МАТЕМАТИКА

Часть II

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГОУ ВПО ТГТУ

УДК 51
ББК В12я73
М792

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Р е ц е н з е н т

Заведующий кафедрой алгебры и геометрии
ГОУ ВПО ТГУ им. Г.Р. Державина,
доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Булгаков

С о с т а в и т е л и:

Е.Е. Мордовина,
Е.А. Петрова

М792 Математика : задания контрольных работ : в III ч. Ч. II. / сост. : Е.Е. Мордовина, Е.А. Петрова. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 24 с. – 50 экз.

Содержат 10 вариантов типовых заданий для двух контрольных работ за второй семестр обучения с указанием теоретического материала, необходимого для их выполнения, список рекомендуемой литературы, а также примеры выполнения всех заданий.

Предназначены для студентов заочного отделения специальности 010502 «Прикладная информатика (в областях)». Могут быть использованы также для самостоятельной подготовки студентов дневного отделения.

УДК 51
ББК В12я73

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА

Задания контрольных работ
для студентов заочного отделения специальности
010502 «Прикладная информатика (в областях)»

Часть II

Тамбов
Издательство ТГТУ
2010

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Задания контрольных работ

Часть II

Составители:
МОРДОВИНА Елена Евгеньевна,
ПЕТРОВА Елена Анатольевна

Редактор Л.В. К о м б а р о в а
Инженер по компьютерному макетированию М.А. Ф и л а т о в а

Подписано в печать 03.12.2010
Формат 60 × 84/16. 1,39 усл. печ. л. Тираж 50 экз. Заказ № 611

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Студент-заочник специальности «Прикладная информатика (в областях)» во втором семестре обучения должен выполнить две контрольные работы по разделам математического анализа: «Функция одной переменной, её предел, дифференцируемость, исследование», «Функция нескольких переменных».

Номер своего варианта каждый студент определяет по последней цифре номера своей зачётной книжки (номера учебного шифра студента). При этом цифра 0 соответствует варианту № 10. Например, если номер зачётной книжки студента 5312, то в каждой контрольной работе он выполняет 2-й вариант, т.е. решает задания 1.2, 2.2, 3.2 и т.д.

Успешному выполнению контрольных работ способствует предварительное изучение соответствующего теоретического материала, указанного на страницах 9, 10. Найти теоретический материал можно в рекомендуемой литературе.

Контрольные работы должны быть аккуратно оформлены, содержать достаточно подробные решения всех заданий с необходимыми к ним пояснениями и рисунками. Условие задания должно быть написано перед его выполнением. При оформлении контрольных работ следует сохранять нумерацию заданий, данную в варианте. Замена заданий другими не допускается.

Примеры выполнения всех заданий контрольных работ представлены на страницах 11 – 22.

П р и м е ч а н и е. Задания, помеченные звёздочкой, не предназначены для обязательного решения, но их наряду с остальными должны уметь выполнять студенты, претендующие на экзаменационные оценки «хорошо» и «отлично».

ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, ЕЁ ПРЕДЕЛ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ, ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Найдите пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления:

1.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^2-4x+9}{9x^2-3x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+3x+4}{-9x^2-6x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{x^3+4x^2+9x-9}$; г) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{x^2+3x-4}{-x^2+3x+28}$;

д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x+5}{5x+9}\right)^{-x+9}$.

1.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-6x^3+7x^2-2}{4x^3-8x^2-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x+1}{-5x^2-9x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+x^2+3x+2}{2x+3}$; г) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{5x^2+x-6}{x^2-2x+1}$; д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+3}{3x-2}\right)^{-6x-4}$.

1.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-8x^2+4x+4}{8x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-x^2+4x+2}{-3x^2-7x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x+5}{x^3+4x^2+9x-9}$; г) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{-x^2-3x+28}{-3x^2+9x+12}$;

д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x+2}\right)^{-8x-4}$.

1.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x^2-5x+4}{-6x^3+3x^2+8x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+8x+6}{3x^2+5x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+7x+9}{x^2-2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{-x^2+3x+4}{x^2-8x+16}$; д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{6x-3}{6x-8}\right)^{6x+2}$.

1.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3-8x^2-9}{6x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^2-7x+1}{7x^2+8x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2-7}{8x^3+x^2+5x+8}$; г) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2+x-6}{4x^2-3x-10}$; д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5x-9}{5x+3}\right)^{8x-4}$.

1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x+5}{x^3+4x^2+9x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-3x^2-5x+8}{-8x^2-8x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^2+9}{x^2-3x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+x-2}$; д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+7}\right)^{7x+8}$.

1.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+8x^2+3x+7}{3x^2+2x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-x+3}{2x^2+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x+1}{x^2-9x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-x^2-x+2}{-3x^2-5x+2}$; д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-7}{4x+1}\right)^{2x-3}$.

1.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-4x^3+4x^2-4x}{9x^3+7x^2-5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-8x-3}{-3x^2+3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+4x^3+5}{8x^2+x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{4x^2+3x-1}{x^2+x}$;

д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x+6}{7x+9}\right)^{-2x-9}$.

1.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+3x^2+7x+9}{2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-8x^2-9}{6x^2+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-5x+4}{4x^3+5x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-10x+21}{x^2-x-6}$;

д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{8x-9}{8x+7}\right)^{-x-6}$.

1.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^2-7}{8x^3+x^2+5x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x+8}{-5x^2+5x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4+7x^2+9}{x^2-2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{3x^2-7x-6}$; д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{6x-2}{6x-4}\right)^{-7x+6}$.

2. Найдите производные указанных функций:

2.1. а) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^3}}$; б) $y=x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$; в) $y=\ln(x+\sqrt{2+x^2})$.

2.2. а) $y=x^2\sqrt{1-x^2}$; б) $y=\dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$; в) $y=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

2.3. а) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{x^2-2}}$; б) $y=e^{-x^2}\ln\sqrt[3]{1-3x}$; в) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x+\ln\cos x$.

2.4. а) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$; б) $y=\left(x^2-x+\dfrac{1}{2}\right)e^{2x+3}$; в) $y=\sqrt[3]{x^2+3\ln x}$.

2.5. а) $y=\left(\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^3$; б) $y=x^3\mathrm{arctg}\sqrt{x+2}$; в) $y=\ln\sqrt[6]{1+e^{6x}+e^{4x}}$.

2.6. а) $y=\sqrt[3]{(2x-3)(3-x^2)}$; б) $y=\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{4+\cos^2\frac{x}{4}}$;

в) $y=\ln\left(\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x}\right)$.

2.7. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x^2+1}$; б) $y=e^{3x}(3\sin 2x-3\cos 2x)$; в) $y=(2+\ln\sin 3x)^2$.

2.8. а) $y=\left(\dfrac{x}{3-4x^2}\right)^3$; б) $y=\sqrt{x}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; в) $y=\ln\sqrt{e^{3x}+e^{-3x}}$.

2.9. а) $y=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)$; б) $y=\dfrac{1}{14}\cdot\dfrac{1+\mathrm{tg}7x}{1-\mathrm{tg}7x}$; в) $y=\ln^3\left(1+e^{\frac{x^2}{3}}\right)$.

2.10. а) $y=\dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$; б) $y=\sqrt{1-4x^2}\arcsin 2x^2$; в) $y=\ln\sqrt{\mathrm{tg}\dfrac{x^2}{2}+4}$.

3.* Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, в точке $M_0(x_0,\ y_0)$:

3.1. $y=\sqrt{x+4}$, $M_0(-3,\ 1)$.

3.2. $y=\dfrac{x^4}{4}-27x+60$, $M_0(2,\ 10)$.

3.3. $y=x^2-7x+3$, $M_0(1,\ -3)$.

3.4. $y=x^3-5x^2+7x-2$, $M_0(1, 1)$.

3.5. $y=\sqrt{x^2+5}$, $M_0(2,\ 3)$.

3.6. $y=2x^3+3x^2+x-4$, $M_0(1,\ 2)$.

3.7. $y=x^2-16x+7$, $M_0(1,\ -8)$.

3.8. $y=\dfrac{x^2}{2}+7x-\dfrac{15}{2}$, $M_0(3,\ 9)$.

3.9. $y=x^3-2x^2+4x-7$, $M_0(2,\ 1)$.

3.10. $y=x^2-6x+2$, $M_0(2,\ -6)$.

4. Исследуйте методами дифференциального исчисления указанную функцию:

а) на монотонность и экстремумы;

б)* на выпуклость и вогнутость графика, и наличие у него асимптот.

Используя полученные результаты и проведя дополнительные исследования, постройте график заданной функции.*

4.1. $y=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$. 4.2. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$. 4.3. $y=\dfrac{x^2}{(1-x^2)^2}$.

4.4. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$. 4.5. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. 4.6. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

4.7. $y=\dfrac{x^2}{(1-x)^4}$. 4.8. $y=\dfrac{x}{(1+x)^3}$. 4.9. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$.

4.10. $y=\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$.

ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Даны функция $z = z(x, y)$ и точка $M(x_0, y_0)$. Найдите: а) градиент данной функции в точке M; б)* производную этой функции в точке M по направлению вектора $\overline{OM}$, где точка O – начало координат.

1.1. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $M(5, 3)$.

1.2. $z = \operatorname{arctg}(xy)$, $M(1, 1)$.

1.3. $z = x^2 \sin y$, $M(1, 0)$.

1.4. $z = ye^x - xe^y$, $M(1, -1)$.

1.5. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$, $M(-3, 4)$.

1.6. $z = e^{2x^2 + y^3}$, $M(-1, 1)$.

1.7. $z = \operatorname{arctg}(x^2 y^2)$, $M(2, -1)$.

1.8. $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(5, 12)$.

1.9. $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$, $M(0, 1)$.

1.10. $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, $M(-1, 1)$.

2. Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x, y)$.

2.1. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

2.2. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

2.3. $z = 2x^3 - x^2 + xy^2 - 4x + 3$.

2.4. $z = 8y^3 + x^3 - 6xy + 5$.

2.5. $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

2.6. $z = 10 - 3x^3 - 3y^3 + 9xy$.

2.7. $z = y^3 + x^2 - 3y + 2x$.

2.8. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

2.9. $z = 2xy - 2x - 6y + 5$.

2.10. $z = 8x^3 + y^3 - 6xy + 5$.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = z(x, y)$ в замкнутой области D, ограниченной заданными линиями:

3.1. $z = 2xy - x - 2y$, D: $y = 2x$, $x + y = 3$, $y = 0$.

3.2. $z = \dfrac{1}{2}x^2 + xy - y^2$, D: $y = x$, $y = 2$, $x = -1$.

3.3. $z = 2x^2 - xy + y^2$, D: $x + y = 1$, $x = 0$, $y = -1$.

3.4. $z = x^2 - 3xy + 2y$, D: $y = x^2$, $y = 4$.

3.5. $z = xy + 2y^2 - x^2 - y$, D: $x = 0$, $x + y = 2$, $y = 0$.

3.6. $z = 3x + y - xy$, D: $y = x$, $x = 0$, $y = 4$.

3.7. $z = 2x^2 + xy - 3y^2 - 2y$, D: $y = 3x$, $y = 3$, $x = 0$.

3.8. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 2x$, D: $y = 2x$, $y = x$, $x = 1$.

3.9. $z = xy - 3x^2 + 2y - x$, D: $y = 4x$, $y = 4$, $x = 0$.

3.10. $z = 3x^2 - 2xy + 2y - 6x$, D: $y = x$, $x + y = 2$, $y = 0$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 1

1. Понятие функции одной переменной. График функции. Обратная и сложная функции. Элементарные и основные элементарные функции. Монотонные и ограниченные функции.
2. Предел функции одной переменной в точке и на бесконечности. Понятия бесконечного предела функции в точке и при $x \to \infty$, одностороннего предела функции в точке. (*К заданию 1*).
3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины, их связь и основные свойства (*к заданию 1*).
4.* Первый и второй замечательные пределы, их применение (*к заданию 1*).
5. Свойства пределов. Неопределённости вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 1^{∞} и их раскрытие при нахождении пределов. (*К заданию 1*).
6.* Непрерывность функций в точке и на промежутке. Односторонняя непрерывность функции в точке. (*К заданию 4, б*).
7.* Классификация точек разрыва функции одной переменной (*к заданию 4, б*).
8. Производная функции в точке. Её геометрический смысл.
Связь дифференцируемости функции в точке с её непрерывностью. (*К заданиям 2, 3*).

9. Производная суммы, разности, произведения и частного функций (*к заданию 2*).

10. Производная сложной функции (к *заданию 2*).

11. Таблица производных основных элементарных функций. Производная постоянной. (*К заданию 2*).

12.* Уравнения касательной и нормали к графику функции в точке (*к заданию 3*).

13. Производные высших порядков функций одной переменной (*к заданию 4, б*).

14. Монотонность и экстремумы функций одной переменной (определения) (*к заданию 4, а*).

15. Необходимое условие экстремума функции одной переменной и его обобщение (*к заданию 4, а*).

16. Достаточное условие возрастания (убывания) функции на промежутке. Необходимое условие возрастания (убывания) функции на промежутке. (*К заданию 4, а*).

17. Первый и второй достаточные признаки экстремума функции одной переменной (*к заданию 4, а*).

18.* Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба (определения). Необходимое условие точки перегиба. Достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции. Достаточный признак точки перегиба (*К заданию 4, б*).

19.* Асимптоты графиков функций и их нахождение (*к заданию 4, б*).

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ 2

1. Функция двух переменных, её график, предел и непрерывность в точке. Функция нескольких переменных.

2. Частное и полное приращение функции двух переменных, её частные производные первого порядка, полный дифференциал. Дифференцируемость функции нескольких переменных.

3.* Производная функции двух (и более) переменных по направлению (*к заданию 1, б*).

4. Градиент скалярного поля и его связь с производной по направлению этого поля (*к заданию 1, а*).

5. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.

Теорема о независимости смешанной производной от последовательности дифференцирования по разным переменным.

6. Экстремум функции двух переменных (безусловный). Необходимые, достаточные условия экстремума (*к заданию 2*).

7. Условный экстремум функции двух переменных и его нахождение в простейших случаях (*к заданию 3*).

8. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области, их нахождение (*к заданию 3*).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для втузов : в 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высш.шк., 1997. – Ч. 1.

2. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / А.Ф. Бермант. – М. : Наука, 1973.

3. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу : учеб. пособие для втузов / Г.И. Запорожец. – М. : Высш. шк., 1964.

4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для втузов : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1985. – Т. 1.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1

1. Найдите пределы функций, не пользуясь средствами дифференциального исчисления:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+x+1}{5x^3+4x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-4x+5}{-2x^2+3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4+x^2-2}{4x^2+x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-5x+4}{3x^2-9x+6}$; д)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{x+3}$.

Выполнение задания:

а) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+x+1}{5x^3+4x^2+2x-3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{3}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = 0\,;$$

б) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+5}{-2x^2+3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}{-2+\frac{3}{x^2}} = -\frac{1}{2};$$

в) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^2-2}{4x^2+x+1} =$$

$$=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}-\frac{2}{x^4}}{\frac{4x^2}{x^4}+\frac{x}{x^4}+\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^4}}{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\infty\,;$$

П р и м е ч а н и е. Раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ в примерах под буквами а, б, в достигается делением числителя и знаменателя дроби на переменную в старшей степени.

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{3x^2-9x+6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-4)}{3(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-4)}{3(x-2)}=\frac{1-4}{3(1-2)}=1\,;$

П р и м е ч а н и е. Неопределённость вида $\frac{0}{0}$ в примере под буквой г устраняется после сокращения дроби на общий множитель числителя и знаменателя.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{x+3}=\left\{1^{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(3x-1)+3}{3x-1}\right)^{x+3}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{3}{3x-1}(x+3)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+9}{3x-1}}=e^1=e.$$

П р и м е ч а н и е. При нахождении пределов типа $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, неопределённость вида 1^{∞} устраняется с использованием известного замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, где $e\approx 2{,}7$. В примере под буквой д преобразования выражения, предел которого находится, позволяют применить эти формулы.

2. Найдите производные указанных функций:

а) $y=\sqrt{x}\sin 4x^2$; б) $y=\frac{e^{-x}}{1+x^2}$; в) $y=\ln^2\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)$.

Выполнение задания:

а) $y'=\left(\sqrt{x}\sin 4x^2\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\sin 4x^2+x^{\frac{1}{2}}\left(\sin 4x^2\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\sin 4x^2+$

$+x^{\frac{1}{2}}\cos 4x^2\left(4x^2\right)'=\frac{\sin 4x^2}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\cos 4x^2\,8x=\frac{\sin 4x^2}{2\sqrt{x}}+8x\sqrt{x}\cos 4x^2;$

б) $y'=\left(\frac{e^{-x}}{1+x^2}\right)'=\frac{\left(e^{-x}\right)'\left(1+x^2\right)-e^{-x}\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{e^{-x}(-x)'\left(1+x^2\right)-e^{-x}2x}{\left(1+x^2\right)^2}=$

$=\frac{-e^{-x}\left(1+x^2\right)-e^{-x}2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{-e^{-x}\left(1+x^2-2x\right)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{-e^{-x}(1-x)^2}{\left(1+x^2\right)^2};$

в) $y'=\left(\ln^2\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\right)'=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\left(\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\right)'=$

$=2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\frac{1}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)'=\frac{2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}\times$

$\times\left(2-\frac{3}{2\sqrt{1-4x^2}}\left(1-4x^2\right)'\right)=\frac{2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}\left(2-\frac{3(-8x)}{2\sqrt{1-4x^2}}\right)=\frac{2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}\times$

$\times\left(2+\frac{24x}{2\sqrt{1-4x^2}}\right)=\frac{2\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\left(4\sqrt{1-4x^2}+24x\right)}{2\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\sqrt{1-4x^2}}.$

3.* Составьте уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^2 - 5x + 4$, в точке $M_0(-1;\ 10)$.

Выполнение задания:

Уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0,\ y_0)$ имеют соответственно вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ и $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Для решаемой задачи

$$x_0 = -1,\ \ y_0 = 10,\ \ f'(x) = 2x - 5,\ \ f'(x_0) = f'(-1) = 2(-1) - 5 = -7\cdot$$

Уравнение $y - 10 = -7(x+1)$ или $7x + y - 3 = 0$ является уравнением касательной, а уравнение $y - 10 = \dfrac{1}{7}(x+1)$ или $x - 7y + 71 = 0$ есть уравнение нормали к заданной кривой в указанной точке.

4. Исследуйте методами дифференциального исчисления функцию $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$:

а) на монотонность и экстремумы;

б)* на выпуклость и вогнутость графика, и наличие у него асимптот.

Используя полученные результаты и проведя дополнительные исследования, постройте график заданной функции.*

Выполнение задания:

Область определения функции D: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

а) ***Исследование функции на монотонность и экстремумы*:**

1) Находим

$$y'(x) = \frac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - x^3 \cdot 4(x+1)}{4(x+1)^4} = \frac{2x^2(x+1)(3(x+1) - 2x)}{4(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

2) В соответствии с необходимым признаком экстремума функции ищем критические точки (подозрительные на экстремум), т.е. те, в которых $y'(x) = 0$ или $y'(x)$ не существует.

$y'(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Не существует $y'(x)$ при $x = -1$, но $x = -1$ не принадлежит области определения функции D, поэтому в ней не может достигаться экстремум.

3) Разбиваем критическими точками область определения функции на промежутки и определяем знак $y'(x)$ на каждом из них методом проб. Распределение знаков $y'(x)$ изображаем на рис. 1.

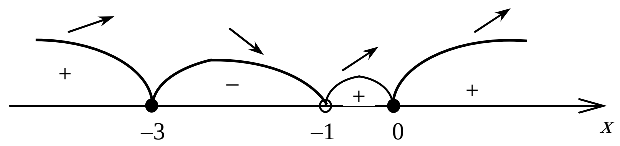


Рис. 1

Далее применяем достаточный признак возрастания (убывания) функции на промежутке.

Так как $y'(x) > 0$ при $x < -3$, а также при $x > -1$, то на промежутках $(-\infty, -3)$, $(-1, +\infty)$ функция возрастает. На интервале $(-3, -1)$ $y'(x) < 0$, следовательно функция на нём убывает. На рисунке 1 возрастание или убывание функции на промежутках условно показано стрелками, направленными соответственно вверх или вниз.

4) Применяем достаточный признак экстремума функции. Так как при переходе слева направо через точку $x = -3$ $y'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум.

$$y(-3) = \frac{(-3)^3}{2(-3+1)^2} = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8}\cdot$$

Точка $x = -1$ не является точкой экстремума, так как не принадлежит области определения функции.

б) ***Выявление промежутков выпуклости и вогнутости графика функции, точек перегиба*:**

1) Находим

$$y''(x) = \left(\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right)' = \frac{\left(x^2(x+3)\right)' \cdot 2(x+1)^3 - x^2(x+3)\left(2(x+1)^3\right)'}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{\left(2x(x+3) + x^2\right) \cdot 2(x+1)^3 - x^2(x+3)6(x+1)^2}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{2x(x+1)^2\left((x+1)(2x+6+x)-3x(x+3)\right)}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{x\left((x+1)(3x+6)-3x(x+3)\right)}{2(x+1)^4} = \frac{3x\left((x+1)(x+2)-x(x+3)\right)}{2(x+1)^4} =$$

$$= \frac{3x\left(x^2+x+2x+2-x^2-3x\right)}{2(x+1)^4} = \frac{3x\cdot 2}{2(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

2) В соответствии с необходимым условием точки перегиба графика функции ищем точки подозрительные на перегиб, т.е. те, в которых $y''(x)=0$ или $y''(x)$ не существует.

$y''(x)=0$ при $x = 0$. Не существует $y''(x)$ при $x = -1$, но $x = -1$ не принадлежит области D.

3) Разбиваем подозрительными на перегиб точками область определения функции на промежутки и определяем знак $y''(x)$ на каждом из них методом проб. Распределение знаков $y''(x)$ изображаем на рис. 2.

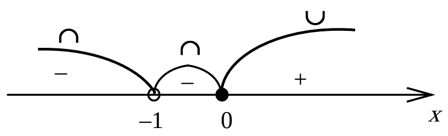


Рис. 2

Далее применяем достаточный признак выпуклости (вогнутости) графика функции на промежутке.

Так как $y''(x) < 0$ при $x < -1$, а также при $-1 < x < 0$, то на промежутках $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ график функции выпуклый. При $x > 0$ $y''(x) > 0$, следовательно на промежутке $(0, +\infty)$ график функции вогнутый. На рис. 2 выпуклость или вогнутость графика функции на промежутках условно показана дугами.

4) Выявляем точки перегиба графика функции с использованием достаточного признака. Так как при переходе слева направо через значение $x = 0$ $y''(x)$ меняет знак, то точка заданной кривой с абсциссой $x = 0$ является точкой перегиба. При этом $y(0)=0$.

***Нахождение асимптот графика функции*:**

1) Исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty, \ \lim_{x\to -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty,$$

следовательно, в точке $x = -1$ заданная функция имеет бесконечный разрыв, значит $x = -1$ – уравнение вертикальной асимптоты. Уравнение наклонной асимптоты ищем в виде $y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$.

Для решаемой задачи $k = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{x^3}{2(x+1)^2 x} = \lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2}$,

$$b = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{2(x+1)^2} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{2(x+1)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1,$$

уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = \frac{1}{2}x - 1$.

***Дополнительные исследования для построения графика функции*:**

1) Выявим, является ли функция чётной, нечётной или общего вида

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = -\frac{x^3}{2(1-x)^2}.$$

Заданная функция есть функция общего вида (так как $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$), её график не является симметричным ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат.

2) Находим пределы функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty, \ \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

3) Находим точки пересечения графика функции с координатными осями.
В данном случае легко определить, что при $x = 0$ $y = 0$, а при $y = 0$ $x = 0$.
График имеет одну точку пересечения с осями координат – (0; 0).
С учётом всех приведённых выше исследований он изображён на рис. 3.

$y=\frac{1}{2}x-1$

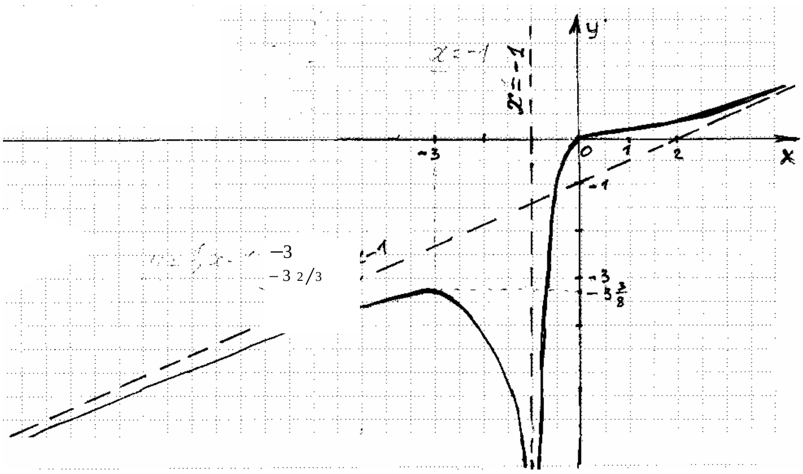


Рис. 3

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 2

1. Даны функция $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ и точка $M(-2, 1)$. Найдите:
а) градиент данной функции в точке M;
б)* производную этой функции в точке M по направлению вектора $\overrightarrow{OM}$, где точка O – начало координат.
Выполнение задания:
а) Градиент функции $z = z(x, y)$ в точке $M(x, y)$ находится по формуле

$$\overline{\text{grad}}\, z(M) = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}(M),\ \frac{\partial z}{\partial y}(M)\right\}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

В точке M, т.е. при $x=-2$ и $y=1$ $\frac{\partial z}{\partial x}(M) = \frac{-2}{(-2)^2+1^2} = -\frac{2}{5}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{1}{(-2)^2+1^2} = \frac{1}{5}$.

Таким образом, $\overline{\text{grad}}\, z(M) = \left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$.

б) Производная функции $z = z(x, y)$ в точке $M(x, y)$ в направлении вектора $\vec{\ell} = \overrightarrow{OM}$ находится по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}(M)\cos\beta, \qquad (*)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{\ell} = \overrightarrow{OM}$.

$$\overrightarrow{OM} = \{-2,\ 1\},\ \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}.$$

$$\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = -\frac{2}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y}(M) = \frac{1}{5}$$ (найдены в пункте «а»).

Подставив в формулу $(*)$ найденные значения, получим

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}(M) = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

О т в е т: $\overline{\text{grad}}\, z(M) = \left\{-\frac{2}{5},\ \frac{1}{5}\right\}$, $\frac{\partial z}{\partial \ell}(M) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Исследуйте на экстремум функцию $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

Выполнение задания:

1) Заданная функция определена при любых действительных значениях переменных x и y $(x,\ y \in R)$. Находим её частные производные:

$$z'_x = 6x^2 - 6y,\ z'_y = 6y^2 - 6x.$$

2) В соответствии с необходимым признаком экстремума функции и с учётом того, что частные производные заданной функции определены при любых $x, y \in R$, ищем точки, подозрительные на экстремум, из системы $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases}$, которая для нашего случая имеет вид $\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ 6y^2 - 6x = 0 \end{cases}$. Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, & (1) \\ y^2 - x = 0. & (2) \end{cases}$$

Выразив из уравнения (1) переменную y через x и подставив в уравнение (2), перейдём к равносильной системе $\begin{cases} y = x^2, & (3) \\ x^4 - x = 0. & (4) \end{cases}$

$(4) \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$ (так как $x^2 + x + 1 \neq 0$).

Из последнего уравнения находим корни уравнения (4) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Подставляя их поочерёдно в уравнение (3), получим $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Таким образом, заданная функция имеет две стационарные точки $M_1(0,\ 0)$ и $M_2(1,\ 1)$ (в них может достигаться экстремум).

3) Для выявления, будут ли найденные стационарные точки M_1 и M_2 являться точками экстремума, применим достаточное условие экстремума функции в точке. Для этого найдём вторые частные производные заданной функции и обозначим их для удобства буквами A, B, C:

$$z''_{xx} = 12x = A,$$

$$z''_{xy} = -6 = B,$$

$$z''_{yy} = 12y = C.$$

Составим выражение $B^2 - AC = (-6)^2 - 12x \cdot 12y = 36 - 144xy$.

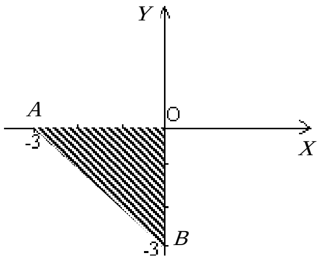
В точке M_1, т.е. при $x = 0$ и $y = 0$ $B^2 - AC = 36 > 0$, следовательно, эта точка не является точкой экстремума. В точке M_2, т.е. при $x = 1$ и $y = 1$ $B^2 - AC = 36 - 144 = -108 < 0$, следовательно, в точке M_2 достигается экстремум, причём минимум, так как $A = 12 > 0$.

Значение заданной функции в точке M_2

$$z_{\min}(1,\ 1) = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 5 = 3.$$

О т в е т: $z_{\min}(1,\ 1) = 3$.

3 Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в замкнутой области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.



Выполнение задания:

Заданная функция определена при любых действительных значениях переменных x и y. Область D, ограниченная указанными линиями, изображена на рис. $(\Delta\ AOB)$.

1) ***Нахождение критических точек заданной функции*:**

Частные производные функции $z'_x = 2x - y + 1$ и $z'_y = 2y - x + 1$ определены при любых $x,\ y \in R$, поэтому критическими точками функции будут являться её стационарные точки, которые найдём из системы

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, & (1) \\ 2y - x + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Выразив из уравнения (1) переменную y через x и подставив в уравнение (2), перейдём к равносильной системе

$$\begin{cases} y = 2x + 1, \\ 2(2x+1) - x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 2x + 1, & (3) \\ 3x + 3 = 0. & (4) \end{cases}$$

Из уравнения (4) $x=-1$. Из уравнения (3) с учётом найденного значения x $y=-1$.

Итак, заданная функция имеет единственную стационарную точку $M_1(-1,\ -1)$, причём она принадлежит области D. (В точке M_1 может достигаться экстремум.)

2) ***Нахождение критических*** (в данном случае только стационарных) ***точек заданной функции на границе области D***:

2.1. При $x=0$ $z=y^2+y$. Тогда $z'(y)=2y+1$. $z'(y)=0$, если $2y+1=0$, откуда $y=-\frac{1}{2}$.

Итак, в точке $M_2\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, принадлежащей границе области D, может достигаться условный экстремум.

2.2. При $y=0$ $z=x^2+x$. Тогда $z'(x)=2x+1$. $z'(x)=0$ при $x=-\frac{1}{2}$. Точка $M_3\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, принадлежащая границе области D, может быть точкой условного экстремума.

2.3. Из уравнения прямой $x+y=-3$ выразим переменную y через x и подставим в заданную функцию, получим, что при $y=-3-x$

$$z=x^2+(-3-x)^2-x(-3-x)+x+(-3-x)$$

или $z=3x^2+9x+6$.

$$z'(x)=6x+9.$$

$z'(x)=0$, если $6x+9=0$, откуда $x=-\frac{3}{2}$.

Тогда $y=-3-\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$.

В точке $M_4\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, принадлежащей границе области D, может достигаться условный экстремум.

3) ***Вычисление значений заданной функции в критических точках, найденных в пунктах* 1, 2, *а также в угловых точках области D и выбор наибольшего и наименьшего***:

$z_1(-1,-1)=(-1)^2+(-1)^2-(-1)\cdot(-1)+(-1)+(-1)=-1$,

$z_2\left(0,-\frac{1}{2}\right)=0^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$,

$z_3\left(-\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}$,

$z_4\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$,

$z_O(0,0)=0$,

$z_A(-3,0)=(-3)^2+0^2-(-3)\cdot 0+(-3)+0=6$,

$z_B(0,-3)=6$.

Сравнивая эти значения, находим, что наибольшее из них равно 6 и достигается в точках $A(-3,0)$, $B(0,-3)$, а наименьшее значение равно –1 и достигается в точке $M_1(-1,-1)$.

П р и м е ч а н и е. *Все найденные в пунктах 1, 2 точки желательно изобразить на координатной плоскости вместе с областью D.*

О т в е т: $z_{\text{наиб}}=6$ достигается в точках $A(-3,\ 0)$ и $B(0,\ -3)$, $z_{\text{наим}}=-1$ достигается в точке $M_1(-1,-1)$.

СОДЕРЖАНИЕ