4\varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = f$, $M = bG$, $h = 3/2\ f\,b$.



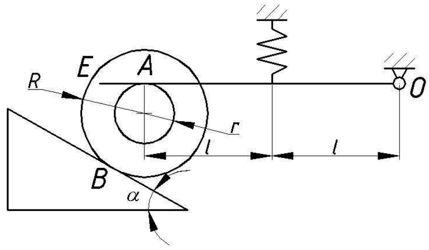
12 (РСФСР, 1988, 5 баллов). Клин равномерно перемещается вертикально вниз, касаясь гладкой стены и шероховатой поверхности катка. Каток при этом может перемещаться по негладкой горизонтальной плоскости. Исследовать влияние угла α клина и коэффициента трения скольжения f связях A и B на характер движения цилиндрического катка. Силу N_A, перпендикулярную к стороне AC клина, считать постоянной. Каток невесомый.



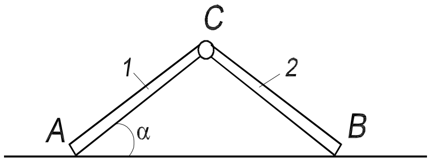
13 (РСФСР, 1990, 3 балла). Шар 2 веса G_2 и радиуса r удерживается силами трения между одинаковыми пластинками 1 веса G_1 каждая, шарнирно подвешенными на горизонтальной оси O. Поперечными размерами пластин пренебречь. Длина пластины равна L, расстояние от оси O до точки касания пластины с шаром – l, коэффициент трения между шаром и пластиной – f. Считая заданными указанные геометрические размеры, найти условия, которым должны удовлетворять величины f, G_1, G_2 при равновесии системы.



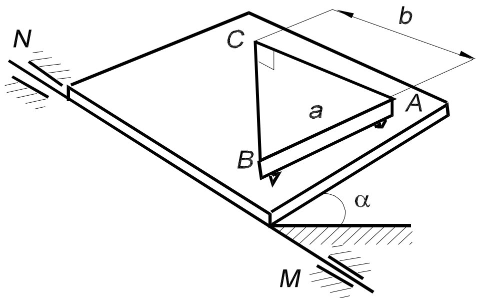
14 (РСФСР, 1990, 3 балла). Определить деформацию λ пружины жёсткостью c для системы, изображенной на рисунке в положении предельного состояния равновесия. Исходные данные: отношения радиусов двухступенчатого катка $r/R = 0{,}2$, коэффициент сцепления в точках A и B контакта катка с горизонтально расположенным невесомым стержнем OE и наклонённой к горизонту под углом $\alpha = 30°$ плоскостью $f = 0{,}577$, отношение коэффициента трения качения катка в точке B к большему радиусу катка $\delta/R = 0{,}5$, вес катка равен Q, в точке O – шарнир.



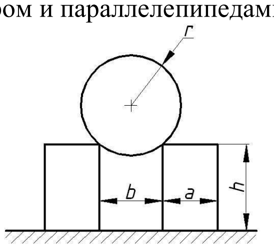
15 (БССР, 1985, 3 балла). Однородные стержни *1* и *2* одинаковой длины с массами m_1 и m_2, расположенные в вертикальной плоскости, соединены идеальным шарниром C, а концами A и B опираются на шероховатую плоскость. Коэффициент трения между стержнями и полом равен f. Определить наименьший угол α наклона стержней к горизонту в состоянии равновесия.



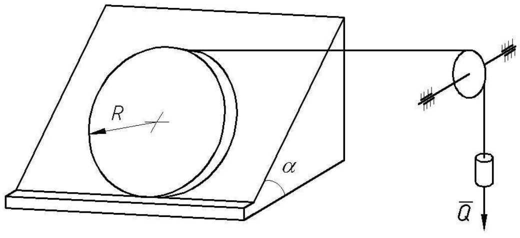
16 (БССР, 1982). Треугольная пластина весом P лежит на наклонной плоскости и опирается на неё шаровой катковой опорой A и двумя штырями B и C. Коэффициенты трения скольжения штырей B и C о плоскость, соответственно, f_1 и f_2 ($f_1 < f_2$). Определить угол α, при котором пластина потеряет равновесие, $CA \,||\, MN$.



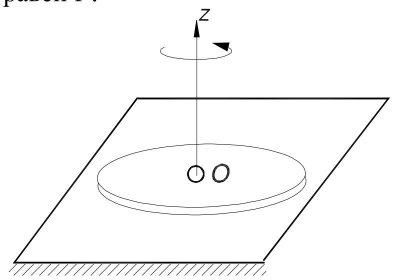
17 (БССР, 1982). Цилиндр веса P опирается на два одинаковых параллелепипеда того же веса. Радиус цилиндра r и размеры параллелепипедов a и h заданы. Коэффициент трения между параллелепипедами и горизонтальной плоскостью равен f. Каким условиям должно удовлетворять расстояние b между параллелепипедами для того, чтобы система находилась в равновесии? Трением между цилиндром и параллелепипедами пренебречь.



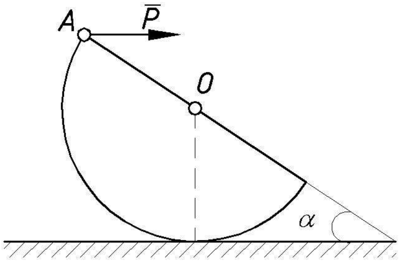
18 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1987). На наклонной плоскости с углом наклона α к горизонту лежит однородный диск весом P и радиусом R. На диск намотана нить. К свободному концу нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз весом Q. При каком значении Q диск будет равномерно скользить по плоскости, совершая одновременно качение без скольжения по бортику AB? Коэффициент трения скольжения равен f, трение качения и трение на блоке не учитывать.



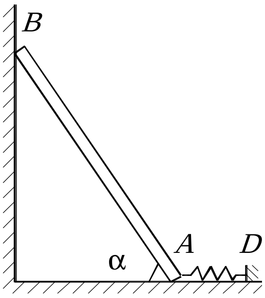
19 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Однородный сплошной диск радиуса R и веса P лежит на шероховатой горизонтальной плоскости. Какой по модулю момент M способен вызвать вращение диска вокруг оси OZ, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через центр O, если давление диска на опорную плоскость распределено равномерно, а коэффициент трения скольжения о плоскость равен f?



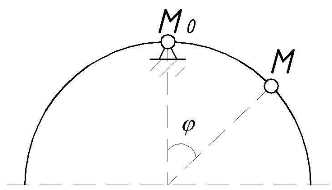
20 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989. На шероховатой горизонтальной плоскости лежит полушар веса Q и радиуса r. В точке A на него действует горизонтальная сила P. Найти угол α в предельном состоянии равновесия шара, если $P = \frac{1}{8}Q$. Под каким углом β надо приложить в точке A минимальную силу P, чтобы она обеспечила предельное состояние равновесия при некотором угле $\alpha_{\min}$? Найти $P_{\min}$ и $\alpha_{\min}$.



21 (СНГ, 1992, 4 балла). Однородный тонкий стержень длиной $AB = l$ и весом P опирается в точке B на шероховатую поверхность с коэффициентом трения $f < 1$, а в точке A – на гладкую горизонтальную поверхность. В точке A к стержню прикреплена пружина жёсткостью c, второй конец которой закреплён в точке D. Пружина не деформирована, когда стержень вертикален. Определить, при каких значениях угла α стержень будет находиться в равновесии, если $P = 2cl$.

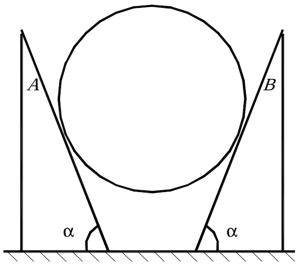


22 (Россия, 1993, 5 баллов). Тонкая проволока, изогнутая в виде полуокружности, свободно висит на уголке, опираясь на него в точке M_0. Определить: 1) при каких значениях коэффициента трения f возможно равновесие полуокружности, если точку контакта перенести в положение M, определяемое углом φ; 2) при каком угле φ минимальное значение коэффициента трения, обеспечивающее равновесие, является наибольшим. Найти этот максимум.

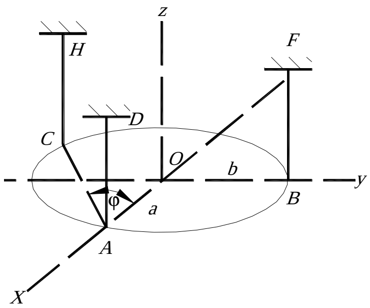


23 (Россия, 1994, 5 баллов). Две однородные треугольные призмы одинаковых размеров, сделанные из разных материалов, находятся на неподвижном основании, рёбра их параллельны, и призмы удерживают в равновесии невесомый полый цилиндр, в который медленно наливают жидкость. Веса призм A и B, соответственно, равны P_1 = 1 кН, P_2 = 2 кН. Коэффициент трения между призмой A и цилиндром, а также неподвижной поверхностью f_1 = 0,2, для призмы B, соответственно, f_2 = 0,15. Угол при основании призмы $\alpha = 60^{\circ}$.

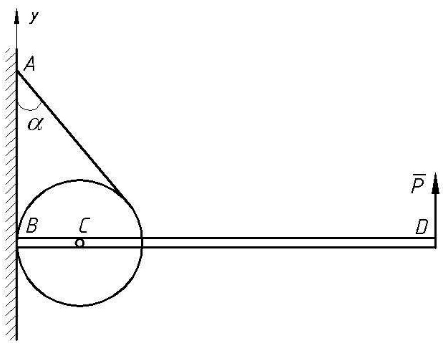
Определить, какая из призм начнёт скольжение первой, а также силу трения между другой призмой и горизонтальной поверхностью в этот момент, если положение цилиндра обеспечивает неопрокидывание призм.



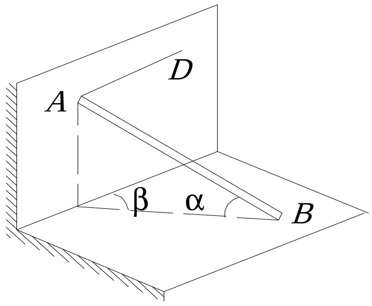
24 (Россия, 1994, 3 балла). Однородная пластина весом P в виде эллипса с полуосями a и b удерживается в горизонтальном положении тремя вертикальными нитями AD, BF, CH. Точки A, B и C лежат на пересечении эллипса, соответственно, с осями x, y и линией, проходящей через точку A и составляющей угол φ с осью x. Определить силу натяжения нитей, если $\mathrm{tg}\,\varphi = b/2a$.



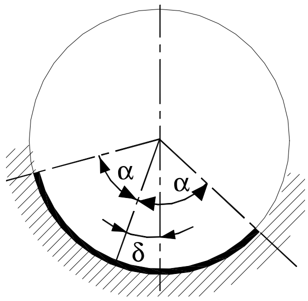
25 (Россия, 1995, 4 балла). Однородный диск весом P и радиусом r находится в вертикальной плоскости. В точке B он касается неподвижной вертикальной стенки с коэффициентом трения $f = \sqrt{3}/15$. Невесомая нить намотана на диск и образует со стенкой угол $\alpha = 60°$. К диску жёстко прикреплён однородный стержень BD длиной $8r$, расположенный горизонтально. На конец стержня действует вертикальная сила $F = 2P$. При каком значении веса стержня конструкция будет находиться в равновесии? Какой вес стержня обеспечивает равновесие при любом коэффициенте трения?



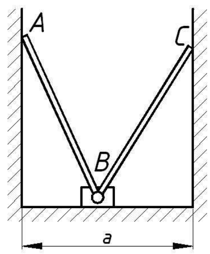
26 (Россия, 1996, 4 балла). Тяжёлый однородный стержень AB одним концом A опирается на гладкую вертикальную стену, а другим концом B – на шероховатый горизонтальный пол. Конец A стержня удерживается горизонтальной нитью AD. Указать область значений для углов α и β, при которых стержень AB будет находиться в покое в указанном на рисунке положении, если коэффициент трения скольжения между концом B стержня и полом равен f.



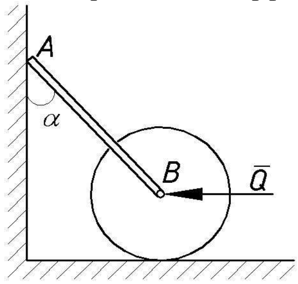
27 (Россия, 1997). Гибкая однородная лента расположена внутри полого шероховатого цилиндра, ось которого горизонтальна. Лента образует дугу окружности с центральным углом 2α. Каково наибольшее значение угла δ с вертикалью, при котором лента не соскальзывает, если коэффициент трения скольжения равен f?



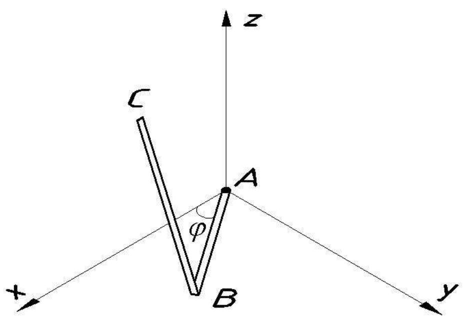
28 (Россия, 1998, 6 баллов). Одинаковые однородные стержни AB и BC длиной l соединены цилиндрическим шарниром, на оси которого укреплён невесомый ползун B. Стержни опираются в точках A и C на вертикальные гладкие стенки, расположенные на расстоянии a друг от друга ($a < l$). Ползун может скользить по шероховатому горизонтальному полу с коэффициентом трения f. При каком соотношении между a и l эта система будет находиться в равновесии в любом положении ползуна на плоскости?



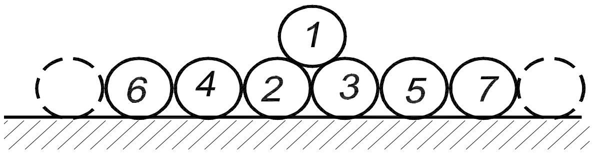
29 (Россия, 1999, 5 баллов). Рукоятка катка, шарнирно соединённая с его осью, опирается своим концом A на вертикальную гладкую стенку. Вес рукоятки равен P, её длина l, вес катка также равен P, его радиус r. В точке B к катку приложена горизонтальная сила $Q = 2P$. При каком угле α возможно равновесие системы, если коэффициент трения скольжения между катком и горизонтальной плоскостью равен f, а коэффициент трения качения равен δ?



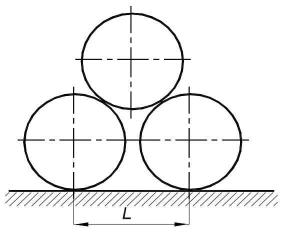
30 (Россия, 2000, 5 баллов). Два одинаковых тонких однородных стержня AB и BC жёстко скреплены в точке B под прямым углом. Стержень AB расположен на шероховатой горизонтальной плоскости xAy с коэффициентом трения f, его крепление в точке A допускает поворот вокруг оси стержня AB и перемещение в положительном направлении оси z. Стержень BC в точке C опирается на вертикальную гладкую стену xAz. При каком значении f предельное значение угла φ при равновесии составляет 30°? Считать, что равнодействующие сил трения и нормальных реакций шероховатой плоскости приложены в одной точке, вертикальной составляющей реакции опоры A пренебречь.



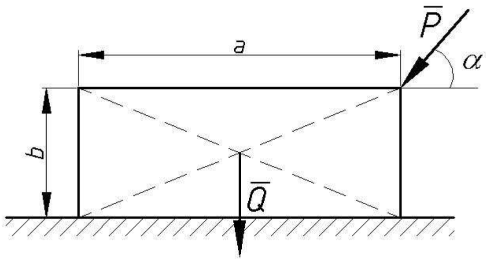
31 (Томск. политехн. ин-т, 1985). Раскатятся ли трубы на горизонтальном полу, если коэффициент трения скольжения между поверхностями труб $f = 0{,}2$? Трубы и пол считать абсолютно твёрдыми. При каком минимальном количестве труб нижнего ряда система не будет раскатываться? Зависит ли результат от количества труб, если учитывать трение качения?



32 (Россия, 2001, 5 баллов). Три одинаковых однородных диска радиуса R расположены в вертикальной плоскости, как указано на рисунке. Коэффициент трения между дисками, а также опорной поверхностью и дисками одинаков и равен f ($f < 1$). Определить максимальное расстояние между центрами нижних дисков и область допустимых значений коэффициента трения при равновесии системы.

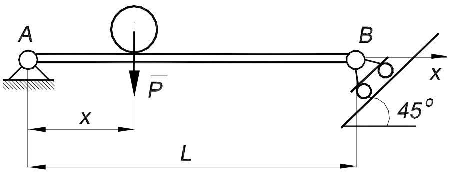


33 (Россия, 2001, 6 баллов). Однородный прямоугольник с основанием a, высотой b и весом Q лежит на шероховатой горизонтальной плоскости с коэффициентом трения f. Каким условиям удовлетворяет величина силы P, для которой прямоугольник находится в равновесии при любом значении угла α $(0 \le \alpha \le \pi/2)$? Сила P расположена в плоскости прямоугольника.

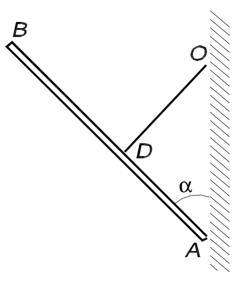


34 (Урал, Оренбург, 2000, 3 балла). Дана система n материальных точек с массами m_k и координатами x_k, y_k, z_k, $k = 1 \ldots n$. На каждую точку действует сила притяжения к некоторому центру Q: $F_k = fm_kM_kQ$, где f – одно и то же для всех точек. Определить координаты точки Q, если известно, что система находится в равновесии.

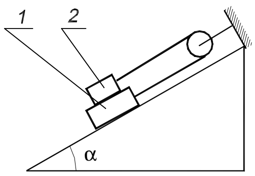
35 (Урал, Оренбург, 2000, 4 балла). Балка AB весом $2P$ имеет шарнирную опору в точке A, не закреплённую, а установленную на шероховатую плоскость. Коэффициент трения между плоскостью и опорой равен f. Шарнирно-подвижная опора B расположена на наклонной плоскости, образующей угол 45° с горизонтом. Определить точку приложения силы P (абсциссу x), при которой нарушается равновесие, а также чему должны равняться f и x для того, чтобы в предельном положении равновесия балки вертикальные составляющие реакции опор A и B были бы одинаковы?



36 (Поволжье – Урал, Оренбург, 2001, 6 баллов). Картина AB подвешена к вертикальной стене с помощью нити, прикреплённой к гвоздю в стене (O) и к картине в точке D. Определить длину нити OD и расстояние DA, для которых в положении равновесия сила трения обращается в нуль при любом значении угла α. Длина $AB = 2l$.

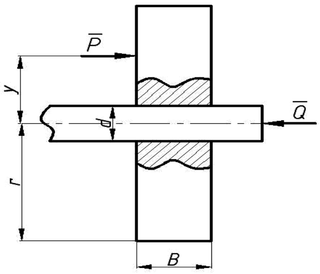


37 (Тамбов, ТГТУ, 1995, 4 балла). На гладкой наклонной плоскости с углом наклона α находятся два груза *1* и *2* друг на друге, коэффициент трения скольжения между ними равен *f*. Грузы соединены нитью, перекинутой через неподвижный блок. Вес верхнего тела P_2. Найти вес P_1 нижнего тела при равновесии системы.

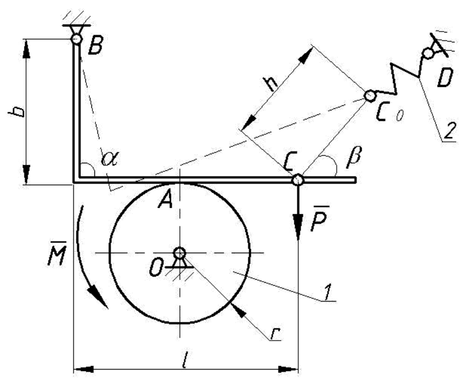


4.6. ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

1 (РСФСР, 1983, 3 балла). Шестерня напрессована на вал и сила трения между ними, вызванная напрессовкой, равна *Q*, коэффициент трения сцепления равен f_0. Определить закон изменения силы $P = f(y)$, которую нужно приложить для снятия шестерни с вала.

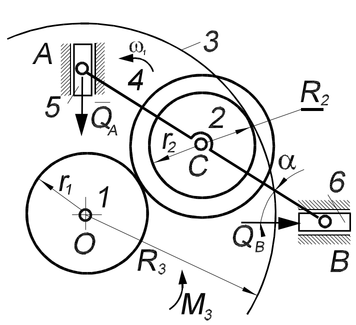


2 (РСФСР, 1986, 5 баллов). При какой минимальной тормозной силе *P* и жёсткости пружины *c* будет тормозиться и растормаживаться диск *1*, на который действует постоянный момент внешних сил M = 600 Н·см? Для соприкосновения тормозной колодки с диском пружину нужно растянуть на величину h = 1 см. Коэффициент трения в паре *A* f = 0,3, трение в шарнирах не учитывать. Размеры механизма: r = 10 см, a = 4 см, $b = l$ = 20 см, α = 90°, β = 45°.

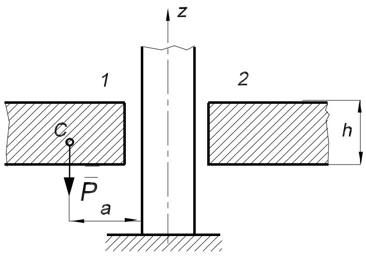


3 (РСФСР, 1989, 5 баллов). Определить величину момента M_3, при котором зубчато-рычажный механизм в данном положении будет находиться в равновесии. Массами тел и трением в связях пренебречь.

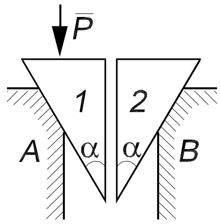
Дано: $AC = BC = l$, $r_1 = R_2 = 0{,}5l$, $r_2 = 0{,}25l$, угол α = 30°, угол AOB = 90°, угловая скорость $\omega_3 = 0$, сила $Q_A = Q_B = Q$.



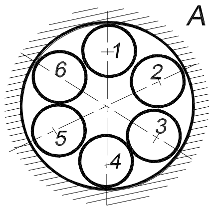
4 (Лит. ССР, 1985, 3 балла). По вертикальному столбу *1* скользит пластина *2* толщины *h* с круглым отверстием. Определить наименьшую силу тяжести *P* и наименьшее расстояние *a* между центром тяжести *C* пластины и осью столба при условии равновесия пластины за счёт сил трения. Коэффициент трения между столбом и пластиной равен *f*.



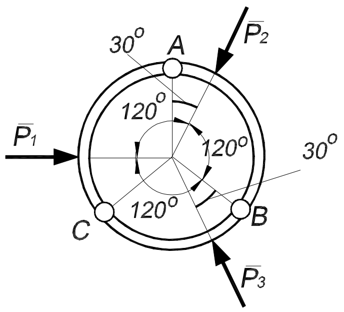
5 (Л., 1985, 3 балла). Между неподвижными телами *A* и *B* установлены два клина *1* и *2*. Грани клина *1* и поверхность тела *A* гладкие. Вертикальная грань клина *2* гладкая, а наклонная грань и поверхность тела *B* шероховатые. При каком значении коэффициента трения *f* между поверхностями контакта клина *2* и тела *B* наступит момент предельного равновесия, если давить на клин *1* силой *P*? Считать, что силы давления клина *2* на тело *B* распределяются по поверхности тела равномерно.



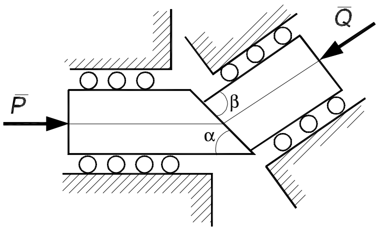
6 (Зап.-Сиб. зона, Томск, политех. ин-т, 1986). В цилиндрическое отверстие тела *A* радиуса $R = 3r$ вставлены без натяга шесть цилиндров радиуса *r* и веса *Q* каждый. Определить давление цилиндра *4* на стенку отверстия в точке их контакта. Система расположена в вертикальной плоскости.



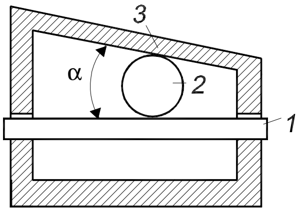
7 (Зап.-Сиб. зона, Томск. инж.-строит. ин-т, 1988). Кольцо радиуса *R* состоит из трёх одинаковых дуг *AB*, *BC* и *CA*, соединённых между собой шарнирами. К каждой из дуг на равных расстояниях от шарниров в плоскости кольца приложены силы P_i, линии действия которых проходят через центр *O*; кольцо расположено в горизонтальной плоскости. Определить реакции в шарнирах *A*, *B* и *C*. Принять $P_1 = P_2 = P_3 = P$.



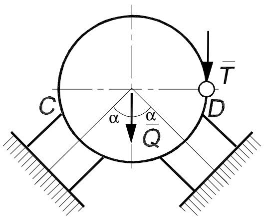
8 (Зап.-Сиб. зона, Томск. инж.-строит. ин-т, 1988). Два клина *A* и *B*, коэффициент трения между которыми равен *f*, могут двигаться без трения в своих направляющих. К клину *A* приложена сила *P*. Какую силу *Q* нужно приложить к клину *B*, чтобы клин *A* двигался равномерно в сторону действия силы *P*?



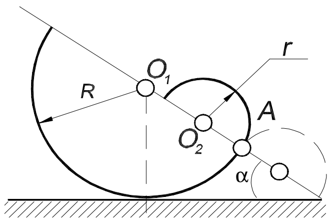
9 (Томск. область, 1979). Храповое устройство позволяет двигаться направляющей *1* только влево. Считая, что коэффициент трения скольжения между шариком *2* и корпусом *3* значительно больше коэффициента трения скольжения *f* между шариком и направляющей, определить, при каком угле α храповое устройство работоспособно.



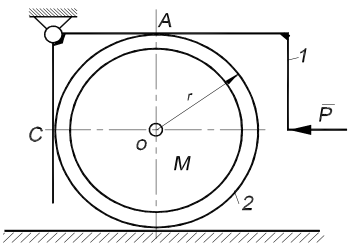
10 (Белорусск. политех. ин-т, 1984). Цилиндр веса Q лежит на двух опорах C и D, расположенных симметрично относительно вертикали, проходящей через центр цилиндра. Коэффициент трения между цилиндром и опорами равен f. При какой величине тангенциальной силы T цилиндр начнёт вращаться?



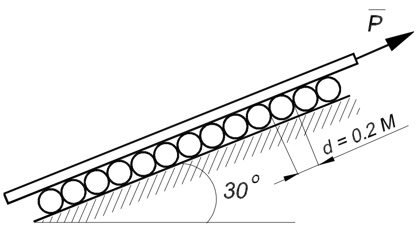
11 (Белорус. с.-х. акад., 1987). Два однородных полудиска радиусов R и r жёстко связаны между собой, как показано на рисунке. Исследовать положение равновесия системы. Указание: найти тангенс угла α, который образует общая прямая этих тел с горизонтом. Очевидно, что из $r \to 0$ следует $\alpha \to 0$ (т.е. имеем один нижний полудиск, находящийся в устойчивом положении равновесия). Будем увеличивать радиус малого полудиска. Может сложиться впечатление, что с возрастанием r должен увеличиваться до каких-то пределов и α, а затем при дальнейшем увеличении r угол α будет уменьшаться; при $r \to 0$ ожидаем $\alpha \to 0$. Так ли это? Из формулы для tg (α) из $r \to R$ не следует $\alpha \to 0$. Почему? Найти интервал для α при устойчивом положении системы, если $0 < r < \infty$. То же найти и для случая, когда верхний полудиск располагается справа от точки A (показано пунктиром).



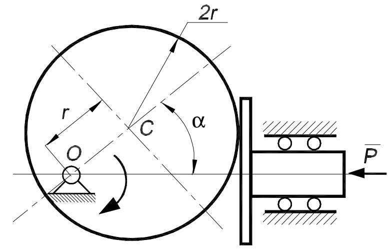
12 (МИИТ, 1978). Определить условия, которым должны удовлетворять сила P, приложенная к жёсткому рычагу *1*, момент пары M, приложенный к твёрдому кольцу *2* радиуса R, и коэффициенты сцепления (трения покоя) f_A и f_B в точках A и B, для того, чтобы кольцо вращалось вокруг неподвижной оси O. Трением в точке C, весом кольца и рычага пренебречь.



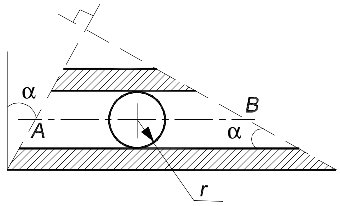
13 (Омск. политех. ин-т, 1984). Бетонный блок массой m = 500 кг равномерно поднимают вверх по наклонной шероховатой плоскости на невесомых катках. Коэффициенты трения качения в парах: каток – наклонная плоскость $\delta_1 = 0{,}01$ см, каток – поверхность блока $\delta_2 = 0{,}005$ см. Коэффициент трения скольжения в паре блок – наклонная плоскость – $f = 0{,}1$. Определить тяговое усилие, приложенное к блоку параллельно плоскости, при вкатывании и при втягивании волоком.



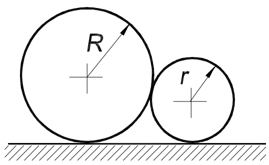
14 (Тольяттинск. политехн. ин-т., 1987). При каких условиях система будет в равновесии, если $\alpha = 30°$ и коэффициент трения покоя $f = 0{,}15$? Трением в подшипниках пренебречь. Каково условие самоторможения при $M = 0$?



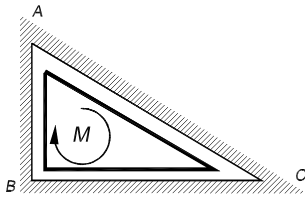
15 (Тольяттинск. политехн. ин-т., 1986). Из цилиндрической трубы радиуса r двумя взаимно перпендикулярными сечениями вырезан патрубок. На его внутреннюю поверхность действует равномерное давление P. Определить величину и линию действия равнодействующей R.



16 (Тольяттинск. политехн. ин-т, 1986). При каком условии автомобильное колесо радиуса R сможет медленно переехать через свободно лежащий на дороге цилиндр радиуса r? Коэффициент трения цилиндра с колесом и дорогой f. Весом цилиндра пренебречь.



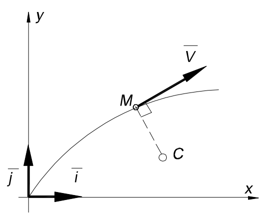
17 (Уфимск. нефтян. ин-т, 1983). К треугольному ключу с сечением в виде прямоугольного треугольника с катетами $AB = a$ и $BC = b$ приложена пара сил с моментом M. Определить давления, производимые вершинами A, B и C на грани гнезда замка. Трением пренебречь. Зазор между ключом и гнездом считать малым.



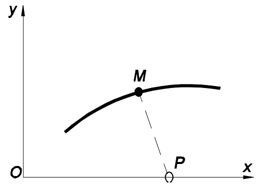
5. ЗАДАЧИ ДЛЯ ТВОРЧЕСКОГО САМОРАЗВИТИЯ ПО КИНЕМАТИКЕ

5.1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

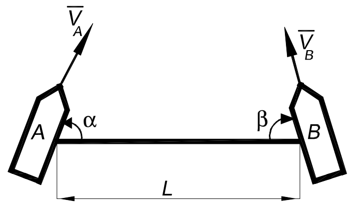
1 (СССР, 1983, 7 баллов). Точка движется со скоростью $\bar{v} = 2t\bar{i} + 3\bar{j}$, где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ – орты координатных осей. Найти скорость и ускорение центра кривизны траектории движущейся точки по отношению к указанной системе координат.



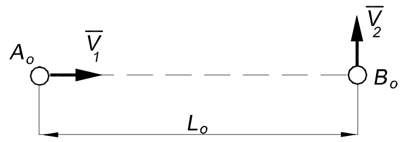
2 (М., 1988). Движение точки M задано уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$. Найти радиус кривизны траектории точки и доказать, что $\rho = 2\,PM$, если $OP = t$.



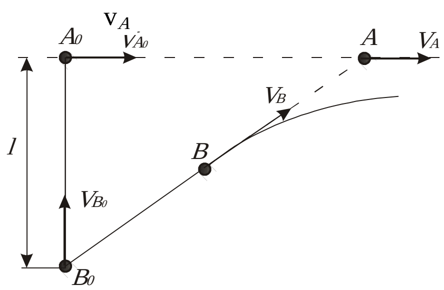
3 (Л., 1987). Два судна A и B, расстояние между которыми в начальный момент времени равно l, движутся пересекающимися курсами с постоянными скоростями v_1 и v_2, соответственно. Направления скоростей составляют углы α и β с прямой AB, на которой находятся суда в начальный момент времени. Найти наименьшее расстояние между судами при их движении.



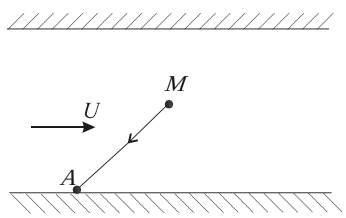
4 (СССР, 1989, 5 баллов). Две точки A и B движутся по прямым, расположенным в одной плоскости, с постоянными скоростями v_1 и v_2. В начальный момент времени расстояние между точками равно l_0, направления скоростей указаны на чертеже. Определить кратчайшее расстояние между точками A и B.



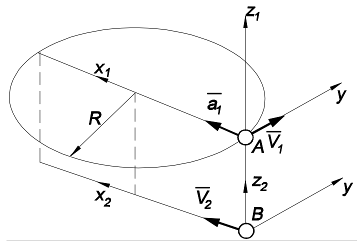
5 (Россия, 2001, 10 баллов). Точки A и B движутся в плоскости рисунка с постоянными скоростями v и 2v, соответственно. Точка A движется прямолинейно, а скорость точки B в каждый момент времени направлена в точку A. Определить путь, пройденный точкой A до встречи с точкой B, если в начальный момент времени расстояние $A_0B_0 = l$, а скорости v_A и v_B взаимно перпендикулярны.



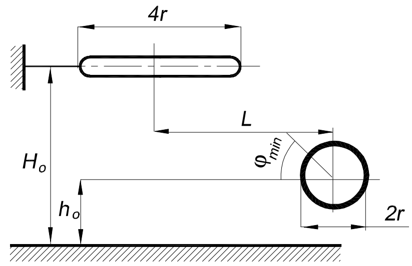
6 (Урал-Поволжье, Оренбург, 2001, 6 баллов). Лодку, уносимую течением реки, подтягивают к берегу верёвкой с постоянной скоростью v. Определить уравнение траектории лодки, принимая её за материальную точку, если скорость течения реки U, длина верёвки в начальный момент равнялась L и верёвка была перпендикулярна к берегу. Указание: при решении задачи удобно использовать полярную систему координат.



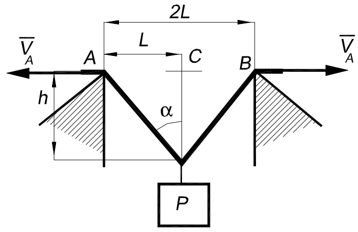
7 (Саратовск. политехн. ин-т, 1983). Автомобиль A двигается с постоянной скоростью v_1 по кольцевой дороге радиуса R. Другой автомобиль B движется по радиальной автотрассе с постоянным ускорением a_2. В тот момент, когда автомобиль A проезжает над шоссе, под ним проносится со скоростью v_2 автомобиль B. Определить, каковы в этот момент относительные скорости и ускорения автомобилей (относительно подвижных систем координат $Ax_1y_1z_1$ и $Bx_2y_2z_2$).



8 (РСФСР, 1987, 5 баллов). Под каким наименьшим углом к горизонту φ_{min} следует бросить баскетбольный мяч, чтобы он пролетел сверху сквозь кольцо, не ударившись в него. Толщиной кольца, изменением скорости мяча за время пролёта через кольцо и сопротивлением воздуха пренебречь.

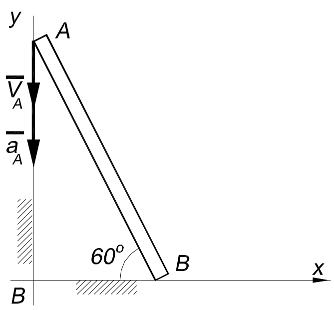


9 (РСФСР, 1986, 3 балла). Груз P поднимается с помощью двух тросов, движущихся в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями ($\overline{v}_A = -\overline{v}_B$). Определить скорость и ускорение груза.

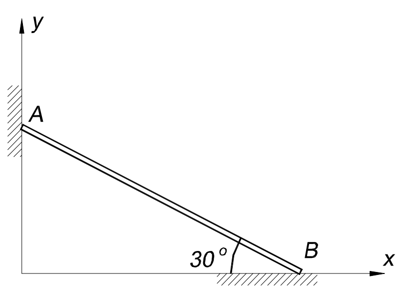


5.2. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

1 (СССР, 1987, 6 баллов). Конец A стержня AB длины l скользит по оси y, а конец B – по оси x. В положении, указанном на рисунке, скорость и ускорение конца A равны $v_A = u$, $a_A = 2u^2\sqrt{3}/l$. Определить для этого положения точку M на стержне, ускорение которой будет наименьшим. Определить ускорение этой точки.

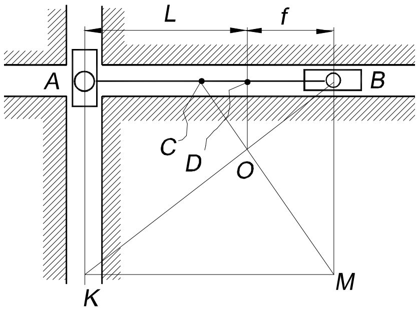


2 (БССР, 1983). Конец A стержня AB скользит по оси y, а конец B – по оси x. В момент, когда $\angle OBA = 30°$, ускорение середины стержня направлено вдоль стержня и равно a. Определить для этого момента времени ускорение концов стержня a_A и a_B.

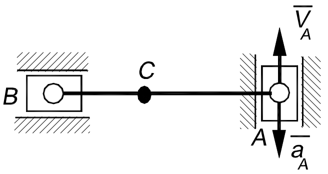


3 (СССР, 1985, 6 баллов). В плоском механизме, называемом линейкой эллипсографа, ползуны A и B перемещаются по взаимно перпендикулярным направляющим пазам. В частном положении механизма из центров ползунов откладываются произвольные отрезки $BM = AK$ и проводятся остальные линии, как показано на рисунке. Доказать, что точка C является центром кривизны эллипса, описываемого точкой D в положении, показанном на рисунке. Отрезок AB делится точкой D на неравные отрезки e и f.

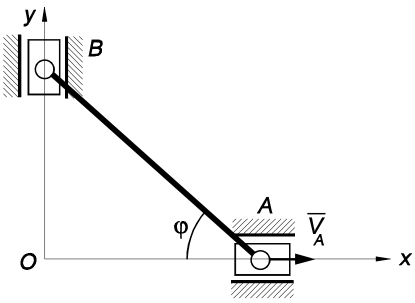
e



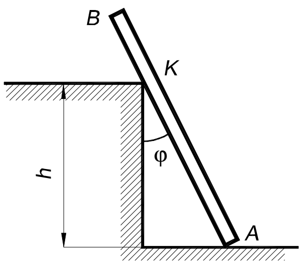
4 (Аз. ССР, 1986). Стержень AB шарнирно соединён с ползунами A и B, которые в свою очередь могут перемещаться в горизонтальной и вертикальной направляющих. Длина стержня l = 2 м, а точка C находится в его середине. Найти в указанном положении механизма нормальное ускорение точки C, если известны v_A = 1 м/с; a_A = 2 м/с^2.



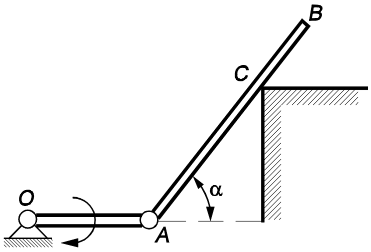
5 (Брянск, 1986). Стержень AB длиной l = 1 м движется своими концами A и B вдоль координатных осей, при этом скорость конца A равна v_A = const = 2 м/с. Определить в момент времени, когда φ = 30°, ускорение точки M стержня, скорость которой численно равна скорости точки A.



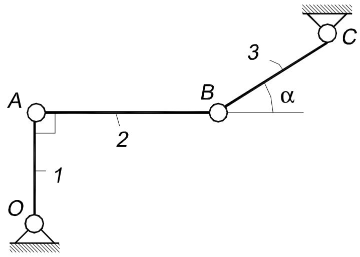
6 (БССР, 1985). Конец A стержня AB движется по горизонтальной направляющей. Стержень опирается на выступ высотой h. Угловая скорость стержня постоянна и равна ω. Определить скорость и ускорение точки стержня при φ = 45°.



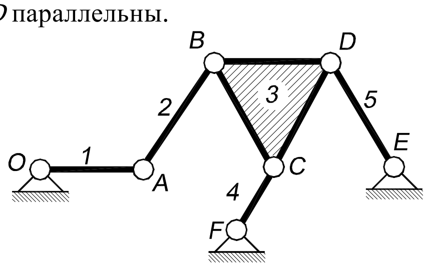
7 (Россия, 1993, 5 баллов). Плоский механизм состоит из кривошипа OA длиной l, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, и шарнирно скреплённого с ним стержня AB длиной $2l\sqrt{2}$, который промежуточной точкой скользит по выступу C. В положении, указанном на чертеже (α = 45°, $AC = BC$), определить ускорение точки B.



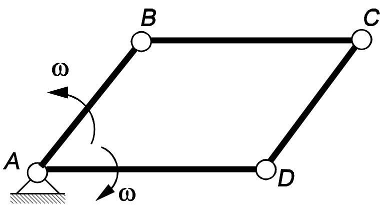
8 (СССР, 1990, 4 балла). В плоском механизме длины звеньев одинаковы и равны *l*. Для положения, указанного на чертеже, известны угловая скорость ω_1 первого звена и угловое ускорение ε_3 третьего звена. Определить ε_1 и ω_3.



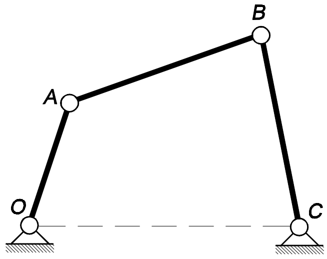
9 (РСФСР, 1987, 3 балла). Центр симметрии *S* равностороннего шатуна *BCD* движется со скоростью 1 м/с. Определить угловую скорость кривошипа *OA*. Все расстояния между шарнирами равны 100 мм. Углы *ABC* и *CDE* равны 60°; линия *DCF* – прямая; отрезки *OA* и *BD* параллельны.



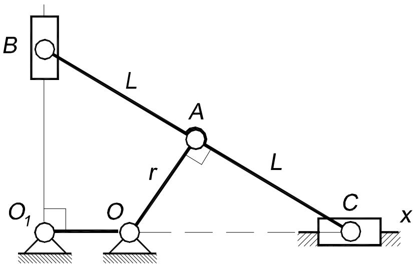
10 (МИИТ, 1980). Из стержней *AB*, *BC*, *CD* и *DA* при помощи шарниров образован параллелограмм. Вершина *A* его закреплена неподвижно, стержни *AB* и *AD* вращаются в разные стороны с угловыми скоростями ω. При каком значении угла *BAD* скорость точки *C* будет направлена по *CD*, если *AD* = 2 *AB*?



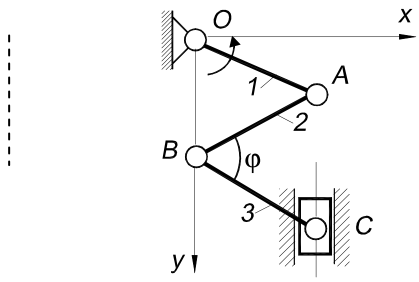
11 (Тульск. политехн. ин-т, 1984). В механизме найти ускорение МЦС звена *AB*. Доказать, что оно не зависит от углового ускорения звена. Размеры звеньев и углы произвольны.



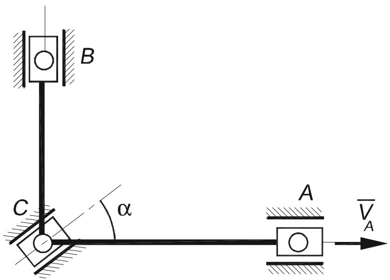
12 (СССР, 1987, 4 балла). В кривошипно-ползунном механизме с присоединённой кулисой *AB* = *AC* = *l*, *OA* = *r*. Кривошип *OA* вращается с угловой скоростью ω. Для положения, при котором $\angle BO_1C = \angle OAC = 90°$, определить угловую скорость кулисы.



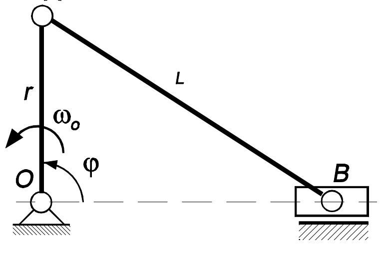
13 (РСФСР, 1990, 5 баллов). Для плоского механизма с двумя степенями свободы в изображённом на рисунке положении известно, что прямые OB и DAC параллельны, $OA = AB = BC = 1$ м, $OD = \sqrt{2}/2$ м. Определить угловое ускорение звена *2* относительно *3* для следующих двух случаев: стержень *2* или *3* имеет мгновенно поступательное движение. При этом также дано: $v_A = 1$ м/с, $a_A = a_{cy} = 1$ м/с^2 – для первого случая и $v_{cy} = 1$ м/с, $a_A = a_{cy} = 1$ м/с^2, звено *1* движется ускоренно – для второго.



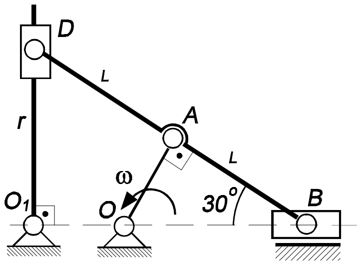
14 (Лит. ССР, 1984). В плоском механизме стержни AC и BC на концах имеют ползуны с шарнирами. Направляющие ползунов A и B между собой перпендикулярны, а направляющая ползуна C образует угол α с направляющей ползуна A. В положении механизма, изображённом на рисунке, известны скорость и ускорение ползуна A ($v_A = u$ м/с, $a_A = 0$ м/с^2). Найти угловую скорость и угловое ускорение звена BC в указанном на рисунке положении, если $AC = BC = l$ м.



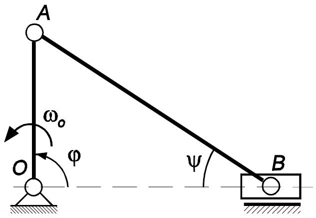
15 (Зап.-Сиб. зона, Томск. инж.-строит. ин-т, 1986). В кривошипно-шатунном механизме радиус кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = l$. Определить для заданного положения механизма, т.е. при φ = 90°, ускорение точки A, а также угловые ускорения для кривошипа OA и шатуна AB, если известно, что в данный момент угловая скорость кривошипа OA равна ω_0, а ускорение точки B равно a.



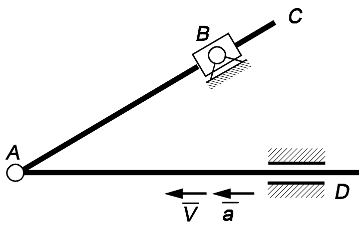
16 (Зап.-Сиб. зона, Томск. инж.-строит. ин-т, 1988). Кулисный механизм приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг неподвижного центра O с постоянной угловой скоростью ω. Определить угловые скорости и угловые ускорения шатуна BD и кулисы O_1E в положении механизма, указанном на чертеже. $AB = AD = l$, $\angle BO_1D = 90°$; $\angle O_1BD = 30°$; ω = const.



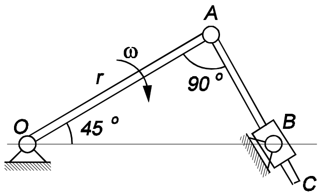
17 (Брянск. ин-т транспортн. машиностр., 1988). Дано: $r = OA = 10$ см, данный момент $\varphi = \pi/2$, $\psi = \pi/6$, $\omega_{OA} = 2$ рад/с = const. Определить радиус кривизны траектории той точки шатуна AB, ускорение которой в данный момент имеет наименьшее значение.



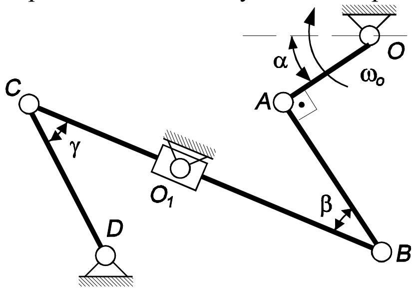
18 (МИИТ, 1980). Шток AD, двигаясь в направляющих, приводит в движение стержень AC, который всё время проходит через неподвижную точку B. В момент, когда $\angle CAD = 30°$, шток имеет скорость 10 см/с и ускорение $2\sqrt{3}$ см/с^2. Определить в этот момент угловую скорость и угловое ускорение стержня AC, а также относительное ускорение и ускорение Кориолиса точки стержня, совпадающей с точкой B, предполагая, что подвижная система отсчёта связана с ползуном B. Расстояние от точки B до штока AD равно 5 см.



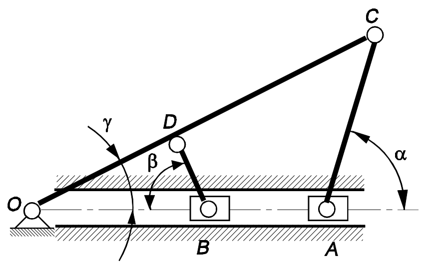
19 (Омск. политехн. ин-т, 1985). Определить ускорение точки B, принадлежащей кулисе AC механизма, показанного на рисунке, в заданном положении. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω.



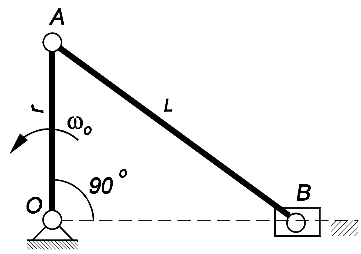
20 (Саратовск. политехн. ин-т, 1983). Плоский механизм состоит из четырёх стержней, соединённых друг с другом шарнирно. Стержни OA и DC могут поворачиваться вокруг неподвижных центров O и D, соответственно. Стержень BC свободно проходит через поворотную втулку O_1. Найти угловую скорость стержня DC в тот момент, когда $\varphi = \pi/2$, $\alpha = \beta = \gamma = \pi/6$ и $CO_1 = O_1B$, если $DC = 2\ OA$ и в рассматриваемый момент угловая скорость стержня OA равна ω_0.



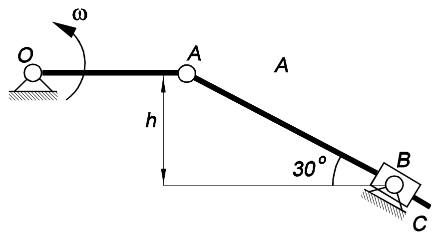
21 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988). Механизм инверсора занимает в данный момент положение, при котором $\alpha = \beta = 60°$, $\gamma = 30°$. Определить модуль скорости ползуна B в этот момент, если ползун A имеет при этом скорость v, а $OD/OC = \lambda$.



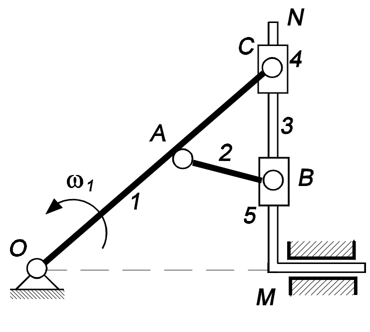
22 (Томск. инж.-строит. ин-т, 1984). В кривошипно-шатунном механизме OAB радиус кривошипа $OA = r$, длина шатуна $AB = l$, угловая скорость вращения кривошипа ω_0. Найти угловое ускорение кривошипа ε_0, при котором мгновенный центр ускорений шатуна находился бы на прямой AB, найти положение его, а также угловое ускорение ε_{AB} шатуна; $OA \perp OB$.



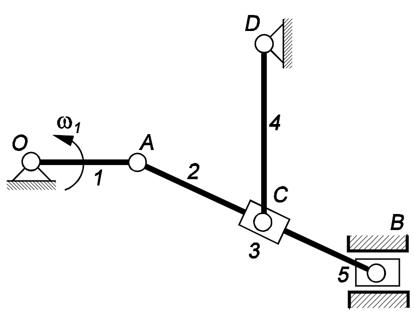
23 (Тульск. политехн. ин-т, 1984). В механизме найти МЦС цилиндра B в системе координат, связанной с кривошипом OA.



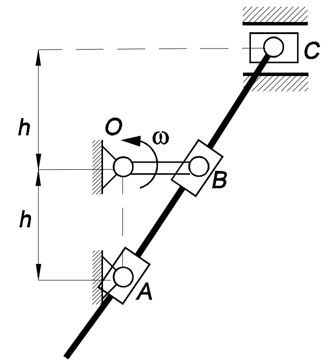
24 (Тульск. политехн. ин-т, 1985). Найти мгновенный центр скоростей звена AB механизма, изображённого на рисунке. Заданы угловая скорость кривошипа OC ω_1, размеры элементов механизма и углы в данный момент времени.



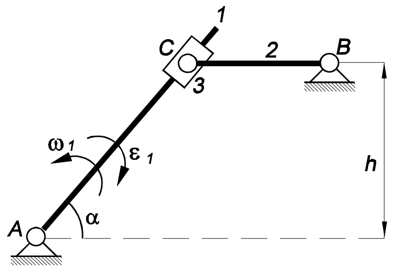
25 (Тульск. политехн. ин-т, 1987). Найти МЦС звена 3 механизма, изображённого на рисунке.



26 (Россия, 1997, 5 баллов). Определить скорость и ускорение ползуна C кулисного механизма, кривошип OB которого вращается с постоянной угловой скоростью ω, если $OB = r$, $h = r\sqrt{3}$. В расчётном положении OA перпендикулярно OB.

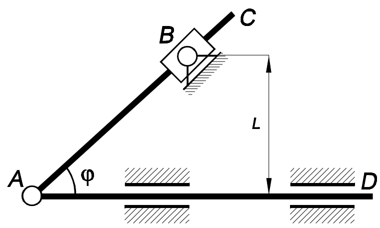


27 (Тульск. политехн. ин-т, 1988). Найти построением МЦС ползуна *3*. При $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 1$ с$^{-2}$, $CB = 10$ см, $h = 20$ см определить скорость и ускорение той точки ползуна *3*, которая совпадает с точкой *B*, если $\alpha = 60°$.

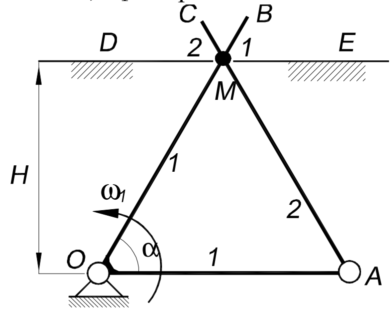


28 (Россия, 1998, 6 баллов). Стержень *AD* движется в горизонтальных направляющих и приводит в движение стержень *AC*, соединённый с шарниром. При своём движении стержень *AC* перемещается внутри качающейся муфты, которая находится на расстоянии *l* от стержня *AD*.

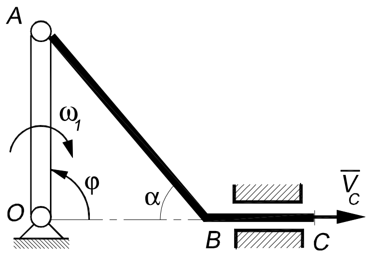
В положении механизма, определяемом углом φ, ускорение точки *D* направлено вправо и равно *a*, а скорость точки *B* стержня *AC* равна v. Найти угловую скорость и угловое ускорение стержня *AC*.



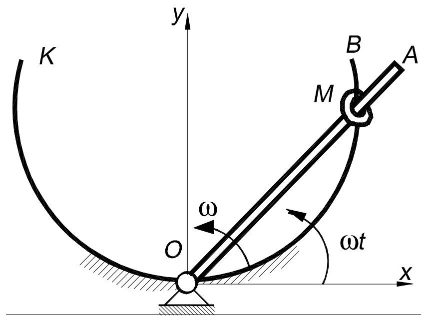
29 (СССР, 1987, 8 баллов). Звено *1* плоского механизма представляет собой два стержня *OB* и *OA*, жёстко соединённые в точке *O* под углом α друг к другу. Звено *1* равномерно вращается с угловой скоростью ω_1 рад/с вокруг оси шарнира *O*, которая перпендикулярна к плоскости угла *AOB*, при этом стержень *OB* скользит по неподвижному прямолинейному стержню *DE*, принадлежащему плоскости *AOB* и находящемуся от оси шарнира *O* на расстоянии *H*. Шарниром *A*, ось которого перпендикулярна плоскости *AOB*, к звену *1* присоединён стержень *AC*. В точке *M* три стержня (*OB*, *AC* и *DE*) перехвачены колечком бесконечно малого размера. Найти угловую скорость ω_2 звена *2* в указанном на рисунке положений, если $H = \sqrt{3}$ м, $\alpha = 60°$, $OA = 2$ м, $\omega_1 = 2$ рад/с.



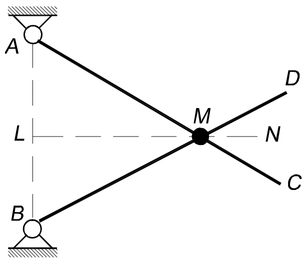
30 (РСФСР, 1989, 3 балла). Прикреплённая к точке A рычага OA нить ABC втягивается в отверстие B с постоянной скоростью v_C. Определить угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 рычага OA в данном положении системы $OA = r$, φ = 90°, α = 30°.



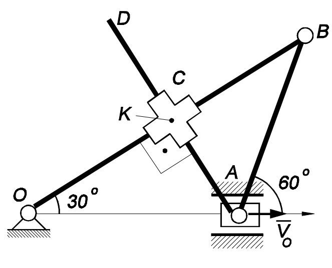
31 (БССР, 1985). Стержень OA вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. На стержень насажено колечко M, скользящее по проволоке KOB, неподвижно закреплённой в плоскости xOy. Абсолютная скорость колечка постоянна и равна ωl. По какой кривой изогнута проволока? Определить также абсолютное ускорение колечка.



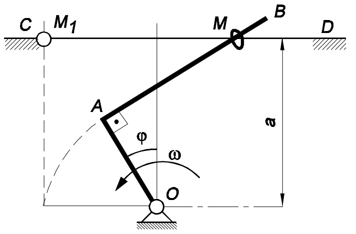
32 (Л., 1982). По прямой LN, равноудалённой от неподвижных точек A и B с постоянной скоростью v движется колечко M, соединяющее стержни AC и BD, вращающиеся вокруг точек A и B, соответственно. Определить скорость и ускорение колечка M относительно стержня AC в момент, когда $AM = AB = a$ см, а также угловое ускорение стержня AC.



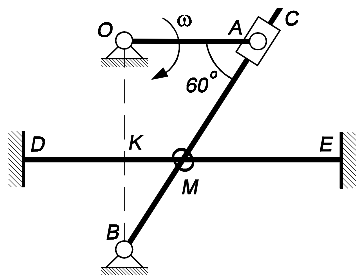
33 (Брянск. ин-т транспортн. машиностр., 1987). Ползун A кривошипно-ползунного механизма движется со скоростью v вдоль горизонтальной прямой Ox. С ползуном шарнирно связан стержень AD, при этом муфта C может скользить одновременно вдоль стержней OB и AD так, что угол OCA всё время равен 90°. Определить скорость точки K муфты в данном положении, если $\angle BOx$ = 30°, $\angle BAx$ = 60°. Найти также положение МЦС крестообразной муфты C (построением и расчётом).



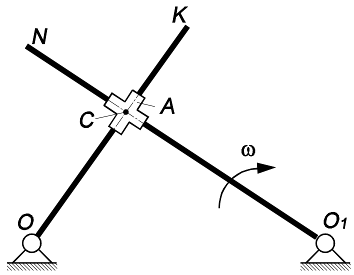
34 (Омск. политехн. ин-т, 1983). Около неподвижной точки O равномерно вращается с угловой скоростью ω изогнутый под прямым углом стержень OAB. Стержень проходит через колечко M, скользящее по неподвижной прямой CD, находящейся от точки O на расстоянии a. Какова скорость колечка в тот момент, когда прямая AB перпендикулярна CD?



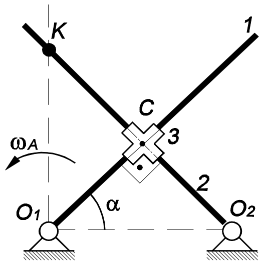
35 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Кривошип $OA = r$ вращается с постоянной угловой скоростью ω. Определить для данного положения механизма абсолютную скорость и абсолютное ускорение колечка M, которое может скользить одновременно вдоль кулисы BC и неподвижной горизонтальной прямой DE; $OK = KB$.



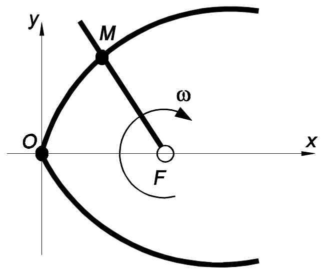
36 (Тульск. политехн. ин-т, 1983). Найти геометрическое место мгновенных центров ускорений крестовины A при ω = const; $\angle O_1CO$ – прямой.



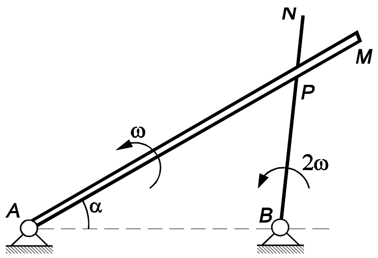
37 (Тульск. политехн. ин-т, 1988). Найти построением МЦС крестовины. Зная в данный момент угловую скорость ω_1 = 2 $с^{-1}$, расстояние O_1C = 10 см и угол α = 60°, определить скорость точки K, принадлежащей звену *3*. Стержни *1* и *2* перпендикулярны.



38 (Новочеркасск. политехн. ин-т, 1984). Определить, как функции времени величины скорости и полного ускорения точки M пересечения параболы $y^2 = 2\,px$ с прямой, проходящей через фокус параболы и вращающейся вокруг него с постоянной угловой скоростью ω. В начальный момент прямая совпадала с осью Ox.

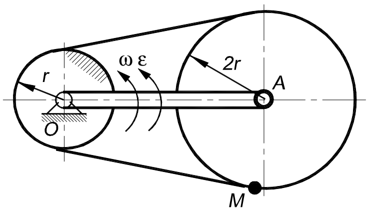


39 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1987). Две прямые AM и BN вращаются вокруг точек A и B в одну сторону с угловыми скоростями ω и 2ω. В начальном положении обе прямые совпадали с направлением прямой AB. Определить, какую траекторию описывает точка их пересечения, а также скорость и положение этой точки при α = 30°.

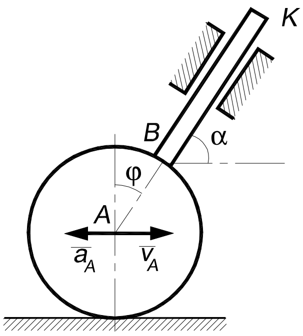


5.3. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИСКОВ И ПЛАСТИН

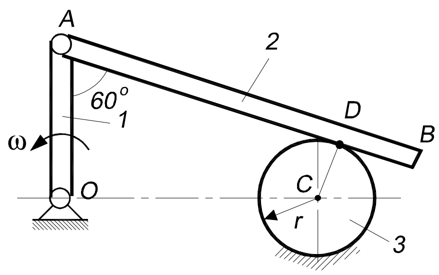
1 (СССР, 1981, 5 баллов). Кривошип OA длины l вращается с угловым ускорением ε вокруг оси O неподвижной шестерёнки и несёт на конце A ось другой шестерёнки. Шестерёнки охватываются цепью. Найти скорость и ускорение точки M подвижной шестерёнки в тот момент, когда $AM \perp OA$ и угловая скорость кривошипа равна ω.



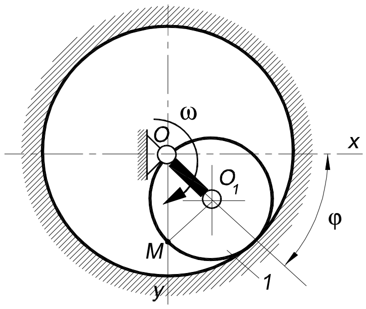
2 (СССР, 1982, 5 баллов). Диск радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости и выталкивает вверх вдоль направляющего паза тонкий стержень BK. При этом стержень перемещается в плоскости движения диска под углом α к горизонту. В данном положении системы известны также скорость v_A и ускорение a_A центра диска и угол φ. Определить скорость и ускорение стержня в указанном положении системы.



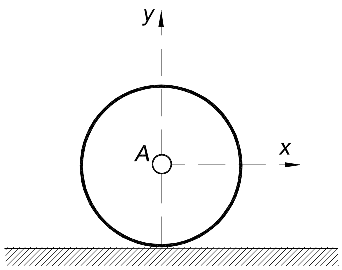
3 (СССР, 1984, 9 баллов). В плоском механизме кривошип OA связан шарнирно со звеном 2 стержнем AB, движущимся в плоскости чертежа и безотрывно скользящим по поверхности неподвижного цилиндра радиуса r. Найти радиус кривизны траектории точки D звена 2 в положении, указанном на рисунке, если $OA = R$, $OA \perp OC$.



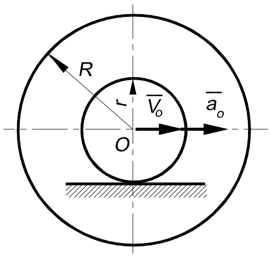
4 (СССР, 1986, 6 баллов). Кривошип OO_1 длины r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O. При этом колесо 1 радиуса r, приводимое в движение кривошипом, катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса $R = 2r$. Определите траекторию точки M, а также её скорость и ускорение в зависимости от угла φ. При $\varphi = 0$ точка M находится в таком положении, что $\angle OO_1M = \gamma$.



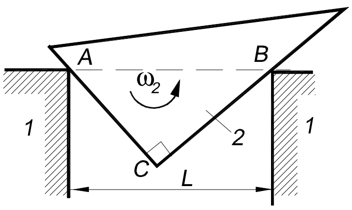
5 (РСФСР, 1984, 3 балла). Колесо радиуса R катится без скольжения в вертикальной плоскости по горизонтальному рельсу. Найти для всевозможных законов движения центра O геометрическое место мгновенных центров ускорений колеса в системе координат Oxy, которая перемещается поступательно вместе с точкой O.



6 (РСФСР, 1985, 5 баллов). Двухступенчатый цилиндр катится без скольжения по неподвижной плоскости, имея в данный момент скорость и ускорение центра v_0 = 1 м/с, a_0 = 1 м/с^2. Найти в плоскости движения точки O другую точку цилиндра, имеющую по модулю такие же скорость v_0 и ускорение a_0 ($R = 2r = 2$ м).

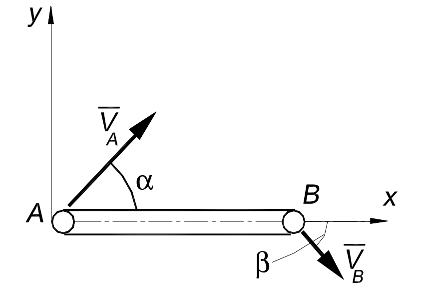


7 (РСФСР, 1986, 5 баллов). Пластина *2* вращается равномерно в плоскости чертежа, и стороны её прямого угла скользят по рёбрам паза AB. Определить скорость мгновенного центра ускорений и ускорение мгновенного центра скоростей пластинки.

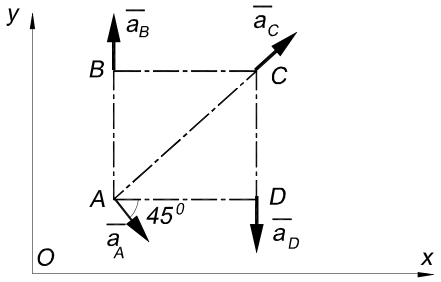


8 (РСФСР, 1988, 3 балла). Описать особенность расположения векторов ускорений точек катка, перекатывающегося по горизонтальной прямой без проскальзывания с постоянной угловой скоростью. Найти геометрическое место его точек, у которых в данный момент времени радиусы кривизны траекторий $\rho = \infty$.

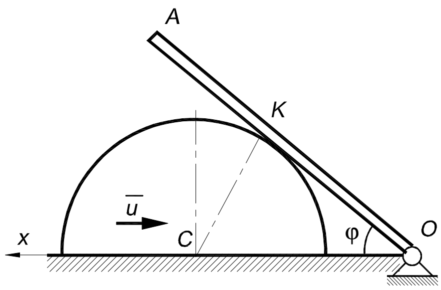
9 (РСФСР, 1990, 5 баллов). Тонкий стержень AB длиной $2l$ м движется по инерции в плоскости xy. Положение стержня и направление скоростей точек A и B в начальный момент времени указаны на рисунке, при этом $v_A = \sqrt{3}$ м/с, α = 60°, β = 30°. Определить положение точки A (x_A, y_A) стержня в тот момент, когда её ордината будет иметь первый максимум.



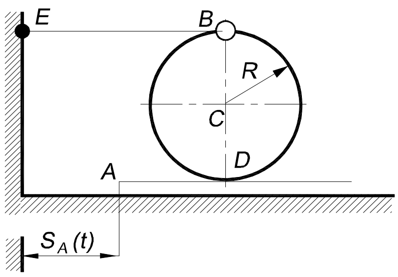
10 (БССР, 1986). Точки A, B, C, D движутся в плоскости xOy. В некоторый момент времени они являются вершинами квадрата со стороной l. Укажите, какие из точек A, B, C, D могут принадлежать одной плоской фигуре. Определить угловую скорость и угловое ускорение плоской фигуры. Ускорения точек A, B, C, D равны a_A, a_B, a_C, a_D.



11 (БССР, 1988). Полуцилиндр радиуса r, двигаясь прямолинейно с постоянной скоростью u, приводит во вращение опирающийся на него стержень OA длины l. Определить скорость v_A и ускорение a_A конца стержня в момент, когда $\varphi = 45°$.

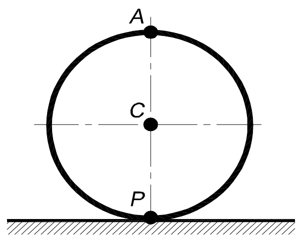


12 (Груз. ССР, 1986). Пластинка A перемещается по горизонтальной плоскости по закону $S_A(t) = 0{,}1\ (t^4 + 7{,}5t)$ м. На пластинке находится каток радиуса $R = 0{,}2$ м, обмотанный нерастяжимой нитью, конец E которой закреплён на стене. Считая, что скольжение катка по пластине и нити по катку отсутствует, определите в момент времени $t = 0{,}5$ с ускорения точек B, C, D катка.

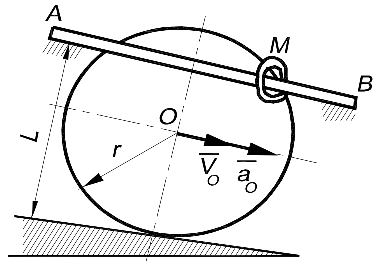


13 (Узб. ССР, 1983). Два зубчатых колеса: 1 – радиуса $r_1 = 0{,}75$ м и ступенчатое 2 – радиусов $r_2 = 0{,}5$ м и $R_2 = 1$ м помещены между неподвижной 3 и подвижной 4 зубчатыми рейками, как показано на рисунке. Через какое время колесо 1 столкнётся с колесом 2, если рейка 4 двигается со скоростью $v = 0{,}5$ м/с.

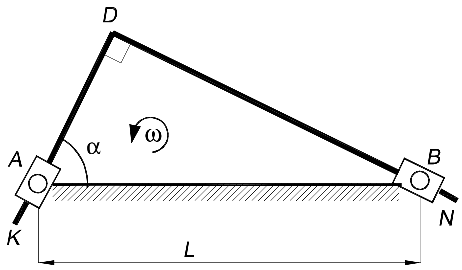
14 (УССР, 1985). Колесо, радиус которого R, катится без скольжения по прямолинейному неподвижному рельсу. Считая известными в данный момент времени ускорения центра колеса $a_C = a_1$ и точки касания колеса с рельсом $a_P = a_2$, найти в этот момент времени скорость и ускорение точки A.



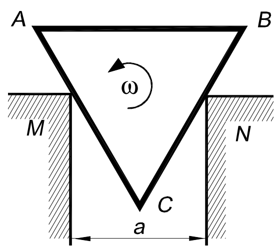
15 (Л., 1983, 3 балла). Обруч радиуса r, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости, приводит в движение колечко M, надетое на обруч и неподвижный стержень AB, параллельный наклонной плоскости и отстоящий от неё на расстоянии l. Пренебрегая размерами колечка M, определить его скорость и ускорение относительно обруча, если скорость и ускорение центра обруча – v_0 и a_0.



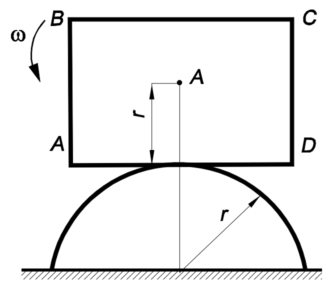
16 (Л., 1984). Два стержня KD и ND, жёстко соединённые в точке D, движутся в плоскости так, что все время проходят через муфты, качающиеся около неподвижных точек A и B, соответственно. Определить величины скорости и ускорения точки D в указанном на рисунке положении, если $AB = l$, $\angle DAB = \alpha$, $\omega = \text{const} = \omega_0$.



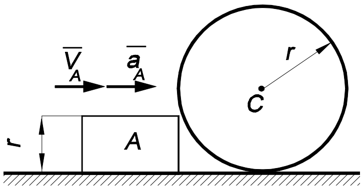
17 (М., 1977). Равносторонний треугольник ABC движется в своей плоскости, скользя боковыми сторонами по опорам M и N. Угловая скорость треугольника постоянна. Для указанного на чертеже положения определить ускорение точки C, если расстояние $MN = a$ и $CM = CN$.



18 (М., 1982). Пластинка $ABCD$ обкатывает без скольжения окружность радиусом r, причём угловая скорость ω пластинки постоянна. Доказать, что мгновенный центр ускорений пластинки находится в точке Q.

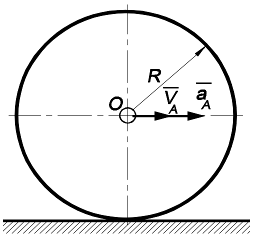


19 (М., 1982). Катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости цилиндр радиуса r контактирует с брусом A, который скользит по плоскости. Пусть скорость бруса v_0, ускорение a_0. Найти скорость и ускорение точки бруса, контактирующей с цилиндром, относительно цилиндра.

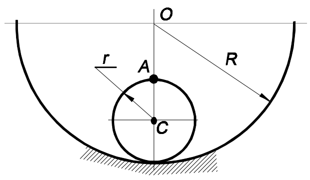


20 (Белорусск. политехн. ин-т, 1984). Диск радиуса R катится без скольжения по горизонтальной прямой. Скорость его центра постоянна. Определить геометрическое место точек диска, для которых направления скорости и ускорения совпадают.

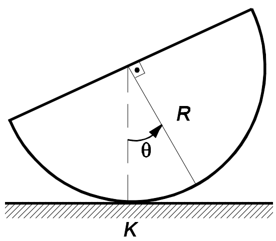
21 (Брянск. ин-т транспортн. машиностр., 1988). Дано: $R = 1$ м, $v_0 = 2$ м/с, $a_0 = 4$ м/с. Колесо катится без скольжения. Определить скорости и ускорения точек обода, которые равноудалены от МЦС и МЦУ колеса.



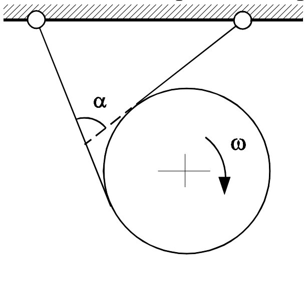
22 (Иркутск. политехн. ин-т, 1983). Колесо радиусом r катится без скольжения внутри неподвижного колеса радиуса R ($R > r$). Найти ускорение мгновенного центра скоростей подвижного колеса, если скорость его центра C постоянна и равна v. Найти также ускорение наивысшей точки колеса (точки A).



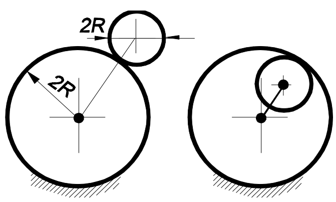
23 (МАТИ, 1977). Полуцилиндр, совершая качение без скольжения, колеблется по закону $\theta = \sin(pt)$. Определить ускорение точки контакта в те моменты, когда $\theta = 0$ и $\theta = 1$ рад. Радиус полуцилиндра равен R.



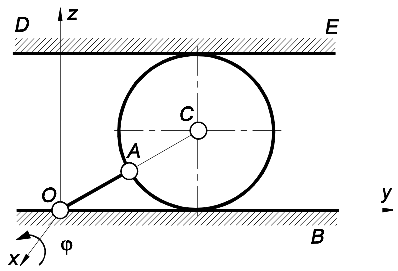
24 (МАТИ, 1980). Тяжёлый диск радиусом R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены. Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?



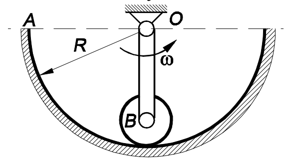
25 (МАТИ, 1983). Диск радиуса R обкатывает неподвижный диск радиуса $2R$, и центр малого диска совершает один оборот вокруг центра большого диска первый раз снаружи, а второй раз изнутри. Сколько раз обернётся малый диск вокруг своей оси в первом и во втором случаях?



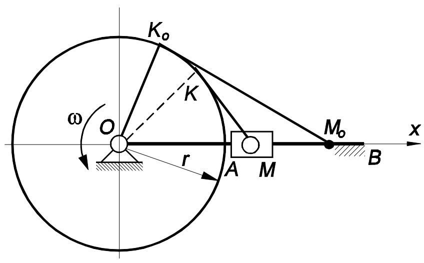
26. (Омск. политехн. ин-т, 1984). Стержень *OA* длиной $2R$ вращается вокруг своего конца *O* по закону $\varphi = \pi/3 \sin(\pi t/3)$. Другой его конец закреплён шарниром на окружности диска радиуса *R*, который может свободно скользить между двумя гладкими параллельными направляющими *OB* и *DE*. Найти скорость и ускорение центра *C* диска в момент времени $t = 1/2$ с, $R = 9$ см.



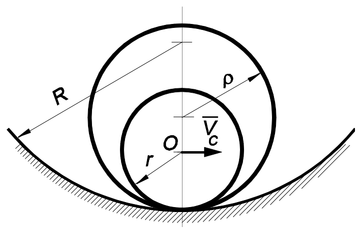
27 (Омск. политехн. ин-т, 1984). В круге радиуса *R* ведётся кривошипом длиной *l* малый круг, катящийся по большому без скольжения. Дана угловая скорость ω кривошипа. Найти на ободе малого круга такую точку *M*, чтобы направление её скорости v проходило бы через точку *A*, и определить величину v в момент, когда $AO \perp OB$.



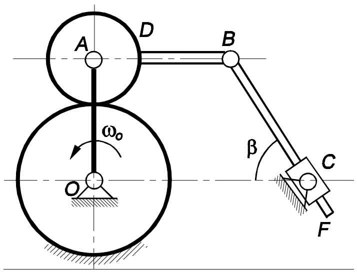
28 (Омск. политехн. ин-т, 1985). Шкив радиуса *r* вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. На шкив намотана нить, к свободному концу которой прикреплён ползун *M*, движущийся по стержню *AB*, продолжение которого пересекает ось шкива под прямым углом в точке *O*. Определить скорость v ползуна в зависимости от расстояния $OM = x$.



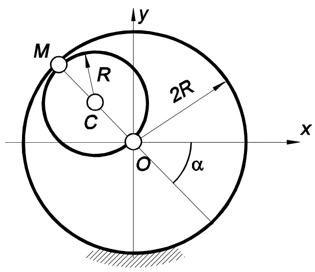
29 (Омск. политехн. ин-т, 1985). Диск радиуса *r* катится внутри цилиндрической полости радиуса *R*, прижимая тонкий обруч радиуса ρ ($r < \rho < R$). Найти угловую скорость обруча, если линейная скорость центра диска равна v_0. Проскальзывание при движении отсутствует.



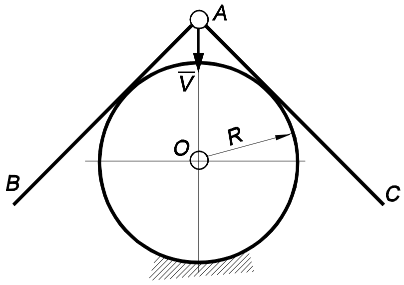
30. (Омск. политехн. ин-т, 1986). Кривошип *OA* планетарно-кулисного механизма, вращаясь вокруг оси *O* с угловой скоростью ω_0, приводит в движение сателлит *D*, связанный шарнирно со стержнем *BF*. Стержень *BF* в своем движении всё время проходит через неподвижную точку *C*. Определить величину скорости точки стержня *BF*, совпадающей в данный момент с точкой *C*, если в этот момент кривошип *OA* занимает вертикальное положение, угол $\varphi = 30°$, а угол $BAO = 90°$. Радиус неподвижной шестерни – $2r$, подвижной – r, $AB = r\sqrt{3}$.



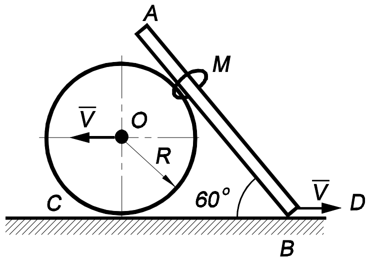
31 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988). Окружность радиуса R катится без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса $2R$, при этом скорость её центра постоянна и равна v. Найти уравнение траектории произвольной точки M подвижной окружности, а также скорость и ускорение этой точки в произвольный момент времени. В начальный момент времени точка M совпадает с точкой M_0 касания окружностей.



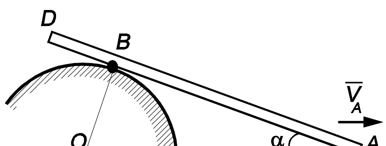
32 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Два стержня AB и AC связаны шарниром A и касаются неподвижного круга с центром в точке O и радиусом R. Шарнир A движется по прямой AO с постоянной скоростью v. Найти угловые скорости и угловые ускорения стержней в тот момент, когда $AO = 2R$.



33 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Обод радиусом R катится без скольжения по горизонтальной прямой с постоянной скоростью v его центра O. Стержень AB, всё время касаясь обода, движется в плоскости обода так, что конец стержня B скользит по прямой CD с той же постоянной скоростью v в противоположную сторону. Обод и стержень в точке касания соединены маленьким колечком M. Определить при $\alpha = 60°$ угловую скорость и угловое ускорение стержня, скорости колечка относительно обода и стержня, абсолютные скорость и ускорение колечка.

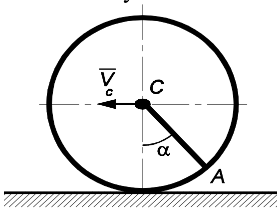


34 (Тульск. политехн. ин-т). Стержень AD движется в вертикальной плоскости так, что конец A его скользит со скоростью v_A по горизонтальной прямой OA, а другой точкой B касается неподвижной полуокружности радиуса R. Определить ускорение конца O стержня в тот момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α; $AD = l$.

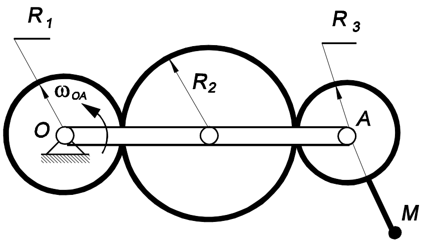


35 (Тульск. политехн. ин-т, 1985). Колесо катится без проскальзывания по прямолинейной направляющей. Доказать, что радиус кривизны траектории любой точки M, лежащей на ободе колеса, равен удвоенному расстоянию от этой точки до мгновенного центра скоростей.

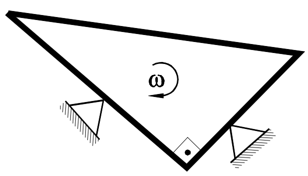
36 (Тульск. политехн. ин-т. 1987). Колесо катится без проскальзывания, скорость центра колеса постоянна, радиус кривизны траектории точки A равен диаметру колеса. Найти угол α.



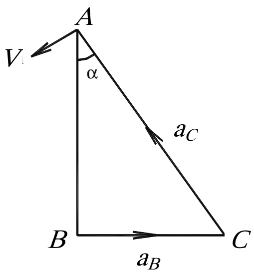
37 (Тульск. политехн. ин-т, 1987). Как связаны между собой размеры R_1, R_2, R_3, AM звеньев механизма, если точка M движется по прямой?



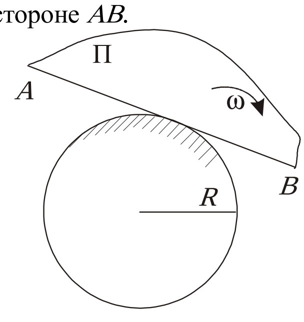
38 (Тульск. политехн. ин-т, 1988). Прямоугольный треугольник движется так, что его катеты скользят по неподвижным направляющим, при этом угловая скорость ω постоянна. Найти МЦС и МЦУ треугольника.



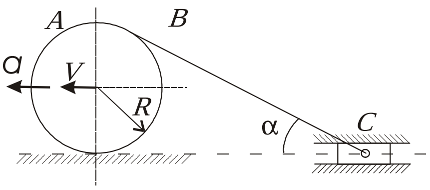
39 (СНГ, 1992, 3 балла). Прямоугольный треугольник ABC со стороной $AB = \sqrt{3}$ (м) и углом $\alpha = 30°$ при вершине A движется в плоскости так, что $a_B = a_C = 1$ м/с^2, а $v_A = 10$ м/с. Ускорения точек B и C направлены по сторонам треугольника, а скорость точки A перпендикулярна AC. Определить скорости точек B и C, если известно, что они не превышают по модулю скорости точки A.



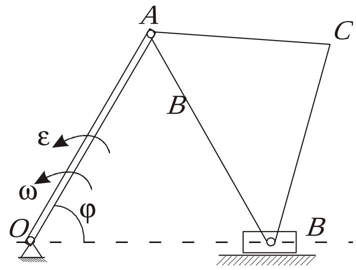
40 (Россия, 1996, 5 баллов). Полуплоскость П перекатывается без скольжения по неподвижному диску радиуса R. Движение полуплоскости происходит с постоянной угловой скоростью ω. Определить геометрическое место точек полуплоскости, ускорения которых параллельны стороне AB.



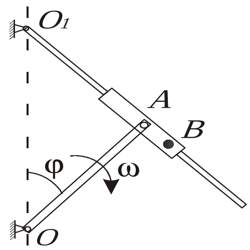
41 (Россия, 1996, 6 баллов). Диск радиуса R катится без скольжения по неподвижной плоскости. Скорость и ускорение центра диска в данный момент времени равны, соответственно, v и a. Определить скорость и ускорение конца B нити, намотанной на диск, если нить составляет с плоскостью угол α.



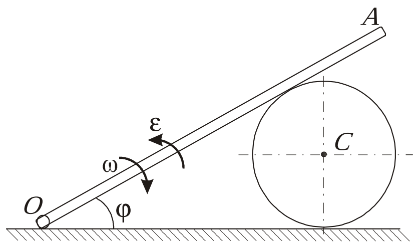
42 (Россия, 1999, 3 балла). В кривошипно-ползунном механизме, изображённом на рисунке, $OA = AB = l$, а шатун ABC представляет собой равносторонний треугольник. В заданном положении кривошип OA имеет угловую скорость ω и угловое ускорение ε. Определить ускорение точки C шатуна относительно кривошипа и её ускорение Кориолиса.



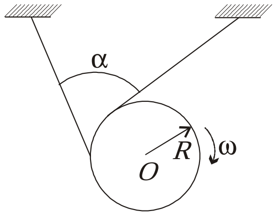
43 (Россия, 2000, 4 балла). Определить скорость и ускорение точки B кулисного камня механизма в положении, определяемом углом φ, если длина кривошипа $OA = r$, расстояние между осями вращения кривошипа и кулисы $O_1O = r$ и $AB = r/2$. Угловая скорость кривошипа ω = const.



44 (Россия, 2000, 3 балла). Стержень OA вращается в плоскости рисунка вокруг точки O с угловой скоростью ω и угловым ускорением ε, выталкивая диск радиуса R, движущийся в этой плоскости. Определить скорость и ускорение центра диска C в зависимости от угла наклона стержня φ.

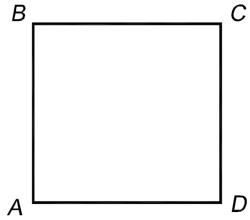


45 (Урал, Оренбург, 2000, 4 балла). Тяжёлый диск радиуса R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него и расположенных в его плоскости. Свободные концы нитей закреплены. Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?

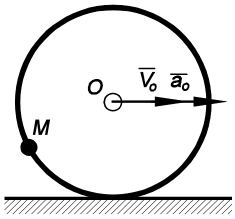


46 (СССР, 1986, 4 балла). Известны координаты двух точек A (1, –2, –3) и B (–1, 4, 5), скорости которых равны v_A (5, 3, 2) и v_B (–7, 3, –1). Могут ли точки A и B принадлежать одному твёрдому телу?

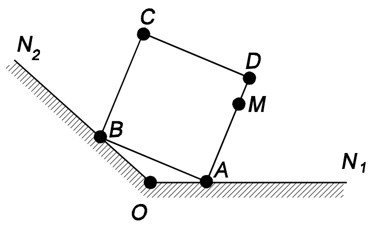
47. (СССР, 1989, 6 баллов). Квадратная пластинка $ABCD$ со стороной $2l$ движется в своей плоскости. Ускорения её вершин A, B, C равны, соответственно, $a_A = a$, $a_B = a$, $a_C = a\sqrt{5}$, а угловая скорость равна ω. Определить ускорение вершины D и угловое ускорение пластинки.



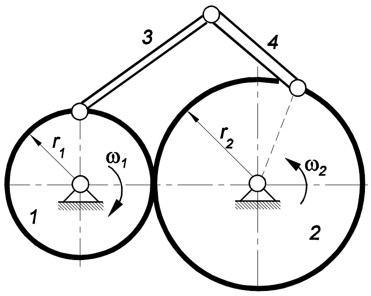
48 (Тамбов, ТГТУ, 1995, 7 баллов). Диск радиуса r катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Скорость и ускорение центра O диска равны v_0 и a_0, соответственно. Найти ускорение такой точки M обода, для которой касательное и нормальное ускорения равны по модулю. Рассмотреть частный случай, для которого $\omega^2 = 2\varepsilon$.



49 (Тамбов, ТГТУ, 1995, 7 баллов). Квадрат $ABCD$ совершает плоское движение, касаясь вершинами A и B двух прямых ON_1 и ON_2, при этом $v_a = v = \text{const}$, $\angle N_1ON_2 = 120°$. Для положения квадрата, когда $OA = a = OB$, найти на стороне AD такую точку M, для которой ускорение относительно точки B будет направлено параллельно AB. Вычислить величину и указать направление абсолютного ускорения точки M.

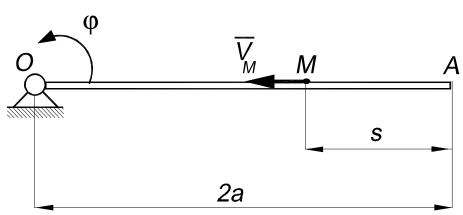


50 (Тульск. политехн. ин-т, 1987). Два диска 1 и 2, находясь во внешнем зацеплении, вращаются вокруг неподвижных осей O_1 и O_2. Стержни 3 и 4 шарнирно соединены между собой и в некоторых точках с дисками. Для произвольного положения механизма построением найти МЦС стержней 3 и 4.

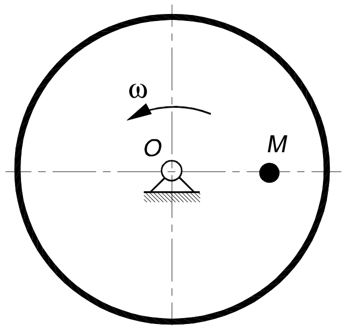


5.4. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

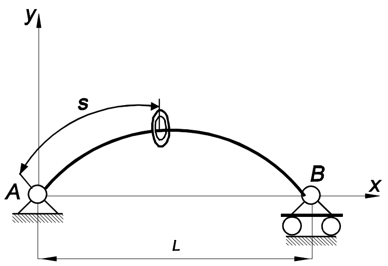
1 (РСФСР, 1982, 3 балла). Стержень длины $2a$ вращается вокруг оси O по закону $\varphi = e^{2t}$ рад. Из точки A к оси движется точка M. Каким образом должно изменяться во времени её расстояние AM для того, чтобы абсолютное ускорение точки M всегда было направлено по стержню?



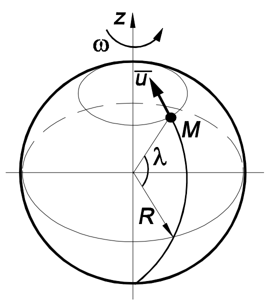
2 (Л., 1988). Точка M движется по радиусу вращающего диска согласно закону $OM = x_0 + v_0 t$. Определить закон вращения диска, если известно, что абсолютное ускорение точки M в любой момент времени направлено по радиусу; абсолютную скорость точки M в момент, когда $x = 2x_0$.

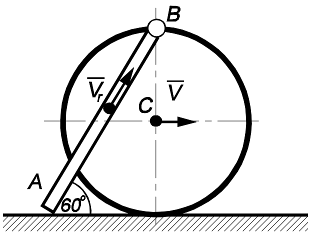


3 (Зап.-Сиб. зона, Новосибирск. ин-т. железнодорожн. трансп., 1990). По однородной балке (струне) AB длины l, изгибные колебания которой описываются уравнением $y(x, t) = a\cos(\omega t)\sin(\pi x/l)$, скользит кольцо M по закону $AM = s(t) = vt$. Определить составляющие скорости и ускорения кольца при условии $a << l$.

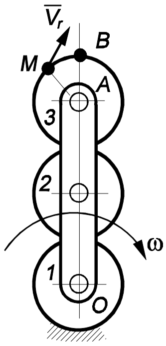


4 (Брянск, 1986). По поверхности Земли в плоскости меридиана движется точка M с некоторой постоянной, относительной скоростью u. Угловая скорость вращения Земли ω, радиус R. При каком значении u ускорение точки будет постоянным по модулю. Найти также это ускорение.



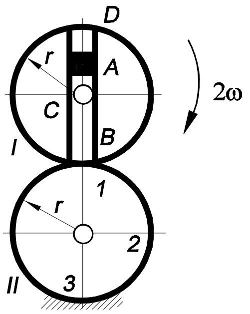


5 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости, при этом центр колеса имеет постоянную скорость v. С колесом шарнирно связан стержень AB длины $l > 2R$, второй конец которого скользит по той же плоскости. По стержню в направлении от A к B движется точка M с постоянной относительной скоростью $v_r = v$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в положении, показанном на рисунке, когда шарнир B совпадает с наивысшей точкой колеса, а стержень наклонён к горизонтальной плоскости под углом 60°; $MB = l/2$.

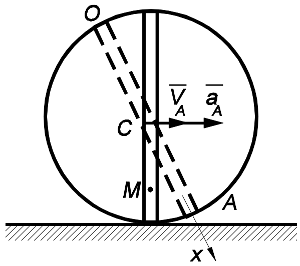


6 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Плоский механизм состоит из трёх зубчатых колес *1, 2, 3* одинакового радиуса R = 1 м. Колесо *1* неподвижно, колеса *2* и *3* приводятся в движение с помощью кривошипа *OA*, вращающегося с угловой скоростью ω = 1 рад/с. По ободу колеса *3* движется точка *M* с постоянной относительной скоростью v_r = 2 м/с. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение этой точки в момент времени, когда она совпадает с верхней точкой *B* колеса *3* (ω = const).

7 (Тольяттинск. политехн. ин-т, 1987). Диск *1* катится без скольжения по неподвижному диску 2 от начального положения *1* с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 2\omega$. Ползун *A* движется вдоль диаметра *BD* по закону $s(t) = CA = r\sin(\omega t)$. Определить и показать абсолютные ускорения ползуна для положений *2* и *3* диска.

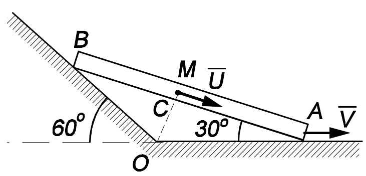


8 (Россия, 1993, 6 баллов). Диск радиусом R катится без скольжения в вертикальной плоскости. Через центр диска проходит тонкий канал, внутри которого из точки *O* в точку *A* в некоторые момент времени t_1 начинает двигаться равноускоренно точка *M*. К моменту времени t_2, когда канал впервые (после начала движения точки по каналу) занимает вертикальное положение, точка *M* проходит расстояние, равное 1,5R. Абсолютное ускорение точки *M* в этот момент времени направлено параллельно неподвижной плоскости, а скорость и ускорение центра *C* равны, соответственно: $v_C = U$, $a_C = U^2/R$. Определить закон движения точки *M* по каналу и её абсолютное ускорение при $t = t_2$, если начальная относительная скорость равна нулю, а значения t_1 и t_2 неизвестны.

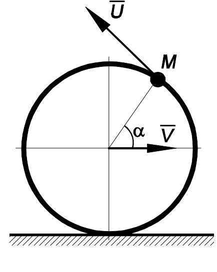


9 (Россия, 1994, 4 балла). Точка *M* движется в плоскости *xOy* согласно уравнениям: $x = t^2$, $y = t^2$. Плоскость *xOy* вращается с угловой скоростью $\omega = e^{-t}$ вокруг неподвижной оси, ей перпендикулярной и проходящей через начало координат. Определить абсолютное ускорение точки *M* в тот момент времени, когда оно впервые после начала движения направлено вдоль прямой, соединяющей точку *M* с началом координат.

10 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1992, 8 баллов). Стержень $AB = l$ движется в плоскости рисунка, касаясь своими концами двух неподвижных плоскостей, образующих между собой угол 120°. Скорость конца *A* постоянна и равна v. По стержню *AB* движется точка *M* с некоторой относительной скоростью *U*. Найти значение *U*, если известно, что абсолютное ускорение точки *M* в положении, совпадающем с серединой *C* стержня, направлено вдоль *AB*.

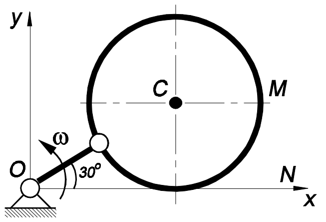


11 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1993, 8 баллов). Диск радиуса R катится по горизонтальной прямой без скольжения. Скорость центра *O* диска постоянна и равна v. По ободу диска в направлении, противоположном вращению диска, движется точка *M* с постоянной относительной скоростью *U*, равной по модулю v. Определить абсолютные скорость и ускорение точки *M* для положения её на диске, определяемом углом α, и вид траектории дальнейшего движения точки.

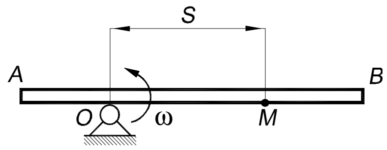


12 (Тамбов, ТГТУ, 1996, 8 баллов). Кривошип *OA* длиной *R* вращается вокруг неподвижной точки *O* с угловой скоростью ω. Обруч с центром в точке *C* и радиуса *R*, шарнирно соединённый в точке *A* с кривошипом, скользит по неподвижной прямой *ON*. По обручу с постоянной скоростью *U* движется точка *M* в направлении против часовой стрелки.

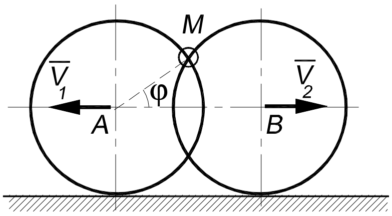
Для положения данного механизма, движущегося в плоскости xOy, когда $\angle AON = 30°$ и $CM \parallel ON$, найти абсолютные скорость и ускорение точки M.

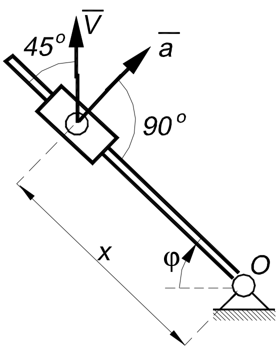


13 (СССР, 1988, 5 баллов). Прямая AB вращается в плоскости вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Вдоль прямой движется точка M так, что её абсолютная скорость и ускорение взаимно перпендикулярны. Определить абсолютные скорость и ускорение точки M, если в начальный момент времени $s_0 = b$, $\dot{s}_0 = 0$. Найти их численные значения при $b = 2$ см и $\omega = 3$ рад/с.



14 (СССР, 1989, 7 баллов). Два обруча радиуса r катятся без скольжения по направляющей в разные стороны. Скорости центров A и B обручей постоянны и равны, соответственно, v_1 и v_2. Определить ускорение кольца M, надетого на два обруча, в зависимости от угла φ.



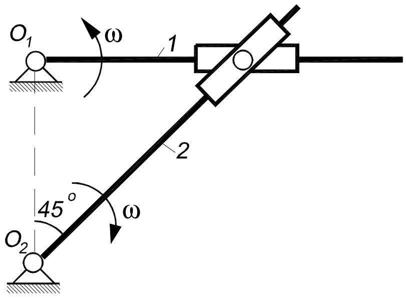


15 (РСФСР, 1985, 7 баллов). Определить закон относительного движения ползуна $x = = x(t)$ и закон вращения стержня $\varphi = \varphi\ (t)$ при условии, что векторы скорости v и ускорения a ползуна во всё время движения составляют со стержнем углы 45° и 90°, соответственно. Начальные условия движения: $t_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = \omega_0$, $x = x_0$.

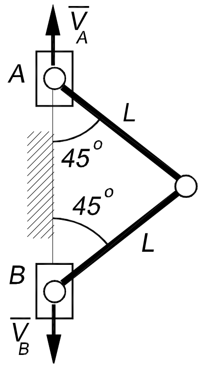
16 (Аз. ССР, 1984). Диск с прорезью для ползуна B равномерно вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 1$ с$^{-1}$ по ходу часовой стрелки. Кривошип OA равномерно вращается в обратном направлении с угловой скоростью $\omega_0 = 3$ с$^{-1}$. Считая, что $OA = r = 0{,}1$ м, $AB = 2r = 0{,}2$ м, определить абсолютные скорость и ускорение центра ползуна B в тот момент, когда угол между шатуном AB и кривошипом OA равен 90°.

17 (БССР, 1982). Движение центра тяжести снаряда задано уравнениями $x = v_0 t\cos\alpha$, $y = v_0 t\sin\alpha - gt^2/2$ (v_0, α, g – const). Снаряд вращается вокруг своей оси, совпадающей с касательной к траектории, с постоянной угловой скоростью ω_r. Определить в наивысшем положении снаряда величины абсолютных ускорений тех точек его поверхности, кориолисово ускорение которых максимально, если диаметр снаряда равен $2R$. Вращение Земли не учитывать.

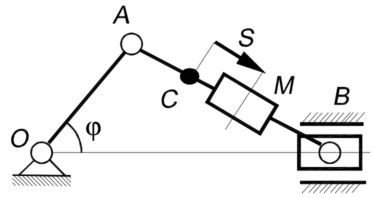
18 (БССР, 1984). Стержни *1* и *2*, расположенные в одной плоскости, вращаются вокруг центров O_1 и O_2 с равными по величине угловыми скоростями ω. Стержни соединены между собой системой шарнирно скреплённых ползунов, один из которых скользит вдоль стержня *1*, а второй – вдоль стержня *2*. Определить скорость точки M для положения, указанного на рисунке, если $O_1O_2 = l$.



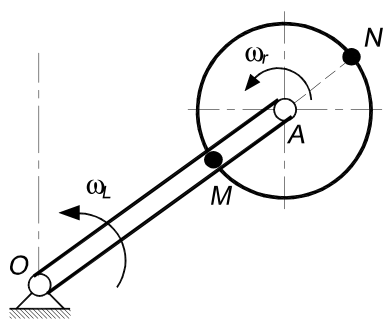
19 (БССР, 1984). Определить скорость и ускорение точки C плоского механизма в положении, указанном на рисунке, если известны скорости v_A и v_B, а ускорения точек A и B равны нулю.



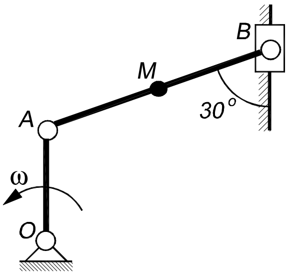
20 (БССР, 1986). Вдоль шатуна AB кривошипно-ползунного механизма совершает колебания муфта M по закону $CM = s = r\sin(\omega t)$. Кривошип OA вращается вокруг горизонтальной оси O по закону $\varphi = \omega t$. Определить модули абсолютной скорости и абсолютного ускорения муфты M при $t = 0$, если $OA = r$, $AC = CB = 2r$.



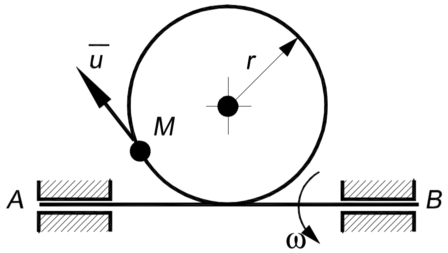
21 (Кирг. ССР, 1987). Кривошип OA радиуса $2r$ вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_e. На пальце A свободно надето колесо радиуса r, вращающееся с угловой скоростью ω_r против часовой стрелки. Определить величины и направления ускорений точек M и N колеса, находящихся на концах диаметра, совпадающего с осью кривошипа.



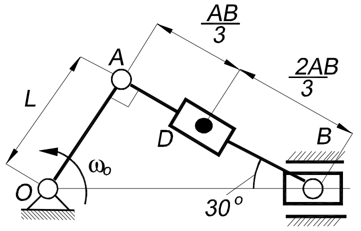
22 (Молд. ССР, 1987). По шатуну AB нецентрального кривошипно-шатунного механизма движется точка M с постоянной по величине относительной скоростью u. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω. Определить, при какой относительной скорости u абсолютная скорость точки M при её прохождении через середину шатуна AB будет горизонтальна в положении механизма, указанном на рисунке; величину абсолютного ускорения точки M в тот же момент времени при условии, что $\omega = \text{const}$, $OA = r$, $AB = l$, $l = 2r$.



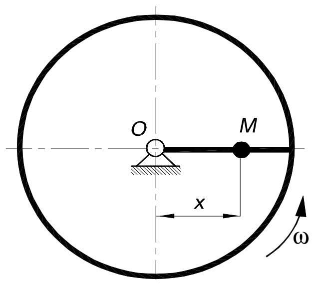
23 (Л., 1982). Окружность радиусом r вращается с постоянной угловой скоростью ω рад/с вокруг оси AB. По окружности равномерно с относительной скоростью u м/с движется точка M. Определить, абсолютное ускорение точки M в том положении, где её относительная и переносная скорости равны по величине, т.е. $\omega r = u$.



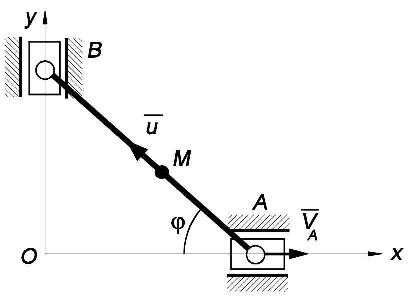
24 (Л., 1984). Определить постоянную относительную скорость ползуна D кривошипно-ползунного механизма в положении, указанном на рисунке, если известно, что абсолютное ускорение ползуна D в этот момент времени направлено вдоль шатуна AB. Угловая скорость ω_0 кривошипа постоянна.



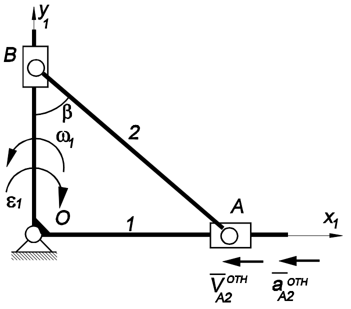
25 (Л., 1985). Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг центральной оси, перпендикулярной плоскости диска. Из центра O движется в радиальном направлении точка M. Её начальная относительная скорость равна v_0. Каково должно быть уравнение относительного движения точки $OM = x = x(t)$ для того, чтобы её абсолютное ускорение всё время было равно ускорению Кориолиса.



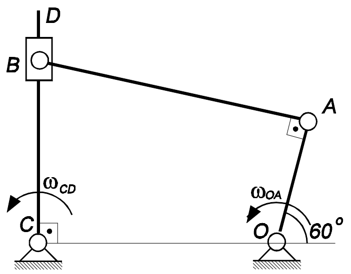
26 (Брянск. ин-т транспортн. машиностр., 1988). Прямолинейный стержень AB длиной $l = 1$ м скользит своими концами вдоль осей координат, при этом $v_A = 2$ м/с = const. Вдоль стержня в направлении от A к B движется точка M с постоянной относительной скоростью $v_r = 2$ м/с. Определить абсолютное ускорение точки M в тот момент, когда она окажется равноудалённой от МЦС и МЦУ стержня AB. Учесть, что в этот момент угол $\varphi = \pi/6$.



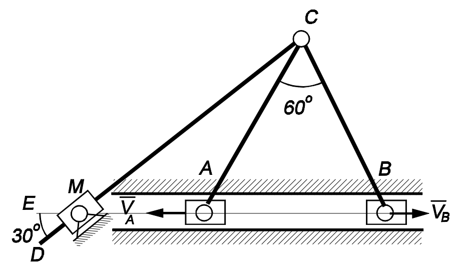
27 (МАТИ, 1985). Взаимно перпендикулярные направляющие Ox_1 и Oy_1 в плоском механизме вращаются замедленно вокруг оси шарнира O, которая перпендикулярна плоскости Ox_1y_1. Одновременно стержень AB скользит своими концами вдоль направляющих Ox_1 и Oy_1. Найти $v_{B2}^{\text{абс}}$ и $a_{B2}^{\text{абс}}$, если известны значения следующих величин: AB = 10 см, $\beta = 60°$, $v_{A2}^{\text{отн}}$ = 10 см/с, $a_{A2}^{\text{отн}}$ = = $20\sqrt{3}$ см/с^2, $\omega_1 = 2\sqrt{3}$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 12$ с$^{-2}$.



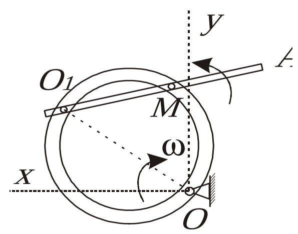
28 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1986). В механизме $OABC$ кривошипа ω_{OA} равна 1 с$^{-1}$. $OA = r = 1$ см, $CO = 2r$, $\angle AOK = 60°$; $OA \perp AB$, $DC \perp CO$. Определить угловую скорость кулисы CD, если $a_B^{\text{кор}} = 1$ см/с^2, $0{,}8 < V_B^{\text{отн}} < 3$ см/с.



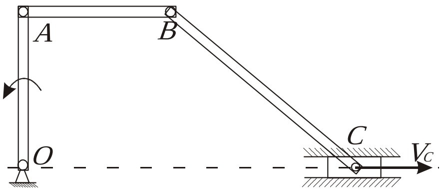
29 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988). Ползуны A и B движутся по горизонтальной направляющей EN в разные стороны с постоянными скоростями $v_A = v$ и $v_B = 2v$. Определить для данного положения механизма угловую скорость и угловое ускорение стержня CD, который может скользить в муфте M и поворачиваться вместе с ней вокруг неподвижной точки O; $AC = CB = l$.



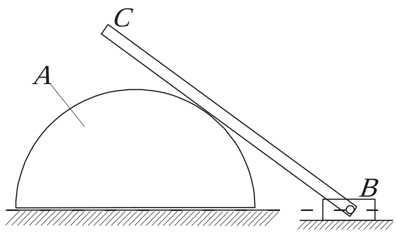
30 (Россия, 1995, 5 баллов). Кольцеобразный жёлоб радиусом r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку O_1, лежащую на оси жёлоба. Кривошип OA, имеющий продольную прорезь, вращается в противоположном направлении с угловой скоростью 2ω относительно желоба вокруг точки O, находящейся на одном диаметре с точкой O_1 и жёстко связанной с жёлобом. Стержень (штифт) M, перпендикулярный плоскости кольца, скользит одновременно в жёлобе и прорези кривошипа. Пренебрегая толщиной кольца, определить величину ускорения штифта M как функцию угла поворота диаметра O_1O (для углов, меньших π/4), если в начальный момент времени прямые O_1O и OA совпадали.



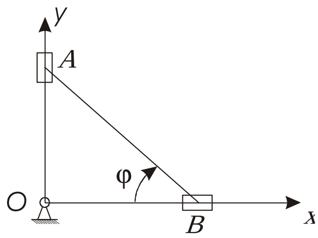
31 (Россия, 1995, 5 баллов). Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа OA, равной ему длины шатуна AB и вдвое большего их шатуна BC. Скорости точек A и C равны, постоянны и направлены в разные стороны. В положении, указанном на чертеже, когда кривошип OA расположен вертикально, а шатун AB ему перпендикулярен, определить отношение угловых ускорений шатунов AB и BC.



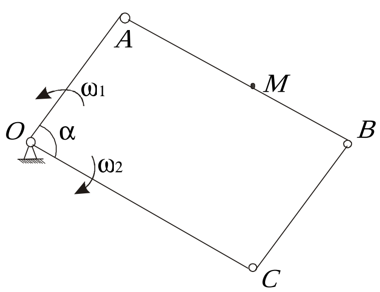
32 (Россия, 1999, 6 баллов). Полукруглый толкатель A радиуса R = 2 м движется ускоренно по горизонтальной плоскости со скоростью v = $\sqrt{2}$ м/с и ускорением $a = \sqrt{2}$ м/с^2. Навстречу ему, так же ускоренно с теми же скоростью и ускорением, движется ползун B. Ползун соединён шарнирно со стержнем BC длиной $2R$, который опирается на толкатель. Определить скорость и ускорение точки C в положении механизма, при котором стержень образует с горизонталью угол 45°.



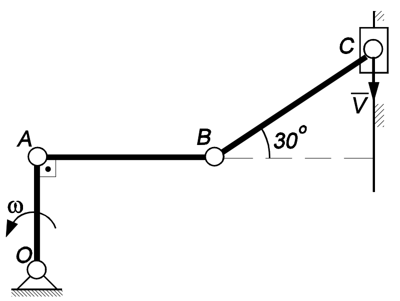
33 (Урал, Оренбург, 2000, 5 баллов). Линейка AB длиной l скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным направляющим Ox и Oy, вращающимся вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Закон изменения угла в относительном движении $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Для точки M, делящей AB в отношении 1 : 3, определить траекторию и скорость в абсолютном движении. Рассмотреть два случая: 1) когда вращение происходит против хода часовой стрелки и 2) по ходу часовой стрелки.



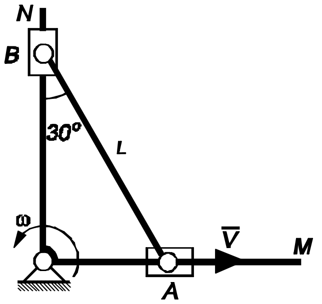
34 (Урал-Поволжье, Оренбург, 2001, 5 баллов). В шарнирном параллелограмме стержень OA вращается в плоскости параллелограмма с постоянной угловой скоростью ω_1, а стержень OC – с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной точки O. По стержню AB движется равномерно точка M со скоростью v. $OA = a$, $OC = b$. Определить величину и направление абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M в зависимости от угла α и от расстояния $AM = x$.



35 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1992, 8 баллов). Для изображённого на рисунке плоского механизма дано: v_C = v = const, ω_{OA} = ω = = const; $OA = OB = r$, $BC = 2r$. Определить ω_{AB}, ω_{BC}, ε_{AB}, ε_{BC}.

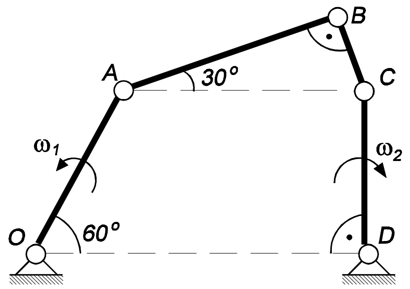


36 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1993, 7 баллов). Изогнутый под прямым углом стержень *MON* вращается с угловой скоростью ω вокруг оси *O*. Стержень *AB* длиной *l* на концах имеет шарнирно закреплённые ползуны, скользящие по сторонам прямого угла, при этом относительная скорость ползуна *A* равна v. Найти положение мгновенного центра скоростей *C* стержня *AB* и вычислить расстояние *OC*.

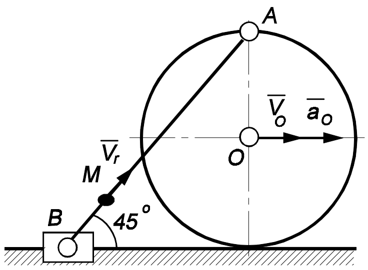


37 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1993, 8 баллов). Для данного положения механизма определить скорость точки *B* и угловые скорости звеньев *AB* и *BC*, если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $OA = l$, $AB = a$.

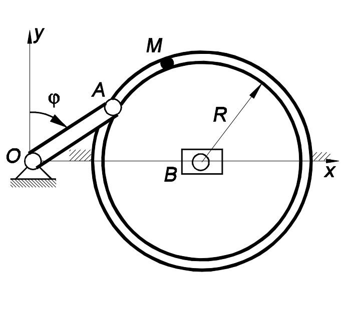
O



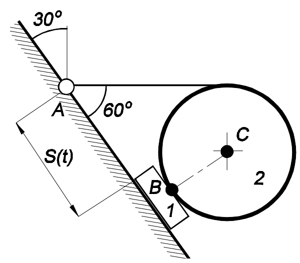
38 (Брянск. ин-т транспортн. машиностр., 1987). Диск радиуса R = 1 м катится без скольжения по прямолинейному рельсу, при этом в данный момент времени скорость его центра *O* равна v_0 = 4 м/с и ускорение a_0 = 2 м/с. В точке *A* шарнирно с диском скреплён прямолинейный стержень *AB*, конец *B* которого перемещается вдоль того же рельса. По стержню *AB* в направлении от *B* к *A* движется точка *M*. Найти расстояние *AM*, при котором в показанном на рисунке положении системы абсолютное ускорение точки *M* будет направлено вдоль стержня *AB*.



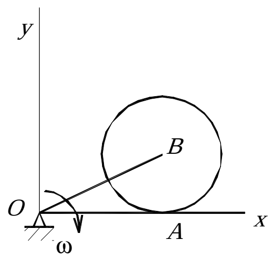
39 (МВТУ, 1986). В кривошипно-шатунном механизме шатун выполнен в виде диска радиуса $R = OA$ = 0,2 м с центром на ползуне *B*. К ободу диска приварена трубка, в которой может перемещаться шарик (точка) *M*. Определить абсолютные скорость и ускорение шарика при t_1 = 1 с после начала движения. Кривошип вращается по закону $\varphi = (t^2 + 2{,}14)/2$ радиан, если вести отсчёт от вертикали, как это показано на рисунке, а шарик движется так, что расстояние от центра *A* изменяется согласно уравнению $AM = (\pi + t^2/2 + t - 1{,}5)/5$ м.



40 (Томск. политехн. ин-т, 1985). Пластина *1* движется по наклонной плоскости по закону $s(t) = 0{,}1t^2 + 0{,}4t$ (м). По пластине катится без скольжения каток *2* радиуса R = 0,2 (м), обмотанный нерастяжимой нитью. Конец *A* нити закреплён на плоскости. В момент времени t_1 = 1 (с) механизм занимает положение, указанное на рисунке. Определить угловую скорость и угловое ускорение катка *2* в момент времени t_1.

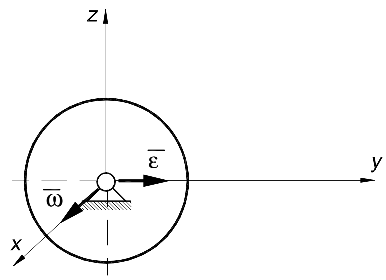


41 (СНГ, 1992, 5 баллов). Прямолинейный стержень OA вращается с постоянной угловой скоростью ω в плоскости xOy. По стержню в той же плоскости катится без проскальзывания диск радиуса R так, что расстояние от центра диска до оси вращения стержня меняется по закону: $OB = R\ (1 + t)$. Определить как функцию времени проекцию абсолютного ускорения центра B диска на прямую OB и координаты мгновенного центра скоростей диска в его абсолютном движении в системе координат, связанной со стержнем OA.

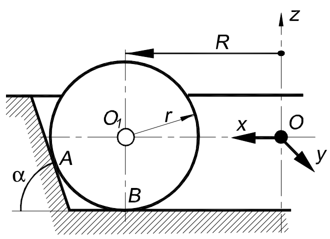


5.5. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

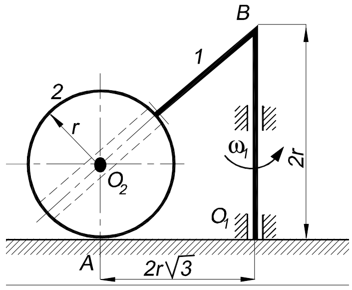
1 (СССР, 1989, 6 баллов). Шар радиуса R, закреплённый шарнирно в центре, совершает сферическое движение. Его угловая скорость ω и угловое ускорение ε направлены, как указано на чертеже, $\varepsilon = \omega^2$. Определить на поверхности шара точки, ускорения которых параллельны ω.



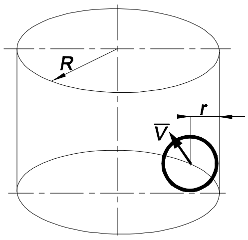
2 (РСФСР, 1988, 5 баллов). Шарик перекатывается без проскальзывания в точках контакта A и B с конической поверхностью и плоскостью, вращаясь вокруг оси z со скоростью ω. Найти точку M шарика, имеющую наибольшую абсолютную скорость и вычислить v_M. Найти также ускорение точки M относительно центра шарика, абсолютные ускорения точек A и B, угловое ускорение шарика. Дано: $r = 1$ см, $\alpha = 60°$, $R = 3/(3 - \sqrt{3}\,)$ см, $\omega = \sqrt{2/(2-\sqrt{3})}$ рад/с = const.



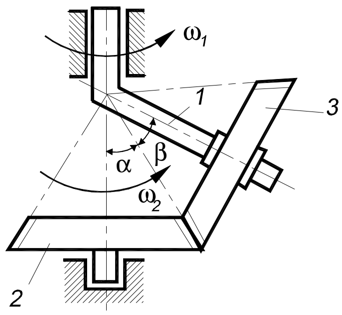
3 (РСФСР, 1989, 5 баллов). Шар *2* вращается вместе с вертикальной осью O_1B и перекатывается по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Определить максимальную относительную скорость (разность абсолютных скоростей) двух точек шара. Дано: r, O_1B, O_1A, ω_1.



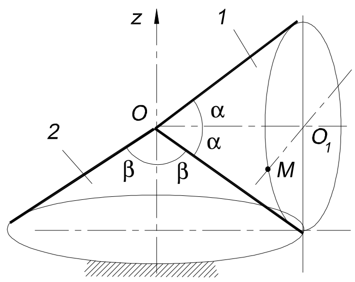
4 (М., 1964). Шар радиуса r катится без проскальзывания в цилиндрическом стакане радиуса R, касаясь одновременно его дна и стенки. Вычислить абсолютную величину ε углового ускорения шара, если скорость центра шара по величине постоянна и равна v.



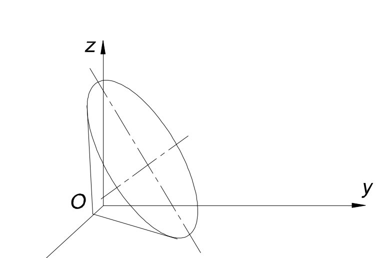
5 (СССР, 1982, 7 баллов). В дифференциальной передаче, состоящей из водила *1* и конических шестерён *2* и *3*, заданы два вращения: ω_1 = const, ω_2 = const, причём $\omega_2 > \omega_1$. Зная углы α и β в осевых сечениях шестерён, найти абсолютное угловое ускорение шестерни *3*.



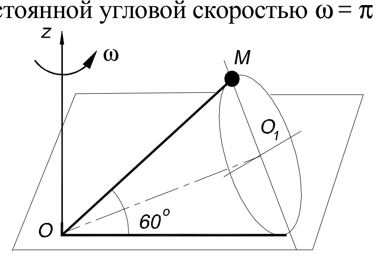
6 (СССР, 1983, 6 баллов). Прямой круговой конус *1* с углом $2\alpha = 60°$ при вершине и радиусом основания $R = 1$ м катится без скольжения по круговому конусу *2* с углом $2\beta = 120°$ при вершине. Найти радиус кривизны траектории абсолютного движения точки M основания конуса *1* в положении, когда радиус O_1M горизонтален.



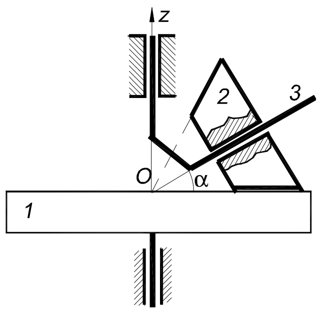
7 (СССР, 1987, 8 баллов). Сплошной конус с углом 90° при вершине катится без скольжения по горизонтальной плоскости с постоянной по величине угловой скоростью ω. Определить геометрическое место тех точек конуса, ускорения которых параллельны опорной плоскости.



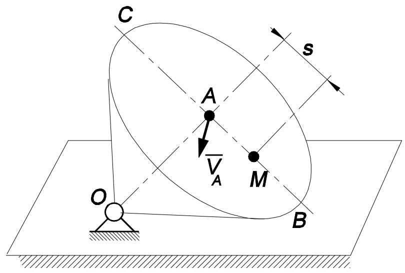
8 (Аз. ССР, 1988). Найти нормальное ускорение точки M конуса, который катится без скольжения по горизонтальной плоскости, вращаясь при этом вокруг оси z с постоянной угловой скоростью $\omega = \pi$ с$^{-1}$, OO_1 = 30 см.



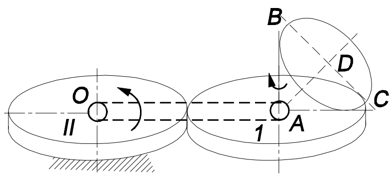
9 (Л., 1986). В изображённом на рисунке механизме колесо *1* и водило *3* вращаются вокруг оси Oz с угловыми скоростями ω_{1z} и ω_{3z}, соответственно. Найти абсолютное угловое ускорение колеса *2*, если $\omega_{1z} = -3$ с$^{-1}$, $\omega_{3z} = 5t$ с$^{-1}$, $\alpha = 30°$.



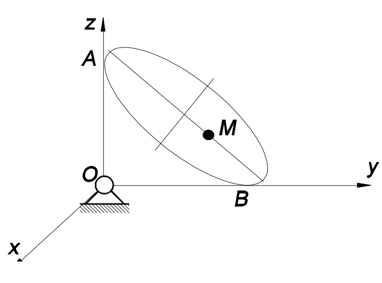
10 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1987). Круговой конус с неподвижной вершиной O и радиусом основания 8 см катится без скольжения по плоскости. Центр основания движется со скоростью $2t$ см/с. Около центра A вдоль диаметра основания BC совершает гармонические колебания точка M по закону $s = AM = 2\cos(\pi t/2)$ см. Определить модуль абсолютного ускорения точки M и модуль абсолютного углового ускорения конуса в момент $t = 1$ с, если угол при вершине конуса равен $\pi/2$.



11 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1989). Круговой конус, вершина которого A всё время находится в центре колеса *1* радиусом r, катится без скольжения по поверхности этого колеса. Образующая конуса равна r, угол при его вершине $\alpha = \pi/2$. Колесо *1*, приводимое в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω_0, катится без скольжения по неподвижному колесу *2* с тем же радиусом. Определить угловое ускорение конуса и модуль абсолютного ускорения точки B конуса в момент, когда точки O, A, C находятся на одной прямой ($OC > OA$), если центр D основания конуса движется по отношению к колесу *1* равномерно со скоростью $v_r = r\,\omega_0$. Направления вращения указаны на рисунке стрелками.

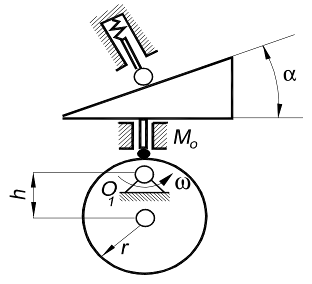


12 (Тамбов, ТГТУ, 1996, 8 баллов). Конус AOB катится без скольжения по горизонтальной плоскости xOy с постоянной абсолютной угловой скоростью ω, всё время касаясь этой плоскости по образующей. Вершина O конуса неподвижна, $\angle\, AOB$ равен 90°. Найти на диаметре AB основания конуса такую точку M (найти BM), направление вектора ускорения которой составляет угол 45° с плоскостью xOy, затем вычислить модуль ускорения этой точки при радиусе основания конуса $R = 1$ м и $\omega = 1$ с$^{-1}$.

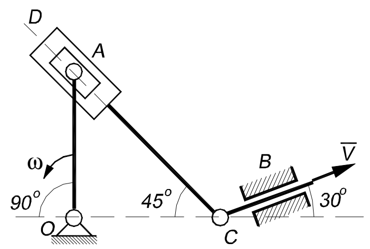


5.6. ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

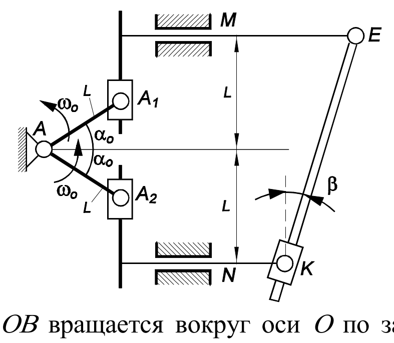
1 (СССР, 1990, 5 баллов). Кулачок, представляющий собой диск радиуса r, эксцентрично посаженный на вал, вращается с угловой скоростью ω. Относительный эксцентриситет кулачка h/r равен ε. Опирающийся на кулачок вертикальный толкатель клиновидной головкой приводит в движение подпружиненный ползун. Ось ползуна перпендикулярна плоскости клина, которая составляет с горизонтом угол α. Определить скорость ползуна в зависимости от угла φ поворота кулачка (на чертеже изображено начальное положение кулачка).



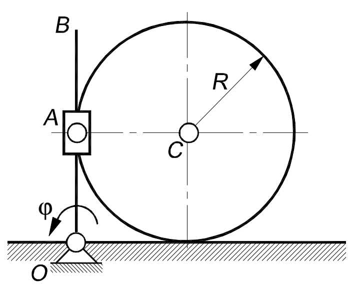
2 (РСФСР, 1984, 5 баллов). В плоском кулисном механизме кривошип длиной OA = 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью ω = 10 рад/с. Стержень CB движется с постоянной скоростью v = 1 м/с. Определить в указанном положении механизма угловую скорость и угловое ускорение кулисы CD.



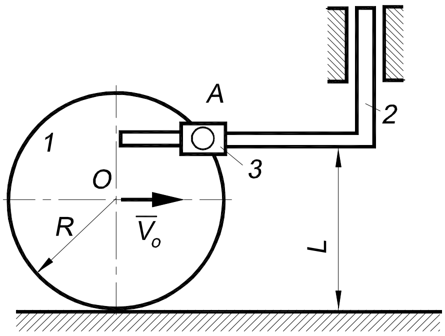
3 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1987). В суммирующем механизме оба кривошипа OA_1 и OA_2 одинаковой длины, равной половине расстояния между направляющими M и N. В некоторый момент, когда углы $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 30°$, оба кривошипа имеют одинаковые направления вращения, равные угловые скорости ω_0 и угловые ускорения, равные нулю. Определить в этот момент угловую скорость и угловое ускорение звена EK.



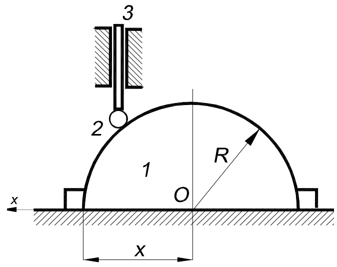
4 (РСФСР, 1982, 3 балла). Стержень OB вращается вокруг оси O по закону $\varphi = t^2 - t$ рад и несёт на себе ползун, шарнирно связанный с ободом колеса в точке A. Считая, что в момент времени t = 1 с стержень вертикален, а точка A находится на горизонтальном диаметре колеса радиуса R = 1 м, найти скорость и ускорение центра колеса, катящегося без скольжения по горизонтальному рельсу.



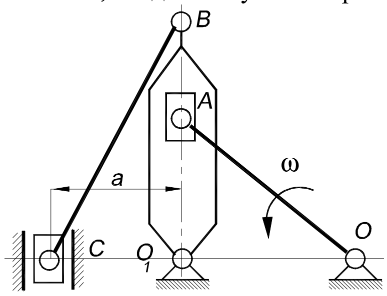
5 (Каз. ССР, 1986). Диск *1* радиуса $R = 0{,}4$ м катится без скольжения по плоскости и при помощи ползуна *3*, шарнирно прикреплённого к ободу диска в точке *A*, приводит в движение изогнутый под прямым углом стержень *2*. Стержень *2* скользит в направляющих. Скорость центра диска постоянная и равна $v_0 = 0{,}8$ м/с. Определить скорость и ускорение стержня *2*, а также ускорение точки *A* относительно стержня *2* в показанном на рисунке положении механизма, если $l = 0{,}6$ м.



6 (УССР, 1988). Копир *1* в форме полуцилиндра радиуса *R* движется в горизонтальных направляющих по закону $x = 2t^2$. Его обкатывает ролик *2*, находящийся на нижнем конце вертикального толкателя *3*. Определить скорость и ускорение толкателя. Размерами ролика пренебречь.



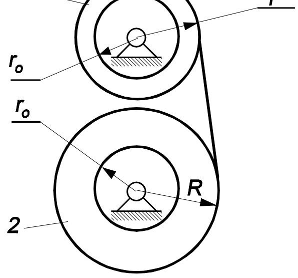
7 (Л., 1985). Ползун *A*, прикреплённый к кривошипу *OA*, вращающемуся с угловой скоростью ω, перемещается вдоль кулисы O_1B. Определить скорость ползуна *C* в момент, когда ось кулисы вертикальна. Принять $O_1C = a$.



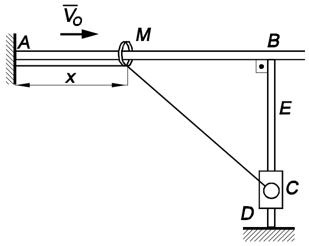
8 (Зап.-Сиб. зона, Новосибирск. ин-т железнодорож. трансп., 1990). Магнитофонная лента малой толщины δ и большой длины *L* перематывается с бобины *2* радиуса *R* на бобину *1* радиуса *r*, имеющую постоянную угловую скорость $\omega_1 = \omega_0$. Радиусы пустых бобин равны r_0. Определить: 1) радиусы бобин с лентой *r* и *R* как функции времени, если вначале перемотки $r = r_0$; 2) угловую скорость ω_2 бобины *2* как функцию времени;

3) максимальный радиус R_0 катушки, на которую намотана вся лента;

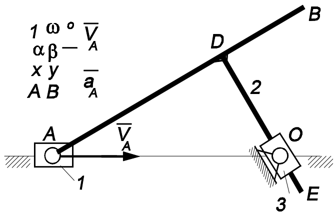
4) время *T* перемотки ленты.



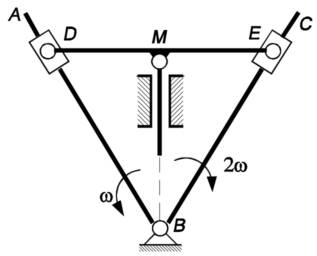
9 (Иркутск. политехн. ин-т, 1984). Нить *AMC* закреплена одним концом в неподвижной точке *A* и продета через кольцо *M*, скользящее с постоянной скоростью v_0 по неподвижному стержню *AB*. Другой конец нити привязан к ползуну *C*, скользящему по вертикальному стержню DE. Длина нити равна l, расстояние $AE = h$, $AB \perp DE$. Определить скорость ползуна C в зависимости от расстояния $AM = x$.



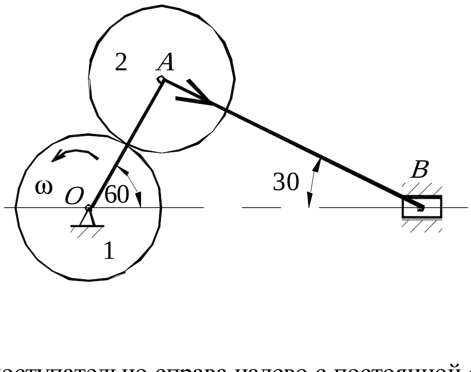
10 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988). В механизме движение от ползуна *1* передается шарнирно связанному с ним звену *2*, элемент DE которого проходит через камень *3*, вращающийся относительно горизонтальной оси O. Определить угловую скорость и угловое ускорение звена *2* механизма в положении, когда $\angle BAO = 45°$, если $v_A = 1$ м/с, $AO = 1$ м, $DE \perp AB$, $a_A = 1$ м/с^2.



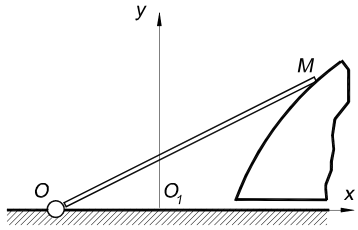
11 (Тамбовск. ин-т хим. машиностр., 1988). Стержни AB и BC вращаются равномерно с угловыми скоростями ω и 2ω в разные стороны вокруг неподвижного шарнира B. Стержень DE соединяет два ползуна, движущиеся по AB и BC, при этом средней точкой M стержень связан шарнирно с другим стержнем, движущимся вертикально вдоль направляющих K. Найти скорости и ускорения точек D, M, E в тот момент, когда $\angle AB = 60°$, а стержень DE горизонтален; $DE = a$.



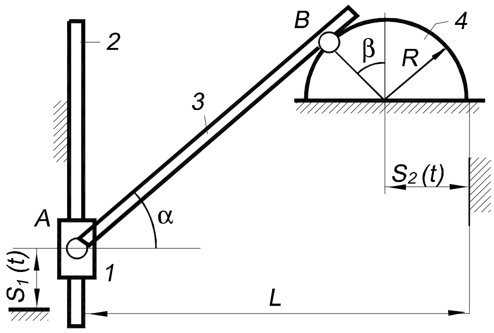
12 (Россия, 1994, 8 баллов). На неподвижную ось O свободно насажены зубчатое колесо *1* радиуса r и кривошип OA длиной $2r$, не связанные между собой. С шатуном AB жёстко скреплено зубчатое колесо *2*. Колесо *1* вращается равномерно с угловой скоростью ω, и, захватывая зубья колеса *2*, приводит в движение шатун AB и кривошип OA. Для указанного на чертеже положения механизма определить скорость и ускорение ползуна B.



13 (БССР, 1982). Кулачок движется поступательно справа налево с постоянной скоростью v_0. Уравнение его контура в осях XO_1Y, неизменно с ним связанных, известно. Палочка OA длины l шарнирно скреплена с неподвижной точкой O и опирается свободным концом на кулачок. Найти угловую скорость ω палочки в зависимости от положения её конца A в осях XO_1Y. Найти затем такую форму кулачка (уравнение его контура), при которой палочка будет вращаться с постоянной угловой скоростью ω_0.



14 (Аз. ССР, 1986). По неподвижной вертикальной стойке *2* скользит втулка *1* по закону $S_1(t) = t^3$ (см). К втулке в точке *A* шарнирно прикреплён стержень *3*, который соприкасается в точке *B* с ползуном *4*, представляющим собой полуцилиндр радиуса $R = 4\sqrt{2}$ см. Ползун скользит по горизонтальной плоскости по закону $S_2(t) = 2\sin(\pi t/2)$ (см). Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня *3* в момент времени $t_1 = 1$ с, если $\alpha = 45°$, $l = 16$ см.

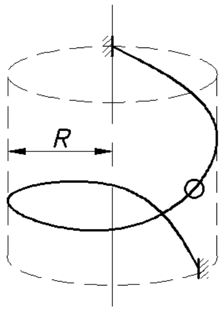


6.1. ДИНАМИКА ТОЧКИ

1 (СССР, 1986, 6 баллов). Ракета движется прямолинейно под действием реактивной силы. В начальный момент ракета покоилась, и её масса равнялась m_0, относительная скорость U истечения газов постоянна, действием внешних сил можно пренебречь.

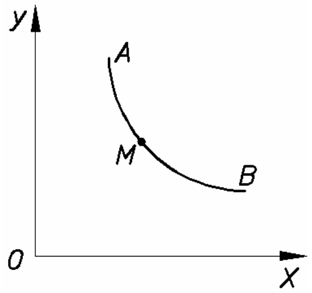
При каком значении массы следует выключить двигатель, чтобы кинетическая энергия, приобретённая ракетой, была максимальной? Какова величина этой максимальной кинетической энергии?

2 (СССР, 1988, 6 баллов). Тонкая проволока изогнута в форме винтовой линии и закреплена неподвижно. Ось винтовой линии вертикальна. Радиус винта равен R, α – угол подъёма винтовой линии (угол между касательной и горизонтальной плоскостью). На проволоку надето колечко массой m и отпущено без начальной скорости. Коэффициент трения между колечком и проволокой равен f. Определить максимальную скорость движения колечка. (Справка: радиус кривизны винтовой линии $\rho = R/\cos\alpha$; центр кривизны находится в плоскости, перпендикулярной оси винта).

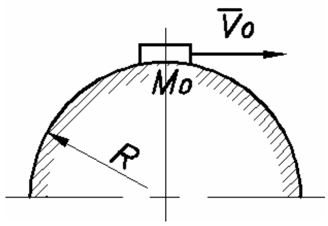


3 (РСФСР, 1982, 7 баллов). Материальная точка M скользит под действием силы тяжести по шероховатому жёлобу AB, расположенному в вертикальной плоскости; уравнение кривой AB $y = f(x)$, коэффициент трения равен k. Точка M начинает движение из точки A жёлоба с начальной скоростью V_0.

Найти закон изменения скорости точки M в зависимости от её положения на кривой AB. Масса точки равна m.

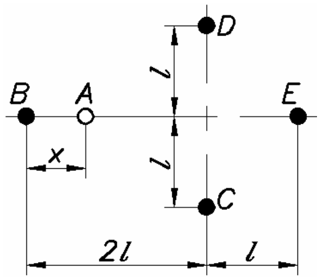


4 (РСФСР, 1982, 3 балла). Определить минимальную скорость V_0, которую надо сообщить монете в верхнем положении M_0 с тем, чтобы она не остановилась на сферической поверхности радиуса R вследствие трения. Коэффициент трения равен f. Монету считать материальной точкой.

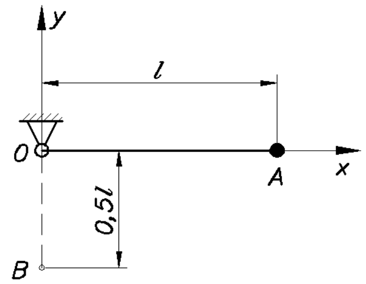


5 (РСФСР, 1983, 3 балла). Неподвижные точки B, C, D с массами m и неподвижная точка E массой $2m$ притягивают свободную точку A массой m. Силы притяжения, действующие между каждыми двумя точками, пропорциональны расстоянию между точками и сумме их масс (K – коэффициент пропорциональности). В начале движения точка A находилась в точке B и была неподвижна.

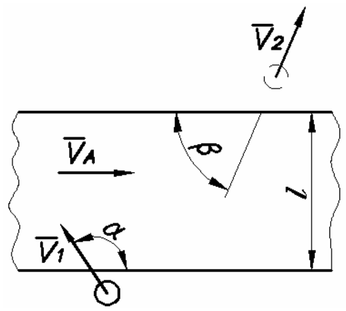
С какой скоростью точка A придёт на прямую CD? Определить максимальную скорость точки.



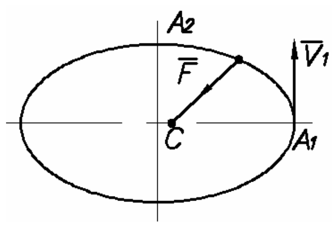
6 (РСФСР, 1987, 7 баллов). Маленький шарик A прикреплён к оси O нерастяжимой нитью длиной l, в начальном положении он находится на горизонтальной оси Ox. В вертикальную стенку xOy вбита тонкая игла B на оси y (OB = 0,5l). Шарик из состояния покоя отпущен без толчка. Трение в системе отсутствует. Определить координату y_c шарика в его верхнем положении в момент, когда он снова начнёт опускаться.



7 (РСФСР, I990, 5 баллов). Шайба, имеющая скорость V_1, въезжает на горизонтальную ленту шириной l, движущуюся со скоростью $V_л$, $V_1 = V_л$, α = 120°. После схода с ленты шайба продолжает движение по направлению, составляющему угол β = 60° с направлением движения ленты. Определить коэффициент трения шайбы о ленту.



8 (БССР, 1982, 4 балла). Материальная точка массой m движется по эллипсу под действием центральной силы F, направленной к фокусу C. Полуоси $a = 5d$, $b = 4d$. В положении A_1 точка имеет скорость V_1. Определить работу силы F при перемещении её из положения A_1 в положение A_2 и её импульс за время этого перемещения.

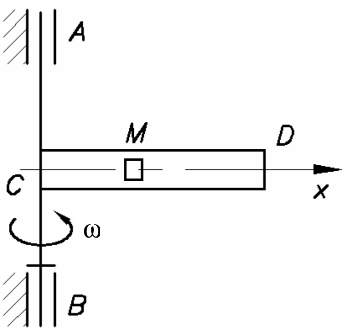


9 (БССР, 1985, 5 баллов). Две материальные точки с одинаковыми массами m, находящиеся на одной вертикали на расстоянии l друг от друга, одновременно начинают двигаться в среде, сила сопротивления которой $R = kmV$. При этом начальная скорость верхней точки равна нулю, а нижней – V_0. Определить время движения до встречи, путь, пройденный верхней точкой, а также указать условие возможности встречи.

10 (Белорусский политехнический ин-т, 1982, 3 балла). Материальная точка массой M движется прямолинейно под действием силы $F = = H\sin kt$. Начальная скорость точки равна нулю. Определить импульс силы и её работу за время $\tau = \pi/k$ от начала движения.

11 (Кирг. ССР, I988, 5 баллов). Горизонтальная гладкая трубка CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находится тело M.

Определить скорость V тела относительно трубки в момент его вылета и время движения тела в трубке, если в начальный момент $V = 0$; $x = x_0$; длина трубки равна L.

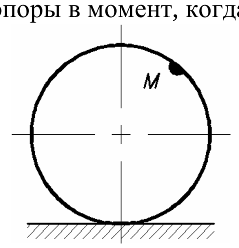


12 (М., 1984, 3 балла). В экваториальной плоскости Земли установлена старинная пушка так, что ствол её вертикален и конец ствола находится на уровне поверхности Земли.

Куда упадёт ядро после выстрела – впереди (по ходу вращения Земли), сзади или в жерло пушки? Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.2. ДИНАМИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА

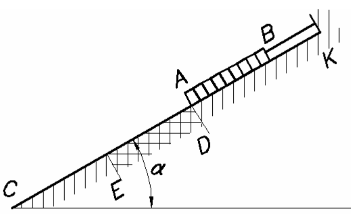
1 (СССР, 1981, 7 баллов). К однородному кольцу радиусом R и весом Q прикреплён в точке M груз веса P. Кольцо движется в вертикальной плоскости, перекатываясь без проскальзывания по горизонтальной опоре. Движение началось из состояния покоя, начальное положение кольца близко к положению неустойчивого равновесия (точка M при этом занимает крайнее верхнее положение). Определить реакцию опоры в момент, когда точка M коснётся опоры.



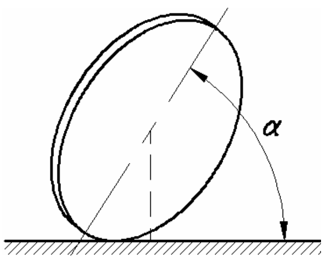
2 (СССР, 1983, 8 баллов). Гусеничная цепь (однородная лента) AB весом P и длиной l удерживается верёвкой на плоскости, наклонённой к горизонту под углом α. На участках DK и CE трение пренебрежимо мало, на участке ED, длина которого равна l, коэффициент трения значителен и равен f.

Каким должен быть минимальный угол наклона плоскости к горизонту, чтобы после перерезания верёвки цепь смогла преодолеть шероховатый участок ED. При решении задачи толщиной цепи пренебречь.

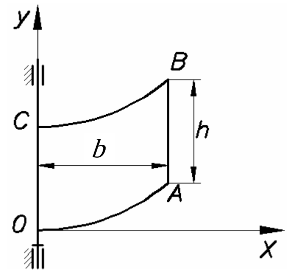
α



3 (СССР, 1986, 6 баллов). Однородный шар радиусом R положен на плоскость, наклонённую к горизонту под углом α. Коэффициенты трения скольжения и качения равны соответственно f и k, при этом $k/R < f$, $C = \dfrac{k}{R}$. Определить ускорение a центра шара.



4 (СССР, 1988, 8 баллов). Тонкий однородный обруч радиуса r поставлен на горизонтальную шероховатую плоскость под наклоном α к ней и предоставлен самому себе. При каких значениях коэффициента трения между обручем и плоскостью обруч начнёт падать без проскальзывания?

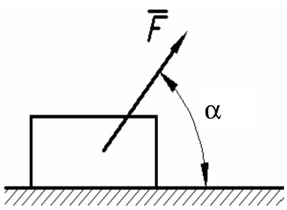


5 (СССР, 1989, 6 баллов). Однородная пластинка $OABC$ может вращаться вокруг вертикальной оси y. Границы OA и CB пластинки криволинейны и описываются соответственно уравнениями $y = f(x)$ и $y = h + f(x)$, где $f(x)$ – некоторая заданная

функция. $AB \parallel OC$, расстояние между сторонами OC и AB – b. К покоящейся $M_{вр} = \alpha t$ (α = const). Масса пластинки равна m.

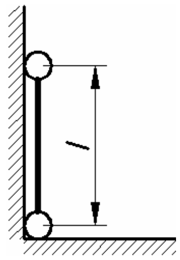
Определить работу момента как функцию времени t.

6 (СССР, 1990, 3 балла). Груз массой m покоится на горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен f. Определить ускорение a груза в момент приложения к нему силы F, наклонённой под углом α к горизонту.

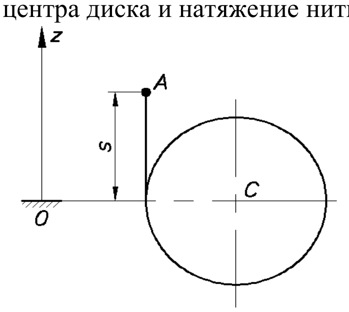


7 (РСФСР, 1982, 7 баллов). Два шарика массами m каждый (их размерами пренебречь) соединены невесомым стержнем длины l. В начальный момент времени стержень стоит вертикально в углу, образованном гладкими плоскостями. Нижний шарик без толчка смещают вдоль горизонтальной плоскости на небольшое расстояние, и тело начинает двигаться. Найти скорость нижнего шарика в момент отрыва верхнего шарика от вертикальной плоскости.

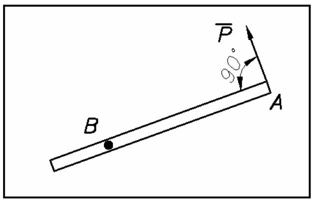
8 (РСФСР, 1982, 3 балла). Определить отношение ускорений однородных шара и цилиндра, скатывающихся без проскальзывания по наклонной плоскости. Трение качения отсутствует.



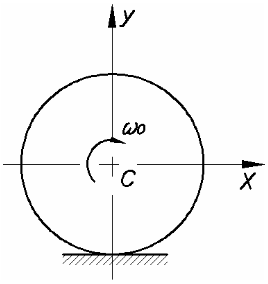
9 (РСФСР, 1983, 5 баллов). На однородный диск массой m намотана невесомая нить. Её конец A движется вверх по закону $S = 0{,}5t^3$ м. Определить закон движения центра диска и натяжение нити T. При $t = 0$ диск неподвижен, $Z_C(0) = 0$.



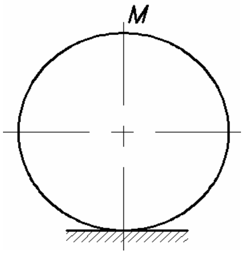
10 (РСФСР, 1983, 7 баллов). К концу неподвижного однородного стержня массой m и длиной l, лежащего на горизонтальной шероховатой плоскости с коэффициентом трения f, приложена перпендикулярно к стержню горизонтальная сила P. Давление стержня на плоскость равномерно распределено по его длине. Определить положение мгновенного центра ускорений B на стержне в момент начала его движения.



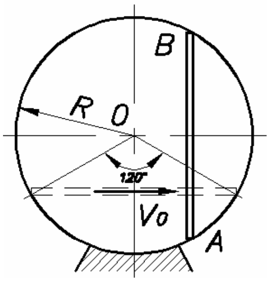
11 (РСФСР, I984, 3 балла). Однородный диск радиусом R, вращающийся вокруг оси CZ с угловой скоростью ω_0, поставили на негладкую горизонтальную плоскость. Коэффициент трения равен f. Определить закон изменения угловой скорости и наименьшую угловую скорость диска, не учитывая сопротивления качения.



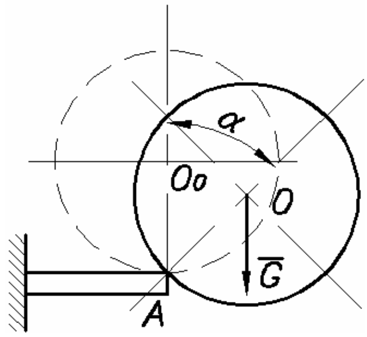
12 (РСФСР, I984, 5 баллов). Однородный диск радиусом R и весом P катится без скольжения в вертикальной плоскости по горизонтальному рельсу из состояния покоя. К диску прикреплена материальная точка M весом P. Начальное положение системы показано на рисунке. Определить наибольшее давление на рельс и соответствующую силу сцепления. Сопротивление качению не учитывать.



13 (РСФСР, 1985, 7 баллов). Однородный тонкий стержень движется в вертикальной плоскости, внутри гладкой трубы радиусом R. Определить начальную скорость V_0, которую нужно сообщить центру масс стержня при его горизонтальном положении, чтобы один из концов стержня начал отходить от трубы при вертикальном положении AB.

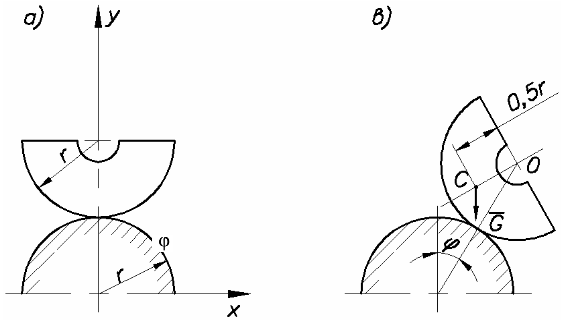


14 (РСФСР, 1986, 5 баллов). Тяжёлый однородный шар, получив ничтожно малую начальную скорость, скатывается без скольжения с горизонтальной площадки. Найти угол α, определяющий положение шара в момент отрыва от опоры.

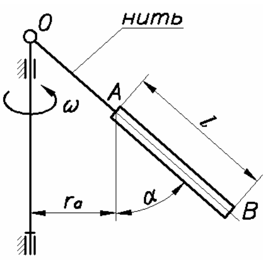


15 (РСФСР, 1987, 5 баллов). Однородный диск радиусом r и весом G, вращающийся с угловой скоростью ω_0, медленно опустили (без толчка) на горизонтальную шероховатую плоскость и в момент касания освободили. Определить работу сил трения за время проскальзывания диска по плоскости. Коэффициент трения скольжения f, трение качения мало.

16 (РСФСР, 1988, 5 баллов). Тяжёлый полуцилиндр находится в покое в верхнем положении и после приложения весьма малого импульса силы перекатывается по неподвижному цилиндру без проскальзывания и сопротивления качению. Исходные данные: $r = 0{,}025 \cdot 9{,}81$ м, $OC = 0{,}5r$ (C – центр масс тела), радиус инерции тела относительно центральной оси инерции z_c $i = 0{,}5 \cdot \sqrt{3}r$ м. Определить угловую скорость полуцилиндра в положении, когда φ = 30°.

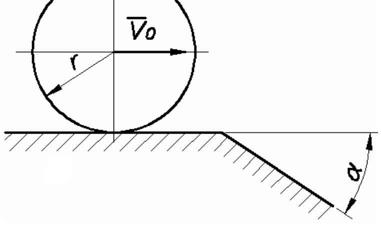


17 (РСФСР, 1989, 5 баллов). Тонкий однородный тяжёлый стержень AB длиной l прикреплён невесомой нитью к равномерно вращающейся вертикальной оси. Определить: чему равен угол OAB (на рисунке он равен 180°)? Дано: угол α и радиус r_a.



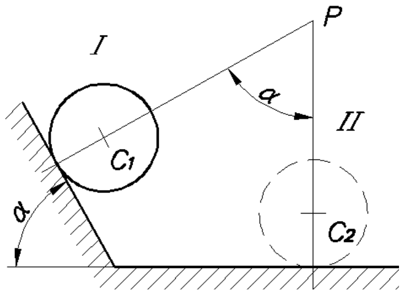
18 (РСФСР, 1989, 5 баллов). По горизонтальной плоскости катится без скольжения однородный шар радиусом r со скоростью V_0 и переходит на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α.

Какое наибольшее значение можно придать углу α, чтобы при переходе на наклонную плоскость шар не оторвался от опоры?



19 (Эст. ССР, 1985, 5 баллов). Однородное колесо радиусом *r* скатывается по наклонной плоскости из состояния покоя (положение I) на горизонтальную плоскость. Колесо движется без отрыва от горизонтальной плоскости, угол α известен, $PC_1 = PC_2 = l$. Колесо не проскальзывает.

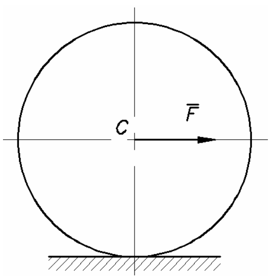
Найти скорость центра колеса в положении II.



20 (БССР, 1983, 4 балла). Маховик, имеющий угловую скорость ω_0, тормозится силами, момент сопротивления которых пропорционален корню квадратному из угловой скорости. Определить среднюю угловую скорость за время торможения.

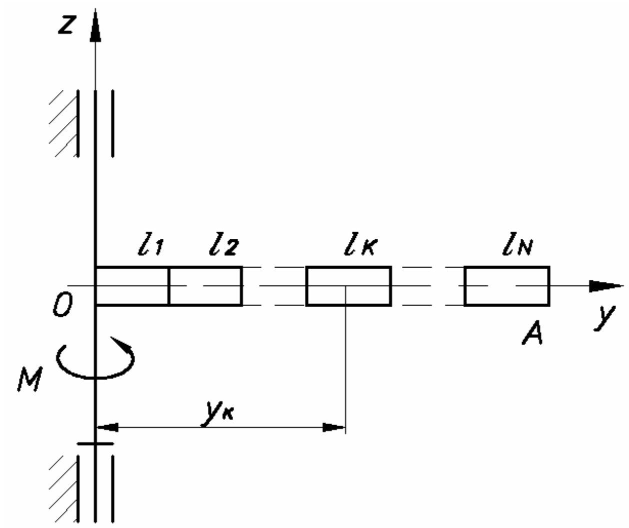
21 (БССР, 1984, 5 баллов). Однородный сплошной цилиндр положен на шероховатую плоскость, наклонённую под углом 45° к горизонту, коэффициент трения скольжения между цилиндром и плоскостью равен 5/12. Будет ли цилиндр скатываться без скольжения? Как будет происходить движение в случае однородного тонкостенного цилиндра. Ось цилиндра перпендикулярна линии наибольшего ската.

22 (БССР, 1985, 5 баллов). Однородная квадратная пластина со стороной $l\sqrt{2}$ после воздействия импульса силы движется по инерции по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорость одной из вершин квадрата равна *U*, ускорение этой точки равно *a* и их направления совпадают. Определить скорость центра масс пластины.

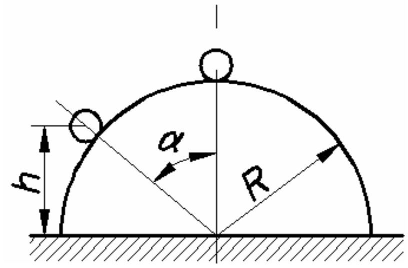


23 (БССР, 1986, 5 баллов). К оси *C* покоящегося на горизонтальной шероховатой плоскости диска приложили силу $F = kmt$ (m – масса диска, t – время, k = const). Коэффициент трения скольжения равен *f*. Определить время τ, в течение которого диск катится без проскальзывания, и перемещение *S* оси диска за это время. Трением качения пренебречь.

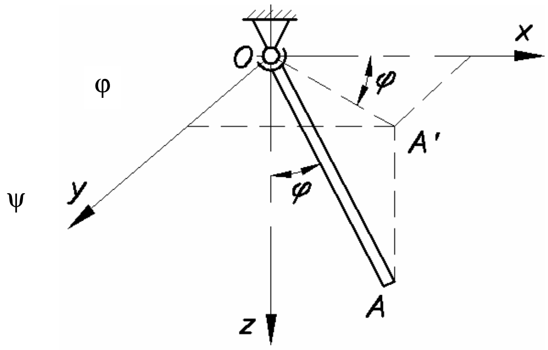
24 (БССР, 1988, 4 балла). Стержень *OA* вращается вокруг вертикальной оси под действием постоянного вращающего момента *M*. Определите угловое ускорение ε стержня, если стержень составлен из жёстко соединённых между собой однородных стержней, длины которых равны l_k, а массы – m_k соответственно (k = 1, 2, 3, ..., N).



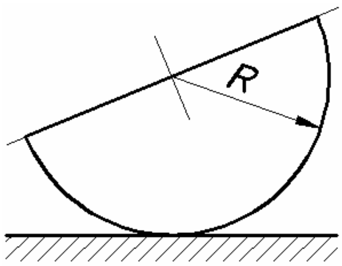
25 (Л., 1982, 6 баллов). Тяжёлый шарик радиусом *r* скатывается без скольжения с вершка полусферы радиусом *R*. В начальный момент скорость шарика равна нулю. Определить, на какой высоте *h* шарик оторвётся от поверхности полусферы.



26 (М., 1982, 7 баллов). Положение однородного тонкого стержня *OA* длиной 2*l* (в точке *O* шаровой шарнир без трения) определяется углами φ и ψ (*A′* – проекция точки *A* на горизонтальную плоскость *XY*). В начальный момент $\psi = \psi_0 < \pi/2$, $\psi = 0$, $\dot{\varphi} = \omega_0$. Определить, при каком значении ω_0 (зависящем от ψ_0) угол ψ будет сохраняться ($\psi = \psi_0$). Обозначим найденное значение ω_*. Пусть теперь $\omega_0 > \omega_*$. Определить, при каких значениях ω_0 будет достигаться значение $\psi = \pi/2$.



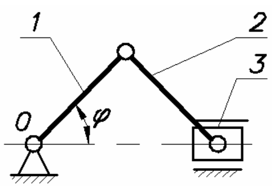
27 (М., 1983, 4 балла). Однородный полуцилиндр радиусом *R* совершает плоскопараллельное движение, касаясь своей цилиндрической поверхностью гладкой горизонтальной плоскости. Какова будет при этом траектория МЦС, если иные силы, кроме сил тяжести и реакции опоры, на него не действуют?



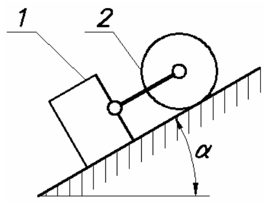
28 (М., 1984, 5 баллов). Вверх по шероховатой (коэффициент трения скольжения *k*), наклонённой к горизонту под углом α плоскости пущен однородный обруч. Начальная скорость его центра равна *V*, начальная угловая скорость равна *O*. Чему равно время подъёма центра обруча?

6.3. ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

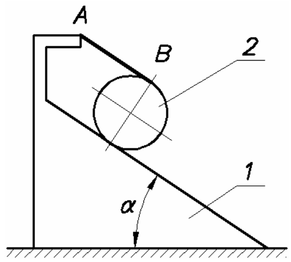
1 (СССР, 1982, 6 баллов). В кривошипно-ползунном механизме, движущемся в вертикальной плоскости, кривошип *1* и шатун *2* – однородные стержни длиной *l* и массой *m*, ползун также имеет массу *m*. Механизм начинает двигаться из состояния покоя, когда $\varphi = \varphi_0 < 0{,}5\pi$. Определить горизонтальную составляющую реакции цилиндрического шарнира *O* в момент, когда угол φ становится равным нулю. Трение не учитывать.



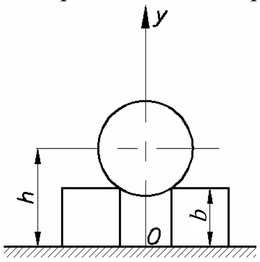
2 (СССР, 1984, 7 баллов). Брусок *1* и диск *2*, соединённые невесомым стержнем, движутся из состояния покоя по шероховатой наклонной плоскости. Диск катится без проскальзывания. Каким условием должны быть связаны угол наклона плоскости α, коэффициент трения скольжения f между плоскостью и бруском, коэффициент трения качения δ диска по плоскости и радиус диска R, чтобы стержень не был нагружен?



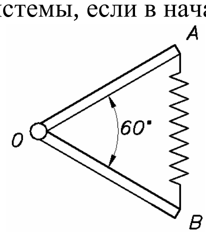
3 (СССР, 1986, 8 баллов). Призма *1* массой m_1 = 5,1 кг может скользить по горизонтальной плоскости. По наклонной грани призмы, образующей угол α = 30° с горизонтом, скользит однородный круглый цилиндр *2* массой $m_2 = 2m_1$. Цилиндр обмотан посредине нерастяжимой нитью, конец которой прикреплён в точке A к кронштейну, жёстко связанному с призмой. Ось цилиндра перпендикулярна, а участок AB нити параллелен линии наибольшего ската наклонной грани призмы. Найти ускорение призмы и ускорение центра цилиндра, а также натяжение нити.



4 (СССР, 1987, 9 баллов). Цилиндр радиусом r и весом P расположили так, чтобы он касался двух одинаковых параллелепипедов весом $Q = 0{,}5P$ и высотой b каждый, и отпустили без начальной скорости ($b > r$). Определить скорость V падающего цилиндра в зависимости от высоты y его оси, если в начальный момент эта высота была равна h. Параллелепипеды не опрокидываются, трение отсутствует.



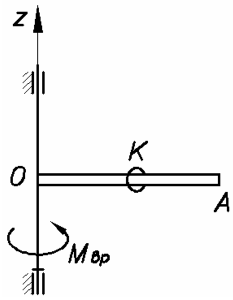
5 (СССР, 1988, 7 баллов). Два одинаковых однородных стержня OA и OB массой m каждый соединены шарнирно в точке O и расположены на гладкой горизонтальной плоскости под углом 60° друг к другу. Затем концы стержней A и B соединили сжатой пружиной AB ($OA = OB = l$, длина ненапряжённой пружины равна $1{,}1l$). Определите максимальное перемещение S_{max} шарнира O в процессе движения системы, если в начальный момент стержни покоились.



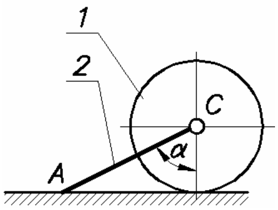
6 (СССР, 1990, 9 баллов). Гладкий стержень OA, момент инерции которого относительно оси z равен J, вращается вокруг этой оси. При этом колечко K массой m скользит по стержню с постоянным относительным ускорением a. В начальный момент времени $OK_0 = l$ и относительная скорость колечка равна нулю.

Определить:

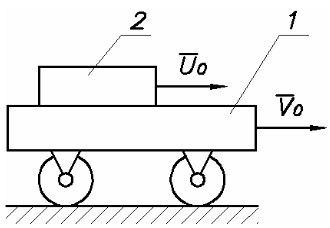
1) угловую скорость, угловое ускорение стержня как функции времени; закон вращения стержня;
2) составляющие действующих на колечко реакций стержня;
3) вращающий момент $M_{вр}$.



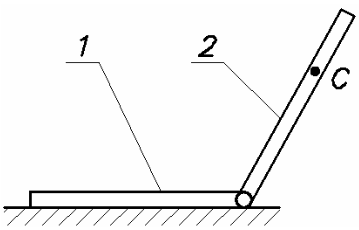
7 (РСФСР, 1982, 7 баллов). Однородный цилиндрический каток *1* радиусом R катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Рукоятка *2* (однородный стержень) скользит концом A по плоскости. Коэффициент трения скольжения равен f, коэффициент трения качения $\delta = 0{,}5 \cdot fR$. Массы катка и рукоятки одинаковы: $m_1 = m_2 = m$. Рукоятка составляет угол α с вертикалью. Определить путь, пройденный центром катка от положения, в котором его скорость была равна V_0, до остановки.



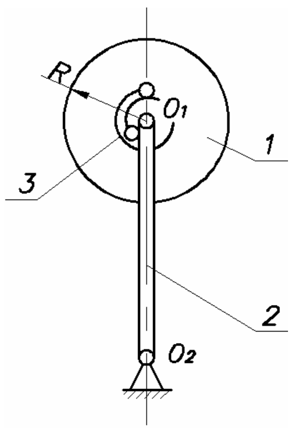
8 (РСФСР, 1982, 5 баллов). По горизонтальной платформе *1*, движущейся по инерции со скоростью V_0, перемешается тело *2* с относительной скоростью U_0. При торможении тела между ним и платформой возникают силы трения. Платформа имеет массу m_1, тело *2* – массу m_2. Определить работу сил трения от момента начала торможения до остановки тела относительно платформы. Масса колёс мала.



9 (РСФСР, 1984, 7 баллов). Два одинаковых однородных тонких стержня длиной l каждый соединены идеальным шарниром и движутся из состояния покоя в вертикальной плоскости. Стержень *1* перемещается без трения по горизонтальной плоскости. Стержень *2* в начале движения занимал вертикальное положение. Точка C – центр масс стержня *2*. Определить траекторию точки C и её скорость в момент падения стержня на плоскость.

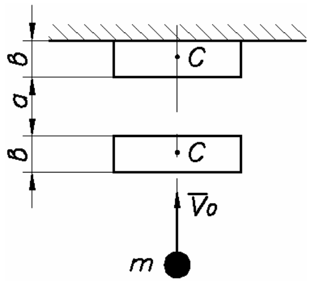


10 (РСФСР, 1985, 5 баллов). Механизм, содержащий однородный диск *1*, однородный стержень *2* и пружину *3*, расположен в горизонтальной плоскости. Пружина, концы которой прикреплены к стержню и диску, сообщает диску угловое ускорение ε_1 относительно стержня. Трение отсутствует. Определить угловое ускорение стержня. Считать известными массы $m_1 = m_2 = m$, радиус R, $O_1O_2 = 2R$.

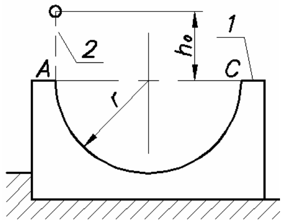


11 (РСФСР, 1987, 5 баллов). Пуля (материальная точка массой m), летящая со скоростью V_0, пробивает сквозь центры масс C сложенные вместе (a = 0) и опирающиеся на неподвижный выступ две одинаковые пластины толщиной b каждая. Скорость пули при выходе из второй пластины пренебрежимо мала. Сила F, действующая на пулю при пробивании пластины, постоянна. Внешние сопротивления малы.

Каким должны быть минимальное расстояние $a_{\min}$ между пластинами и масса первой пластины, чтобы вторая пластина не была повреждена пулей?

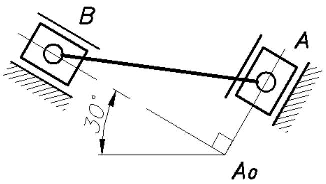


12 (РСФСР, I990, 5 баллов). Прямоугольный брусок *1* массой m_1 = 2m, имеющий гладкую цилиндрическую выемку радиусом r = 0,2 м, стоит на гладкой поверхности вплотную к упору. С какой высоты h_0 надо опустить без толчка шарик *2* массой m_2 = m, чтобы он, коснувшись выемки в точке A, поднялся до точки C? Шарик считать материальной точкой.

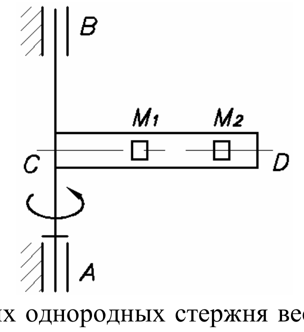


13 (Эст. ССР, 1985, 5 баллов). Ползуны A и B одинаковой массы m, шарнирно соединённые однородным стержнем длиной l, имеющим также массу m, могут скользить без трения по направляющим, расположенным в вертикальной плоскости. В положении A_0 ползуну A сообщается начальная скорость V_0.

Какой должна быть начальная скорость, чтобы стержень достиг горизонтального положения?

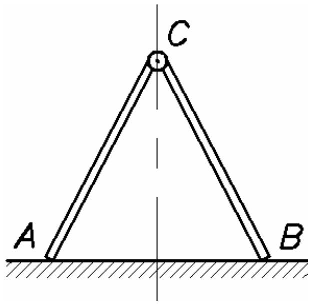


14 (БССР, 1982, 4 балла). Горизонтальная трубка CD равномерно вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω. Внутри трубки находятся два тела M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2, связанные нерастяжимой нитью длиной l. Определить натяжение нити и давление тел на трубку в зависимости от их скорости V относительно трубки. Трением пренебречь.

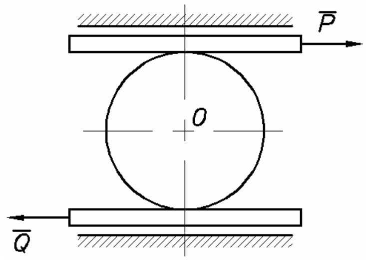


15 (БССР, 1982, 5 баллов). Два одинаковых однородных стержня весом P и длиной l каждый соединены шарнирно в точке C. В начальном положении стержни стояли на горизонтальной плоскости; шарнир C находился на высоте h над плоскостью. Вследствие скольжения концов A и B стержни падают, оставаясь в вертикальной плоскости.

Определить скорость V шарнира перед ударом о горизонтальную плоскость.

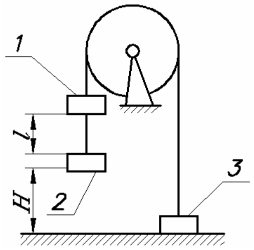


16 (БССР, 1982, 4 балла). Зубчатое колесо радиусом r с массой m, распределённой по ободу, находится между двумя параллельными зубчатыми рейками массой m_1 каждая. К рейкам приложены силы P и Q, направленные в противоположные стороны вдоль реек. Найти ускорение a_0 оси колеса, угловое ускорение ε и ускорения a_1 и a_2 реек.



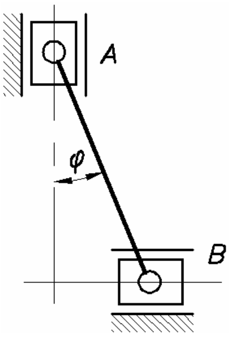
17 (БССР, 1983, 3 балла). На шкив, вращающийся вокруг горизонтальной оси, намотана веревка, к концу которой привязан груз. Найти ускорение груза, если известно, что груз втрое больше массой спускался бы с вдвое большим ускорением.

18 (БССР, 1986, 6 баллов). Три одинаковых груза связаны нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый, неподвижный блок. Грузы отпущены без начальной скорости из указанного на рисунке положения. На какую максимальную высоту поднимется груз *3*? Грузы *1* и *2* после достижения пола останутся неподвижными.

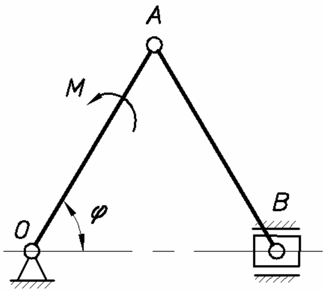


19 (БССР, 1985, 5 баллов). Ползуны A и B одинаковой массы соединены невесомым стержнем AB длиной l. Ползун A движется по вертикальной, а ползун B по горизонтальной направляющим.

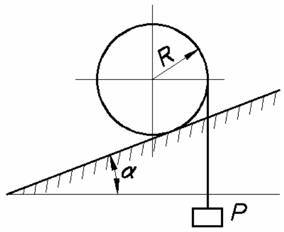
Определить ускорения ползунов в начальный момент времени, когда $\varphi = \varphi_0$ и скорости ползунов равны нулю.



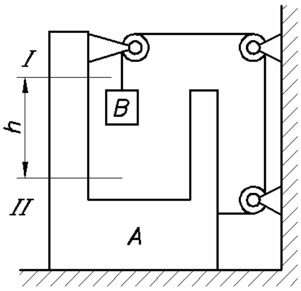
20 (БССР, 1985, 4 балла). Механизм расположен в горизонтальной плоскости; OA и AB – невесомые стержни длиной l, ползун имеет массу m. Механизм движется под действием момента M, приложенного к кривошипу OA, при этом угловая скорость ω кривошипа постоянна. Определить момент M. Трение не учитывать.



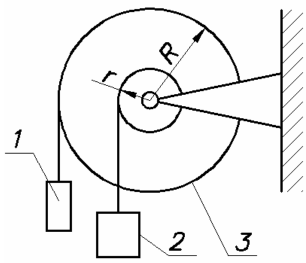
21 (Л., 1982, 6 баллов). Однородный цилиндр массой M и радиусом R катится без скольжения по наклонной плоскости при помощи груза весом P, подвешенного на намотанной на цилиндр нити. Определить, при каком угле наклона плоскости к горизонту цилиндр будет двигаться вверх.



22 (Л., 1982, 5 баллов). Задана механическая система, состоящая из тела A и груза B, связанных между собой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через систему блоков. Вес тела A равен P, тела B равен Q, в начальный момент система находилась в покое, а груз B – в положении I. Определить скорость тела A в момент, когда тело B, опускаясь, займёт положение II. Массой блоков и трением пренебречь.



23 (Л., 1982, 4 балла). Определить момент инерции ступенчатого блока *3* относительно его оси вращения из условия, чтобы натяжение нити, к концу которой подвешен груз *1*, равнялось нулю. Известны масса груза *2* – m и радиусы блока R и r. Нити считать невесомыми, сопротивление движению не учитывать.

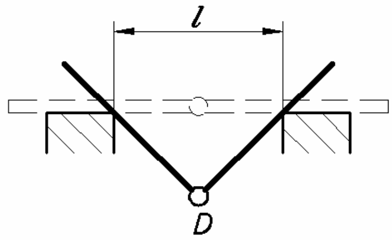


24 (Л., 1983, 4 балла). Через блок перекинут однородный канат длиной l. На одном конце каната подвешен груз, а за другой конец ухватилась обезьяна A.

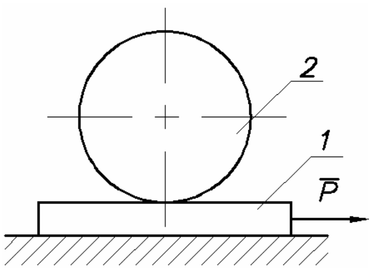
Определить закон движения блока, если обезьяна станет подниматься по канату согласно закону $S_r = at^2/2$. Массы груза, обезьяны и блока одинаковы; масса троса равна половине массы груза. Блок представляет собой однородный цилиндр радиусом r. В начальный момент времени система покоилась, концы троса находились на одинаковом расстоянии от блока.

25 (Л., 1987, 6 баллов). Однородные стержни одинаковой длины l, соединённые шарниром, лежат на гладких поверхностях. В начальный момент стержни горизонтальны и находятся относительно опор симметрично. После пренебрежимо малого толчка начинается движение стержней так, что точка D движется вертикально вниз.

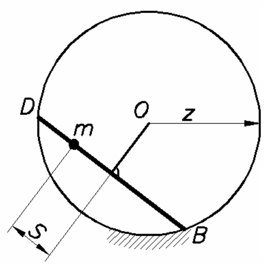
Найти скорость точки D в момент времени, когда концы стержней находятся на углах опор.



26 (Ленинградский кораблестроительный ин-т, 1977, 6 баллов). Доска *1* весом Q_1 движется по негладкой горизонтальной плоскости под действием горизонтальной силы P. Коэффициент трения между доской и плоскостью равен f. На доске лежит однородный сплошной круглый цилиндр *2* весом Q_2, который может катиться по доске без скольжения. Определить ускорение доски.



27 (М., 1982, 5 баллов). Однородный тонкий стержень DB длиной $2l$ и массой M двигается в горизонтальной плоскости, скользя концами по абсолютно гладкой неподвижной округлости радиусом r. Определить работу, которую совершит за время t ползущий по стержню жук массой m, если $S = at^2/2$ и при $t = 0$ стержень находился в покое.

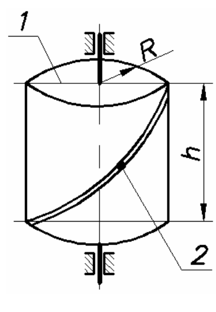


28 (М., I983, 7 баллов). Из одной точки на дне горизонтального абсолютно гладкого кругового жёлоба радиусом R разлетаются несколько маленьких шариков, которые могут двигаться только по поверхности жёлоба. Проекции V_{ox} начальных скоростей шариков на образующую жёлоба одинаковы для всех шариков. Приняв, что отклонения шариков от нижней образующей (оси x) малы, определить, через какое время и где встретятся шарики.

6.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

1 (СССР, 1981, 6 баллов). Однородный цилиндр *1* массой $m_1 = m$, радиусом R и высотой $h = 2R$, имеющий на боковой поверхности винтовой желоб, может вращаться вокруг вертикальной оси. В жёлоб цилиндра, находящегося в покое, сверху опущен шарик *2* массой $m_2 = m$ без начальной скорости.

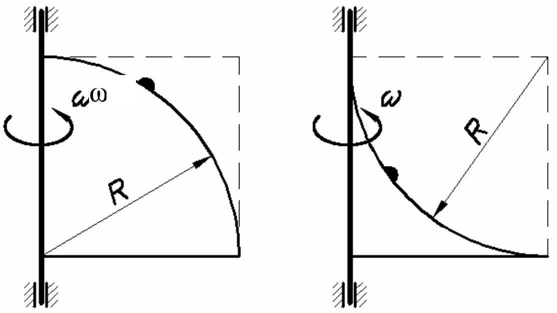
Определить угловую скорость ω и скорость U движения шарика относительно жёлоба в момент, когда шарик достигнет середины цилиндра. Трение в системе не учитывать; шарик считать материальной точкой. Угол наклона оси жёлоба к образующей цилиндра постоянен и равен 45°.



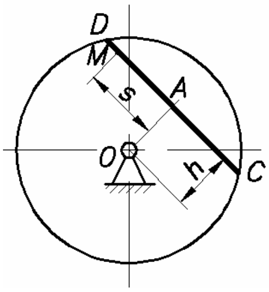
2 (СССР, 1982, 6 баллов). Две пластины с желобами, по которым может скользить грузик (материальная точка), изготовлены из листовых квадратных заготовок. Материал и толщина листа одинаковы.

В начальный момент обе пластины вращаются с угловой скоростью ω_0, а грузики одинаковой массы находятся в желобах в наивысших точках.

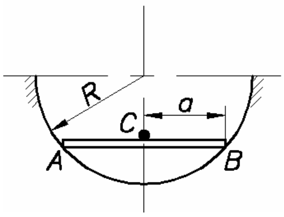
Указать и строго обосновать соотношение (равны; не равны) между абсолютными скоростями грузиков в момент отделения от пластины. Трение не учитывать.



3 (СССР, 1988, 6 баллов). Горизонтальный диск может свободно вращаться вокруг вертикальной оси O. Трение в опорах отсутствует. J – момент инерции диска относительно оси O. Диск, находившийся в покое, начинает вращаться с угловой скоростью $\omega = B \sin kt$ после того, как материальная точка M массой m приходит в движение из состояния покоя от точки A по хорде CD (движение точки M происходит за счёт внутренних сил системы). Определите закон движения точки $AM = S = f(t)$.

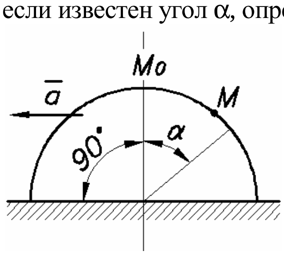


4 (РСФСР, 1982, 5 баллов). Однородный стержень имеет длину $2a$ и массу m. Его концы могут скользить без трения по горизонтальной окружности радиусом R. В начальный момент времени, когда стержень находился в покое, из его середины C к концу B начинает двигаться с достоянной скоростью V относительно стержня материальная точка массой m. Определить угол, на который повернется стержень от своего исходного положения, когда материальная точка достигнет конца B стержня.



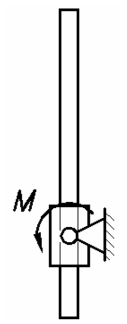
5 (РСФСР, 1984, 3 балла). Тяжёлая материальная точка движется из положения M_0 без начальной относительной скорости по гладкому цилиндру радиусом R, который перемещается поступательно и прямолинейно по горизонтальной плоскости с постоянным ускорением a. Определить ускорение a, если известен угол α, определяющий место отрыва точки от цилиндра.

α

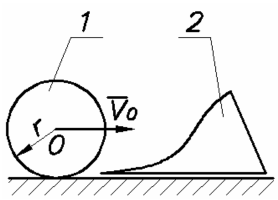


6 (РСФСР, 1985, 7 баллов). Однородный гладкий стержень массой m и длиной l может свободно скользить во втулке, вращающейся вокруг вертикальной оси. На втулку действует момент, обеспечивающий вращение с постоянной угловой скоростью ω. В начале движения центр масс стержня был неподвижен и находился почти на оси вращения.

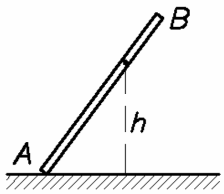
Определить работу момента за время от начала движения до момента вылета стержня из втулки. Массу и размеры втулки не учитывать.



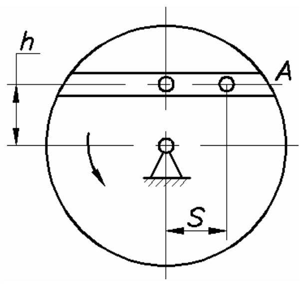
7 (РСФСР, 1985, 3 балла). Однородный цилиндр *1* накатывается на неподвижную подставку *2*, которая может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Качение цилиндра происходит без проскальзывания. Зная начальную скорость V_0 оси цилиндра и массы тел $m_1 = m_2 = m$, определить наибольшую высоту подъёма цилиндра.



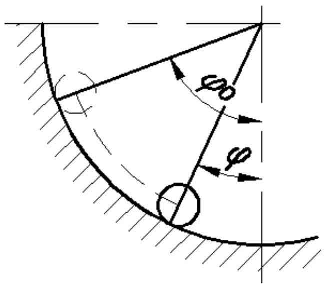
8 (БССР, 1983, 3 балла). Стержень длиной $2l$ падает, скользя концом A по гладкому горизонтальному полу. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение и находился в покое. Определить скорость центра масс стержня в зависимости от его высоты h над полом.



9 (БССР, I983, 5 баллов). Диск вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. На поверхности диска прорезана щель, на которую помещён шарик массой m на кратчайшем расстоянии h от оси вращения. Первоначальное положение шарика является положением неустойчивого относительного равновесия. При небольшом смещении шарик начинает двигаться по щели в направлении точки A. Определить в зависимости от S вращающий момент, приложенный к диску, если угловая скорость диска, остаётся постоянной.



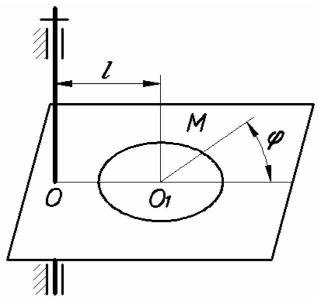
10 (БССР, 1986, 4 балла). Сплошной однородный цилиндр массой m, катится без скольжения по цилиндрической поверхности из положения, определяемого углом φ_0. Определите величину нормального давления N цилиндра на поверхность как функцию угла φ, если в начальный момент цилиндр был в покое.



11 (Белорусский политехнический ин-т, 1984, 4 балла). Однородный цилиндр, получив начальную скорость центра равную V_0, катится без скольжения по наклонной плоскости вверх, а затем скатывается. Через какое время τ после начала движения цилиндр вернётся в первоначальное положение? Трением качения и сопротивлением воздуха пренебречь. Наклон плоскости к горизонту равен α.

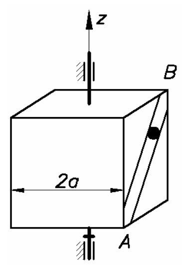
12 (Л., 1982, 5 баллов). Горизонтальная пластинка может свободно вращаться вокруг вертикальной оси. По пластинке движется с постоянной по величине скоростью U материальная точка M с массой m. Траектория точки M – окружность радиуса r с центром на расстоянии l от оси вращения. Положение точки M определяется углом φ. Момент инерции пластинки равен J.

Найти зависимость угловой скорости ω пластинки от угла φ, если её угловая скорость в момент, когда точка M дальше всего отстоит от оси вращения, равна нулю.



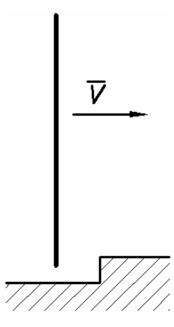
13 (М., 1977, 5 баллов). Определить угловую скорость куба в момент, когда частица массой m, помещённая в жёлобе на диагонали AB грани куба, достигнет точки A. В начальный момент частица была в точке B, а вся система находилась в покое. Момент инерции куба относительно центральной оси z (вертикальной) равен $J = 8ma^2$. Силы трения не учитывать.

14 (М., 1977, 4 балла). Однородный диск массой m и радиусом r своей плоскостью лежит на гладкой горизонтальной плоскости. По контуру диска движется частица той же массы m с заданной относительной скоростью $U(t)$. В начальный момент система находилась в покое. Определить скорость центра диска V_0.

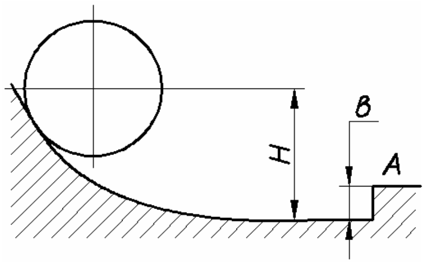


6.5. УДАР

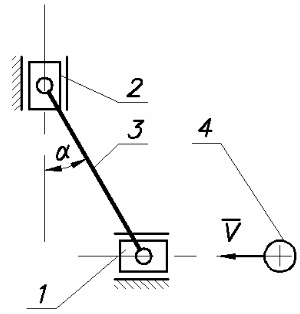
1 (СССР, 1981, 9 баллов). Человек массой m, бегущий со скоростью V, спотыкается о малую неподвижную преграду. В качестве модели бегущего человека рассмотреть поступательно перемещающийся вертикальный однородный стержень. Рассматривая взаимодействие с преградой, пренебречь скоростью и перемещением нижней точки стержня и отклонением его от вертикали (абсолютно неупругий удар). Определить работу сил ударного взаимодействия ноги человека и преграды за время удара. Какова будет эта работа, если посредине стержня установить идеальный шарнир?



2 (СССР, 1983, 6 баллов). С какой минимальной высоты H должен скатиться без начальной скорости на горизонтальную плоскость однородный цилиндр радиусом R и весом Q, чтобы он преодолел выступ высотой b на горизонтальной плоскости. При решении считать, что проскальзывание цилиндра отсутствует на всех участках его движения, удар цилиндра о выступ в точке A абсолютно неупругий (не происходит отрывания цилиндра от выступа после удара).

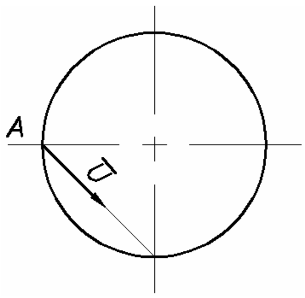


3 (СССР, 1984, 7 баллов). В плоском механизме масса ползунов *1* и *2* пренебрежимо мала, линейка *3* (тонкий однородный стержень длиной $2l$) имеет массу m. Шар *4* массой m, движущийся поступательно со скоростью V, ударяется о ползун *1*, находящийся в покое. Коэффициент восстановления при ударе равен k. При каких значениях угла α, шар после удара будет двигаться в обратном направлении?

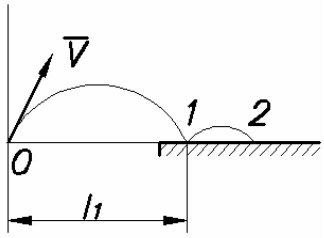


4 (СССР, 1986, 8 баллов). Однородный диск массой m покоился на гладкой горизонтальной плоскости. В некоторой момент времени к диску в точке A приложена ударная сила, и точка A приобрела скорость U, направление которой указано на рисунке.

Определить кинетическую энергию диска в дальнейшем его движении.



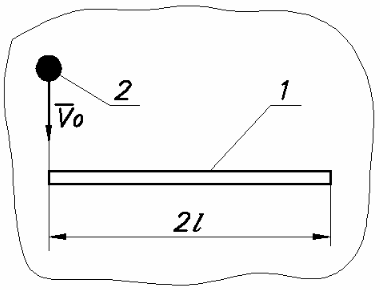
5 (СССР, I987, 5 баллов). Тяжёлый шарик брошен под наклоном к горизонту. Дальность полёта шарика до первого соударения с горизонтальной плоскостью равна l_1. Коэффициент восстановления при ударе равен k. Определите максимальную дальность полёта шарика. Трение и сопротивление воздуха не учитывать. Определить расстояние между точками контакта шарика с плоскостью, соответствующими соударениям с порядковыми номерами $n - 1$ и n.

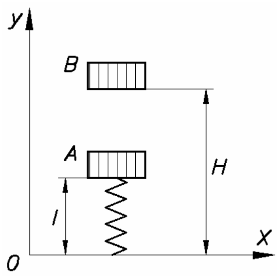


6 (СССР, 1988, 10 баллов). Груз A покоится на вертикальной пружине на высоте l над горизонтом. Длина ненапряжённой пружины равна $1{,}2l$. С высоты $H = 6l$ падает без начальной скорости груз B, расположенный на одной вертикали с грузом A. Размеры грузов малы по сравнению с высотой H. Определите в зависимости от времени t высоту y груза B над горизонтом, если массы грузов одинаковы и их соударение неупругое; t отсчитывается от начала движения груза B.

7 (РСФСР, 1986, 5 баллов). На горизонтальной гладкой плоскости неподвижно лежит тонкий однородный стержень *1* длиной $2l$. Перпендикулярно к нему движется со скоростью V_0 шайба (материальная точка) *2*. Шайба ударяется абсолютно упруго в конец стержня. После первого удара стержень другим концом снова соударяется с шайбой.

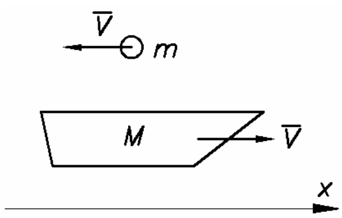
Определите отношение масс тел $\mu = m_1/m_2$, при котором произойдёт их второе соударение, путь S центра масс стержня между ударами и укажите движение стержня после второго удара.



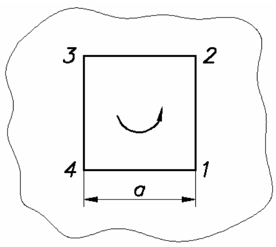


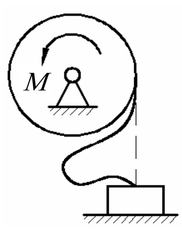
8 (Л., 1983, 4 балла). Две одинаковые лодки, в каждой из которых находится почтальон с грузом почты, движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями V по инерции. Масса каждой лодки вместе с почтальоном M, масса груза почты в каждой лодке m. При встрече почтальоны обмениваются грузами (одновременно).

Определить, какова будет скорость лодок после встречи.



6.6. ДИНАМИКА ТЕЛА (СИСТЕМЫ ТЕЛ) ПРИ МОМЕНТАЛЬНОМ ИЗМЕНЕНИИ СВЯЗЕЙ





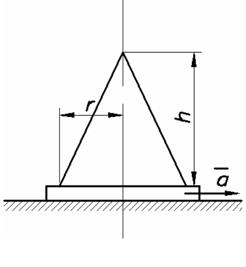
1 (РСФСР, 1983, 7 баллов). Четыре шарика (материальные точки) массами m закреплены в вершинах невесомой квадратной пластинки со сторонами a, лежащей на горизонтальной гладкой плоскости. Эта механическая система равномерно вращается вокруг неподвижного центра масс с периодом T секунд. Вдруг шарик *1* оторвался от пластинки.

На каком расстоянии от ближайшего шарика он будет через T секунд?

2 (СССР, 1982, б баллов). Механическая система, состоящая из однородного цилиндра радиусом R и массой m_1, груза массой m_2 и нерастяжимой нити, приводятся в движение из состояния покоя постоянным вращающим моментом M. В начальный момент времени нить, связывающая цилиндр и груз, не была натянута, и её провисающий излишек был равен l.

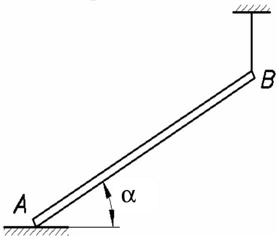
Найти угловую скорость цилиндра в первый момент после того, как груз оторвётся от пола, считая, что в дальнейшем движении системы нить натянута.

3 (СССР, 1987, 7 баллов). Однородный конус с радиусом основания r и высотой h стоят на горизонтальной доске. Масса конуса равна m, коэффициент трения между доской и конусом равен f. Доска внезапно приведена в движение с ускорением a. При каком условии конус будет двигаться поступательно? Определите ускорение конуса в поступательном движении.



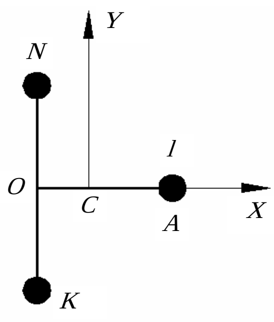
4 (СССР, 1986, 7 баллов). Однородный стержень в состоянии покоя опирается концом A на гладкий пол. Конец B удерживается вертикальной нитью. Стержень составляет угол α с горизонтальным полом, его масса равна m, длина $2l$.

Определить давление стержня на пол в момент после перерезания нити.

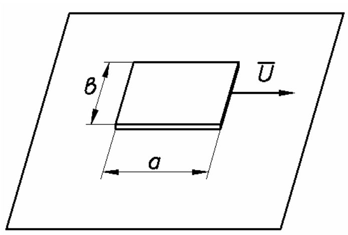


5 (РСФСР, 1987, 7 баллов). Свободная система из трёх одинаковых точных масс m, расположенных в углах равностороннего треугольника ANK со стороной l и связанных жёстко невесомыми стержнями, равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижного центра масс C. В изображённом на рисунке положении масса в точке A освободилась без толчка (оборвался стержень OA).

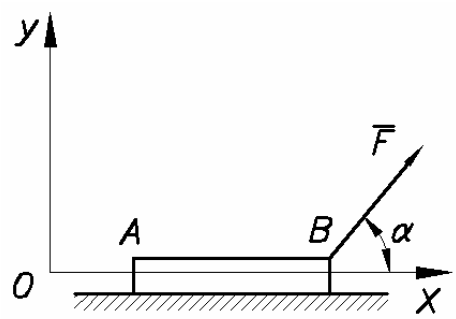
На каком расстоянии S одна от другой окажутся точки A и N после прихода прямой NK в положение, параллельное оси y, когда точка N впервые после отрыва окажется над точкой K?



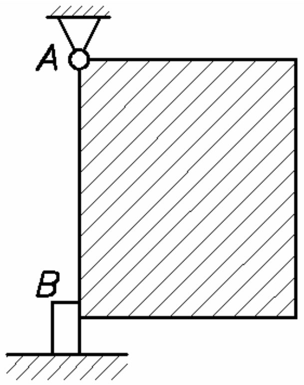
6 (СССР, 1989, 6 баллов). Однородная прямоугольная пластинка движется по гладкой горизонтальной плоскости прямолинейно и поступательно с постоянной скоростью U. В некоторый момент времени одна из вершин пластинки шарнирно закрепляется. Определить реакцию шарнира при её дальнейшем движении. Размеры пластинки и направление U указаны на рисунке. Масса пластинки равна m.



7 (СССР, 1989, 10 баллов). Однородный стержень длиной l и массой m покоится на гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент к концу стержня приложена сила F под углом α к горизонту (сила F и стержень расположены в одной вертикальной плоскости). Определить проекции ускорения центра масс стержня C на оси координат OX и OY в начальный момент его движения.

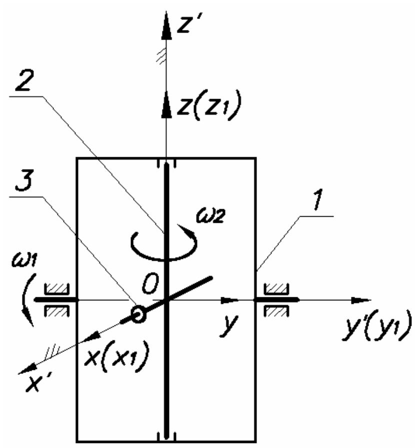


8 (БССР, 1987, 6 баллов). Однородная, тонкая пластина, имеющая форму квадрата, закреплена шарниром A и удерживается упором B так, что сторона AB вертикальна. Определить реакцию шарнира A сразу после того, как упор убран. Масса пластины равна m.

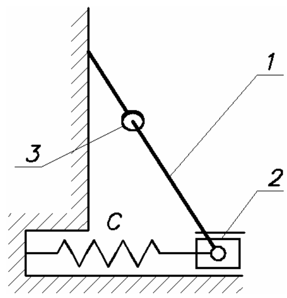


6.7. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

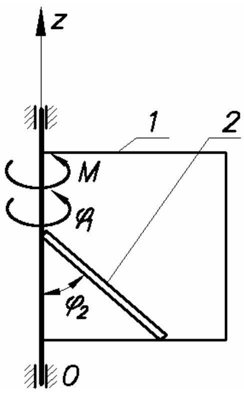
1 (СССР, 1981, 10 баллов). На рисунке показано начальное положение механической системы. Система координат $Ox'y'z'$ неподвижна. Система координат $Ox_1y_1z_1$ связана с невесомой рамкой *1*, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг горизонтальной оси Oy'. Система координат $Oxyz$ связана с невесомой крестовиной *2*, образованной двумя соединёнными под прямым углом стержнями. Крестовина вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 относительно рамки. Кольцо массой m надето на стержень и может перемещаться по нему без трения. Составить дифференциальное уравнение движения кольца по стержню.



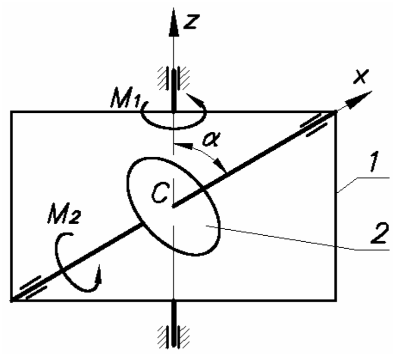
2 (СССР, 1981, 6 баллов). Тонкий однородный стержень *1* массой m_1 и длиной l движется в вертикальной плоскости, опираясь верхним концом на вертикальную стенку, а нижним концом толкает ползун *2* массой m_2, растягивая пружину с коэффициентом жёсткости C. При вертикальном положении стержня пружина не деформирована. По стержню движется кольцо *3* массой m_3. Составить дифференциальные уравнения движения механической системы, используя уравнения Лагранжа второго рода. Трение не учитывать.



3 (СССР, 1982, 6 баллов). Тяжёлая рамка *1*, момент инерции которой относительно вертикальной оси *Oz* равен *J*, движется под действием пары сил с моментом *M*. Концы однородного тяжёлого стержня *2* длиной *l* и массой *m* скользят без трения по сторонам рамки. Составить дифференциальные уравнения движения данной механической системы в обобщённых координатах φ_1 и φ_2. Трением пренебречь.



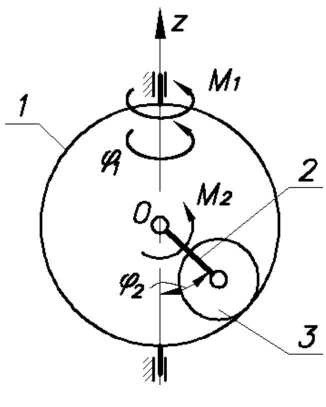
4 (СССР, 1983, 10 баллов). Жёсткая рамка *1* вращается вокруг вертикальной оси *Cz* под действием пары сил с моментом M_1. Момент инерции рамки относительно оси *Cz* равен *J*. Тонкий однородный диск *2* массой *m* и радиусом *R* жёстко закреплён на невесомом валу, установленном в подшипниках, находящихся в углах рамки. Центр масс *C* диска находится в точке пересечения осей *Cz* и *Cx*, угол между осями равен α. На вал действует пара сил с моментом M_2. Момент M_2 создаёт двигатель, установленный на рамке. Найти угловое ускорение рамки. Трение не учитывать.



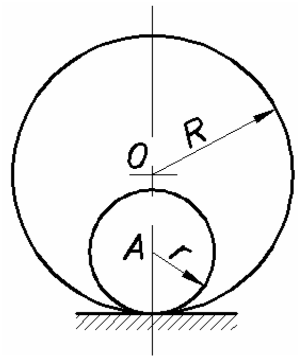
5 (СССР, 1984, 10 баллов). Зубчатое колесо *1* вращается вокруг вертикальной оси *Oz*, проходящей через его центр. Водило *2* вращается вокруг оси, проходящей через центр *O* колеса *1* перпендикулярно его плоскости. Водило несёт ось зубчатого колеса *3*, находящегося в зацеплении с колесом *1*. На колесо *1* действует пара сил с моментом M_1, а на водило – пара сил с моментом M_2. Масса $m_1 = 2m$ колеса *1* распределена по окружности радиусом $R = 3r$, водило невесомо, колесо *3* – тонкий однородный диск массой *m* и радиусом *r*.

Какими должны быть моменты $M_1(\varphi_1, \varphi_2)$, $M_2(\varphi_1, \varphi_2)$, чтобы имели место равномерные вращения с заданными постоянными угловыми скоростями $\dot{\varphi}_1 = \omega_1 = \text{const}$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \text{const}$?

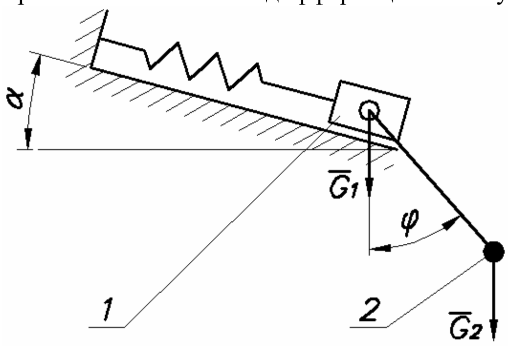
Трение не учитывать.



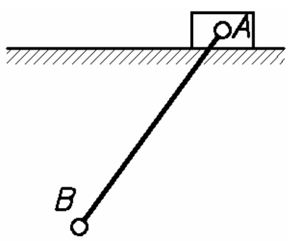
6 (РСФСР, 1982, 5 баллов). Тонкостенная однородная труба массой M и радиусом R может катиться без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Внутри этой трубы может катиться без проскальзывания тонкостенная однородная труба массой m и радиусом r. Составить дифференциальные уравнения движения системы из состояния покоя, если в начальном положении прямая AO, соединяющая центры труб, отклонена от вертикали на малый угол.



7 (РСФСР, I986, 7 баллов). Ползун *1* массой m_1, соединённый с опорой пружиной с жёсткостью C, совершает колебания на плоскости, расположенной под углом α к горизонту. К ползуну шарнирно прикреплён математический маятник *2* массой m_2, имеющий длину l. Трения нет. Составить дифференциальные уравнения движения системы.



8 (БССР, 1984, 6 баллов). Эллиптический маятник состоит из ползуна массой m, скользящего без трения по горизонтальной плоскости, и шарика той же массой m, соединённого с ползуном невесомым стержнем AB длиной l. Стержень может вращаться вокруг оси A, связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости чертежа. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости, предоставив маятник самому себе. Определить угловую скорость стержня в момент, когда шарик будет находиться в нижнем положении. Каким будет решение, если AB – однородный стержень массой $m_1 = 2m$?

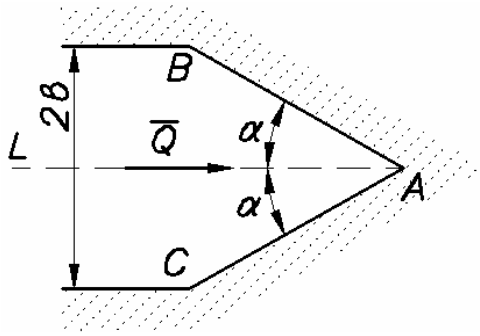


6.8. ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ

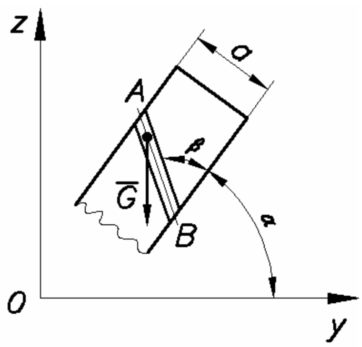
1 (СССР, 1990, 10 баллов). Впереди трактора, движущегося с постоянной скоростью U, установлены отвалы AB и AC под углом α к оси трактора, $BC = 2b$. Отвалы перемещают земляную насыпь по поверхности горизонтальной площадки вправо и влево от направления движения трактора. Коэффициент трения частиц грунта о поверхность площадки f_1, о поверхность отвала f_2. Частицы грунта скользят вдоль отвалов, а после схода с отвалов в точках B и C движутся по поверхности площадки до полной остановки.

Определить:

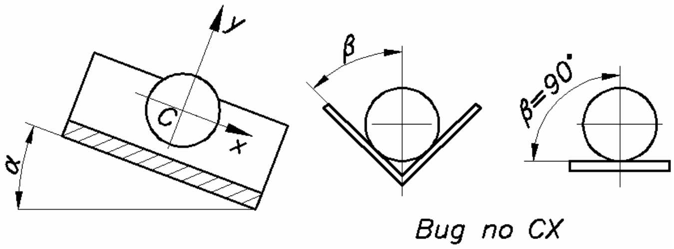
1) при каких значениях α частицы грунта будут скользить вдоль отвалов;
2) расстояние h частиц грунта до прямой L после их остановки (L – траектория точки A);
3) усилие Q, необходимое для перемещения грунта, если масса грунта, перемещаемая одним отвалом, равна M.



2 (РСФСР, 1983, 5 баллов). В доске, установленной в вертикальной плоскости под углом α к горизонту, необходимо просверлить наклонное отверстие, так, чтобы материальная точка, опущенная в отверстие в точке *A* без начальной скорости, прошла сквозь доску под действием силы тяжести в кратчайшее время. Коэффициент трения равен *f*. Определить угол β наклона отверстия.



3 (РСФСР, 1988, 7 баллов). Шарик скатывается по *V*-образному жёлобу (β = 90º). Может ли угол α наклона жёлоба к горизонту, при котором начнётся скольжение шарика, быть меньше, чем у плоской (β = 90°), опоры? Коэффициент трения скольжения *f* не зависит от величины угла β. Для шарика $J_{cz} = 0{,}4mr^2$.



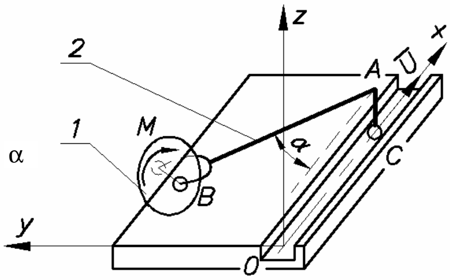
4 (РСФСР, 1988, 3 балла). Материальная точка массой *m* движется по горизонтальной шероховатой плоскости в вязкой среде. Во сколько раз увеличится время движения точки до её остановки, если вязкого трения не будет?

Исходные данные: начальная скорость V_0 = 33,7 м/с, коэффициент трения скольжения f = 0,2 = const, модуль силы вязкого сопротивления $F = m\beta V$, где β = 0,1 $с^{-1}$ и m = 1 кг.

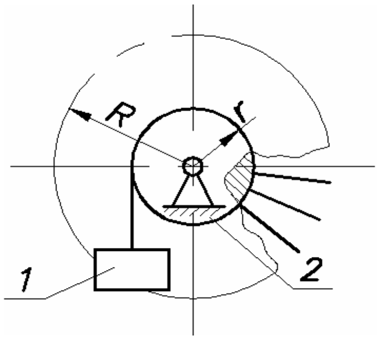
5 (СССР, 1985, 10 баллов). Тонкий однородный диск *1* массой *m* и радиусом *R*, закреплённый цилиндрическим шарниром *B* на оси водила *2*, катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Во время движения плоскость диска и водила сохраняет вертикальное положение. Длина *AB* водила равна *l*, а масса пренебрежимо мала. На диск в его плоскости

действует момент *M*; $AB \parallel xoy$. Трение качения, трение верчения и трение в шарнире *B* отсутствуют. Найти зависимость

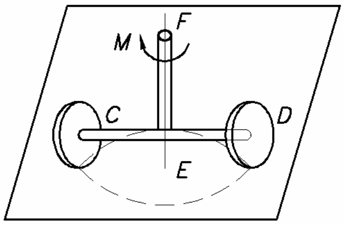
момента *M* от угла α при условии, что конец *C* водила движется вдоль идеально гладкого паза со скоростью U = const.



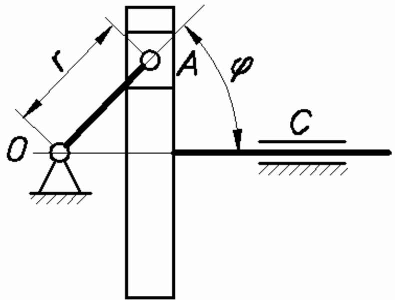
6 (СССР, 1987, 5 баллов). Груз *1* массой *m*, подвешенный к концу нити, намотанной на барабан *2*, опускается. Барабан имеет *n* радиально расположенных лопастей шириной *b*. При вращении барабана лопасти испытывают сопротивление воздуха, давление которого в каждой точке лопасти пропорционально скорости этой точки; α – коэффициент пропорциональности, J – момент инерции барабана с лопастями относительно оси вращения, r – радиус барабана, $L = R - r$ – длина лопастей. Определить максимальную угловую скорость вращения барабана.



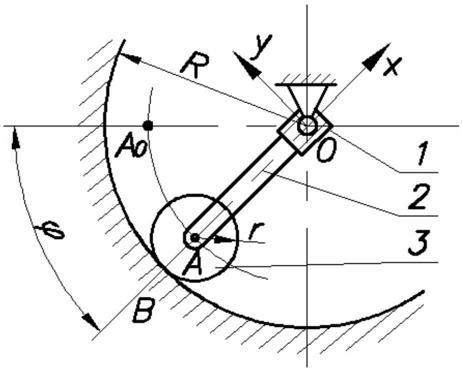
7 (СССР, 1988, 8 баллов). Однородные тонкие диски массой *m* каждый насажены на горизонтальную ось *CD* длиной $2l$. Радиусы дисков равны *r*. Диски опираются на горизонтальную плоскость. Ось *CD* приводится во вращение вокруг вертикальной оси *EF* после приложения постоянного момента *M*. Определить время τ, за которое ось *CD* повернётся на 90°, если в течение этого времени качение дисков по опорной плоскости происходит без скольжения. Массой оси *CD* пренебречь.



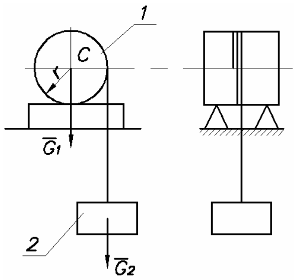
8 (СССР, 1990, 6 баллов). Кулисный механизм расположен в горизонтальной плоскости. Масса кулисы равна *m*, момент инерции кривошипа относительно оси *O* равен *J*, длина кривошипа *r*. В положении механизма, определяемом углом $\varphi_1 = 45°$, угловая скорость кривошипа равна ω_1, а его угловое ускорение $\varepsilon_1 = \omega_1^2$. Определить для этого положения вращающий момент M_1, приложенный к кривошипу, и динамические реакции подшипника *C*. Трением пренебречь.



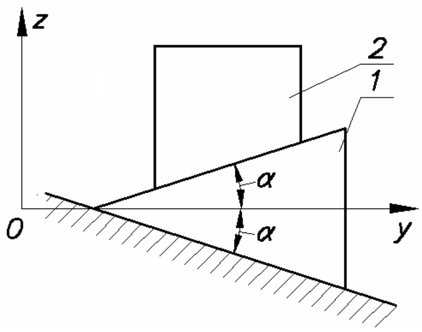
9 (РСФСР, 1983, 7 баллов). Механизм расположен в вертикальной плоскости и состоит из муфты *1*, вращающейся на оси *O* однородного стержня *2*, один конец которого может скользить в муфте, а на втором имеется ось *A*, соединяющая стержень с однородным диском *3*. Диск массой m_3 и радиусом *r* катится без скольжения по неподвижному кольцу радиусом *R*. Длина стержня $l = R - r$, масса m_2. Потерями на трение в связях пренебрегаем. В начальный момент центр диска находится в положении A_0 и неподвижен. Силы тяжести приводят механизм в движение. Определить скорость центра диска V_A, реакции его связей как функцию угла φ ($0 < \varphi < 90°$).



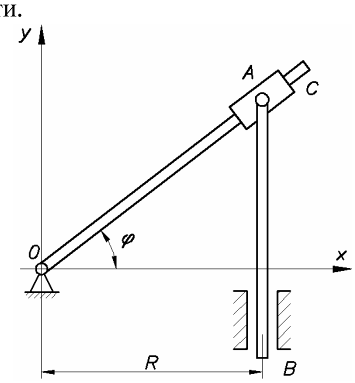
10 (РСФСР, 1989, 7 баллов). На горизонтальных направляющих лежит однородный цилиндр *1* весом G_1. На него намотана невесомая нить с грузом G_2 на конце. Цилиндр катится без проскальзывания; сопротивлением перекатыванию пренебрегаем. При каком отношении $K = G_1/G_2$ центр масс C цилиндра будет двигаться с постоянным ускорением $a = (2/3)g$?



11 (РСФСР, 1990, 7 баллов). Определить ускорения тел плоской механической системы, движущейся под действием сил тяжести. Ось OZ вертикальна. Массы тел: $m_1 = m$, $m_2 = 0{,}5m$; угол $\alpha = 30°$. Трение отсутствует.

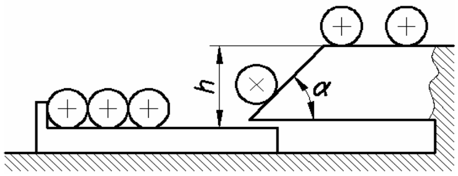


12 (Киргиз. ССР, 1986, 5 баллов). Определить угловую скорость кривошипа OC длиной l и весом P в момент прохождения через ось OX, если вес ползуна A равен Q, вес стержня AB также равен Q. В начальный момент кривошип был отклонён на угол φ от горизонтали и отпущен без начальной скорости. Расстояние от точки O до стержня AB равно R. Механизм расположен в вертикальной плоскости.



13 (Л., 1985, 6 баллов). Шары массой m и радиусом r скатываются с горизонтальной площадки один за другим без скольжения и начальной скорости по наклонной плоскости на горизонтальную платформу, лежащую на гладкой поверхности, и движутся поступательно вместе с платформой.

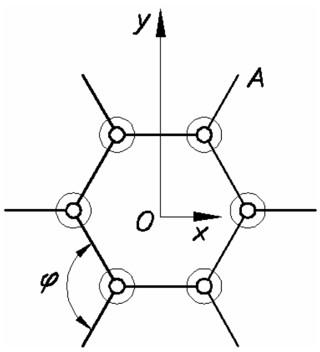
Определить скорость системы «шары – платформа» после скатывания на платформу n-го шара. Масса платформы – M. В начале движения шаров платформа находилась в состояния покоя.



14 (М., I983, 8 баллов). Спутник имеет форму правильной шестигранной призмы. Створки A радиатора системы охлаждения спутника в исходном положении прилегают к боковым граням корпуса спутника, ширина грани – R. На орбите (в условиях невесомости) после отделения спутника створки освобождаются и под действием пружинных двигателей синхронно поворачиваются вокруг осей. Полагаем створки однородными пластинами массой m и длиной R.

1. Найти соотношение между угловой скоростью вращения корпуса спутника вокруг оси симметрии (OZ) и относительной угловой скоростью $\dot{\varphi}$ створок для момента, когда створки повернутся относительно корпуса на углы 120°.

2. Для того же момента времени найти угловую скорость корпуса спутника. Принять, что момент инерции корпуса $J_z = 86mR^2$, двигатели створок представляют собой спиральные пружины (или торсионы), коэффициенты жёсткости которых равны C и которые в начальном положении имеют угол закручивания 120°.



Глава 4.1

1. $m_x = m_1A_1/R_1 + m_2A_2/R_2$;
$m_y = m_1B_1/R_1 + m_2B_2/R_2$;
$m_z = m_1C_1/R_1 + m_2C_2/R_2$;
$R_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}$; $R_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}$.

Здесь принято, что векторы m_1 и m_2 направлены в сторону соответствующих плоскостей (вверх).

2. Векторы составляют с плоскостью XOY одинаковые углы
$\alpha = \arccos(V\sqrt{a^2 + b^2} / 2m)$.

3. $R = 5M / l$.

4. $\vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$ – система не приводится к равнодействующей,
$R_{XZ} = \sqrt{M_A^2 + M_O^2} / h$.

5. $(P_{1x} + P_{2x})\,(b_1P_{1z} - c_1P_{1y} + b_2P_{2z} - c_2P_{2y}) + (P_{1y} + P_{2y})\,(c_1P_{1x} - a_1P_{1z} + + c_2P_{2x} - a_2P_{2z}) + (P_{1z} + P_{2z})\,(a_1P_{1y} - b_1P_{1z}) = 0$.

6. $R = 4F$.

7. $Q_X = -1{,}5F$.

8. $a + b + c = 0$.

9. $M = \sqrt{29}$ Н · м .

Глава 4.2

1. $l_{\max} = 3{,}3a(1 + f)$.

2. $S = P / 2$.

3. $\Delta l = Q(R + r)/(4c\sqrt{Rr})$.

4. $\varphi = \varphi_1 = 0$; $\varphi = \varphi_2 = \arccos(h / l\sqrt{1-k})$ (при $k < 1$); положение равновесия $\varphi = \varphi_1$ устойчиво в случае, когда оно единственно (при $k \geq 1 - h^2 / l^2$), при $k < 1 - h^2 / l^2$ устойчиво только положение равновесия $\varphi = \varphi_2$.

5. $T = P / 2$, $q = P / 2R$.

6. $T_\alpha = P / 4 + P\sin\alpha / 2\pi$.

7. $P = Q2\sin 15^\circ / (1 - 2\sin 15^\circ) \approx 1{,}073Q$.

8. $S_A = 5F / c$.

9. $N_2 = 2P - 36Pl / 25r$.

10. $\mathrm{tg}\varphi_k = 2Q / P/(2(n-k)+1)$.

11. $\mathrm{tg}\,\varphi_k = \dfrac{2\,Q\cos\alpha}{P(2k-1) - 2Q\sin\alpha}$.

12. $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

13. $\varphi = \arccos((1 + \sqrt{51}) / 10)$.

14. $x_C = 2r\cos^3\varphi$, $y_C = r\cos\varphi(2 - \sin 2\varphi)$.

15. $T = P\dfrac{b}{a}$.

16. Трубы не раскатятся при $R < 6{,}3\ r$.

Глава 4.3

1. $\alpha = \mathrm{arctg}(\sqrt{3} / 9)$.

2. $\varphi = 2\alpha - 90^\circ$, равновесие неустойчивое.

3. Часть эллипса $x^2 / a^2 + (y - a/2)^2 / (a/2)^2 = 1$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a / 2$.

4. $P_{\min} = G\cos(\alpha + \mathrm{arctg}\ f)$.

5. $\varphi = \alpha$, $N_A = P\cos\alpha$, $N_B = P\sin\alpha$.

Глава 4.4

1. $Ya = -(P+Q)\mathrm{tg}\gamma/2$.
2. $F = P/3\sqrt{2}$.
3. $M_o = \sqrt{15}$ Н·м.
4. $\sin\beta = 2Q/P\sin\alpha$, $x_0 = (2aPQ\cos\alpha - bmQ)/n$,

$y_0 = (2bQ^2 - bP^2\sin^2\alpha + Pam\cos\alpha)/n$, $z_0 = P\cos\alpha$,

$x_D = -(2aPQ\cos\alpha + bmQ)/n$, $y_D = (2bQ^2 - P^2 b\sin^2\alpha - Pam\cos\alpha)/n$,

$m = \sqrt{P^2\sin^2\alpha - 4Q^2}$, $n = 2bP\sin\alpha$.

5. $T = Mg/\sqrt{6}$.
6. $x_A = 3\sqrt{2}(P+2Q)\ \mathrm{ctg}\alpha/2$, $y_A = -\sqrt{2}(P+2Q)\mathrm{ctg}\alpha/2$, $z_A = -Q$, $T_{CG} = (P+2Q)/\sin\alpha$, $T_{DE} = 2(P+2Q)\mathrm{ctg}\alpha$.
7. $x_A = -2P\sqrt{2}/9$; $y_A = -P\sqrt{2}/6$; $z_A = 7P/9$; $R_c = 2P\sqrt{3}/9$; $N_B = P\sqrt{2}/6$.
8. $OO_1/OO_2 = 1{,}5$.
9. $\cos(AOB) = 1/4$, $\cos(AOC) = -7/8$.
10. $x_B = 2P\cos\alpha$; $R_E = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{P}{5}\sin\alpha$; $z_B = \dfrac{Q}{2} + \dfrac{2}{5}P\cos\alpha$;

$y_B = P(\sin\alpha - 2\cos\alpha)$; $y_A = P(\sin\alpha + 2\cos\alpha)$; $z_A = -\dfrac{P}{5}(\sin\alpha + 2\cos\alpha)$.

11. $R_A = P,\ \alpha = 30^\circ$.
12. $F = P\sqrt{6}/3$.

Глава 4.5

1. $\mathrm{tg}\left(\alpha/2\right) \le f$.
2. $f \ge Q/(P+2Q)$.
3. $\alpha_{\max} = 2\mathrm{arctg}\ f$; $f_{O(\min)} = fQ_1/(Q_1+Q_2)$.
4. $h \ge H(1 - f^2/4)$.
5. $DQ(\sin\alpha - \delta\cos\alpha/R)/d < P < DQ(\sin\alpha + \delta\cos\alpha/R)/d$.
6. $F \le \min\left[f_2 P_2/(\cos\alpha - f_2\sin\alpha),\ f_1(P_1+P_2)/(\cos\alpha - f_1\sin\alpha)\right]$.
7. $f \ge \mathrm{tg}(\alpha/2)$.
8. $\mathrm{tg}\varphi = (P_1 - P_2)(1+f^2)/((P_1+P_2)(1-f^2)) - 2f/(1-f^2)$.
9. $M_{\max} = QfR$, $x_A = -4fQ/\pi$, $x_B = 2fQ/\pi$, $y_A = -2Q/\pi$, $y_B = 2Q/\pi$.
10. 1 случай: а) при $0 \le \alpha \le 45^\circ$ безразличное равновесие; б) при $0 < \beta < \varphi_0$, $\beta = \alpha - 45^\circ$, $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\ f$ – устойчивое равновесие; в) при $\beta = \varphi_0$ – неустойчивое равновесие; г) при $\beta > \varphi_0$ равновесия нет. 2 случай: а) при $\alpha < 45^\circ - \varphi_0$ безразличное равновесие; б) при $-\varphi_0 < \beta < \varphi_0$ – устойчивое равновесие; в) при $\beta > \varphi_0$ равновесия нет.
11. $P = G/f$, $R_A = 0$.
12. $\cos\alpha = 2f/(1+f^2)$ – при поступательном движении катка; $\cos\alpha > 2f/(1+f^2)$ – при качении без проскальзывания.
13. $f \ge r/l$, $G_2 \le G_1(Lr/l)(fl - r)/(l^2 + r^2)$.
14. $\lambda = 4{,}5G/c$.
15. $\mathrm{tg}\alpha_{\min} = (m_1 + m_2)/(f(3m_1 + m_2))$.
16. $\mathrm{tg}\alpha > (af_1 + bf_2)/b$.
17. $b \le 6Rf/\sqrt{1+9f^2}$, $b \le 4Ra/\sqrt{4a^2 + h^2}$.
18. $Q = Pf\cos\alpha/2$.
19. $M > 2PR/3$.
20. 1) $\alpha = 30^\circ$, 2) $P_{\min} = Q/\sqrt{65}$, $\mathrm{tg}\beta = 1/8$, $\alpha \approx 32{,}7^\circ$.
21. $\sin\alpha_2 = \dfrac{1-f^2}{1+f^2}$; $\alpha_2 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.
22. $f \ge 2\sin\varphi/(\pi - 2\cos\varphi)$.

$\varphi_1 = \arccos(2/\pi)$; $(f_{\min})_{\max} = 2/\sqrt{\pi^2 - 4}$.

23. $F_A = f_1 P_1 \left[1 + \dfrac{f_1(1 + f_2 \operatorname{tg}\alpha)}{(1 - f_1 f_2)\operatorname{tg}\alpha - f_1 - f_2}\right] = 0{,}238$ кН .

24. $T_A = \dfrac{1}{4}P, \quad T_B = \dfrac{1}{3}P, \quad T_C = \dfrac{5}{12}P$.

25. $Q = 12P$.

26. $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2f} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}; \quad 0 \le \beta \le \dfrac{\pi}{2}$.

27. $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{\left(f^2 - 1\right)\left(e^{-f\alpha} - e^{f\alpha}\right) - 2f\operatorname{tg}\alpha\left(e^{-f\alpha} + e^{f\alpha}\right)}{\left(f^2 - 1\right)\operatorname{tg}x\left(e^{-f\alpha} + e^{f\alpha}\right) + 2f\left(e^{-f\alpha} - e^{f\alpha}\right)}$.

28. $a/l \le 4f/\sqrt{1 + 16f^2}$.

29. При $f > \delta/r \quad 4(1 - \delta/r) \le \operatorname{tg}\alpha \le 4(1 + \delta/r)$.

При $f \le \delta/r \; 4(1 - f) \le \operatorname{tg}\alpha \le 4(1 + f)$.

30. $f = \sqrt{2}/5$.

31. 1) раскатятся; 2) при абсолютно твёрдых трубах и поверхности пола количество труб теоретически неограниченно велико; 3) зависит, так как необходимо преодолеть трение качения и трения скольжения в местах контакта труб, вызванное сопротивлением труб перекатыванию.

32. $l_{\max} = 8Rf/(1 + f^2)$, $f \ge 2 - \sqrt{3}$.

33. $P \le Qa/2h$, $P \le Q/2$, $P \le Qf/\sqrt{1 + f^2}$.

34. Система сходящихся сил. Из формул равновесия получаются формулы для координаты центра масс.

35. $x = l/2$.

36. $l = L/2$.

37. $P_2(1 - 2f\operatorname{ctg}\alpha) \le P_1 \le P_2(1 + 2f\operatorname{ctg}\alpha)$.

Глава 4.6

1. $P = bQ/(b - 2f_0 y)$.
2. $c_{\min} = 10\sqrt{2}$ (Н/см) , $P_{\min} = 20$ Н .
3. $M_3 = 5(\sqrt{3} + 1)lQ/6$.
4. $a_{\min} = h/2f$, $P_{\min} \to 0$.
5. $f = \operatorname{tg}\alpha$.
6. $N = 4Q$.
7. $R_A = R_B = R_C = P/\sqrt{3}$.
8. $Q = P(\sin\beta + f\cos\beta)/(\sin\alpha + f\cos\alpha)$.
9. $\alpha < 2\operatorname{arctg} f$.
10. $T = Qf/((1 - f^2)\cos\alpha + f)$.
11. 1) $r > 0$, $tg\alpha = 3\pi r^2/4(R^2 + rR + r^2)$,

$(r \to R,\ \alpha \to 38{,}1^\circ;\ r \to \infty,\ \alpha \to 67^\circ;\ r = 2R,\ \alpha = 53{,}6^\circ;\ r = 0{,}5R,\ \alpha = 18{,}6^\circ)$.

2) $r < 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 3\pi r^2(R + r)/4(R^3 - r^3)$,

$(r \to R, \alpha \to \pi/2; r \to \infty, \alpha = 113^\circ)$.

12. $f_A \le f_B < f_A + 1$, $M > (PR(f_A + f_B))/(1 + f_A - f_B)$.
13. 1) При вкатывании $P = 2453H$; 2) При втягивании $P = 2874H$.
14. $0{,}17 \le M/\Pr \le 0{,}83$, $f \ge 0{,}175$.
15. $R = \pi r^2 P/\sin\alpha\,\cos\alpha$, $\bar{R}$ проходит через точку C на прямой AB ($R \perp AB$), причем $BC = AC\operatorname{tg}^2\alpha$.
16. $r \le f^2 R$.
17. $N_A = M/\sqrt{a^2 + b^2}$, $N_B = Ma/(a^2 + b^2)$, $N_C = Mb/(a^2 + b^2)$.

Глава 5.1

1. $v = 2t\sqrt{9 + 4t^2}$, $a = 2\sqrt{9 + 16t^2}$.

Указание: составить уравнения движения точки, совпадающей в каждый момент времени с центром кривизны траектории. Дифференцируя эти уравнения, найти искомые величины.

2. *Указание*: По уравнениям движения точки M найти последовательно v, a_t, a, a_n, ρ. Затем с учётом рисунка найти расстояние MP и выразить его через ρ.

3. $L_{\min} = \sqrt{(l - v_1 t_m \cos\alpha - v_2 t_m \cos\beta)^2 + (v_1 t_m \sin\alpha - v_2 t_m \sin\beta)^2}$, где $t_m = l(v_1\cos\alpha + v_2\cos\beta)/(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\alpha + \beta))$.

4. $L_{\min} = l_0 v_2 / \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

5. $S = 2l/3$.

6. $r = L(\mathrm{tg}(\varphi/2))^{v/u}$.

7. $v_{AB} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, $\overrightarrow{v_{BA}} = -\overrightarrow{v_{AB}}$,

$|a_{AB}| = v_1^2/R - a_2$, $a_{BA} = \sqrt{(2v_1v_2/R)^2 + (a_2 + v_1^2/R)^2}$.

8. $\mathrm{tg}\varphi_{\min} = 2(H_0 - h_0) / L + \sqrt{3}/3$.

9. $v_P = v_A\sqrt{l^2 + h^2} / h$, $a_P = v_A^2 l^2 / h^3$.

Глава 5.2

1. $OM = l\sqrt{3}/4$, $a = u^2\sqrt{3} / l$.

2. $a_A = a$, $a_B = a\sqrt{3}$.

3. $\rho = CD = f^2 / e$.

4. $a_C^n = 0{,}25$ м/с^2.

5. $a_M = 16$ м/с^2.

6. $v_K = \omega h\sqrt{2}$, $a_K = \omega^2 h\sqrt{26}$.

7. $a_B = \omega^2 l\sqrt{26}/2$.

8. $\omega_3 = \omega / \sin\alpha$, $\varepsilon_1 = \omega_1^2 (\cos\alpha + \cos^2\alpha) / \sin^2\alpha + \varepsilon_3\sin\alpha$, если предположить, что вектор ε_3 направлен к нам, а вектор ε_1 от нас.

9. $\omega_{OA} = 10\sqrt{3}$ рад/с.

10. $\cos\alpha = 0{,}5$.

11. *Указание*: найти МЦС звена AB – точку P, выразить ускорение точки P через ускорения точек A и B. Далее использовать геометрический или аналитический метод определения ускорения a_P и показать, что оно не зависит от ε звена AB.

12. $\omega_k = \omega(1 - r^2/l^2) / 2$.

13. 1) $\ddot{\varphi} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2 - \sqrt{2}$ рад/с^2,

2) $\ddot{\varphi} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 1 + \sqrt{3}/2 - \sqrt{2}$ рад/с^2.

14. $\omega_{BC} = u / l$, $\varepsilon_{BC} = u^2 / l^2\mathrm{ctg}^2\alpha$.

15. $\varepsilon_{AB} = \omega_0^2 r / \sqrt{l^2 - r^2}$, $\varepsilon_{OA} = a/r \pm \omega_0^2 r/\sqrt{l^2 - r^2}$,

$a_A = = \sqrt{(\omega_0^2 r)^2 + (a \pm \omega_0^2 r^2 / \sqrt{l^2 - r^2})^2}$, верхний знак берётся, если вектор a направлен влево, нижний – если вправо.

16. $\omega_{BD} = \omega_{O1E} = \omega/3$, $\varepsilon_{BD} = 8\omega^2\sqrt{3}/27$, $\varepsilon_{OIE} = \omega^2\sqrt{3}/27$.

17. $a_M = 20$ см/с^2, $BM = 5$ см.

18. $\omega = 0{,}5$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}4\sqrt{3}$ рад/с^2, $a_r = 5{,}5$ см/с^2, $a_K = 5\sqrt{3}$ см/с^2.

19. $a_B = 0$.

20. $\omega_{DC} = \omega_0\sqrt{3}/3$.

21. $v_B = 2\lambda V$.

22. МЦУ звена AB совпадает с точкой B, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{AB} = \omega_0^2 r\sqrt{l^2 - r^2}$.

23. МЦС цилиндра B находится в точке P на прямой OB между точками O и B на расстоянии $OP = r\sqrt{3}\sqrt{r^2 + 4h^2 + 2\sqrt{3}rh}\Big/(r\sqrt{3} + 4h)$.

24. *Указания*: 1) метод разложения движения. Рассматривая сложное движение точек A и B, найти v_{B2}. Зная v_{B2} и v_A, найти МЦС звена AB.

2) метод остановки. Мысленно остановить звено *3*. Найти МЦС первого и второго звеньев в относительном движении. Затем, возвращая систему в исходное положение, геометрически найти МЦС звена *2*.

25. *Указание*: найти МЦС звена *2* – точку P_2. Учесть, что скорость точки звена *3*, которая совпадает с точкой P_2, направлена параллельно AB.

26. $v_C = 2\omega r/\sqrt{3}$, $a_C = 2\omega^2 r/3$.

27. МЦС звена *3* находится на пересечении перпендикуляра к AC, проведённому из точки A, с продолжением прямой BC, v_{B3} = 1,13 м/с, a_{B3} = 22,18 м/с^2.

28. $\omega = v\,\mathrm{tg}\varphi\,\sin\varphi / l$, $\varepsilon = \sin^2\varphi(a + 2v^2\,\mathrm{tg}\varphi/l)/l$.

29. ω_2 = 3 рад/с.

30. $\omega_1 = 2\sqrt{3}\,v_B / 3r$, $\varepsilon_1 = \sqrt{3}\,v_B^2 / 3r^2$.

31. $x^2 + (y - 0{,}5l)^2 = 0{,}25l^2$ (окружность радиуса $0{,}5l$), $a = 2l\omega^2$.

32. $v_r = v\sqrt{3}/2$, $a_r = v^2 / 4a$, $\varepsilon_{AC} = v^2\sqrt{3}/2a^2$.

33. $v_C = v\sqrt{7}/2\sqrt{3}$. *Указание*: при нахождении МЦС крестовины геометрическим методом учесть, что скорость точки, связанной с крестовиной и являющейся МЦС крестовины в относительном движении её по отношению к звену AD, направлена параллельно AD, а скорость точки, связанной с крестовиной и совпадающей с точкой O, направлена вдоль OB.

34. $v = \omega a$.

35. $v_M = \omega r / 2\sqrt{3}$, $a_M = \omega^2 r / 6$.

36. МЦУ крестовины лежит в середине отрезка OO_1 при любом положении системы.

37. $v_K = 20\sqrt{19}\big/\sqrt{3}$ см, МЦС крестовины лежит в точке пересечения перпендикуляров к стержням *1* и *2*, проведённых соответственно из точек O_1 и O_2.

38. $v = p\omega / 2\cos^3(\omega t / 2)$, $a = p\omega^2\sqrt{5 - 4\cos\omega t} / 4\cos^4(\omega t/2)$.

39. Точка P будет двигаться по окружности радиуса AB с центром в точке B. $v_P = 2\omega R$, $a_P = 4\omega^2 R$, $R = AB$.

Глава 5.3

1. $v = \omega\sqrt{l^2 + r^2}$, $a = \sqrt{(\varepsilon r - l\omega^2)^2 + (\varepsilon l + r\omega^2/2)^2}$.

Указание: для определения угловой скорости колеса 2 применить метод Виллиса.

2. $v = v_A \sin\varphi / \sin(\alpha + \varphi)$,

$a = (a_A R \sin\varphi \sin^2(\alpha + \varphi) + v_A^2 \sin^2\varphi) / (R \sin^3(\alpha + \varphi))$.

Указание: рассмотреть движение точки B стержня как сложное, состоящее из относительного движения по отношению к диску и переносного вместе с диском.

3. $\rho = (2\sqrt{3}\,R - 3r)^2 / (4\sqrt{3}\,R - 7r)$.

4. $y = x\,\mathrm{ctg}\,(\gamma/2)$. Траектория точки M – диаметр большой окружности, проходящей через начальное положение точки M.

5. Окружность $x^2 + (y + R/2)^2 = (R/2)^2$.

6. Искомая точка лежит на неподвижной плоскости на расстоянии одного метра по ходу движения от точки пересечения оси касания цилиндра с плоскостью движения точки O.

7. $v_Q = \omega l$, $a_P = \omega^2 l$.

8. Ускорения всех точек катка лежат на прямых, проходящих через центр C катка. Геометрическим местом искомых точек является окружность с диаметром CP, где P – МЦС катка.

9. $x_A = l(1{,}5 + \pi\sqrt{3}/3)$, $y_A = l(\pi/3 + 0{,}5\sqrt{3})$.

10. A, D, $\omega = \sqrt{a_A\sqrt{2}/2l}$, $\varepsilon = (a_D - 0{,}5\sqrt{2}\,a_A) / l$.

11. $v_A = ul\sqrt{2}/2r$, $a_A = u^2 l\sqrt{10}/2r^2$.

12. a_B = 0,8 м/с^2, a_C = 0,15 м/с^2, $a_D = \sqrt{0{,}73}$ м/с^2.

13. $t = 12(3 - \sqrt{3})$ с.

14. $v_A = 2\sqrt{a_2 R}$, $a_A = \sqrt{4a_1^2 + a_2^2}$.

15. $v_r = v_0$, $a_r = \sqrt{a_0^2 + v_0^4 / r^2}$.

16. $v_D = \omega_0 l$, $a_D = 2\omega_0^2 l$.

17. $a_C = 4\omega^2 a/\sqrt{3}$.

18. *Указание*: применить метод остановки движения пластины или рассмотреть движение точки Q как сложное.

19. $v_r = v_0$, $a_r = \sqrt{a_0^2 + v_0^4 / r^2}$.

20. Полуокружность, построенная на диаметре PC (C – центр диска, P – МЦС диска, эти точки исключаются из полуокружности).

21. $v_{M1} = \sqrt{2(3+\sqrt{7})}$ см/с, $v_{M2} = \sqrt{2(3-\sqrt{7})}$ см/с,

$a_{M1} = 4\sqrt{(3+\sqrt{7})}$ см/с^2, $a_{M2} = 4\sqrt{(3-\sqrt{7})}$ см/с^2.

22. $a_{PY} = v^2 R/(R - r)r$, $a_{AY} = v^2(2r - R)/(R - r)r$ (ось y направлена вверх).

23. $a_0 = \omega^2 p$, $a_1 = 0$.

24. $v_C = \omega R / \cos(\alpha / 2)$.
25. Два раза.
26. $v_C = 0{,}5\pi^2\sqrt{3}$ см/с, $a_C = \pi^3(3\pi + \pi\sqrt{3} - 2)/12$ см/с^2.
27. $v_M = 2\omega lR/\sqrt{R^2 + (2l - R)^2}$.
28. $dx/dt = -\omega rx/\sqrt{x^2 - r^2}$.
29. $\omega = v_0(R - \rho)/(R - r)\rho$.
30. $v_C = 3\sqrt{3}\,\omega_0 r$.
31. Траекторией точки M является диаметр неподвижной окружности, который проходит через точку M_o. $v_M = 2v\cdot\sin(vt/R)$, $a_M = 2v^2\cdot\cos(vt/R) / R$.
32. $\omega = v / 2R\sqrt{3}$, $\varepsilon = 7v^2 / 12R^2\sqrt{3}$.
33. $\omega_2 = v / R$, $\varepsilon_2 = v^2\sqrt{3} / R^2$, $v_{31} = 0$, $v_{32} = 2v$, $v_3 = v\sqrt{3}$,
$a_3 = 2v^2 / R$.
34. $a_D = lV_A^2 \mathrm{tg}^3\alpha\sqrt{4 - 3\sin^2\alpha}$.
35. *Указание*: для упрощения расчётов положить скорость центра колеса постоянной. Определив ускорение точки M, спроектировать его на MP (P – МЦС колеса). Это и будет нормальное ускорение точки M. Так как $MP \perp v_M$. Затем, используя формулу $a_M^n = v_M^2 / \rho$, найти ρ.
36. $\alpha = 60°$.
37. $AM = 2R_2 + 3R_3$, $R_1 = 2R_3$.
38. *Указание*: обозначить l – расстояние между точками опоры, C – вершина прямого угла треугольника. Тогда $CP = l$, где P – точка пересечения перпендикуляров к катетам в точках опоры треугольника.
$CQ = 2l$, точки C, P, Q – на одной прямой, причём точка P лежит между C и Q.
39. $v_C = 7{,}55$ м/с, $v_B = 8{,}23$ м/с.
40. Прямая CD ($CD \| AB$), отстоящая от AB на расстояние R.
41. $v_B = v(1 + \cos\alpha)/\cos\alpha$,
$a_B = a(1 + \cos\alpha)/\cos\alpha + v^2\sin\alpha(1 - \cos\alpha)/R\cos^3\alpha$.
42. $a_r = 2l\sqrt{\varepsilon^2 + 4\omega^4}$, $a_K = 4\omega^2 l$.
43. $v_B = \omega r\sqrt{17 + 8\sin(\varphi/2)}\,/4$, $a_B = \omega^2 r\sqrt{65 + 16\sin(\varphi/2)}\,/8$.
44. $v_C = R\omega/2\sin^2(\varphi/2)$, $a_C = R(\omega^2\cos(\varphi/2) - \varepsilon\sin(\varphi/2))/2\sin^3(\varphi/2)$.
45. $v_0 = \omega R/\cos(\alpha/2)$.
46. Да.
47. $a_D = a\sqrt{5}$, $\varepsilon = \sqrt{a^2 - \omega^4 l^2}\ /\ l$.
48. $a_M = 2a_0\sqrt{2}$.
49. $a_M = 2v^2 / 3\sqrt{3}\,a$, $MA = a$.
50. *Указание*: найти МЦС звена *3*: 1) найти МЦС звена *3* в относительном движении по отношению к диску *2* (точка P_{32} – находится на пересечении прямой, проходящей по телу *4*, и прямой, проходящей через левую точку тела *3* и точку касания дисков); 2) использовать соотношение $v_{P32} = v_{P32}^{\text{пер}} + v_{P32}^{\text{отн}}$ (за переносное движение принять движение тела *2*), здесь $v_{P32}^{\text{отн}} = 0$, $v_{P32}^{\text{пер}} \perp O_2P_{32}$; 3) определить МЦС звена *3* как точку пересечения перпендикуляров к v_A и v_{P32}.

Глава 5.4

1. $s = 2a(1 - e^{-t})$.
2. $\varphi = \omega_0 x_0^2(1/x_0 - 1 / (x_0 + v_0 t)) / v_0$, $v = \sqrt{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2 / 4}$.
3. $v_x = v$; $v_y = -a\omega\sin\omega t\sin(\pi vt / l) + (\pi av / l)\cos\omega t\cos(\pi vt / l)$; $a_x = 0$; $a_y = -a(\omega^2 + (\pi v / l)^2)\cos\omega t\ \sin(\pi vt / l) - (2\pi a\omega v / l)\sin\omega t\cos(\pi vt / l)$.
4. $U = \omega R/\sqrt{2}$, $a = 1{,}5\omega^2 R$.
5. $v_M = v\sqrt{7}$, $a_M = v^2 / R$.
6. $v_M = 6$ м/с, $a_M = 4$ м/с^2.
7. $a_2 = r\omega^2\sqrt{29}$, $a_3 = r\omega^2\sqrt{20}$.
8. $a_{Mx} = 0$, $a_{My} = U^2(0{,}5 - \sqrt{6})/R$.
9. $a_M = a_r = 2\sqrt{2}\,(1 - 8e^{-8})$.
10. $U = v/4\sqrt{3}$.
11. Траектория точки – прямая, параллельная горизонтальной плоскости. $v_M = v$, $a_M = 0$.

12. $a_{Mx} = 2\omega U - 4\omega^2 R/\sqrt{3} - U^2/R - \omega^2 R$, $a_{My} = 2\omega^2 R/\sqrt{3}$.
13. v = 6 см/с.
14. $a_M = (v_1 + v_2)^2 / 4r\sin^3\varphi$.
15. $x = x_0 \exp(\omega_0 t)$, $\varphi = \omega_0 t$.
16. $v_B = 0{,}5$ м/с, $a_B = 1$ м/с^2.
17. $a = g(1 + 4R^2\omega_r^2 / v_0^2\cos^2\alpha + R^2\omega_r^4 / g^2)^{0,5}$.
18. $v = \omega l\sqrt{10}$.
19. $v_C = ((v_A^2 + v_B^2)/2)^{0,5}$, $a_C = (v_A + v_B)^2 / l\sqrt{2}$.
20. $v_M = \omega r\sqrt{5}/2$, $a_M = \omega^2 r\sqrt{97}/8$.
21. $a_M = \omega_e^2 2r - (\omega_e + \omega_r)^2 r$, $a_N = \omega_e^2 2r + (\omega_e + \omega_r)^2 r$. Ускорения направлены по MN.
22. $u = \omega r/3$, $a = \omega^2 r\sqrt{13+6\sqrt{3}}/3$.
23. $a = u^2\sqrt{6}/r$.
24. $U = 19\omega_0 l / 18$, вектор U направлен к точке A.
25. $x = V_0(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) / 2\omega$.
26. $a_M = 26{,}4$ м/с^2.
27. $v_{B2} = 10\sqrt{6}$, $a_{B2} = 100$ см/с^2.
28. $\omega_{CD} = 0{,}5$ рад/с.
29. $\omega_{CD} = = v / l\sqrt{3}$, $\varepsilon_{CD} = v^2\sqrt{3} / l^2$.
30. $a_M = 2\omega^2 r\sqrt{16+9\sin^2 2\varphi}$.
31. $|\varepsilon AB| / |\varepsilon BC| = 0{,}75(4\sqrt{3} + 5) / (\sqrt{3} + 3) = 1{,}89$.
32. $v_C = \sqrt{10}$ м/с, $a_C = \sqrt{234}$ м/с^2.
33. а) Окружность радиуса $l/2$ с центром O_2, $v_M = \omega l$.
б) Окружность радиуса $l/4$ с центром в O_{x1}, $v_M = \omega l/2$.
34. $v_M = (\omega_1^2 a^2 - 2a\omega_1(v\sin\alpha + \omega_2 x\cos\alpha) + \omega_2^2 x + v^2)^{0,5}$,
$a_M = (a^2\omega_1^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2\, ax\cos\alpha + \omega_2^4 x^2 + 2\omega_1^2\omega_2 va\sin\alpha + 4\omega_1^2 v^2)^{0,5}$.
35. $\omega_{AB} = v/r - \omega\sqrt{3}$, $\omega_{BC} = \omega$, $a_{BA}^t = -(5\omega^2 r + (v/r - \omega\sqrt{3})^2 r\sqrt{3})$,
$\varepsilon_{BC} = \omega^2\sqrt{3} + (v/r - \sqrt{3})^2$.
36. $OC = vl/(l\omega\cos 30^\circ + v)$.
37. $v_B = \omega l\sqrt{7}/4$, $\omega_{BC} = 5\sqrt{3}\,\omega l/4a$, $\omega_{AB} = 3\sqrt{3}\,\omega l/4a$.
38. $x = 1.25\sqrt{2}$ м.
39. $v_M = 0{,}2$ м/с, $a_M = 0{,}6$ м/с^2.
40. $\omega = 1$ рад/с, $\varepsilon = (1+2\sqrt{3})/3$ рад/с^2.
41. $a_{Br} = -R(\omega(1 + t) + 1/G)^2/(1 + t)$, $x_C = R(1 + t)G/(1 + t + \omega G)$,
$y_C = 0$, $G = (t^2 + 2t)^{0,5}$.

Глава 5.5

1. $M_1(R/\sqrt{2}, 0, -R/\sqrt{2})$, $M_2(-R/\sqrt{2}, 0, R/\sqrt{2})$.
2. $v_M = 13{,}9$ см/с, $a_{MO1} = 58{,}4$ см/с^2, $a_A = 65{,}9$ см/с^2, $a_B = 48{,}2$ см/с^2, $\varepsilon = 17{,}7$ рад/с^2.
3. $v_{r\max} = 8\sqrt{3}\,\omega_1 r/3$.
4. $\varepsilon = v^2/r(R - r)$.
5. $|\varepsilon| = \omega_1(\omega_2 - \omega_1)\sin\alpha\sin(\alpha + \beta)/\sin\beta$ *Указание*: для определения угловой скорости колеса *3* применить метод Виллиса.
6. $\rho = 7\sqrt{7}/\sqrt{106}$. *Указание*: для простоты вычислений положить $\omega_e = \text{const}$, например, $\omega_e = 1$ рад/с.
7. Геометрическим местом точек, ускорения которых параллельны плоскости XOY, является треугольник, получаемый пересечением плоскости $z - y = 0$ и конуса.
8. $a_M^n = 60\pi^2$ см/с^2.
9. $\varepsilon_2 = (5t + 3)\sqrt{27+75/a}$, $a = (5t + 3)^2 + 3$.
10. $a = 0{,}5(\pi^2 + 8\pi + 18)^{0,5}$ см/с^2, $\varepsilon = 0{,}375$ рад/с^2.
11. $\varepsilon = 0$, $a_B = 2\omega_0^2\sqrt{5}\,r$.
12. $BM_1 = 2R/3$, $BM_2 = 2R$, $a_{M1} = 2/3$ м/с^2, $a_{M2} = 2$ м/с^2.

Глава 5.6

1. $v = \omega r\varepsilon\sin\varphi\cos\alpha\,(1 - \varepsilon\cos\varphi / \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi})$.
2. $\omega_{CD} = (\sqrt{3} + 5) / 0{,}8 = 8{,}4$ рад/с.

3. $\omega = 0{,}375\omega_0$, $\varepsilon = 3\sqrt{3}\,\omega_0^2/32$.
4. $v = 1$ м/с, $a = 1$ м/с^2.
5. $v_2 = 0{,}4\sqrt{3}$ м/с, $a_2 = 0{,}8$ м/с^2, $a_{32} = 0{,}8\sqrt{3}$ м/с^2.
6. $v = 2(R - 2t^2)\,/\,\sqrt{R - t^2}$, $a = 2t(2t^2 - 3R)\,/\,\sqrt{(R - t^2)^3}$.
7. $v_C = a\omega$.
8. 1) $r = r_0 + \omega_0\delta t/2\pi$, $R = (r_0^2 + L\delta/\pi - \omega_0\delta(4\pi r_0 t + \omega_0\delta t^2)/4\pi^2)^{0,5}$,
2) $\omega_2 = \omega_0 r/R$,
3) $R_0 = (r_0^2 + L\delta/\pi)^{0,5}$,
4) $T = 2\pi r_0\,((1 + L\delta\,/\,\pi r_0^2)^{0,5} - 1)\,/\,\omega_0\delta$.
9. $v_C = (l - h)v_0/\sqrt{l^2 - h^2 + 2x(h - l)}$.
10. $\omega_2 = 1$ рад/с, $\varepsilon_2 = 4$ рад/с^2, если вектор a направлен вправо,
$\varepsilon_2 = 2$ рад/с^2 – если влево.
11. $v_D = 2\omega a$, $v_M = 3\omega a$, $v_E = 4\omega a$, $a_D = 4\omega^2 a$, $a_M = 8\omega^2 a\sqrt{3}$,
$a_E = 4\omega^2 a\sqrt{37}$.
12. $v_B = 4\sqrt{3}\,\omega r/7$, $a_B = 60\omega^2 r/343$.
13. $\omega = v_0\,/\,((l^2 - y^2)^{0,5}(dx/dy) + y)$, $x = v_0\arcsin(y/l)\,/\,\omega_0 + (l^2 - y^2)^{0,5} + C$.
14. $\omega_3 = 0{,}15$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0{,}58$ рад/с^2.

Глава 6.1

1. $m = \dfrac{m_0}{e^2}$; $T = \dfrac{2m_0U^2}{e^2}$.
2. $V = \sqrt{\dfrac{gR}{f}(\mathrm{tg}^2\alpha - f^2)}$.
3. Вначале рекомендуется рассмотреть движение точки для случая: кривая AB – дуга окружности.
4. Обозначим $\alpha = \mathrm{arctg}\, f$;
$$V_0^2 > \frac{2gR}{1 + 4f^2}\left\{\left[3f\sin\alpha + \left(1 - 2f^2\right)\cos\alpha\right]e^{-2f\alpha} + 2f^2 - 1\right\}.$$
5. $V^2 = 28Kl^2$; $V_{\max}^2 = \dfrac{225}{8}Kl^2$.
6. $y_c = -\dfrac{2}{27}l$.
7. $f = \dfrac{9}{16}\dfrac{V_л^2}{gl}$.
8. Работа $A = -\dfrac{3}{8}mV_1^2$; импульс $S = \dfrac{\sqrt{5}}{2}mV_1$.
9. $\tau = \dfrac{1}{k}\ln\dfrac{V_0}{V_0 - lk}$; $S = \dfrac{g\tau}{k} - \dfrac{gl}{kV_0}$; $V_0 > kl$.
10. Импульс $S = 2\dfrac{H}{k}$; работа $A = 2\dfrac{H^2}{mk^2}$.
11. $V = \omega\sqrt{L^2 - x_0^2}$; $t = \dfrac{1}{\omega}\ln\dfrac{L + \sqrt{L^2 + x_0^2}}{x_0}$.
12. Сзади.

Глава 6.2

1. $N = P + Q + \dfrac{2P^2}{Q}$; $F_{сц} = 0$.
2. $\mathrm{tg}\alpha_{\min} = \left(2 - \sqrt{2}\right)f$.
3. Равновесие: $\mathrm{tg}\alpha \le C$.
Качение без скольжения:

$a=\frac{5}{7}g(\sin\alpha-C\cos\alpha)$ при $C<\text{tg}\alpha<3{,}5\,f-2{,}5\,C$.

Качение со скольжением: $a=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)$.

4. $f>\frac{\sin 2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}$.

5. $A=\frac{3\alpha^2 t^4}{8mb^2}$.

6. При $F\sin\alpha\le mg$ $a=\frac{F}{m}(\cos\alpha+f\sin\alpha)-fg$;

при $F\sin\alpha>mg$ $a=\sqrt{\left(\frac{F}{m}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{F}{m}\sin\alpha-g\right)^2}$.

7. $V=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}gl}$.

8. $\frac{15}{14}$.

9. $Z_c=\frac{1}{6}t^2(t-2g)$; $T=m\left(\frac{1}{3}g+t\right)$.

10. $AB=l\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)$, где $\lambda\supset\left(\frac{1}{6},\sqrt{2}-1\right)$ является корнем уравнения $12\,fmg\lambda^3+(6P-f\,mg)\lambda-P=0$.

11. $\omega=\omega_0-\frac{2\,fgt}{R}$; $\omega_{\min}=\frac{\omega_0}{3}$.

12. $N=\frac{14}{3}P$; $F_{\text{сц}}=0$.

13. $V_0^2=gR\frac{1+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$.

14. $\cos\alpha=\frac{10}{17}$.

15. $A=\frac{Gr^2\omega_0^2}{6g}$.

16. $\omega=5{,}184\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

17. $\angle OAB=180^\circ-\alpha+\beta$;

18. $\cos\alpha\ge\frac{10\,gr+7V_0^2}{17gr}$; $V_0^2\le gr$.

19. $V=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot(1+2\cos\alpha)\cdot\sqrt{gl}$.

20. $\omega_{\text{ср}}=\frac{1}{3}\omega_0$.

21. Сплошной цилиндр будет катиться без скольжения, тонкостенный – со скольжением.

22. $V=\sqrt{U^2+al}$.

23. $\tau=3\frac{fg}{k}$; $S=3\frac{f^3g^3}{k^2}$.

24. $\varepsilon=\frac{M}{J}$; $J=\frac{1}{12}\sum_{K=1}^{N}m_K l_K^2+\sum_{K=1}^{N}m_K y_K^2$; $y_K=\sum_{i=1}^{K}l_i-\frac{l_K}{2}$.

25. $h=\frac{10}{17}(R+r)$.

26. $\omega_0^2=\frac{3g}{2\,l\cos\psi_0\sin^2\psi_0}$.

27. $x^2+(y-R)^2=l^2$.

28. $T = \dfrac{V}{g(\sin\alpha + 2k\cos\alpha)} B$;

$B = 1 + 2k\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha \le 2k$; $B = \dfrac{2k\cos\alpha - \sin\alpha}{k\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha > 2k$.

Глава 6.3

1. $X_0 = -12mg\sin\varphi_0$.

2. $f \ge \dfrac{\delta}{R}$; $\mathrm{tg}\alpha = 3f - 2\dfrac{\delta}{R}$.

3. $a_1 = \dfrac{g}{2\sqrt{3}}$; $a_2^r = \dfrac{1}{2} g$; $T = \dfrac{1}{2} m_1 g$ (25 Н).

4. $V = \sqrt{2g(h-y)\left[1 - \left(\dfrac{y-b}{r}\right)^2\right]}$, если $h - \dfrac{h-b}{3} < y \le h$;

$V = \sqrt{2g\left[h - \dfrac{4(h-b)^3}{27r^2} - y\right]}$, если $r \le y < h - \dfrac{h-b}{3}$.

5. $S_{\max} = \dfrac{1}{2}(\cos 30° - 0{,}8) = 0{,}0335l$.

6. $\omega_z = \dot\varphi = \sqrt{\dfrac{2a}{2l + at^2}}$;

$\varepsilon_z = \ddot\varphi = -\sqrt{2}\left(2\dfrac{l}{a} + t^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot t$;

$\varphi = \sqrt{2}\ln\left(\sqrt{1 + \dfrac{at^2}{2l}} + \sqrt{\dfrac{2l}{a}}\,t\right)$;

$M = \left(\dfrac{3}{4}m - \dfrac{J}{(2l + at^2)^2}\right) a\sqrt{2a(2l + at^2)} \cdot t$.

Составляющие реакции стержня:

$R_x = 0$; $R_y = -\dfrac{5\sqrt{2}\,ma\sqrt{a}\,t}{2\sqrt{2l + at^2}}$; $Rz = mg$.

7. $S = \dfrac{V_0^2}{2fg} - \dfrac{10\,\mathrm{tg}\alpha + 9f}{5\,\mathrm{tg}\alpha + 4f}$.

8. $A = -\dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} U_0^2$.

9. Траектория точки C – эллипс с полуосями $\dfrac{l}{4}$; $\dfrac{l}{2}$; $V = \dfrac{1}{2}\sqrt{3gl}$.

10. $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{11}\varepsilon_1$.

11. $a_{\min} = \dfrac{1}{2}b$; $m_1 = m$.

12. $h_0 = 0{,}1$ м.

13. $V_0^2 = \dfrac{9}{8}\left(\sqrt{3} - 1\right)gl$.

14. $T = \dfrac{m_1 m_2 \omega^2 l}{m_1 + m_2}$;

$N_1 = m_1\sqrt{g^2 + 4\omega^2 V^2}$; $N_2 = m_2\sqrt{g^2 + 4\omega^2 V^2}$.

15. $V = \sqrt{3gh}$.

16. $a_0 = \dfrac{P - Q}{m + 2m_1}$; $a_1 = \dfrac{2P}{m + 2m_1}$; $a_2 = \dfrac{-2Q}{m + 2m_1}$; $\varepsilon = \dfrac{P + Q}{(m + 2m_1)r}$.

17. $a=\frac{1}{4}g$.

18. $H_{\max}=l+\frac{4}{3}H$.

19. $a_A=g\sin^2\varphi_0$; $a_B=\frac{1}{2}g\sin 2\varphi_0$.

20. $M(\varphi)=2\omega^2 l^2 m\sin 2\varphi$.

21. $\alpha<\arcsin\frac{P}{P+Mg}$.

22. $V_A=\sqrt{\frac{2ghQ}{P+2Q}}$.

23. $J=m_2 r(R-r)$.

24. $\varphi=\frac{a\,l}{2\,r\,g}\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)-\frac{a\,l}{r\,g}$; $k=\sqrt{\frac{g}{3l}}$.

25. $V=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{5}g\,l}$.

26. $a_1=3\,g\frac{P-f\left(Q_1+Q_2\right)}{3\,Q_1+Q_2}$.

27. $J_0=M\left(r^2-\frac{2}{3}l^2\right)$; $\omega=\frac{m\sqrt{r^2-l^2}\,a\,t}{J_0+m\left(r^2-l^2+S^2\right)}$;

$A=\frac{1}{2}\left(J_0+mS^2\right)\omega^2+\frac{1}{2}m\left(a\,t-\omega\sqrt{r^2-l^2}\right)^2$.

28. $\tau=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$; $x=V_{0x}\tau$.

Глава 6.4

1. $\omega=\sqrt{\frac{2g}{3R}}$, $U=\sqrt{3gR}$.

2. $V_{\text{лев}}>V_{\text{прав}}$.

3. $S=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{B}{kbh}(1-\cos kt)$; здесь $b=\sqrt{\frac{m}{J+mh^2}}$.

4. $\varphi=\frac{\sqrt{R^2-a^2}}{b}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}$; здесь $b=\sqrt{2\,R^2-\frac{5}{3}a^2}$.

5. $a=g\frac{\cos\alpha-\frac{2}{3}}{\sin\alpha}$.

6. $A=\frac{1}{4}ml^2\,\omega_0^2$.

7. $h=\frac{V_0^2}{2g}$.

8. $V=\sqrt{3gh}$.

9. $M=m\omega^2 S(2S-h)$.

10. $N=\frac{1}{3}mg(7\cos\varphi-4\cos\varphi_0)$.

11. $\tau=\frac{3\,V_0}{g\sin\alpha}$.

12. $\omega=\frac{mU\,l(1-\cos\varphi)}{J+m\left(l^2+r^2+2lr\cos\varphi\right)}$.

13. $\omega^2=\frac{2g}{95a}$.

14. $V_0 = \frac{1}{4}U$.

Глава 6.5

1. Для первой модели $A = \frac{1}{8}mV^2$; для второй $A = \frac{1}{14}mV^2$.

2. $H = R\frac{9R^2 - 3Rb + 4b^2}{(3R - 2b)^2}$; $b < R$.

3. $\cos^2\alpha < \frac{1}{3}k$.

4. $T = \frac{1}{3}mU^2$.

5. ∞; $l_n = k^{n-1}l_1$.

6. $y = 6l - \frac{gt^2}{2}$ при $t \le \tau$;

$y = l[0{,}2\cos K(t-\tau) - \sin K(t-\tau) + 0{,}8]$ при $t > \tau$; здесь $K = \sqrt{\frac{5g}{2l}}$, $\tau = \sqrt{\frac{10l}{g}}$.

7. $\mu = 2$; $S = \frac{1}{3}\pi l$; после второго удара стержень неподвижен.

8. $V_1 = \frac{M - m}{M + m} \cdot V$.

Глава 6.6

1. $l_{1-2} = a\sqrt{1 + \frac{32}{9}\pi^2 - \frac{8}{3}\pi}$.

2. $\omega = 2 \cdot (m_1 Ml)^{\frac{1}{2}}(m_1 + 2m_2)^{-1} R^{-\frac{3}{2}}$.

3. 1) $\frac{r}{h} > \frac{f}{4}$.

2) Если $a \le fg$, то $a_{\text{конуса}} = a$; если $a > fg$, то $a_{\text{конуса}} = fg$.

4. $R_A = \frac{mg}{1 + 3\cos^2\alpha}$.

5. $S = \frac{1}{2}l\sqrt{3(1 + 4\pi^2)}$.

6. $R = \frac{9}{8}mU^2b^2\left(a^2 + b^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

7. При $F \le \frac{mg}{2\sin\alpha}$ $a_{Cx} = \frac{F}{m}\cos\alpha$, $a_{Cy} = 0$;

при $F > \frac{mg}{2\sin\alpha}$ $a_{Cx} = \frac{F}{m}\cos\alpha$, $a_{Cy} = \frac{3}{2}\frac{F}{m}\sin\alpha - \frac{3}{4}g$.

8. $R = \frac{\sqrt{34}}{8}mg$.

Глава 6.7

1. $\ddot{x} - \left(\omega_2^2 + \omega_1^2\cos(\omega_2 t)\right) \cdot x = g\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$.

2. $\ddot{s} + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\ddot{\varphi} + \left(l\cos^2\varphi - s\right) \cdot \dot{\varphi}^2 = g\cos\varphi$,

$$\left[\left(\frac{m_1}{3} + m_2\right)l^2 + (2m_3 - m_2)l^2\sin^2\varphi + m_3 s^2 - 2m_3 l s\sin^2\varphi\right]\ddot{\varphi} +$$

$$+\frac{m_3}{2}l\sin(2\varphi)\ddot{s} + \left(\frac{3m_3 - m_2}{2}\sin 2\varphi - m_3 ls\right)\dot{\varphi}^2 - 2m_3\left(l\sin^2\varphi - s\right)\dot{s}\dot{\varphi} =$$

$= -\frac{1}{2} Cl^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2} m_1 g l \sin\varphi + m_3 g(l - s) \cdot \sin\varphi$.

3. $\begin{cases} J\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3} ml^2 \sin\varphi_2 \,\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{3} ml^2 \sin 2\varphi_2 \,\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 = M; \\ \frac{1}{3} ml^2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{6} ml^2 \sin 2\varphi_2 \,\dot{\varphi}_1^2 = \frac{1}{2} mgl \sin\varphi_2. \end{cases}$

4. $\varepsilon_1 = 4 \frac{M_1 - M_2 \cos\alpha}{mR^2 \sin^2\alpha + 4J}$.

5. $M_1 = 4mr^2 \omega_1 \omega_2 \sin 2\varphi_2$; $M_2 = 2mr \cdot \left(g \sin\varphi_2 - r\omega_1^2 \sin 2\varphi_2\right)$.

6, 7. Составляются уравнения Лагранжа 2 рода для системы с двумя степенями свободы. Движение последовательное.

8. $\omega_1 = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{6g}{l}}$.

Глава 6.8

1. 1) $\alpha > 90° - \varphi_2$; здесь $\varphi_2 = \operatorname{arctg} f_2$.

2) $h = b + \frac{U^2 \sin^2\alpha \cos(\alpha + \varphi_2)}{2 f_1 g \cos^2\alpha}$.

3) $Q = 2 f_1 M g \sin(\alpha + \varphi_2)$.

2. $\beta = 90° - \frac{\alpha + \varphi}{2}$; $\varphi = \operatorname{arctg} f$ – угол трения.

3. Может.

4. $t_2 = 1{,}72\, t_1$.

5. $M = mR \frac{6l^2 - R^2}{4l^3} U^2 \sin^2\alpha$.

6. $\omega = \frac{3mgr}{n\alpha b\left(R^3 - r^3\right)}$.

7. $\tau = \sqrt{\frac{\pi m\left(3r^2 + 2l^2\right)}{2M}}$.

8. $M_1 = \left(J + mr^2\right)\omega_1^2$; $M_C = mr^2 \omega_1^2$.

9. Обозначим $a = \frac{m_2}{m_3}$; $V_A^2 = 6g(R - r)\frac{a+2}{2a+9} \sin\varphi$;

$X_A = -5 m_2 g \frac{a+3}{2a+9} \sin\varphi$;

$Y_A = -m_3 g \frac{2{,}5a}{2a+9} \cos\varphi$;

$X_B = m_3 g \frac{5a^2 + 23a + 21}{2a+9} \sin\varphi$; $Y_B = \frac{3}{2} m_3 g \frac{a+2}{2a+9} \cos\varphi$.

10. $K = 0{,}238$.

11. Абсолютные ускорения: $a_1 = \frac{7}{11} g$, $a_2 = \frac{\sqrt{67}}{11} g$; ускорение тела *2* в его движении относительно тела *1* $a_2^r = \frac{9}{11} g$.

12. $\varphi^2 = 3g \sin\varphi \cos^3\varphi \left(4QR + Pl\cos\varphi\right) / \left(6QR^2 + Pl^2 \cos^4\varphi\right)$.

13. $V = \frac{mn}{M + mn} \sqrt{\frac{10}{7} gh \frac{2 + 5\cos\alpha}{7}}$.

14. $\dot{\varphi} = 20\omega$; $\omega = \frac{2\pi}{5R} \sqrt{\frac{C}{42m}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики : учеб. пособие для вузов. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика. Т. 2. Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Мерлин. – СПб. : Лань, 2004.
2. Курс теоретической механики : учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. ; под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.
3. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике / И.В. Мещерский. – СПб. : Лань, 1998. – 448 с.
4. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики : учебник для вузов / Н.Н. Никитин. – М. : Высшая школа, 2003. – 719 с.
5. Попов, А.И. Олимпиадные задачи по теоретической механике : учеб. пособие / А.И. Попов, В.И. Галаев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2001. – 84 с.
6. Попов, А.И. Введение в специальность. Олимпиадное движение как инструмент саморазвития бакалавра инноватики : учеб. пособие / А.И. Попов, Н.П. Пучков. – Тамбов : Изд-во тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 112 с.
7. Попов, В.И. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике / В.И. Попов, В.А. Тышкевич, М.П. Шумский. – Тамбов : Тамбов. ин-т хим. машиностр., 1992. – ч. 2. – 104 с., ч. 1. – 124 с.
8. Примеры и задачи в теоретической механике : учеб. пособие / Л.А. Булатов и др. – М. : Изд-во ассоциации строительных вузов, 2004. – 374 с.
9. Рудяк, В.Я. Лекции по теоретической механике. Ч. 1. Статика и кинематика / В.Я. Рудяк, В.А. Юдин. – Новосибирск : НГАСУ, 2004. – 248 с.
10. Сборник конкурсных задач олимпиад по теоретической механике 1987 – 1998 годов с анализом их решений / сост. : А.В. Чигарев, В.А. Акимов, Н.И. Горбач и др. ; под ред. А.В. Чигарева. – Мн. : Тэхналогія, 2000. – 281 с.
11. Сборник олимпиадных задач по теоретической механике : учеб. пособие / В.В. Дубинин, Г.М. Тушева, Н.Л. Нарская и др. ; под ред. В.В. Дубинина. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 56 с.
12. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С.М. Тарг. – М. : Высшая школа, 2004. – 416 с.
13. Цывильский, В.Л. Теоретическая механика : учебник для втузов / В.Л. Цывильский. – М. : Высшая школа, 2004. – 343 с.
14. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики : учебник для вузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – СПб. : Лань, 2004. – 768 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ