

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

# **РАВНОВЕСИЕ ТЕЛ ПРИ УЧЁТЕ ТРЕНИЯ**

Методические указания к курсовым работам  
для студентов 1, 2 курсов технических специальностей  
всех форм обучения



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2010

УДК 531.3(075)  
ББК В.23я73-5  
К901

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры ТММ и ДМ ТГТУ  
*Ю.В. Родионов*

К901      Равновесие тел при учёте трения : метод. указ. / сост. : Ю.В. Кулешов, В.И. Галаев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – 28 с. – 100 экз.

Приводятся краткие справочные сведения по учёту различных видов сухого трения при исследовании равновесия механических систем. Представлены контрольные задания и примеры их выполнения, а также пример использования угла и конуса трения.

Предназначены для студентов 1, 2 курсов технических специальностей всех форм обучения.

УДК 531.3(075)  
ББК В.23я73-5

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный  
технический университет» (ТГТУ), 2010

## ВВЕДЕНИЕ

При выполнении расчётов по статике механических систем с учётом различных видов сухого трения (трения скольжения, сцепления, трения качения, трения верчения, трения гибких тел о поверхности), часто получаются качественно отличные результаты от случаев, когда трением пренебрегают. Так, если равновесие механической системы, изображённой на рис. 2.1, без учёта трения возможно только при фиксированных значениях её параметров (масс тел, углов наклона, коэффициентов трения и других), то при учёте трения равновесие возможно при изменении какого-либо параметра системы, например массы тела 2 –  $m_2$  в определённом диапазоне. Это обстоятельство характерно для механических систем при исследовании их равновесия с учётом трения и иллюстрировано примером 1. Поэтому оценка влияния трения на существование равновесных состояний механических систем имеет важное значение и должна выполняться всегда, когда, по крайней мере, некоторые тела системы подвержены влиянию трения.

Данные указания содержат краткие справочные сведения по различным видам сухого трения, а также контрольные задания и примеры их выполнения. Рассмотрен также один пример на применение таких важных понятий статики, как угол и конус трения.

Методические указания предназначены для студентов всех технических специальностей дневного и заочного отделений и могут быть использованы для курсовых работ по статике механических систем.

## 1. ОСНОВНЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО УЧЁТУ ТРЕНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ

### 1.1. Определения

Сопrotивление, возникающее при стремлении сдвинуть или при движении одного тела по поверхности другого, называется трением.

Трение тел представляет собой сложную, недостаточно изученную проблему, включающую в себя задачи механического, физического и химического взаимодействия тел.

Различают сухое трение, когда между трущимися поверхностями тел нет ничего, кроме атмосферы, и жидкостное трение, когда между трущимися поверхностями тел располагается слой смазки и трущиеся поверхности непосредственно не соприкасаются.

Под воздействием сил может наблюдаться относительный покой тел или движение одного тела по поверхности другого. Трение при покое тел называется ещё сцеплением.

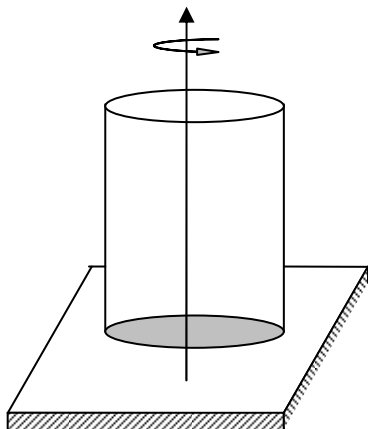


Рис. 1.1

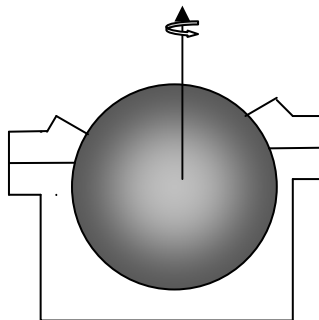


Рис. 1.2

По виду относительных движений соприкасающихся тел различают трение скольжения, трение качения и трение верчения.

Трение скольжения отличается тем, что одна и та же поверхность контакта одного тела соприкасается с различными частями поверхности другого тела (пример – скольжение лыж).

В случае трения качения различные части поверхности одного тела последовательно контактируют с соответствующими частями поверхности другого тела (пример – качение колеса по рельсу).

Трение верчения возникает в случае, когда система сил, приложенных к одному из контактирующих тел, стремится вращать или вращает это тело относительно второго тела вокруг оси, пересекающей поверхность контакта. Примерами трения верчения являются сопротивление вращению цилиндра вокруг его оси со стороны опорной плоскости (рис. 1.1), вращение сферического тела в сферической обойме (рис. 1.2).

## 1.2. Сцепление тел и трение скольжения

Пусть система сил  $(\bar{P}_k : k = \overline{1, n})$  стремится сдвинуть тело 1 по поверхности тела 2 и одновременно прижимает его к телу 2 (рис. 1.3).

При большом увеличении зоны 3 контакта тел наблюдается шероховатость поверхностей (рис. 1.4).

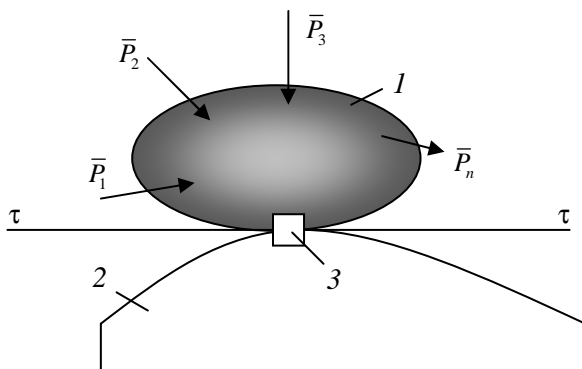


Рис. 1.3

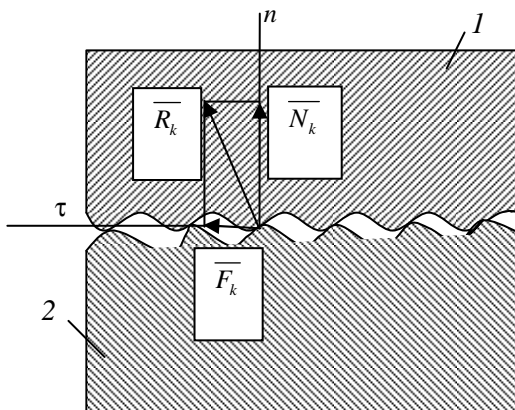


Рис. 1.4

Под действием внешних сил ( $\bar{P}_k : k = \overline{1, n}$ ) выступы поверхностей тел контактируют и деформируются. Полная реакция  $\bar{R}_k$  некоторого выступа тела 2 может быть разложена на составляющую  $\bar{F}_k$ , расположенную в касательной к поверхностям тел плоскости  $\tau$  и составляющую  $\bar{N}_k$  нормальную к этой плоскости. Сумма всех касательных составляющих  $F_{\text{тр}} = \sum F_k$  является силой трения. Сумма всех нормальных составляющих  $N = \sum N_k$  образует нормальную реакцию тела 2.

Силы  $\bar{F}_k$  механического взаимодействия тел называются силами трения когезии.

В зоне контакта тел проявляются также атомное, молекулярное и ионное взаимодействия. Силы таких взаимодействий называются силами трения адгезии.

В современной трактовке закономерности сухого трения когезии таковы:

1. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого тела в общей касательной плоскости, проведённой к телам через площадку контакта, возникает сила сцепления (сила трения покоя)  $\bar{F}_{\text{цл.к}}$ , направленная в сторону, противоположную возможному относительному движению тела. В зависимости от действующих на тело сил величина силы сцепления может принимать любое значение в интервале

$$0 \leq F_{\text{цл.к}} \leq F_{\text{цл.к}}^{\text{max}}. \quad (1.1)$$

2. Максимальная (предельная) сила сцепления пропорциональна нормальному давлению тела на опорную поверхность (или нормальной реакции опорной поверхности)

$$F_{\text{цл.к}}^{\text{max}} = f_{\text{цл.к}} N. \quad (1.2)$$

3. Максимальная сила сцепления слабо зависит от величины площади  $S$  соприкосновения тел и в расчётах, в ограниченных диапазонах изменения площади, этой зависимостью можно пренебречь.

4. При скольжении тела по поверхности другого на него действует сила трения скольжения. Направление этой силы противоположно направлению скорости тела. Величина силы трения скольжения пропорциональна нормальному давлению тела на опорную поверхность (или нормальной реакции опорной поверхности)

$$F_{\text{тр.к}} = f_k N, \quad (1.3)$$

где  $f_k$  – коэффициент трения скольжения.

5. Коэффициенты сцепления  $f_{\text{цл.к}}$  и трения скольжения  $f_k$  зависят от материалов контактирующих тел, нормального давления, величины площади контакта тел и параметров физического состояния трущихся поверхностей тел и зоны контакта (чистоты обработки поверхностей, температуры, влажности, степени загрязнения, интенсивности и вида радиационного облучения, напряжённостей электрического и магнитного полей и других). Коэффициент трения скольжения зависит также от относительной скорости скольжения тел. В расчётах, для ог-

раниченных диапазонов изменения параметров, влияющих на силу трения, полагают  $f_{\text{ц.к}} = \text{const}$  и  $f_k = \text{const}$ .

6. Коэффициент трения скольжения обычно меньше коэффициента сцепления

$$f_k < f_{\text{ц.к}}. \quad (1.4)$$

Для сил сцепления адгезии и трения адгезии применяют формулы:

$$F_{\text{ц.а}}^{\text{max}} = f_{\text{ц.а}} S; \quad (1.5)$$

$$F_{\text{тр.а}}^{\text{max}} = f_a S, \quad (1.6)$$

где коэффициенты  $f_{\text{ц.а}}$ ,  $f_a$  наряду с параметрами, от которых зависят  $f_{\text{ц.к}}$ ,  $f_k$ , зависят также от параметров физико-химических характеристик взаимодействующих тел. Полные силы сцепления и трения скольжения можно представить в форме:

$$F_{\text{ц}}^{\text{max}} = F_{\text{ц.к}}^{\text{max}} + F_{\text{ц.а}}^{\text{max}} = f_{\text{ц.к}} N + f_{\text{ц.а}} S = f_{\text{ц}} N; \quad (1.7)$$

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр.к}} + F_{\text{тр.а}} = f_k N + f_a S = f N, \quad (1.8)$$

где

$$f_{\text{ц}} = f_{\text{ц.к}} + \frac{S}{N} f_{\text{ц.а}} - \quad (1.9)$$

полный коэффициент сцепления;

$$f = f_k + \frac{S}{N} f_a - \quad (1.10)$$

полный коэффициент трения скольжения.

Значение коэффициентов трения для разных контактирующих тел приведены в литературе [1] и [2]. Для некоторых контактирующих тел коэффициенты сцепления и трения скольжения имеют следующие значения:

железо-железо:  $f_{\text{ц}} = 0,15$ ;  $f = 0,14$ ;

железо-чугун:  $f_{\text{ц}} = 0,19$ ;  $f = 0,18$ ;

сталь-лёд:  $f_{\text{ц}} = 0,02 - 0,03$ ;  $f = 0,015$ .

**Углы и конусы сцепления и трения.** При увеличении силы  $\bar{Q}$ , стремящейся сдвинуть тело по негладкой поверхности (рис. 1.5) угол между нормальной  $\bar{N}$  и полной реакцией  $\bar{R}$  поверхности начинает возрастать, так как возрастает сила сцепления. При достижении силами  $\bar{F}_{\text{ц}}$ ,  $\bar{R}$  своих максимальных значений  $\bar{F}_{\text{ц}}^{\text{max}}$ ,  $\bar{R}^{\text{max}}$  угол, образуемый нормальной реакцией  $\bar{N}$  и полной реакцией  $\bar{R}^{\text{max}}$ , достигает при покое тела, своего максимального значения равно  $\varphi_{\text{ц}}$ . Этот макси-

мальный угол  $\varphi_{\text{сц}}$ , который образуется нормальной реакцией  $\bar{N}$  с полной реакцией поверхности  $\bar{R}^{\text{max}}$ , построенной на максимальной силе сцепления  $\bar{F}_{\text{сц}}^{\text{max}}$ , называется углом сцепления. Рассматривая треугольник  $ABC$  на рис. 1.5, находим:

$$\text{tg}(\varphi_{\text{сц}}) = \frac{F_{\text{сц}}^{\text{max}}}{N} = f_{\text{сц}}, \quad \varphi_{\text{сц}} = \text{arctg}(f_{\text{сц}}). \quad (1.11)$$

При скольжении тела по опорной поверхности сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = fN$  вместе с нормальной реакцией  $\bar{N}$  образуют полную реакцию  $\bar{R}$  (рис. 1.6), которая, в свою очередь, образует с нормальной реакцией  $\bar{N}$  угол  $\varphi$ , называемый углом трения. Причём, аналогично случаю сцепления

$$\text{tg}(\varphi) = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = f, \quad \varphi = \text{arctg}(f). \quad (1.12)$$

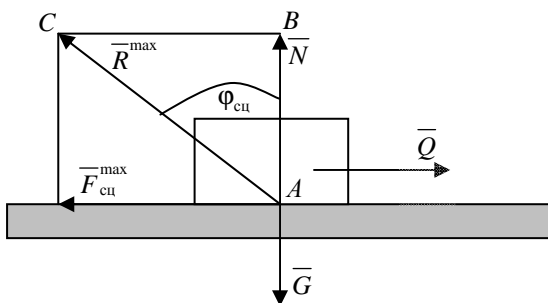


Рис. 1.5

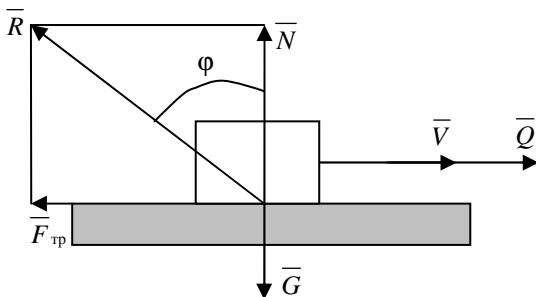


Рис. 1.6



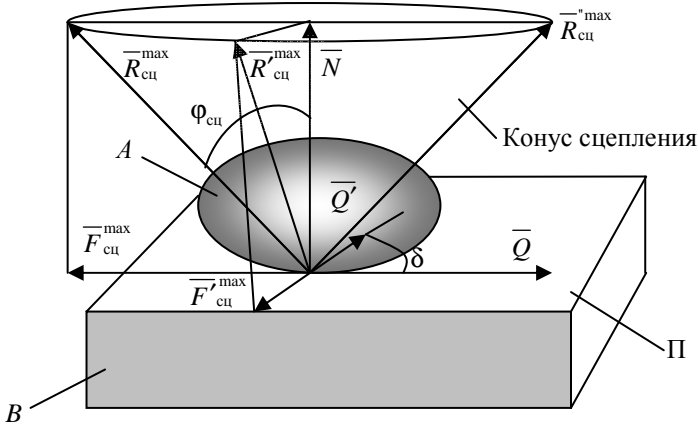


Рис. 1.7

Перейдём теперь к определению понятий конуса сцепления и конуса трения. Будем поворачивать силу  $\bar{Q}$ , действующую на тело  $A$  (рис. 1.7), в плоскости  $\Pi$ , перпендикулярной к нормальной реакции  $\bar{N}$ . При повороте на любой угол  $\delta$  выбираем значение этой силы  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}'$ , ..., равное максимальной силе сцепления. Полная максимальная реакция опорного тела в результате поворота силы  $\bar{Q}$  на угол  $360^\circ$  вокруг нормальной реакции опишет коническую поверхность с вершиной в точке контакта тел, называемую конусом сцепления. В любом положении на поверхности конуса сцепления полная максимальная реакция  $\bar{R}^{\max}$  образует с нормальной реакцией  $\bar{N}$  угол сцепления  $\varphi_{\text{сц}}$ . Если коэффициент сцепления  $f_{\text{сц}}$  при любом направлении силы  $\bar{Q}$  в плоскости  $\Pi$  одинаков, то конус будет круговым и прямым, а если неодинаков, то некруговым.

Аналогично, при скольжении тела по опорной поверхности в различных направлениях (рис. 1.8) полная реакция  $\bar{R}$  образует конус трения. Причём образующая конуса наклонена к нормальной реакции  $\bar{N}$  под углом трения  $\varphi$ . Ввиду того, что коэффициент сцепления обычно больше коэффициента трения, то  $\varphi_{\text{сц}} > \varphi$  и конус трения находится внутри конуса сцепления (рис. 1.9).

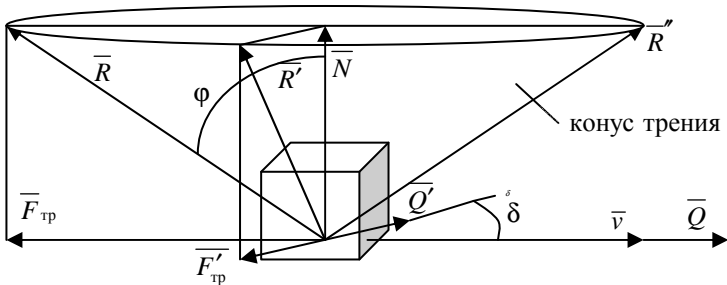


Рис. 1.8

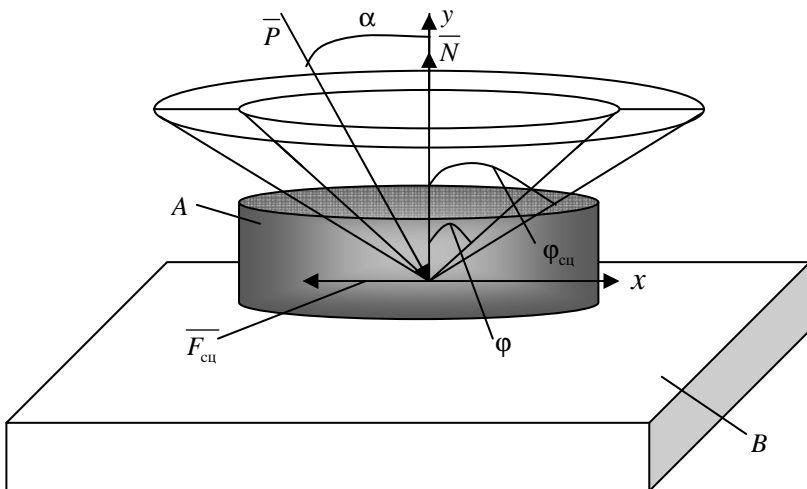


Рис. 1.9

Получим теперь условие, при выполнении которого тело  $A$  остаётся в покое относительно тела  $B$ . Предположим, что на тело  $A$  действует равнодействующая  $\vec{P}$  активных сил и угол, который она образует с нормальной реакцией, равен  $\alpha$ . Запишем уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0: P \sin(\alpha) - F_{\text{сц}} = 0; \quad (1.13)$$

$$\sum F_{ky} = 0: -P \cos(\alpha) + N = 0. \quad (1.14)$$

Но при покое тела  $A$

$$F_{\text{сц}} \leq F_{\text{сц}}^{\text{max}} = f_{\text{сц}} N. \quad (1.15)$$

Определяя из (1.13)  $F_{\text{сц}}$ , а из (1.14) –  $N$ , и подставляя их в (1.15), получаем:

$$P \sin(\alpha) \leq f_{\text{цн}} P \cos(\alpha).$$

Отсюда

$$\text{tg}(\alpha) \leq f_{\text{цн}} = \text{tg}(\varphi_{\text{цн}}) \quad (1.16)$$

и, следовательно, при покое

$$\alpha \leq \varphi_{\text{цн}}. \quad (1.17)$$

Таким образом, можно сформулировать следующее геометрическое условие покоя тела при учёте сцепления. Если равнодействующая активных сил, действующих на тело, находится внутри или на поверхности конуса сцепления, то независимо от её величины тело остаётся в покое (явление самоторможения или самозаклинивания), а если она находится вне конуса сцепления, то покой тела невозможен ни при каких значениях величины этой равнодействующей.

Аналогично, если тело двигалось и  $P \sin(\varphi) = F_{\text{тр}} = fN = fP \cos(\varphi)$ , т.е. равнодействующая находится на поверхности конуса трения, то на тело действует уравновешенная система сил и тело будет оставаться в движении. Если же оно находилось в состоянии покоя, то оно и будет оставаться в покое. То же самое справедливо, если  $\varphi < \alpha \leq \varphi_{\text{цн}}$ . Если же равнодействующая находится внутри конуса трения, то она не может вызвать движение, ни поддержать его, если оно существовало. Следовательно, состояние тела можно описать следующими неравенствами:

$\alpha < \varphi$  – покой;  $\alpha > \varphi_{\text{цн}}$  – движение;  $\varphi \leq \alpha \leq \varphi_{\text{цн}}$  – покой, если до приложения силы тело находилось в покое и движение, если до приложения силы тело двигалось.

### 1.3. Трение качения

Рассмотрим качение абсолютно твердого цилиндрического катка по деформируемой поверхности. Каток и поверхность контактируют по площадке с дугой  $CD$ . Силы реакции поверхности образуют систему сил, приводящуюся к произвольной плоской системе касательных  $\overline{T}_k$  и нормальных  $\overline{N}_k$  к поверхности катка сил, расположенных в вертикальной плоскости симметрии катка. Выполним эквивалентные преобразования системы сил, действующих на каток (рис. 1.10) в соответствии с теоремой Пуансо.

На рисунках изображены:  $\overline{P}$ ,  $\overline{Q}$ ,  $\overline{F}_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) активные силы, действующие на каток;

$M_{\text{тк}}$  – главный момент сил реакций, называемый моментом трения качения. При увеличении горизонтальной составляющей главного вектора  $R_x$  и величины главного момента активных сил  $M_A$ , стремя-

щихся катить каток, например вправо, плечо пары  $(\bar{N}, -\bar{N})$  возрастает и достигает предельного значения  $\delta = \max d$ . При дальнейшем увеличении  $R_x, M_A$  покой катка нарушается. Таким образом, система сил в предельном состоянии выглядит так, как показано на рис. 1.11.

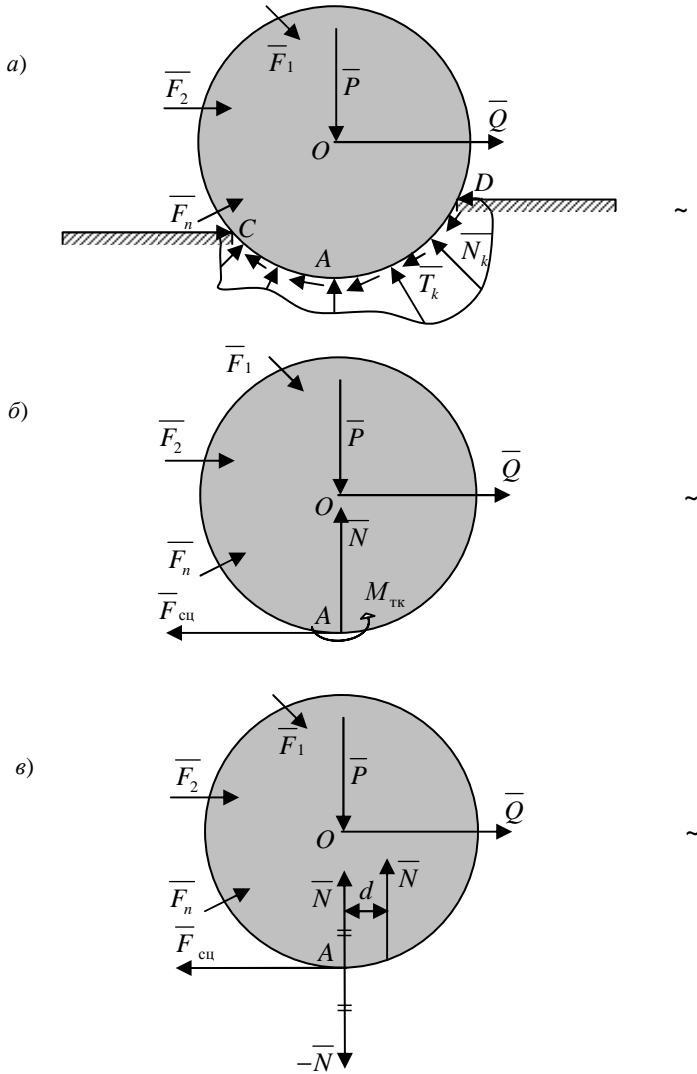


Рис. 1.10

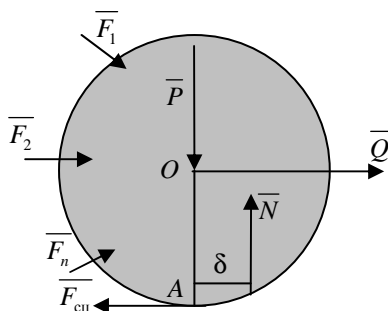


Рис. 1.11

Нормальная реакция поверхности смещена от вертикального диаметра катка в сторону, куда каток стремится катиться под действием активных сил, на величину  $\delta$ .

$\delta$  – называется коэффициентом трения качения.

Закономерности для момента трения качения таковы:

1. Момент трения качения противоположен направлению, в котором активные силы стремятся катить каток, и изменяется в пределах

$$0 \leq M_{\text{тк}} \leq M_{\text{тк}}^{\text{max}}. \quad (1.18)$$

2. Максимальный момент трения качения в ограниченном диапазоне изменения радиуса катка не зависит от радиуса и пропорционален давлению катка на поверхность или нормальной реакции поверхности:

$$M_{\text{тп}}^{\text{max}} = \delta N. \quad (1.19)$$

3. Коэффициент трения качения  $\delta$  зависит от материалов катка и поверхности опорного тела и их физического состояния.

Коэффициент трения качения вагонного колеса по стальному рельсу составляет, например,  $\delta = 0,5$  мм.

#### 1.4. Трение верчения

При вращении вала в подпятнике (рис. 1.12, а) момент трения верчения может быть найден интегрированием момента верчения, действующего на элементарную площадку контакта вала и подпятника  $dM_{\text{тв}}$  по всей площади контакта радиуса  $R$  (рис. 1.12):

$$M_{\text{тв}} = \int_{\sigma} dM_{\text{тв}}.$$

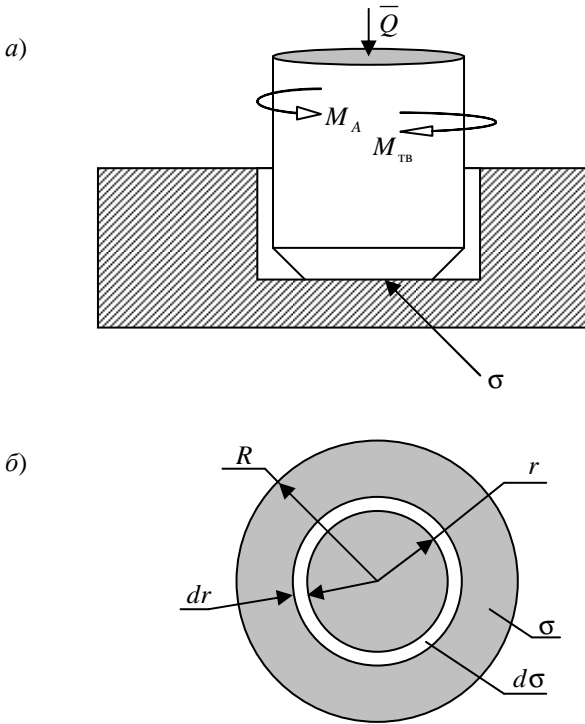


Рис. 1.12

Причём 
$$dM_{\text{TB}} = frd\sigma dQ = fr2\pi r dr \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{2fQ}{R^2} r^2 dr,$$

где  $f$  – коэффициент трения вала о плиту подпятника;  $Q$  – величина осевой силы давления вала на плиту. Интегрируя, находим:

$$M_{\text{TB}} = \frac{2fQ}{R^2} \int_0^R r^2 dr;$$

$$M_{\text{TB}} = \frac{2}{3} fQR. \quad (1.20)$$

### 1.5. Трение гибких тел

Если гибкая нить контактирует с цилиндром по дуге с центральным углом  $\alpha$  (рис. 1.13), то зависимость между силами  $\bar{T}_1$  и  $\bar{T}_2$  натяжения ветвей нити в состоянии её предельного равновесия может быть

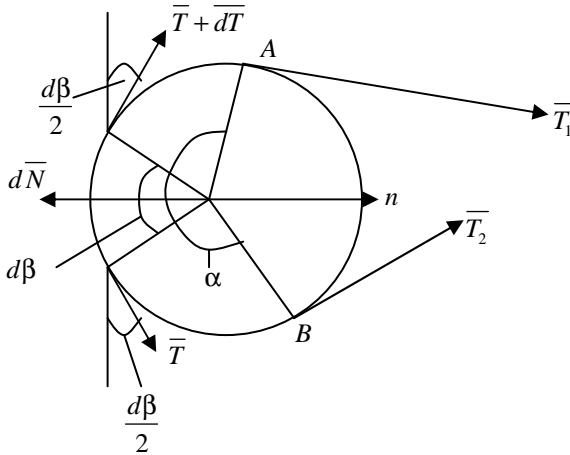


Рис. 1.13

найдена интегрированием дифференциального уравнения элементарного участка нити с углом охвата  $d\beta$  в проекции на нормаль  $n$ . При тенденции сдвинуть нить в направлении вектора  $\bar{T}_1$  имеем:

$$\sum \bar{F}_{kn} = 0: (T + T + dT) \frac{d\beta}{2} - dN = 0.$$

Или для малого угла  $d\beta$  с учётом закона трения

$$dT = fdN.$$

Получаем:

$$dT = fTd\beta.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln \frac{T_1}{T_2} = f\alpha$$

и

$$T_1 = T_2 e^{f\alpha}. \quad (1.21)$$

## 2. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Механические системы, изображённые на рис. 2.1,  $a - \kappa$ , состоят из тел 1 и 2, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ . Массы других тел пренебрежимо малы. На рисунке 2.1,  $a - \kappa$  кривошип  $OA$  растянут и прижимает тело 2 к телу 3 с постоянной силой  $P$ . Отношение радиусов больших и малых окружностей ступенчатых тел равно  $R/r = 2$ . Учесть сцепление (трение покоя), трение качения, а также трение гибкого троса о неподвижную поверхность тела 3 (для рис. 2.1,  $a - e$ ) и трение верчения (для рис. 2.1,  $\mu - \kappa$ ).

На рисунке 2.1, з – к вал  $BC$ , к которому жёстко прикреплён кривошип  $OA$ , вращается в подпятниках  $B$  и  $C$ . Подпятники прижаты к этому валу с постоянным усилием  $Q$ . Для рисунка 2.1, ж вес вала  $3$  равен  $G$ . В таблице 2.1 обозначены коэффициенты:  $f_{\text{цп}}$  – сцепления;  $f$  – трения при верчении или трения гибкого троса о неподвижный блок;  $\delta$  – трения качения.

Радиус цилиндра  $1$  или  $2$ , катящегося по неподвижной поверхности и касающегося её равен  $0,4$  м. На рисунке 2.1, з – к радиус площади контакта вала  $BC$  и плит подпятников  $B$  и  $C$  равен  $0,02$  м, а радиусы колёс на которые намотан трос равны  $0,6$  м.

Определить значения массы  $m_1$  или  $m_2$  при которых механические системы остаются в покое. Исходные данные взять из табл. 2.1.

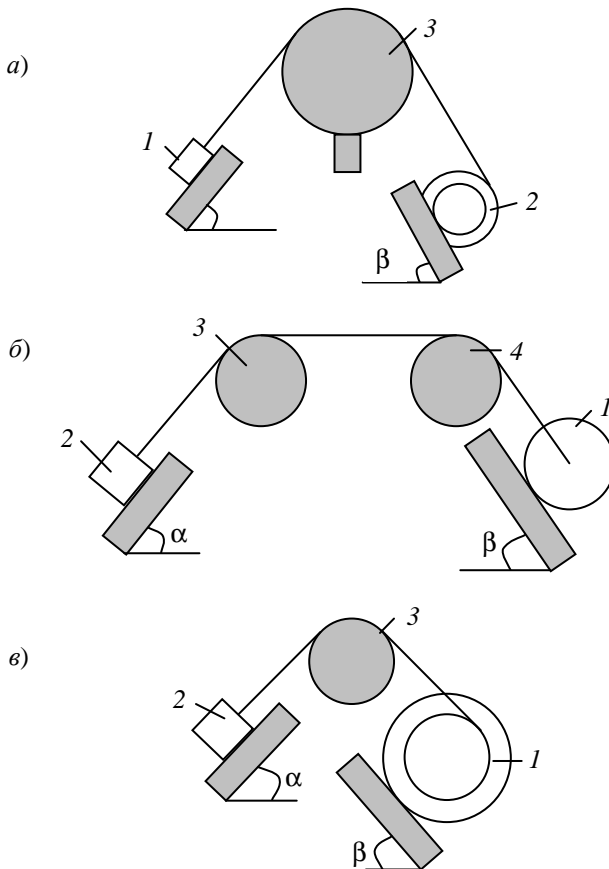


Рис. 2.1



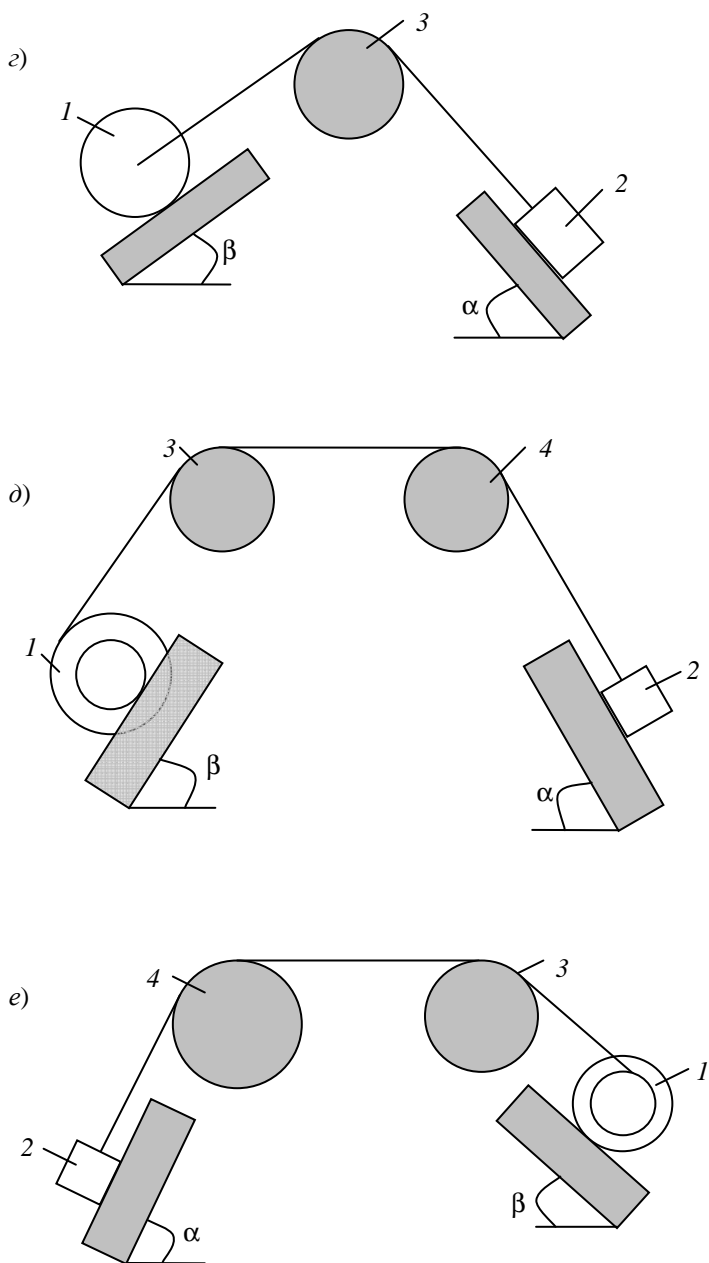


Рис. 2.1. Продолжение

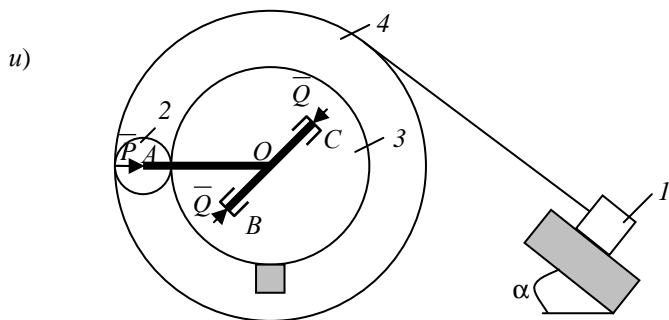
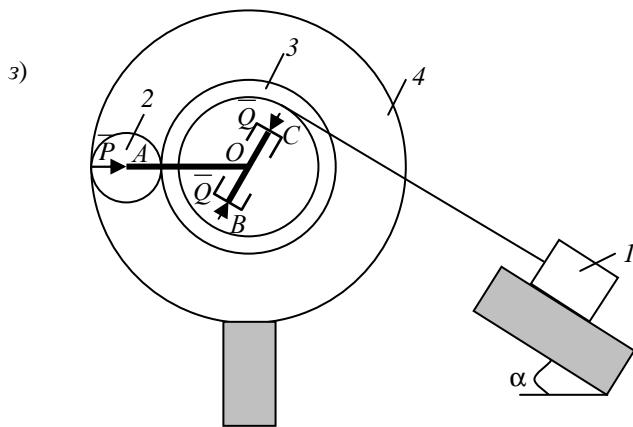
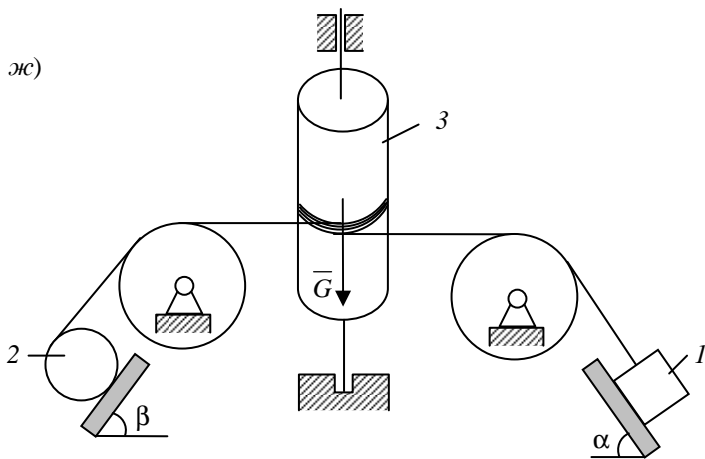


Рис. 2.1. Продолжение

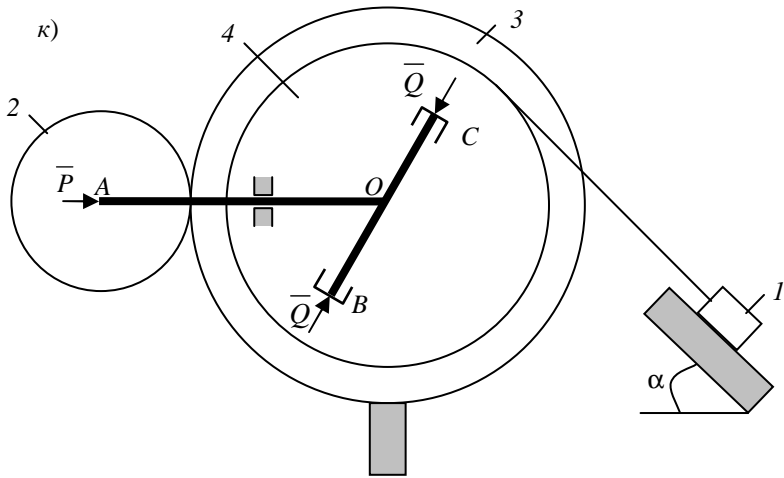


Рис. 2.1. Окончание

Таблица 2.1

Номер условия	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$\alpha$ , град	$\beta$ , град	$P$ , Н	$Q$ , Н	$G$ , Н	$f_{\text{сц}}$	$f_c$	$\delta \cdot 10^4$ , м
<i>a</i>	12	–	30	60	30	50	40	0,2	0,3	2
<i>б</i>	10	–	60	30	20	40	35	0,3	0,2	3
<i>в</i>	–	8	45	60	40	30	60	0,25	0,1	1
<i>г</i>	–	10	30	45	60	40	20	0,15	0,25	2,5
<i>д</i>	6	–	60	15	35	50	50	0,2	0,15	3,5
<i>e</i>	8	–	15	30	45	35	30	0,18	0,1	2
<i>жс</i>	–	7	45	60	50	45	45	0,28	0,3	1,5
<i>з</i>	–	11	15	45	55	50	25	0,22	0,17	2,3
<i>и</i>	7	–	30	15	25	60	40	0,28	0,23	1,8
<i>к</i>	11	–	60	30	35	55	40	0,4	0,25	2,2

**Пример 1.** Дано: Масса тела 1 (рис. 2.2)  $m_1 = 10$  кг;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ; коэффициент трения качения  $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$  м; коэффициент сцепления  $f_{\text{сц}} = 0,15$ ;  $R = 0,8$  м; Коэффициент трения троса о неподвижный цилиндр 3 равен  $f = 0,25$ . Определить значения массы  $m_2$  тела 2, при которых система тел будет оставаться в покое.

*Решение.*

а) Метод геометрической статики.

Рассмотрим равновесие тела 2, при стремлении (тенденции) тела 2 катиться вверх по наклонной плоскости (рис. 2.3, а)

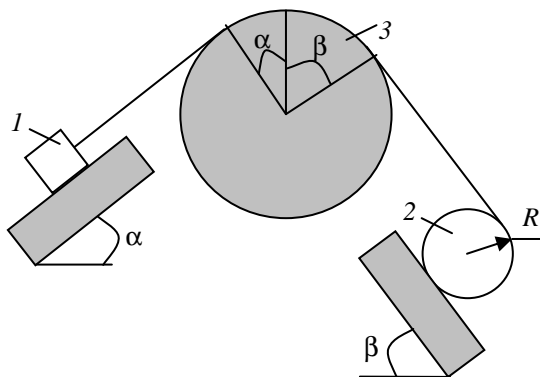


Рис. 2.2

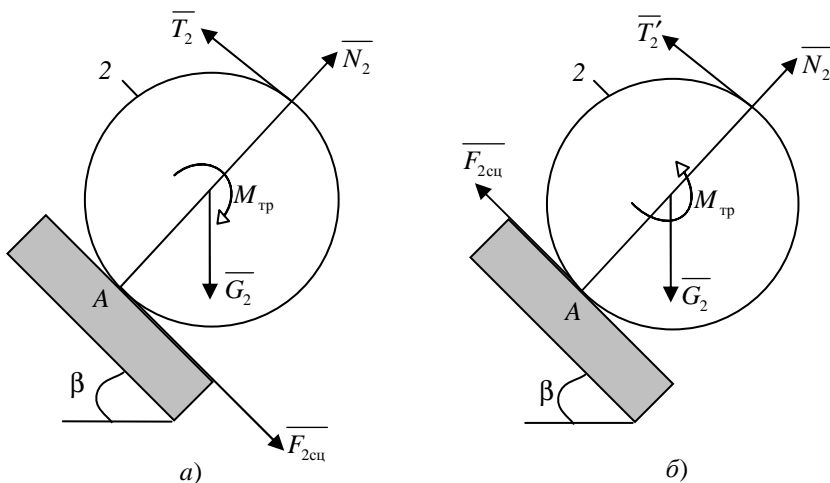


Рис. 2.3

$$\sum M_{kA} = 0: T_2 \cdot 2R - G_2 R \sin \beta - \delta G_2 \cos \beta = 0. \quad (2.1)$$

При стремлении (тенденции) тела 2 катится вниз по наклонной плоскости (рис. 2.3, б), получаем:

$$\sum M_{kA} = 0: T_2' \cdot 2R - G_2 R \sin \beta + \delta G_2 \cos \beta = 0. \quad (2.2)$$

Рассмотрим теперь равновесие груза 1. При стремлении груза перемещаться вниз (рис. 2.4, а) имеем:

$$\sum F_{kx} = 0: T_1 + f_{\text{ц}} G_1 \cos \alpha - G_1 \sin \alpha = 0. \quad (2.3)$$

При стремлении груза 1 перемещаться вверх (рис. 2.4, б) получаем:

$$\sum F_{kx} = 0: T_1' - f G_1 \cos \alpha - G_1 \sin \alpha = 0. \quad (2.4)$$

Учитывая трение троса о неподвижную поверхность цилиндра 3, имеем:

$$T_1 = T_2 e^{f(\alpha+\beta)}; \quad (2.5)$$

$$T_1' = T_2' e^{-f(\alpha+\beta)}. \quad (2.6)$$

Из системы уравнений (2.1) – (2.6) получаем пределы изменения массы тела 2 при равновесии системы:

$$m_2 = 2m_1 \frac{\sin \alpha - f_{\text{ц}} \cos \alpha}{\left(\sin \beta + \frac{\delta}{R} \cos \beta\right) e^{f(\alpha+\beta)}};$$

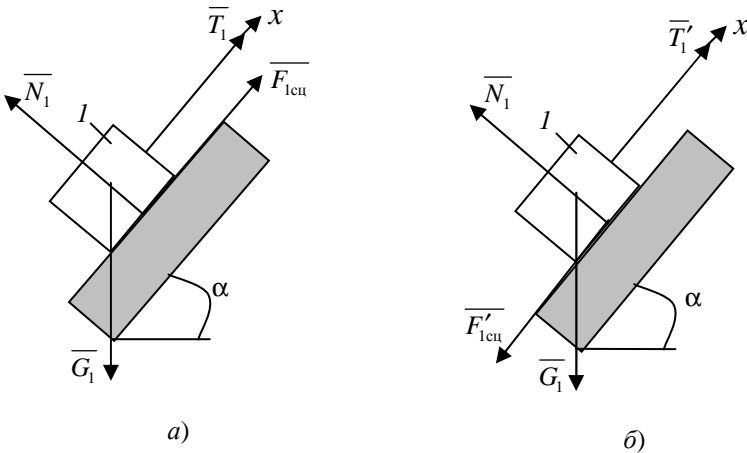


Рис. 2.4

$$m_2 = 2m_1 \frac{(\sin \alpha + f_{\text{cu}} \cos \alpha) e^{f(\alpha+\beta)}}{\sin \beta - \frac{\delta}{R} \cos \beta}.$$

Подставляя числовые значения, находим, что система находится в равновесии, если масса катка удовлетворяет неравенству

$$7,02 \leq m_2 \leq 17,7$$

Вычислим, что при отсутствии трения  $f_{\text{cu}} = f = \delta = 0$  равновесие системы возможно только при  $m_2 = 11,5$  кг.

б) Применение принципа виртуальных перемещений.

Рассмотрим тенденцию к движению тела 1 вниз, а тела 2 – вверх (рис. 2.5, а) и зададим системе виртуальное перемещение  $\delta s_1, \delta s_2$ .

Применяя принцип виртуальных перемещений, имеем:

$$G_2 \delta s_2 \sin \beta + \frac{\delta}{R} G_2 \delta s_2 \cos \beta - (G_1 \delta s_1 \sin \alpha - f_{\text{cu}} G_1 \delta s_1 \cos \alpha) e^{-f(\alpha+\beta)} = 0.$$

Здесь первые два слагаемых дают силу натяжения  $T_2$ , а последние два члена – взятую со знаком минус силу  $T_1$ , умноженную на величину  $e^{-f(\alpha+\beta)}$ , в силу равенства (2.5). Отсюда, при  $\delta s_1 = 2\delta s_2$ , находим

$$m_2 = 2m_1 \frac{\sin \alpha - f_{\text{cu}} \cos \alpha}{(\sin \beta + \frac{\delta}{R} \cos \beta) e^{f(\alpha+\beta)}},$$

т.е. прежнее значение массы тела 2.

Рассмотрим теперь тенденцию к движению тела 1 вверх, а тела 2 вниз (рис. 2.5, б). Применение принципа виртуальных перемещений при учёте соотношения (2.6) приводит к уравнению:

$$G_2 \delta s_2 \sin \beta - \frac{\delta}{R} G_2 \delta s_2 \cos \beta - (G_1 \delta s_1 \sin \alpha + f_{\text{cu}} G_1 \delta s_1 \cos \alpha) e^{f(\alpha+\beta)}.$$

Отсюда, при  $\delta s_1 = 2\delta s_2$  находим:

$$m_2 = 2m_1 \frac{(\sin \alpha + f_{\text{cu}} \cos \alpha) e^{f(\alpha+\beta)}}{\sin \beta - \frac{\delta}{R} \cos \beta}.$$

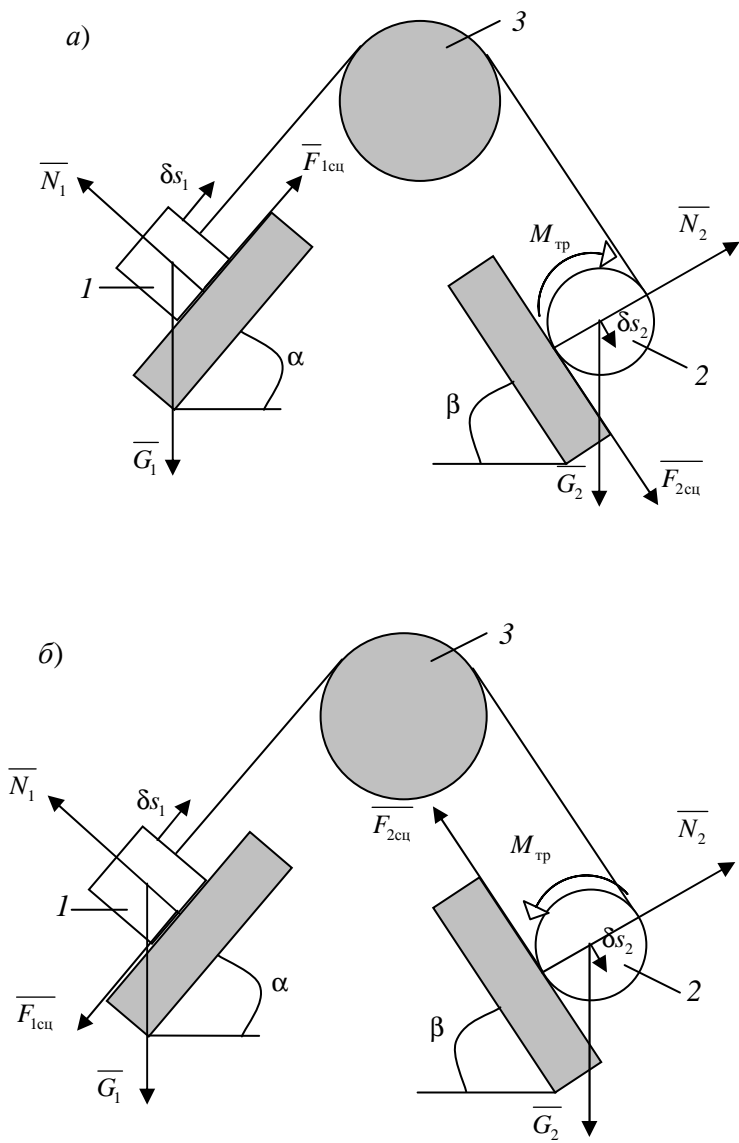


Рис. 2.5

Этот результат также совпадает со значением  $m_2$ , полученным методом геометрической статики. Таким образом, система будет оставаться в покое, если масса тела 2 находится в пределах:

$$2m_1 \frac{\sin \alpha - f_{\text{цл}} \cos \alpha}{\left(\sin \beta + \frac{\delta}{R} \cos \beta\right) e^{f(\alpha+\beta)}} \leq m_2 \leq 2m_1 \frac{(\sin \alpha + f_{\text{цл}} \cos \alpha) e^{f(\alpha+\beta)}}{\sin \beta - \frac{\delta}{R} \cos \beta}.$$

**Пример 2.** У механической системы изображённой на рис. 2.6, длина кривошипа  $OA = 0,4$  м; масса  $m_2 = 8$  кг;  $\alpha = 60^\circ$ . Коэффициент трения качения тела 2 по поверхности тела 4 равен  $\delta = 3 \cdot 10^{-4}$  м; коэффициент сцепления равен  $f_{\text{цл}} = 0,2$ ; коэффициент трения при вращении вала  $BC$ , жёстко связанного с кривошипом  $OA$ , в подпятниках  $B$  и  $C$  равен  $f = 0,2$ ; радиус колеса 2 равен  $r_2 = 0,1$  м; радиус колеса 3 равен  $R_3 = 0,7$  м; радиус площади контакта вала  $BC$  и плит подпятников  $B$  и  $C$  равен  $R = 0,02$  м. Опора  $D$  принадлежит телу 3.

Определить значение массы  $m_1$  тела 1, при которых система тел будет оставаться в покое.

*Решение.* Рассмотрим равновесие тела 1, при стремлении (тенденции) тела 1 перемещаться по наклонной плоскости вниз (рис. 2.7, а).

Имеем

$$\sum F_{kx} = 0: T_1 + f_{\text{цл}} G_1 \cos \alpha - G_1 \sin \alpha = 0. \quad (2.7)$$

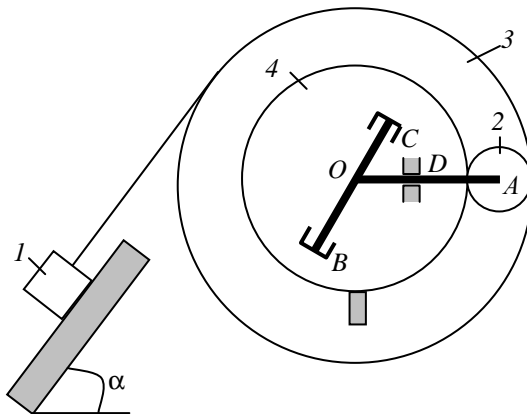


Рис. 2.6



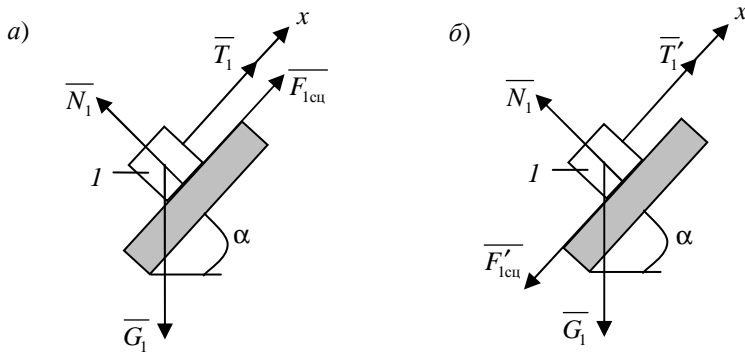


Рис. 2.7

При стремлении груза  $I$  перемещаться вверх (рис. 2.7, б), получаем:

$$\sum F_{kx} = 0: T_1' - f_{cu} G_1 \cos \alpha - G_1 \sin \alpha = 0. \quad (2.8)$$

Рассмотрим теперь равновесие тела 2 и связанного с ним кривошипа  $OA$ , а также вала  $BC$ , жёстко прикреплённого к кривошипу. При стремлении тела 2 катится вверх по поверхности неподвижного колеса 4, уравнение моментов относительно оси  $z$  вала  $BC$  (рис. 2.8, а) имеет вид:

$$\sum M_{kz} = 0: N \cdot OD - G_2 \cdot OA - \frac{\delta}{r_2} P \cdot OA - 2 \frac{2}{3} fQR = 0. \quad (2.9)$$

При стремлении (тенденции) колеса 2 катится вниз по поверхности колеса 4 (рис. 2.8, б), уравнение моментов относительно оси  $z$  вала  $BC$  имеет вид:

$$\sum M_{kz} = 0: N' \cdot OD - G_2 \cdot OA + \frac{\delta}{r_2} P \cdot OA + 2 \frac{2}{3} fQR = 0. \quad (2.10)$$

Учитывая, что моменты сил натяжения троса и реакций опоры  $D$  относительно оси  $z$  равны, получаем:

$$T_1 R_3 = N \cdot OD \quad \text{и} \quad T_1' R_3 = N' \cdot OD. \quad (2.11)$$

Исключая из уравнений (2.7) – (2.10) реакции  $T, T', N, N'$ , находим искомые пределы изменения массы  $m_1$ :

$$m_1 = \frac{1}{R_3 g} \frac{m_2 g \cdot OA + \frac{\delta}{r_2} P \cdot OA + \frac{4}{3} fQR}{\sin \alpha - f_{cu} \cos \alpha};$$

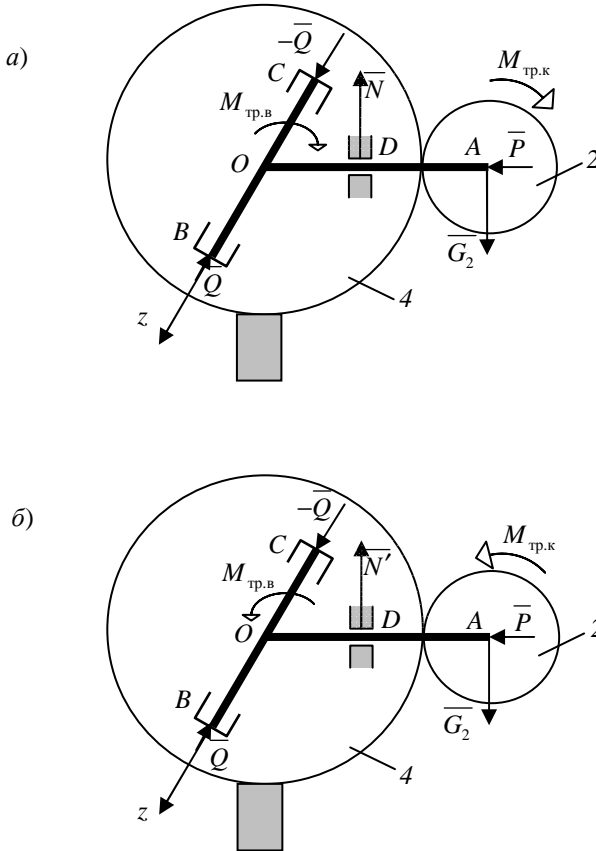


Рис. 2.8

$$m'_1 = \frac{1}{R_3 g} \frac{m_2 g \cdot OA - \frac{\delta}{r_2} P \cdot OA - \frac{4}{3} fQR}{\sin \alpha + f_{\text{сш}} \cos \alpha}.$$

Видно, что  $m_1 > m'_1$ . Вычислим их:

$$4,7 \text{ кг} \leq m_1 \leq 6 \text{ кг}.$$

При отсутствии трения покоя системы возможен при  $m_1 = 5,3 \text{ кг}$ .

### 3. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УГЛА И КОНУСА ТРЕНИЯ

Деталь  $ABCD$  (рис. 3.1) поднимается подъёмником  $EFGH$ , использующим эффект самоторможения (самозаклинивания) тормозных колодок  $G$  и  $H$  на поверхности детали.

Колодки соединены со стержнями  $FG$  и  $FH$  сферическими шарнирами. Стержни  $FG$  и  $FH$  соединены с тягой  $EF$  цилиндрическим шарниром. Во время подъёма деталь поворачивают вокруг оси  $GH$  силой  $\bar{P}$ , приложенной к тросу  $IJ$ . При этом колодки  $G$  и  $H$  поворачиваются совместно с деталью. Каковы должны быть размеры  $l$  детали, чтобы её можно было поднять подъёмником, если длина стержней  $FG$  и  $FH$  равна  $L = 1$  м, а коэффициент трения колодок о деталь равен  $f = 0,7$ .

*Решение.* Рассмотрим колодку  $G$  подъёмника. На неё действует сила реакции стержня  $FG$  направленная вдоль стержня. Построим конус трения  $K$ . Для поддержания покоя колодки относительно детали необходимо, чтобы эта реакция всегда находилась внутри конуса трения, т.е. соблюдалось условие

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi = f.$$

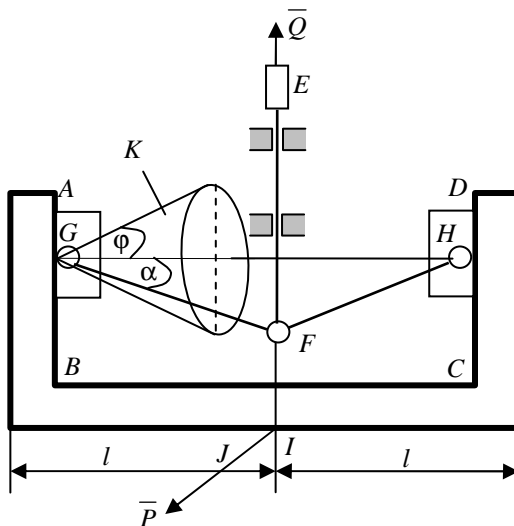


Рис. 3.1

Но  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{L^2 - l^2} / l$ . Решая неравенство  $\sqrt{L^2 - l^2} / l < f$ , находим  $l > L / \sqrt{1 + f^2}$ . С другой стороны размер детали должен удовлетворять условию  $l < L$ , так как в противном случае колодки не будут упираться в стенки  $AB$  и  $CD$  детали. Следовательно:

$$\frac{L}{\sqrt{1 + f^2}} < l < L.$$

Подставляя данные, имеем

$$0,82 \text{ м} < l < 1 \text{ м}.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лачуга, Ю.Ф. Теоретическая механика / Ю.Ф. Лачуга, В.А. Ксендзов. – М. : Колос, 2005. – 576 с.
2. Ворович, И.И. Лекции по динамике Ньютона / И.И. Ворович. – М. – Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 680 с.
3. Курс теоретической механики : учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин и др. ; под общ. ред. К.С. Колесникова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.
4. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики : В 2 т. Т. I. Статика и кинематика / Н.В. Бутенин. – 4-е изд., исправл. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 240 с.