

**В.Ф. КАЛИНИН, В.М. ИВАНОВ**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКА  
В ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИИ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

**В.Ф. КАЛИНИН, В.М. ИВАНОВ**

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА В ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИИ**

*Рекомендовано Государственным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский энергетический институт (технический университет)» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 140200 – «Электроэнергетика»*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2010

УДК 621.391.1(076)

ББК ←21я73-5

К17

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор,  
Заслуженный изобретатель РФ  
*Е.И. Глинкин*

Доктор физико-математических наук, профессор,  
Заслуженный деятель науки РФ  
*В.А. Федоров*

**Калинин, В.Ф.**

К17 Теоретическая электротехника в электрооборудовании : учебное пособие / В.Ф. Калинин, В.М. Иванов. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – 316 с. – 200 экз. – ISBN 978-5-8265-0888-6.

Содержит краткий теоретический материал по электрическим и магнитным цепям и сигналам, электрическим цепям с распределёнными параметрами, основам теории электромагнитного поля и прикладной электродинамики, включает ключевые задачи с решениями и методическими указаниями по каждому разделу и соответствует программе подготовки инженеров-электриков.

Предназначено для практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Теоретические основы электротехники» для студентов энергетических специальностей по направлению подготовки «Электроэнергетика».

УДК 621.391.1(076)

ББК ←21я73-5

**ISBN 978-5-8265-0888-6**

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный  
технический университет» (ТГТУ), 2010

Учебное издание

КАЛИНИН Вячеслав Федорович,  
ИВАНОВ Владимир Михайлович

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА В ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИИ

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова  
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкova

Подписано в печать 05.02.2010.  
Формат 60 × 84/16. 18,37 усл. печ. л. Тираж 200 экз. Заказ № 63

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Современная электроэнергетика требует от специалистов широких знаний в области электрооборудования, автоматизации и информатизации производственных процессов, связанных с получением, распространением, преобразованием и расходом электроэнергии. Первым и основным шагом в этом направлении является освоение основных физических законов в электричестве и магнетизме, анализе электрических и магнитных цепей и прохождением сигналов через эти цепи и многое другое, предусмотренное в изучении дисциплины «Теоретические основы электротехники».

Настоящая книга содержит практически все разделы теоретических основ электротехники, которые изучаются студентами электротехнических специальностей в высших учебных заведениях. Главы книги написаны традиционно по общепринятой методике обучения и содержит краткий теоретический материал, примеры и задачи с решениями и указаниями к ним, дополненные таблицами и приложениями, необходимыми для самостоятельной работы студентов.

Книга является частью методического комплекса при подготовке студентов по направлению «Электроэнергетика» в Тамбовском государственном техническом университете. Авторы искренне признательны сотрудникам и преподавателям кафедры «Электрооборудование и автоматизация» за техническую помощь при оформлении рукописи и глубоко благодарны рецензентам, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному деятелю науки РФ В.А. Федорову и доктору технических наук, профессору, заслуженному изобретателю РФ Е.И. Глинкину за просмотр книги, сделанные советы и предложения по улучшению её содержания.

### 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Идеализированной называют электрическую цепь, которую получают из реальной электрической цепи при замене каждого реального элемента его упрощённой моделью, составленной из идеализированных элементов.

К идеализированным элементам относятся: активное сопротивление, индуктивность, ёмкость, источник напряжения и источник тока.

Активное сопротивление – идеализированный пассивный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в другой вид энергии, например, в тепловую, механическую или световую.

Зависимость между током и напряжением на активном сопротивлении подчиняется закону Ома:

$$U = Ri \text{ или } ir = GU ,$$

где  $G = \frac{1}{R}$  проводимость.

Мгновенная мощность сопротивления

$$P = Ui = Ri^2 = GU^2 . \quad (1.1)$$

Электрическая энергия, поступающая в сопротивление,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t P dt = R \int_{-\infty}^t i^2 dt = G \int_{-\infty}^t U^2 dt > 0 . \quad (1.2)$$

Ёмкость – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию электрического поля.

Мгновенные значения тока и напряжения на ёмкости связаны соотношениями

$$i = C \frac{dU}{dt} ; U = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt . \quad (1.3)$$

Мгновенная мощность ёмкости

$$P = Ui = CU \frac{dU}{dt} . \quad (1.4)$$

Энергия, запасённая ёмкостью,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t P dt = C \int_0^U UdU = C \frac{U^2}{2} = \frac{q^2}{2C} . \quad (1.5)$$

Индуктивность – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию магнитного поля.

Мгновенные значения тока и напряжения на индуктивности связаны соотношениями

$$U = -E = L \frac{di}{dt} ; i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t U dt . \quad (1.6)$$

Мгновенная мощность индуктивности

$$P = Ui = Li \frac{di}{dt}. \quad (1.7)$$

Энергия, запасённая индуктивностью,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t P dt = L \int_0^i i di = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (1.8)$$

Идеальный источник напряжения (источник ЭДС) представляет собой идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от величины протекающего через него тока (рис. 1.1, где  $a$  – условное графическое обозначение;  $b$  – внешняя характеристика источника постоянного тока;  $e$  – идеальный источник напряжения с нагрузкой).

Ток и мощность в нагрузке

$$i = \frac{U}{R_H} = \frac{1}{R_H} e(t); \quad P = \frac{1}{R_H} U^2 = \frac{1}{R_H} e(t). \quad (1.9)$$

Идеальный источник тока (источник тока) – это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от величины напряжения на его зажимах (рис. 1.2, где  $a$  – условное графическое обозначение;  $b$  – внешняя характеристика источника постоянного тока;  $e$  – идеальный источник тока с нагрузкой).

Напряжение и мощность в нагрузке

$$U = R_H i = R_H i(t); \quad P = R_H i^2 = R_H i^2(t). \quad (1.10)$$

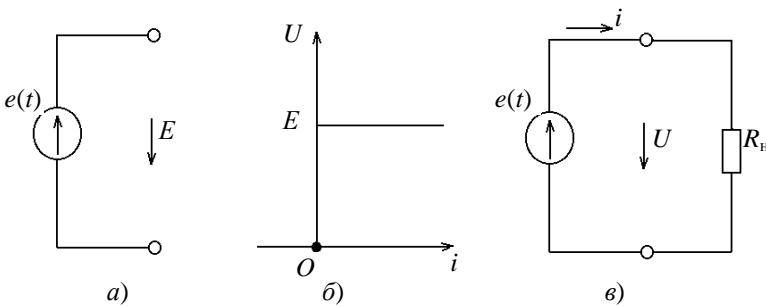


Рис. 1.1

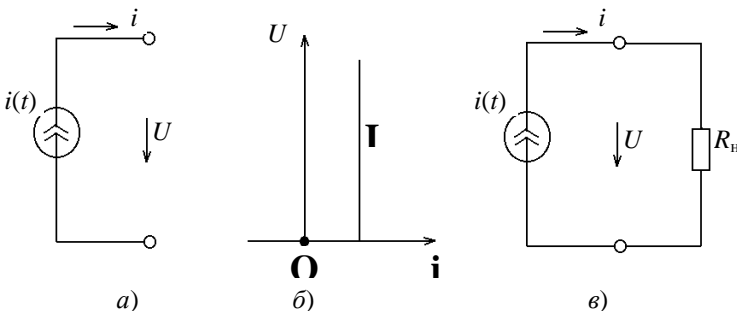


Рис. 1.2

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов электрической цепи, в любой момент равна нулю:

$$\sum_k i_k = 0, \quad (1.11)$$

где  $k$  – номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в любой произвольный контур: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур электрической цепи, в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_k U_k = 0, \quad (1.12)$$

где  $k$  – номер ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Уравнение по второму закону Кирхгофа можно составить и для напряжений элементов, входящих в ветви данного контура.

Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на элементах любого контура в каждый момент времени равна алгебраической сумме ЭДС источников напряжений, действующих в этом контуре:

$$\sum_i U_i = \sum_j E_j, \quad (1.13)$$

где  $U_i$  – напряжение каждого из элементов рассматриваемого контура за исключением напряжений источников ЭДС;  $E_j$  – ЭДС источников напряжений, действующих в контуре.

Мгновенное значение величины напряжения (тока), изменяющееся с течением времени по синусоидальному или косинусоидальному закону

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \psi_1), \quad (1.14)$$

где  $\psi_1 = \psi + \frac{\pi}{2}$ ;  $U_m$  – амплитуда или максимальное значение гармонической функции, её размерность совпадает с размерностью гармонической функции;  $(\omega t + \psi)$  – аргумент, называется мгновенной (полной) фазой;  $\psi$  – начальная фаза;  $\omega$  – скорость изменения мгновенной (полной) фазы – угловая частота.

Период  $T$ , угловая частота  $\omega$  и частота  $f$  связаны соотношением

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \quad f = \frac{1}{T}.$$

Действующее значение  $I$  периодического тока  $i(t)$  численно равно значению постоянного тока  $I$ , при протекании которого за время  $T$  выделится такое же количество энергии, как и при протекании тока  $i(t)$  за то же время.

Действующее значение гармонической функции в  $\sqrt{2}$  раз меньше ее амплитуды:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (1.15)$$

Действующим значением периодической функции  $a(t)$  называется среднеквадратическое значение этой функции за период  $T$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [a(t)]^2 dt}. \quad (1.16)$$

Среднее значение синусоидально изменяющегося тока (напряжения) на положительном полупериоде

$$I = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m; \quad U = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m.$$

Если к сопротивлению приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону

$$u = \sqrt{2} U_r \cos(\omega t + \psi_u),$$

то ток определяется

$$i = \frac{u}{R} = \frac{\sqrt{2} U_r \cos(\omega t + \psi_u)}{R}. \quad (1.17)$$

Мгновенная мощность

$$P = ui = U_r I_r + U_r I_r \cos 2(\omega t + \psi). \quad (1.18)$$

Среднее значение мощности сопротивления за период

$$P = U_r I_r.$$

Если к ёмкости приложено гармоническое напряжение  $u = \sqrt{2} U_C \sin(\omega t + \psi)$ , то ток имеет вид

$$i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2} U_C \omega C \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.19)$$

Мгновенная мощность ёмкости

$$P = ui = U_C I_C \sin 2(\omega t + \psi_u). \quad (1.20)$$

Энергия, запасённая в ёмкости,

$$W_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_C^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_u)]. \quad (1.21)$$

Если ток индуктивности изменяется по гармоническому закону  $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i)$ , то напряжение на индуктивности

$$u = L \frac{di}{dt} = \omega L \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) = \sqrt{2} \omega L I \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right).$$

Мгновенная мощность на индуктивности

$$P = ui = U_L I_L \sin 2(\omega t + \psi_i). \quad (1.22)$$

Энергия, запасённая в индуктивности,

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_L^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]. \quad (1.23)$$

Если цепь, состоящая из последовательно соединённых элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , включена на синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi + \phi),$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad (1.24)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}; \quad (1.25)$$

$\omega L = X_L$  – индуктивное сопротивление;  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  – ёмкостное сопротивление;  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = X = X_L - X_C$  – реактивное

сопротивление;  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$  – полное сопротивление.

Если цепь, состоящая из параллельно соединённых элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , включена на синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

где

$$I_m = U_m Y = U_m \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad (1.26)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}};$$

$\frac{1}{R} = g$  – активная проводимость;  $\omega C = b_C$  – проводимость ёмкости;  $\frac{1}{\omega L} = b_L$  – проводимость индуктивности;  $\omega C - \frac{1}{\omega L} = b$  –

реактивная проводимость;  $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$  – входная проводимость.

## 1.1. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

### Контрольные вопросы

1. Что называется электрической цепью?
2. Что понимается под положительным направлением тока?
3. Что понимается под терминами *сопротивление*, *индуктивность*, *ёмкость*?
4. Что понимается под терминами *источник тока*, *источник напряжения*?
5. Какие элементы потребляют электромагнитную энергию и почему?
6. Сформулируйте первый и второй законы Кирхгофа и поясните их физический смысл и порядок применения.

### Задачи

1.1.1. По какому закону должно изменяться напряжение, приложенное к катушке отклоняющей системы электронно-лучевой трубки, чтобы ток катушки изменялся по закону  $i = 10t$  А. Параметры катушки: индуктивность 300 мГн, активное сопротивление 3 Ом.

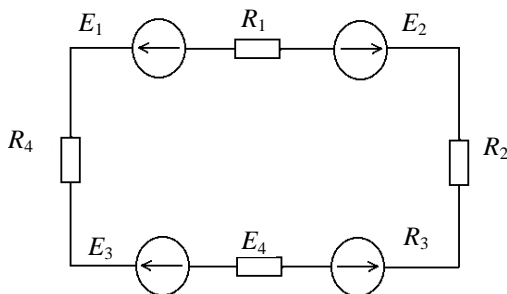


Рис. 1.3

1.1.2. Определить ток в электрической цепи и его направление, если известны следующие параметры цепи (рис. 1.3):

$E_1 = 5$  В;  $E_2 = 12,5$  В;  $E_3 = 6,25$  В;  $E_4 = 5$  В;

$R_1 = 4$  Ом;  $R_2 = 2$  Ом;  $R_3 = 5$  Ом;  $R_4 = 1,5$  Ом.

1.1.3. На рисунке 1.4 изображена схема с фотодиодом и указаны токи в двух плечах моста:  $I_{ac} = 100$  мА;  $I_{ad} = 3$  мА. Определить ток  $I$ .



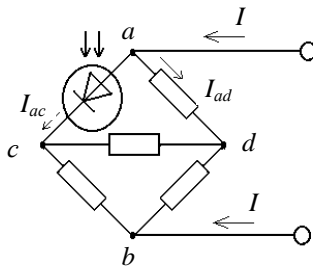
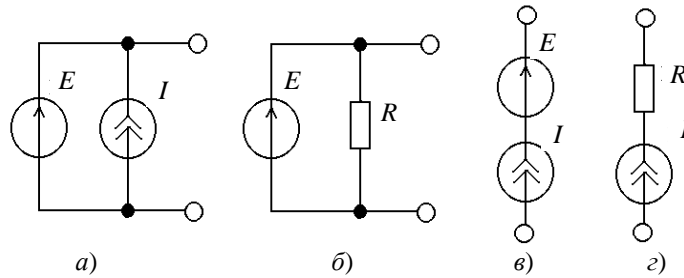


Рис. 1.4

1.1.4. Записать аналитическое выражение для внешних характеристик источников электрической энергии, схемы которых приведены на рис. 1.5.



1.1.5. Внешняя характеристика источника ЭДС задана на рис. 1.6. Составить схему замещения цепи и определить ЭДС источника  $E$ , внутреннее его сопротивление  $R_i$  и сопротивление нагрузки  $R_n$ , если ток  $I = 2$  А.

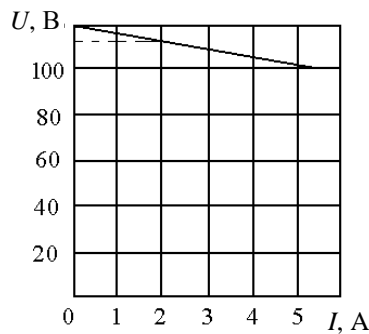


Рис. 1.6

1.1.6. На рисунке 1.7 изображена внешняя характеристика источника питания. Составить схемы замещения цепи с источником ЭДС и тока и определить их параметры.

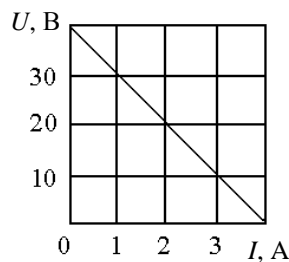


Рис. 1.7

1.1.7. Ёмкость  $C = 1$  мкФ, имеющая электрический заряд  $q = 0,1$  мКл, в момент времени  $t = 0$  начинает разряжаться через сопротивление  $R = 1$  кОм. Ток сопротивления изменяется по закону  $i = 0,1e^{-10^3 t}$  А. Рассчитать напряжение на ёмкости и энергию, запасённую в ней, в моменты времени  $t = 0$ ,  $t = 1$  мс. Найти энергию, рассеянную в сопротивлении к моменту времени  $t = 1$  мс.

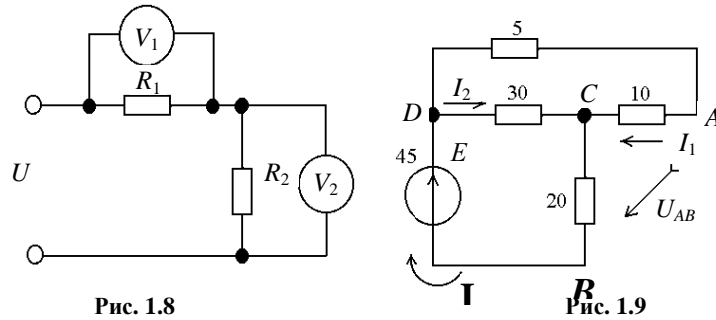
1.1.8. Начиная с момента времени  $t = 0$ , через сопротивление  $R = 20$  Ом протекает ток  $i = 100e^{-2 \cdot 10^6 t} - 50e^{-0,5 \cdot 10^6 t}$  мА. Определить зависимость от времени напряжения на сопротивлении, мгновенной мощности сопротивления и энергии, рассматриваемой в сопротивлении.

1.1.9. Решить задачу 1.8 при  $i = 1 - e^{-10^6 t}$  мА.

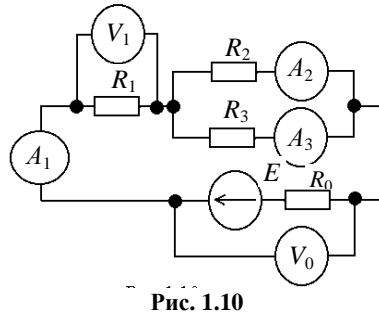
1.1.10. Ток индуктивности  $L = 1$  мкГн изменяется по закону  $i_L = 0,2 \sin(10^6 t + 0,4\pi)$  А. Определить напряжение на индуктивности.

1.1.11. На входе электрической цепи (рис. 1.8) действует постоянное напряжение  $U = 120$  В. Определить ток в электрической цепи, показания вольтметров  $V_1$  и  $V_2$  и величины сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , если мощности, выделяемые на сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно равны  $P_1 = 100$  Вт,  $P_2 = 200$  Вт.

1.1.12. В схеме цепи (рис. 1.9) определить напряжение  $U_{ab}$ . Значение ЭДС и сопротивлений указаны соответственно в вольтах и омах.

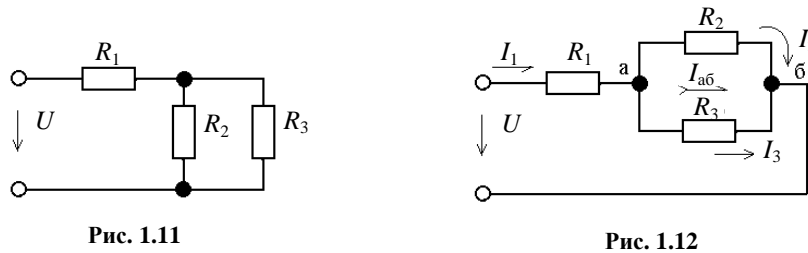


1.1.13. Определить, как изменятся показания приборов в электрической цепи, если уменьшить величину сопротивления  $R_3$ , а все остальные параметры цепи считать неизменными (рис. 1.10).



1.1.14. Мощность, потребляемая электрической цепью (рис. 1.11), равна  $P = 300$  Вт. На зажимах электрической цепи  $U = 60$  В,  $R_2 = 15$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом. Определить величину сопротивления  $R_1$  и токи через  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

1.1.15. Определить токи  $I_1$  и  $I_3$ , напряжение и мощности цепи (рис. 1.12), если заданы сопротивления резисторов  $R_1 = 12$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом и ток  $I_2 = 2$  А.



### Ответы, решения и методические указания

1.1.1.  $U = 3 + 30t$  В.

1.1.2.  $I = 0,5$  А, по часовой стрелке.

1.1.3. В соответствии с первым законом Кирхгофа  $I_a = I_{ac} + I_{ad} = 0,1 + 3 = 3,1$  мА. Отсюда  $I = -I_a = -3,1$  мА, т.е. истинное направление тока противоположно указанному на схеме.

1.1.4. К зажимам цепей (рис. 1.5, а, б) подключен источник последовательно, напряжение на зажимах равно ЭДС. Внешняя характеристика данных цепей совпадает с внешней характеристикой источника ЭДС  $U = E$ . Ток внешних зажимов цепей (рис. 1.5, в, г) при любом напряжении на них равен току источника тока, следовательно, внешняя характеристика этих цепей совпадает с внешней характеристикой источника тока.

1.1.5. Схема замещения цепи изображена на рис. 1.13, а.  $E = U_{x,x} = 120$  В при  $I = 2$  А,  $U = 115$  В.

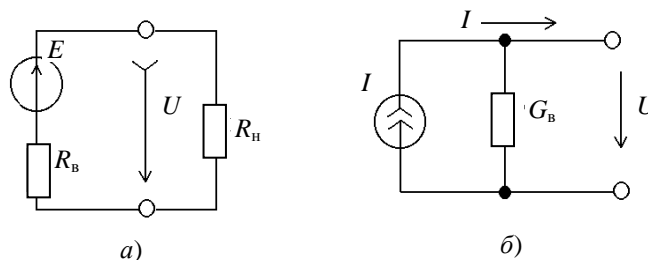


Рис. 1.13

В соответствие с уравнением  $U = E - IR_i$  определяем  $R_i = (E - U)/I = 2,5$  Ом;  $U = R_n$ ;  $R_n = 57,5$  Ом.

1.1.6  $E = U_x = 40$  В;  $I = 4$  А;  $R_b = 10$  Ом;  $G = 0,1$  см. Схемы замещения приведены на рис. 1.13, а, б.

1.1.7. В произвольный момент времени  $t > t_0$

$$U_C = U_C(0) - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt; \quad \omega_C = \frac{CU^2}{2};$$

- для  $t_0$ :  $U_C(t_0) = 9(t_0)/C = 100$  В;  $\omega_C(t_0) = 5$  мДж;
- для  $t = t_1$ :  $U_C(t_1) = 36,8$  В;  $\omega_C(t_1) = 0,677$  мДж.

Энергия, выделившаяся в сопротивлении на интервале  $[t_0; t_1]$ , может быть определена из выражения  $\omega_R(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} Ri_R^2 dt$

или на основании закона сохранения энергии  $\omega_R(t_1) = \omega_C(t_0) - \omega_0(t_1) = 4,32$  мДж.

1.1.8. Напряжение на сопротивлении  $U = iR = 2e^{-2 \cdot 10^6 t} - e^{-0,5 \cdot 10^6 t}$ , В. Мгновенная мощность сопротивления

$$P = Ui = 200e^{-4 \cdot 10^6 t} - 200e^{-2,5 \cdot 10^6 t + 50 \cdot 10^6 t}, \text{ мВт.}$$

Энергия, выделившаяся в сопротивлении к моменту времени  $t$ ,

$$\omega = \int_{t_0=0}^t P dt = 20 - 50e^{-4 \cdot 10^6 t} + 80e^{-2,5 \cdot 10^6 t} - 50e^{-10^6 t}, \text{ Дж.}$$

1.1.9.  $U = 20(1 - e^{-10^6 t})$ , мВ;  $P = 20(1 - e^{10^6 t} + e^{-2 \cdot 10^6 t})$ , Вт;

$$\omega = 10(10^6 t + 2e^{-10^6 t} - 0,5e^{-2 \cdot 10^6 t} - 1,5), \text{ Дж.}$$

1.1.10.  $U = 0,2 \cos(10^6 t + 0,04\pi)$  В.

1.1.11.  $I = 2,5$  А;  $U_1 = 40$  В;  $U_2 = 80$  В;  $R_1 = 16$  Ом;  $R_2 = 32$  Ом.

1.1.12. Для определения  $U_{ab}$  нужно найти токи  $I$  и  $I_1$ . Резистивные элементы с сопротивлениями 5 и 10 Ом соединены последовательно, а с сопротивлением 30 Ом – параллельно. Зная токи  $I$  и  $I_1$ , для контура  $ABCA$  составляем уравнение по второму закону Кирхгофа.  $U_{ab} = 40$  В.

1.1.13.  $A_1 \uparrow$ ;  $V_1 \uparrow$ ;  $V_0 \downarrow$ ;  $A_2 \downarrow$ ;  $A_3 \uparrow$ .

Показания:  $A_1$  – увеличатся;  $V_1$  – увеличатся;  $V_0$  – уменьшатся;  $A_2$  – уменьшатся;  $A_3$  – увеличатся.

1.1.14.  $R_1 = 8,25$  Ом;  $I_1 = 5$  А;  $I_2 = 1,25$  А;  $I_3 = 3,75$  А.

1.1.15.  $I_1 = 5$  А;  $I_3 = 3$  А;  $U = 120$  В;  $P = 600$  Вт.

## 1.2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Контрольные вопросы

1. Поясните способы представления гармонической функции.
2. Что понимается под действующим значением переменного тока? Каким образом можно определить действующее значение гармонической функции?
3. Каковы фазовые соотношения между напряжением и током в цепи с активным сопротивлением, в цепи с ёмкостью, в цепи с индуктивностью?
4. Что называется полным сопротивлением и проводимостью электрической цепи? Написать их аналитические выражения.
5. Какова разница между активной, реактивной и полной мощностями? В каких единицах они выражаются?

## Задачи

1.2.1. Определить амплитуду, действующее значение, частоту, угловую частоту и начальную фазу гармонического напряжения и тока, графики которых представлены на рис. 1.14.

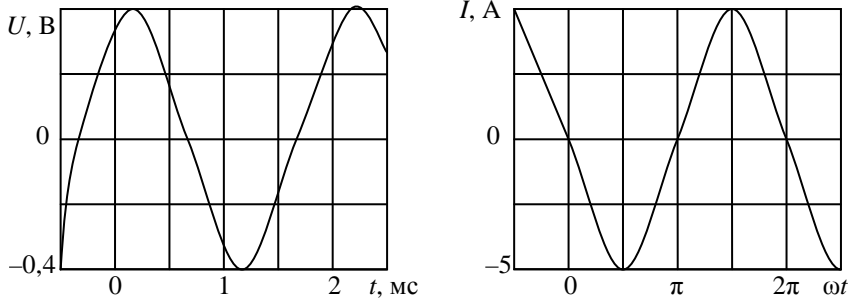


Рис.

1.2.2. Найти амплитуду, действующее значение, частоту, угловую частоту и начальную фазу гармонических напряжений, построить кривые напряжений и их векторные диаграммы:

- а)  $U_1 = 5 \cos(10^4 t + 60^\circ)$  В;
- б)  $U_2 = 5\sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 10^4 t - 60^\circ)$  В;
- в)  $U_3 = 4,24 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$  В.

1.2.3. К зажимам идеализированного пассивного элемента приложено напряжение  $U = 0,24 \cos(1885t + 74^\circ)$  мВ. Определить тип и параметры элементов, если:

- а)  $i = 2,8 \cos(1885t + 74^\circ)$  мкА;
- б)  $i = 2,8 \cos(1885t + 164^\circ)$  мкА;
- в)  $i = 2,8 \cos(1885t + 344^\circ)$  мкА.

1.2.4. В последовательной  $RL$ -цепи известны действующие значения напряжений на ее элементах:  $U_r = 5$  В;  $U_L = 3,12$  В. Вычислить действующее значение напряжения на входе цепи и сдвиг фаз между напряжением на входе и током в цепи. Начертить векторную диаграмму токов и напряжений.

1.2.5. К электрической цепи приложено напряжение, действующее значение которого  $U = 0,2$  В; действующее значение тока  $I = 0,1$  мА; частота  $f = 10^4$  Гц. Найти величину ёмкости  $C$  и написать выражения для мгновенных значений тока и напряжения. Начертить векторную диаграмму для данной цепи (рис. 1.15).

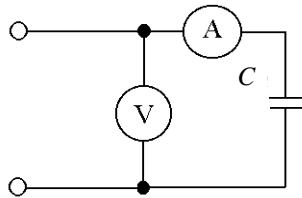


Рис. 1.15

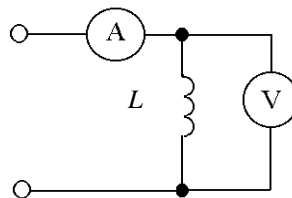


Рис. 1.16

1.2.6. Дана цепь с индуктивностью  $L = 0,01$  мГн. К цепи приложено напряжение  $U = 0,8 \cos(9 \cdot 10^5 t + 1,3)$  В. Найти уравнение мгновенного значения тока в цепи и определить показания вольтметра и амперметра (рис. 1.16), если они проградуированы в действующих значениях. Начертить векторную диаграмму для данной цепи.

1.2.7. В электрической цепи, состоящей из последовательно соединённых элементов  $R$  и  $L$ , протекает переменный ток с частотой  $f = 50$  Гц, индуктивность  $L = 0,0127$  Гн, сопротивление  $R = 3$  Ом, напряжение на зажимах цепи равно 150 В. Определить индуктивное сопротивление  $X_L$ , ток в цепи, активную, реактивную и полную мощности, энергию в катушке  $W_L$ , фазовый сдвиг между током и напряжением на входе.

1.2.8. К электрической цепи (рис.1.17) приложено напряжение  $U = 20$  В. Определить ток в общей части цепи, если  $R = 5$  Ом;  $X_L = 4$  Ом;  $X_C = 10$  Ом. Построить векторную диаграмму.

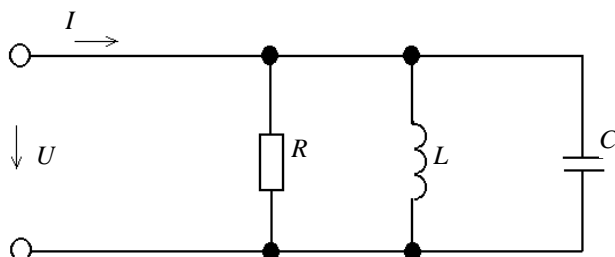


Рис. 1.17

1.2.9. На рисунке 1.18 представлена осциллограмма тока и напряжения пассивного двухполюсника. Записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока, приняв за начало отсчёта точку 0. Найти величину напряжения и тока для момента  $t_1 = T/12$ . Построить векторную диаграмму.

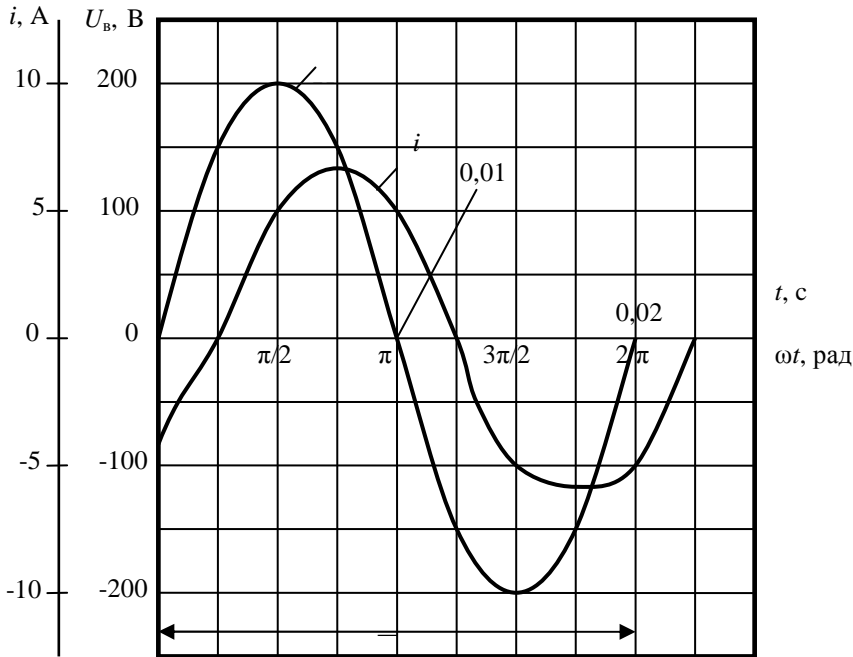


Рис. 1.18

1.2.10. К электрической цепи (рис. 1.19), состоящей из  $R_1 = 10$  Ом, катушки с  $L = 50$  мГн и активным сопротивлением  $R_2 = 5$  Ом, конденсаторов с  $C_1 = 400$  мкФ и  $C_2 = 300$  мкФ, приложено напряжение частотой 50 Гц. Ток в цепи  $I = 5$  А. Определить напряжение на каждом элементе, на зажимах цепи, сдвиг по фазе между током и напряжением на зажимах цепи и на катушке, активную мощность. Построить векторную диаграмму.

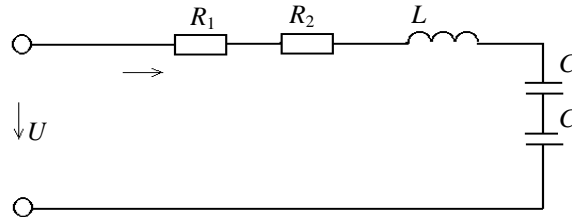


Рис. 1.19

1.2.11. По RC-цепи протекает синусоидальный ток с амплитудным значением  $I_m = 1,41$  А; частотой  $f = 50$  Гц. Определить мгновенное значение приложенного к зажимам напряжения  $U$ , напряжений на конденсаторе  $U_C$  и резисторе  $U_r$ , если  $R = 100$  Ом,  $C = 31,8$  мкФ. Построить графики мгновенных значений тока, приложенного к цепи напряжения и мощности.

1.2.12. К последовательно соединённым реостату сопротивлением  $R = 120$  Ом и конденсатору ёмкостью  $C = 30$  мкФ подведено напряжение  $U = 311 \sin 314t$  В. Вычислить полное сопротивление цепи, действующее значение напряжения и тока, мощность, расходуемую в цепи, реактивную мощность и разность фаз напряжения и тока.

1.2.13. На выводах цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивлений  $R = 50$  Ом и индуктивности  $L = 0,1$  Гн, задано напряжение  $U = \sqrt{2} \cdot 100 \sin \omega t$  В. Частота  $f = 50$  Гц. Вычислить полное сопротивление цепи и действующее напряжение на  $R$  и  $L$ , вывести выражение для синусоидального тока  $i(t)$ , построить кривые  $i(t)$ ,  $u(t)$  и напряжений на  $R$  и  $L$ .

1.2.14. К цепи, состоящей из последовательно соединённых резистора  $R = 3$  Ом, катушки индуктивности  $L = 80$  мГн и конденсатора  $C = 150$  мкФ, подключено напряжение  $U = 20$  В с частотой  $f = 50$  Гц. Найти ток, напряжение на каждом элементе цепи и мощность, расходуемую в ней. Построить векторную диаграмму.

1.2.15. Катушка, параметры которой  $R_1 = 10,5$  Ом,  $L = 382$  мкГн, и конденсатор (с потерями), эквивалентные параметры которого  $R_2 = 3,5$  Ом,  $C = 0,533$  мкФ, соединены последовательно (рис. 1.20). Какое напряжение приложено к цепи, если амперметр показал ток  $I = 2,4$  А? Частота переменного тока  $f = 5$  кГц. Определить напряжения

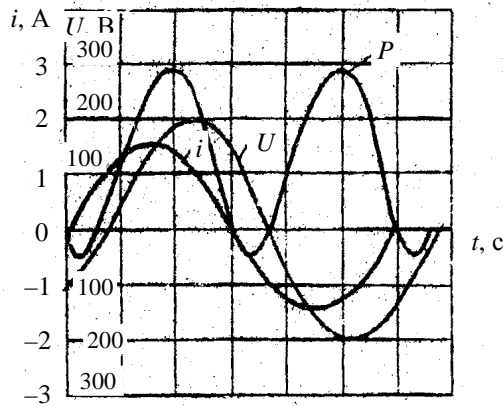


Рис. 1.20

на катушке  $U_k$  и конденсаторе с потерями  $U_{\text{конд}}$ , а также мощность, расходуемую на каждом из этих элементов. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

### Ответы, решения и методические указания

1.2.1.  $U_m = 0,4 \text{ В}$ ;  $U = 0,283 \text{ В}$ ;  $T = 2 \text{ мс}$ ;  $f = 0,5 \text{ кГц}$ ;  $\omega = 3140 \text{ с}^{-1}$ ;  $\varphi = -45^\circ$ ;  $I_m = 5 \text{ мА}$ ;  $I = 3,54 \text{ мА}$ ;  $\varphi = 90^\circ$ .

1.2.2. При определении начальной фазы гармонического напряжения  $U_3$  необходимо перейти от синусоидальной функции времени к косинусоидальной  $\sin x = \cos(x - \pi/2)$ :

$$U_{m1} = 5 \text{ В}; \quad U_1 = 3,54 \text{ В}; \quad f_1 = 1,59 \text{ кГц}; \quad \omega_1 = 10\,000 \text{ с}^{-1}; \quad \varphi_1 = 60^\circ;$$

$$U_{m2} = 7,07 \text{ В}; \quad U_2 = 5 \text{ В}; \quad f_2 = 10 \text{ кГц}; \quad \omega_2 = 6,28 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}; \quad \varphi_2 = -60^\circ;$$

$$U_{m3} = 4,24 \text{ В}; \quad U_3 = 3 \text{ В}; \quad f_3 = 50 \text{ кГц}; \quad \omega_3 = 100\pi \text{ с}^{-1}; \quad \varphi_3 = -60^\circ.$$

1.2.3. Если сдвиг по фазе между напряжением и током на зажимах идеализированного пассивного элемента цепи равен  $0, (-\pi/2)$  или  $\pi/2$ , то такими элементами являются соответственно сопротивление, ёмкость или индуктивность. Параметр элемента определяется из равенства его полного сопротивления ( $R, 1/\omega C$  или  $\omega L$ ) и полного входного сопротивления  $Z_{\text{вх}} = U/I$ :

а)  $R = 85,7 \text{ Ом}$ ; б)  $C = 6,19 \text{ мкФ}$ ; в)  $L = 45,5 \text{ мГн}$ .

$$1.2.4. U_{\text{вх}} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 5,89 \text{ В}; \quad \varphi = \arctg \frac{U_L}{U_R} = 32^\circ.$$

1.2.5.  $C = 8 \text{ мкФ}$ .

1.2.6.  $I = 0,09 \sin(9 \cdot 10^5 t + 1,3) \text{ А}$ ;  $I = 0,063 \text{ А}$ ;  $U = 0,57 \text{ В}$ .

1.2.7.  $S = 4500 \text{ ВА}$ ;  $W_1 = 11,43 \text{ Дж}$ ;  $\varphi = 54^\circ$ ;  $X_1 = 4 \text{ Ом}$ ;  $I = 30 \text{ А}$ ;  $P = 2700 \text{ Вт}$ ;  $Q = 3600 \text{ вар}$ .

1.2.8.  $I_r = 4 \text{ А}$ ;  $I_l = 5 \text{ А}$ ;  $I_c = 2 \text{ А}$ ;  $I = 5 \text{ А}$ .

1.2.9. При  $t_1 = T/12$ ;  $\omega t = \pi/6$ ;  $U = 200 \sin(\pi/6) = 100 \text{ В}$ ;

$i = 6 \sin(-\pi/12) = -1,55 \text{ А}$ .

1.2.10.  $U = 76,5 \text{ В}$ ;  $\varphi = -11^\circ$ ;  $U_n = 50 \text{ В}$ ;  $U_1 = 78,5 \text{ В}$ ;  $U_{r2} = 25 \text{ В}$ ;  $U_{c1} = 39,7 \text{ В}$ ;  $U_{c2} = 53 \text{ В}$ ;  $P_{r1} = 250 \text{ Вт}$ ;  $P_{r2} = 125 \text{ Вт}$ ;

$\varphi_1 = 72^\circ 10'$ .

1.2.11. Мгновенное значение тока в цепи  $i = 1,41 \sin 314t \text{ А}$ ,

Напряжения:

- на активном сопротивлении  $U_r = Ri = 141 \sin 314t \text{ В}$ ;
- на ёмкости  $U_c = \frac{1}{C} \int i dt = 141 \sin(314t - 90^\circ) \text{ В}$ ;
- на входе цепи

$$U = U_r + U_c = RI_m \sin \omega t - \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = ZI_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ В},$$

где  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 141 \text{ Ом}$ ;  $\text{tg } \varphi = -1/\omega C/R = -1$ ;  $\varphi = -45^\circ$ .

Следовательно,  $U = 200 \sin(314t - 45^\circ) \text{ В}$ .

Мгновенное значение мощности в цепи

$$P = Ui = 100 - 141 \cos(628t - 45^\circ) \text{ ВА}.$$

Графики мгновенных значений  $U, i, P$  приведены на рис. 1.20.

1.2.12.  $Z = 160 \text{ Ом}$ ;  $U = 220 \text{ В}$ ;  $I = 1,37 \text{ А}$ ;  $P = 226 \text{ Вт}$ ;  $Q = -210 \text{ вар}$ ;  $\varphi = -41^\circ 30'$ .

1.2.13.  $Z = 59 \text{ Ом}$ ;  $U_r = 85 \text{ В}$ ;  $U_l = 53,4 \text{ В}$ ;  $i = \sqrt{2} \cdot 1,7 \sin(\omega t - 32^\circ 10') \text{ А}$ .

1.2.14.  $X_L = 25,2 \text{ Ом}; X_C = 21,2 \text{ Ом}; Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 5 \text{ Ом}; I = 4 \text{ А}; \varphi = 53^\circ 10'; U_r = 12 \text{ В}; U_l = 101 \text{ В}; U_c = 85 \text{ В}; P = 48 \text{ Вт}.$

1.2.15.  $U = 120 \text{ В}; U_{\text{кат}} = 38,2 \text{ В}; P_{\text{кат}} = 60,6 \text{ Вт}; U_{\text{конд}} = 144 \text{ В}; P_{\text{конд}} = 20,2 \text{ Вт}.$

## 2. АНАЛИЗ И РАСЧЁТ ПРОСТЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Каждой гармонической функции времени, например, напряжению

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

можно поставить в соответствие комплексное число, т.е.

$$U(t) \dots U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \dot{U}_m e^{j\omega t} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) + jU_m \sin(\omega t + \varphi_u),$$

где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$  – комплексная амплитуда;  $U_m$  – модуль комплексного числа, равный амплитуде гармонического напряжения;  $\varphi_u$  – аргумент комплексного числа, равный начальной фазе гармонического напряжения;  $\text{Re}\{U(t)\} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  – вещественная часть комплексного изображения;  $\text{Im}\{U(t)\} = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  – коэффициент при мнимой части комплексного изображения.

Линейным операциям над гармоническими функциями (оригиналами) соответствуют следующие операции над их изображениями:

а) умножению оригинала на постоянное число соответствует умножению изображения данного оригинала на это же число:

$$U_R = Ri \dots R \dot{I}_m e^{j\omega t};$$

б) суммированию оригиналов соответствует суммирование их изображений:

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n \dots (\dot{U}_{1m} + \dot{U}_{2m} + \dots + \dot{U}_{nm}) e^{j\omega t};$$

в) дифференцированию оригинала соответствует алгебраическая операция умножения изображения этого оригинала на множитель  $j\omega$ :

$$\frac{dU}{dt} \dots j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t};$$

г) интегрированию оригинала соответствует алгебраическая операция деления изображения этого оригинала на оператор  $j\omega$ :

$$\int U dt \dots \frac{1}{j\omega} \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = z \dot{I}_m; \quad \dot{I}_m = \dot{Y}_m \dot{U}_m;$$

или

$$\dot{U} = z \dot{I}; \quad \dot{I} = \dot{Y} \dot{U}.$$

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0,$$

где  $k$  – номер ветви, подключённой к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{i=1}^m \dot{U}_{mi} = \sum_{j=1}^m \dot{E}_{mj}; \quad \sum_{i=1}^m \dot{U}_i = \sum_{j=1}^m \dot{E}_j,$$

где  $m$  – число пассивных элементов контура;  $n$  – число источников напряжения.

Комплексное сопротивление последовательной  $RLC$ -цепи:

$$\dot{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = Z e^{j\varphi};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}; \quad \varphi = \arctg(\omega L - 1/\omega C) / R.$$

Комплексная проводимость параллельной  $RLC$ -цепи:

$$\dot{Y} = G - j(1/\omega L - \omega C) = Y e^{j\varphi};$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}; \quad \varphi = \arctg(1/\omega L - \omega C) / G.$$

Комплексная мощность цепи

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = P + jQ = S e^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi,$$

где  $S$  – полная мощность;  $P$  – активная мощность;  $Q$  – реактивная мощность.

Уравнение баланса комплексных мощностей

$$\sum_{k=1}^N \dot{E}_k \bar{\dot{I}}_k + \sum_{k=1}^M \dot{U}_k \bar{\dot{I}}_k = \sum_{k=1}^H \dot{I}_k^2 \dot{Z}_k,$$

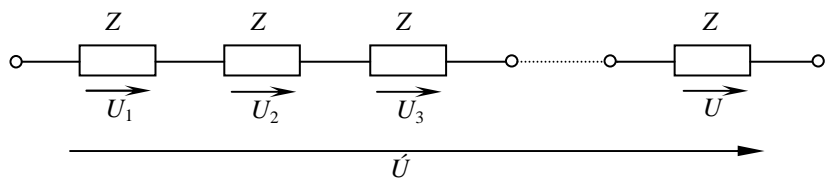
где  $N$  – число идеальных источников напряжения;  $M$  – число идеальных источников тока;  $H$  – число идеализированных пассивных элементов.

При расчёте электрических цепей часто возникает необходимость преобразования схем этих цепей в более простые и удобные для расчёта. Приёмы преобразования схем одинаковы как для цепей постоянного, так и переменного тока.

**Последовательное соединение (рис. 2.1):**

$$\dot{Z}_{\text{эк}} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dots + \dot{Z}_n;$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dots + \dot{U}_n.$$



**Рис. 2.1**

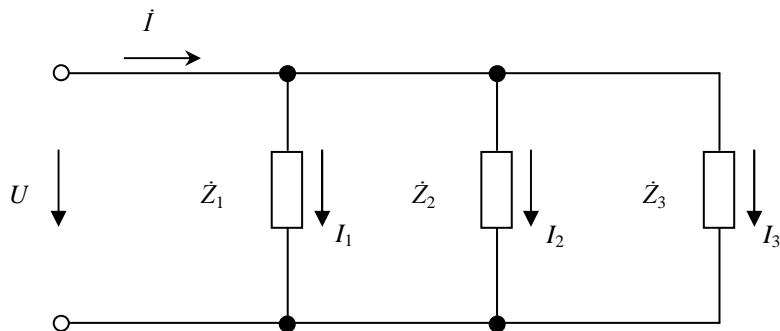
**Параллельное соединение трёх сопротивлений (рис. 2.2)^**

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_{\text{экв}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3};$$

$$\dot{i} = \dot{i}_1 + \dot{i}_2 + \dot{i}_3;$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_3;$$

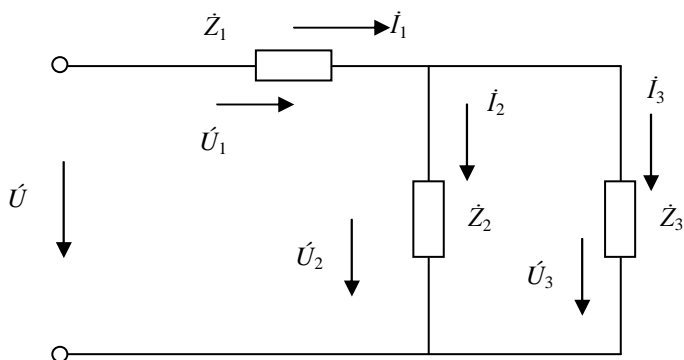
$$\dot{Y}_{\text{вх}} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3.$$



**Рис. 2.2**

**Смешанное соединение сопротивлений (рис. 2.3):**

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}; \quad \dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_{\text{вх}}}; \quad \dot{i}_2 = \dot{i}_1 \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}; \quad \dot{i}_3 = \dot{i}_1 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$



**Рис. 2.3**

**Преобразование соединения треугольником в эквивалентную звезду (рис. 2.4)**

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12} \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \quad \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12} \dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \quad \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{23} \dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}.$$



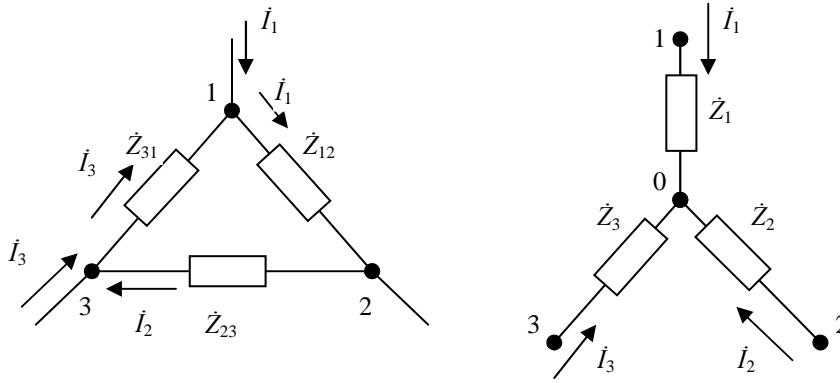


Рис. 2.4

В случае преобразования звезды в эквивалентный треугольник, сопротивления сторон последнего определяют из выражений

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}; \quad \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}; \quad \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_3 \dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}.$$

При составлении уравнений индуктивно-связанных электрических цепей необходимо учитывать способы включения индуктивностей.

При согласном включении (рис. 2.5), где  $M$  – взаимная индуктивность:

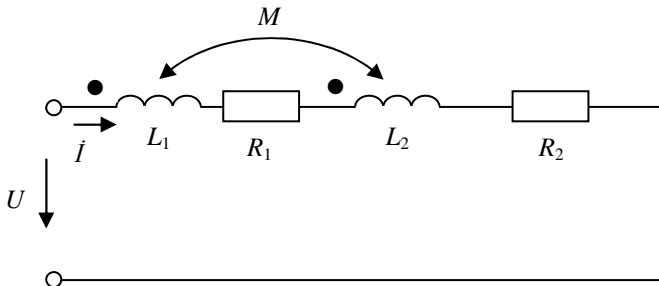


Рис. 2.5

- комплексное сопротивление взаимной индукции

$$\dot{Z}_M = j\omega M = jX_M, \quad X_M = \omega M;$$

- реактивное сопротивление двух индуктивно-связанных катушек при их согласном включении

$$X_{\text{согл}} = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M.$$

При встречном включении (рис. 2.6):

$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I};$$

$$L_{\text{встр}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

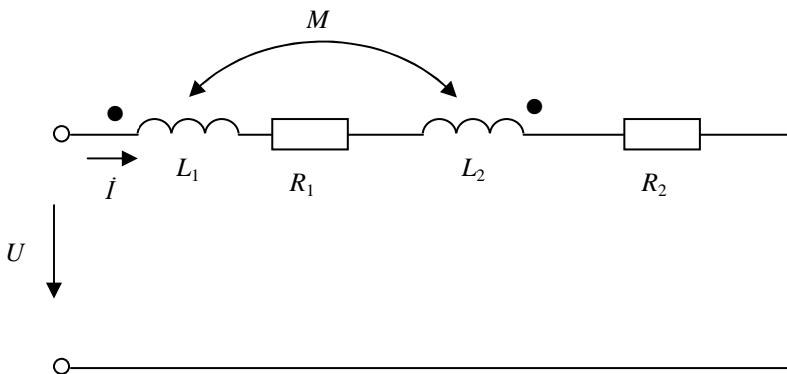


Рис. 2.6

Реактивное сопротивление встречно-включенных двух индуктивно-связанных катушек

$$X_{\text{встр}} = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M.$$

При расчёте разветвлённых цепей с взаимной индукцией используют методы уравнений Кирхгофа, контурных токов и наложения.

При расчёте в уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа, к напряжению на индуктивном элементе  $L \frac{di}{dt}$  необходимо добавить напряжение взаимной индукции  $\pm M \frac{di}{dt}$ . При этом напряжение взаимной индукции имеет знак плюс, если направление обхода индуктивного элемента и выбранное положительное направление тока в индуктивно-связанном элементе совпадают относительно одноимённых зажимов этих элементов.

Уравнения в комплексной форме трансформатора без ферромагнитного сердечника (воздушный трансформатор) (рис. 2.7) при согласованном включении катушек будут иметь вид:

- для первичной цепи

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2;$$

- для вторичной цепи

$$0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{Z}_H \dot{I}_2.$$

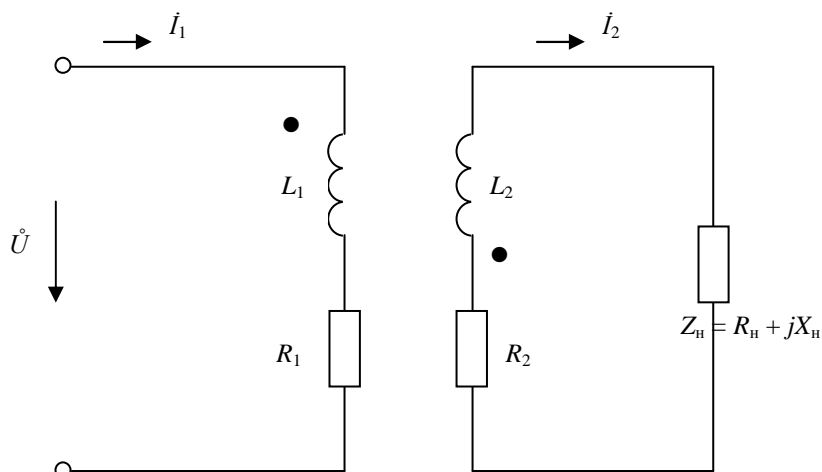


Рис. 2.7

Схема замещения без приведения числа витков, в которой разности  $L_1 - M$  и  $L_2 - M$  имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток, приведена на рис. 2.8.

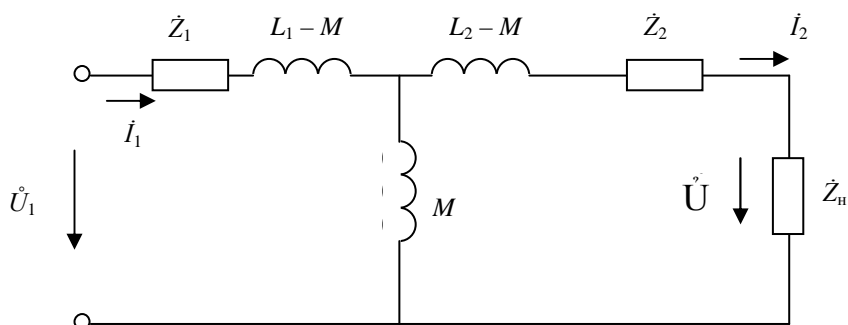


Рис. 2.8

Идеальный трансформатор ( $R_1 = R_2 = 0$ ;  $L_1 = L_2 = \infty$ ;  $M = \infty$ ;  $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = I$ ), включённый между нагрузкой и источником электроэнергии, изменяет сопротивление нагрузки  $Z_H$  пропорционально квадрату коэффициента трансформации  $n$ , т.е. осуществляет согласование сопротивлений:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = n; \quad \dot{Z}_{\text{вх}1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = n^2 \dot{Z}_2.$$

## 2.1. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД. ПРОСТЫЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Контрольные вопросы

1. В чём состоит идея расчёта электрической цепи комплексным методом?
2. В чём заключается удобство комплексной формы расчёта электрической цепи?
3. В каких формах может быть записано комплексное число?
4. Как переходят от мгновенных значений токов к комплексным и наоборот?
5. Что называется комплексной амплитудой синусоидальной функции? Написать выражения для комплексных амплитуд тока и напряжения.
6. Написать выражение для комплекса мгновенного значения напряжения.

7. Написать выражения комплексного сопротивления и комплексной проводимости для цепей с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$  и  $RLC$ .
8. Чему равны модуль и аргумент комплексного сопротивления в последовательной цепи с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$  и  $RLC$ ?
9. Чему равны модуль и аргумент комплексной проводимости в параллельной цепи с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$ ,  $RLC$ ?
10. Написать уравнение, выражающее второй закон Кирхгофа для комплексных амплитуд (то же для первого закона Кирхгофа).
11. Как связаны сопротивления и проводимости одного и того же участка?
12. Записать и пояснить выражение для мощности в комплексной форме.

### Задачи

2.1.1. Записать в показательной, тригонометрической, алгебраической формах выражения комплексных действующих значений тока и напряжения, мгновенные значения которых равны

$$u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ В};$$

$$i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ А}.$$

2.1.2. По заданным комплексным изображениям гармонических функций найти комплексные амплитуды и записать уравнения мгновенных значений через косинус:

$$\dot{U}(t) = 90e^{j(314t - 50^\circ)} \text{ В};$$

$$\dot{E}(t) = 45e^{j(100t + 25^\circ)} \text{ В};$$

$$\dot{i}(t) = 100e^{j(25t + 60^\circ)} \text{ А}.$$

2.1.3. Для некоторой нагрузки напряжение на её зажимах и ток в ней заданы в комплексной форме:

- 1)  $\dot{U} = (5 + j6) \text{ В}; \quad \dot{I} = (1 + j1,2) \text{ А};$
- 2)  $\dot{U} = (50 + j60) \text{ В}; \quad \dot{I} = (2,5 + j3) \text{ А};$
- 3)  $\dot{U} = (40 + j30) \text{ В}; \quad \dot{I} = (6 - j8) \text{ А};$
- 4)  $\dot{U} = (60 + j80) \text{ В}; \quad \dot{I} = j20 \text{ А};$
- 5)  $\dot{U} = 100e^{j30^\circ} \text{ В}; \quad \dot{I} = 5e^{j60^\circ} \text{ А}.$

Определить  $\dot{Z}$ ,  $\dot{R}$ ,  $X$ ,  $\phi$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ .

2.1.4. Комплексное сопротивление цепи равно  $\dot{Z} = 3 + j5 \text{ Ом}$ . Вычислить активную и реактивную проводимости.

2.1.5. Напряжение на зажимах нагрузки и ток нагрузки заданы в виде комплексов действующих значений

$$\dot{U} = 120e^{j83^\circ 08'} \text{ В}; \quad \dot{I} = 2,4e^{j30^\circ} \text{ А}.$$

Определить сопротивление, коэффициент мощности, полную активную и реактивную мощности нагрузки.

2.1.6. К зажимам цепи, состоящей из последовательно включённых сопротивлений  $R = 40 \text{ Ом}$  и индуктивности  $L = 0,24 \text{ мГн}$ , приложено напряжение  $U = 100 \cos \omega t$ , В. Определить комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{вх}}$  и комплексную амплитуду тока  $\dot{I}_m$ , если частота воздействия  $f_1 = 20 \text{ Гц}; f_2 = 20 \text{ кГц}$ .

2.1.7. В последовательной  $RL$ -цепи известны действующие значения напряжений на её элементах:  $U_R = 5 \text{ В}; U_L = 3,12 \text{ В}$ . Вычислить действующее значение напряжения на входе цепи и сдвиг фаз между входным током и напряжением  $\phi = \phi_u - \phi_i$ .

2.1.8. В цепи, изображенной на рис. 2.9, заданы следующие параметры:  $U_{a, \delta} = 220 \text{ В}; R_1 = 1,5 \text{ Ом}; X_1 = 2,6 \text{ Ом}; R_2 = 29 \text{ Ом}; X_2 = 50 \text{ Ом}; R_3 = 6 \text{ Ом}; X_3 = 10 \text{ Ом}$ .

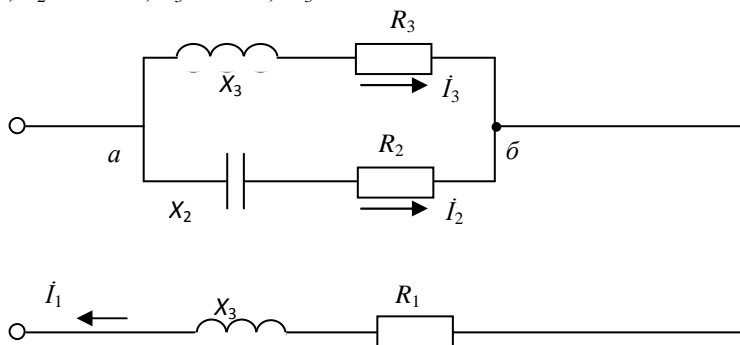


Рис. 2.9

Определить комплексные токи в ветвях, напряжение на зажимах всей цепи, активные и реактивные мощности на участках и во всей цепи.

2.1.9. К цепи, состоящей из последовательно соединённых элементов  $R = 6 \text{ Ом}$  и  $C = 2 \text{ мкФ}$ , подведено синусоидальное напряжение  $U = 200 \text{ В}$  частотой  $f = 10 \text{ кГц}$ . Определить комплексное сопротивление цепи, рассчитать параметры эквивалентной схемы при параллельном соединении элементов.

2.1.10. В цепи (рис. 2.10) заданы параметры:  $R = 50 \text{ Ом}; R_1 = 10 \text{ Ом}; X = 11 \text{ Ом}; X_1 = 25 \text{ Ом}$ . Каким активным сопротивлением  $R_2$  следует шунтировать сопротивление  $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1$ , чтобы ток  $I_1$  отставал от приложенного напряжения на  $90^\circ$ ?

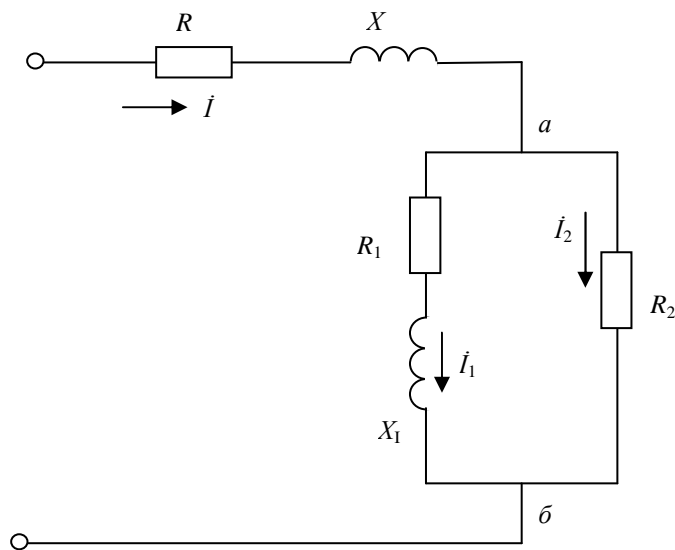


Рис. 2.10

2.1.11. Комплексное сопротивление нагрузки  $\dot{Z} = (160 - j120)$  Ом. Мгновенное значение напряжения задано уравнением  $U = 200\sin(\omega t + 25^\circ)$  В. Определить комплексную амплитуду тока и написать уравнение мгновенного значения тока.

2.1.12. К цепи, состоящей из последовательно соединенных  $R, L, C$  (рис. 2.11), приложено напряжение  $U = 14,14 \sin 314t$ , В. Вычислить комплексные значения тока в цепи и напряжений на элементах  $R, L, C$ , если  $R = 20$  Ом;  $L = 100$  мГн;  $C = 50$  мкФ. Построить векторную диаграмму.

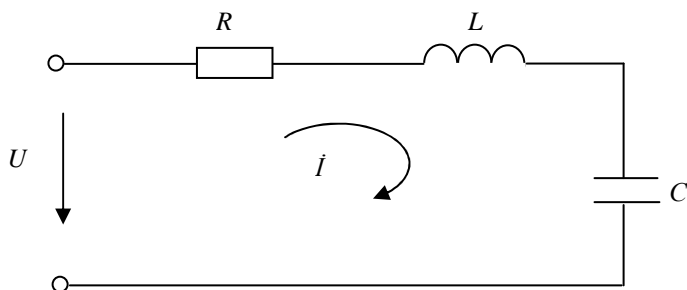


Рис. 2.11

2.1.13. К электрической цепи (рис. 2.12) приложено напряжение  $U = 127$  В. Определить комплексные значения амплитуд напряжений на индуктивности и ёмкости и сдвиг по фазе между ними, если  $R_L = 10$  Ом;  $R_C = 1$  Ом;  $X_L = 50$  Ом;  $X_C = 30$  Ом.

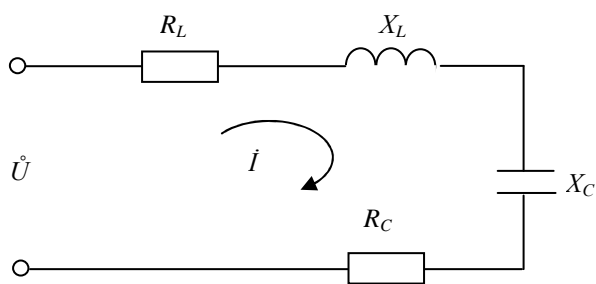


Рис. 2.12

2.1.14. К цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов  $R = 6$  Ом и  $C = 2$  мкФ, подведено синусоидальное напряжение  $U = 200$  В, частотой  $f = 10$  кГц. Определить комплексное сопротивление цепи, рассчитать параметры эквивалентной схемы при параллельном соединении элементов.

2.1.15. В цепи, изображенной на рис. 2.13, известны следующие параметры:  $U = 228\sin 1000t$ , В;  $R_1 = 17,3$  Ом;  $L_1 = 10$  мГн;  $L_2 = 20$  мГн;  $R_3 = 5,77$  Ом;  $C_3 = 100$  мкФ. Определить комплексные токи во всех ветвях, построить векторную диаграмму токов.

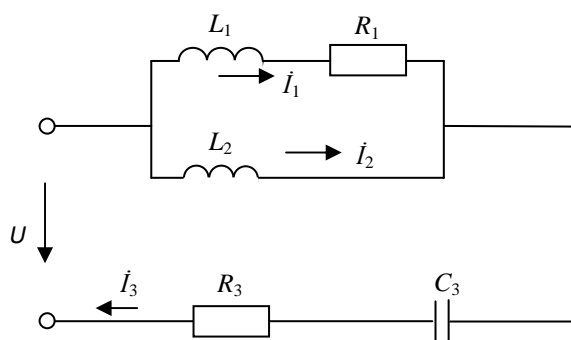


Рис. 2.13

2.1.16. К последовательно соединённым реостату сопротивлением  $R = 120$  Ом и конденсатору ёмкостью  $C = 30$  мкФ, подведено напряжение  $U = 311 \sin 314t$ , В. Вычислить полное сопротивление цепи, действующие значения напряжения и тока, мощность, расходуемую в цепи, реактивную мощность и разность фаз напряжения и тока. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

2.1.17. Индуктивная катушка, параметры которой  $R_1 = 10,5$  Ом,  $L = 382$  мкГн, и конденсатор (с потерями), эквивалентные параметры которого  $R_2 = 3,5$  Ом,  $C = 0,533$  мкФ, соединены последовательно (рис. 2.14). Какое напряжение  $U$  приложено к цепи, если амперметр показывает ток  $I = 2,4$  А? Частота переменного тока  $f = 5$  кГц. Определить напряжение на катушке  $U_{\text{кат}}$  и конденсаторе с потерями  $U_{\text{конд}}$ , а также мощность, расходуемую в каждом из этих элементов и построить векторную диаграмму напряжений.

Чему равна добротность катушки и добротность конденсатора? Определить угол потерь в конденсаторе.

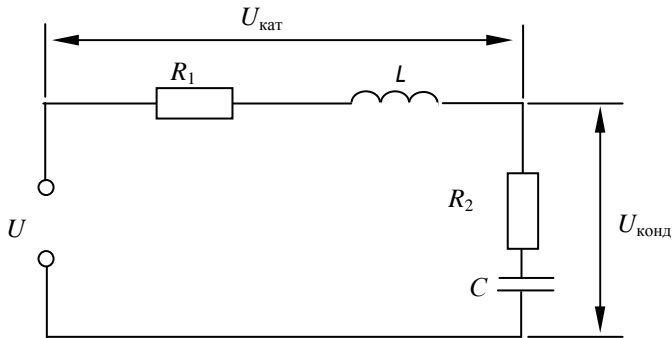


Рис. 2.14

2.1.18. Две последовательно соединённые катушки индуктивности с  $R_1, L_1$  и  $R_2, L_2$  и индуктивностью  $L_3$  присоединены параллельно к двум зажимам. Найти комплексное входное сопротивление цепи при  $R_1 = 100$  Ом;  $R_2 = 10$  Ом;  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$  мГн;  $\omega = 10$  рад/с.

### Ответы, решения и методические указания

2.1.4.  $g = 8,8 \cdot 10^{-2}$  см;  $b = 14,7 \cdot 10^{-2}$  см.

2.1.5. Используя закон Ома для действующих значений, находим комплекс сопротивления нагрузки

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{120e^{j83^\circ 08'}}{2,4e^{j30^\circ}} = 50e^{j53^\circ 08'} = 30 + j40 \text{ Ом.}$$

Действительная часть этого комплекса равна активному сопротивлению, а коэффициент при мнимой части – реактивному сопротивлению:

$$R = 30 \text{ Ом; } X = 40 \text{ Ом} = X_L.$$

Коэффициент мощности цепи  $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{30}{50} = 0,6$ ;  $\varphi = 53^\circ 08'$ .

### ОПРЕДЕЛЯЕМ КОМПЛЕКС ПОЛНОЙ МОЩНОСТИ

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = 120e^{j83^\circ 08'} \cdot 2,4e^{-j30^\circ} = 288e^{j53^\circ 08'} = 172,8 + j230,4 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Модуль этого комплекса равен полной мощности, действительная часть выражает активную мощность коэффициента при мнимой части – реактивную мощность; следовательно,

$$S = 228 \text{ ВА; } P = 172,8 \text{ Вт; } Q = 230,4 \text{ вар.}$$

2.1.6. Комплексное входное сопротивление цепи  $Z'_{\text{вх}}$  равно сумме комплексных сопротивлений  $Z_L$  и  $Z_R$ , т.е.

$$\dot{Z}'_{\text{вх}} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L = R + j\omega L.$$

Комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_m = \dot{U}_m / \dot{Z}'_{\text{вх}}$  (закон Ома в комплексной форме).

2.1.7. Так как  $\dot{U}'_{\text{вх}} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$  и  $\psi_{UL} - \psi_{UR} = 90^\circ$ , то

$$U_{\text{вх}} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 5,89 \text{ В; } \varphi = \text{arctg} \frac{U_L}{U_R} = 32^\circ.$$

2.1.8.  $j60^\circ$ ;  $\dot{I}_2 = 3,8e^{j60^\circ} = 1,9 + j3,3 \text{ А; } \dot{I}_3 = 19e^{-j59^\circ} = 9,8 - j16,2 \text{ А;}$

$\dot{I}_1 = 11,7 - j12,9 = 17,5e^{-j48^\circ} \text{ А; } \dot{U} = 272e^{j2^\circ} \text{ В; } P_1 = 460 \text{ Вт; } P_2 = 420 \text{ Вт;}$

$P_3 = 2150 \text{ Вт; } P = 3030 \text{ Вт.}$

$Q_1 = 760 \text{ вар; } Q_2 = -720 \text{ вар; } Q_3 = 3600 \text{ вар; } Q = 3640 \text{ вар.}$

$$2.1.9. Z = R - jX_C = 6 - j7,96 \text{ Ом}; g = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}; b = 8 \cdot 10^{-2} \text{ см}; R_3 = 16,6 \text{ Ом}; C_3 = 1,27 \text{ мкФ}.$$

$$2.1.10. R_2 = 15 \text{ Ом}.$$

$$2.1.11. \dot{I}_m = 1,1e^{j62^\circ} \text{ А}; i = 1,1 \sin(\omega t + 62^\circ).$$

$$2.1.12. \dot{I} = 0,399e^{j37^\circ} \text{ А}; \dot{U}_R = 7,9e^{j37^\circ} \text{ В}; \dot{U}_L = 14,9e^{j127^\circ} \text{ В}; \dot{U}_C = 21e^{-j53^\circ} \text{ В}.$$

$$2.1.13. \dot{U}_L = 285e^{j18^\circ} \text{ В}; \dot{U}_C = 170e^{j18^\circ} \text{ В}; \varphi = 151^\circ.$$

$$2.1.14. \dot{Z} = R - jX_C = 6 - j7,96 \text{ В}; g = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}; b = 8 \cdot 10^{-2} \text{ см}; R_3 = 16,6 \text{ Ом}; C_3 = 1,27 \text{ мкФ}.$$

$$2.1.15. \dot{I}_1 = 10e^{j30^\circ} \text{ А}; \dot{I}_2 = 10e^{-j30^\circ} \text{ А}; \dot{I}_3 = 17,3 \text{ А}.$$

$$2.1.16. X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106 \text{ Ом};$$

$$Z = \sqrt{X_C^2 + R^2} = \sqrt{120^2 + 106^2} = 160 \text{ Ом};$$

$$U = 311/\sqrt{2} = 220 \text{ В}; I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{160} = 1,37 \text{ А};$$

$$U_R = IR = 165 \text{ В}; U_C = IX_C = 145 \text{ В};$$

$$P = I^2 R = 1,37^2 \cdot 120 = 226 \text{ Вт};$$

$$Q = -I^2 X_C = -1,37^2 \cdot 106 = -210 \text{ вар};$$

$$\text{tg}\varphi = -X_C/R = -\frac{106}{120} = -0,885; \varphi = -41^\circ 30'.$$

Векторная диаграмма напряжений, тока показана на рис. 2.15.

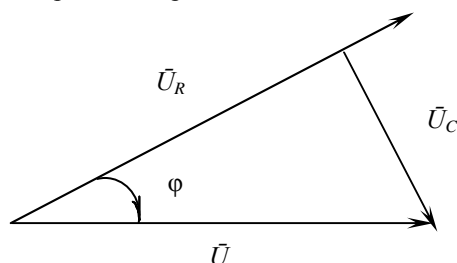


Рис. 2.15

2.1.17. Добротность катушки – это величина, равная отношению

$$Q_L = \frac{\omega L}{R_I};$$

$$\text{добротность конденсатора} - Q_C = \frac{1}{\omega C R_2}.$$

Углом потерь называют угол  $\delta = \pi/2 - |\varphi|$ , где  $\varphi$  – разность фаз тока и напряжения на конденсаторе с потерями.

$$2.1.18. Z_{\text{вх}} = 6,16e^{j68,3^\circ} \text{ Ом}.$$

## 2.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### Контрольные вопросы

1. Чему равно эквивалентное комплексное сопротивление электрической цепи с последовательным соединением комплексных сопротивлений  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_n$ ? Как определить общее активное сопротивление, индуктивность и ёмкость такой цепи?

2. Чему равен модуль комплексного сопротивления цепи, состоящей из двух последовательно соединённых комплексных сопротивлений

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 \text{ и } \dot{Z}_2 = R_2 + jX_2?$$

3. Чему равна эквивалентная комплексная проводимость электрической цепи, представляющей собой параллельное соединение комплексных проводимостей  $\dot{Y}_1, \dot{Y}_2, \dots, \dot{Y}_n$ ? Как определить общую активную проводимость, индуктивность и ёмкость такой цепи?

4. Пояснить, как понимать эквивалентность участков электрических цепей с последовательным и параллельным соединением элементов.

5. Вывести условие эквивалентности (при определённой частоте) активно-ёмкостных цепей с последовательным и параллельным соединением сопротивления и ёмкости.

6. В чём заключается условие эквивалентности генератора напряжения и генератора тока?

7. Привести пример, в котором требуется преобразовать «звезду» в «треугольник» или «треугольник» в «звезду».

8. Каково условие эквивалентности электрических цепей, соединённых по способу «звезда» и «треугольник»?

## Задачи

2.2.1. Выразить комплексные входные сопротивления цепей (рис. 2.16) через комплексные сопротивления их элементов.

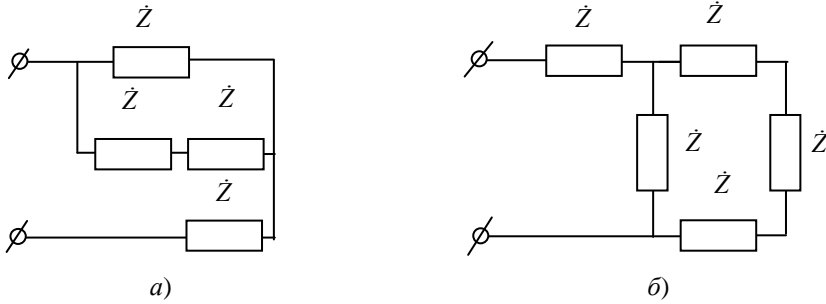


Рис. 2.16

2.2.2. Определить комплексные входные сопротивления и параметры схемы замещения цепей (рис. 2.17). Параметры элементов:

$$C_1 = 70 \text{ пФ}; C_2 = 30 \text{ пФ}; C_3 = 200 \text{ пФ}; C_4 = 100 \text{ пФ};$$

$$C_5 = C_6 = C_7 = 300 \text{ пФ}; L_1 = L_2 = \dots = L_6 = 8 \text{ мГн.}$$

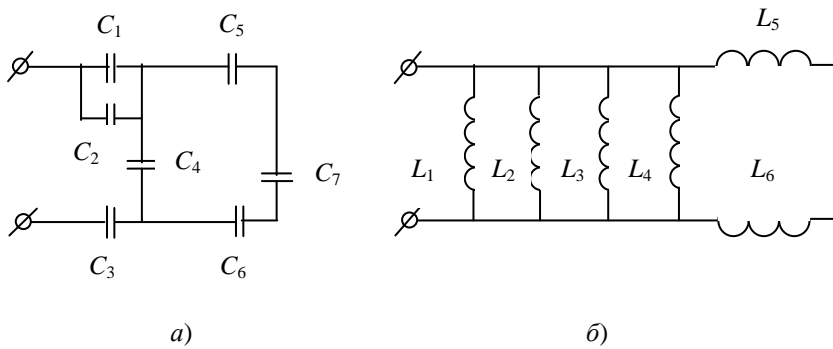


Рис. 2.17

2.2.3. Рассчитать комплексные входные сопротивления цепи (рис. 2.18) на частотах  $f_1 = 39,8 \text{ кГц}$ ;  $f_2 = 79,6 \text{ кГц}$ ;  $f_3 = 159 \text{ кГц}$ . Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $C_1 = C_2 = 0,5 \text{ нФ}$ ;  $\alpha = 10 \text{ мГн}$ .

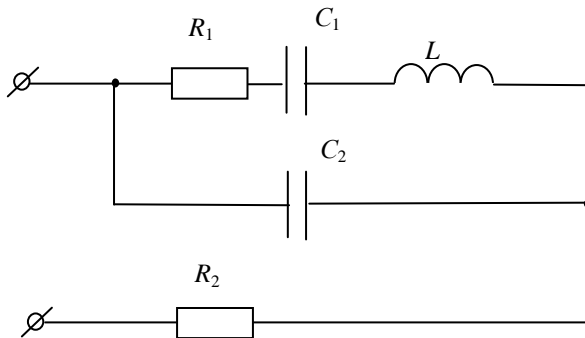


Рис. 2.18

2.2.4. Определить последовательную и параллельную схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.2.3.

2.2.5. Параллельный контур (рис. 2.19), состоящий из активного сопротивления  $R = 40 \text{ Ом}$ , индуктивности с сопротивлением  $X_L = 100 \text{ Ом}$  и ёмкости с  $X_C = 20 \text{ Ом}$ , подключён к источнику с ЭДС  $E = 30 \text{ В}$  через реактивное сопротивление  $X_1$ . Определить величину и характер этого сопротивления, если известно, что через него проходит ток  $I = 12 \text{ А}$ .

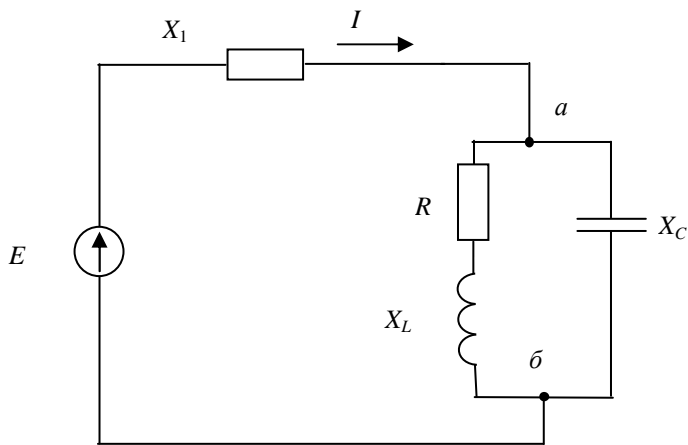


Рис. 2.20

2.2.6. Определить показания амперметра в электрической цепи (рис. 2.21), состоящей из источника  $E = 40$  В и сопротивлений  $R_1 = 30$  Ом;  $R_2 = 15$  Ом;  $R_3 = 6$  Ом;  $R_4 = 9$  Ом;  $R_5 = 2,25$  Ом.

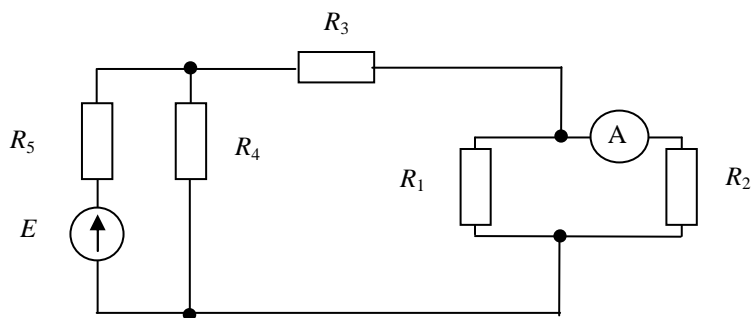


Рис. 2.21

2.2.7. В последовательной электрической цепи (рис. 2.22) известны следующие параметры:  $R_1 = 5$  Ом;  $X_{L1} = 10$  Ом;  $R_2 = 3$  Ом;  $X_{C2} = 15$  Ом;  $R_3 = 4$  Ом;  $X_{L3} = 21$  Ом. Определить эквивалентное комплексное сопротивление и его модуль. Пояснить, что комплексное сопротивление характеризует все свойства электрической цепи.

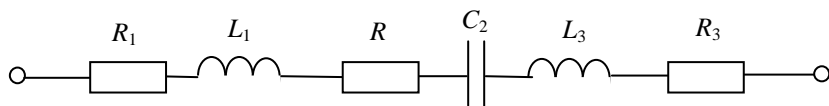


Рис. 2.22

2.2.8. В электрической цепи (рис. 2.23) требуется путём выбора реактивного сопротивления  $X_2$  сделать так, чтобы ток  $\dot{I}_2$  опережал по фазе ток  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$ . Определить величину  $X_2$ , если  $R_1 = 10$  кОм,  $R_2 = 15$  кОм,  $X_1 = 1,5$  кОм.

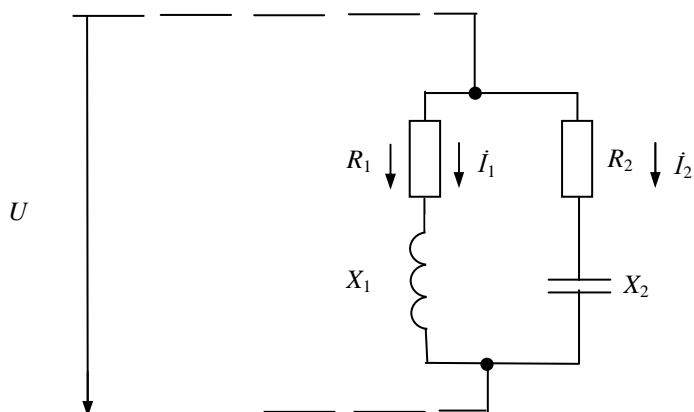


Рис. 2.23

2.2.9. Для последовательной цепи (рис. 2.24) из  $R = 6$  Ом и  $X = 8$  Ом построить эквивалентную параллельную схему и определить её параметры  $R_{\text{экр}}$  и  $X_{\text{экр}}$ .

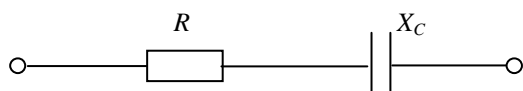


Рис. 2.24



2.2.10. В электрической цепи (рис. 2.25), представляющей параллельное соединение активного сопротивления  $R = 2$  Ом и ёмкости  $C = 0,191$  мкФ, определить параметры эквивалентной схемы с последовательным соединением  $R_{\text{экв}}$  и  $C_{\text{экв}}$  для частоты 1 МГц; 1,5 МГц; 2 МГц.

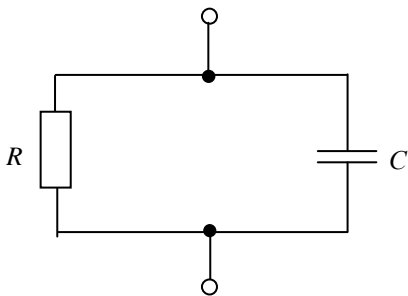


Рис. 2.25

2.2.11. Вычислить комплексное сопротивление электрической цепи при  $\omega = 314$  рад/с (рис. 2.26). Параметры цепи:  $R = 10$  Ом;  $L = 100$  мГн;  $C = 10$  мкФ.

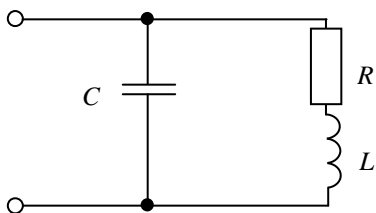


Рис. 2.26

2.2.12. В электрической цепи (рис. 2.24)  $R = 100$  Ом. Определить, какими должны быть параметры  $L$  и  $C$ , чтобы на частоте  $\omega = 10^5$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$  комплексное сопротивление цепи  $\dot{Z}_{\text{ц}} = 600$  Ом.

2.2.13. Нагрузка, состоящая из активного сопротивления с  $R = 10$  Ом и ёмкости  $C = 1/(30\omega)$  Ф, питается от источника с комплексной амплитудой  $U_m = 100$  В через линию передачи с комплексным сопротивлением  $\dot{Z}_1 = 15 + j20$  Ом (рис. 2.27).

Определить комплексные амплитуды тока, потребляемого от источника, и напряжения, действующего на нагрузке.

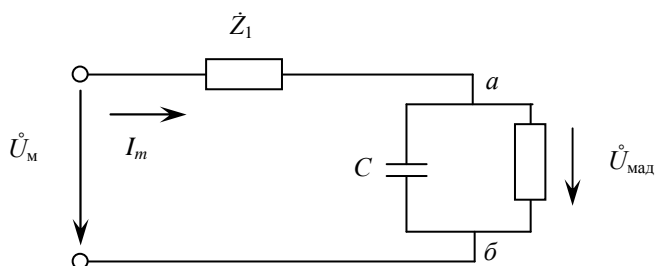


Рис. 2.27

2.2.14. Электрическая цепь состоит из двух параллельных ветвей, комплексные сопротивления которых

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 40 + j30 \text{ Ом};$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 - jX_2 = 80 - j150 \text{ Ом}.$$

Определить комплексное сопротивление и проводимость всей цепи при условии, что частота возрастает в 1,5 раза.

2.2.15. Сопротивления  $Z_{12} = 50 - j20$  Ом,  $Z_{23} = 100$  Ом,  $Z_{31} = 40 + j60$  Ом соединены «треугольником». Преобразовать данный «треугольник» в эквивалентную «звезду», т.е. определить сопротивления лучей «звезды»  $Z_1$ ;  $Z_2$ ;  $Z_3$ .

Ответы, решения и методические указания

2.2.3. Комплексное сопротивление ветви, составленной из элементов

$$R_1, L \text{ и } C_1; \quad \dot{Z}_{\text{эКВ}} = \dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_L + \dot{Z}_{C1}.$$

Комплексное сопротивление параллельно включенных ветвей

$$R_1, L, C_1 \text{ и } C_2; \quad \dot{Z}_{\text{эКВ}} = \dot{Z}_{\text{эКВ}1} \dot{Z}_{C2} / (\dot{Z}_{\text{эКВ}1} + \dot{Z}_{C2}).$$

Комплексное входное сопротивление всей цепи

$$\dot{Z}_{\text{вХ}} = \dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_{\text{эКВ}2},$$

где  $\dot{Z}_{R1} = \dot{Z}_{R2} = R$ ;  $\dot{Z}_L = j\omega L$ ;  $\dot{Z}_{C1} = \dot{Z}_{C2} = -j/\omega C$ .

2.2.4. Последовательная и параллельная схемы замещения цепи, входное комплексное сопротивление которой имеет резистивно-ёмкостной характер, изображены на рис. 2.28.

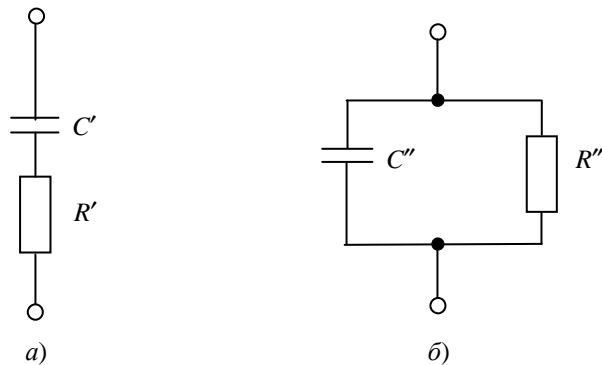


Рис. 2.28

Комплексное сопротивление последовательной цепи  $\dot{Z}_1 = R' - j/\omega C'$ . Сравнивая его с известным сопротивлением цепи  $\dot{Z} = R - jX$ , определим параметры элементов последовательной схемы замещения:  $R' = R$ ;  $C' = -1/\omega X$ .

Комплексная входная проводимость параллельной схемы замещения  $\dot{Y}'' = 1/R'' + j\omega C''$ . Сравнивая её с входной проводимостью рассматриваемой цепи  $\dot{Y} = 1/\dot{Z} = g + jb$ , находим параметры элементов параллельной схемы замещения:  $R'' = 1/g$ ;  $C'' = b/\omega$ .

Параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения цепи (рис. 2.29), имеющей резистивно-индуктивный характер входного комплексного сопротивления:  $R' = R$ ;  $L' = X/\omega$ ;  $R'' = 1/g$ ;  $L'' = 1/\omega b$ .

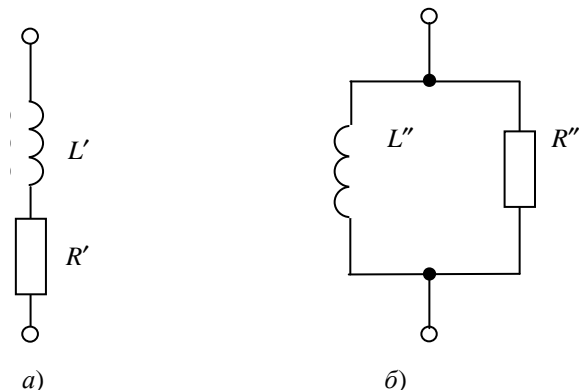


Рис. 2.29

2.2.5. Комплексное сопротивление разветвлённой части цепи

$$\dot{Z}_{ab} = \frac{(R + jX_L)(-jX_C)}{(R + jX_L)(-jX_C)} = \frac{(40 + j100)(-j20)}{40 + j100 - j20} = 2 - j24 \text{ Ом.}$$

Таким образом

$$\dot{Z}_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = 2 - j24 \text{ Ом.}$$

$$\text{Модуль полного сопротивления цепи } Z = \frac{E}{I} = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ Ом.}$$

$$Z = \sqrt{R_{ab}^2 + (X_1 + X_{ab})^2} = \sqrt{2^2 + (X_1 - 24)^2},$$

откуда  $(X_1 - 24)^2 = 2,25$  или  $X_1 - 24 = \pm 1,5$  Ом.

Возможны два решения задачи, когда искомое сопротивление имеет индуктивный характер и равно:  $X_1' = 25,5$  Ом;  $X_1'' = 22,5$  Ом.

2.2.6. 1,2 А.

2.2.7.  $20I^{j53^\circ}$  Ом.

2.2.8. -100 кОм.

2.2.9.  $R_{\text{экв}} = 16,6$  Ом;  $X_{\text{экв}} = 12,5$  Ом.

2.2.10.  $R_{\text{экв}} = 0,296$  Ом; 0,143 Ом; 0,083 Ом.

$C_{\text{экв}} = 0,224$  мкФ; 0,206 мкФ; 0,199 мкФ.

- 2.2.11.  $13,5 + j43,4$  Ом.
- 2.2.12. 2 мГн; 0,04 мкФ.
- 2.2.13.  $3,4l^{-j35^\circ}$  А;  $32l^{-j54^\circ}$  В.
- 2.2.14.  $58,4l^{j21^\circ 35'}$  Ом;  $12 \cdot 10^{-2} l^{j21^\circ 35'}$  Ом.
- 2.2.15.  $18,5 + j7,7$  Ом;  $23,1 - j15,4$  Ом;  $26,5 + j26$  Ом.

### 2.3. ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

#### Контрольные вопросы

1. Поясните, чем определяется направление ЭДС взаимной индукции.
2. В чём состоят особенности расчёта простых и сложных цепей при наличии в цепях взаимной индукции?
3. Записать для согласного последовательного включения индуктивно-связанных катушек уравнения по II-му закону Кирхгофа.
4. Для встречного включения индуктивно-связанных катушек изобразить векторную диаграмму напряжений.
5. Правило составления уравнений по II-му закону Кирхгофа для цепей с взаимной индукцией.
6. Идеальный трансформатор: расчётная схема и уравнения по II-му закону Кирхгофа для первичного и вторичного контуров.
7. Преобразование сопротивления нагрузки с помощью согласующего трансформатора.

#### Задачи

2.3.1. Составить уравнения электрического равновесия для определения токов ветвей цепи, изображённой на рис. 2.30.

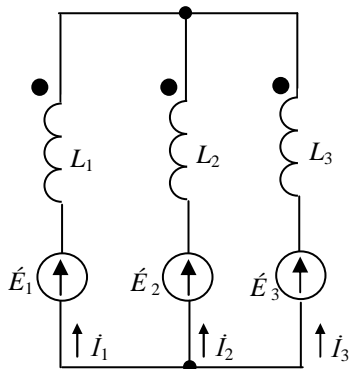


Рис. 2.30

2.3.2. Составить системы уравнений электрического равновесия цепей, схемы которых приведены на рис. 2.31.

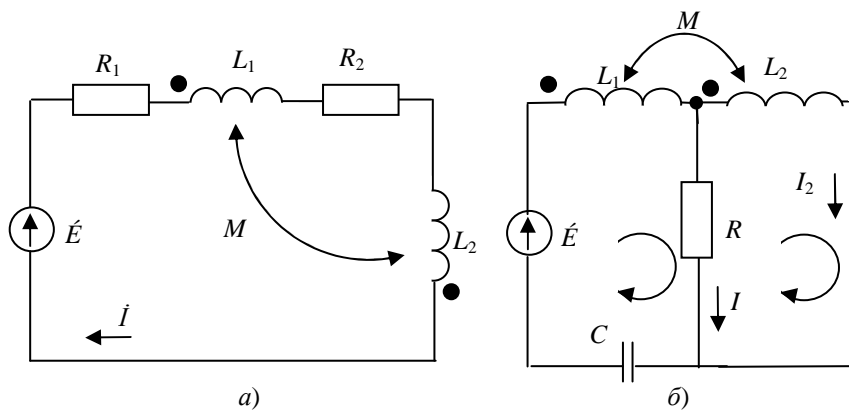


Рис. 2.31

2.3.3. На рисунке 2.32 приведена схема цепи со следующими параметрами элементов:  $R = 5$  кОм;  $C = 0,5$  нФ;  $L_1 = 3$  мГн;  $L_2 = 5$  мГн;  $M = 2$  мГн;  $\dot{E} = 10$  В;  $\omega = 10^6$  рад·с<sup>-1</sup>. Определить комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов I-I и мгновенное значение тока. Проверить выполнение баланса мощностей.

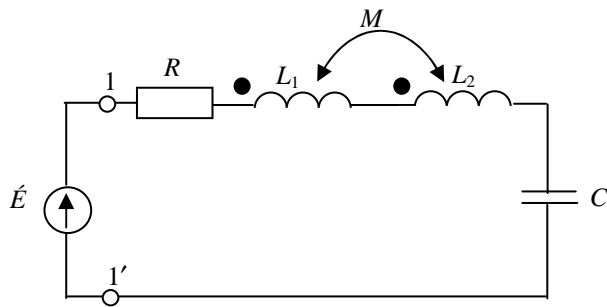


Рис. 2.32

2.3.4. Рассчитать входное комплексное сопротивление цепи (рис. 2.33).

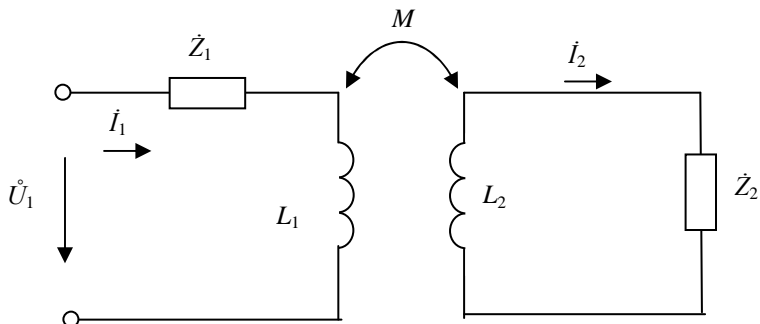


Рис. 2.33

2.3.5. На частоте  $\omega = 10^6$  рад·с<sup>-1</sup> входное сопротивление одной из двух одинаковых индуктивно-связанных катушек при разомкнутой другой катушке составляет  $Z_{1X} = 10^4$  Ом, а при короткозамкнутой  $Z_{1K} = 0,99 \cdot 10^4$  Ом. Определить индуктивность катушек, взаимную индуктивность и коэффициент связи между катушками. Потерями в катушках пренебречь.

2.3.6. Каким должно быть ёмкостное сопротивление  $X_C$  в цепи (рис. 2.34), чтобы входной ток совпал по фазе с входным напряжением, если  $X_{L1} = 10$  Ом;  $X_{L2} = 20$  Ом;  $X_M = 10$  Ом;  $R_2 = 10$  Ом;  $R_1 = 2$  Ом;  $\dot{U} = 100$  В.

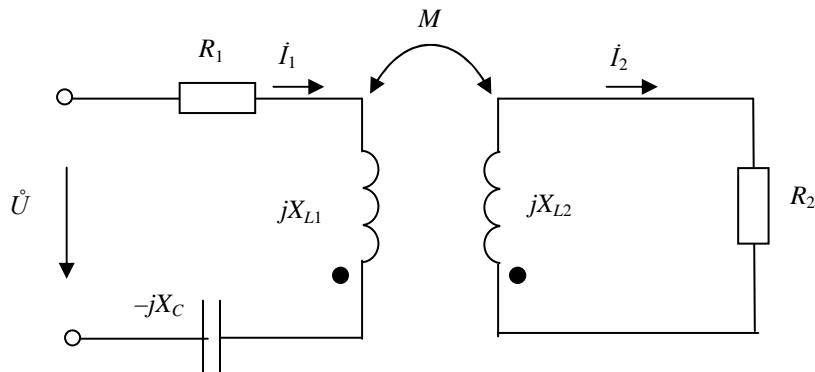


Рис. 2.34

2.3.7. В цепи (рис. 2.35)  $U = 100$  В;  $f = 500$  Гц;  $R_1 = 12$  Ом;  $R_2 = 8$  Ом;  $L_1 = L_2 = 2M = 0,02$  Гн катушки включены встречно. Определить, при каком значении ёмкости  $C$  цепь будет находиться в режиме резонанса и каково при этом будет напряжение на ёмкости?

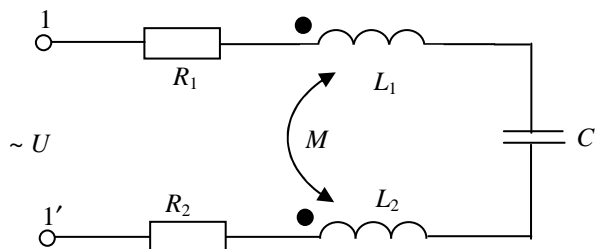


Рис. 2.35

2.3.8. Комплекс тока вторичной обмотки трансформатора (рис. 2.36) без стального сердечника  $\dot{I}_2 = 4$  А. Сопротивления элементов цепи  $R_1 = 5$  Ом;  $X_1 = 20$  Ом;  $R_2 = 7$  Ом;  $X_2 = 24$  Ом. Коэффициент магнитной связи обмоток  $K_{св} = 46\%$ . Определить комплекс напряжения, приложенного к первичной обмотке трансформатора и построить векторную диаграмму.

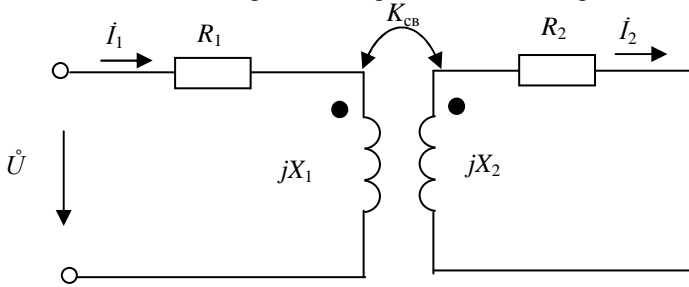


Рис. 2.37

2.3.9. Определить комплексный ток в цепи, изображённой на рис. 2.38, если известны:  $\dot{U} = 130$  В;  $R_1 = 6$  Ом;  $R_2 = 3$  Ом;  $\omega L_1 = 3$  Ом;  $\omega L_2 = 7$  Ом;  $\omega M = 1$  Ом.

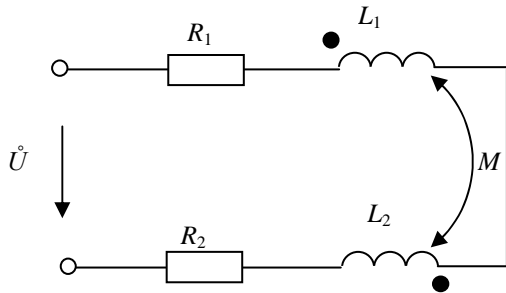


Рис. 2.38

2.3.10. Определить напряжение на ёмкости  $C = 43$  мкФ, включённой между двумя индуктивно-связанными катушками с параметрами (рис. 2.39):  $R_1 = 10,5$  Ом;  $L_1 = 20$  мГн;  $R_2 = 9,2$  Ом;  $L_2 = 18$  мГн;  $M = 6,5$  мГн. Напряжение 100 В, частота 200 Гц.

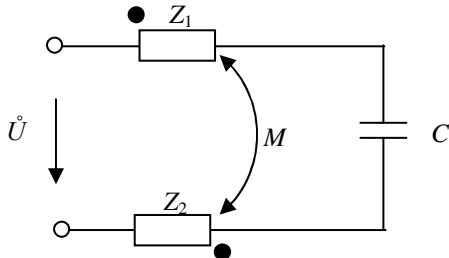


Рис. 2.39

2.3.11. Вольтметр и амперметр, включённые в цепь (рис. 2.40), показали  $U = 88$  мВ,  $I = 2,2$  мА. Чему равна ёмкость  $C$ , если  $R_1 = 9,5$  Ом;  $\omega L_1 = 14,6$  Ом;  $R_2 = 11,6$  Ом;  $\omega L_2 = 17$  Ом;  $\omega M = 3,2$  Ом? Частота тока  $f = 50$  кГц.

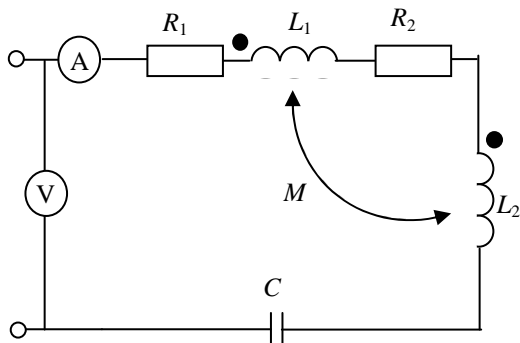


Рис. 2.40

2.3.12. Идеальный трансформатор включён между источником с внутренним сопротивлением  $Z_i = Z_{вх1} = 24$  кОм и нагрузкой  $Z_n = 6$  кОм, с целью повышения отдаваемой источником мощности. Какой коэффициент трансформации  $n$  должен иметь согласующий трансформатор?

2.3.13. Определить входное сопротивление цепи, состоящей из двух трансформаторов, включённых каскадно с нагрузкой  $R_n$  на выходе (рис. 2.41). Активные сопротивления обмоток трансформатора не учитываются.

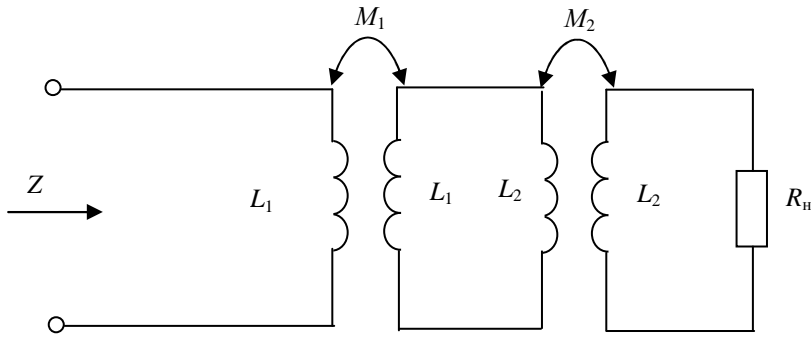


Рис. 2.41

Ответы, решения и методические указания

2.3.3. Комплексное входное сопротивление цепи

$$Z_{\text{вх}} = R + j[\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M_1 - 1/\omega C] = 5 + j10 \text{ кОм.}$$

По закону Ома в комплексной форме комплексное действующее значение тока

$$i = \frac{\dot{E}}{Z_{\text{вх}}} = (0,4 + j0,8)10^{-3} = 0,894 \cdot 10^{-3} e^{-63,4^\circ} \text{ А,}$$

чему соответствует мгновенное значение тока  $i = 1,26 \cos(10^6 t - 63,4^\circ)$  мА. Комплексная мощность, отдаваемая источником ЭДС,

$$\hat{P}_{\text{ист}} = \dot{E}\bar{i} = (4 + j8) \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Сумма комплексной мощности всех потребителей

$$\hat{P}_{\text{потр}} = I^2 R + jI^2[\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - 1/\omega C] = (4 + j8) \cdot 10^{-3} \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Баланс мощностей выполняется.

2.3.4. Используя основную систему уравнений электрического равновесия цепи, можно получить уравнения в виде

$$\dot{I}_1 \dot{Z}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U}_1; \quad \dot{I}_2 \dot{Z}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = 0.$$

Исключая из полученной системы уравнения ток  $I_2$ , получаем выражение для входного сопротивления цепи:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{Z}_1} = -Z_1 + j\omega L_1 - (\omega M)^2 / (Z_2 + j\omega L_2).$$

2.3.5. Индуктивность катушек и взаимная индуктивность могут быть определены с помощью выражений, полученных из решений задачи 2.3.4:  $Z_{\text{вх. х}} = \omega L_1$ ;  $Z_{\text{вх. х}} = \omega(L_1 - M^2/L_2)$ . Коэффициенты связи  $K = M/L$ .

2.3.6. По второму закону Кирхгофа при встречном включении обмоток можно записать

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(R_P + jX_{L1} - jX_C) - \dot{I}_2 jX_M &= \dot{U}_1; \\ -\dot{I}_1 jX_M + \dot{I}_2(R_2 + jX_{L2}) &= 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения выразим  $I_2 = I_1 \frac{jX_M}{R_2 + jX_{L2}}$  и, подставляя в первое, получим

$$I_2 Z_{\text{вх}} = U,$$

где

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} = R_1 + jX_{L1} - jX_C + \frac{X_M}{R_2 + jX_{L2}} &= R_1 + \frac{R_2 - X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2} + \\ + j \left( X_{L1} - X_C - \frac{X_{L2} - X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2} \right). \end{aligned}$$

По условию  $I_m[Z_{\text{вх}}] = 0$ , откуда

$$X_C = X_{L1} - \frac{X_{L2} X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2},$$

определим комплексы токов

$$I_1 = \frac{U}{Z_{\text{вх}}}; \quad I_2 = I_1 \frac{jX_M}{R_2 + jX_{L_2}}.$$

2.3.7. При резонансе напряжений реактивное сопротивление равно нулю  $X_1 + X_2 - 2X_M - X_C = 0$  или  $\omega(L_1 + L_2 - 2M) - \frac{1}{\omega C} = 0$ , откуда

$$C = \frac{1}{\omega^2(L_1 + L_2 - 2M)}.$$

Действующее значение тока при резонансе  $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$ .

Действующее значение напряжения на конденсаторе

$$U_C = IX_C = I \frac{1}{\omega C}.$$

2.3.8. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{U} = R_1 \dot{I}_1 + jX_1 \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2; \\ 0 = R_2 \dot{I}_2 + jX_2 \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

или 
$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 - \dot{Z}_M \dot{I}_2; \\ 0 = -\dot{Z}_M \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \dot{I}_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 5 + j20 = 20,6e^{j76^\circ}$  Ом;

$$\dot{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 7 - j24 = 25e^{j73^\circ 45'}$$
 Ом.

Из второго уравнения системы (2.1) находим  $\dot{I}_1$ :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_M} = 4 \frac{25e^{j73^\circ 45'}}{10e^{j90^\circ}} = 10e^{-j16^\circ 15'} \text{ А.}$$

Подставив найденный комплекс тока  $\dot{I}_1$  в первое уравнение системы (2.1), получим

$$\dot{U} = 10e^{-j16^\circ 15'} \cdot 20e^{j76^\circ} - 4 \cdot 10e^{j90^\circ} = 173e^{j53^\circ} \text{ В.}$$

2.3.9.  $\dot{I} = (5,7 - j7,1)$  А.

2.3.10. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I},$$

из которого  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) - j\frac{1}{\omega C}}$  и напряжение на ёмкости  $\dot{U}_C = -jX_C \dot{I} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$ .

2.3.11. 0,796 мкФ или 0,0442 мкФ.

2.3.12.  $n = 2$ .

$$2.3.13. Z_{\text{вх}} = \frac{\omega R_{\text{н}}(L_1^2 + L_1 L_2 - M_1^2)}{\omega(L_1 L_2 + L_2^2 - M_2^2) - jR_{\text{н}}(L_1 + L_2)} + \frac{j\omega^2(L_1^2 L_2 + L_1 L_2^2 - L_1 M_2^2 - L_2 M_1^2)}{\omega(L_1 L_2 + L_2^2 - M_2^2) - jR_{\text{н}}(L_1 + L_2)}.$$

### 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЁТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В методе контурных токов в качестве неизвестных выступают так называемые контурные токи, одинаковые для всех участков контура. При решении задач рекомендуется записывать уравнения в канонической форме, например, для трёхконтурной цепи:

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11}\dot{I}_I + \dot{Z}_{12}\dot{I}_{II} + \dot{Z}_{13}\dot{I}_{III} = E_I; \\ \dot{Z}_{21}\dot{I}_I + \dot{Z}_{22}\dot{I}_{II} + \dot{Z}_{23}\dot{I}_{III} = E_{II}; \\ \dot{Z}_{31}\dot{I}_I + \dot{Z}_{32}\dot{I}_{II} + \dot{Z}_{33}\dot{I}_{III} = E_{III}, \end{cases}$$

где  $\dot{Z}_{ii}(\dot{Z}_{11}, \dot{Z}_{22}, \dot{Z}_{33})$  – собственно сопротивление  $i$ -го контура представляет собой сумму комплексных сопротивлений, входящих в контур, входит в уравнение со знаком плюс;  $\dot{Z}_{ij}(\dot{Z}_{12}, \dot{Z}_{13}, \dot{Z}_{23}, \dot{Z}_{21}, \dot{Z}_{31}, \dot{Z}_{32})$  – общее сопротивление двух рядом расположенных контуров, входит в уравнение со знаком плюс, если контурные токи в общем сопротивлении совпадают по направлению, при несовпадении направлений токов общее сопротивление входит со знаком минус;  $\dot{E}_i(\dot{E}_I, \dot{E}_{II}, \dot{E}_{III})$  – контурная ЭДС (алгебраическая сумма ЭДС входящих в  $i$ -й контур).

После решения системы уравнений относительно контурных токов токи в ветвях определяются алгебраической суммой контурных токов, протекающих через соответствующие ветви.

В методе узловых напряжений на первом этапе расчёта в качестве неизвестных выступают потенциалы узловых точек схем (узловые напряжения).

При расчёте этим методом систему уравнений цепи следует представить в виде

$$\begin{cases} \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{13}\dot{U}_3 = \dot{I}_I; \\ \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{23}\dot{U}_3 = \dot{I}_{II}; \\ \dot{Y}_{31}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{32}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{33}\dot{U}_3 = \dot{I}_{III}, \end{cases}$$

где  $\dot{Y}_{ii}(\dot{Y}_{11}, \dot{Y}_{22}, \dot{Y}_{33})$  – собственная проводимость  $i$ -го узла;  $\dot{Y}_{ij}(\dot{Y}_{12}, \dot{Y}_{13}, \dot{Y}_{23}, \dots)$  – общая проводимость узлов  $i$  и  $j$ ;  $\dot{Y}_{ij}$  – входит в уравнение со знаком минус, если положительные направления узловых напряжений выбраны от независимых узлов к базисному узлу, в противном случае общая проводимость берётся со знаком плюс;  $\dot{I}_i(\dot{I}_I, \dot{I}_{II}, \dot{I}_{III})$  – узловой ток (алгебраическая сумма токов, полученных от деления ЭДС ветвей, подходящих к  $i$ -му узлу на сопротивления данных ветвей). В эту сумму со знаком плюс входят токи тех ветвей, ЭДС которых направлены к  $i$ -му узлу.

После определения узловых напряжений токи в ветвях находят по закону Ома для участка цепи.

Для нахождения тока в одной из ветвей цепи используют метод эквивалентного генератора.

Искомый ток ветви определяется по закону Ома

$$I = \frac{U_{авхх}}{R_{эавв} + R},$$

если в данной ветви нет источника ЭДС и  $I = \frac{U_{авхх} \pm E}{R_{эавв} + R}$ , если в данной ветви имеется источник ЭДС  $E$ , направление

которого совпадает «+» или не совпадает «-» с направлением тока от зажима  $a$  к зажиму  $b$ .

Для переменных токов расчётные уравнения в комплексной форме будут иметь вид

$$\dot{I} = \frac{U_{авхх}}{\dot{Z}_{эавв} + \dot{Z}}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_{авхх} \pm \dot{E}}{\dot{Z}_{эавв} + \dot{Z}}.$$

При расчёте цепи методом наложения (суперпозиции) истинный ток в любой и каждой ветви цепи определяют как алгебраическую сумму частичных токов, вызываемых в данной ветви действием каждого из источников в отдельности.

При определении токов в цепи от действия какого-либо одного источника остальные источники должны быть исключены, но их внутренние сопротивления (проводимости) оставлены.

Метод наложения применим лишь для линейных цепей.

### 3.1. МЕТОДЫ КОНТУРНЫХ ТОКОВ И УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

#### Контрольные вопросы

1. Что называется ветвью, узлом и контуром электрической цепи?
2. Сформулировать и записать I и II законы Кирхгофа в интегральной и комплексной формах.
3. В чём состоит сущность метода контурных токов?
4. Каков порядок определения независимых контуров в электрической цепи?
5. Что понимается под контурным током контурной ЭДС?
6. Что представляют собой собственное и взаимное сопротивления контуров?
7. В чём состоит сущность метода узловых напряжений?
8. Что понимается под узловым напряжением?
9. Что называется собственной и общей проводимостями?

#### Задачи

3.1.1. Методом контурных токов найти токи в цепи (рис. 3.1), где  $E_1 = 52$  В;  $E_2 = 48$  В;  $R_1 = 4$  Ом;  $R_2 = 8$  Ом;  $R_3 = 10$  Ом.

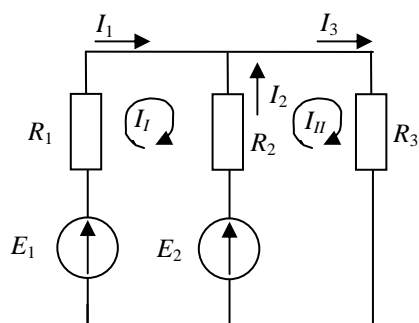




Рис. 3.1

3.1.2. Найти токи в схеме (рис. 3.2) методом контурных токов, если  $\dot{E}_1 = 100$  В;  $\dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ}$  В;  $X_C = \frac{1}{\omega C} = 2$  Ом;  $R = 5$  Ом;  $X_L = \omega L = 5$  Ом. Проверить баланс мощностей.

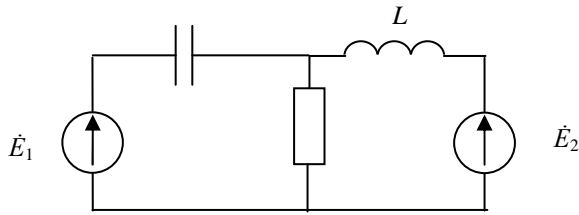


Рис. 3.2

3.1.3. Определить комплексы действующих значений токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.3), если  $\dot{Z}_1 = 26 + j25$  Ом;  $\dot{Z}_2 = 26 - j5$  Ом;  $\dot{Z}_3 = -j10$  Ом;  $\dot{E}_1 = 20e^{j30}$  В;  $\dot{E}_2 = 80$  В.

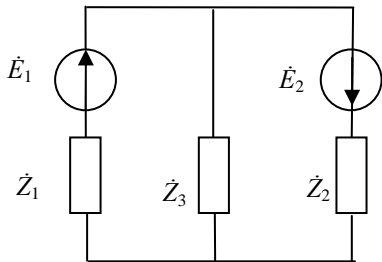


Рис. 3.3

3.1.4. В электрической цепи (рис. 3.4)  $\dot{Z}_1 = 19 - j2$  Ом;  $\dot{Z}_2 = 40$  Ом;  $\dot{Z}_3 = 6 + j8$  Ом;  $\dot{Z}_4 = 5 - j15$  Ом;  $\dot{Z}_5 = 5 - j20$  Ом и  $\dot{Z}_6 = 5 + j15$  Ом. ЭДС источника  $\dot{E} = 100$  В. Определить токи в ветвях.

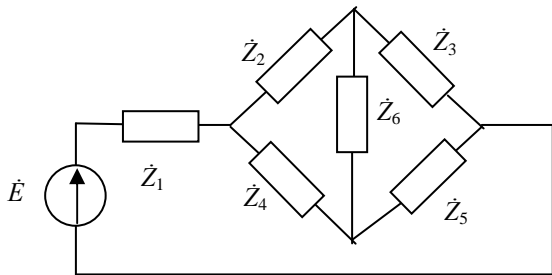


Рис. 3.4

3.1.5. В электрическую цепь (рис. 3.5) включены два генератора синусоидального тока  $i_1 = 50\sqrt{2} \sin \omega t_m$ , А;  $i_2 = 20\sqrt{2} \sin \omega t_m$ , А. Известны  $R_1 = 10$  кОм;  $R_2 = 25$  кОм;  $R_3 = 20$  кОм;  $X_C = 34$  кОм. Определить токи в ветвях.

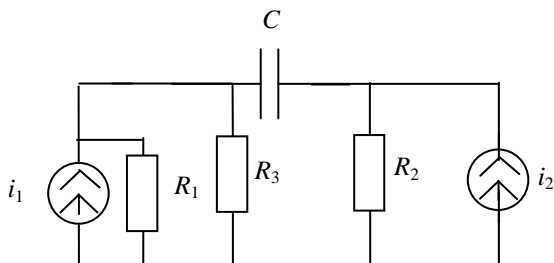


Рис. 3.5

3.1.6. В электрической цепи (рис. 3.6) известны  $\dot{E}_1 = 20$  В;  $R_1 = 500$  Ом;  $R_3 = 400$  Ом;  $X_L = 600$  Ом;  $X_C = 250$  Ом;  $I = 40$  мА. Методом контурных токов найти токи в ветвях и проверить баланс мощностей.

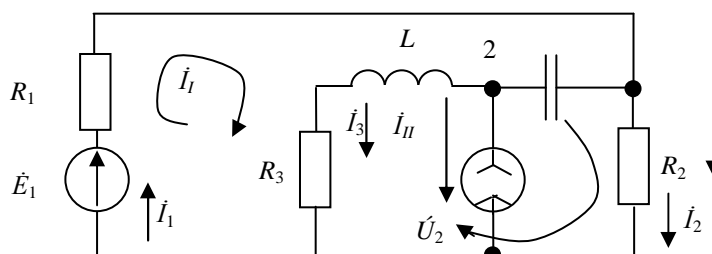


Рис. 3.6

3.1.7. Найти токи в схеме (рис. 3.7) методом контурных токов, если  $\dot{E}_1 = 100 \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = 100e^{j90} \text{ В}$ ;  $\dot{X}_C = \frac{1}{\omega C} = 2 \text{ Ом}$ ;  $R = 5 \text{ Ом}$ ;  $X_L = \omega L = 5 \text{ Ом}$ . Проверить баланс мощностей.

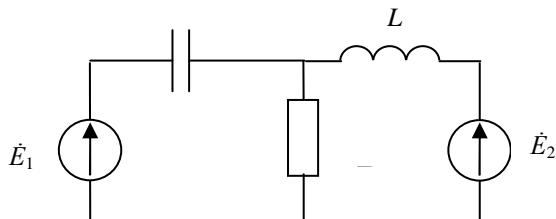


Рис. 3.7

3.1.8. Определить комплексы действующих значений токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.8), если  $\dot{Z}_1 = 26 + j25 \text{ Ом}$ ;  $\dot{Z}_2 = 26 - j5 \text{ Ом}$ ;  $\dot{Z}_3 = -j10 \text{ Ом}$ ;  $\dot{E}_1 = 20e^{j30} \text{ В}$ ;  $\dot{E}_2 = 80 \text{ В}$ .

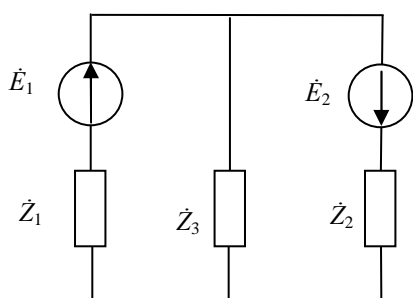


Рис. 3.8

3.1.9. Методом узловых потенциалов определить токи в ветвях цепи (рис. 3.9), где  $I_{R1} = I_{R3} = I \text{ А}$ ;  $E_6 = 1 \text{ В}$ ;  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 1 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = R_7 = 0,5 \text{ Ом}$ .

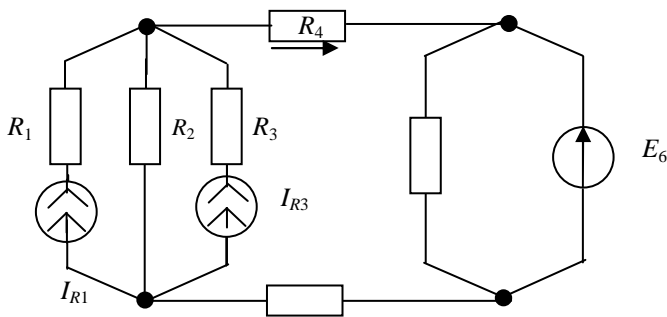


Рис. 3.9

3.1.10. Найти токи в электрической цепи (рис. 3.10), если  $l_1 = 120\sqrt{2} \sin(\omega t)$ , В;  $l_2 = 100\sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ)$ , В;  $K = 2 \text{ Ом}$ ;  $X_C = 10 \text{ Ом}$ ;  $X_L = 5 \text{ Ом}$ .

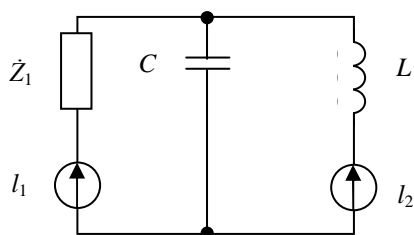


Рис. 3.10

3.1.11. Для мостовой схемы (рис. 3.11) известны  $\dot{E}_1 = 130 \text{ В}$ ;  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $X_{L2} = 5 \text{ Ом}$ ;  $X_{L3} = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 5 \text{ Ом}$ ;  $X_{C5} = 10 \text{ Ом}$ . Определить токи в ветвях и активную мощность, расходуемую в цепи.

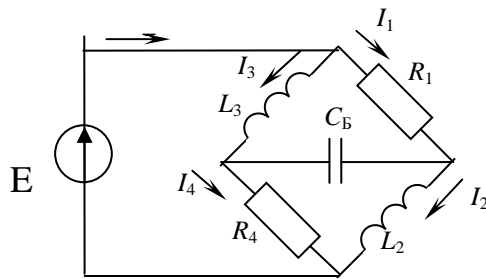


Рис. 3.11

3.1.12. В электрической схеме (рис. 3.12) известны  $\dot{E}_1 = 24$  В;  $\dot{E}_2 = 96$  В;  $\dot{E}_3 = 32$  В;  $R_1 = 1$  Ом;  $R_2 = 16$  Ом;  $R_3 = 8$  Ом;  $R_4 = 16$  Ом;  $R_5 = 8$  Ом. Определить токи в ветвях.

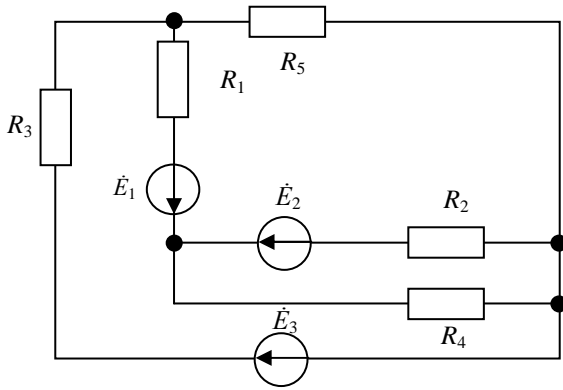


Рис. 3.12

Ответы, решения и методические указания

3.1.1. В данной цепи два независимых контура. Каноническая система уравнений для определения двух неизвестных контурных токов имеет вид

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11}\dot{I}_I + \dot{Z}_{12}\dot{I}_{II} = \dot{E}_I; \\ \dot{Z}_{21}\dot{I}_I + \dot{Z}_{22}\dot{I}_{II} = \dot{E}_{II}. \end{cases}$$

Если выбрать независимые контуры так, как показано на рис. 3.1, то  $\dot{Z}_{11} = R_1 + R_2 = 4 + 8 = 12$  Ом – полное сопротивление первого контура: это сумма всех сопротивлений, по которым протекает контурный ток  $\dot{I}_I$ ;  $\dot{Z}_{22} = R_3 + R_4 = 8 + 10 = 18$  Ом – полное сопротивление второго контура;  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = -8$  Ом – взаимное (общее) сопротивление первого и второго контуров; оно положительно, если контурные токи  $\dot{I}_I$  и  $\dot{I}_{II}$  протекают по нему в одном направлении, в противном случае оно отрицательно;  $\dot{E}_I = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 = 52 - 48 = 4$  В – контурная ЭДС первого контура; эта алгебраическая сумма ЭДС, входящих в первый контур;  $\dot{E}_{II} = \dot{E}_2 = 48$  В – контурная ЭДС второго контура.

После подстановки числовых значений имеем систему

$$\begin{cases} 12\dot{I}_I - 8\dot{I}_{II} = 4; \\ -8\dot{I}_I + 18\dot{I}_{II} = 48, \end{cases}$$

решая которую, получаем  $\dot{I}_I = 3$  А;  $\dot{I}_{II} = 4$  А.

Истинные токи в ветвях  $\dot{I}_1 = \dot{I}_I = 3$  А;

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{II} - \dot{I}_I = 1 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{II} = 4 \text{ А}.$$

3.1.2.  $\dot{I}_1 = 27,8e^{-j56^\circ 20'}$  А;

$$\dot{I}_2 = 32,3e^{-j115^\circ 20'}$$
 А;

$$\dot{I}_3 = 30e^{-j11^\circ 43'}$$
 А.

3.1.3.  $\dot{I}_1 = e^{-j53^\circ}$  А;

$$\dot{I}_2 = 2,4e^{j25^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = 2,4e^{j49^\circ} \text{ A}.$$

3.1.4.

$$\dot{I}_1 = 1,8e^{j20^\circ 10'} \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = 0,56e^{-j38^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = 2,37e^{-j53^\circ 05'} \text{ A};$$

$$\dot{I}_4 = 1,59e^{j37^\circ 35'} \text{ A};$$

$$\dot{I}_5 = 2,55e^{j83^\circ 35'} \text{ A};$$

$$\dot{I}_6 = 1,83e^{-j122^\circ 20'} \text{ A}.$$

3.1.5.

$$\dot{I}_1 = 35e^{j2^\circ 50'} \text{ mA};$$

$$\dot{I}_2 = 17,8e^{-j8^\circ 30'} \text{ mA};$$

$$\dot{I}_3 = 17,5e^{j2^\circ 50'} \text{ mA};$$

$$\dot{I}_4 = 5,6e^{j47^\circ} \text{ mA}.$$

3.1.6. В схеме имеются пять ветвей ( $p = 5$ ), три узла ( $q = 3$ ) и один источник тока ( $n_{\text{и.т}} = 1$ ). Известно, что число независимых уравнений, составленных по методу контурных токов,  $n = P - q + 1 - n_{\text{и.т}} = 5 - 3 + 1 - 1 = 2$ .

Независимые контуры следует выбирать так, чтобы  $n$  контурных токов проходили по ветвям, не содержащим источника тока. Выберем направления контурных токов  $\dot{I}_I$  и  $\dot{I}_{II}$  и тока источника тока  $\dot{I}$ , как это показано на рис. 3.6.

$$I_3 = 17,5e^{j2^\circ 50'} \text{ mA}.$$

Запишем в общем виде систему уравнений для контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_I \dot{Z}_{11} + \dot{I}_{II} \dot{Z}_{12} = \dot{E}_I; \\ \dot{I}_I \dot{Z}_{21} + \dot{I}_{II} \dot{Z}_{22} = \dot{E}_{II}. \end{cases}$$

Здесь  $\dot{Z}_{11}$  – собственное сопротивление первого контура;  $\dot{Z}_{22}$  – собственное сопротивление второго контура;  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$  – взаимное сопротивление контуров.

$$\dot{Z}_{11} = R_1 + R_3 + jX_L - jX_C = 500 + 400 + j600 - j250 = 900 + j350 \text{ Ом};$$

$$\dot{Z}_{22} = R_3 + R_2 + jX_L - jX_C = 400 + 300 + j600 - j250 = 700 + j350 \text{ Ом};$$

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = -(R_3 + jX_L - jX_C) = -(400 + j600 - j250) = -400 - j350 \text{ Ом}.$$

Подставляя найденные значения  $\dot{Z}_{11}$ ,  $\dot{Z}_{22}$ ,  $\dot{Z}_{21}$ ,  $\dot{Z}_{12}$  в исходные уравнения и решая их, найдём контрольные токи:

$$\dot{I}_I = 16,9e^{-j38^\circ} \text{ mA}; \quad \dot{I}_{II} = 15,2e^{j79^\circ} \text{ mA}.$$

Токи в ветвях:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_I = 16,9e^{-j32^\circ} \text{ mA};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{II} + \dot{I} = 45,4e^{j19^\circ} \text{ mA};$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_I - \dot{I}_{II} = 26,3e^{-j64^\circ 25'} \text{ mA};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_I - \dot{I}_{II} - \dot{I} = 37,2e^{-j140^\circ 20'} \text{ mA}.$$

Проверим баланс мощностей:

- мощности источников

$$\tilde{S}_E = \dot{E}_1^* \dot{I}_1 + \dot{U}_2^* \dot{I} = \dot{E}_1^* \dot{I}_1 + \dot{I}_3^* (R_3 + jX_L) \dot{I} = 1,038 + j0,071 \text{ В} \cdot \text{A};$$

- мощности приёмников энергии

$$\tilde{S}_Z = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_3^2 jX_L - I_4^2 jX_C = 1,038 + j0,071 \text{ В} \cdot \text{A}.$$

Из полученных результатов видно, что  $\tilde{S}_Z = \tilde{S}_E$ , т.е. баланс мощностей соблюдается.

3.1.7.

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 27,8e^{-j56^\circ 20'} \text{ A}; \\ \dot{I}_2 &= 32,3e^{-j115^\circ 20'} \text{ A}; \\ \dot{I}_3 &= 30e^{j11^\circ 43'} \text{ A}. \end{aligned}$$

3.1.8.

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= e^{-j53^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_2 &= 2,4e^{-j25^\circ} \text{ A}; \\ \dot{I}_3 &= 2,4e^{-j49^\circ} \text{ A}. \end{aligned}$$

3.1.9. В цепи четыре узла. Пусть  $\dot{U}_4 = 0$ , тогда при условии  $R_6 = 0$   $\dot{U}_3 = \dot{U}_4 + E_6 = 1 \text{ В}$ . Таким образом, требуется определить потенциалы двух оставшихся узлов – первого и второго. Записываем систему уравнений в канонической форме:

$$\begin{cases} Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 + Y_{13}U_3 = I_I; \\ Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 + Y_{23}U_3 = I_{II}. \end{cases}$$

Следует обратить внимание на то, что необходимость в третьем уравнении отпала, так как потенциал третьего узла уже известен. Определим коэффициенты записанных уравнений:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} = 3 \text{ См}; \\ Y_{22} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = 3 \text{ См}; \\ Y_{12} = Y_{21} &= -\frac{1}{R_2} = -1 \text{ См}; \\ Y_{13} = 0, Y_{23} &= -\frac{1}{R_4} = -\frac{1}{0,5} = -2 \text{ См}. \\ I_{11} &= -I_{R_1} - I_{R_3} = -2 \text{ А}; \\ I_{22} &= I_{R_1} + I_{R_3} = 2 \text{ А}. \end{aligned}$$

Подставив полученные коэффициенты в уравнение и перенося известные величины вправо, получаем

$$\begin{cases} 3U_1 - U_2 = -2; \\ -U_1 + 3U_2 = 4, \end{cases}$$

откуда  $U_1 = -0,25 \text{ В}$ ;  $U_2 = 1,25 \text{ В}$ .

Определяем по закону Ома токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{U_2 - U_1}{R_2} = \frac{1,25 - (-0,25)}{1} = 1,5 \text{ А}; \\ I_4 &= \frac{U_2 - U_3}{R_4} = \frac{1,25 - 1}{0,5} = 0,5 \text{ А}; \\ I_7 &= \frac{U_4 - U_1}{R_7} = \frac{0 - (-0,25)}{0,5} = 0,5 \text{ А}; \\ I_5 &= \frac{U_3 - U_4}{R_5} = \frac{1 - 0}{1} = 1 \text{ А}. \end{aligned}$$

Ток  $\dot{I}_6$  определим с помощью 1-го закона Кирхгофа для третьего или четвертого узла:

$$I_6 = I_5 - I_4 = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ А}.$$

3.1.10.

$$\dot{I}_R = 11,17e^{j40^\circ 25'} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = 10,4e^{j98^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_R = 7,82e^{j155^\circ 30'} \text{ A}.$$

3.1.11.

$$\dot{I}_1 = 4 - j6 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = 12 - j18 \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = 2 - j16 \text{ A};$$

$$\dot{I}_4 = -6 - j4 \text{ A};$$

$$\dot{I}_5 = -8 + j12 \text{ A};$$

$$P_A = 780 \text{ Вт}$$

3.1.12.

$$I_1 = 2,1 \text{ A};$$

$$I_2 = 2,12 \text{ A};$$

$$I_3 = 6,95 \text{ A};$$

$$I_4 = 3,88 \text{ A};$$

$$I_5 = 5,04 \text{ A}.$$

### 3.2. МЕТОДЫ НАЛОЖЕНИЯ И ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

#### Контрольные вопросы

1. Поясните целесообразность применения методов эквивалентного генератора и наложения для расчёта электрических цепей.
2. В чём сущность метода эквивалентного генератора?
3. В чём сущность метода наложения?
4. Сформулировать теорему об эквивалентном источнике ЭДС.
5. Каким образом определяют  $U_{xx}$  и  $Z_{вх}$  при расчёте цепи методом эквивалентного генератора?
6. Поясните на конкретном примере порядок определения  $U_{xx}$  и  $Z_{вх}$ .
7. Частичные токи и связь их с искомыми значениями токов в ветвях электрической цепи.

#### Задачи

3.2.1. Определить ток  $\dot{I}_5$  в диагонали мостовой схемы, изображённой на рис. 3.13. Сопротивления  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3, \dot{Z}_4, \dot{Z}_5$  и ЭДС источника  $\dot{E}$  заданы.

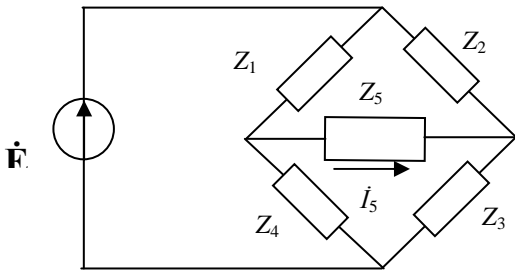


Рис. 3.13

3.2.2. Методом эквивалентного генератора напряжения определить показания амперметра, включённого в электрическую цепь (рис. 3.14), если

$$\dot{E} = 40 \text{ В}; R_1 = 200 \text{ Ом}; R_2 = 160 \text{ Ом}; R_3 = 120 \text{ Ом};$$

$$R_4 = 80 \text{ Ом}; X_C = 60 \text{ Ом}.$$

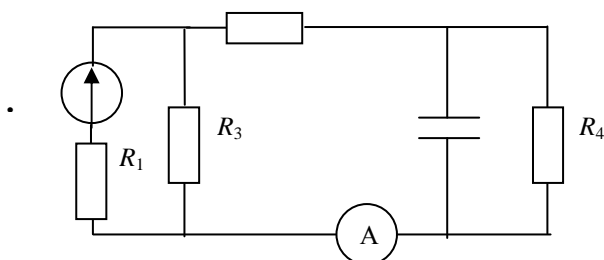


Рис. 3.14

3.2.3. Два самолётных генератора (рис. 3.15) с ЭДС  $\dot{E}_1 = 120$  В и  $\dot{E}_2 = 110$  В с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_1 = 0,4 + j0,6$  Ом и  $\dot{Z}_2 = 0,3 + j1,2$  Ом работают на нагрузку  $\dot{Z}_3 = 10$  Ом. Определить напряжение на нагрузке.

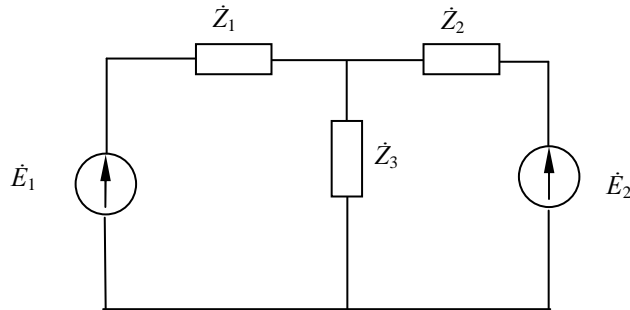


Рис. 3.15

3.2.4. Для мостовой схемы (рис. 3.16)  $E = 28$  В;  $R_1 = 6$  Ом;  $R_2 = 12$  Ом;  $R_3 = 16$  Ом;  $R_4 = 10$  Ом. Определить ток через  $R_5$ , если  $R_5 = 0,10$  кОм,  $20$  кОм,  $30$  кОм. Построить график зависимости при изменении  $R_5$  от  $0$  до  $30$  кОм.

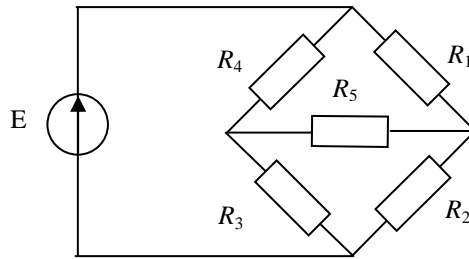


Рис. 3.16

3.2.5. Методом эквивалентного генератора напряжения определить действующее значение тока в ветви с  $Z_5$  (рис. 3.17), если

$$\dot{E}_{m1} = 550 \text{ В}; \quad \dot{E}_{m2} = 220e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{Z}_1 = (1 + j) \text{ Ом}; \quad \dot{Z}_2 = (1 - j) \text{ Ом}; \quad Z_3 = Z_4 = Z_5 = 3 \text{ Ом}.$$

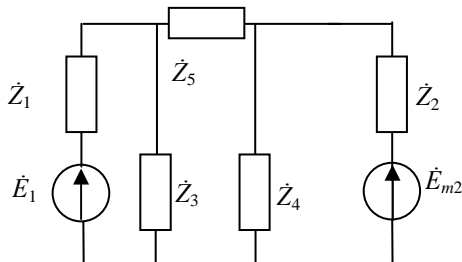


Рис. 3.17

3.2.6. Методом эквивалентного генератора напряжения определить показания амперметра, включённого в электрическую цепь (рис. 3.18), если

$$E = 40 \text{ В}; \quad R_1 = 200 \text{ Ом}; \quad R_2 = 160 \text{ Ом}; \\ R_3 = 120 \text{ Ом}; \quad R_4 = 80 \text{ Ом}; \quad X_C = 60 \text{ Ом}.$$

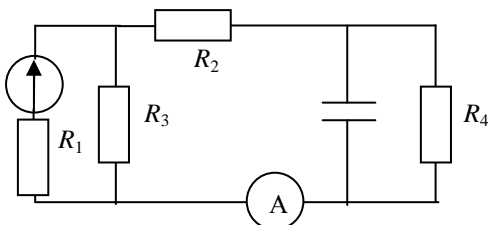


Рис. 3.18

3.2.7. Методом наложения определить токи в ветвях цепи (рис. 3.19), где  $E_1 = 16$  В;  $I_{I_2} = 2$  А;  $R_1 = R_2 = R_3 = 2$  Ом.

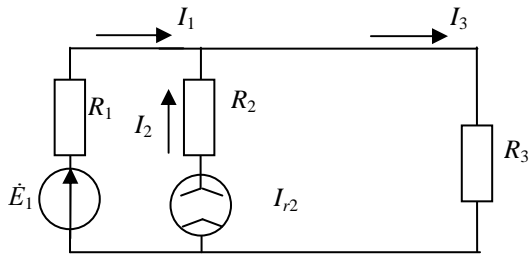


Рис. 3.19

3.2.8. Методом наложения определить показание амперметра в цепи (рис. 3.20), где  $E_1 = 52$  В;  $E_2 = 48$  В;  $R_1 = 4$  Ом;  $R_2 = 8$  Ом;  $R_3 = 10$  Ом.

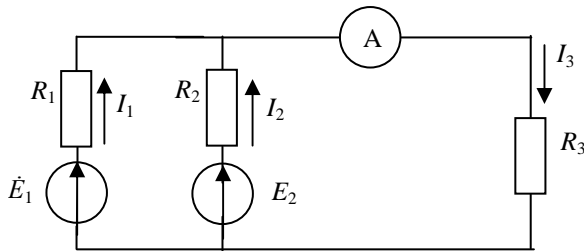


Рис. 3.20

3.2.9. Методом наложения определить показания амперметра в цепи (рис. 3.21), где  $E_1 = E_2 = 4$  В;  $I_{R_3} = 2$  А;  $R_1 = R_3 = R_4 = 1$  Ом.

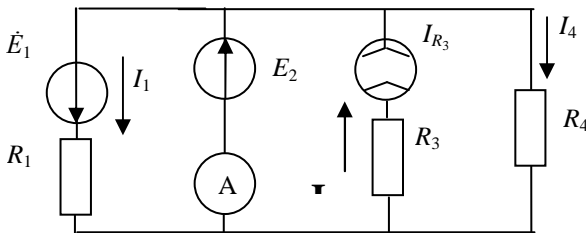


Рис. 3.21

3.2.10. Методом наложения определить ток  $I_3$  в цепи (рис. 3.22), где  $E_1 = 60$  В;  $I_\Gamma = 6$  А;  $R_1 = R_2 = R_3 = 3$  Ом;  $R_4 = 6$  Ом.

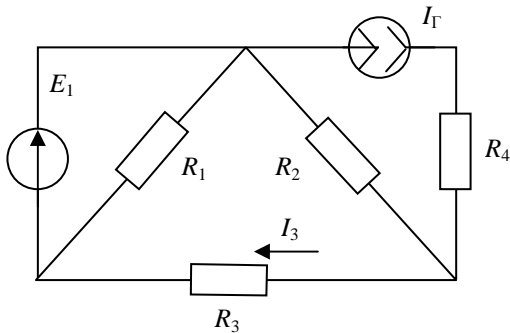


Рис. 3.22



3.2.1. Удалим из цепи (рис. 3.13) ветвь  $\dot{Z}_5$  и определим напряжение

$$\dot{U}_{авхх} = \dot{U}_a - \dot{U}_b = \frac{\dot{E}\dot{Z}_4}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4} - \frac{\dot{E}\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = \frac{\dot{E}(\dot{Z}_2\dot{Z}_4 - \dot{Z}_1\dot{Z}_3)}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}.$$

Замкнём накоротко источник напряжения (рис. 3.23, б) и найдём

$$\dot{Z}_{вхав} = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_4}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4} + \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_4(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) + \dot{Z}_2\dot{Z}_3(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}.$$

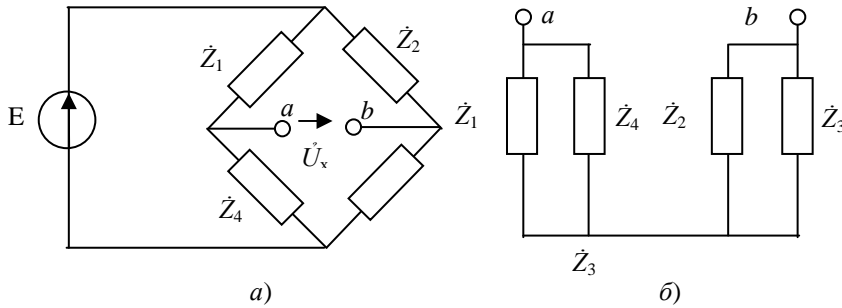


Рис. 3.23

Определим ток в диагонали моста:

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{авхх}}{\dot{Z}_{вхав} + \dot{Z}_5} = \frac{\dot{E}(\dot{Z}_2\dot{Z}_4 - \dot{Z}_1\dot{Z}_3)}{\dot{Z}_5(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) + \dot{Z}_1\dot{Z}_4(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) + \dot{Z}_2\dot{Z}_3(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)}.$$

3.2.2.  $I = 56$  мА.

3.2.3.  $\dot{U}_3 = 113,9e^{-j2^\circ}$  В.

3.2.4.  $\dot{I}_5 = 0,65$  А.

3.2.5. 51 А.

3.2.6. 56 мА.

3.2.7. Истинные токи в цепи (рис. 3.19) будем находить как алгебраическую сумму токов в цепях (рис. 3.24).

Для цепи (рис. 3.24, а), где действует только ЭДС  $\dot{E}_1$ , а источник  $I_{r2}$  исключён (вторая ветвь оказалась разомкнутой, так как внутреннее сопротивление источника бесконечно велико), находим

$$I'_1 = I'_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = \frac{16}{4} = 4 \text{ А.}$$

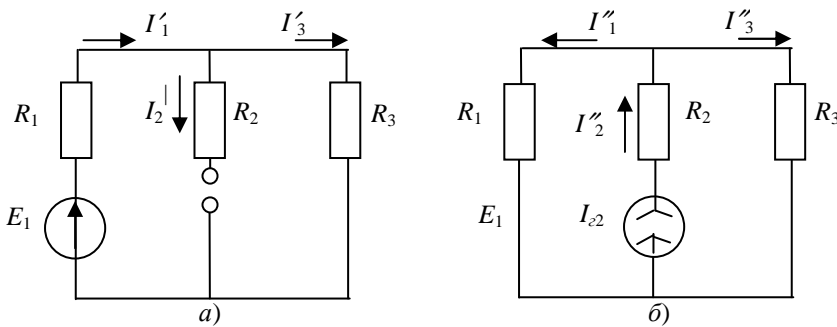


Рис. 3.24

Для цепи (рис. 3.24, б), где действует только источник тока  $I_{r2}$ , а источник ЭДС  $E_1$  исключён (на месте источника оказался короткозамкнутый участок, так как внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС отсутствует), находим:

$$I''_1 = I''_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 2 \frac{2}{2+2} = 1 \text{ А;}$$

$$I''_3 = I''_2 - I''_1 = 1 \text{ А.}$$

Истинные токи в ветвях цепи находим как алгебраическую сумму частичных токов:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 3 \text{ А;}$$

$$I_2 = -I'_2 - I''_2 = 2 \text{ А;}$$

$$I_3 = -I'_3 - I''_3 = 5 \text{ А;}$$

Мощность, рассеиваемая в сопротивлении  $R_3$ ,  $P_3 = I_3^2 R_3 = 50$  Вт.

3.2.8. 4 А.

3.2.9. 10 А.

3.2.10. 13 А.

#### 4. СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) цепи – отношение комплексных изображений отклика и воздействия:

$$\dot{K}_{XY}(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \frac{Y}{X} e^{j(\psi_Y - \psi_X)} = K_{XY} e^{j\phi_{XY}},$$

где  $\dot{Y}_m$  и  $\dot{Y}$  – комплексные амплитуда и действующее значения отклика (реакции) цепи;  $\dot{X}_m$  и  $\dot{X}$  – комплексные амплитуда и действующее значения внешнего воздействия.

Зависимость модуля  $K_{XY}(\omega)$  и аргумента  $\phi_{XY}(\omega)$  КЧХ от частоты  $\omega$  называются амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками цепи.

Если отклик и внешнее воздействие рассматриваются на одних и тех же зажимах цепи, КЧХ называется входной. К входным характеристикам цепи (рис. 4.1) относятся:

- комплексное входное сопротивление

$$K_{iu}(j\omega) = Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1};$$

- комплексная входная проводимость

$$K_{ui}(j\omega) = Y_{11}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}.$$

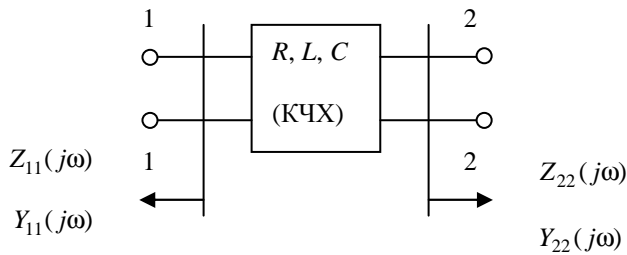


Рис. 4.1

Когда отклик и внешнее воздействие задаются на разных зажимах цепи, КЧХ называется передаточной.

К передаточным характеристикам относятся:

- комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{U_2}{U_1} e^{j\varphi_U};$$

- комплексный коэффициент передачи по току

$$K_I(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{I_2}{I_1} e^{j\varphi_I};$$

- комплексное передаточное сопротивление

$$K_{iU}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = Z_{21}(j\omega);$$

- комплексная передаточная проводимость

$$K_{Ui}(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = Y_{12}(j\omega).$$

Сопротивление последовательного колебательного контура вблизи резонанса

$$Z = R + jX \approx R + j2\rho v = R(1 + j2Qv),$$

где  $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} \approx 2\rho v$  – реактивное сопротивление;  $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – характеристическое сопротивление;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  –

резонансная частота;  $v = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  – относительная расстройка;  $Q = \frac{\rho}{R}$  – добротность;  $d = \frac{1}{Q}$  – затухание.

Общее активное сопротивление последовательного контура с учётом  $R_i$  и  $R_n$

$$R_{\text{общ}} = R + R + \frac{\rho^2}{R_n}.$$

Полоса пропускания контура

$$\Delta f = df_0 = \frac{f_0}{Q}.$$

Сопротивление параллельных контуров вблизи резонанса

$$\dot{Z} = \frac{Z_{\text{э0}}}{1 + j2Qv},$$

где  $Z_{\text{э0}} = \frac{\rho^2}{R} p^2 = Q\rho p^2 = Q^2 R p^2 = \frac{L}{RC} p^2$  – сопротивление контура на резонансной частоте;  $p = \frac{|x_{1,20}|}{\rho}$  – коэффициент включения;  $|x_{1,20}|$  – модуль сопротивления ветви на резонансной частоте.

Общее активное сопротивление параллельного контура с учётом  $R_i$  и  $R_n$

$$R_{\text{общ}} = R + \frac{\rho^2}{R_i} + \frac{\rho^2}{R_n} = R \left( 1 + \frac{Z_{\text{э0}}}{R_i} + \frac{Z_{\text{э0}}}{R_n} \right).$$

Выражение нормированной АЧХ одиночных контуров

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 v^2}},$$

где  $Q_3$  – добротность контура с учётом влияния  $R_i$  и  $R_n$ .

Сопротивление схемы замещения первичного контура системы двух связанных контуров

$$\dot{Z}_{\text{э1}} = \dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_2}.$$

Сопротивление схемы замещения вторичного контура системы двух связанных контуров

$$\dot{Z}_{\text{э2}} = \dot{Z}_2 - \frac{\dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_1} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_1}.$$

Сопротивление, вносимое в первичный (вторичный) контур,

$$\dot{Z}_{\text{вн1}} = R_{\text{вн1}} + jX_{\text{вн1}}; \quad \dot{Z}_{\text{вн2}} = R_{\text{вн2}} + jX_{\text{вн2}},$$

где

$$R_{\text{вн1}} = R_2 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_2^2 + X_2^2}; \quad X_{\text{вн1}} = -X_2 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_2^2 + X_2^2};$$
$$R_{\text{вн2}} = R_1 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_1^2 + X_1^2}; \quad X_{\text{вн2}} = -X_1 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_1^2 + X_1^2}.$$

Условие первого (второго) частотного резонанса

$$X_1 + X_{\text{вн1}} = 0; \quad (X_2 + X_{\text{вн2}} = 0).$$

Условия сложного резонанса:

$$X_1 + X_{\text{вн1}} = 0; \quad (X_2 + X_{\text{вн2}} = 0);$$
$$X_{\text{св опт}} = Z_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}; \quad \left( X_{\text{св опт}} = Z_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \right).$$

Условия полного резонанса:

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_{\text{св опт}} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Максимально возможное значение тока во вторичном контуре

$$I_{m \text{ max}} = \frac{Em}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Коэффициент связи

$$k = \frac{|X_{\text{св}}|}{\sqrt{X_{K1} X_{K2}}},$$

где  $X_{K1}$  и  $X_{K2}$  – составляющие  $X_1$  и  $X_2$ , имеющие тот же знак, что и  $X_{\text{св}}$ .

Полоса пропускания связанных контуров:

а) случай  $k \leq d$ :

$$\Delta f_n = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[ \left(\frac{k}{d}\right)^4 + 1 \right]}};$$

б) случай  $k > d$ :

$$\Delta f_n = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 + 2 \left(\frac{k}{d}\right) - 1}.$$

#### 4.1. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

##### Контрольные вопросы

1. Дайте определение комплексной частотной характеристики (КЧХ) цепи. Поясните какую размерность может иметь КЧХ.
2. Дайте определение амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристики цепи. Что характеризуют АЧХ и ФЧХ цепи?
3. Что такое годограф ФЧХ и как он графически строится?
4. Чем определяется (от чего зависит) выражение КЧХ линейной цепи?
5. Постройте (качественно) кривые  $Z_{\text{вх}} = f(\omega)$ ,  $\varphi_Z = f(\omega)$  для схем на рис. 4.6, а, б.
6. Рассчитать граничную частоту  $f_{\text{гр}}$  для схем на рис. 4.6, б, если  $R = 100$  Ом,  $C = 2$  мкФ.

Примечание: частоту, на которой реактивная составляющая входного сопротивления цепи по абсолютному значению равна активной составляющей, называют граничной.

##### Задачи

4.1.1. Найти аналитические выражения и построить (качественно) графики частотной зависимости полного сопротивления, аргумента, действительной и мнимой составляющих комплексного входного сопротивления цепи, состоящей из параллельно соединённых активного сопротивления и ёмкости.

4.1.2. Найти аналитические выражения и изобразить (качественно) АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи по напряжению цепи (рис. 4.2), где  $R = R_1 = R_2$ .

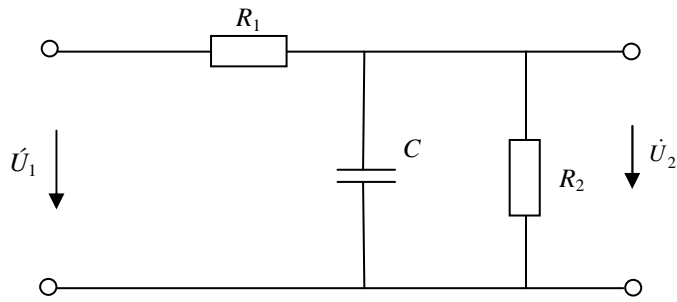


Рис. 4.2

4.1.3. Вычислить модуль и аргумент комплексной входной проводимости параллельно соединённых сопротивления и индуктивности. Построить годограф входной проводимости если  $R_2 = 2$  Ом.

4.1.4. Найти аналитические выражения АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению делителя напряжения, схема которого приведена на рис. 4.3.

4.1.5. Определить АЧХ передаточных сопротивления и проводимости цепи (рис. 4.2), если воздействием является ток или напряжение на входе цепи, а реакцией – напряжение или ток сопротивления  $R_2$ .

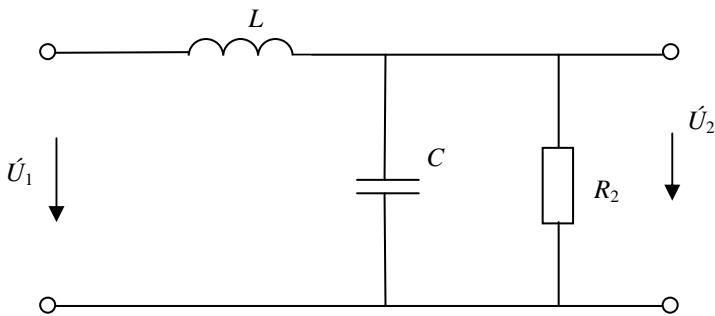


Рис. 4.3

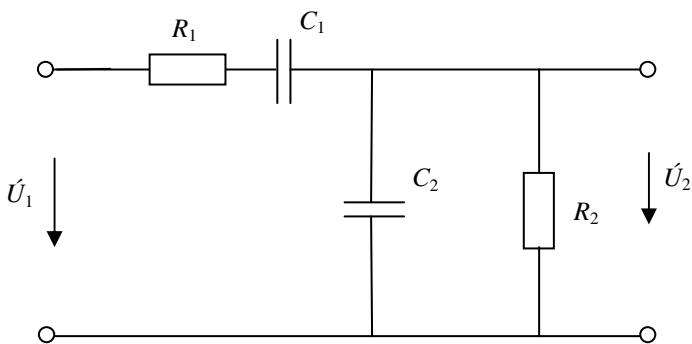


Рис. 4.4

4.1.6. Для цепи (рис. 4.4) определить частоту, на которой АЧХ коэффициента передачи по напряжению имеет максимум. Рассчитать сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями на этой частоте, если  $R = R_1 = R_2 = 1$  кОм;  $C = C_1 = C_2 = 1$  нФ.

4.1.7. Определить частоты, на которых сдвиг фаз между входными и выходными напряжениями в цепи (рис. 4.5) составляет  $-\frac{\pi}{2}$  и  $-\pi$ . Найти модуль коэффициента передачи по напряжению на этих частотах, если  $R = R_1 = R_2 = 1$  кОм;  $C = C_1 = C_2 = 1$  нФ.

4.1.8. Измерения по схеме рис. 4.6 дали  $U = 120$  В,  $I_0 = 5$  А,  $P = 400$  Вт. Замыкание ключа  $K$  приводит к уменьшению показаний амперметра. Определить входное сопротивление двухполюсника.

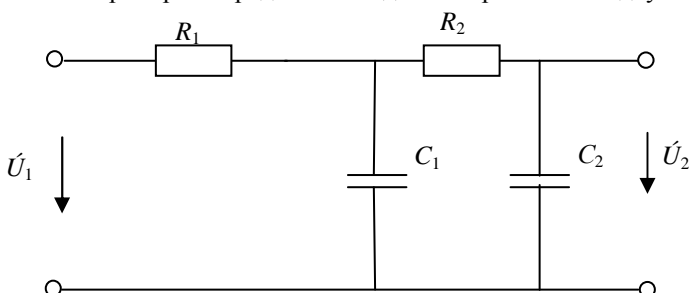


Рис. 4.5

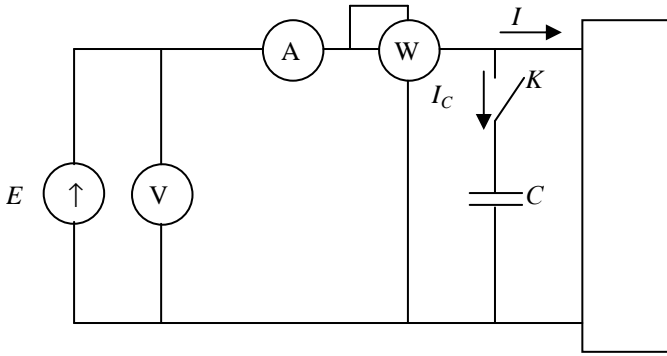


Рис. 4.6

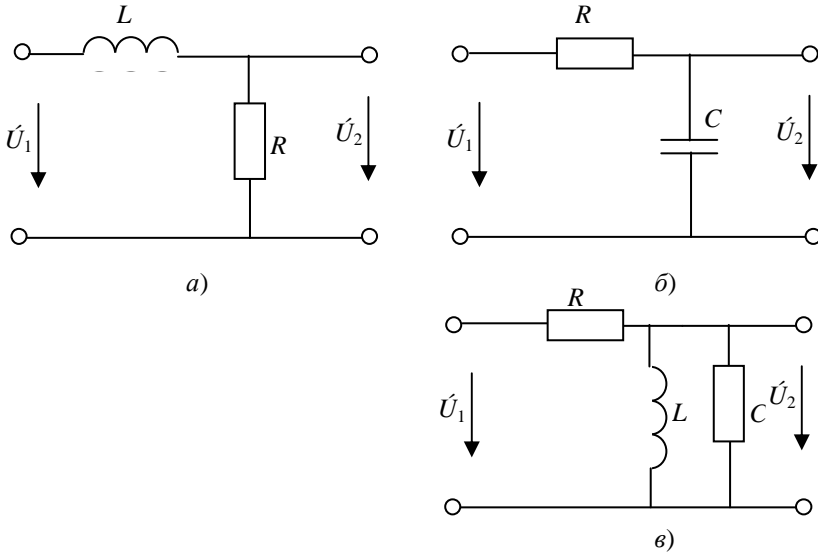


Рис. 4.7

4.1.9. Измерения по схеме рис. 4.6 дали  $U = 220$  В;  $I_0 = 4$  А;  $P = 300$  Вт. Замыкание ключа  $K$  приводит к увеличению показаний амперметра. Определить входное сопротивление двухполюсника.

4.1.10. Найти аналитические выражения и изобразить (качественно) АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи по напряжению цепей, изображённых на рис. 4.7.

### Ответы, решения и методические указания

4.1.1. Комплексное входное сопротивление параллельной RC цепи можно представить в виде

$$\dot{Z} = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

Из этого выражения следуют зависимости от частоты полного сопротивления  $Z(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ , аргумента комплексного сопротивления  $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega RC)$ , действительной  $R(\omega) = \left[ \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} \right]$  и мнимой  $X(\omega) = \left[ \frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right]$  составляющей комплексного входного сопротивления.

Построение графиков упрощается при введении нормированных величин:

- частоты  $\bar{\omega} = \omega RC$ ;
- полного сопротивления  $\bar{Z}(\bar{\omega}) = \frac{Z(\bar{\omega})}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}}$ ;
- вещественной  $\bar{R}(\bar{\omega}) = \frac{R(\bar{\omega})}{R} = \frac{1}{1 + \bar{\omega}^2}$  и мнимой

$$\bar{X}(\bar{\omega}) = \frac{X(\bar{\omega})}{R} = \frac{-\bar{\omega}}{1 + \bar{\omega}^2} \text{ составляющих КЧХ.}$$

Графики нормированных частотных зависимостей приведены на рис. 4.8.

$$4.1.2. \quad K(\omega) = \frac{I}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega RC}{2}\right) \quad (\text{рис. 4.9}).$$

$$4.1.3. \quad Y(\omega) = \sqrt{\frac{1}{R^2 + (\omega L)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{R}{\omega L}\right).$$

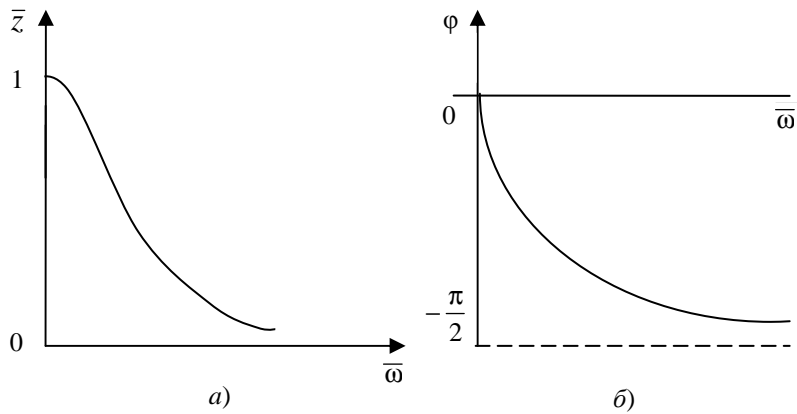


Рис. 4.8

Годограф входной проводимости приведён на рис. 4.10. Вид годографа не зависит от индуктивности, но её изменением одним и тем же точкам годографа, кроме точки, лежащей на действительной оси, соответствуют различные значения частоты.

$$4.1.4. \quad K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}.$$

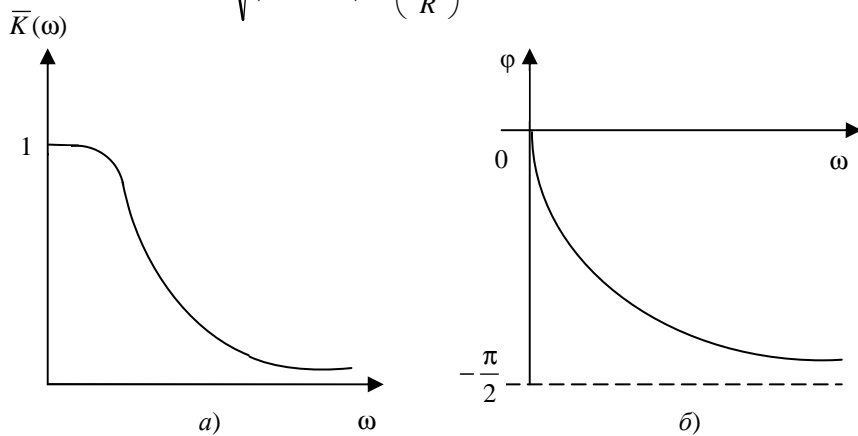


Рис. 4.9

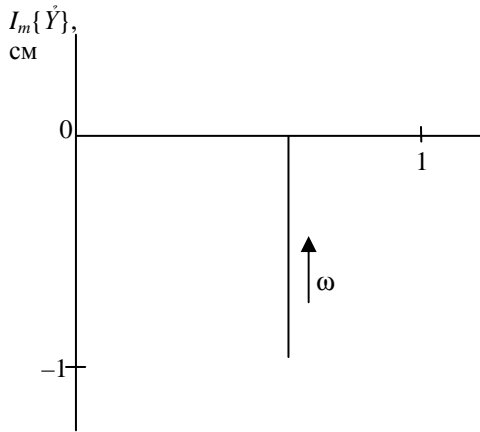


Рис. 4.10

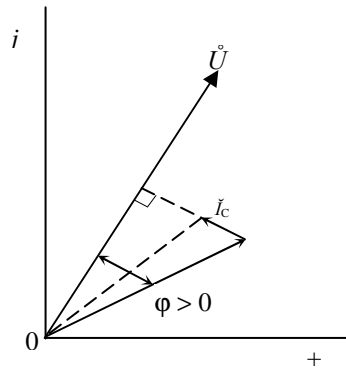


Рис. 4.11

$$4.1.5. \quad Z(\omega) = \frac{R_2}{\sqrt{(1 + \omega R_2 C)^2}}; \quad Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}}.$$

4.1.6. АЧХ ФЧХ цепи определяются выражениями

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega RC - 1}{\omega RC}\right)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega RC - 1}{3}.$$

Из условия  $\frac{dK(\omega)}{d\omega} = 0$  следует  $\omega = \frac{I}{RC}$ ;  $\omega = 10^6$  рад/с;  $\varphi = 0$ .

4.1.7. При  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$   $\omega = 10^6$  рад/с  $K(\omega) = 0,333$ ; при  $\varphi = -\pi$   $\omega = \infty$   $K(\omega) \rightarrow 0$ .

4.1.8. Модуль входного сопротивления  $Z = \frac{U}{I} = 24$  Ом.

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{400}{120 \cdot 5} = 0,666 \quad \sin \varphi = 0,745.$$

Таким образом,

$$R_{\text{вх}} = Z \cos \varphi = 24 \cdot 0,666 = 16 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{вх}} = Z \sin \varphi = 24 \cdot 0,745 = 17,9 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление имеет активно-индуктивный характер (рис. 4.11), комплекс входного сопротивления  $Z_{\text{вх}} = 16 + j17,9$  Ом.

4.1.9.  $\dot{Z}_{\text{вх}} = 18,7 - j51,7$  Ом.

4.1.10. а)  $K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ ,  $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$ ,  $\tau = \frac{1}{R}$ ;

б)  $K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ ,  $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau)$ ,  $\tau = RC$ ;

в)  $K_U(\omega) = \frac{R_2}{R} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$ ,  $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega\tau)$ ,

$$R = R_1 + R_2, \quad \tau = \frac{LR}{R_1 R_2}.$$

## 4.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### Контрольные вопросы

1. Что называется резонансом напряжения? Какими свойствами характеризуется последовательный колебательный контур при резонансе?
2. Вычертить графики зависимостей активного, реактивного и полного сопротивлений контура от частоты.
3. Что называется резонансной кривой контура? Начертить графики резонансных кривых по току и напряжению. С какой целью производится нормирование резонансных кривых?



4. Что называется АЧХ и ФЧХ контура? Начертить и пояснить графики нормированных АЧХ при различных добротностях контуров. Начертить график ФЧХ при снятии входного напряжения с ёмкости.

5. Что называется полосой пропускания контура? Напишите формулу для полосы пропускания. Как определить полосу пропускания по частотной характеристике контура?

6. Как влияют внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки на добротность контура и его характеристики?

### Задачи

4.2.1. Определить резонансную частоту  $f_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$ , затухание  $d$  и полосу пропускания  $\Delta f_n$  последовательного колебательного контура, если  $L = 180$  мкГн,  $C = 240$  пФ,  $R = 8,2$  Ом.

4.2.2. Как изменяется резонансная частота, добротность и полоса пропускания последовательного контура при увеличении в два раза: а) сопротивления потерь; б) индуктивности; в) ёмкости.

4.2.3. Последовательный колебательный контур имеет резонансную частоту  $f_0 = 6,5$  МГц, индуктивность  $L = 12,4$  мкГн. Определить ёмкость и сопротивление потерь контура, если задана его полоса пропускания  $\Delta f_n = 150$  кГц.

4.2.4. К последовательному колебательному контуру подключён источник ЭДС  $e = 0,2 \cos \omega t$  В с внутренним сопротивлением 14 Ом. Определить добротность контура, амплитуду напряжения на ёмкости и индуктивности при резонансной частоте  $\omega_0 = 10^7$  рад/с и на частоте  $\omega_1 = 1,01 \cdot 10^7$  рад/с.

4.2.5. Заданы резонансная частота последовательного колебательного контура  $f_0 = 2$  МГц, ширина полосы пропускания  $\Delta f_n = 16$  кГц и сопротивление потерь  $R = 12$  Ом. Рассчитать параметры реактивных элементов контура.

4.2.6. Резонансная частота последовательного контура  $f_0 = 200$  кГц, ёмкость контура  $C = 1000$  пФ, полоса пропускания  $\Delta f_n = 10$  кГц. Определить сопротивление потерь и добротность контура.

4.2.7. Индуктивность последовательного контура  $L = 200$  мкГн, сопротивление потерь  $R = 15$  Ом. Определить полосу пропускания контура.

4.2.8. В последовательном контуре известны параметры элементов  $R = 10$  Ом;  $L = 1,02$  мГн;  $C = 970$  пФ. Найти граничные частоты полосы пропускания.

4.2.9. Мощность, отдаваемая источником ЭДС, питающая настроенный последовательный контур, равна  $P = 50$  мВт. Амплитуда напряжения на ёмкости  $U_{mc0} = 60$  В. Индуктивность контура  $L = 180$  мкГн, ёмкость  $C = 500$  пФ. Определить сопротивление потерь контура, полосу пропускания и амплитуду ЭДС.

4.2.10. Резонанс напряжений в последовательном контуре наступает при частоте  $f_0 = 1,5$  МГц, добротность контура  $Q = 250$ . Вычислить частоты, соответствующие половинной мощности.

4.2.11. Определить полосу пропускания цепи (рис. 4.12). Параметры цепи:  $L = 1$  мГн;  $C = 1$  пФ;  $R = 10$  Ом;  $R_i = 5$  Ом;  $R_n = 0,1$  МОм.

4.2.12. Последовательный контур имеет следующие параметры:  $L = 0,4$  мГн;  $C = 300$  пФ;  $R = 11$  Ом. Определить величину активного сопротивления, включённого дополнительно (либо последовательно, либо параллельно ёмкости), чтобы расширить полосу пропускания до 20 кГц.

4.2.13. Последовательный колебательный контур содержит конденсатор переменной ёмкости, у которого  $C_{\min} = 10$  пФ;  $C_{\max} = 500$  пФ. Определить коэффициент перекрытия контура по частоте  $K_f = f_{0\max} / f_{0\min}$ .

4.2.14. На последовательный колебательный контур с  $f_0 = 10^6$  рад/с действуют одновременно сигнал  $U_c = 1 \cos 10^6 t$  мВ и помеха  $U_n = 10 \cos 510^5 t$ , мВ. Рассчитать параметры контура, если известно, что составляющая напряжения на ёмкости, созданная сигналом, превышает составляющую, созданную помехой, в 10 раз, а составляющая тока с частотой сигнала имеет амплитуду  $I_{mc} = 0,1$  мА. Определить также амплитуды напряжения на ёмкости.

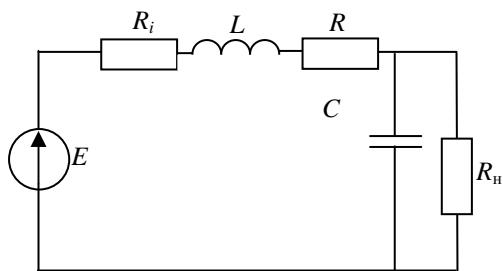


Рис. 4.12

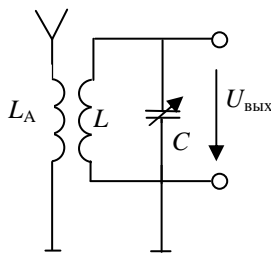


Рис. 4.13

4.2.15. Входной контур радиоприёмного устройства средневолновой радиостанции (рис. 4.13), настроенный на частоту  $f_0 = 2 \cdot 10^6$  Гц, имеет добротность  $Q = 100$ . На антенну воздействуют одновременно полезный сигнал с  $f_c = 2 \cdot 10^6$  Гц и помеха с  $f_n = 2,05 \cdot 10^6$  Гц. Амплитуда сигнала в антенне в два раза больше амплитуды помехи. Определить, во сколько раз  $U_{m \text{ вых.с}}$  полезного сигнала больше  $U_{m \text{ вых.п}}$  помехи.

## Ответы, решения и методические указания

4.2.1.  $f_0 = 766$  кГц;  $\rho = 866$  Ом;  $Q = 106$ ;  $d = 9,43 \cdot 10^{-3}$ ;  $\Delta f_{\Pi} = 7,23$  кГц.

4.2.2. а)  $f_{0a} = f_0$ ;  $Q_a = Q/2$ ;  $\Delta f_{\Pi a} = 2\Delta f_{\Pi}$ ; б)  $f_{0б} = f_0/\sqrt{2}$ ;  $Q_b = \sqrt{2}Q$ ;  $\Delta f_{\Pi б} = \Delta f_{\Pi}/2$ ; в)  $f_{0в} = f_0\sqrt{2}$ ;  $Q_v = Q/\sqrt{2}$ ;  $\Delta f_{\Pi в} = \Delta f_{\Pi}$ .

4.2.3.  $C = 48,3$  пФ;  $R = 11,7$  Ом.

4.2.4.  $Q = 167$ ;  $U_{mC0} = U_{mL0} = 10$  В;  $U_{mC1} = U_{mL1} = 7,07$  В.

4.2.5. Решая систему уравнений  $\rho = \omega_0 L$ ;  $Q = \rho/R$ ;  $Q = \omega_0/\Delta\omega_{\Pi}$ , находим индуктивность контура  $L = R/2\pi\Delta f_{\Pi} = 119$  мкГн. Заменяя в исходной системе первое уравнение на  $\rho = I/\omega_0 C$ , получим  $C = \Delta f_{\Pi}/2\pi f^2 R = 53$  пФ.

4.2.6.  $R = 39,8$  Ом;  $Q = 20$ .

4.2.7.  $\Delta f_{\Pi} = 7,5 \cdot 10^4$  рад/с.

4.2.8. АЧХ в полосе пропускания практически симметрична относительно резонансной частоты. В этом случае граничные частоты можно определить с помощью приближённого соотношения

$$f_{\text{гр}} \approx f_0 \pm \Delta f_{\Pi}/2; f_{\text{н}} = 159 \text{ кГц}; f_{\text{в}} = 161 \text{ кГц}.$$

4.2.9.  $R = 10$  Ом;  $\Delta\omega_{\Pi} = 5,56 \cdot 10^4$  рад/с;  $E_m = 1$  В.

4.2.10.  $f_{\text{н}} = 1,497$  МГц;  $f_{\text{в}} = 1,503$  МГц.

4.2.11. Полоса пропускания контура  $\Delta f_{\Pi} = f_0/Q$ , где

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 159 \text{ кГц}; Q_3 = \rho/(R_i + R + R'_n); \rho = \sqrt{L/C}.$$

Для того чтобы учесть влияние сопротивления нагрузки на ширину полосы пропускания контура, заменим на резонансной частоте  $f_0$  участок цепи с параллельно включёнными элементами  $C'$  и  $R'_n$ :

$$R'_n = R/(1 + (2\pi f_0 R_n C)^2) \approx 1/(2\pi f_0 C)^2 R_n = 10 \text{ Ом};$$

$$C' = C(1 + (2\pi f_0 R_n C)^2)/(2\pi f_0 R_n C)^2 \approx C = 1 \text{ нФ}.$$

Тогда  $Q_3 = 4Q$ ,  $\Delta f_{\Pi} = 3,98$  кГц.

4.2.12.  $R_{\text{пос}} = 39$  Ом;  $R_{\text{пар}} = 34,2$  кОм.

4.2.13.  $K_f = 7,1$ .

4.2.14.  $L = 1,33$  мГн;  $C = 750$  пФ;  $R = 10$  Ом;  $U_{mc} = 133$  мВ;  $U_{mm} = 13,3$  мВ.

4.2.15.  $U_{\text{твых.с}}/U_{\text{твых.п}} = 10$ .

### 4.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

#### Контрольные вопросы

1. Что называется резонансом токов? Какими свойствами характеризуется параллельный контур при резонансе токов?
2. Вычертить графики зависимостей  $R_3$ ,  $X_3$  и  $Z_3$  параллельного контура от расстройки. Привести формулу для сопротивления параллельного контура при резонансе.
3. Что такое эквивалентная добротность контура? Как она зависит от внутреннего сопротивления источника и сопротивления нагрузки?
4. Как влияют внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки на АЧХ и ФЧХ параллельного контура?
5. Чем обусловлено применение сложных параллельных контуров? Нарисуйте их схемы и поясните особенности контуров второго и третьего видов.

#### Задачи

4.3.1. Определить резонансную частоту  $f_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$  и резонансное сопротивление  $Z_{30}$  контура (рис. 4.14), если  $C = 360$  пФ.

4.3.2. К простому параллельному контуру (рис. 4.14) подключен источник гармонического напряжения, частота которого совпадает с резонансной частотой контура. Параметры источника:  $E = 1$  В;  $R_i = 120$  кОм. Определить действующие значения тока источника, напряжения на контуре, тока емкостной и индуктивной ветвей контура.

4.3.3. Простой параллельный контур имеет следующие параметры:  $C = 500$  пФ;  $Q = 100$ ;  $\omega_0 = 10^6$  рад/с. Определить полосу пропускания контура, а также активную и реактивную составляющие сопротивления на частоте  $1,007 \cdot 10^6$  рад/с.

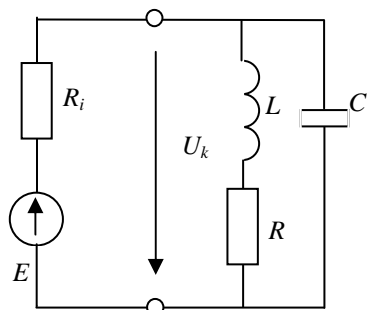


Рис. 4.14

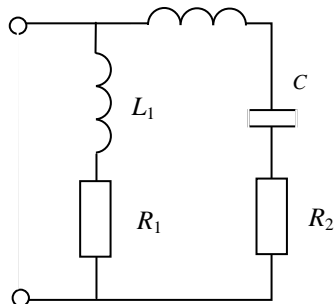


Рис. 4.15

4.3.4. Простой параллельный контур построен на длину волны  $\lambda_0 = 400$  м. Индуктивность контура  $L = 200$  мкГн, сопротивление потерь  $R = 10$  Ом. На какой частоте реактивная составляющая сопротивления контура имеет максимальное значение и ёмкостный характер?

4.3.5. Простой параллельный контур подключён к источнику ЭДС с внутренним сопротивлением  $R_i = 50$  кОм. Параметры контура:  $C = 500$  пФ;  $Q = 100$ ;  $\omega_0 = 10^6$  рад/с. Определить эквивалентную добротность и полосу пропускания.

4.3.6. Простой параллельный контур является коллекторной нагрузкой транзистора с выходным сопротивлением  $R_i = 15$  кОм. Схема должна быть настроена на частоту  $f_0 = 300$  кГц и иметь полосу пропускания  $\Delta f_n = 3$  кГц. Кроме того, в контуре должна выделяться максимальная мощность. Найти параметры контура.

4.3.7. Индуктивность катушки параллельного контура  $L = 1$  мГн, сопротивление потерь  $R = 10$  Ом. Рассчитать контур так, чтобы на частоте  $10^6$  рад/с его сопротивление было активным и равным  $Z_{\text{Э0}} = 25$  кОм.

4.3.8. Определить частоты резонансов токов  $f_{0T}$ , напряжений  $f_{0H}$ , добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , коэффициент включения  $p$  и резонансное сопротивление  $Z_{\text{Э0}}$  сложного параллельного контура (рис. 4.15). Параметры элементов цепи:  $L_1 = 150$  мкГн;  $L_2 = 50$  мкГн;  $C = 240$  пФ;  $R_1 = 10$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом.

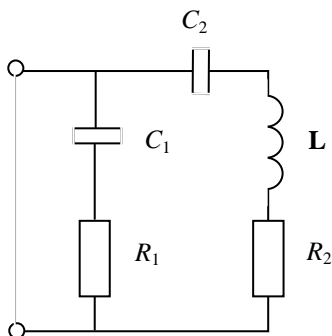


Рис. 4.16

4.3.9. Параллельный контур второго вида (рис. 4.15), настроенный на частоту сигнала, является нагрузкой цепи, имеющей внутреннее сопротивление  $R_i = 10$  кОм. Как следует распределить индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  между ветвями для обеспечения передачи в контур максимальной мощности, если известны  $L = 200$  мкГн;  $C_2 = 100$  пФ;  $R = 50$  Ом?

4.3.10. Сложный параллельный контур (рис. 4.15) подключен к источнику ЭДС с внутренним сопротивлением  $R_i = 100$  кОм. Параметры контура:  $C = 500$  пФ;  $Q = 100$ ;  $L_2 = 500$  мкГн;  $\omega_0 = 10^6$  рад/с. Определить эквивалентную добротность и полосу пропускания  $\Delta\omega_n$ .

4.3.11. Вычислить частоты резонансов токов  $f_{0T}$ , напряжений  $f_{0H}$ , добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , коэффициент включения  $p$  и резонансное сопротивление  $Z_{\text{Э0}}$  (рис. 4.16). Параметры элементов цепи:  $L = 220$  мкГн;  $C_1 = 48$  пФ;  $C_2 = 320$  пФ;  $R = 16$  Ом.

4.3.12. Рассчитать параметры и резонансное сопротивление параллельного контура, если известно, что частота резонанса токов  $f_{0T} = 600$  кГц, а частота резонанса напряжений  $f_{0H} = 400$  кГц. Добротность контура на частоте резонанса токов  $Q = 100$ , полное сопротивление потерь  $R = 5$  Ом.

4.3.13. Рассчитать параметры сложного параллельного контура, который на частоте  $10^7$  рад/с должен обладать активным сопротивлением, равным 10 кОм, а на частоте  $2 \cdot 10^7$  рад/с – активным сопротивлением 10 Ом. Полное сопротивление потерь контура 20 Ом.

### Ответы, решения и методические указания

4.3.1. В случае малых потерь резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность параллельного контура совпадают с соответствующими параметрами последовательного контура, составленного из тех же элементов:

$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 593$  кГц;  $\rho = \sqrt{L/C} = 745$  Ом;  $Q = \rho/R = 62,1$ . Резонансное сопротивление параллельного колебательного контура в  $Q$  раз превышает его характеристическое сопротивление:

$$Z_{\rho 0} = Q\rho = \rho^2/R = 46,3 \text{ кОм.}$$

4.3.2. На частоте резонанса токов входное сопротивление контура имеет активный характер и равно  $Z_{\rho 0}$ . Действующее значение тока в неразветвленной части цепи  $I = E/(R_i + Z_{\rho 0}) = 6,01$  мА. Напряжение на контуре  $U_K = Z_{\rho 0}I = 0,278$  В. В случае малых потерь действующие значения тока ёмкостной и индуктивной ветвей на частоте резонанса токов приближённо равны  $I_C \approx I_L \approx U_K/\rho = QI = 0,374$  мА.

4.3.3.  $\Delta\omega_{\Pi} = 10^4$  рад/с;  $R_3 = 67,6$  кОм;  $X_3 = -94,6$  кОм.

4.3.4.  $f = 754$  кГц.

4.3.5.  $Q_3 = 20$ ;  $\Delta\omega_{\Pi} = 5 \cdot 10^4$  рад/с.

4.3.6. При решении воспользоваться условием передачи максимальной активной мощности от генератора в контур, т.е.  $Z_{\rho 0} = R_i - R = 1,5$  Ом;  $L = 79,5$  мкГн;  $C = 3540$  пФ.

4.3.7. Сложный контур;  $L = 1$  мГн,  $C = 1000$  пФ;  $R = 10$  Ом;  $p = 0,5$ .

4.3.8. Частота резонанса токов, добротность и характеристическое сопротивление сложного параллельного контура в случае малых потерь совпадают с частотой резонанса напряжений, добротностью и характеристическим сопротивлением последовательного контура, составленного из тех же элементов:

$f_{0T} = 1/2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C} = 726$  кГц;  $\rho = \sqrt{(L_1 + L_2)/C} = 913$  Ом;  $Q = \rho/(R_1 + R_2) = 65,2$ . Частота резонанса напряжений определяется параметрами ветви, содержащей ёмкость  $C$  и индуктивность  $L_2$ :  $f_{0H} = 1/2\pi\sqrt{L_2C} = 1,45$  МГц. Коэффициент включения контура характеризуется отношением индуктивности  $L_1$  индуктивной ветви к суммарной индуктивности контура:  $p = L_1/(L_1 + L_2) = 0,75$ . Резонансное сопротивление контура  $Z_{\rho 0} = (\rho p)^2/(R_1 + R_2) = 33,5$  кОм.

4.3.9.  $L_1 = L_2 = 100$  мкГн.

4.3.10.  $Q_3 = 88,9$ ;  $\Delta\omega_{\Pi} = 11\,250$  рад/с.

4.3.11.  $f_{0T} = 1,66$  МГц;  $f_{0H} = 600$  кГц;  $\rho = 2,3$  кОм;  $Q = 143$ ;  $p = 0,87$ .

4.3.12. Контур третьего вида;  $C_1 = 1190$  пФ;  $C_2 = 954$  пФ;  $L = 59$  мкГн.

4.3.13. Контур второго вида;  $L_1 = 44,7$  мкГн;  $L_2 = 14,9$  мкГн;  $C = 168$  пФ;  $R_1 = R_2 = 10$  Ом.

#### 4.4. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

##### Контрольные вопросы

1. Какие виды связи применяются в связанных контурах? Что называется коэффициентом связи и чему он равен в схемах с индуктивной, автотрансформаторной и внутренней ёмкостной связью?
2. С какой целью вводят понятие схемы замещения первичного и вторичного контуров? Нарисуйте данные схемы замещения, напишите выражения для вносимых сопротивлений и поясните их физический смысл.
3. Какие существуют способы настройки связанных контуров? Поясните условия сложного и полного резонансов. Как практически настраиваются контуры данными способами?
4. Что понимается под резонансными частотами связанных контуров? Поясните физически возможность существования частот связи в связанных контурах.
5. Нарисуйте семейство нормированных АЧХ при  $k \leq d$  и  $k > d$  и поясните причины возникновения двугорбой АЧХ.
6. Что понимается под полосой пропускания связанных контуров и от чего она зависит? Какова максимально возможная полоса пропускания двух связанных контуров?

##### Задачи

4.4.1. Для двух трансформаторно-связанных контуров определить величину взаимной индуктивности  $M$ , обеспечивающей коэффициент связи  $K = 2$  %, если  $L_1 = 400$  мкГн,  $L_2 = 900$  мкГн.

4.4.2. Два контура с внутриёмкостной связью имеют  $C_1 = C_2 = 100$  пФ;  $C_{св} = 1800$  пФ. Определить коэффициент связи.

4.4.3. Для системы двух связанных контуров (рис. 4.17) с одинаковыми параметрами:  $R_1 = R_2 = R = 24$  Ом;  $C_1 = C_2 = C = 1,2$  нФ;  $L_1 = L_2 = L_0 = 0,5$  мГн;  $C_{12} = 18$  нФ определить резонансную частоту  $f_0$ , добротность  $Q$ , коэффициент связи  $K$  и максимально возможное значение тока  $I_{2\max}$  при  $E = 1$  В.

4.4.4. Индуктивно-связанные контуры (рис. 4.18) имеют параметры:  $L_1 = 12$  мкГн;  $R_1 = 10$  Ом;  $L_2 = 10$  мкГн;  $R_2 = 8$  Ом. Оба контура настроены на частоту генератора  $f_0 = 5 \cdot 10^6$  Гц, ЭДС генератора  $E = 4$  В. Определить, при какой взаимной индукции  $M$  ток во вторичном контуре достигает максимально возможное значение и величину этого тока.

4.4.5. Два связанных колебательных контура (рис. 4.17) с одинаковыми параметрами настроены индивидуально на резонансную частоту  $f_0 = 0,8$  МГц. Найти значения  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{12}$ , соответствующие настройке на полный резонанс при

$L_1 = L_2 = L = 120$  мкГн;  $Q_1 = Q_2 = Q = 60$ .

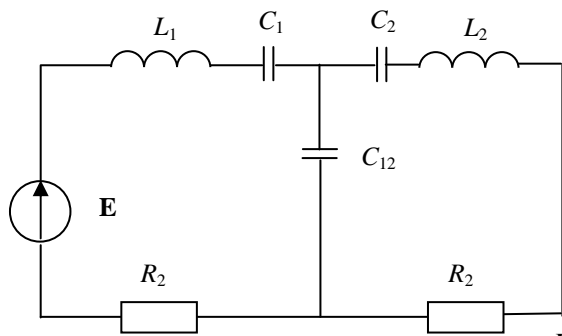


Рис. 4.17

4.4.6. Система из двух одинаковых индуктивно-связанных контуров с параметрами  $L=0,2$  мГн;  $C=150$  пФ;  $R=30$  Ом настроена методом полного резонанса. ЭДС генератора  $E=3$  В. Определить взаимную индуктивность  $M$  и максимально возможное значение тока во вторичном контуре.

4.4.7. Схема системы связанных контуров приведена на рис. 4.18. Амплитуды токов, протекающих в контурах  $I_{m1}=100$  мА,  $I_{m2}=40$  мА, частота ЭДС  $f_0=2,5 \cdot 10^6$  рад/с. Определить сопротивление, вносимое из второго контура в первый, и коэффициент связи. Параметры схемы:  $L_1=L_2=300$  мкГн;  $C_1=C_2=500$  пФ;  $R_1=8$  Ом;  $R_2=10$  Ом.

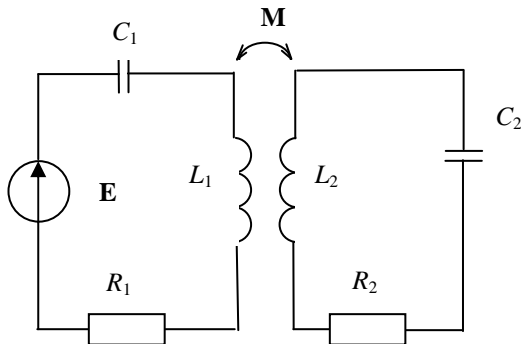


Рис. 4.18

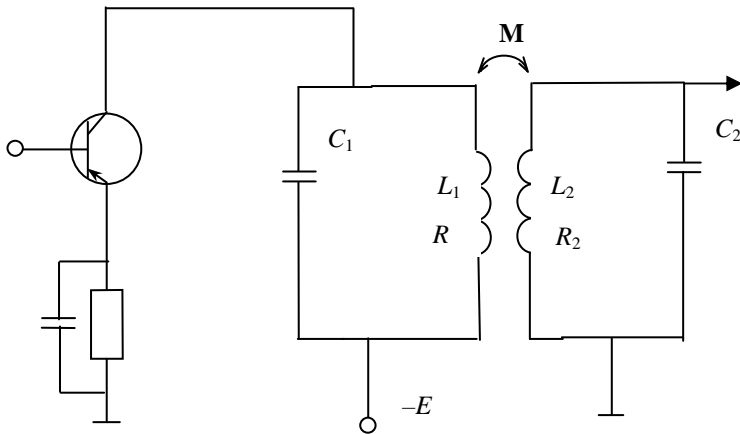


Рис. 4.19

4.4.8. Схема системы связанных контуров приведена на рис. 4.18. Найти величину ёмкости  $C_1$  и КПД при первом частном резонансе. Параметры схемы:  $E=50\cos 10^6 t$  В;  $L_1=400$  мкГн;  $L_2=200$  мкГн;  $C_2=4000$  пФ;  $R_1=20$  Ом;  $R_2=100$  Ом;  $M=60$  мкГн.

4.4.9. Для системы связанных контуров (рис. 4.18) найти величину ёмкости  $C_2$  и КПД во втором частном резонансе. Параметры схемы:  $E=50\cos 10^6 t$  В;  $L_1=250$  мкГн;  $L_2=200$  мкГн;  $C_1=2000$  пФ;  $R_1=R_2=20$  Ом;  $M=100$  мкГн.

4.4.10. Два трансформаторно-связанных контура (рис. 4.19) имеют следующие параметры:  $L_1=250$  мкГн;  $C_1=1000$  пФ;  $R_1=5$  Ом;  $L_2=500$  мкГн;  $C_2=500$  пФ;  $R_2=10$  Ом. Коэффициент связи  $K=1\%$ , резонансная длина волны  $\lambda_0=942$  м. Определить активное и реактивное сопротивления, вносимые в первичный контур, и эквивалентное сопротивление первичного контура.

4.4.11. Два одинаковых одиночных контура, составляющих систему связанных контуров, настроены каждый в отдельности на частоту  $f_0 = 2 \cdot 10^6$  Гц. Определить частоты связи  $f_{02}$  и  $f_{03}$ , если известны следующие параметры:  $R_1 = R_2 = 10$  Ом;  $C_1 = C_2 = 100$  пФ;  $X_{CB} = 32$  Ом.

4.4.12. Два связанных контура, образующих полосовой фильтр, настроены в отдельности на частоту  $f_0 = 465$  кГц. Добротности контуров  $Q_1 = Q_2 = 50$ . Определить, при каком коэффициенте связи ширина полосы пропускания системы  $\Delta f_{\text{п}} = 15$  кГц.

4.4.13. Два одинаковых индуктивно-связанных контура, параметры которых  $L_1 = L_2 = 250$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом, настроены порознь на одну и ту же частоту  $f_0 = 5 \cdot 10^5$  Гц.

Определить: 1) полосу пропускания каждого контура; 2) полосу пропускания индуктивно-связанных контуров при критической связи; 3) максимальную полосу пропускания двух связанных контуров; 4) при каких коэффициентах связи полоса пропускания двух связанных контуров будет а) в  $\sqrt{2}$  раз меньше; б) в 1,2 раза больше; в) в 2 раза больше по сравнению с полосой пропускания одиночного контура.

4.4.14. Полосовой фильтр состоит из двух одинаковых контуров, связанных индуктивно (рис. 4.18). Параметры контуров:  $L_1 = L_2 = 400$  мкГн;  $C_1 = C_2 = 100$  пФ;  $R_1 = R_2 = 10$  Ом. Определить наибольшую полосу пропускания фильтра и коэффициент связи, при котором эта полоса обеспечивается. Найти взаимную индуктивность контуров фильтра.

4.4.15. Два индуктивно-связанных контура имеют параметры:  $L_1 = 400$  мкГн;  $C_1 = 500$  пФ;  $R_1 = 20$  Ом;  $L_2 = 360$  мкГн;  $C_2 = 580$  пФ;  $R_2 = 15$  Ом;  $M = 40$  мкГн. Амплитуда ЭДС источника  $E_{1m} = 100$  В, его угловая частота  $\omega = 2 \cdot 10^6$  рад/с. Определить мощности  $P_1$  и  $P_2$ , расходуемые в первом и втором контурах, найти КПД при заданной связи.

4.4.16. Пользуясь данными задачи 4.4.15, определить  $P_2$  и КПД, если взаимная индуктивность  $M = 10$  мкГн, при условии, что оба контура в отдельности настроены в резонанс с частотой источника.

#### Ответы, решения и методические указания

4.4.1.  $M = 12$  мкГн.

4.4.2.  $K = 0,0525$ .

4.4.3. Собственные ёмкости первого и второго контуров имеют одинаковые значения:  $C_{11} = C_{22} = C_{12}/(C + C_{12}) = 1125$  пФ. Резонансные частоты и добротности первого и второго контуров также одинаковы:  $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 212,2$  кГц;  $Q = \sqrt{L/C_{11}}/R = 27,8$ . Коэффициент связи между контурами  $K = \sqrt{C_{11}C_{22}}/C_{12} = 0,0625$ . Максимальное значение тока второго контура  $I_{2\text{max}} = E/(2P) = 20,8$  мА.

4.4.4. В соответствии с условиями задачи настройка выполнена способом полного резонанса. Взаимная индуктивность определяется соотношением  $M = K\sqrt{L_1L_2}$ , где  $K = K_{\text{опт}} = \sqrt{d_1d_2} = \sqrt{R_1R_2}/\omega_0\sqrt{L_1L_2} = 0,026$ .  $M = 0,285$  мкГн. Максимально возможное значение тока  $I_{2\text{max}} = E/2\sqrt{R_1R_2} = 0,224$  А.

4.4.5. Настройке системы связанных контуров с одинаковыми параметрами на полный резонанс соответствует оптимальное значение коэффициента связи  $K = K_{\text{опт}} = I/Q = \sqrt{C_{11}C_{22}}/C_{12}$ . Собственные ёмкости контуров могут быть определены по известной резонансной частоте и индуктивности контуров.

$$C_1 = C_2 = 335 \text{ пФ}; \quad C_{12} = 19,8 \text{ нФ}.$$

4.4.6.  $M = 5,1$  мкГн;  $I_{2\text{max}} = 0,05$  А.

4.4.7.  $\dot{Z}_{\text{вн1}} = (1,6 + j8)$  Ом;  $K = 0,0272$ .

4.4.8.  $C_1 = 2410$  пФ;  $\eta = 0,59$ .

4.4.9.  $C_2 = 4170$  пФ;  $\eta = 0,835$ .

4.4.10.  $R_{\text{вн1}} = 5$  Ом;  $X_{\text{вн1}} = 0$ ;  $Z_{\Sigma 1} = 10$  Ом.

4.4.11.  $f_{02} = 1,96$  МГц;  $f_{03} = 2,04$  МГц.

4.4.12.  $K = 0,022$ .

4.4.13. Полоса пропускания каждого контура  $\Delta f_{\text{п}} = f_0Q = R/2\pi L = 6350$  Гц. Полоса пропускания двух индуктивно-связанных контуров при критической (оптимальной) связи  $\Delta f_{\text{п.опт}} = \sqrt{2}f_0d = 9000$  Гц. Максимальная полоса пропускания двух индуктивно-связанных контуров  $\Delta f_{\text{п.макс}} = 3,1f_0d = 19\,700$  Гц.

Для ответа на вопросы п. 4, а и 4, б данной задачи, условия которых соответствуют полосе пропускания при связи ниже критической, для которой  $\Delta f_{\text{п.кр}} = \Delta f_{\text{п.опт}} = 1,41f_0d$ , нужно воспользоваться формулой

$$\Delta f_{\text{п}} = f_0d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]} = 0,5.$$

Решая последнее уравнение относительно  $K$ , найдём  $K = 3,6 \cdot 10^{-3}$ ,

$$\Delta f_{\text{п}} = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]}} = 1,2 f_0 d$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2\left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]} = 1,44.$$

Решая это уравнение относительно  $K$ , найдём  $K = 10,6 \cdot 10^{-3}$ ; для ответа на вопрос п. 4, в в условии задачи 4.4.13 воспользуемся формулой

$$\Delta f_{\text{п}} = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2\left(\frac{k}{d}\right)} = 2 f_0 d$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2\frac{k}{d} = 4.$$

Решая последнее уравнение, найдём  $K = 18,4 \cdot 10^{-3}$ .

4.4.14.  $\Delta f_{\text{п.макс.}} = 1250$  Гц;  $K = 0,011$ ;  $M = 4,4$  мкГн.

4.4.15. Реактивные сопротивления контуров

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = -200 \text{ Ом}; \quad X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = -140 \text{ Ом}.$$

Эквивалентные активное и реактивное сопротивления первого контура соответственно равны

$$R_{\text{эк}} = R_1 + R_{\text{вн1}} = R_1 + \frac{(\omega H)^2}{Z_2^2} R_2 = 24,8 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{эк}} = X_1 + X_{\text{вн1}} = X_1 - \frac{(\omega H)^2}{Z_2^2} X_2 = -155 \text{ Ом}.$$

Мощность, расходуемая в первом контуре,

$$P_1 = \frac{1}{2} I_{1\text{м}}^2 R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{E_{1\text{м}}}{Z_{\text{эк1}}}\right)^2 R_1 = 4,05 \text{ Вт}.$$

КПД  $h = P_2 / (P_1 + P_2) = 0,194$ .

Оптимальную связь определим по формуле

$$M_{\text{опт}} = \frac{X_{12\text{опт}}}{\omega} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega} = 8,65 \text{ мкГн}.$$

При оптимальной связи  $X_{\text{эк}} = 0$ , тогда

$$Z_{\text{эк}} = R_{\text{эк}} = R_1 + R_{\text{вн1}} = R_1 + \frac{\omega^2 H^2_{\text{опт}}}{R_2} = 2R_1 = 40 \text{ Ом}.$$

Токи в контурах:

$$I_{1\text{М макс}} = \frac{E_{1\text{м}}}{2R_1} = 2,5 \text{ А};$$

$$I_{2\text{М макс}} = \frac{E_{1\text{м}}}{2\sqrt{R_1 R_2}} = 2,89 \text{ А}.$$

Значение максимально возможной мощности

$$P_{2\text{ макс}} = P_{1\text{ макс}} = \frac{E_{1\text{м}}^2}{8R_1} = 62,5 \text{ Вт}; \quad \eta = 0,5.$$

4.4.16.  $P_2 = 61,5$  Вт;  $\eta = 0,57$ .

## 5. ТРЁХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

### 5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТРЁХФАЗНЫХ ЦЕПЯХ

Трёхфазная электрическая цепь может быть представлена как совокупность трёх однофазных цепей, в которой действуют ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые относительно друг друга на одну треть периода или, что то же самое, на угол  $2\pi/3$ .

Эти три составные части трёхфазной цепи называются фазами и им будем приписывать буквенные обозначения  $A, B, C$ . Таким образом, термин «фаза» в электротехнике обозначает два понятия: угол, определяющий стадию периодического процесса, и составную часть трёхфазной цепи.

Изобразим трёхфазную цепь, фазы которой не связаны друг с другом (рис. 5.1). Такую трёхфазную цепь называют несвязанной (в настоящее время не применяется).

Фазы  $A, B, C$  изображены под углом  $120^\circ$  для того, чтобы подчеркнуть, что напряжения источников  $u_A, u_B, u_C$  сдвинуты относительно друг друга на одну треть периода. Следовательно,

$$u_A = U_r \sin \omega t; \quad u_B = U_r \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad u_C = U_r \sin \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

Кривые, изображающие эти напряжения, показаны на рис. 5.2.

При равенстве амплитуд  $U_m$  напряжений и одинаковых сопротивлениях нагрузки  $Z$  в фазах токи  $i_A, i_B, i_C$  также равны по величине и сдвинуты относительно друг друга на одну треть периода, образуя так называемый трёхфазный ток. Сумма этих токов в любой момент времени равна нулю:

$$i_A + i_B + i_C = 0.$$

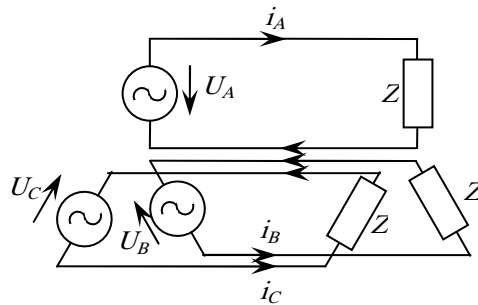


Рис. 5.1

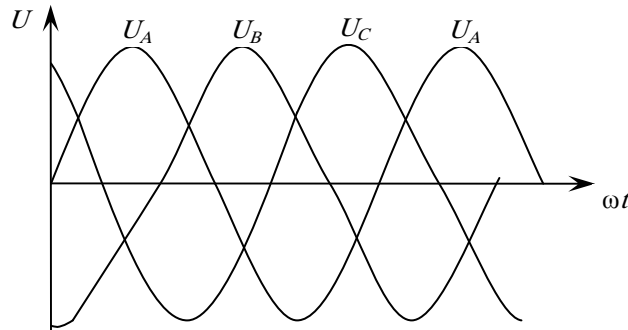


Рис. 5.2

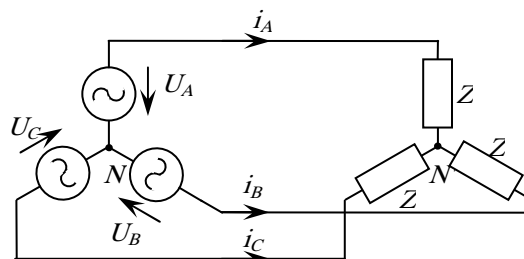


Рис. 5.3

Поэтому, если три провода, по которым токи возвращаются к источникам, объединить в один, то ток в этом проводе будет равен нулю. При отсутствии в проводе тока излишним в данном случае является и сам провод, от него можно отказаться, перейдя к схеме рис. 5.3.

В результате этого достигается экономия материала проводов, кроме того, по сравнению с несвязанной трёхфазной цепью исключаются потери мощности от токов  $i_A, i_B, i_C$  в обратном проводе.

Трёхфазная цепь рис. 5.3, фазы которой соединены электрически, представляет одну из разновидностей так называемых связанных трёхфазных цепей.



Необходимо отметить, что для получения связанной трёхфазной цепи не требуются отдельные однофазные генераторы, а используется один трёхфазный генератор.

Обмотки трёхфазного генератора могут быть соединены либо звездой, либо треугольником. При соединении звездой концы обмоток соединяют в общую точку, которую называют нейтральной. Начало обмоток обозначают  $A, B, C$ ; концы –  $x, y, z$  (рис. 5.4, а). Начала обмоток соединяют с нагрузкой линейными проводами, по которым идут линейные токи.

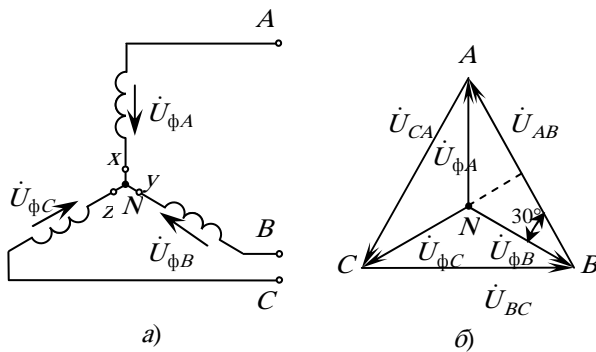


Рис. 5.4

Будем в дальнейшем пользоваться следующей терминологией: ЭДС, индуцируемые в обмотках генератора или трансформатора, напряжения на зажимах обмоток и токи в них называть фазными ЭДС, напряжениями и токами, а напряжения между линейными проводами и токи в них – линейными напряжениями и токами. На схеме (рис. 5.4, а)  $U_{\phi A}, U_{\phi B}, U_{\phi C}$  – комплексы фазных напряжений генератора;  $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA}$  – комплексы линейных напряжений. Абсолютные значения этих напряжений являются их модулями, т.е.

$$|U_{\phi A}| = |U_{\phi B}| = |U_{\phi C}| = U_{\phi};$$

$$|U_{AB}| = |U_{BC}| = |U_{CA}| = U_{л}.$$

Связь между линейными и фазными напряжениями устанавливается на основании второго закона Кирхгофа:

$$U_{AB} = U_A - U_B; \quad U_{BC} = U_B - U_C; \quad U_{CA} = U_C - U_A.$$

Топографическая векторная диаграмма линейных и фазных напряжений генератора приведена на рис. 5.4, б. Из векторной диаграммы следует, что при соединении генератора звездой линейные напряжения равны по величине и сдвинуты относительно друг друга на угол  $2\pi/3$ .

На основании геометрических соображений легко показать, что между фазными и линейными напряжениями при соединении звездой существует следующее соотношение:

$$U_{л} = \sqrt{3}U_{\phi}.$$

Действительно, из треугольника (рис. 5.4, б) следует

$$U_{AB} = 2U_{\phi B} \cos 30^\circ = 2U_{\phi B} \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_{\phi B}.$$

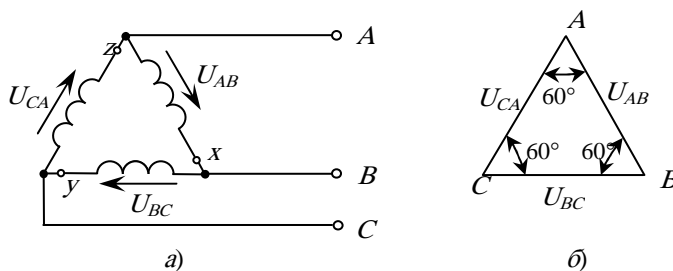


Рис. 5.5

При соединении генератора треугольником конец первой фазы соединяется с началом второй фазы, конец второй – с началом третьей, конец третьей – с началом первой (рис. 5.5, а).

Топографическая диаграмма напряжений приведена на рис. 5.5, а; на рис. 5.5, б показана векторная диаграмма напряжений.

Общие точки соединённых обмоток генератора выводятся на зажимы, к которым присоединяются линейные провода или нагрузка.

Нагрузка (потребитель) в трёхфазной цепи также может быть соединена звездой или треугольником.

## 5.2. СИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Трёхфазные цепи представляют собой разновидность цепей синусоидального тока и поэтому расчёт и исследование их производятся теми же методами, что и для однофазных цепей. Расчёт трёхфазной цепи так же, как и расчёт всякой сложной цепи, ведётся обычно в комплексной форме. Ввиду того что фазные ЭДС и напряжения генератора сдвинуты относительно друг друга на  $120^\circ$ , для краткости математической записи применяются фазовый оператор – комплексная величина:

$$a = e^{j120^\circ} = \cos 120^\circ + j \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Умножение вектора на оператор  $a$  означает поворот вектора на  $120^\circ$  в положительном направлении (против хода часовой стрелки), соответственно умножение вектора на  $a^2$  означает поворот вектора на  $240^\circ$  в положительном направлении или, что то же самое, поворот вектора на  $120^\circ$  в отрицательном направлении:

$$a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ} = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Три вектора  $1$ ,  $a$  и  $a^2$  образуют симметричную трёхфазную систему векторов, при этом  $1 + a + a^2 = 0$ . При помощи оператора  $a$  можно, например, записать напряжения фаз трёхфазной системы как

$$U_{\phi A}; U_{\phi B} = a^2 U_{\phi A}; U_{\phi C} = a U_{\phi A}.$$

На практике применяются различные комбинации соединений, например, генератор и нагрузка соединяются звездой, генератор может быть соединён звездой, а нагрузка – треугольником и т.д.

Соединение нагрузки звездой показано на рис. 5.6, а, где обозначены:  $I_A, I_B, I_C$  – линейные токи;  $U_A, U_B, U_C$  – фазные напряжения нагрузки;  $Z$  – сопротивление нагрузки.

В этой схеме комплексы фазных напряжений источника и комплексы фазных напряжений нагрузки соответствующих фаз равны между собой, т.е.

$$U_{\phi A} = U_A; U_{\phi B} = U_B; U_{\phi C} = U_C.$$

Векторная диаграмма напряжений и токов имеет вид, показанный на рис. 5.6, б. Ток в каждой фазе отстаёт от напряжения той же фазы на угол

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R},$$

где  $R$  и  $X$  – активное и реактивное сопротивления фаз.

Ток в каждой из фаз находят так же, как и в однофазной цепи. Например, в фазе  $A$

$$I_A = \frac{U_A}{Z}.$$

Соответственно токи в фазах  $B$  и  $C$  выражаются через ток  $I_A$ :

$$I_B = e^{-j120^\circ} I_A; I_C = e^{j120^\circ} I_A.$$

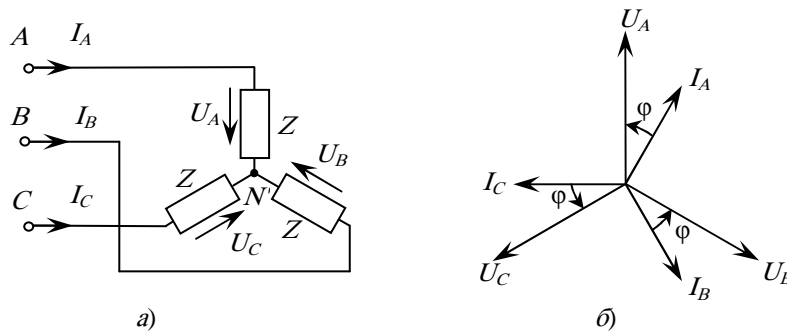


Рис. 5.6

Таким образом, при симметричном режиме работы трёхфазной цепи задача сводится к расчёту одной из фаз аналогично расчёту однофазной цепи.

Линейное напряжение определяется как разности соответствующих фазных напряжений. Например:

$$U_{AB} = U_A - U_B = U_A(1 - a^2) = \sqrt{3}U_A \angle 30^\circ.$$

При соединении нагрузки треугольником (рис. 5.7, а) сопротивления отдельных фаз находятся под линейными напряжениями, поэтому фазные токи в них определяются по закону Ома:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z}; I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z} = a^2 I_{AB}; I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z} = a I_{AB}$$

Линейные токи определяются на основании первого закона Кирхгофа. Так, линейный ток фазы  $A$  равен

$$I_A = I_{AB} - I_{CA} = I_{AB}(1 - a) = I_{AB}\sqrt{3} \angle -30^\circ,$$

т.е. линейный ток  $I_A$  отстаёт по фазе на  $30^\circ$  от тока  $I_{AB}$ , причём модуль его в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного тока  $I_{AB}$ .

Таким образом, при симметричном режиме работы цепи имеет место следующее соотношение:

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi.$$

Векторная диаграмма линейных напряжений и токов при соединении нагрузки треугольником показана на рис. 5.7, б. Как и при соединении звездой, угол сдвига фаз равен

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

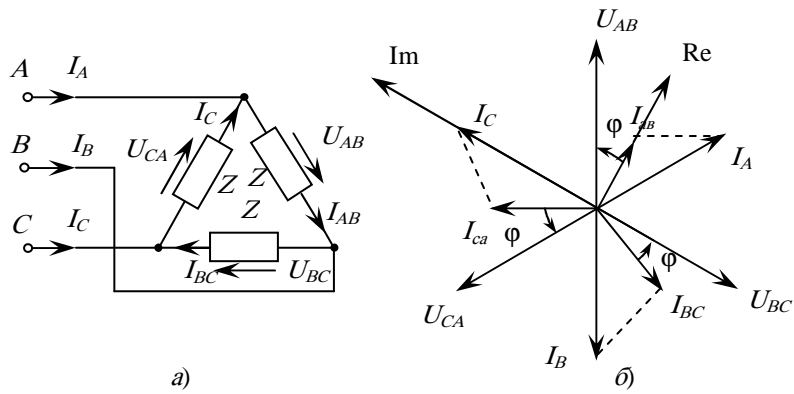


Рис. 5.7

Активная мощность симметричной трёхфазной цепи равна

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi.$$

При соединении нагрузки звездой  $U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$ ;  $I_{\phi} = I_{\text{л}}$ .

Поэтому активная мощность трёхфазной цепи, выраженная через линейные токи и линейные напряжения,

$$P = 3 \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} I_{\text{л}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi.$$

При соединении нагрузки треугольником  $U_{\phi} = U_{\text{л}}$ ;  $I_{\phi} = \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$ .

Активная мощность трёхфазной цепи будет такой же:

$$P = 3U_{\text{л}} \frac{I_{\text{л}}}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi.$$

Следовательно, независимо от схемы соединения нагрузки

$$P = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \cos \varphi.$$

Аналогично, реактивная мощность

$$Q = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}} \sin \varphi,$$

и полная мощность симметричной треугольной цепи

$$S = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}.$$

При этом коэффициент мощности определяется из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{P}{S},$$

где  $\varphi$  – угол сдвига фазного тока относительно соответствующего фазного напряжения.

### 5.3. НЕСИММЕТРИЧНЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Несимметричный режим работы трёхфазной цепи имеет место в том случае, когда комплексные сопротивления отдельных фаз нагрузки не равны между собой, т.е.  $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$ .

Расчёт токов и напряжений при несимметричном режиме производится теми же методами, которые применяются для расчёта сложных однофазных цепей. Рассмотрим несколько схем.

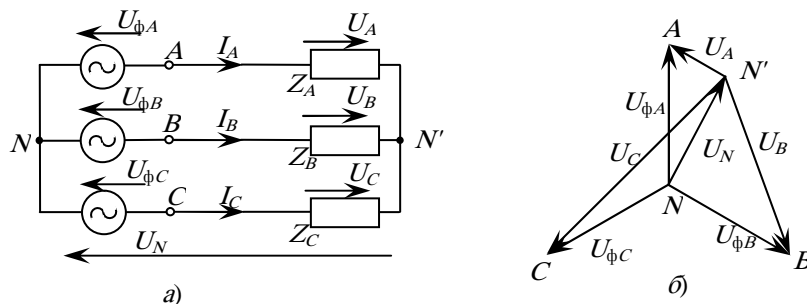


Рис. 5.8

«Звезда–звезда» без нулевого провода. Схема, у которой источник и нагрузка соединены звездой, показана на рис. 5.8, а. Для расчёта цепи целесообразно воспользоваться методом двух узлов, на основании которого напряжение смещения нейтрали, т.е. напряжение между нулевыми точками источника и нагрузки, равно

$$U_N = U_{NN} = \frac{U_{\phi A} Y_A + U_{\phi B} Y_B + U_{\phi C} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C},$$

или, обозначив

$$U_{\phi A} = U_{\phi}; \quad U_{\phi B} = a^2 U_{\phi}; \quad U_{\phi C} = a U_{\phi},$$

получим

$$U_N = U_{\phi} \frac{Y_A + a^2 Y_B + a Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) позволяет по заданным фазным напряжениям генератора и сопротивлениям приёмника  $Z_A = \frac{1}{Y_A}$ ,  $Z_B = \frac{1}{Y_B}$ ,  $Z_C = \frac{1}{Y_C}$  определить напряжение смещения, нейтрали  $U_N$ , зная которое, легко найти напряжения на зажимах приёмников и вычислить ток в каждом из них.

Имеем

$$U_A = U_{\phi A} - U_N; \quad U_B = U_{\phi B} - U_N; \quad U_C = U_{\phi C} - U_N. \quad (5.2)$$

Топографическая диаграмма напряжений для некоторых конкретных значений  $Z_A$ ,  $Z_B$ ,  $Z_C$  приведена на рис. 5.8, б.

Как видно из уравнений (5.2) и диаграммы, при неравномерной нагрузке фаз в системе без нулевого провода напряжения приёмников не равны друг другу. На одних фазах может быть пониженное напряжение по сравнению с фазным, на других – повышенное, что является серьезным недостатком рассматриваемой схемы. Её нельзя применять в тех случаях, когда нагрузка заведомо несимметрична, например, в осветительной сети.

Если заданы линейные напряжения  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CA}$  на зажимах нагрузки, то целесообразно пользоваться формулами, полученными подстановкой (5.1) в уравнения (5.2).

Имеем

$$U_A = \frac{U_{AB} Y_B - U_{CA} Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C};$$

$$U_B = \frac{U_{BC} Y_C - U_{AB} Y_A}{Y_A + Y_B + Y_C};$$

$$U_C = \frac{U_{CA} Y_A - U_{BC} Y_B}{Y_A + Y_B + Y_C}. \quad (5.3)$$

Мощность при несимметричной нагрузке, как и при симметричной, равна сумме мощностей отдельных фаз. Следовательно, активная мощность

$$P = P_A + P_B + P_C.$$

Аналогично, реактивная мощность равна сумме реактивных мощностей отдельных фаз:

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C,$$

поэтому полная или кажущаяся мощность трёхфазной цепи может быть определена как

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (5.4)$$

и коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P_A + P_B + P_C}{|S_A + S_B + S_C|}. \quad (5.5)$$

Здесь  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  – полные комплексные мощности отдельных фаз.

Пользуясь комплексной формой записи мощности, можно написать выражение для мощности трёхфазной цепи, приведённой на рис. 5.8, а в функции линейных напряжений. Полная мощность

$$S = U_A^* I_A + U_B^* I_B + U_C^* I_C.$$

Исключая один из токов, например  $I_B$  из условия

$$I_B = -I_A - I_C,$$

получим

$$S = (U_A - U_B)^* I_A + (U_C - U_B)^* I_C,$$

или

$$S = U_{AB} I_A^* + U_{CB} I_C^* \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) справедливо и для нагрузки, соединённой в треугольник, так как оно определяется линейными напряжениями  $U_{AB}$  и  $U_{BC}$ . Круговой заменой индексов  $A, B, C$  в уравнении (5.6) можно получить выражения для других напряжений и токов мощности  $S$ .

«Звезда–звезда» с нулевым проводом (рис. 5.9). Одно из главных назначений нейтрального провода состоит в том, чтобы при несимметричной нагрузке выравнять фазные напряжения потребителей. Из схемы (рис. 5.9) следует

$$U_A = U_{\phi A}; \quad U_B = U_{\phi B}; \quad U_C = U_{\phi C},$$

т.е. фазные напряжения источника равны фазным напряжениям нагрузки (потребителя).

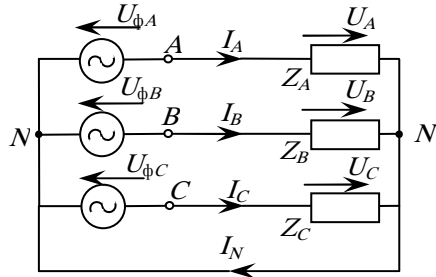


Рис. 5.9

**Соединение нагрузки треугольником.** При соединении нагрузки треугольником (рис. 5.7) токи в фазах находим на основании закона Ома:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}}; \quad I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z_{BC}}; \quad I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z_{CA}}.$$

Таким образом, при соединении нагрузки треугольником, независимо от её сопротивлений, напряжения на нагрузке равны линейным напряжениям источника.

#### 5.4. ИЗМЕРЕНИЕ МОЩНОСТИ В ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Для измерения мощности в трёхфазной цепи с нейтральным проводом простейшим является метод трёх ваттметров (рис. 5.10). При таком соединении каждый из ваттметров измерит активную мощность одной фазы приёмника (нагрузки). Активная мощность всей трёхфазной цепи равна сумме показаний трёх ваттметров:

$$P = U_A I_A \cos \phi_A + U_B I_B \cos \phi_B + U_C I_C \cos \phi_C.$$

Если нагрузка симметрична, достаточно произвести измерение одним ваттметром:

$$P = 3P_W.$$

При отсутствии нейтрали провода достаточно иметь два ваттметра. В соответствии с (5.6) для схемы рис. 5.11 комплекс мощности всей цепи может быть записан как

$$S = U_{AB} I_A^* + U_{CB} I_C^*.$$

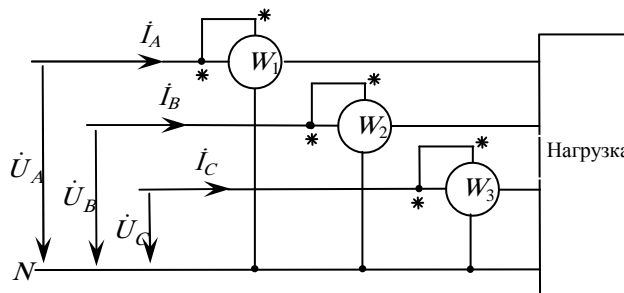


Рис. 5.10

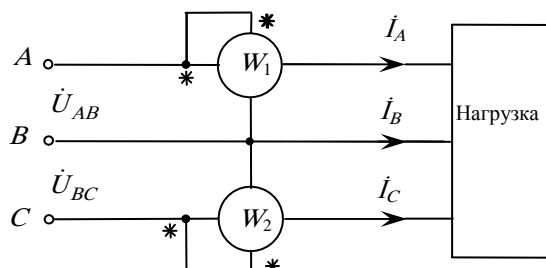


Рис. 5.11

При выводе формулы (5.6) не делалось никаких предположений о симметрии цепи, следовательно, данный метод измерения двумя ваттметрами применим как в случае симметричной, так и в случае несимметричной трёхфазной системы.

Показания ваттметров следующие:

$$P_{W_1} = \operatorname{Re} \left[ U_{AB} I_A^* \right] = U_{AB} I_A \cos(\widehat{U}_{AB} I_A);$$

$$P_{W_2} = \operatorname{Re} \left[ U_{CB} I_C^* \right] = U_{CB} I_C \cos(\widehat{U}_{CB} I_C).$$

Мощность всей трёхфазной цепи

$$P = P_{W_1} + P_{W_2},$$

т.е. сумме показаний отдельных ваттметров.

Измерение реактивной мощности в трёхфазных цепях производится с помощью специальных измерителей реактивной мощности, подобных по устройству ваттметрам. В симметричной трёхфазной цепи измерение реактивной мощности может быть произведено, кроме того, с помощью ваттметров активной мощности. В этом случае ваттметр может быть включён в схему, как показано на рис. 5.12.

Поскольку при симметричной нагрузке как при соединении треугольником, так и при соединении звездой угол между линейным напряжением  $U_{BC}$  и линейным током  $I_A$  равен  $90^\circ - \varphi$ , то показание ваттметра будет

$$P_W = U_{BC} I_A \cos(\varphi - 90^\circ) = U_{BC} I_A \sin \varphi.$$

Для получения суммарной реактивной мощности показание ваттметра нужно умножить на  $\sqrt{3}$ :

$$Q = \sqrt{3} P_W = \sqrt{3} U_L I_L \sin \varphi,$$

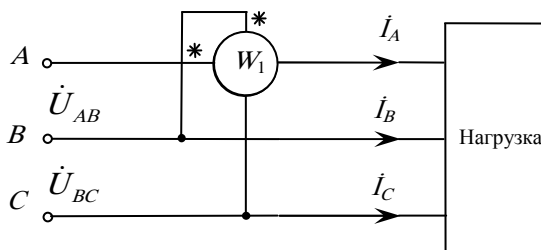


Рис. 5.12

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}.$$

В данном случае  $X > 0$ , т.е. нагрузка носит индуктивный характер.

### 5.5. ТРЁХФАЗНОЕ ВРАЩАЮЩЕЕСЯ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Большим достоинством трёхфазных систем является легкость получения вращающегося магнитного поля. Это даёт возможность создания большого класса трёхфазных электрических машин переменного тока – генераторов и двигателей.

Пусть через катушку, показанную на рис. 5.13, проходит синусоидальный ток  $i$ . Катушка условно изображена в виде витка, причём точка и крестик указывают направление тока: точкой обозначено острие, а крестиком – конец стрелки. По правилу буравчика определено направление вектора магнитной индукции  $B$ . В среде с постоянной магнитной проницаемостью магнитная индукция в любой точке поля пропорциональна по величине току, создающему магнитное поле. Поэтому, если  $i = I_m \cos \omega t$ , то и  $B$  также изменяется по закону  $B = B_m \cos \omega t$  ( $B_m$  – максимальное значение магнитной индукции в центре катушки), когда ток отрицателен, вектор магнитной индукции имеет противоположное направление.

Таким образом, магнитное поле изменяется (пульсирует) вдоль оси катушки, такое магнитное поле катушки называется пульсирующим.

Условимся круговым вращающимся магнитным полем называть магнитное поле, ось которого равномерно вращается, причём значение магнитной индукции на этой оси неизменно. Легко убедиться в том, что магнитное поле, пульсирующее по закону синуса или косинуса, может рассматриваться как результат наложения двух полей, вращающихся в противоположные стороны со скоростью, равной угловой частоте переменного тока, и имеющих амплитуду вдвое меньшую амплитуды пульсирующего поля (рис. 5.13). Действительно, если косинусоидальную функцию выразить через экспоненциальную в виде

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2},$$

то магнитная индукция запишется как

$$B = \frac{B_m}{2} e^{j\omega t} + \frac{B_m}{2} e^{-j\omega t},$$

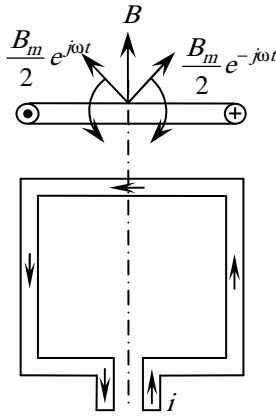


Рис. 5.13

где  $e^{j\omega t}$  – единичный вектор, вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  в положительном направлении (против движения часовой стрелки), вектор с отрицательным показателем вращается в противоположную сторону.

Расположим три одинаковые катушки таким образом, чтобы их оси были сдвинуты друг относительно друга в пространстве на угол  $120^\circ$  (рис. 5.14, а) и подключим эти катушки к симметричной трёхфазной цепи. Тогда через катушки будут протекать токи

$$i_A = I_m \cos \omega t; \quad i_B = I_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad i_C = I_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

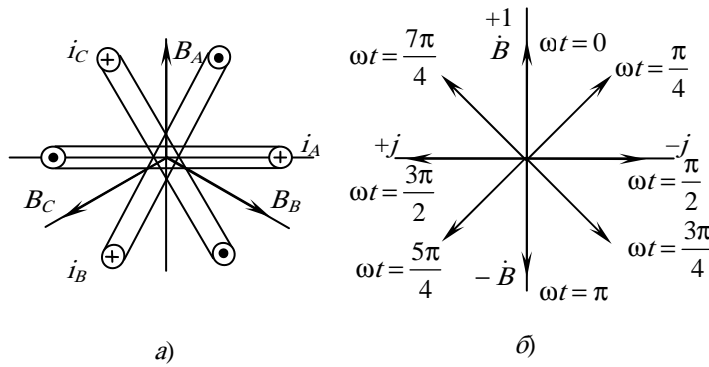


Рис. 5.14

Направлениям токов  $i_A, i_B, i_C$ , обозначенным на рис. 5.14, а с помощью точек и крестиков, соответствуют по правилу буравчика указанные стрелками направления магнитных потоков (векторов индукций).

При пропорциональной зависимости индукции от токов мгновенные значения индукций фаз выразятся следующим образом:

$$B_A = B_m \cos \omega t; \quad B_B = B_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \quad B_C = B_m \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right),$$

где  $B_m$  – амплитуда индукции на оси каждой из катушек.

Заменяя косинусоидальные функции на экспоненциальные, получим

$$B_A = \frac{B_m}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t});$$

$$B_B = \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \right]; \quad (5.7)$$

$$B_C = \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \right].$$

Каждое из уравнений системы (5.7) выражает собой пульсирующее магнитное поле. Чтобы осуществить направление этих полей в соответствии с рис. 5.14, а, достаточно представить индукции  $B_B$  и  $B_C$  в комплексной форме:

$$B_B = B_B e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad B_C = B_C e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (5.8)$$

тогда с учётом (5.7) и (5.8) получим

$$B_A = \frac{B_m}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t});$$

$$B_B = \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} + e^{-j\omega t} \right];$$

$$B_C = \frac{B_m}{2} \left[ e^{j\left(\omega t - \frac{8\pi}{3}\right)} + e^{-j\omega t} \right].$$

Результирующий вектор индукции находится сложением векторов  $B_A$ ,  $B_B$ ,  $B_C$ .

В силу того, что сумма трёх единичных векторов  $1$ ,  $e^{-j\frac{4\pi}{3}}$ ,  $e^{-j\frac{8\pi}{3}}$  равна нулю, результирующая индукция принимает вид

$$B = \frac{3}{2} B_m e^{-j\omega t}. \quad (5.9)$$

Полученное выражение (5.9) показывает, что результирующий вектор магнитного поля имеет постоянный модуль, равный  $1,5B_m$ , и равномерно вращается с угловой скоростью  $\omega$  от оси фазы  $A$  по направлению к оси фазы  $B$  и т.д., или по ходу часовой стрелки, т.е. имеет место вращающееся магнитное поле.

На рисунке 5.14, б показано положение результирующего вектора для различных моментов времени.

Для изменения направления вращения поля достаточно поменять местами токи в каких-нибудь двух катушках, например, токи  $i_B$  и  $i_C$ .

За один период переменного тока такое магнитное поле совершит один оборот, а за 1 мин – 60 оборотов.

Известно устройство для получения кругового вращающегося магнитного поля при помощи двух катушек, плоскости которых смещены в пространстве на угол  $60^\circ$  (заявка на изобретение № 2633114/07 от 16 июня 1978 г.)

При подведении к схеме рис. 5.15 трёхфазной системы напряжений возникают токи  $i_1$  и  $i_2$ , создающие магнитные поля, индукции которых соответственно равны

$$B_1 = B_m \cos \omega t; \quad B_2 = B_m \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right).$$

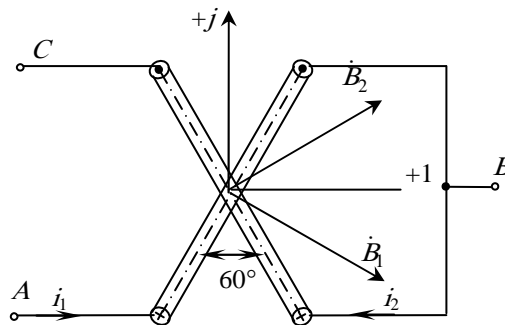


Рис. 5.15

Результирующий вектор индукции находится сложением векторов

$$B_1 = \frac{B_m}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-j\pi/6}$$

и

$$B_2 = \frac{B_m}{2} \left( e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \right) e^{j\pi/6}.$$

После простых преобразований получим

$$B = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m e^{j(\omega t - \pi/6)}. \quad (5.10)$$

Это выражение показывает, что результирующий вектор магнитной индукции вращается с угловой скоростью  $\omega$ , причём значение индукции на оси неизменно равно  $\frac{\sqrt{3}}{2} B_m$ , т.е. получается круговое магнитное вращающееся поле.

## 5.6. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ ТОКИ В ТРЁХФАЗНОЙ ЦЕПИ

Если в трёх одинаковых фазах обмотки трёхфазного генератора переменного тока индуцируются одинаковые несинусоидальные напряжения, например, содержащие третью гармонику, то напряжение фазы  $A$  можно представить в виде

$$u_{\phi A} = U_{1m} \sin \omega t + U_{3m} \sin (3\omega t + \psi_3).$$



Напряжения во второй и третьей фазах получаются путём замены в этом уравнении  $\omega t$  соответственно на  $\omega t - \frac{2\pi}{3}$  и  $\omega t - \frac{4\pi}{3}$ . Это даёт

$$u_{\phi B} = U_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3);$$

$$u_{\phi C} = U_{1m} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3).$$

Таким образом, в то время как основные гармоники смещены по фазе друг относительно друга на  $120^\circ$ , высшие гармоники во всех трёх направлениях совпадают по фазе. Поэтому в линейных напряжениях (проводах) высших гармонических не будет, и они будут синусоидальными (если, конечно, фазные напряжения не содержат пятой или седьмой гармоники).

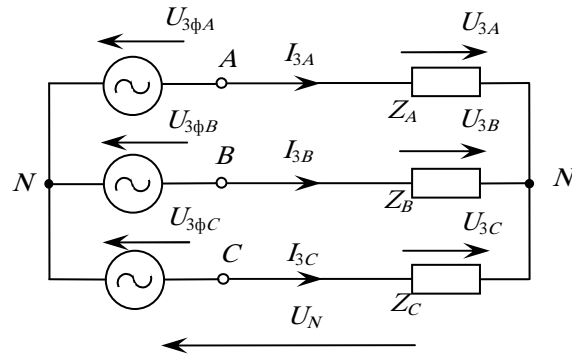


Рис. 5.16

Если три одинаковые фазы нагрузки подключены к генератору по схеме звезды, то на нагрузку будут действовать синусоидальные напряжения. Схемы для третьей гармоники показана на рис. 5.16. Здесь

$$u_N = u_{3\phi A} = u_{3\phi B} = u_{3\phi C} = u_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3).$$

При этом легко показать, что  $i_{3A} = i_{3B} = i_{3C} = 0$ . Поэтому

$$u_{3A} = u_{3B} = u_{3C} = 0.$$

Если нулевые точки генератора и нагрузки соединить между собой, как это показано на рис. 5.9, то через линейные провода и нулевой провод будет циркулировать ток утроенной частоты. Он создаёт в фазах нагрузки падение напряжения утроенной частоты и, таким образом, делает несинусоидальным также напряжение на нагрузке.

### 5.7. МЕТОД СИММЕТРИЧНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДЛЯ РАСЧЁТА НЕСИММЕТРИЧНЫХ ТРЁХФАЗНЫХ СИСТЕМ

Запишем действующие значения симметричной системы ЭДС:

$$\dot{E}_A = E_A; \quad \dot{E}_B = E_B e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \dot{E}_C = E_C e^{-j\frac{4\pi}{3}}.$$

Обозначим

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

тогда

$$a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a^3 = e^{j2\pi} = 1; \quad a^4 = a; \quad 1 + a + a^2 = 0.$$

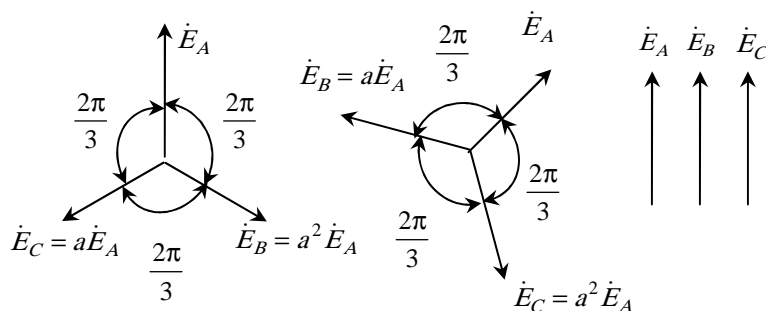


Рис. 5.17

Симметричную трёхфазную систему ЭДС можно записать в виде

$$\dot{E}_A; \quad \dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A; \quad \dot{E}_C = a \dot{E}_A.$$

Как видно из рис. 5.17, ЭДС в фазах проходит через максимум в алфавитном порядке фаз ( $A, B, C, A, B, C, \dots$ ). Такую систему называют симметричной системой прямой последовательности.

Симметричную систему обратной последовательности, в которой ЭДС проходит через максимум в обратном алфавитном порядке фаз ( $A, C, B, A, C, B, \dots$ ) можно записать в виде

$$\dot{E}_A; \quad \dot{E}_B = a \dot{E}_A; \quad \dot{E}_C = a^2 \dot{E}_A.$$

Симметричную систему нулевой последовательности, в которой все три ЭДС проходят через максимум амплитуды одновременно записывается в виде

$$\dot{E}_A = \dot{E}_B = \dot{E}_C.$$

Любую несимметричную трёхфазную систему ЭДС, напряжений или токов, например  $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ , можно представить в виде суммы трёх симметричных трёхфазных систем: нулевой ( $\dot{E}_0; \dot{E}_0; \dot{E}_0$ ), прямой ( $\dot{E}_1; a^2 \dot{E}_1; a \dot{E}_1$ ) и обратной ( $\dot{E}_2; a \dot{E}_2; a^2 \dot{E}_2$ ) последовательности, которые называют симметричными составляющими данной несимметричной трёхфазной системы (рис. 5.18):

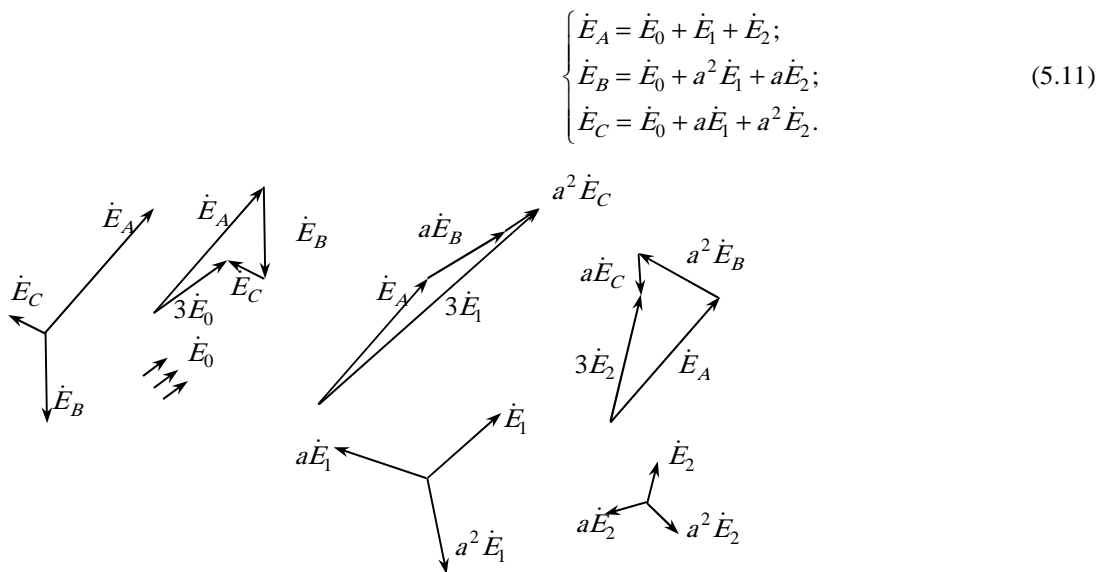


Рис. 5.18

Из уравнения (5.11) можно выразить  $\dot{E}_0, \dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$  через  $\dot{E}_A, \dot{E}_B$  и  $\dot{E}_C$ , если учесть, что

$$1 + a + a^2 = 0; \quad a^3 = 1; \quad a^4 = a.$$

Для получения  $\dot{E}_0$  следует сложить равенства (5.11) и разделить полученную сумму на три.

Для получения  $\dot{E}_1$  следует, оставив первое равенство без умножения, умножить второе равенство на  $a$  и третье – на  $a^2$ , затем сложить три полученных равенства и разделить сумму на три.

Для получения  $\dot{E}_2$  следует, оставив первое равенство (5.11) без умножения, умножить второе равенство на  $a^2$  и третье – на  $a$ , затем сложить три полученных равенства и разделить сумму на три.

$$\begin{cases} \dot{E}_0 = \frac{1}{3}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C); \\ \dot{E}_1 = \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a \dot{E}_B + a^2 \dot{E}_C); \\ \dot{E}_2 = \frac{1}{3}(\dot{E}_A + a^2 \dot{E}_B + a \dot{E}_C). \end{cases} \quad (5.12)$$

Получили формулы прямой, обратной и нулевой последовательностей линейных и фазных напряжений сети, по которым представляется возможным рассчитывать указанные симметричные составляющие

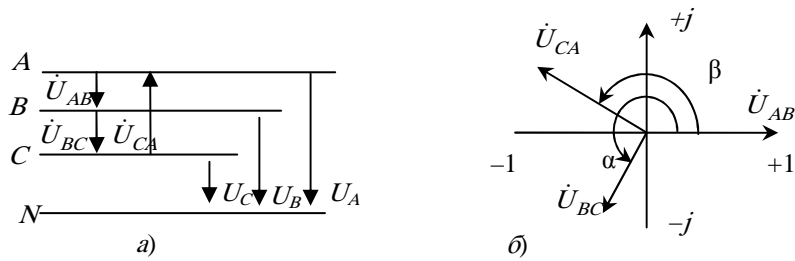


Рис. 5.19

на основании результатов измерения линейных и фазных напряжений обычными вольтметрами и создавать автоматические устройства непрерывного контроля указанных симметричных составляющих.

На рисунке 5.19, а показан участок сети с указанием положительных направлений линейных  $U_{CA}$ ,  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$  и фазных  $U_A$ ,  $U_B$ ,  $U_C$  напряжений, а на рис. 5.19, б представлена векторная диаграмма линейных напряжений.

Примем следующие обозначения:

$$U_{AB} = U_{AB}; \quad U_{BC} = U_{BC}e^{j\alpha}; \quad U_{CA} = U_{CA}e^{j\beta}.$$

Тогда, на основании метода симметричных составляющих для обратной последовательности напряжения  $U_{AB}$  можем записать

$$U_{AB2} = \frac{1}{3}(U_{AB} + a^2 U_{BC}e^{j\alpha} + a U_{CA}e^{j\beta}), \quad (5.13)$$

где  $a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$  – фазный множитель.

Перепишем уравнение (5.13):

$$3U_{AB2} = U_{AB} + \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)U_{BC}e^{j\alpha} + \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)U_{CA}e^{j\beta}.$$

Можно показать, что модуль этого комплекса равен

$$9U_{AB2}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - U_{AB}U_{CA}(\cos\beta + \sqrt{3}\sin\beta) - U_{AB}U_{BC}(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha) - U_{BC}U_{CA}\cos(\alpha - \beta) - \sqrt{3}\sin(\beta - \alpha). \quad (5.14)$$

Так как сумма комплексов линейных напряжений получена из рассмотрения треугольника на рис. 5.20, из треугольника по теореме косинусов имеем

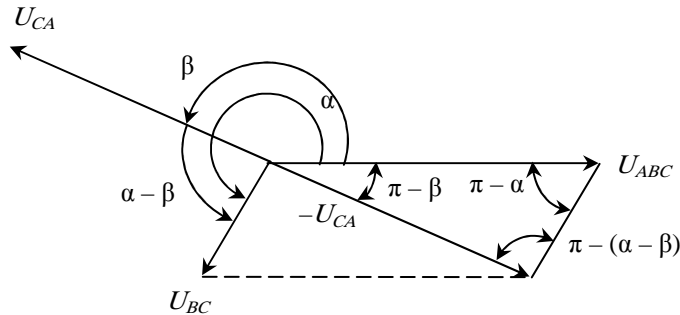


Рис. 5.20

$$\cos(\alpha - \pi) = \frac{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2}{2U_{AB}U_{CA}} = -\cos\alpha; \quad (5.15)$$

$$\cos(\pi - \beta) = \frac{U_{AB}^2 + U_{CA}^2 - U_{BC}^2}{2U_{AB}U_{CA}} = -\cos\beta; \quad (5.16)$$

$$\cos(\pi - (\alpha - \beta)) = \frac{U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - U_{AB}^2}{2U_{BC}U_{CA}} = -\cos(\alpha - \beta). \quad (5.17)$$

Следовательно, можем записать:

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha; \quad \sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \quad (5.18)$$

По теореме синусов

$$\frac{U_{AB}}{\sin(\pi - (\alpha - \beta))} = \frac{U_{BC}}{\sin(\pi - \beta)} = -\frac{U_{0A}}{\sin(\alpha - \pi)},$$

или

$$\frac{U_{AB}}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{U_{BC}}{\sin \beta} = -\frac{U_{CA}}{\sin \alpha}.$$

Таким образом, с учётом (5.15) имеем

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{(U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2)^2}{4U_{AB}^2 + U_{BC}^2}}. \quad (5.19)$$

Подставляя (5.15) – (5.18) в (5.14) и производя несложные преобразования с учётом (5.19), получим окончательное выражение для обратной последовательности линейного напряжения в функции его модулей:

$$U_{AB2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - \sqrt{3} \sqrt{4U_{AB}^2 U_{BC}^2 - (U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2)^2}}. \quad (5.20)$$

Аналогично можно найти уравнение для напряжения прямой последовательности. Действительно,

$$U_{AB1} = \frac{1}{3} (U_{AB} + aU_{BC}e^{j\alpha} + a^2U_{CA}e^{j\beta}).$$

Квадрат модуля этого комплекса равен

$$9U_{AB1}^2 = U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 - U_{AB}U_{BC}(\cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha) - U_{AB}U_{CA}(\cos \beta - \sqrt{3} \sin \beta) - U_{BC}U_{CA}(\cos(\alpha - \beta) - \sqrt{3} \sin(\alpha - \beta)). \quad (5.21)$$

Подставляя (5.15) – (5.18) в (5.21), получим уравнение для определения напряжения прямой последовательности:

$$U_{AB1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2 + \sqrt{3} \sqrt{4U_{AB}^2 U_{BC}^2 - (U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - U_{CA}^2)^2}}. \quad (5.22)$$

Уравнения (5.20) и (5.22) являются основными для расчёта симметричных составляющих прямой и обратной последовательности несимметричных линейных напряжений.

Так как соотношения между симметричными составляющими фазных и линейных напряжений являются такими же, как и соотношения между действительными фазными и линейными напряжениями, то симметричные составляющие прямой и обратной последовательности фазных напряжений найдём из выражений

$$U_{A1} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} U_{AB1}; \quad U_{A2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{6}} U_{AB2}.$$

Для получения нулевой последовательности фазных напряжений рассмотрим векторную диаграмму рис. 5.21. Запишем фазные напряжения в комплексной форме:

$$\dot{U}_A = U_A(\cos \alpha + j \sin \alpha); \quad \dot{U}_B = U_B(\cos \beta + j \sin \beta); \quad \dot{U}_C = U_C(\cos \gamma + j \sin \gamma).$$

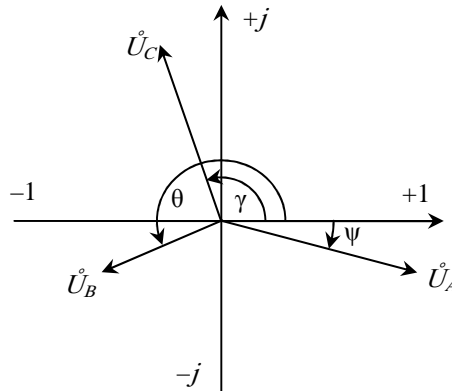


Рис. 5.21

Система линейных напряжений независимо от вида схемы определяется через фазные напряжения:

$$U_{AB} = U_A - U_B; \quad U_{BC} = U_B - U_C; \quad U_{CA} = U_C - U_A,$$

причём

$$U_{AB} + U_{BC} + U_{CA} = 0.$$

На основании метода симметричных составляющих утроенное напряжение нулевой последовательности равно

$$3U_0 = U_A(\cos \alpha + j \sin \alpha) + U_B(\cos \beta + j \sin \beta) + U_C(\cos \gamma + j \sin \gamma) = \\ = U_A \cos \alpha + U_B \cos \beta + U_C \cos \gamma + j(U_A \sin \alpha + U_B \sin \beta + U_C \sin \gamma).$$

Модуль последнего выражения после простых преобразований будет выглядеть так:

$$9U_0^2 = U_A^2 + U_B^2 + U_C^2 + 2U_C U_B \cos(\alpha - \beta) + \\ + 2U_B U_C \cos(\beta - \gamma) + 2U_C U_A \cos(\alpha - \gamma). \quad (5.23)$$

С другой стороны, линейное напряжение  $U_{AB}$ , выраженное через фазные напряжения  $U_A$  и  $U_B$ , можно записать

$$U_{AB} = U_A(\cos \alpha + j \sin \alpha) - U_B(\cos \beta + j \sin \beta) = \\ = U_A \cos \alpha - U_B \cos \beta + j(U_A \sin \alpha - U_B \sin \beta). \quad (5.24)$$

Его модуль

$$U_{AB}^2 = U_A^2 + U_B^2 - 2U_A U_B \cos(\alpha - \beta).$$

Таким образом,

$$2U_A U_B \cos(\alpha - \beta) = U_A^2 + U_B^2 - U_{AB}^2. \quad (5.25)$$

Аналогично получим уравнения для линейных напряжений  $U_{BC}$  и  $U_{CA}$ :

$$2U_B U_C \cos(\beta - \gamma) = U_B^2 + U_C^2 - U_{BC}^2; \quad (5.26)$$

$$2U_A U_C \cos(\alpha - \gamma) = U_A^2 + U_C^2 - U_{CA}^2. \quad (5.27)$$

Подставляя уравнения (5.25) – (5.27) в (5.23), имеем

$$9U_0^2 = 3U_A^2 + 3U_B^2 + U_C^2 - U_{AB}^2 - U_{BC}^2 - U_{CA}^2.$$

И окончательно искомое напряжение нулевой последовательности фазных напряжений будет определяться формулой

$$U_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2) - \frac{1}{9}(U_{AB}^2 + U_{BC}^2 + U_{CA}^2)}. \quad (5.28)$$

В частном случае, когда система линейных напряжений симметрична, т.е.  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l$ , из (5.28) получим

$$U_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(U_A^2 + U_B^2 + U_C^2 - U_l^2)}. \quad (5.29)$$

На рисунке 5.22 дана схема фильтра для выделения составляющих прямой или обратной последовательности системы токов, составляющая нулевой последовательности которой равна нулю.

Определим условия, которым следует подчинить полные сопротивления  $Z_{AB}$  и  $Z_{BC}$  элементов этой цепи, причём полное сопротивление амперметра обозначим через  $Z_{CA}$ .

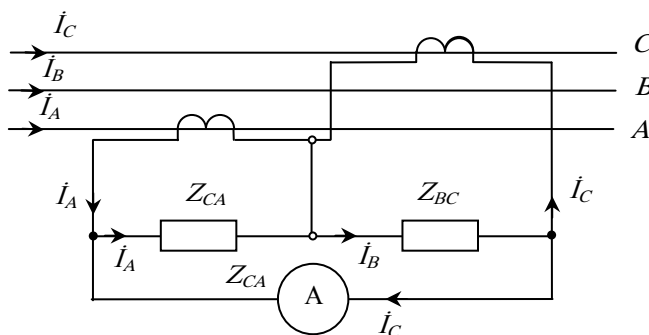


Рис. 5.22

На основании законов Кирхгофа имеем

$$I_{AB} Z_{AB} + I_{BC} Z_{BC} + I_{CA} Z_{CA} = 0;$$

$$I_{AB} = I_A + I_{CA}; \quad I_{BC} = I_C + I_{CA},$$

откуда

$$I_{CA} = -\frac{I_A Z_{AB} + I_C Z_{BC}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}.$$

Так как составляющая нулевой последовательности системы линейных токов по условию равна нулю, то, выражая токи  $I_C$  и  $I_A$  через составляющие прямой и обратной последовательностей  $I_1$  и  $I_2$ , получим

$$I_A = I_1 + I_2; \quad I_C = aI_1 + a^2 I_2$$

и, подставив эти значения в выражение для  $I_{CA}$ , найдём

$$I_{CA} = -\frac{I_1(Z_{AB} + aZ_{BC}) + I_2(Z_{AB} + a^2Z_{BC})}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}}.$$

Из этого выражения следует, что ток  $I_{CA}$ , проходящий через амперметр, не зависит от состоящей обратной последовательности и пропорционален составляющей прямой последовательности, если выполнены условия

$$Z_{AB} + a^2Z_{BC} = 0$$

или

$$Z_{AB} = -a^2Z_{BC} = Z_{BC}e^{j\pi/3}, \quad (5.30)$$

и не зависит от составляющей прямой последовательности и пропорционален составляющей обратной последовательности, если выполнены условия

$$Z_{AB} + aZ_{BC} = 0,$$

или

$$Z_{BC} = -a^2Z_{AB} = Z_{AB}e^{j\pi/3}.$$

Фильтр для выделения составляющей прямой последовательности логично получить при

$$Z_{BC} = R; \quad Z_{AB} = R' + jX.$$

Нетрудно показать, что равенство (5.30) будет выполняться при

$$R' = \frac{1}{2}R; \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

На рисунке 5.23, а показана схема, в которой реализуются указанные условия.

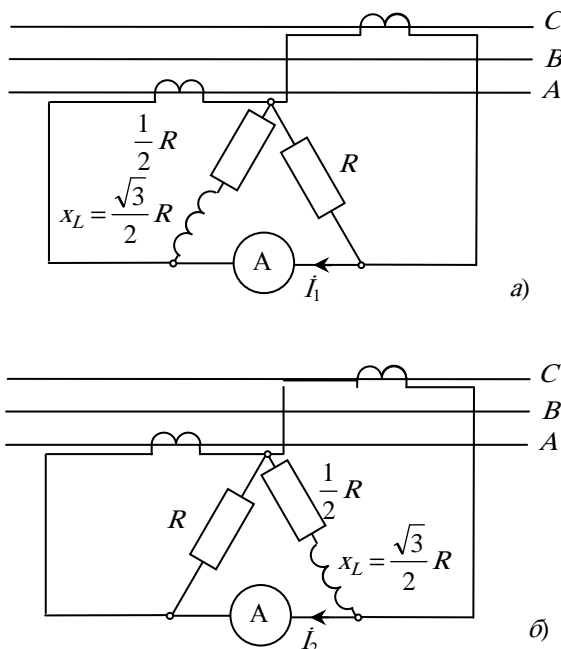


Рис. 5.23

Фильтр для выделения составляющей обратной последовательности получим, взяв

$$Z_{AB} = R; \quad Z_{BC} = R' + jX.$$

Равенство (5.30), как и ранее, будет выполняться при

$$R' = \frac{1}{2}R; \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Схема для выделения составляющей обратной последовательности показана на рис. 5.23, б.

Как уже отмечалось, величина напряжения нулевой последовательности равна одной трети суммы фазных напряжений, т.е.

$$U_0 = \frac{1}{3}(U_A + U_B + U_C). \quad (5.31)$$

Это соотношение используется при измерении напряжения нулевой последовательности. Три однофазных трансформатора напряжения соединяются, как показано на рис. 5.24, причём первичные обмотки

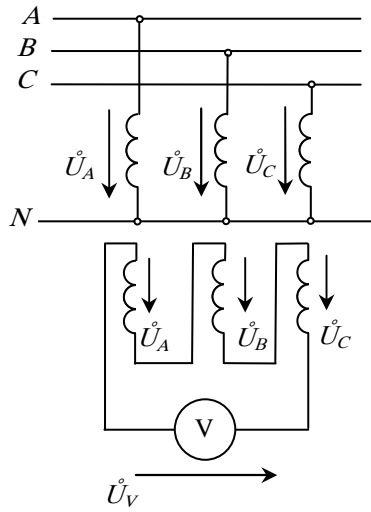


Рис. 5.24

соединяются звездой, а общая точка подсоединяется к нейтрали. Вторичные обмотки трансформаторов соединяются открытым треугольником, благодаря чему напряжение на зажимах треугольника пропорционально сумме вторичных фазных напряжений. Вольтметр, показанный на схеме, используется для измерений данного напряжения:

$$U_V = U_A + U_B + U_C,$$

а при соответствующей градуировке его можно использовать для измерения напряжения нулевой последовательности:  $U_V \equiv U_0$ .

Напряжение нулевой последовательности можно также измерить при помощи схемы, показанной на рис. 5.25. Три индуктивные катушки с равными сопротивлениями  $Z$  соединены звездой и подсоединены к трём фазам линии. Общая точка звезды подсоединена через вольтметр к нейтрали. Напряжение на вольтметре  $U_V$  можно определить из следующих соотношений:

$$U'_A - U_V - U_A = 0; \quad U'_B - U_V - U_B = 0; \quad U'_C - U_V - U_C = 0.$$

Сложив эти уравнения и учтя что

$$U_A + U_B + U_C = 3U_0; \quad U'_A + U'_B + U'_C = 3U'_0,$$

получим

$$U_V = U'_0 - U_0.$$

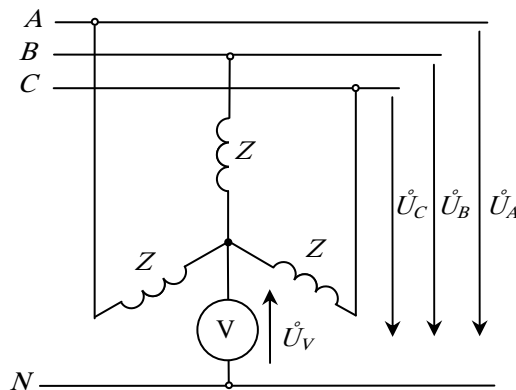


Рис. 5.25

Напряжение  $U'_0$  определяется асимметрией фазных напряжений источника питания линии. Эта система, как правило, симметрична. Поэтому показание вольтметра равно напряжению нулевой последовательности  $U_V = U_0$ .

Аналогично (5.31) ток нулевой последовательности можно представить в виде

$$I_0 = \frac{1}{3}(I_A + I_B + I_C). \quad (5.32)$$

Поэтому для измерения токов нулевой последовательности необходимо использовать три трансформатора тока, вторичные обмотки которых соединяются параллельно (рис. 5.26, а). Через амперметр А, подсоединённый к концам трёх вторичных обмоток, проходит ток, соответствующий сумме токов:

$$I = I_A + I_B + I_C$$

и, следовательно, его можно отградуировать на показание тока нулевой последовательности, т.  $I \equiv I_0$ .

Для этой же цепи часто используется один кольцевой трансформатор, сердечник которого охватывает три провода (рис. 5.26, б). В этой схеме происходит суммирование магнитных потоков, создаваемых токами трёх фаз  $I_A, I_B, I_C$ . Поэтому ЭДС, индуцируемая вторичной обмоткой кольцевого трансформатора, пропорциональна результирующему магнитному потоку  $\Phi$ , а показание амперметра, как и в схеме рис. 5.26, а, пропорционально току нулевой последовательности.

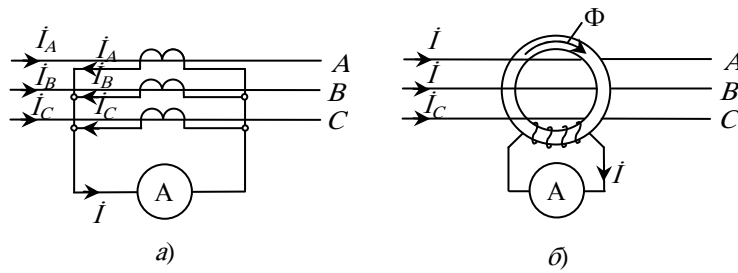


Рис. 5.26

### Задачи

5.1. Доказать, что схема на рис. 5.27 может быть использована как фазоуказатель чередования фаз.

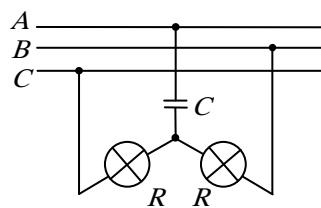


Рис. 5.27

5.2. Нагрузка, соединённая в звезду с нулевым проводом, к которой приложено напряжение симметричной трёхфазной системы, представлена на рис. 5.28. Линейное напряжение:  $U_{\text{л}} = 380$  В;  $R = 22$  Ом.

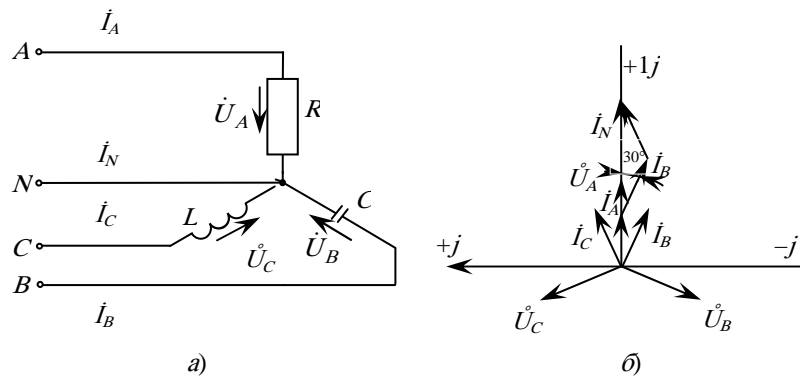


Рис. 5.28

$$X_L = \frac{22}{\sqrt{3}} \text{ Ом}; \quad X_C = \frac{22}{\sqrt{3}} \text{ Ом.}$$

Требуется:

- определить линейные токи и ток в нулевом проводе,
- построить векторную диаграмму напряжений и токов.

5.3. Напряжение симметричной трёхфазной системы приложено к нагрузке, соединённой звездой без нулевого провода (рис. 5.29). Линейное напряжение:  $U_{\text{л}} = 380$  В;  $R = 20$  Ом;  $X_L = 40$  Ом;  $X_C = 30$  Ом.

Требуется:

- определить напряжение смещения нейтрали;
- определить линейные токи.



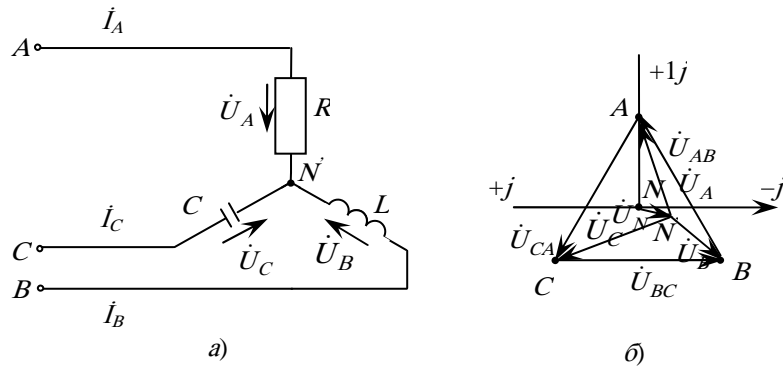


Рис. 5.29

5.4. В схеме (рис. 5.30, а) дано:  $R = 22 \text{ Ом}$ ;  $X_L = 19 \text{ Ом}$ ;  $X_C = 19 \text{ Ом}$ ;  $U_n = 380 \text{ В}$ .

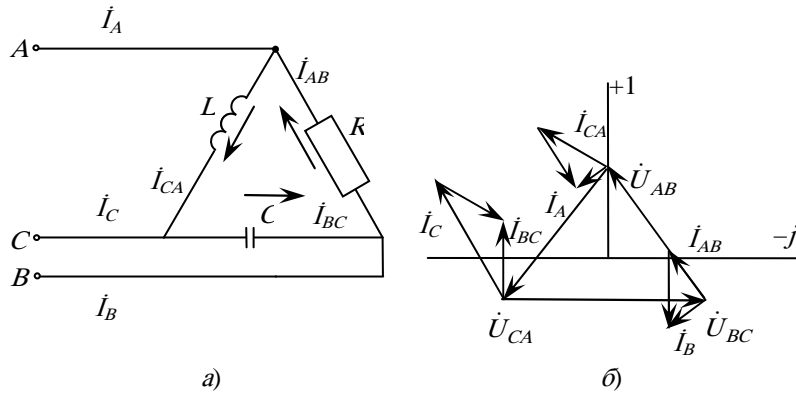


Рис. 5.30

Требуется:

- а) определить линейные токи,
- б) определить фазные токи,
- в) построить векторную диаграмму фазных токов и напряжений.

5.5. Рассчитать токи короткого замыкания представленной на рис. 5.31 трёхфазной цепи.

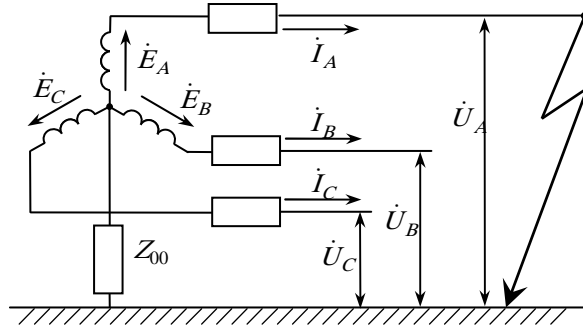


Рис. 5.31

5.6. Определить токи в месте двухфазного короткого замыкания фаз  $B$  и  $C$ . Двухфазное короткое замыкание (а) и векторная диаграмма токов в месте повреждения (б) показаны на рис. 5.32. Построить векторную диаграмму.

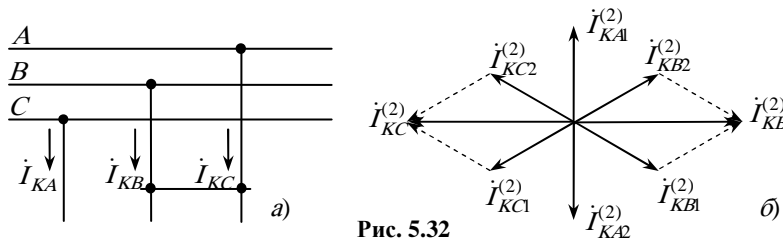


Рис. 5.32

5.7. Определить токи в месте однофазного короткого замыкания фазы  $A$ . Однофазное короткое замыкание (а) и векторная диаграмма токов в месте повреждения (б) показаны на рис. 5.33. Построить векторную диаграмму.

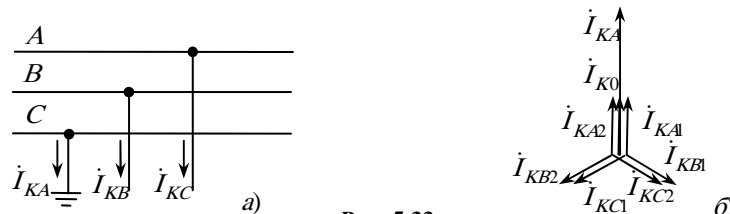


Рис. 5.33

5.8. Известно, что обмотки трёхфазных генераторов и трансформаторов могут быть соединены «звездой» или «треугольником». При соединении «звездой» для получения системы симметричных линейных напряжений, одноимённые выводы обмоток («начала» или «концы») должны быть присоединены к одной точке; при соединении треугольником «начало» каждой обмотки должно быть соединено с «концом» другой. Кроме разметки одноимённых зажимов обмоток требуется определение порядка чередования фаз. Знание порядка чередования фаз необходимо, в частности, при включении на параллельную работу нескольких источников энергии и при подключении к трёхфазным источникам асинхронных и синхронных двигателей, у которых направление вращения зависит от порядка чередования фаз.

Обычно, поступающие с завода-изготовителя генераторы и трансформаторы имеют маркировку выводов обмоток, но после ремонтных работ на этих агрегатах, как правило, требуется проверка правильности соединения обмоток и порядка чередования фаз.

Обмотки симметричного трёхфазного генератора подсоединены к выводам клеммной коробки (рис. 5.34).

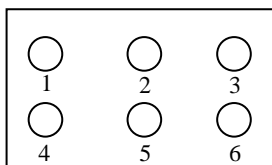


Рис. 5.34

Для разметки зажимов используется вольтметр. При соединении вольтметра к зажимам 1–2, 3–6, и 4–5 его показания равны 229 В, при присоединении к другим выводам по показания вольтметра равны нулю. Затем выводы 1, 3, 4 были соединены между собой, после чего вольтметр, подключённый к выводам 2–5, показал 380 В, к выводам 2–6 – 220 В, к выводам 5–6 – 220 В.

Определить «начала» и «концы» обмоток и нарисовать схему соединения выводов обмоток при соединении обмоток генератора «звездой» и «треугольником». Определить порядок чередования фаз.

5.9. Из-за неправильного подключения обмоток трёхфазного трансформатора с фазным напряжением  $U_{\phi} = 220$  В, питающего асинхронный двигатель, система линейных напряжений на зажимах двигателя имеет вид, показанный на рис. 5.35. Определить фазные токи двигателя при соединении его обмоток звездой, если сопротивление токам прямой последовательности  $Z_1 = j3$  Ом, сопротивление токам обратной последовательности  $Z_2 = j1$  Ом. Каковы будут токи при правильном соединении обмоток трансформатора?

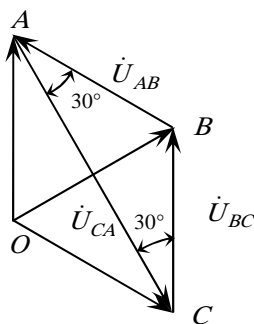


Рис. 5.35

5.10. Важным показателем качества электроэнергии является симметрия линейных напряжений трёхфазных систем электроснабжения. Обычно несимметрия напряжений в конце ЛЭП вызывается подключением к сети мощных однофазных нагрузок, например, электрометаллургических агрегатов.

Несимметрия напряжений оказывает значительное влияние на работу некоторых видов потребителей электроэнергии. Так, питание асинхронных двигателей несимметричным напряжением вызывает повышенный нагрев их роторов и сокращение срока службы двигателей. Это вызвано тем, что магнитное поле, создаваемое статором двигателя, обмотки которого питаются несимметричными напряжениями, может быть представлено в виде двух вращающихся в противоположные стороны полей. При этом поле, которое вращается в сторону противоположную вращению ротора, индуцирует в роторе вихревые токи значительной величины, которые и вызывают повышенный нагрев ротора.

Несимметрия напряжений оценивается величиной коэффициента несимметрии

$$K_{\text{НСМ}} = \frac{|\dot{U}_{AB} + a^2 \dot{U}_{BC} + a \dot{U}_{CA}|}{3 \dot{U}_{\text{НОМ}}} 100 \%,$$

где  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  – комплексы линейных напряжений;  $\dot{U}_{\text{НОМ}}$  – номинальное значение линейного напряжения в симметричном режиме;  $a = e^{j120^\circ} = 0,5 + 0,5\sqrt{3}j$  – фазный множитель.

Согласно ГОСТ 13109–67 «Нормы качества электрической энергии» коэффициент несимметрии не должен превышать 2 %.

*Условие.* Из-за неправильного соединения обмоток трёхфазного трансформатора диаграмма линейных напряжений имеет вид, показанный на рис. 41. Определить величину коэффициента несимметрии линейных напряжений при  $U_{AB} = U_{BC} = 220$  В,  $U_{CA} = 380$  В.

Запишем комплексы линейных напряжений, приняв  $\dot{U}_{AB} = 220e^{j0^\circ}$ ,

$$\dot{U}_{BC} = 220e^{-j60^\circ} \text{ В}; \quad \dot{U}_{CA} = 380e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Тогда

$$K_{\text{нсм}} = \frac{220 + e^{-j120^\circ} \cdot 220e^{-j60^\circ} + 380e^{j150^\circ} \cdot e^{j120^\circ}}{3 \cdot 380} 100\% = 33,3\%.$$

### Ответы, решения и методические указания

5.1. В качестве примера применения формул (5.4) рассмотрим схему фазоуказателя, используемую для определения чередования фаз по времени (рис. 5.27). Ёмкостное сопротивление конденсатора берётся равным по величине сопротивлению лампы, т.е.  $X_C = R$ . Тогда

$$Y_A = \frac{1}{-jX_C} = j\frac{1}{R}; \quad Y_B = Y_C = \frac{1}{R}.$$

Пусть

$$U_{BC} = a^2 U_{AB}; \quad U_{CA} = a U_{AB}.$$

Из (5.3) получим

$$U_B = \frac{U_{AB}(a^2 + j)}{2 + j}; \quad U_C = \frac{U_{AB}(ja - a^2)}{2 + j}.$$

Отношение модулей этих комплексов даёт

$$\left| \frac{U_B}{U_C} \right| = \left| \frac{a^2 + j}{a(j - a)} \right| = 3,73.$$

Следовательно, лампа, присоединённая к фазе  $B$ , будет светить ярко, а лампа, присоединённая к фазе  $C$ , – тускло.

5.2. Выбираем положительные напряжения для токов и фазных напряжений и отмечаем их стрелками на расчётной схеме рис. 5.28, *a*.

Принимаем, что

$$U_A = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}; \quad U_B = a^2 U_A = a^2 220 \text{ В}; \quad U_C = a U_A = a 220 \text{ В},$$

находим комплексы линейных токов:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_A}{R} = \frac{220}{22} = 10 \text{ А}; \\ \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_B}{-jX_C} = \frac{a^2 220\sqrt{3}}{-j22} = ja^2\sqrt{3}10 \text{ А}; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_C}{jX_L} = \frac{a220\sqrt{3}}{j22} = -ja\sqrt{3}10 \text{ А}. \end{aligned}$$

Находим ток в нулевом проводе:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 10 + j(a^2 - a)\sqrt{3}10 = 40 \text{ А}.$$

Строим на комплексной плоскости векторную диаграмму напряжений и токов (рис. 5.27, *б*).

5.3. Выбираем положительные направления для токов и фазных напряжений и отмечаем их стрелкой на расчётной схеме рис. 5.29, *a*.

Определяем напряжение смещения нейтрали:

$$U_N = U_\phi - \frac{\frac{1}{R} + a\frac{1}{-jX_C} + a^2\frac{1}{jX_L}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{jX_L}} = 220 \frac{\frac{1}{20} + a\frac{1}{-j30} + a^2\frac{1}{j40}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{-j30} + \frac{1}{j40}},$$

но так как

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$U_N = 220 \frac{\frac{1}{2} + j\frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - j\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{1}{2} + j\frac{1}{12}} = 220 \frac{12 - 7\sqrt{3} - j}{12 + 2j} =$$

$$= 110 \frac{-0,11 - j}{6 + j} \text{ В,}$$

и окончательно

$$U_N = (-4,9 - 17,5j) \text{ В.}$$

Находим линейные токи:

$$I_A = \frac{U_{\phi A} - U_N}{R} = \frac{220 - (-4,9 - 17,5j)}{20} = 11,2 + 0,875j \text{ А;}$$

$$I_B = \frac{a^2 U_{\phi A} - U_N}{jX_L} = \frac{a^2 220 - (-4,9 - 17,5j)}{j40} = -4,32 + 2,62j \text{ А;}$$

$$I_C = \frac{a U_{\phi A} - U_N}{-jX_C} = \frac{a 220 - (-4,9 - 17,5j)}{-j30} = -6,9 - 3,5j \text{ А.}$$

5.4. Выбираем положительные напряжения для токов и напряжений на расчётной схеме рис. 5.30, а. Определяем фазные токи:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{R} = \frac{380 e^{j30^\circ}}{22} = 10\sqrt{3} e^{j30^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{-jX_C} = \frac{380 e^{-j90^\circ}}{-j19} = 20 \text{ А;}$$

$$\dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{jX_L} = \frac{380 e^{j150^\circ}}{j19} = 20 e^{j60^\circ} \text{ А.}$$

Определяем линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{AB} = 20 e^{j60^\circ} - 10\sqrt{3} e^{j30^\circ} =$$

$$= 20 \cos 60^\circ + j20 \sin 60^\circ - 10\sqrt{3} \cos 30^\circ - j10\sqrt{3} \sin 30^\circ =$$

$$= 10 - 15 + j(10\sqrt{3} - 5\sqrt{3}) = -5 + j5\sqrt{3} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{BC} = 10\sqrt{3} e^{j30^\circ} - 20 = 15 - 20 + j5\sqrt{3} = -5 + j5\sqrt{3} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AC} = 20 + 10 + 10\sqrt{3} j = 30 + 10\sqrt{3} j \text{ А.}$$

Строим векторную диаграмму токов и векторную диаграмму напряжений (рис. 5.30, б).

5.5. Симметричная система фазных ЭДС  $\dot{E}_0 = 0$ ;  $\dot{E}_1 = \dot{E}$ ;  $\dot{E}_2 = 0$  имеет нейтральную точку, соединённую с землёй через  $Z_0$  и эквивалентные сопротивления  $Z_0 \neq Z_1 \neq Z_2$ . Ввиду того, что реакция ротора на цепь статора, питающего генератора, для прямой и обратной последовательности различна, потоки, созданные токами нулевой последовательности, одновременно во всех трёх фазах направлены к ротору или от него и вынуждены замыкаться от ротора к статору по воздуху в торцевых частях машины, т.е.  $Z_0$  существенно отличается от  $Z_1$  и  $Z_2$  (см. рис. 5.31).

Так как у места короткого замыкания  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$ ,  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ ,  $\dot{I}_C$  несимметричны, то, разложив их на симметричные составляющие

$\dot{U}_0$ ,  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_0$ ,  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ , можно записать:

$$0 = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{U}_0; \quad \dot{E} = \dot{I}_1 Z_1 + \dot{U}_1; \quad 0 = \dot{I}_2 Z_2 + \dot{U}_2. \quad (5.33)$$

Пренебрегая токами нормальной нагрузки по сравнению с токами короткого замыкания, имеем  $\dot{U}_A = 0$ ;  $\dot{I}_B = 0$ ;  $\dot{I}_C = 0$ . А так как  $\dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 0$ , то, суммируя (5.33), получим

$$\dot{E} = \dot{I}_0 Z_0 + \dot{I}_1 Z_1 + \dot{I}_2 Z_2.$$

Приняв во внимание, что при  $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \frac{1}{3} \dot{I}_A,$$

найдем  $\dot{E} = \frac{1}{3} \dot{I}_A (Z_0 + Z_1 + Z_2)$ ,

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{3\dot{E}}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \\ \dot{U}_0 &= -\frac{\dot{I}_A Z_0}{3} = -\frac{\dot{E} Z_0}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \\ \dot{U}_1 &= \dot{E} - \frac{\dot{I}_A Z_1}{3} = \frac{\dot{E}(Z_0 + Z_2)}{Z_0 + Z_1 + Z_2}; \\ \dot{U}_2 &= -\frac{\dot{I}_A Z_2}{3} = -\frac{\dot{E} Z_2}{Z_0 + Z_1 + Z_2}, \end{aligned}$$

после чего легко определяются  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$ . Векторные диаграммы в месте однофазного короткого замыкания фазы  $A$  показаны на рис. 5.36.

Примечание: Сопротивления  $Z_0, Z_1, Z_2$  рассчитываются по конструктивным параметрам электрической машины, которые для большинства оборудования являются справочными величинами.

5.6. Двухфазное короткое замыкание между фазами  $B$  и  $C$  характеризуется следующими условиями:

$$\dot{I}_{KA}^{(2)} = 0; \quad \dot{I}_{KB}^{(2)} = -\dot{I}_{KC}^{(2)}; \quad \dot{U}_{KB}^{(2)} - \dot{U}_{KC}^{(2)} = 0.$$

Так как сумма фазных токов равна нулю, то система является уравновешенной и, следовательно,  $\dot{I}_{KO}^{(2)} = 0$ .

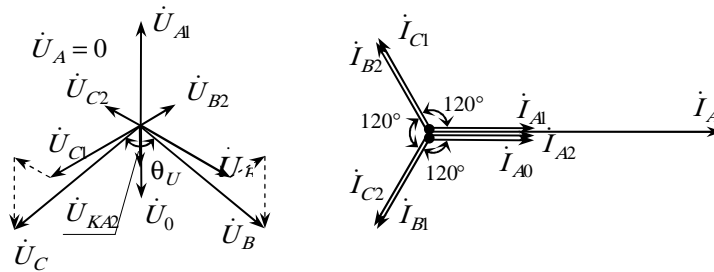


Рис. 5.36

Произведём разложение тока фазы  $A$  на симметричные составляющие:

$$\dot{I}_{KA}^{(2)} = \dot{I}_{KA1}^{(2)} + \dot{I}_{KA2}^{(2)} = 0,$$

откуда

$$\dot{I}_{KA1}^{(2)} = -\dot{I}_{KA2}^{(2)}. \quad (5.34)$$

Исходя из условия  $\dot{U}_{KB}^{(2)} = \dot{U}_{KC}^{(2)}$  и рассматривая его совместно с системой (5.11), можно убедиться в том, что

$$\dot{U}_{KA1}^{(2)} = \dot{U}_{KA2}^{(2)}. \quad (5.35)$$

Исходя из (5.35), запишем равенство

$$\dot{E}_A - \dot{I}_{KA1}^{(2)} jx_{1\Sigma} = -\dot{I}_{KA2}^{(2)} jx_{2\Sigma},$$

Согласно (5.34) получим расчётное выражение для определения тока при двухфазном коротком замыкании:

$$\dot{I}_{KA1}^{(2)} = \frac{\dot{E}_A}{j(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma})}. \quad (5.36)$$

Комплексная форма выражения (5.36) означает, что ток отстаёт от фазной ЭДС на угол  $90^\circ$  (деление на  $j$ ) и по абсолютному значению равен

$$I_{KA1}^{(2)} = \frac{E_A}{j(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma})}. \quad (5.37)$$

Токи в повреждённых фазах  $B$  и  $C$  находим по (5.11) и (5.34):

$$\dot{I}_{KB}^{(2)} = a^2 \dot{I}_{KA1}^{(2)} + a \dot{I}_{KA2}^{(2)} = (a^2 - a) \dot{I}_{KA1}^{(2)} = -j\sqrt{3} \dot{I}_{KA1}^{(2)}; \quad (5.38)$$

$$\dot{I}_{KC}^{(2)} = (a - a^2) \dot{I}_{KA1}^{(2)} = j\sqrt{3} \dot{I}_{KA1}^{(2)}. \quad (5.39)$$

Абсолютное значение полного тока при двухфазном коротком замыкании определится из равенств (5.37) – (5.39):

$$I_K^{(2)} = \frac{\sqrt{3} E_A}{x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma}}. \quad (5.40)$$

На основании (5.40) для момента возникновения короткого замыкания

$$I_K^{(2)''} = \frac{\sqrt{3}E''}{\sqrt{3}(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma})} = \frac{E''}{x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma}}, \quad (5.41)$$

где  $E''$  – сверхпереходная междуфазная ЭДС.

В случае питания короткого замыкания от энергосистемы

$$I^{(2)''} = \frac{\sqrt{3}U_{cp}}{\sqrt{3}(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma})} = \frac{U_{cp}}{x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma}}. \quad (5.42)$$

На рисунке 5.32, б произведено построение симметричных составляющих и полных токов для двухфазного короткого замыкания  $B-C$ .

5.7. Однофазное короткое замыкание на землю одной из фаз, например фазы  $A$ , определяется следующими условиями:

$$\dot{I}_{KA}^{(1)} = 0; \quad \dot{I}_{KB}^{(1)} = 0; \quad \dot{I}_{KC}^{(1)} = 0.$$

Так как токи в двух фазах отсутствуют, то, очевидно, что симметричные составляющие повреждённой фазы  $A$  (рис. 5.33, б) в соответствии с (5.12) равны:

$$\dot{I}_{KA1}^{(1)} = \dot{I}_{KA2}^{(1)} = \dot{I}_{KA0}^{(1)} = \frac{1}{3} \dot{I}_{KA}^{(1)}.$$

Выражая напряжение  $\dot{U}_{KA}^{(1)}$  через симметричные составляющие, получим

$$\dot{U}_{KA}^{(1)} = \dot{U}_{KA1}^{(1)} + \dot{U}_{KA2}^{(1)} + \dot{U}_{KA0}^{(1)} = 0$$

и далее

$$\dot{E}_A - \dot{I}_{KA1}^{(1)} j(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma} + x_{0\Sigma}) = 0,$$

откуда

$$\dot{I}_{KA1}^{(1)} = \frac{\dot{E}_A}{j(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma} + x_{0\Sigma})}. \quad (5.43)$$

Абсолютное значение полного тока короткого замыкания равно

$$I_K^{(1)} = 3I_{K1}^{(1)} = \frac{3E}{x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma} + x_{0\Sigma}}. \quad (5.44)$$

Для начального момента времени

$$I^{(1)''} = \frac{3E''}{\sqrt{3}(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma} + x_{0\Sigma})} = \frac{\sqrt{3}E''}{(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma} + x_{0\Sigma})}. \quad (5.45)$$

где  $E''$  – сверхпереходная междуфазная ЭДС.

При питании от энергосистемы

$$I^{(1)} = \frac{3U_{cp}}{\sqrt{3}(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma} + x_{0\Sigma})} = \frac{\sqrt{3}U_{cp}}{(x_{1\Sigma} + x_{2\Sigma} + x_{0\Sigma})}. \quad (5.46)$$

5.8. Показания вольтметра отличны от нуля, когда он подсоединён к выводам одной и той же обмотки источника энергии, следовательно, фазные обмотки генератора подключены к зажимам 1–2, 3–6, 4–5 и фазное напряжение равно 220 В. Эти обмотки пронумеруем цифрами I, II, III (рис. 5.37). Анализ показаний вольтметра после соединения выводов 1, 3, 4 между собой показывает, что выводы 1 и 4 обмоток I и III одноимённые, а вывод 3 обмотки II – разноимённый. Это ясно из рассмотрения двух вариантов топографических диаграмм фазных и линейных напряжений, соответствующих условию задачи (рис. 5.38). Следовательно, одноимёнными зажимами обмоток, являются зажимы 1, 4, 6 и 2, 5, 3.

При соединении обмоток «звездой» выводы клеммной коробки должны быть соединены, как показано на рис. 5.39, а при соединении «треугольником» так, как показано на рис. 5.40.

Для определения последовательности фаз следует собрать схему фазоуказателя (рис. 5.41). Подключив эту схему к выводам генератора, соединённого, например, «звездой», вольтметром измеряют напряжения на резисторах фазоуказателя. При этом, если считать фазой  $A$  ту, к которой подсоединён конденсатор фазоуказателя, то фазой  $B$  – будет та, к которой подсоединён резистор, напряжение на котором больше.

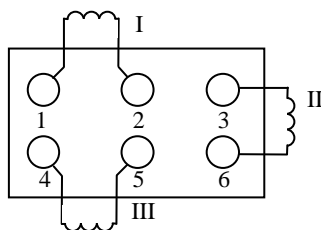


Рис. 5.37

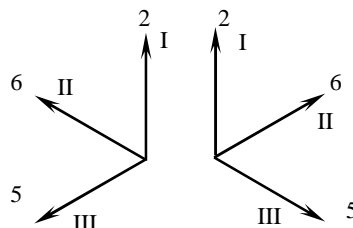


Рис. 5.38

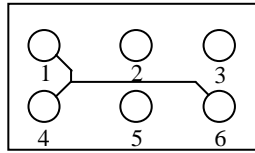


Рис. 5.39

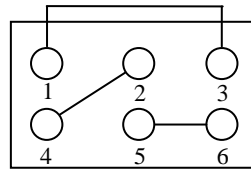


Рис. 5.40

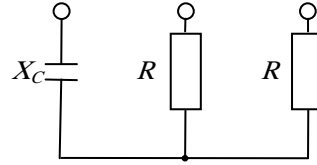


Рис. 5.41

Покажем это, определив напряжения на резисторах фазоуказателя в рассматриваемом случае, при  $X_C = R$ .  
Напряжение между нейтральными точками фазоуказателя и генератора

$$\dot{U}_{0,0} = \frac{\sum \dot{U}_\phi Y}{\sum Y} = \frac{220e^{j0^\circ} \frac{1}{-jX_C} + 220e^{-j120^\circ} \frac{1}{R} + 220e^{j120^\circ} \frac{1}{R}}{\frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = 139e^{j108^\circ}.$$

Напряжение на резисторах фазоуказателя

$$\dot{U}_{B0_1} = \dot{U}_{B0} - \dot{U}_{0,0} = 220e^{-j120^\circ} - 139e^{j108^\circ} = 329e^{-j101,6^\circ}, \text{ В};$$

$$\dot{U}_{C0_1} = \dot{U}_{C0} - \dot{U}_{0,0} = 220e^{j120^\circ} - 139e^{j108^\circ} = 87,8e^{j138,7^\circ}, \text{ В}.$$

Таким образом напряжение на резисторе, подключённом к фазе  $B$  составляет 329 В, а на резисторе, подключённом к фазе  $C$ , – 87,8 В.

5.9.  $\dot{U}_{AO} = 220e^{j0^\circ}$ , В. При этом

$$\dot{U}_{BO} = 220e^{-j60^\circ}, \text{ В}; \quad \dot{U}_{CO} = 220e^{-j120^\circ}, \text{ В}.$$

Фазные напряжения прямой последовательности

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{3} (\dot{U}_{AO} + a\dot{U}_{BO} + a^2\dot{U}_{CO}) = \\ &= \frac{1}{3} (220 + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{-j60^\circ} + e^{j240^\circ} \cdot 220e^{-j120^\circ}) = 73,3 + j126,7 \text{ В}. \end{aligned}$$

Напряжения обратной последовательности

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \frac{1}{3} (\dot{U}_{AO} + a^2\dot{U}_{BO} + a\dot{U}_{CO}) = \\ &= \frac{1}{3} (220 + e^{j240^\circ} \cdot 220e^{-j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220e^{-j120^\circ}) = 73,3 \text{ В}. \end{aligned}$$

Симметричные составляющие фазных токов

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{z_1} = \frac{73,3 + j126,7}{j3} = 42,2 - j24,4 = 48,7e^{-j30^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{z_2} = \frac{73,3}{j1} = -j73,3 \text{ А}.$$

Фазные токи

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 42,2 - j97,7 = 106,3e^{-j66,6^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 = e^{j240^\circ} \cdot 48,7e^{-j30^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 73,3e^{-j90^\circ} = 24,6e^{j30^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 48,7e^{-j30^\circ} + e^{j240^\circ} \cdot 73,3e^{-j90^\circ} = 106,3e^{j126,3^\circ} \text{ А.}$$

При правильном соединении обмоток трансформатора фазные напряжения образуют симметричную звезду, а фазные токи равны

$$\dot{I}'_A = \frac{\dot{U}_{AO}}{Z_1} = \frac{220}{j3} = 73,3e^{-j90^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_B = 73,3e^{-j210^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}'_C = 73,3e^{-j330^\circ} = 73,3e^{j30^\circ} \text{ А.}$$

Векторная диаграмма токов при неправильном и правильном соединении обмоток приведена на рис. 5.42.

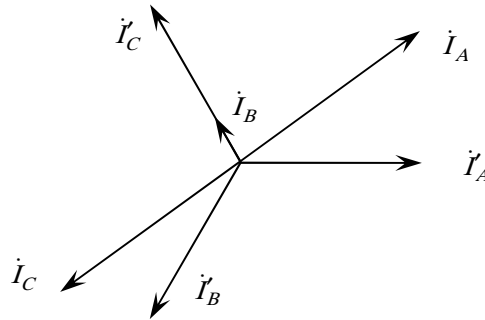


Рис. 5.42

### Задачи для самостоятельного решения

5.11. При производстве работ электромонтер (рис. 5.43) повредил кабель трёхфазной электрической сети с изолированной нейтралью с линейным напряжением  $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{л}} = 380 \text{ В}$  при частоте  $f = 50 \text{ Гц}$  и коснулся инструментом одной из фаз. Ёмкость каждой фазы кабеля относительно земли  $C = 0,1 \text{ мкФ}$ . Определить ток, протекающий по телу электромонтера, приняв сопротивление его тела  $R = 1000 \text{ Ом}$ .

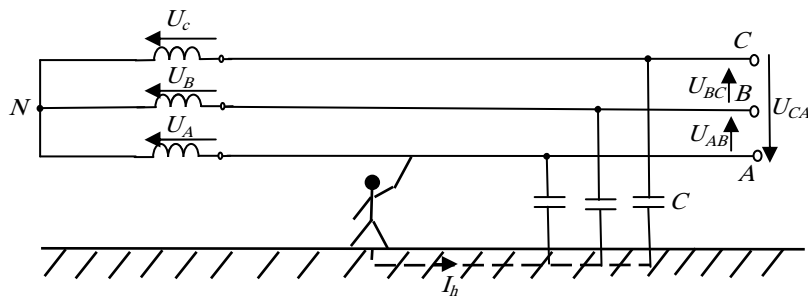


Рис. 5.43

5.12. При ревизии электрооборудования электромонтер, находясь на земле, коснулся линейного провода с линейным напряжением

$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_{\text{лном}} = 380 \text{ В}$ . Сопротивление изоляции проводов  $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \text{ кОм}$ . Определить ток, протекающий по телу человека, сопротивление которого  $R_h = 1000 \text{ Ом}$ . Ёмкость проводов относительно земли пренебречь ввиду их малой напряжённости (рис. 5.44).

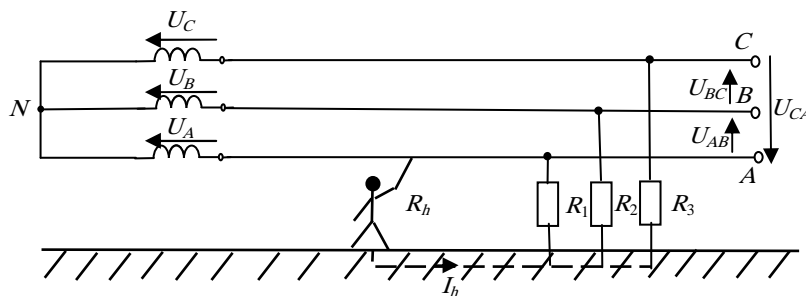


Рис. 5.44

5.13. Определить ток  $I_h$ , протекающий по телу человека в аварийном режиме в трёхфазной симметричной трёхпроводной электрической цепи с изолированной нейтралью при замыкании фазы C на землю через небольшое активное



сопротивление заземления  $R_{3M} = 100$  Ом и прикосновении человека к исправной фазе  $A$  с фазным напряжением  $U_{1\phi \text{ ном}} = 220$  В. Сопротивления изоляции проводников  $R_1 = R_2 = R_3 = 10$  кОм;  $R_h = 1$  кОм (рис. 5.45).

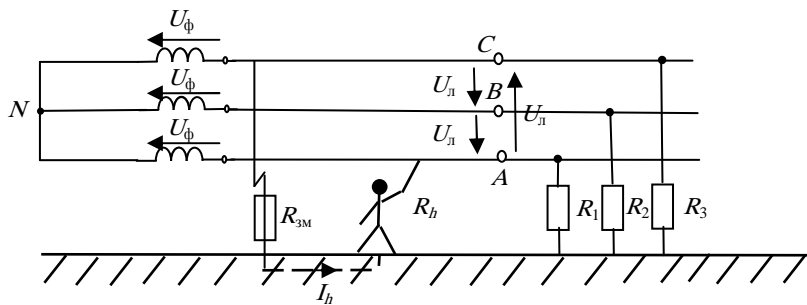


Рис. 5.45

5.14. Три группы осветительных ламп мощностью  $P = 100$  Вт каждая с номинальным напряжением  $U_{\text{ном}} = 220$  В соединены по схеме «звезда» с нейтральным проводом. При этом в фазе  $A$  включено параллельно  $n_1 = 6$  ламп, в фазе  $B$  –  $n_2 = 4$  лампы, в фазе  $C$  –  $n_3 = 2$  лампы. Линейное симметричное напряжение источника питания  $U_l = 380$  В.

Определить фазные сопротивления  $Z_\phi$  и фазные токи  $I_\phi$  потребителя электроэнергии. Построить векторную диаграмму токов и напряжений, определить ток  $I_N$  в нейтральном проводе (рис. 5.46).

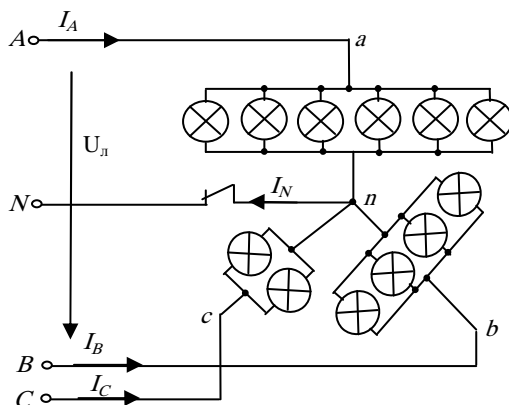


Рис. 5.46

5.15. Определить ток трёхфазного короткого замыкания на выводах генератора.  $S_{\text{ном}} = 15$ .

5.16. Определить токи в линии до и после обрыва нейтрального провода с замыканием в фазе: а)  $A$ ; б)  $B$ . Построить векторные диаграммы, если  $\dot{Z}_A = -j11$  Ом;  $\dot{Z}_B = 22$  Ом;  $\dot{Z}_C = j11$  Ом;  $U_{\text{лин}} = 380$  В (рис. 5.47).

5.17.  $\dot{Z}_A = -j10$  Ом;  $\dot{Z}_B = j10$  Ом;  $\dot{Z}_C = j10$  Ом (рис. 5.48). Определить токи в линии до и после обрыва линейного провода  $B$ , построить векторные диаграммы при  $U_{\text{лин}} = 127$  В,  $U_{\text{лин}} = 220$  В.

5.18. По условию задачи 5.17 найти потребляемую приёмником мощность двумя способами: по показаниям двух ваттметров и по мощности каждой фазы.

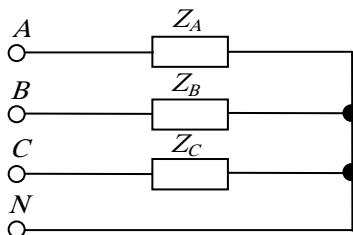


Рис. 5.47

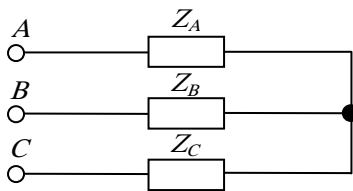


Рис. 5.48

5.19. Определить токи в линии и построить векторную диаграмму, если  $\dot{Z}_A = -j22$  Ом;  $\dot{Z}_B = 11 - j11$  Ом;  $\dot{Z}_C = j44$  Ом;  $U_{\text{лин}} = 220$  В;  $\dot{Z}_N = 8$  Ом (рис. 5.49).

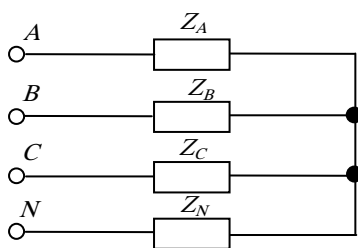


Рис. 5.49

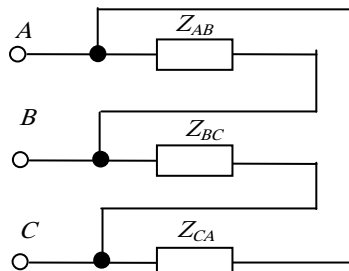


Рис. 5.50

5.20. Определить фазные и линейные токи до и после обрыва нагрузки в фазах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  при условии, что  $\dot{Z}_{AB} = j10$  Ом;  $\dot{Z}_{BC} = -j19$  Ом;  $\dot{Z}_{CA} = 10 + j20$  Ом;  $U_{\text{лин}} = 380$  В (рис. 5.50).

5.21. По условию задачи 5.20 определить суммарную активную мощность нагрузки при помощи двух ваттметров.

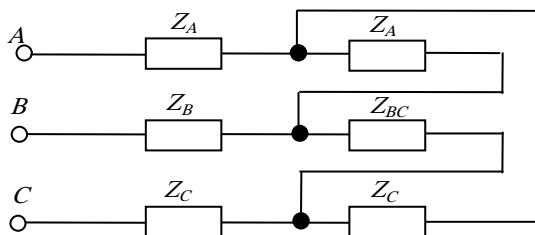


Рис. 5.51

5.22. Определить токи в линии, если  $\dot{Z}_{AB} = 22$  Ом;  $\dot{Z}_{BC} = -j11$  Ом;  $\dot{Z}_{CA} = j22$  Ом;  $\dot{Z}_A = \dot{Z}_B = \dot{Z}_C = 5$  Ом;  $U_{\text{лин}} = 380$  В (рис. 5.51).

5.23. Доказать, что данные схемы можно использовать в качестве фазоуказателя:  $\dot{Z}_A = j22$  Ом;  $\dot{Z}_B = 22$  Ом;  $\dot{Z}_C = 22$  Ом;  $U_{\text{лин}} = 380$  В (рис. 5.52).

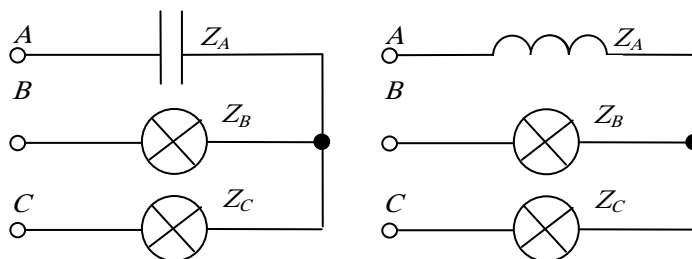


Рис. 5.52

## 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ

Основы теории четырёхполосников (ЧП) заключаются в том, что на основании некоторых обобщённых его параметров находятся токи и напряжения на входе при известных токах и напряжениях на выходе и наоборот. При этом токи и напряжения внутри заданной схемы не рассчитываются.

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе ЧП (рис. 6.1) могут быть записаны в виде шести групп уравнений:

1. Форма  $\| A \|$ :  $\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2$ ;

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

2. Форма  $\| Y \|$ :  $\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2$ ;

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.$$

3. Форма  $\| Z \|$ :  $\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2$ ;

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2.$$

4. Форма  $\| B \|$ :  $\dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1$ ;

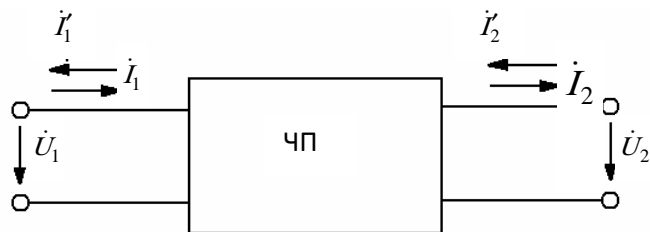
$$\dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1.$$

5. Форма  $\| G \|$ :  $\dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2$ ;

$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2.$$

6. Форма  $\| H \|$ :  $\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2$ ;

$$\dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.$$



**Рис. 6.1**

Коэффициенты каждой системы уравнений четырёхполюсника могут быть выражены через коэффициенты любой другой системы (табл. 6.1).

**Таблица 6.1**

Из формы \n В форму	$\  A \ $	$\  Y \ $	$\  Z \ $	$\  H \ $
$\  A \ $	$A_{11} \quad A_{12}$ $A_{21} \quad A_{22}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{-1}{Y_{21}}$ $\frac{- Y }{Y_{21}} \quad \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{ Z }{Z_{21}}$ $\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{- H }{H_{21}} \quad \frac{-H_{11}}{H_{21}}$ $\frac{-H_{22}}{H_{21}} \quad \frac{-1}{H_{21}}$
$\  Y \ $	$\frac{A_{22}}{A_{21}} \quad \frac{- A }{A_{21}}$ $\frac{-1}{A_{21}} \quad \frac{A_{11}}{A_{21}}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$ $Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{Z_{22}}{ Z } \quad \frac{-Z_{12}}{ Z }$ $\frac{-Z_{21}}{ Z } \quad \frac{Z_{11}}{ Z }$	$\frac{1}{H_{11}} \quad \frac{-H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{ H }{H_{11}}$
$\  Z \ $	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{ A }{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}} \quad \frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{Y_{22}}{ Y } \quad \frac{-Y_{12}}{ Y }$ $\frac{-Y_{21}}{ Y } \quad \frac{Y_{11}}{ Y }$	$Z_{11} \quad Z_{12}$ $Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{ H }{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $\frac{-H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$

$\ H\ $	$\frac{A_2}{A_{22}}$	$\frac{ A }{A_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}}$	$\frac{-Y_2}{Y_{11}}$	$\frac{ Z }{Z_{22}}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$H_{11}$	$H_{12}$
	$\frac{-1}{A_{22}}$	$\frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}}$	$\frac{ Y }{Y_{11}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$H_{21}$	$H_{22}$

В таблице 6.1 обозначено:

$$\|A\| = A_1 A_{22} - A_2 A_{21};$$

$$\|Y\| = Y_{11} Y_{22} - Y_2 Y_{21};$$

$$\|Z\| = Z_{11} Z_{22} - Z_2 Z_{21};$$

$$\|H\| = H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21};$$

- для обратимого ЧП

$$\|A\| = A_1 A_{22} - A_2 A_{21} = 1;$$

$$Y_2 = Y_{21}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad H_{12} = H_{21}; \quad A_2 = A_{21},$$

- для симметричного ЧП

$$A_1 = A_{22}; \quad Y_{11} = Y_{22}; \quad Z_{11} = Z_{22}; \quad H_{11} = H_{22}.$$

В последнем случае независимых коэффициентов только два ( $A_1$  и  $A_2$ ;  $Y_{11}$  и  $Y_{12}$ ;  $Z_{11}$  и  $Z_{12}$ ;  $H_{11}$  и  $H_{12}$ ).

Анализ одиночных ЧП, а также их каскадное (цепочное) соединение, производится в наиболее удобной форме уравнений – форма  $\|A\|$ .

Каскадное (цепочное) соединение нескольких ЧП целесообразно заменить эквивалентным ЧП, коэффициенты которого определяются по известным коэффициентам каскадно соединённых ЧП. Матрица коэффициентов  $\|A\|$  эквивалентного ЧП равна произведению матриц  $\|A\|$  и отдельных ЧП (рис. 6.2):

$$\|A_n\| = \prod_{k=1}^n \|A_k\|.$$

Следует иметь в виду, что матрицы, подлежащие перемножению, записываются в том же порядке, в каком отдельные ЧП включены в схему сложного (эквивалентного) ЧП.

Необходимо отметить, что параллельное соединение ЧП легко заменяется эквивалентным, если уравнения составных ЧП записаны в форме  $\| Y \|$  :

$$\| Y_3 \| = \sum_{k=1}^n \| Y_k \|,$$

а последовательное соединение – в форме  $\| Z \|$  (рис. 6.3, а, б):

$$\| Z_3 \| = \sum_{k=1}^n \| Z_k \|.$$

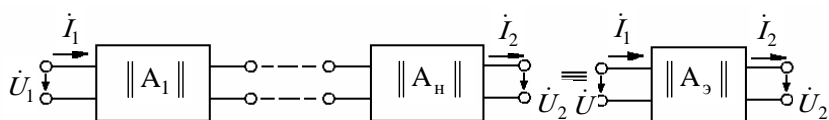


Рис. 6.2

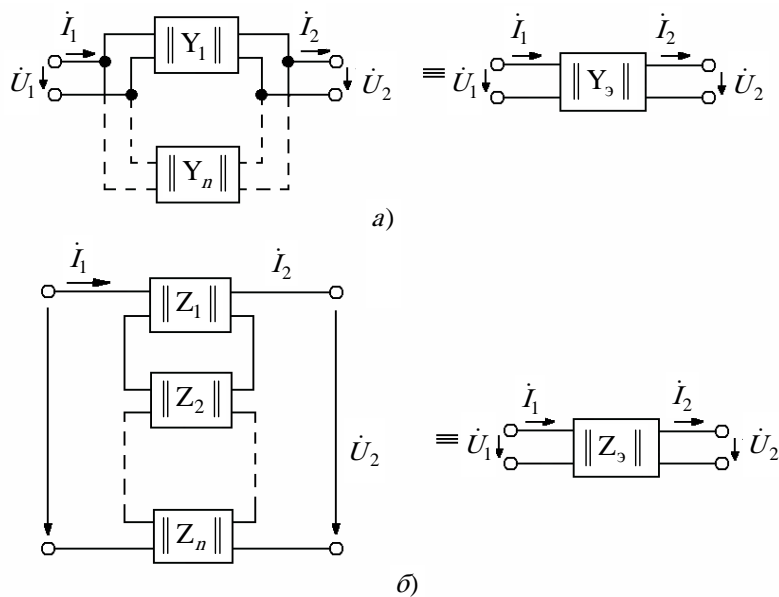
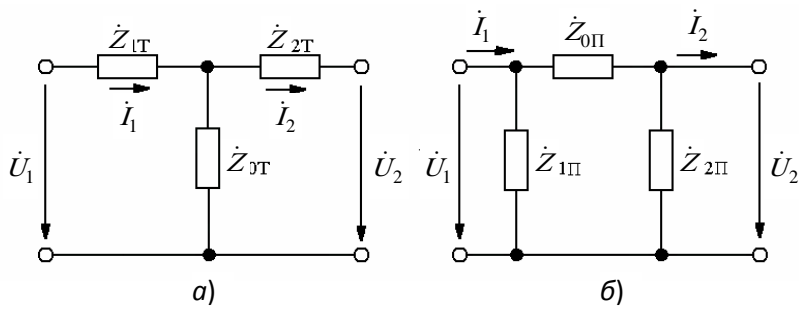


Рис. 6.3

Правила сложения матриц применимы лишь при равенстве входящего и выходящего токов в каждой паре зажимов составных ЧП. Соединение четырёхполюсников, удовлетворяющее этому условию, называется регулярным.

При расчёте сложных электрических цепей, представленных в виде ЧП, часто пользуются схемами замещения – Т-образной (соединение элементов звездой) и П-образной (соединение элементов «треугольником»), рис. 6.4.



**Рис. 6.4**

Между элементами Т- и П-образными схемами замещения и параметрами ЧП существует определенная связь (табл. 6.2).

Таблица 6.2

Кoeffициент	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{21}$	$A_{22}$
ЧП				
Рис. 6.4, а	$1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}$	$\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}$	$\frac{1}{\dot{Z}_{0T}}$	$1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}$
Рис. 6.4, б	$1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{2П}}$	$\dot{Z}_{0П}$	$\frac{\dot{Z}_{0П} + \dot{Z}_{1П} + \dot{Z}_{2П}}{\dot{Z}_{1П}\dot{Z}_{2П}}$	$1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{1П}}$

Пассивный П-образный ЧП может быть преобразован в Т-образный (или наоборот) по правилу преобразования «треугольника» сопротивлений в эквивалентную «звезду».

Следует отметить, что Т-образная и П-образная схемы замещения четырёхполюсника не всегда физически реализуемы. Это означает, что в схеме замещения ЧП параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$  должны быть положительными.

Если в какой-либо ветви схемы такое условие не выполняется, то она считается физически нереализуемой.

Однако данное утверждение не относится к четырёхполюсникам, не содержащим реактивных элементов.

Помимо коэффициентов уравнений ЧП в различных формах широко используются характеристические параметры: постоянная распределения (передачи)  $\gamma = \alpha + j\beta$ , действительная часть которой называется собственным затуханием ЧП, а мнимая часть – коэффициентом фазы, и характеристические сопротивления  $\dot{Z}_{1c}$  и  $\dot{Z}_{2c}$ . Кроме того, часто применяются параметры холостого хода (х.х.) и короткого замыкания (к.з.) входные сопротивления ЧП со стороны входных зажимов ( $\dot{Z}_{1x}$

и  $\dot{Z}_{1к}$ ) и со стороны выходных зажимов ( $\dot{Z}_{2х}$  и  $\dot{Z}_{2к}$ ). Эти параметры связаны между собой соотношением  $\frac{\dot{Z}_{1х}}{\dot{Z}_{1к}} = \frac{\dot{Z}_{2х}}{\dot{Z}_{2к}}$ , которое свидетельствует о том, что в общем виде ЧП характеризуется тремя независимыми коэффициентами – параметрами, а симметричный ЧП – двумя (например,  $\dot{Z}_{1х}$  и  $\dot{Z}_{1к}$ ).

Входным сопротивлением ЧП называется отношение входного напряжения к входному току.

Связь между коэффициентами ЧП, параметрами холостого хода и короткого замыкания и характеристическими параметрами приведена в табл. 6.3. В этой же таблице через вышеназванные параметры даются выражения для расчёта входного сопротивления ЧП при произвольной нагрузке  $\dot{Z}_н$ .

Таблица 6.3

	Коэффициенты	Параметры х.х. и к.з.	Характеристические параметры
Коэффициенты	$A_{11} \quad A_{12}$ $A_{21} \quad A_{22}$	$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1х} Z_{1к}}{Z_{2к} (Z_{1х} - Z_{1к})}}$ $A_{12} = A_{11} Z_{2к}$ $A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1х}}$ $A_{22} = \frac{A_{12}}{Z_{1к}}$	$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1с}}{Z_{2с}}} \operatorname{ch} \gamma$ $A_{12} = \sqrt{Z_{1с} Z_{2с}} \operatorname{sh} \gamma$ $A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{1с} Z_{2с}}} \operatorname{sh} \gamma$ $A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{2с}}{Z_{1с}}} \operatorname{ch} \gamma$
Параметры х.х. и к.з.	$Z_{1х} = \frac{A_{11}}{A_{21}}$ $Z_{1к} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$ $Z_{2х} = \frac{A_{22}}{A_{21}}$ $Z_{2к} = \frac{A_{12}}{A_{11}}$	$Z_{1х} \quad Z_{1к}$ $Z_{2х} \quad Z_{2к}$	$Z_{1х} = Z_{1с} \operatorname{cth} \gamma$ $Z_{1к} = Z_{1с} \operatorname{th} \gamma$ $Z_{2х} = Z_{2с} \operatorname{cth} \gamma$ $Z_{2к} = Z_{2с} \operatorname{th} \gamma$

Продолжение табл. 6.3

	Коэффициенты	Параметры х.х. и к.з.	Характеристические параметры
Характеристические параметры	$Z_{1с} = \sqrt{\frac{A_{11} A_{22}}{A_{21} A_{12}}}$ $Z_{2с} = \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}}$ $\gamma = \ln \left( \sqrt{\frac{A_{11} A_{22}}{A_{21} A_{12}}} + \sqrt{\frac{A_{22} A_{12}}{A_{21} A_{11}}} \right)$	$Z_{1с} = \sqrt{Z_{1х} Z_{1к}}$ $Z_{2с} = \sqrt{Z_{2х} Z_{2к}}$ $\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\frac{Z_{1к}}{Z_{1х}}} = \sqrt{\frac{Z_{2к}}{Z_{2х}}}$	$Z_{1с} \quad Z_{2с}$ $\gamma = \alpha + j\beta$

ВХОДНОЕ сопротивление	$Z_{1ВХ} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}}$	$Z_{1ВХ} = Z_{1X} \frac{Z_{2K} + Z_H}{Z_{2X} + Z_H}$	$Z_{1ВХ} = Z_{1c} \operatorname{tg}(\gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{2c} + Z_H}{Z_{2c} - Z_H})$
	$Z_{2ВХ} = \frac{A_{22}Z_H + A_{21}}{A_{11}Z_H + A_{12}}$	$Z_{2ВХ} = Z_{2X} \frac{Z_{1K} + Z_H}{Z_{1X} + Z_H}$	$Z_{2ВХ} = Z_{2c} \operatorname{tg}(\gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{1c} + Z_H}{Z_{1c} - Z_H})$

### Контрольные вопросы

1. Что называется четырёхполюсником?
2. Как классифицируются четырёхполюсники?
3. Записать шесть форм записи уравнений ЧП, указать для них положительные направления записи токов и напряжений?
4. В каких случаях каждая форма записи имеет преимущества перед остальными?
5. Как опытным путём определить коэффициенты  $A, Z, Y, H$ ?
6. Каким образом, зная коэффициенты одной формы записи, определить коэффициенты другой формы?
7. Какое соединение ЧП называют регулярным?
8. Что понимается под характеристическими параметрами ЧП?
9. Каким образом определяются характеристические сопротивления ЧП?
10. Что называется входным сопротивлением ЧП?
11. С какой целью используют схемы замещения ЧП?
12. Приведите примеры электро-, радиосхем, в которых осуществляется каскадное соединение ЧП?
13. Что называется постоянной передачи?
14. В каких единицах измеряют затухания?

### Задачи

- 6.1. Выразить коэффициенты ЧП в форме  $\|A\|$  через параметры Т-образной схемы замещения (рис. 6.5).

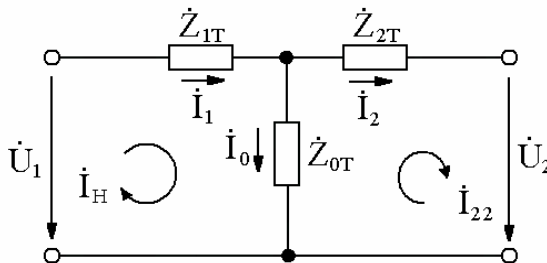


Рис. 6.5

- 6.2. Выразить коэффициенты ЧП в форме  $\|A\|$  через параметры П-образной схемы замещения (рис. 6.6).

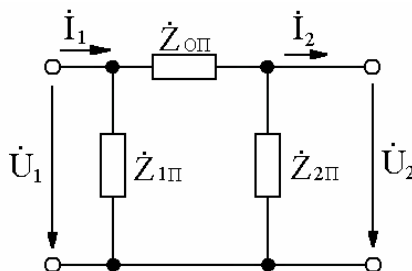


Рис. 6.6



6.3. Определить коэффициенты Т-образного ЧП в форме  $\|A\|$ , если  $\dot{Z}_{1T} = 10 \text{ Ом}$ ;  $\dot{Z}_{0T} = -j10 \text{ Ом}$  и  $\dot{Z}_{2T} = j20 \text{ Ом}$ . Убедиться в справедливости соотношения  $\dot{A}_{11}\dot{A}_{22} - \dot{A}_{12}\dot{A}_{21} = 1$ . Определить комплекс напряжения на разомкнутых вторичных зажимах, если  $\dot{U}_1 = 10 \text{ В}$  (рис. 6.7).

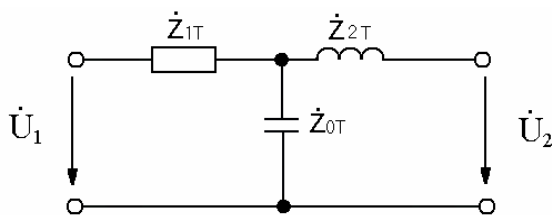


Рис. 6.7

6.4. Известна матрица коэффициентов ЧП. Определить параметры холостого хода и короткого замыкания со стороны первичных и вторичных зажимов. Проверить выполнимость соотношения  $\frac{\dot{Z}_{1x}}{\dot{Z}_{1k}} = \frac{\dot{Z}_{2x}}{\dot{Z}_{2k}}$

6.5. Определить входное сопротивление ЧП со стороны первичных зажимов при подключении к выходным зажимам нагрузочного сопротивления  $Z_H = 2 \text{ Ом}$ , то же при нагрузке со стороны первичных зажимов  $Z_0 = 1 \text{ Ом}$  (рис. 6.8):

$$Z_{1T} = 1 \text{ Ом}; \quad Z_{2T} = j2 \text{ Ом}; \quad Z_{0T} = -j1 \text{ Ом}.$$

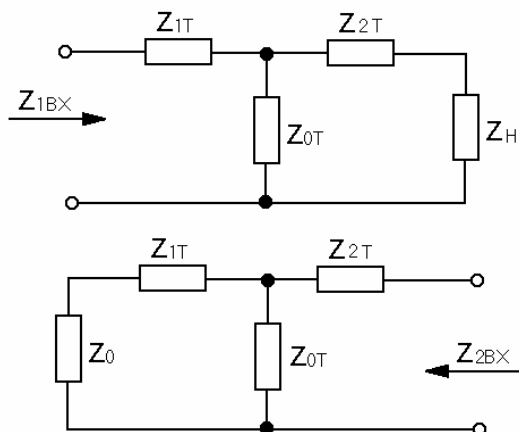


Рис. 6.8

6.6. Известны коэффициенты ЧП:  $A_{11} = 1 + j$ ;  $A_{12} = (4 + j4) \text{ Ом}$ ;  $A_{22} = 0,5$ . Определить, какое активное сопротивление надо подключить к выходным зажимам, чтобы входное сопротивление оказалось активным.

6.7. Измерения, проведённые с несимметричным ЧП при холостом ходе и коротком замыкании при прямой передаче и при холостом ходе при обратной передаче, дали следующие результаты:

$$U_{1x} = 10 \text{ В}, \quad I_{1x} = 0,7 \text{ А}, \quad P_{1x} = 5 \text{ Вт}, \quad \varphi_{1x} < 0;$$

$$U_{1k} = 10 \text{ В}, \quad I_{1k} = 0,45 \text{ А}, \quad P_{1k} = 2 \text{ Вт}, \quad \varphi_{1k} < 0;$$

$$U_{2x} = 10 \text{ В}, \quad I_{2x} = 1,0 \text{ А}, \quad P_{2x} = 0 \text{ Вт}, \quad \varphi_{2x} > 0.$$

Определить коэффициенты ЧП по форме  $\|A\|$  и параметры Т-образной схемы замещения.

6.8. Определить характеристические параметры симметричного ЧП, если  $Z_{1T} = Z_{2T} = 10 \text{ Ом}$ ;  $Z_{0T} = -j10 \text{ Ом}$  (рис. 6.9).

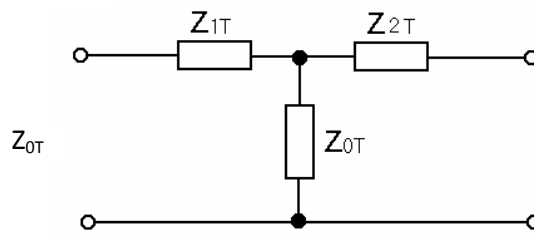


Рис. 6.9

6.9. Четырёхполюсник задачи 6.8 нагружен согласованной нагрузкой. Определить  $\dot{I}_1$ ,  $S_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$ ,  $S_2$ , если  $\dot{U}_1 = 12 \text{ В}$ .

6.10. Определить характеристические параметры ЧП, комплексные сопротивления Т-образной схемы замещения которого равны  $Z_{1T} = 1 \text{ Ом}$ ;  $Z_{2T} = j2 \text{ Ом}$ ;  $Z_{0T} = -j1 \text{ Ом}$ .

6.11. Для передачи наибольшей мощности от генератора нагрузке применяется согласующий симметричный ЧП, включаемый между генератором и нагрузкой (рис. 6.10). Найти коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_{21}$  и  $A_{22}$  этого ЧП; рассчитать параметры Т-образной схемы замещения и определить мощность нагрузки при её подключении непосредственно к генератору и через согласующий ЧП, если  $\dot{E} = 130 \text{ В}$ ;  $Z_H = 25 \text{ Ом}$ ;  $Z_j = 1 \text{ Ом}$ .

6.12. Определить коэффициент трансформации идеального трансформатора, включаемого между генератором с внутренним сопротивлением  $Z_0 = (1 + j2) \text{ Ом}$  и нагрузкой  $Z_H = (100 - j200) \text{ Ом}$ , с целью передачи в нагрузку максимальной мощности.

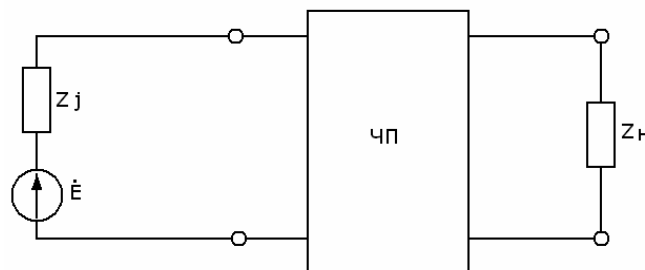
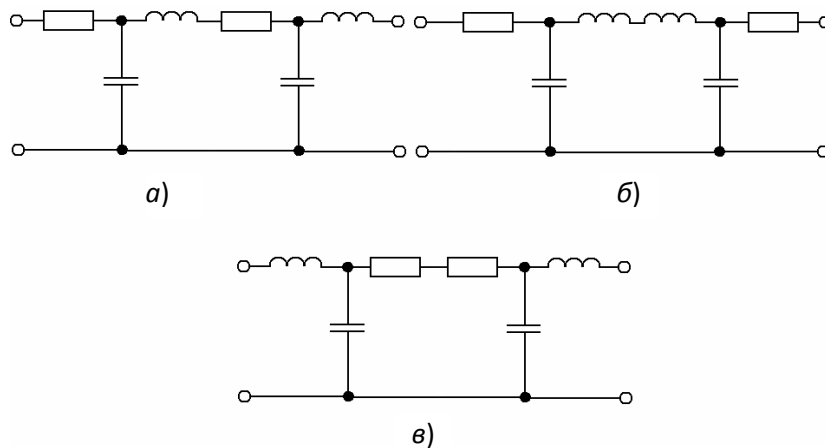


Рис. 6.10

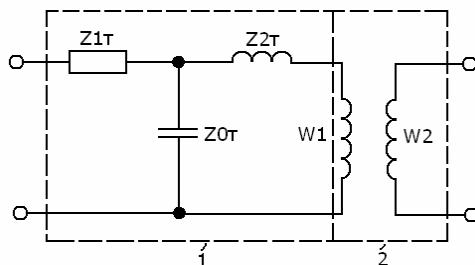
6.13. Два одинаковых ЧП из задачи 6.5 соединены каскадно по схемам, приведённым на рис. 6.11. Определить коэффициенты  $\|A\|$  эквивалентного ЧП для каждого из случаев.



**Рис. 6.11**

6.14. Заменить изображенный на рис. 6.12 ЧП эквивалентной Т-образной схемой замещения, если  $Z_{11} = 1$  Ом;  $Z_{2T} = 2$  Ом;

$$Z_{0T} = -j1 \text{ Ом}; \quad n = \frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{2}.$$



**Рис. 6.12**

6.15. Два одинаковых ЧП из задачи 6.5 соединены последовательно. Начертить схему регулярного соединения и определить коэффициенты эквивалентного ЧП.

6.16. Два одинаковых ЧП из задачи 6.5 соединены параллельно. Начертить схему регулярного соединения и определить коэффициенты  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  эквивалентного ЧП.

### Ответы, решения и методические указания

6.1. *Первый способ.* Использование уравнений Кирхгофа

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{1T} \dot{I}_1 + \dot{Z}_{2T} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_0 + \dot{I}_2. \end{cases} \quad (6.1) \quad (6.2)$$

Сравним (6.1) и (6.2) с уравнением ЧП в форме  $\| A \|$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_1 \dot{U}_2 + (6.3); \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \dot{U}_2 \quad (6.4). \end{cases}$$

В уравнении (6.2) необходимо  $\dot{I}_0$  заменить через  $\dot{I}_2$  или  $\dot{U}_2$  и параметры схемы замещения, а в уравнении (6.1) необходимо избавиться от  $\dot{I}_1$ . Так как

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_2 + Z_{2T}\dot{I}_2}{Z_{0T}};$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{Z_{0T}} + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}} \dot{I}_2 + \dot{I}_2 = \frac{1}{Z_{0T}} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}}\right) \dot{I}_2,$$

то, сравнив с (6.4), получим  $\dot{A}_{21} = \frac{1}{Z_{0T}}$ ;  $\dot{A}_{22} = 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}}$ .

Подставим выражение для тока  $\dot{I}_1$  в (6.1):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{Z}_{1T} \left[ \frac{1}{Z_{0T}} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}}\right) \dot{I}_2 \right] + \dot{Z}_{2T} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = \\ &= \left(1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{0T}}\right) \dot{U}_2 + \left(\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{Z_{1T}Z_{2T}}{Z_{0T}}\right) \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Сравнив это выражение с (6.3), получим

$$\dot{A}_{11} = 1 + \frac{Z_{1T}}{Z_{0T}}; \quad \dot{A}_{12} = \dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{Z_{1T}Z_{2T}}{Z_{0T}}.$$

**Второй способ.** Использование метода контурных токов.

Уравнения для двух независимых контуров

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1(\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{0T}) - \dot{I}_2\dot{Z}_{0T}; \\ -\dot{U}_2 = -\dot{I}_1\dot{Z}_{0T} + \dot{I}_2(\dot{Z}_{2T} + \dot{Z}_{0T}). \end{cases} \quad (6.5)$$

Из (6.5) найдём

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{Z_{0T}} \dot{U}_2 + \frac{Z_{2T}Z_{0T}}{Z_{0T}} \dot{I}_2 + \dot{I}_2 = \frac{1}{Z_{0T}} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}}\right) \dot{I}_2, \quad (6.6)$$

откуда

$$\dot{A}_{21} = \frac{1}{Z_{0T}}; \quad \dot{A}_{22} = 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}}. \quad (6.7)$$

Подставив выражение для тока  $\dot{I}_1$  в (6.5), получим

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \left( \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_{0T}} + I_2 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}} I_2 \right) (\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{0T}) I_2 \dot{Z}_{0T} = \\ &= \left( 1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}} \right) \dot{U}_2 + \left( \dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T} \dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}} \right) I_2. \end{aligned}$$

(6.8)

Сравнив это выражение с (6.3), получим

$$A_1 = 1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}; \quad A_2 = \dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T} \dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}.$$

6.2. Применим **третий способ** определения коэффициентов. Из уравнений ЧП формы  $\|A\|$  при  $I_2 \neq 0$  (режим холостого хода при прямой передаче) следует, что

$$\dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{I}_{2K}}; \quad (6.9)$$

$$\dot{A}_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_{1K}}{\dot{I}_{2K}}. \quad (6.10)$$

Для П-образного ЧП при холостом ходе и прямой передаче (рис. 6.6)

$$\dot{U}_{2x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{Z}_{0П} \dot{Z}_{2П}} \dot{Z}_{2П} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{Z}_{1П}} + \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{Z}_{0П} \dot{Z}_{2П}}.$$

В соответствии с (6.7) и (6.8) получим

$$A_1 = \frac{\dot{Z}_{0П} + \dot{Z}_{2П}}{\dot{Z}_{2П}} = 1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{2П}};$$

$$A_{21} = \frac{\dot{Z}_{1П} + \dot{Z}_{2П} + \dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{1П} \dot{Z}_{2П}} = \frac{1}{\dot{Z}_{2П}} + \frac{1}{\dot{Z}_{1П}} + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{1П} \dot{Z}_{2П}}.$$

При коротком замыкании и прямой передаче

$$\dot{I}_{1K} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{Z}_{1П}} + \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{Z}_{0П}} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\frac{\dot{Z}_{1П} \dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{1П} + \dot{Z}_{0П}}}; \quad \dot{I}_{2K} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{Z}_{0П}}.$$

В соответствии с (6.9) и (6.10) получим

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{2к}} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{Z}_{0П}}} = \dot{Z}_{0П};$$

$$A_{22} = \frac{\dot{I}_{2к}}{\dot{I}_{2к}} = \frac{\dot{U}_{1к}(\dot{Z}_{0П} + \dot{Z}_{1П})}{\frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{Z}_{0П}}} = 1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{1П}}.$$

Из выражений (6.7) – (6.10) ясен смысл коэффициентов ЧП в форме  $\|A\|$ :

$A_{11}$  – коэффициент передачи ЧП по напряжению в режиме холостого хода;

$A_{22}$  – коэффициент передачи ЧП по току в режиме короткого замыкания;

$A_{11}$ ,  $A_{22}$  – передачи соответственно по напряжению и току в режимах холостого хода и короткого замыкания;

$A_{12}$  – величина, обратная передаточной проводимости в режиме короткого замыкания. Размерность – Ом;

$A_{21}$  – величина, обратная передаточному сопротивлению в режиме холостого хода. Размерность – См.

6.3.

$$1) A_{11} = \sqrt{2}e^{j45^\circ}; \quad A_{22} = \sqrt{50}e^{j116^\circ 30'};$$

$$A_{21} = 0,1e^{j90^\circ}; \quad A_{12} = -1.$$

$$2) U_2 = 50\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ В.}$$

6.4. Использовать формулы из табл. 6.2.

$$\dot{Z}_{1х} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом}; \quad \dot{Z}_{1к} = \sqrt{5}e^{-j63^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$\dot{Z}_{2х} = e^{j90^\circ} \text{ Ом}; \quad \dot{Z}_{2к} = \sqrt{2,5}e^{j71^\circ 35'} \text{ Ом.}$$

6.5.

$$\dot{Z}_{1вх} = 1,85e^{-j40^\circ 35'}; \quad \dot{Z}_{2вх} = 1,27e^{j71^\circ 30'}.$$

6.6.

1) Найдём неизвестный четвёртый коэффициент ЧП:

$$A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}} = \frac{(1+j)0,5+1}{4+j4} = \frac{-0,5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}}{4\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = j0,125 \text{ Ом.}$$

2) Запишем выражение для определения входного ЧП при нагрузке  $Z_H = R_H$ :

$$Z_{1вх} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}} = \frac{(1+j)R_H + 4 + j4^\circ}{j0,125R_H + 0,5} = \frac{(4 + R_H) + j(4 + R_H)}{0,5 + j0,125R_H}.$$

Умножаем числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное знаменателю

$$Z_{1вх} = \frac{2 + R_H + 0,125R_H^2 + j(2 - 0,125R_H^2)}{0,25 + 0,125^2 R_H^2}.$$

По условию  $Z_{1\text{вх}} = R_{1\text{вх}}$ , следовательно,  $I_m\{Z_{1\text{вх}}\} = 0$ , т.е.

$$\frac{2 - 0,125R_{\text{н}}^2}{0,25 + 0,125^2 R_{\text{н}}^2} = 0,$$

откуда  $R_{\text{н}} = 4 \text{ Ом}$ .

6.7.

1) Определяем модуль и аргумент входного сопротивления ЧП при прямом холостом ходе:

$$Z_{1\text{x}} = \frac{U_{1\text{x}}}{I_{1\text{x}}} = \frac{10}{0,7} = 14,1 \text{ Ом};$$

$$\varphi_{1\text{x}} = \arccos \frac{P_{1\text{x}}}{U_{1\text{x}} I_{1\text{x}}} = \arccos \frac{5,0}{10 \cdot 0,7} = \arccos 0,707 = 45^\circ;$$

$$\dot{Z}_{1\text{x}} = 14,1 e^{-j45^\circ} = (10 - j10) \text{ Ом}.$$

Аналогично находим

$$Z_{1\text{k}} = 10 - j20 = 22,4 e^{-j63^\circ 30'}$$

$$Z_{2\text{x}} = j10 = 10 e^{j90^\circ} \text{ Ом}.$$

2) Используя соотношение между параметрами холостого хода и короткого замыкания, находим  $Z_{2\text{k}}$ :

$$Z_{2\text{k}} = 15,81 e^{-j71^\circ 30'} = (5 + j15) \text{ Ом}.$$

3) По формулам, приведённым в табл. 6.3, находим коэффициенты ЧП: по вычисленным параметрам холостого хода и короткого замыкания:

$$A_1 = \sqrt{\frac{Z_{1\text{x}} Z_{1\text{k}}}{Z_{2\text{k}}(Z_{1\text{x}} - Z_{1\text{k}})}} = \sqrt{\frac{14,1 e^{-j45^\circ} \cdot 22,4 e^{-j63^\circ 30'}}{15,81 e^{-j71^\circ 30'}(10 - j10 + j20)}} = \pm(1 + j);$$

$$A_2 = A_1 Z_{2\text{k}} = \pm(1 + j)(5 + j15) = \pm 22,4 e^{j126^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$A_{21} = \frac{A_1}{Z_{1\text{x}}} = \frac{\pm(1 + j)}{10 - j10} = \pm 0,1 \text{ Ом};$$

$$A_{22} = \frac{A_2}{Z_{1\text{k}}} = \frac{\pm 22,4 e^{j126^\circ 30'}}{22,4 e^{-j63^\circ 30'}} = \pm(-1).$$

4) Определим параметры T-образной схемы замещения:

$$Z_{0\text{T}} = \frac{1}{A_{21}} = \frac{1}{\pm j0,1} = \pm j10 \text{ Ом};$$

$$Z_{1\text{T}} = \frac{A_1 - 1}{A_{21}} = \frac{\pm(1 + j) - 1}{\pm j0,1} = [10; (-10 - j20)] \text{ Ом};$$

$$Z_{2\text{T}} = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} = \frac{\pm(-1) - 1}{\pm j0,1} = (j20; 0) \text{ Ом}.$$

5) T-образная схема замещения, соответствующая верхнему знаку полученных параметров, представлена на рис. 6.13. Схему, соответствующую нижнему знаку, в параметрах реализовать невозможно, так как активное сопротивление в левом плече схемы на рис. 6.13 должно быть отрицательным ( $Z_{1\text{T}} = -10 - j20$ ) Ом.

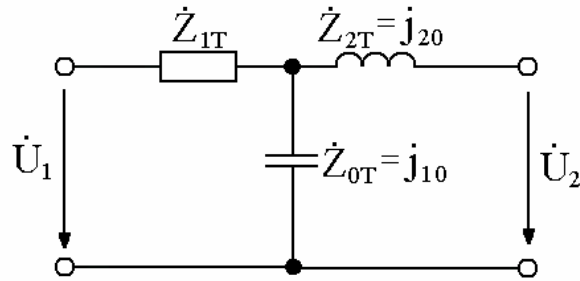


Рис. 6.13

6.8.

$$\dot{Z}_{1c} = \dot{Z}_{2c} = Z_c = 14,95e^{-j31^\circ 45'} \text{ Ом};$$

$$\gamma = \ln 2,9e^{j0,9}; \quad \alpha = 1,06 \text{ Нп}; \quad \beta = 51^\circ 45'$$

6.9. Данные взять из решённой задачи 6.8:

$$\dot{I}_1 = 0,8e^{j31^\circ 45'} \text{ А}; \quad S_1 = 9,6 \text{ В}\cdot\text{А}; \quad \dot{U}_2 = 4,1e^{j51^\circ 45'} \text{ В};$$

$$I_2 = 0,28e^{-j20^\circ} \text{ А}; \quad S_2 = 1,15 \text{ В}\cdot\text{А}.$$

6.10.

**Первый способ.** Использовать коэффициенты ЧП в форме  $\|A\|$ , найденные в задаче 6.5.

**Второй способ.** Использовать параметры холостого хода и короткого замыкания, которые были ранее найдены в задаче 6.4:

$$\dot{Z}_{1c} = 1,78e^{-j54^\circ 15'} \text{ Ом}; \quad \dot{Z}_{2c} = 1,26e^{-j80^\circ 48'} \text{ Ом}; \quad \gamma = \ln 2,68e^{-j72^\circ 35'};$$

$$\alpha = 0,985 \text{ Нп}; \quad \beta = -1,27 \text{ рад}.$$

6.11.

1) Найдём коэффициенты ЧП, исходя из следующих уравнений:

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{A_1 Z_H + A_2}{A_{21} Z_H + A_{22}}; \quad (6.11)$$

$$Z_{2\text{вх}} = \frac{A_{22} Z_0 + A_2}{A_{21} Z_0 + A_1}; \quad (6.12)$$

$$A_1 = A_{22}; \quad (6.13)$$

$$A_2 A_{21} = 1. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.11) отражает условие согласования внутреннего сопротивления генератора  $Z_0 = 1 \text{ Ом}$  с входным сопротивлением ЧП, нагруженного сопротивлением  $Z_H = 25 \text{ Ом}$ .

Уравнение (6.12) отражает условие согласования нагрузочного сопротивления  $Z_H = 25 \text{ Ом}$  с входным сопротивлением ЧП со стороны вторичных зажимов при подключении к первичным зажимам сопротивления  $Z_0 = 1 \text{ Ом}$ .

Уравнение (6.13) выражает условие симметрии ЧП, а (6.14) – связь между коэффициентами.

Решая совместно уравнения (6.11) – (6.14), получим

$$A_1 = A_{22} = 0; \quad A_2 = -\frac{1}{A_{21}} = \pm j5 \text{ Ом}.$$

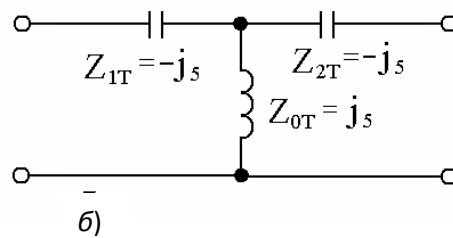
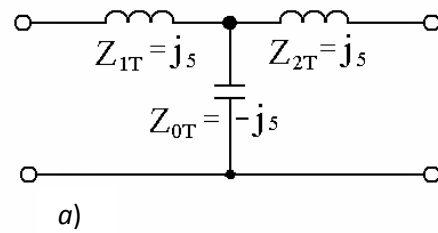
2) Определяем комплексные сопротивления Т-образной схемы замещения:



$$Z_{0T} = \frac{1}{A_{21}} = \pm j5 \text{ Ом}; 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}} = A_{22}; 1 + \frac{Z_{2T}}{Z_{0T}} = A_{22};$$

$$Z_{2T} = Z_{1T} = -1 \cdot Z_{0T} = \pm j5 \text{ Ом}.$$

Так как сопротивления элементов схемы оказались реактивными, то эта схема может быть реализована двумя способами (рис. 6.14).



**Рис. 6.14**

3. Мощность нагрузки, подключённой непосредственно к генератору:

$$P'_H = I^2 R_H = \left( \frac{13}{1+25} \right)^2 \cdot 25 = 6,25 \text{ Вт}.$$

4. Для определения мощности нагрузки, подключённой через согласующий ЧП, необходимо предварительно найти  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_0 + Z_{\text{вх}}} = \frac{13}{1+1} = 6,5 \text{ А};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_{0T}}{Z_{0T} + Z_{2T} + Z_H} = 6,5 \frac{-j5}{-j5 + j5 + 25} = -j1,3 \text{ А};$$

$$P''_H = \dot{I}_2^2 R_H = 1,3^2 \cdot 25 = 42,25 \text{ Вт}.$$

6.12. Для передачи большей мощности от генератора в нагрузку требуется, чтобы входное сопротивление идеального трансформатора с подключённым к вторичной обмотке нагрузочным сопротивлением  $Z_H$  было равно сопряжённому комплексу внутреннего сопротивления генератора,  $n = 1/10$ .

6.13.

a)  $A_{11} = -2 + j;$   $A_{12} = (-2 - j) \text{ Ом};$

$A_{21} = -1 \text{ Ом};$   $A_{22} = (-1 - j).$

б)  $A_{11} = (-3 - j2);$   $A_{12} = -j2 \text{ Ом};$

$A_{21} = (-6 + j2) \text{ Ом};$   $A_{22} = (-3 - j2).$

в)  $A_{11} = (-3 - j2);$   $A_{12} = (-2 + j2) \text{ Ом};$

$A_{21} = (2 - j4) \text{ Ом};$   $A_{22} = (-3 - j2).$

6.14.

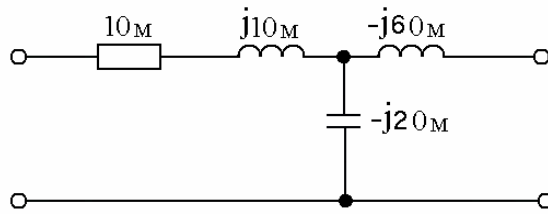


Рис. 6.15

6.15.

$$A_{11} = 1,41e^{j45^\circ}; \quad A_{12} = (-2 + j4) \text{ Ом};$$

$$A_{21} = j0,5 \text{ Ом}; \quad A_{22} = -1.$$

6.16. Составим схему эквивалентного ЧП (рис. 6.16).

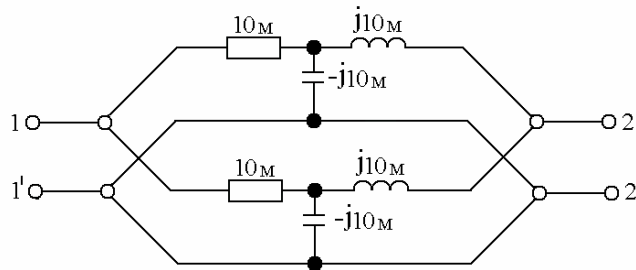


Рис. 6.16

При параллельном соединении ЧП используется форма  $\|Y\|$  уравнений ЧП. Матрица эквивалентного ЧП  $\|Y_3\|$  равна сумме матриц составных ЧП:

$$\|Y_3\| = \|Y'\| + \|Y''\|.$$

Матрицы  $\|Y'\|$  и  $\|Y''\|$  получим из матрицы  $\|A\|$  по формулам, приведённым в табл. 6.1:

$$\|Y'\| = \|Y''\| = \begin{Bmatrix} \frac{A_{22} - |A|}{A_{12}} & \frac{-|A|}{A_{12}} \\ \frac{1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-1}{-1 + j2} & \frac{-1}{-1 + j2} \\ \frac{-1}{-1 + j2} & \frac{1 + j2}{-1 + j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,2 + j0,4 & 0,2 + j0,4 \\ 0,2 + j0,4 & 0,2 - j0,6 \end{Bmatrix}.$$

Матрица эквивалентного ЧП

$$\|Y_3\| = \|Y'\| + \|Y''\| = \begin{Bmatrix} 0,4 + j0,8 & 0,4 + j0,8 \\ 0,4 + j0,8 & 0,4 - j1,2 \end{Bmatrix}.$$

Переходим к матрице формы  $\|A_3\|$ :

$$\|A_3\| = \begin{Bmatrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{12}} & \frac{1}{Y_{21}} \\ -1 & -Y_{11} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-0,4 + j1,2}{-0,4 + j0,8} & \frac{-1}{-0,4 + j0,8} \\ \frac{-(0,4 + j0,8)(0,4 - j1,2) + (0,4 + j0,8)^2}{0,4 + j0,8} & \frac{-0,4 - j0,8}{0,4 + j0,8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + j & -0,5 + j \\ j2 & -1 \end{Bmatrix}.$$

Проверка.  $A_{11}^3 A_{22}^3 - A_{12}^3 A_{21}^3 = (1 + j)(-1) - j2(-0,5 + j) = 1.$

При параллельном соединении двух одинаковых ЧП коэффициенты  $A_{11}$  и  $A_{22}$  не изменяются, а коэффициенты  $A_{12}$  и  $A_{21}$  изменяются в два раза, причём  $A_{12}$ , имеющий размерность сопротивления, уменьшается в два раза, а  $A_{21}$ , имеющий размерность проводимости, увеличится в два раза.

## 7. РЕАКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ ТИПА *K*

Реактивным фильтром называется реактивный четырёхполюсник, пропускающий некоторую определённую полосу частот в согласованном режиме без затухания; вне этой полосы затухание велико. Полоса частот, при которых затухание отсутствует, называется полосой пропускания фильтра. Остальную область частот составляет полоса задерживания (или затухания).

Схемы Г-, Т- и П-образных фильтров показаны на рис. 7.1 – 7.4:

рис. 7.1 – нижних частот (ФНЧ); рис. 7.2 – верхних частот (ФВЧ);

рис. 7.3 – полосовых (ПФ); рис. 7.4 – заграждающих (ЗФ).

Частотные характеристики  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $Z_T$  и  $Z_{\Pi}$  рассматриваемых фильтров типа *K* изображены на рис. 7.5 – 7.8:

рис. 7.5 – ФНЧ; рис. 7.6 – ФВЧ; рис. 7.7 – ПФ; рис. 7.8 – ЗФ.

Расчётные выражения основных характеристик и параметров фильтров сведены в табл. 7.1 и 7.2.

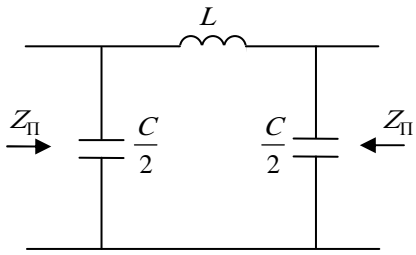
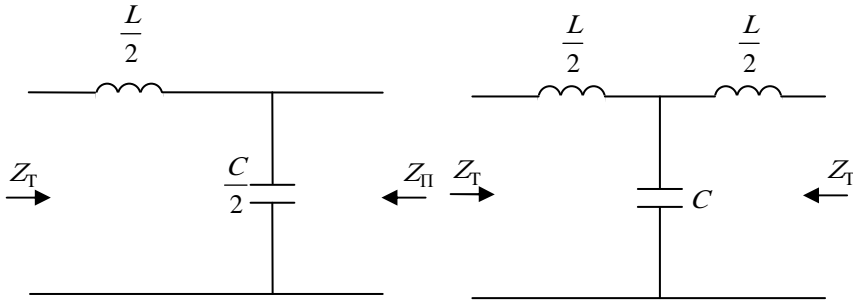


Рис. 7.1

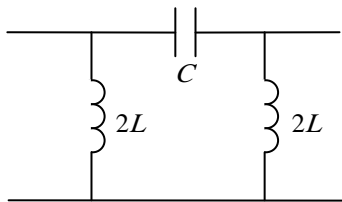
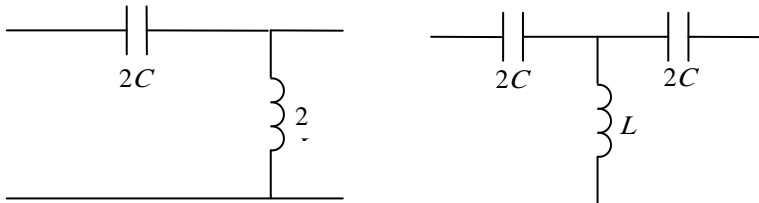
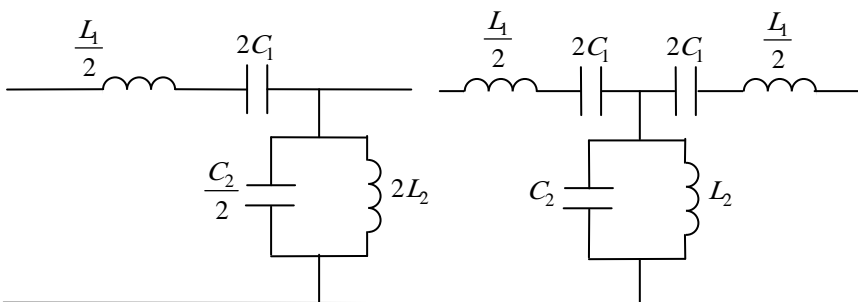


Рис. 7.2



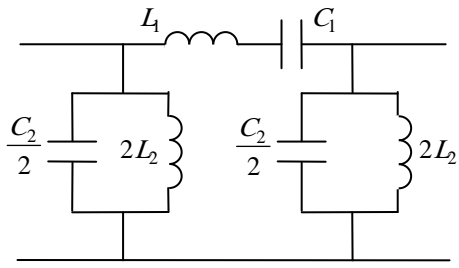


Рис. 7.3

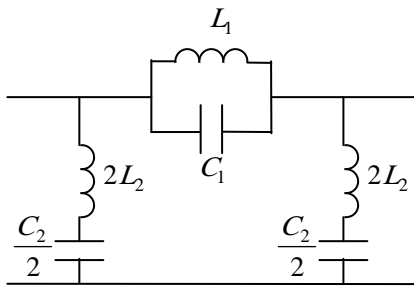
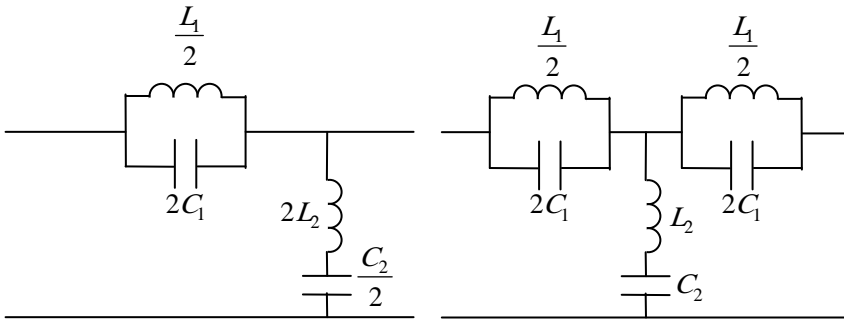


Рис. 7.4

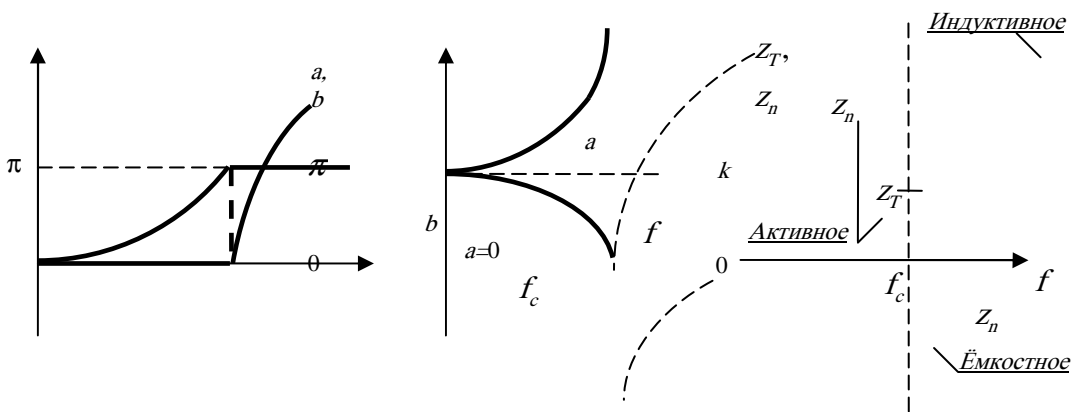


Рис. 7.5

Ошибка!

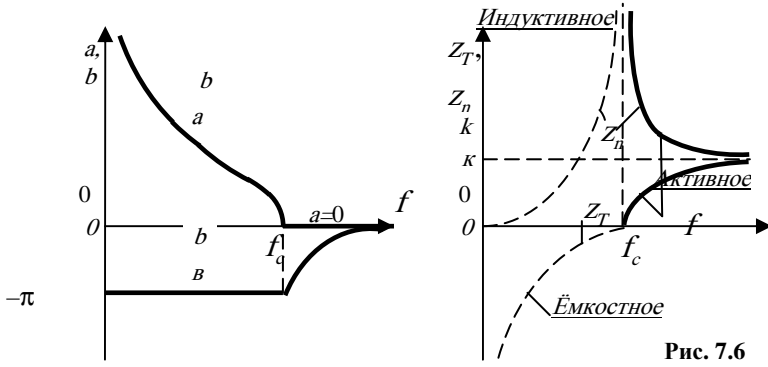


Рис. 7.6

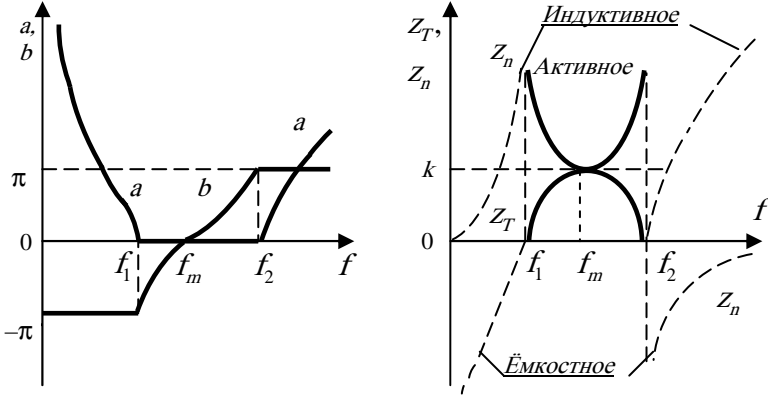


Рис. 7.7

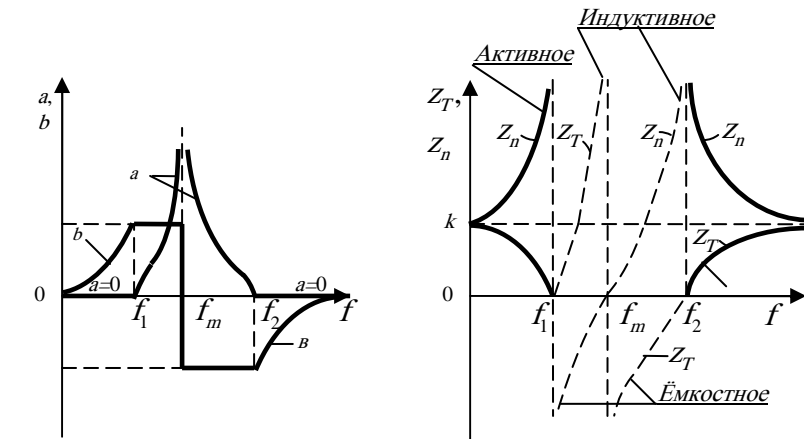


Рис. 7.8

### 7.1. Основные характеристики фильтров

Характеристика		Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
Полоса пропускания	$\sin \frac{b}{2}$ при $a = 0$	$\frac{f}{f_c}$	$-\frac{f_c}{f}$	$F$	$-\frac{1}{F}$
Полоса задерживания	$\operatorname{ch} \frac{a}{2}$ при $b = 0$	$\frac{f}{f_c}$	$\frac{f_c}{f}$	$ F $	$\frac{1}{ F }$
		$\pi$	$-\pi$	$\mp \pi$	$\pm \pi$
$Z_T$		$K \sqrt{1 + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}$	$K \sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{jf}\right)^2}$	$K \sqrt{1 + (jF)^2}$	$K \sqrt{1 + \left(\frac{1}{jF}\right)^2}$
$Z_n$		$\frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}}$	$\frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_c}{jf}\right)^2}}$	$\frac{K}{\sqrt{1 + (jF)^2}}$	$\frac{K}{\sqrt{1 + \frac{1}{(jF)^2}}}$

$K$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$	$\sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}$
-----	----------------------	----------------------	---	---

Примечание:  $f_m = \sqrt{f_1 f_2}$ ,  $F = \frac{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}}$ .

## 7.2. Расчётные параметры фильтров

Фильтр нижних частот	Фильтр верхних частот	Полосовой фильтр	Заграждающий фильтр
$L = -\frac{K}{\pi f_c}$	$L = \frac{K}{4\pi f_c}$	$L_1 = \frac{K}{\pi(f_2 - f_1)}$ ; $L_2 = \frac{K(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2}$	$L_1 = \frac{K(f_2 - f_1)}{\pi f_1 f_2}$ ; $L_2 = \frac{K}{4\pi(f_2 - f_1)}$
$C = \frac{1}{\pi f_c K}$	$C = \frac{1}{4\pi f_c K}$	$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi K f_1 f_2}$ ; $C_2 = \frac{1}{\pi K(f_2 - f_1)}$	$C_1 = \frac{1}{4\pi K(f_2 - f_1)}$ ; $C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi K f_1 f_2}$
$f_c = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}}$	$f_c = \frac{1}{4\pi \sqrt{LC}}$	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2} + \frac{1}{L_1 C_1}} \mp \sqrt{\frac{1}{L_1 C_2}} \right]$	$f_{1,2} = \frac{1}{8\pi} \left[ \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1} + \frac{1}{L_1 C_1}} \mp \sqrt{\frac{1}{L_2 C_1}} \right]$

### Задачи

7.1. Определить элементы ФНЧ типа  $K$ , предназначенного для работы на нагрузку  $r = 1000$  Ом и обладающего частотой среза  $f_c = 2000$  Гц. Изобразить Т- и П-образную схемы фильтра.

7.2. ФНЧ типа  $K$  собран из катушки, индуктивность которой 0,01 Гн, и двух конденсаторов ёмкостью 0,5 мкФ каждый. Определить частоту среза этого фильтра и номинальное характеристическое сопротивление.

7.3. Сколько звеньев фильтра задачи 7.2 следует включить каскадно, чтобы при частоте  $f = 10$  кГц получить затухание не менее 10 Нп.

7.4. Рассчитать и построить зависимости  $\frac{U_2}{U_1}$  и  $\psi_{U_1} - \psi_{U_2}$  от частоты для П-образного ФНЧ в трёх режимах: в режиме согласованной нагрузки, в режиме неизменной нагрузки  $Z_n = K$  и в режиме холостого хода. Известно, что фильтр имеет собственное затухание 40 дБ на частоте 500 Гц, а параметр  $K$  фильтра равен 1 кОм.

7.5. ФВЧ типа  $K$  имеет частоту среза  $f_c = 100$  Гц и предназначен для работы на нагрузку  $r = 1000$  Ом. Определить: 1) параметры фильтра ( $L$  и  $C$ ); 2) затухание при  $f = 50$  Гц, выразив его в неперах, децибеллах и отношением действующих значений напряжений на входе и выходе; 3) изобразить Т-, П-образную схемы с указанием значений элементов фильтра.

7.6. Для ФВЧ типа  $K$ , имеющего частоту среза  $f_c = 100$  Гц, определить: 1) коэффициент затухания при частоте 50 Гц; 2) коэффициент фазы при частотах 50 и 200 Гц.

7.7. Для ФВЧ типа  $K$ , имеющего частоту среза  $f_c = 100$  Гц и предназначенного для работы на нагрузку  $r = 1000$  Ом, определить характеристическое сопротивление при частоте 200 Гц: 1) для Т-образной схемы; 2) для П-образной схемы.

7.8. ФВЧ типа  $K$  состоит из двух звеньев; схема одного звена приведена на рис. 7.9. 1) Определить частоту среза. 2) При частоте 800 Гц и согласованной нагрузке найти входной ток, если напряжение на входе 100 В.

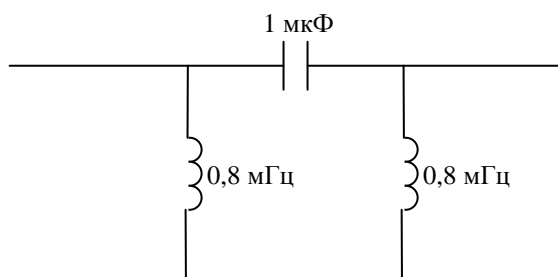


Рис. 7.9

7.9. Полосовой фильтр типа К имеет полосу прозрачности 8 ... 10 кГц и номинальное характеристическое сопротивление 1000 Ом. Определить: 1) параметры  $L_1$ ,  $C_1$ ,  $L_2$ ,  $C_2$ ; 2) коэффициент затухания при частоте 12 кГц; 3) изобразить Т- и П-образную схемы с указанием значений элемента фильтра.

7.10. Определить полосу пропускания и номинальное характеристическое сопротивление ПФ типа К, параметры которого:  $L_1 = 0,02$  Гн;  $C_1 = 0,025$  мкФ;  $L_2 = 0,001$  Гн;  $C_2 = 0,5$  мкФ (рис. 7.10).

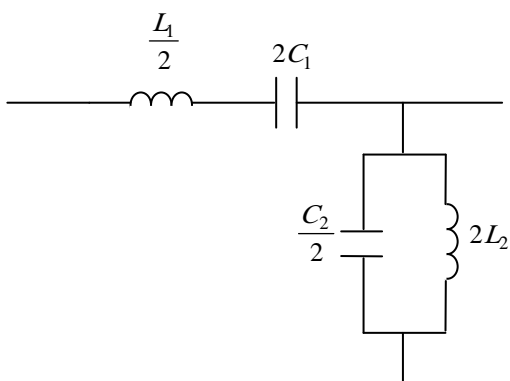


Рис. 7.10

7.11. Определить полосу задерживания и номинальное характеристическое сопротивление для фильтра, схема которого представлена на рис. 7.11.

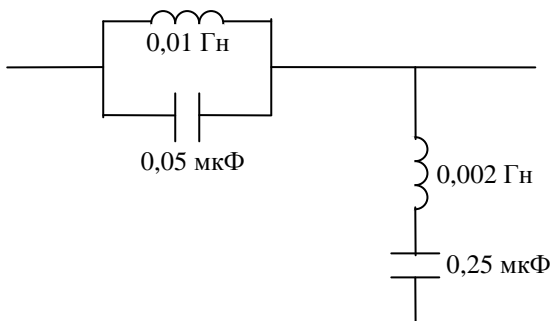


Рис. 7.11

7.12. Определить коэффициент затухания при частоте 10 кГц и согласованной нагрузке.

### Ответы, решения и методические указания

7.1. По формулам, приведенным в табл. 7.2, находим:

$$L = \frac{K}{\pi f_c} = \frac{1000}{3,14 \cdot 2000} = 0,16 \text{ Гн},$$

$$C = \frac{1}{\pi f_c K} = \frac{1}{3,14 \cdot 2000 \cdot 1000} \approx 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0,16 \text{ мкФ}.$$

Т- и П-образная схемы фильтра изображены на рис. 7.12.

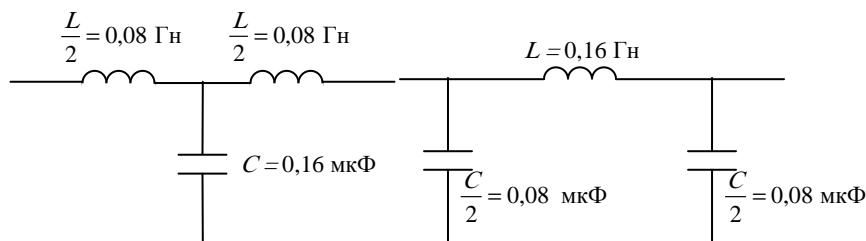


Рис. 7.12

7.2. 3180 Гц, 100 Ом.

7.3. Используя формулы табл. 7.1, находим затухание одного звена фильтра при частоте  $f = 10$  кГц

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \frac{f}{f_c} = \frac{10\,000}{3180} = 3,14.$$

По таблице гиперболических функций находим  $\frac{\alpha}{2} = 1,81$ ;  $\alpha = 3,62$ . Для получения затухания  $\alpha = 10$  Нп необходимо включить каскадно  $\frac{10}{3,62} = 2,76 = 3$  звена.

7.4. Затухание, выраженное в дБ, переводим в Нп:  $\alpha = 40$  дБ =  $40$  дБ  $\cdot 0,115$  Нп/дБ =  $4,6$  Нп. Используя формулу, связывающую собственное затухание, частоту среза и текущую частоту, находим частоту среза:

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \frac{f}{f_c}; \quad (1)$$

$$f_c = \frac{f}{\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}} = \frac{500}{\operatorname{ch} 2,3} = \frac{500}{5} = 100 \text{ Гц}.$$

Для фильтра, являющегося симметричным четырёхполюсником, можно записать

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} j + Z_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} j,$$

откуда следует

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \operatorname{ch} j + \frac{Z_c \dot{I}_2}{\dot{U}_2} \operatorname{sh} j = \operatorname{ch} j + \frac{Z_c}{Z_H} \operatorname{sh} j. \quad (2)$$

Это общее выражение позволяет определить  $\frac{U_2}{U_1}$  и  $\Psi_{U_1} - \Psi_{U_2}$  при произвольной нагрузке фильтра  $Z_H$ , в том числе при неизменной нагрузке  $Z_H = K = \text{const}$ .

Для режима согласованной нагрузки, т.е. при  $Z_H = Z_c$ , имеем

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \operatorname{ch} j + \operatorname{sh} j = e^j = e^\alpha e^{\beta}, \quad (3)$$

$j = \alpha + \beta$  – коэффициент распространения.

Для режима холостого хода имеем

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \operatorname{ch} j. \quad (4)$$

При расчётах имеем в виду, что

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} j &= \operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch} \alpha \cos \beta + \operatorname{sh} \alpha \cdot \sin \beta; \\ \operatorname{sh} j &= \operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh} \alpha \cos \beta + \operatorname{ch} \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Собственное затухание фильтра в полосе пропускания равно нулю, а в полосе задерживания определяется по формуле (1); коэффициент фазы ФНЧ в полосе задерживания равен  $+\pi$ , а в полосе пропускания определяется по формуле

$$\operatorname{sh} \frac{\beta}{2} = \frac{f}{f_c}.$$

Проведём подробный расчёт для частоты  $f = 1,5 f_c = 150$  Гц. Для этой частоты  $\beta = 180^\circ$  находим собственное затухание  $\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = \frac{f}{f_c} = 1,5$ , откуда  $\alpha/2 = 0,96$ ;  $\alpha = 1,92$ .

Отношение  $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^\alpha$ , откуда  $\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{e^\alpha} = \frac{1}{e^{1,92}} = 0,147$ .

Для определения  $\frac{U_1}{U_2}$  при  $Z_H = K$  и при холостом ходе необходимо определить значения гиперболических функций  $\operatorname{ch} j$ ,  $\operatorname{sh} j$  и характеристическое сопротивление  $Z_c$ :



$$\begin{aligned} \operatorname{ch}j &= \operatorname{ch}(1,92 + j180^\circ) = \operatorname{ch}1,92 \cdot \cos 180^\circ + j \operatorname{sh}1,92 \cdot \sin 180^\circ = \\ &= 3,49(-1) + j3,34 \cdot 0 = -3,49 = 3,49 e^{j180^\circ}; \\ \operatorname{sh}j &= \operatorname{sh}(1,92 + j180^\circ) = \operatorname{sh}1,92 \cdot \cos 180^\circ + j \operatorname{ch}1,92 \cdot \sin 180^\circ = \\ &= 3,34(-1) + j3,49 \cdot 0 = -3,34 = 3,34 e^{j180^\circ}; \\ Z_c = Z_H &= \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{jf}{f_c}\right)^2}} = \frac{1000}{\sqrt{1 - \left(\frac{150}{100}\right)^2}} = \frac{1000}{\sqrt{-1,25}} = \frac{1000}{j1,12} = -j895 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Находим отношение напряжений на входе и выходе фильтра при холостом ходе по выражению (4):

$$\therefore \quad \dot{U}_2 = \operatorname{ch}j = 3,49 e^{j180^\circ}, \text{ откуда;}$$

откуда  $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{3,49} = 0,29; \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = 180^\circ.$

То же самое при нагрузке  $Z_H = K = 1000 \text{ Ом}$  (выражение (2)):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{Z_H = K} &= \operatorname{ch}j + \frac{Z_c}{Z_H} \operatorname{sh}j = -3,49 + \frac{-j895}{1000} \cdot (-3,34) = -3,49 + j3 = \\ &= 4,6 e^{j139^\circ 20'}, \end{aligned}$$

откуда  $\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{1}{4,6} = 0,22; \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = 139^\circ 20'.$

Результаты подобных расчётов при частотах  $0; 0,4f_c; 0,8f_c; f_c; 1,5f_c; 2f_c; 5f_c$  сведены в табл. 7.3. По результатам расчётов построены кривые  $\frac{U_2}{U_1} = Y_1(f), \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = Y_2(f)$ , приведённые на рис. 7.10, а, б. На рисунке 7.13, б пунктиром проведена зависимость  $\psi_{U_1} - \psi_{U_2} = Y_2(f)$  при холостом ходе. Изменение разности фаз напряжения в зависимости от частоты происходит скачком при частоте резонанса напряжений на участке  $L, C/2$ ; т.е. в  $\sqrt{2}$  раз меньшей, чем частота среза. Анализ кривых, приведённых на рис. 7.13, следует провести читателю самостоятельно.

**Таблица 7.3**

$f$	0	$0,4f_c$	$0,8f_c$	$f_c$	$1,5f_c$	$2f_c$	$5f_c$
$\alpha$	0	0	0	0	1,92	2,64	4,6
$\beta$	0	$47^\circ 20'$	$106^\circ 20'$	$180^\circ$	$180^\circ$	$180^\circ$	$180^\circ$
$\frac{U_2}{U_1} \Big _{Z_H = Z_c}$	1	1	1	1	0,147	0,07	0,01
$\operatorname{ch}j$	1	0,68	$\frac{0,28}{180^\circ}$	$\frac{1}{180^\circ}$	$\frac{3,49}{180^\circ}$	$\frac{7,05}{180^\circ}$	$\frac{49,7}{180^\circ}$
$\operatorname{sh}j$	0	$\frac{0,734}{90^\circ}$	$\frac{0,96}{90^\circ}$	0	$\frac{3,34}{180^\circ}$	$\frac{7}{180^\circ}$	$\frac{49,7}{180^\circ}$
$Z_c, \text{ Ом}$	1000	1090	1667	$\infty$	$-j895$	$-j580$	$-j204$
$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big _{\text{х.х}}$	1	0,68	$\frac{0,28}{180^\circ}$	$\frac{1}{180^\circ}$	$\frac{3,49}{180^\circ}$	$\frac{7,05}{180^\circ}$	$\frac{49,7}{180^\circ}$
$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big _{\text{х.х}}$	1	1,47	3,58	1	0,28	0,14	0,02
$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big _{Z_H = K}$	1	$\frac{1,05}{49^\circ 40'}$	$\frac{1,62}{100^\circ}$	–	$\frac{4,6}{139^\circ 20'}$	$\frac{8,1}{150^\circ}$	$\frac{50,6}{169^\circ 30'}$
$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \Big _{Z_H = K}$	1	0,95	0,62	–	0,22	0,12	0,02

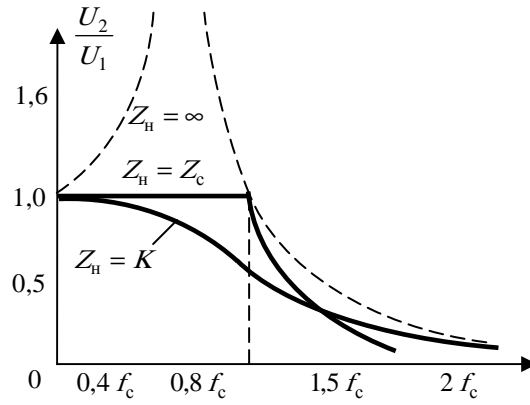


Рис. 7.13

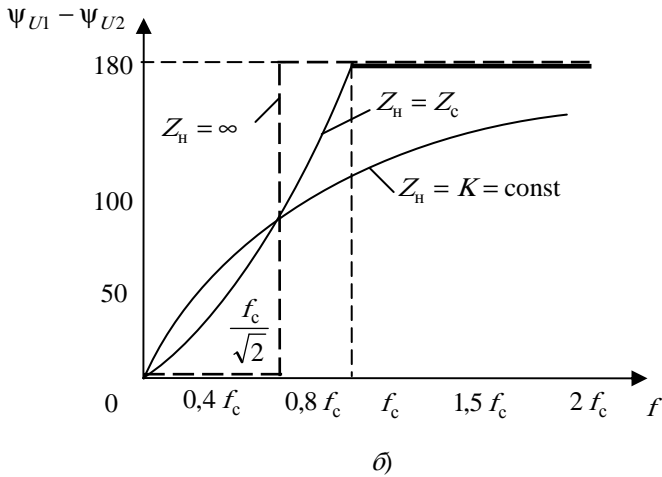


Рис. 7.13 (Продолжение)

7.5.

1) Параметры фильтра определены по формулам, приведённым в табл. 7.2,

$$L = \frac{K}{4\pi f_c} = \frac{1000}{4 \cdot 3,14 \cdot 100} = 0,8 \text{ Гн};$$

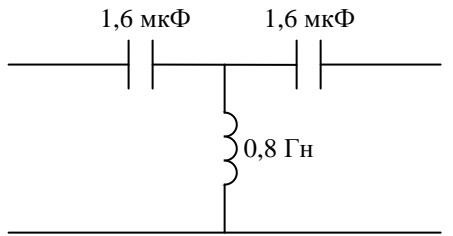
$$C = \frac{1}{4\pi f_c K} = \frac{1}{4 \cdot 3,14 \cdot 100 \cdot 1000} = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ ф} = 0,8 \text{ мкФ}.$$

2) Определяем собственное затухание фильтра:

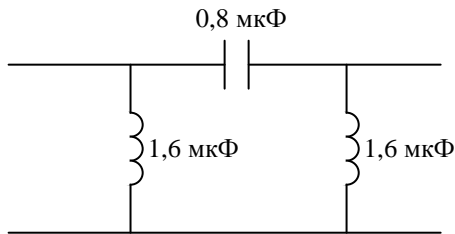
$$\text{ch} \frac{\alpha}{2} = \frac{f_c}{f} = \frac{100}{50} = 2, \quad \frac{\alpha}{2} = 1,32;$$

$$\alpha = 2,64 \text{ Нп} = 22,9 \text{ дБ}; \quad \frac{U_1}{U_2} = e^\alpha = e^{2,64} = 14.$$

3) Т- и П-образные схемы фильтра приведены на рис. 7.14.



а)



б)

Рис. 7.14

7.6. 1) 2,64 Нп; 2)  $-180^\circ, -60^\circ$ .

7.7. 1) 865 Ом; 2) 1154 Ом.

7.8. 1) 400 Гц; 2) 0,43 А.

7.9. По формулам, приведённым в табл. 7.2, определяем параметры фильтра:

$$L_1 = \frac{K}{\pi(f_2 - f_1)} = \frac{1000}{3,14 \cdot (10\,000 - 8000)} = 0,16 \text{ Гн};$$

$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi K f_1 f_2} = \frac{10\,000 - 800}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^3} = 0,002 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0,002 \text{ мкФ};$$

$$L_2 = \frac{K(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2} = \frac{10^3 \cdot (10 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3)}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^4 \cdot 8 \cdot 10^3} = 0,002 \text{ Гц};$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi K(f_2 - f_1)} = \frac{1}{3,14 \cdot 10^3 \cdot (10 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3)} = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 0,16 \text{ мкФ}$$

и затухание фильтра при частоте  $f = 12\,000$  Гц:

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = |F|, \quad F = \frac{\frac{f}{f_m} - \frac{f_m}{f}}{\frac{f_2}{f_m} - \frac{f_m}{f_2}};$$

$$f_m = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{10 \cdot 10^3 \cdot 8 \cdot 10^3} = 8,95 \cdot 10^3 = 8950 \text{ Гц};$$

$$F = \frac{\frac{1200}{8950} - \frac{8950}{12\,000}}{\frac{10\,000}{8950} - \frac{8950}{10000}} = \frac{1,34 - 0,745}{1,12 - 0,895} = 2,64.$$

Итак,

$$\operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} = 2,64; \quad \frac{\alpha}{2} = 1,63 \text{ Нп}; \quad \alpha = 3,26 \text{ Нп}.$$

T- и П-образная схемы фильтра приведены на рис. 7.15.

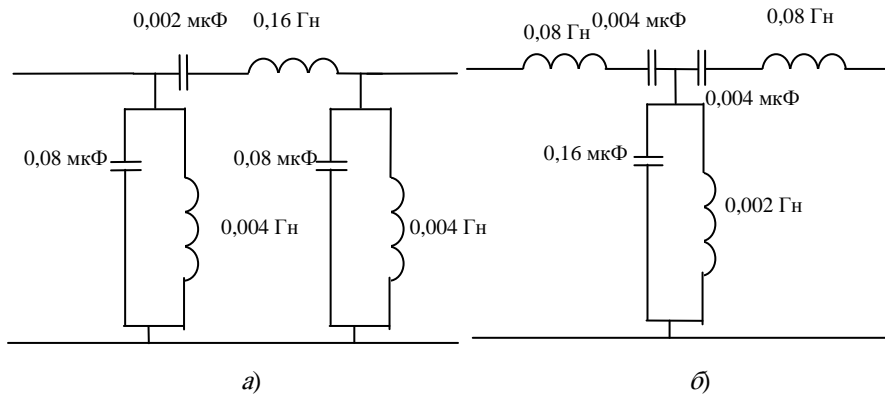


Рис. 7.15

7.10. 5,69...8,89 кГц; 200 Ом.

7.11. 2,7...18,6 кГц; 200 Ом.

7.12. 3,64 Нп.

## 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Под длинной линией понимают систему из двух проводов, длина волны которой сравнима с длиной волны питающего её генератора или с длиной волны протекающего по ней тока  $l \geq 0,1\lambda$ , где  $l$  – длина линий;  $\lambda$  – длина волны.

Длинные линии представляют собой электрические цепи с распределёнными параметрами, каждый элемент длинной линии обладает  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и  $g$  на единицу длины  $dx$ .

Одной из основных задач теории длинных линий является нахождение законов распределения тока и напряжения вдоль линии, но и координаты. Процессы в таких цепях описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, называемых её телеграфными уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = R_1 i + L_1 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ \frac{\partial i}{\partial x} = g_1 U + C_1 \frac{\partial U}{\partial t}, \end{cases}$$

где  $R_1 = \frac{dR}{dx}$ ;  $L_1 = \frac{dL}{dx}$ ;  $C_1 = \frac{dC}{dx} \dots$

Для схемы, представленной на рис. 8.1, решение телеграфных уравнений записывается в виде

$$\begin{cases} U_m = \frac{U_{\text{нн}} + I_{\text{нн}} Z_{\text{в}}}{2} e^{\dot{\gamma}x} + \frac{U_{\text{нн}} - I_{\text{нн}} Z_{\text{в}}}{2} e^{-\dot{\gamma}x}; \\ I_m = \frac{U_{\text{нн}} + I_{\text{нн}} Z_{\text{в}}}{2Z_{\text{в}}} e^{\dot{\gamma}x} - \frac{U_{\text{нн}} - I_{\text{нн}} Z_{\text{в}}}{2Z_{\text{в}}} e^{-\dot{\gamma}x}, \end{cases} \quad (8.1)$$

где  $Z_{\text{в}}$  – волновое сопротивление, которое оказывает линия распространяющейся вдоль неё волне тока;  $\dot{\gamma}$  – коэффициент распространения.

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{Z}_1}{\dot{\gamma}} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{\dot{\gamma}} \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}; \quad \gamma = \alpha + j\beta,$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания;  $\beta$  – коэффициент фазы.

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \alpha \approx \frac{R_1}{2\rho}.$$

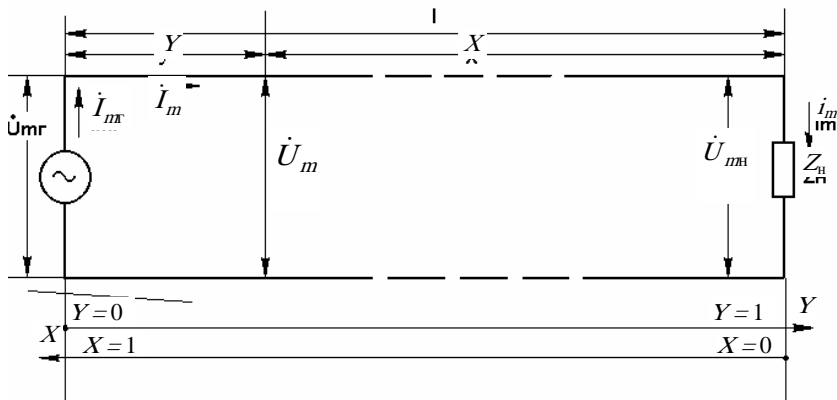


Рис 8.1

Для линии без потерь приближённое выражение для  $Z_B$  является точным:

$$Z_B = \rho = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Гармоническая волна, перемещающаяся от генератора к нагрузке, называется падающей волной, а от нагрузки к генератору – отражённой:

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{m\text{пад.}} + \dot{U}_{m\text{отр.}};$$

$$U_{m\text{пад.}} = \frac{U_{mн} + I_{mн} Z_B}{2} e^{\dot{\gamma}X};$$

$$U_{m\text{отр.}} = \frac{U_{mн} - I_{mн} Z_B}{2} e^{-\dot{\gamma}X};$$

$$I_{m\text{пад.}} = \frac{U_{mн} + I_{mн} Z_B}{2 Z_B} e^{\dot{\gamma}X};$$

следовательно,

$$Zd = \frac{\dot{U}_{m\text{пад.}}}{I_{m\text{пад.}}} = - \frac{\dot{U}_{m\text{отр.}}}{I_{m\text{отр.}}}.$$

Для характеристики связи между падающими и отражёнными волнами в теории длинных линий введены коэффициенты отражения напряжения и тока:

$$P_u = \frac{U_{m\text{отр.}}}{U_{m\text{пад.}}} = \frac{\dot{Z}_н - \dot{Z}_B}{\dot{Z}_н + \dot{Z}_B};$$

$$P_i = \frac{I_{m\text{отр.}}}{I_{m\text{пад.}}} = - \frac{Z_н - Z_B}{Z_н + Z_B},$$

т.е.  $P_u = -P_i$ .

### 8.1. РЕЖИМ БЕГУЩИХ ВОЛН

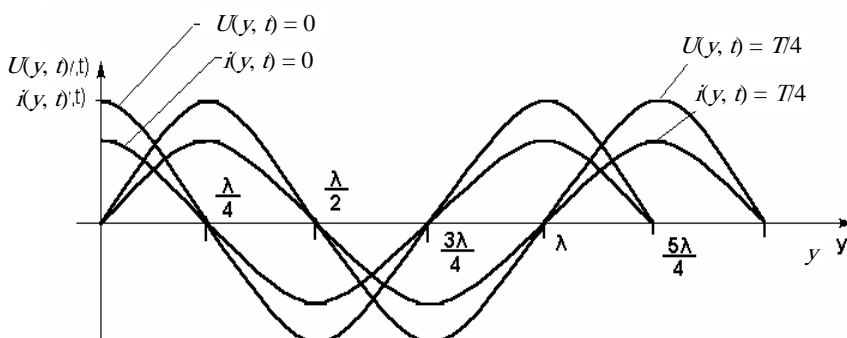


Рис. 8.2

Режимом бегущих волн (РБВ) называется такой режим, когда в линии существуют только падающие волны, а отражённой волны нет. Распределение тока и напряжения в РБВ показано на рис. 8.2. Для того чтобы в линии существовали отражённые волны, её необходимо нагрузить на сопротивление, равное волновому:

$$Z_n = Z_w = \rho.$$

Физически это означает, что вся энергия, подводимая к нагрузке расходуется в ней.

## 8.2. РЕЖИМ СТОЯЧИХ ВОЛН

Режим стоячих волн (РСтВ) возникает в линии без потерь ( $\alpha = 0$ ).

В результате интерференции падающей и отражённой волны, вследствие одинаковых амплитуд этих волн возникает новая волна, называемая стоячей. Распределение напряжения, тока и входного сопротивления вдоль линии в РСтВ показано на рис. 8.3.

Если линия короткозамкнута на конце, т.е.  $Z_n = 0$ ;  $\alpha = 0$ :

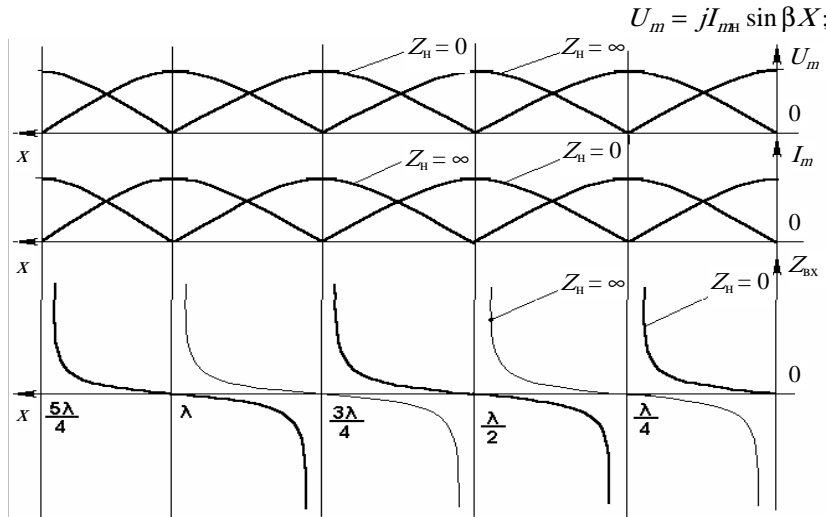


Рис. 8.3

$$I_m = I_{m1} \cos \beta X;$$

$$Z_{вх.кз} = \frac{\dot{U}_m}{I_m} = j\rho \operatorname{tg} \beta X.$$

Если линия разомкнута на конце, т.е.  $Z_n = \infty$ ;  $\alpha = 0$ :

$$U_m = U_{m1} \cos \beta X;$$

$$I_m = j \frac{U_{m1}}{\rho} \sin \beta X;$$

$$Z_{вх.рз} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta X.$$

Если линия замкнута на ёмкость или индуктивность, т.е.  $Z_n = jX$ ,  $\alpha = 0$ :

$$U_M = j\rho I_{m1} \sin \beta (X + l_3);$$

$$I_M = I_{m1} \cos \beta (X + l_3)$$

$$Z_{вх} = j\rho \operatorname{tg} \beta (X + l_3);$$

$$l_3 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{\rho}.$$

## 8.3. РЕЖИМ СМЕШАННЫХ ВОЛН В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

Если  $Z_n \neq \rho$ , то в линии появляются отражённые волны, при этом амплитуда отражённой волны меньше падающей, т.е. в каждой точке происходит поглощение энергии. В линии получается промежуточный режим между РБВ и РСтВ, который называется режимом смешанных волн (РСМВ). Распределение напряжения и тока вдоль линии в РСМВ показано на рис. 8.4. Наибольшее значение напряжения  $U_{\text{наиб}}$  будет, очевидно, получаться в тех точках линии, где напряжения падающей и отражённой волны совпадают по фазе (амплитуды арифметически складываются). В этих же точках получается наибольшее значение тока. Там же, где  $U_{\text{пад}}$  и  $U_{\text{отр}}$  находятся в противофазе, будем иметь наименьшее значение напряжения и наибольшее значение тока

$$P_U = \frac{R_H - \rho}{R_H + \rho} = \frac{1 - \frac{\rho}{R_H}}{1 + \frac{\rho}{R_H}} = \frac{1 - K}{1 + K},$$

где  $K = \frac{\rho}{R_H}$ .

Для того чтобы охарактеризовать степень приближения РСМВ в линии к РБВ или РСтВ, вводят коэффициенты стоячих и бегущих волн:

$$K_{БВ} = \frac{U_{m\min}}{U_{m\max}} = \frac{I_{m\min}}{I_{m\max}}; \quad K_{СВ} = \frac{1}{K_{БВ}} = \frac{U_{m\max}}{U_{m\min}},$$

так как в РБВ  $I_{m\min} = I_{m\max}$ , то  $K_{БВ} = K_{СВ} = 1$ , а в РСтВ  $K_{БВ} = 0$ ;  $K_{СВ} = \infty$ , поскольку  $I_{m\min} = 0$ .

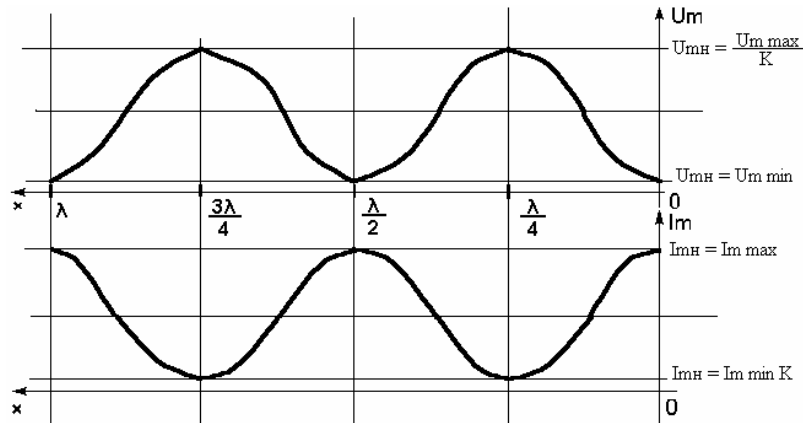


Рис. 8.4

Для линий с  $Z_H = R_H < \rho$

$$K = \frac{\rho}{R_H} \geq 1; \quad K_{БВ} = \frac{U_m}{U_m K} = \frac{1}{K}; \quad K_{СВ} = K.$$

Если же  $Z_H = R_H > \rho$ ,  $K = \frac{\rho}{R_H} \leq 1$ , то  $K_{БВ} = K$ ;  $K_{СВ} = 1/K$ ;

$$K_{БВ} = \frac{1 - P_U}{1 + P_U};$$

$$P_U = \sqrt{\frac{(R_H - \rho)^2 + X_H^2}{(R_H + \rho)^2 + X_H^2}},$$

откуда

$$K_{БВ} = \frac{1 - \sqrt{\frac{(R_H - \rho)^2 + X_H^2}{(R_H + \rho)^2 + X_H^2}}}{1 + \sqrt{\frac{(R_H - \rho)^2 + X_H^2}{(R_H + \rho)^2 + X_H^2}}}.$$

Входное сопротивление линии при  $\frac{\rho}{R_H} > 1$

$$Z_{вх} = \rho \frac{\cos \beta X + jK \sin \beta X}{K \cos \beta X + j \sin \beta X}.$$

Входное сопротивление линии при  $\frac{\rho}{R_H} < 1$

$$Z_{вх} = \rho \frac{R_H \cos \beta X + j(X_H \cos \beta X + \rho \sin \beta X)}{\rho \cos \beta X + X_H \sin \beta X + jR_H \sin \beta X}.$$

Длинные линии нашли широчайшее применение в качестве фидеров, т.е. устройств, предназначенных для передачи энергии от источников к нагрузке.

Погойные параметры и сопротивление длинных линий:

а) двухпроводная линия ( $r \ll d$ ), рис. 8.5:

$$R_1 \cong \frac{1,44}{r\sqrt{\lambda}} \text{ Ом/м;}$$

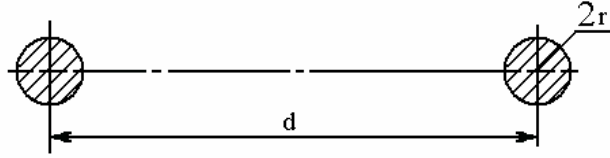


Рис. 8.5

$$c_1 = \frac{\pi \epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}} \text{ Ф/м;}$$

$$L_1 = \frac{\mu_a \ln \frac{d}{r}}{\pi} \text{ Гн/м;}$$

$$\rho = \frac{\ln \frac{d}{r}}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \text{ Ом.}$$

б) коаксиальная линия (рис. 8.6):

$$R_1 \cong \frac{1,44}{\sqrt{\lambda}} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{d} \right) \text{ Ом/м;}$$

$$c_1 = \frac{2\pi \epsilon_a}{\ln \frac{d}{r}} \text{ Ф/м;}$$

$$L_1 = \frac{\mu_a \ln \frac{d}{r}}{\pi} \text{ Гн/м;}$$

$$\rho = \frac{\ln \frac{d}{r}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \text{ Ом.}$$

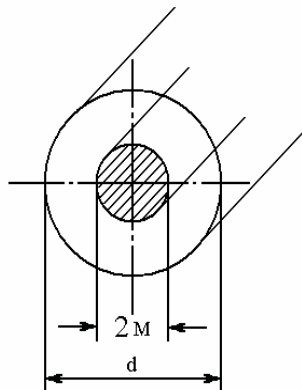


Рис. 8.6

где  $\lambda$  – длина волны;  $\rho$  – волновое

Решение телеграфных уравнений

сопротивление линии,  $\rho \cong \sqrt{\frac{L_1}{c_1}}$ .

(начало отсчёта – нагрузка):

$$\dot{U}_m = \frac{\dot{U}_{нн} + \dot{I}_{нн}\rho}{2} e^{jx} + \frac{\dot{U}_{нн} - \dot{I}_{нн}\rho}{2} e^{-jx};$$

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_{нн} + \dot{I}_{нн}\rho}{2\rho} e^{jx} - \frac{\dot{U}_{нн} - \dot{I}_{нн}\rho}{2\rho} e^{-jx},$$

где  $\dot{U}_m$ ,  $\dot{I}_m$  – напряжение и ток на нагрузке;  $\dot{\gamma} = \alpha + j\beta$  – коэффициент распространения;  $\alpha \approx \frac{R_1}{2\rho}$  – коэффициент затухания;

$\beta = \omega \sqrt{L_1 c_1}$  – коэффициент фазы.

Фазовая скорость распространения волны вдоль длинной линии



$$v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{L_1 c_1}} = \frac{\omega}{\beta},$$

откуда коэффициент фазы

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda_{\lambda}},$$

где  $\lambda_{\lambda}$  – длина волны в длинной линии, причём  $\lambda_{\lambda} = \frac{\lambda_{\Gamma} v_{\phi}}{c}$ ;  $\lambda_{\Gamma}$  – длина волны в свободном пространстве;  $c$  – скорость света ( $c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

Коэффициенты отражения по напряжению и току (на нагрузке):

$$\dot{P}_U = -\dot{P}_I = \frac{\dot{Z}_H - \rho}{\dot{Z}_H + \rho}.$$

Входное сопротивление длинной линии в общем случае

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m}.$$

Входное сопротивление длинной линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) при  $K = \frac{\rho}{R_H} \neq 1$ :

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \rho \frac{K + j0,5(k^2 - 1)\sin 2\beta x}{K^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x}.$$

Коэффициенты бегущей и стоячей волн:

$$K_{\text{БВ}} = \frac{v_{m \min}}{v_{m \max}} = \frac{1}{K_{\text{СВ}}} = \frac{I_{m \min}}{I_{m \max}};$$

$$0 \leq K_{\text{БВ}} \leq 1; \quad \infty > K_{\text{СВ}} \geq 1.$$

Входное сопротивление длинной линии с малыми потерями ( $\alpha \neq 0$ ):

а) разомкнутой на конце

$$Z_{\text{вх}} = \rho \frac{\text{sh} 2\alpha x - j \sin 2\beta x}{\text{ch} 2\alpha x - \cos 2\beta x};$$

б) короткозамкнутой на конце

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \rho \frac{\text{sh} 2\alpha x + j \sin 2\beta x}{\text{ch} 2\alpha x + \cos 2\beta x};$$

КПД линии  $\eta$ :

а) согласованной с нагрузкой

$$\eta \approx 1 - 2\alpha l;$$

б) в случае ( $\alpha \neq 0$ )  $R_H \neq \rho$

$$\eta = \frac{1}{1 + \alpha l \left( K + \frac{1}{K} \right)} = \frac{1}{1 + \alpha l (K_{\text{БВ}} + K_{\text{СВ}})}.$$

#### Контрольные вопросы

1. Является ли линия промышленной частоты, связывающая пункты приёма и передачи энергии на расстояние 2 км длиной?
2. Вывести решение телеграфных уравнений, взяв за начало отсчёта генератор, зная величины  $\dot{U}_{\text{лх}}$  и  $\dot{I}_{\text{лх}}$ .

3. Провести аналогию вторичных параметров длинной линии с характеристическими параметрами каскада четырёхполюсников, каков их физический смысл?

4. Какие режимы возможны в линии без потерь, при каких нагрузках?

5. Каков режим работы линии без потерь (рис. 8.7)?

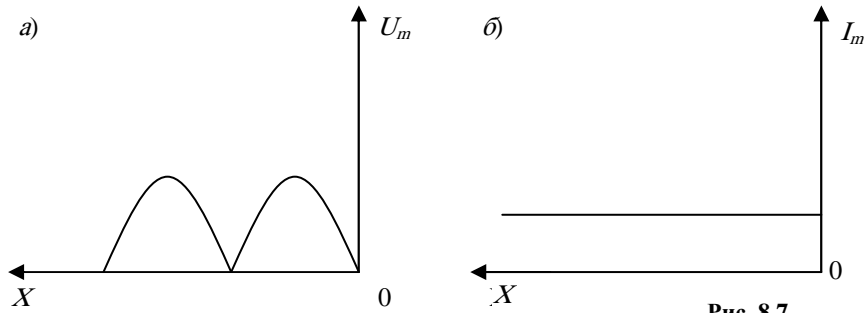


Рис. 8.7

6. Найти входное сопротивление линии, изображённой на рис. 8.8.

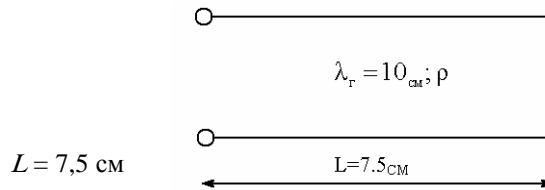


Рис. 8.8

7. Определить характер нагрузки по графикам на рис. 8.9.

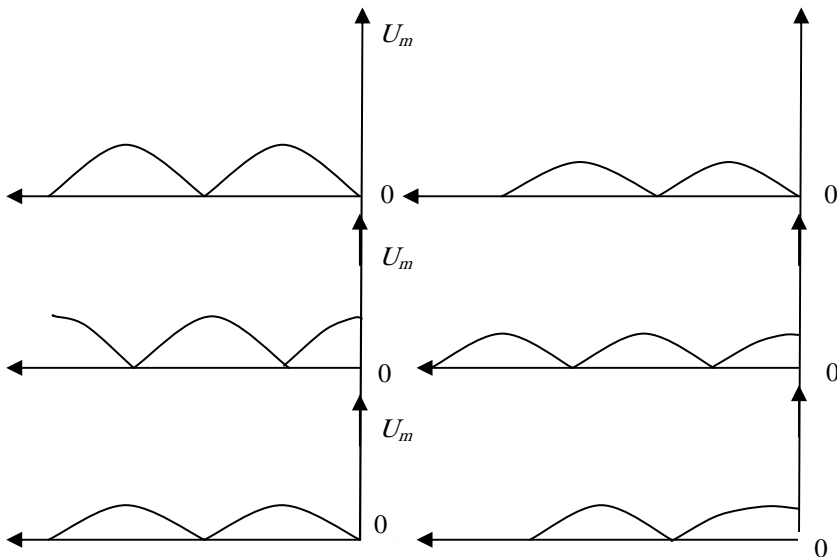


Рис. 8.9

8. Как изменится входное сопротивление длинной линии при разрезе и выпрямлении короткозамкнутой перемычки (рис. 8.10)?

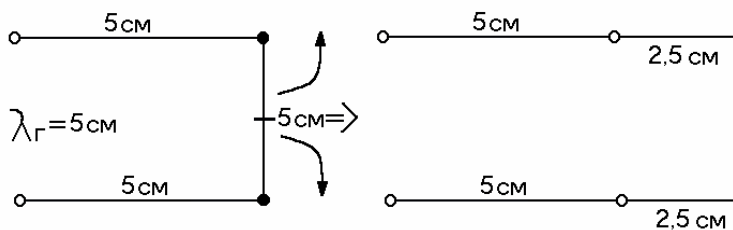


Рис. 8.10

### Задачи

8.1.1. Рассчитать реактивные погонные параметры и волновое сопротивление:

а) двухпроводной длинной линии:  $r = 0,5$  мм,  $d = 200$  мм;

б) коаксиальной длинной линии:  $r = 0,5$  мм,  $d = 10$  мм.

8.1.2. Как изменятся погонные параметры и волновое сопротивление линий, указанных в предыдущей задаче, если диэлектриком будет полистирол (относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 2,25$ ).

8.1.3. Определить погонные реактивные параметры коаксиального кабеля, если известно, что его волновое сопротивление  $\rho = 70$  Ом, а скорость распространения волн в нём  $200$  м/мкс.

8.1.4. Для нахождения обрывов в кабельных линиях можно применить следующий метод. На вход повреждённого кабеля подают напряжение, в результате чего по нему будет распространяться электромагнитная волна. Дойдя до места обрыва, волна отражается и возвращается на вход кабеля. Определить, на каком расстоянии от начала кабеля находится обрыв, если отражённая волна возвращается на вход через 1 мкс после включения генератора в линию, а диэлектриком является фторопласт ( $\epsilon = 2,7$ ).

8.1.5. Коаксиальная длинная линия с воздушным диэлектриком (без потерь т.е.  $\alpha = 0$ ) нагружена на настроенный параллельный колебательный контур. Какой добротностью должен обладать колебательный контур, чтобы при  $C_{к.к} = 100$  пФ, частоте резонанса контура  $f_0 = 200$  МГц, в линии наблюдается режим бегущих волн. Размеры линии:  $d = 20$  мм;  $r = 2$  мм.

8.1.6. Выходной каскад передающего устройства нагружен на коаксиальный кабель с волновым сопротивлением  $\rho_3$ . К концу этого кабеля подсоединены параллельно друг другу ещё два кабеля с  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , которые нагружены на антенны, имеющие чисто активное входное сопротивление  $R_{вх1} = 50$  Ом и  $R_{вх2} = 75$  Ом, соответственно. Определить волновые сопротивления всех кабелей, если во всех наблюдается режим бегущих волн.

8.1.7. Отрезок короткозамкнутой линии длиной  $l = 4$  м, имеющей  $\rho = 50$  Ом, питается от генератора с  $\lambda = 20$  м. Определить реактивность, эквивалентную данному отрезку.

8.1.8. Какой величины реактивности ( $L$  или  $C$  - ?) эквивалентна короткозамкнутая воздушная длинная линия длиной  $l = 52,3$  м, с  $\rho = 600$  Ом, если  $\lambda_r = 3,14$  м?

8.1.9. Генератор, частота колебаний которого  $5 \cdot 10^7$  Гц, нагружен на воздушную разомкнутую линию без потерь длиной 25 м. Определить входное сопротивление, если волновое сопротивление линии  $\rho = 400$  Ом. Какую ёмкость или индуктивность нужно включить в конце линии для того, чтобы её входное сопротивление стало равным нулю?

8.1.10. Найти длину короткозамкнутой длинной линии с волновым сопротивлением  $\rho = 70$  Ом, имеющего на волне  $\lambda = 3$  м входное сопротивление  $Z_{вх} = -j140$  Ом.

8.1.11. Определить волновое сопротивление  $\rho$  коаксиального кабеля, если разомкнутый отрезок такого кабеля длиной  $l = 0,3$  м имеет входное сопротивление  $Z_{вх} = j24,4$  Ом.

8.1.12. В короткозамкнутой линии без потерь, имеющей волновое сопротивление  $\rho = 400$  Ом, максимальная амплитуда напряжения составляет 600 В. Вычислить наибольшую амплитуду тока в линии.

8.1.13. Разомкнутая воздушная линия ( $\alpha = 0$ ) с  $\rho = 600$  Ом подключена к генератору с  $f_r = 50$  МГц. Определить амплитуду напряжения в пучности и амплитуду тока в точке, отстоящей от генератора на 1 м, если амплитуда напряжения на входе длинной линии 75 В, а длина линии  $l = 4$  м.

8.1.14. Воздушная разомкнутая длинная линия ( $\alpha = 0$ ) с  $\rho = 500$  Ом питается от генератора с  $f_r = 10^8$  Гц. Определить наибольшую амплитуду тока в линии, если на конце линии амплитуда напряжения  $\dot{U}_{mk} = 100$  В. Определить амплитуды тока и напряжения в точке, расположенной на расстоянии  $x = 1$  м от конца линии.

8.1.15. Определить входное сопротивление отрезка линии длиной  $l = 3$  м с  $\rho = 90$  Ом, нагруженного на индуктивность  $L = 0,2$  мкГ. Рабочая длина волны генератора  $\lambda = 4$  м.

#### Ответы, решения и методические указания

8.1.1. Для двухпроводной линии:  $C_1 = 4,64$  пФ/м;  $L_1 = 2,4$  мкГ/м;  $\rho = 720$  Ом; для коаксиальной линии:  $C_1 = 18,5$  пФ/м; ;  $L_1 = 0,6$  мкГ/м;  $\rho = 360$  Ом .

8.1.2. Погонная ёмкость  $C_1$  увеличится в 2,25 раза,  $L_1$  не изменится,  $\rho$  уменьшится в полтора раза.

8.1.3.  $L_1 = 0,35$  мкГ/м;  $C_1 = 71,4$  пФ/м.

8.1.4.  $l = 1$  м.

8.1.5. Из условия согласования длиной линии с нагрузкой (режим БВ):

$$R_{к.р} = \frac{\rho_{к.к}^2}{R} = Q\rho_{к.к} = Q \frac{1}{\omega_0 C} = \rho_{дл.л} ,$$

откуда  $Q = \rho_{дл.л.} \omega_0 C = 1381 \lg \frac{20}{2} \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-12} = 17,4$  .

8.1.6.  $\rho_1 = R_{вх1} = 50$  Ом;  $\rho_2 = R_{вх2} = 75$  Ом;  $\rho_3 = Z_{вх}^{ab}$ , так как для режима бегущей волны  $Z_{вх1} = \rho_1$  и  $Z_{вх2} = \rho_2$ , то

$$Z_{вх}^{ab} = \rho_3 = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = 30 \text{ Ом.}$$

8.1.7.  $L = 1,63$  мкГн.

8.1.8.  $L = 173$  мкГн.

8.1.9. 1) Входное сопротивление разомкнутой линии определяется по формуле

$$\dot{Z}_{вх.р.з} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta x = -j\rho \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} .$$

2) Длина волны в линии  $\lambda = \frac{300 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^7} = 6$  м.

3) Следовательно, входное сопротивление линии

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{\text{вх.р.з}} &= -j400 \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{6} 25 = -j400 \operatorname{ctg} \frac{25}{3} \pi = -j400 \operatorname{ctg} \left( 8\pi + \frac{1}{3} \pi \right) = \\ &= -j400 \operatorname{ctg} \left( \frac{1}{3} \pi \right) = -j400 / \sqrt{3} \approx -j231 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

4) Так как период повторения  $\dot{Z}_{\text{вх.р.з}}$  составляет  $\frac{\lambda}{2} = 3$  м, то вдоль линии заданной длины уложится  $25/3 = 8\frac{1}{3}$  полудлин волн. Следовательно, входное сопротивление линии длиной 25 метров разомкнутой на конце равно входному сопротивлению такой же линии \_\_\_\_\_.

$$l = \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ м.}$$

5) Известно, что входное сопротивление разомкнутой на конце линии длиной  $\frac{\lambda}{4} = \frac{6}{4} = 1,5$  м равно нулю. Следовательно, для того чтобы входное сопротивление заданной линии равнялось нулю, её необходимо удлинить на  $\Delta l = 1,5 - 1 = 0,5$  м.

6) Это удлинение эквивалентно подключению на конце длинной линии ( $l = 1$  м) емкости, сопротивление которой равно входному сопротивлению разомкнутой на конце линии длиной 0,5 м, т.е.

$$-j \frac{1}{\omega C} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta l;$$

$$C = \frac{1}{\omega\rho \operatorname{ctg} \beta l} = \frac{1}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^7 \cdot 400 \cdot \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{6} \cdot 0,5} \approx 4,6 \text{ пФ.}$$

8.1.10.  $l = \left( 0,97 + n \frac{\lambda}{2} \right)$  м;  $n = 0, 1, 2 \dots$

8.1.11.  $\rho = 75$  Ом.

8.1.12.  $I_{m\max} = 1,5$  А.

8.1.13.  $u(x) = U_{m\max} \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \right|$ ;  $U_m(l) = U_{m\max} \left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} l \right| = 75$  В;

$$\lambda \cong \lambda_r = 6 \text{ м.}$$

Первая пучность напряжения на конце линии

$$U_{m\max} = U_{m\text{н}} - U_m(0) = \frac{U_m(l)}{\left| \cos \frac{2\pi}{\lambda} l \right|} = 150 \text{ ВТ;}$$

$$I_m(x = l - 1 = 3) = \frac{U_{m\text{н}}}{\rho} \left| \sin \beta(l - 1) \right| = 0.$$

8.1.14.  $I_m(l) = 0,173$  А;  $I_{m\max} = 0,2$  А.

8.1.15.  $Z_{\text{вх}} = -j86$  Ом.

#### 8.4. СОГЛАСОВАНИЕ ДЛИННОЙ ЛИНИИ С НАГРУЗКОЙ

##### Контрольные вопросы

1. Перечислить нагрузки, при которых в линии без потерь ( $\alpha = 0$ ) возможен режим смешанных волн. Покажите (например, для случая  $R_H > \rho$ ), что режим смешанных волн является суперпозицией режимов БВ и СВ.
2. Определить характер нагрузки для случаев, приведённых на рис. 8.11.

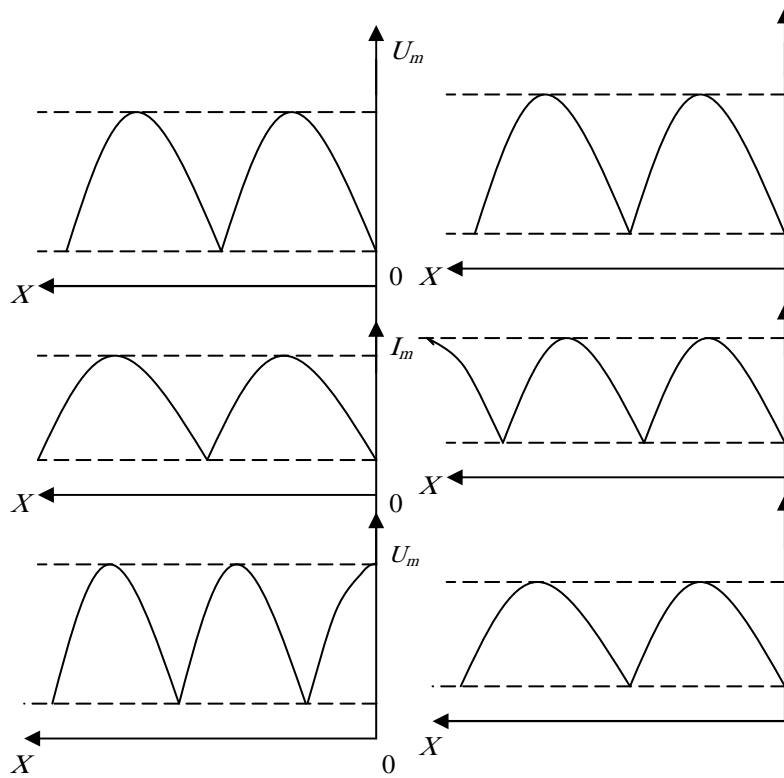


Рис. 8.11

3. Для  $R_H > \rho$  выразить  $K$  через величину  $K_{СВ}$ .

4. Докажите, что модуль входного сопротивления длинной линии ( $\alpha = 0$ ) длиной  $l = \frac{\lambda}{8}$  равен  $\rho$  при любом значении  $R_H$ .

5. Каковы режимы работы длинных линий с потерями и почему?

6. По распределению амплитуд напряжения и тока вдоль линии определить нагрузки и описать свойства линии (рис. 8.12).

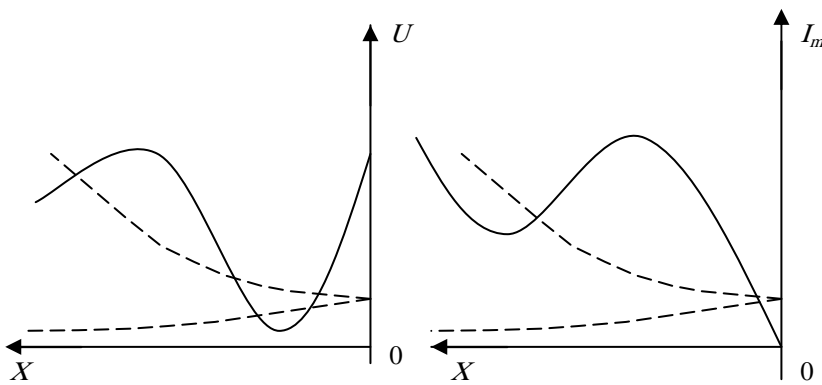


Рис. 8.12

7. Что происходит с КПД согласованной линии ( $\alpha \neq 0$ ) при увеличении  $\alpha$ ?

8. Какой из отрезков длинных линий чаще используется в качестве колебательной системы и почему?

9. В чём состоит задача согласования и как она решается в случае  $Z_H = R_H \neq \rho$ ?

10. Почему двухшлейфовое согласование применяется в основном для коаксиальных длинных линий?

### Задачи

8.2.1. Длинная линия без потерь с волновым сопротивлением  $\rho = 70$  Ом нагружена на  $R_H = 100$  Ом. Питается от источника ЭДС амплитудой  $\epsilon_r = 100$  В. Определить амплитуды падающей и отражённой волн напряжения и амплитуду тока в нагрузке, а также коэффициенты отражения по напряжению и току у нагрузки и величину КБВ.

8.2.2. Длинная линия с  $\rho = 70$  Ом нагружена на  $R_H = 10$  Ом. Определить  $U_{m\max}$  и  $I_{m\max}$ , если  $U_{\min} = 40$  В.

8.2.3. На какое  $R_H$  нагружена линия без потерь, если  $\rho = 70$  Ом, величина КБВ = 0,5.

8.2.4. Амплитуда напряжения падающей волны в линии ( $\alpha = 0$ ) с  $R_H = \rho$  равна 80 В. Найти наибольшую амплитуду напряжения в линии.

8.2.5. Вычислить входное сопротивление четвертьволнового отрезка линии ( $\alpha = 0$ ) с волновым сопротивлением  $\rho = 90$  Ом, нагруженного на  $R_{н} = 140$  Ом.

8.2.6. По данным измерений максимальная и минимальная амплитуды напряжения в линии  $U_{m\max} = 500$  В,  $U_{m\min} = 300$  В. Определить величину КБВ и амплитуды тока в сечениях, где амплитуда напряжения максимальна (минимальна), а также величины входных сопротивлений в этих сечениях. Величина  $\rho = 100$  Ом.

8.2.7. Линия, обладающая  $\rho = 100$  Ом, нагружена на  $R_{н}$ . По данным измерений  $U_{m\max} = 500$  В,  $U_{m\min} = 300$  В. Определить величину  $R_{н}$ , если амплитуда напряжения на ней максимальна.

8.2.8. Коэффициент отражения тока от нагрузки  $\dot{P}_{от} = 0,25e^{-j0,5}$ . Вычислить величину КБВ в линии.

8.2.9. Вычислить входное сопротивление системы, изображённой на рис. 8.13, для тока частоты  $f = 100$  МГц;  $\rho_1 = 70$  Ом;  $\rho_2 = 90$  Ом;  $\rho_3 = 150$  Ом;  $l_1 = 1,5$  м;  $l_2 = 0,75$  м;  $l_3 = 1,5$  м;  $Z_2 = 45$  Ом;  $Z_3 = 30 - j140$  Ом.

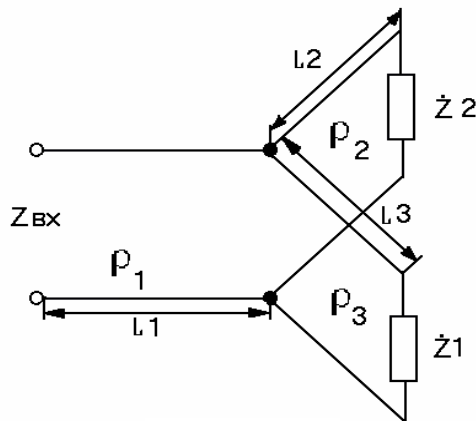


Рис. 8.13

8.2.10. Длинная линия (рис. 8.14) подключена к генератору с  $f_r = 150$  МГц. Определить её входное сопротивление, если  $R_1 = R_2 = \rho = 50$  Ом.

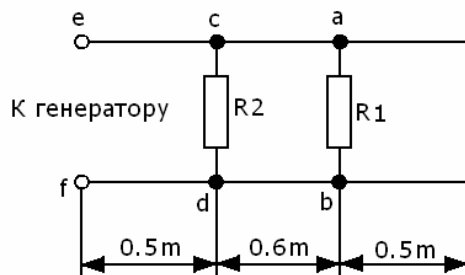


Рис. 8.14

8.2.11. Определить входное сопротивление линии, показанной на рис. 8.15, при  $f_r = 30$  МГц,  $R = \rho = \frac{1}{\omega_r c}$ .

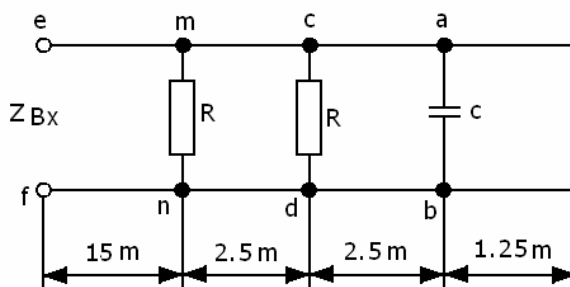


Рис. 8.15

8.2.12. Колебательный контур передающего устройства запросчика наземной РЛС составлен из отрезка короткозамкнутой коаксиальной линии с воздушным диэлектриком и из междуэлектродной ёмкости лампы  $C = 1,5$  пФ (рис. 8.16). Определить длину короткозамкнутого отрезка коаксиальной линии, если  $\rho = 50$  Ом и система должна быть эквивалентна параллельному контуру на частоте  $f_0 = 50$  МГц.

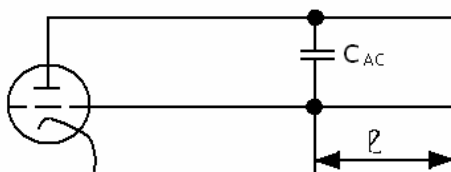


Рис. 8.16

8.2.13. Определить амплитуду бегущей волны в конце двухпроводной линии длиной  $l = 40$  м, если известны  $U_{лк} = 50$  В,  $\lambda = 10$  м,  $\rho = 100$  Ом, диаметр провода 2 мм.

8.2.14. Определить входное сопротивление линии ( $\alpha = 0$ ) на  $f_1 = 30$  МГц, если  $R = 500$  Ом и волновые сопротивления всех отрезков равны между собой (рис. 8.17).

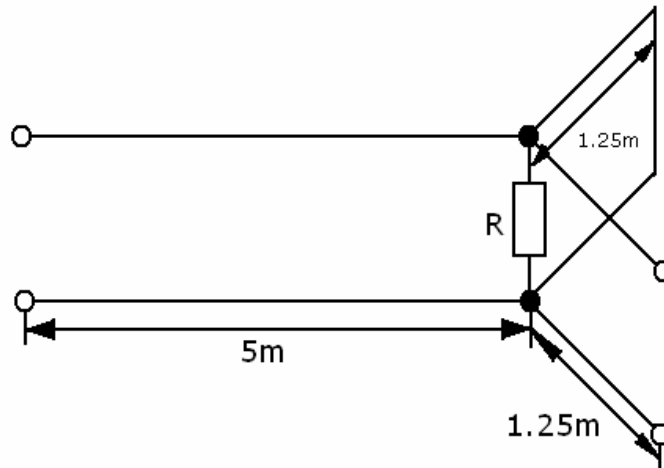


Рис. 8.17

8.2.15. Линия длиной  $l = 10$  м с волновым сопротивлением  $\rho = 50$  Ом питается от источника ЭДС с  $\varepsilon_r = 150$  В. На конце линии измеренное напряжение имеет наибольшее в линии значение, а величина КБВ = 0,7. Найти величину сопротивления нагрузки, мощность, поглощаемую ей, КПД фидера если коэффициент затухания  $\alpha = 3 \cdot 10^{-3}$  1/м. Каковы мощность в нагрузке и КПД, если нагрузка согласована с линией?

8.2.16. Четвертьволновой отрезок длинной линии с  $\rho = 150$  Ом нагружен на активное сопротивление  $R_H = 75$  Ом. Найти входное сопротивление отрезка, КБВ, коэффициент отражения от нагрузки по напряжению.

8.2.17. Согласовать длинную линию ( $\alpha = 0$ ) с  $\rho = 90$  Ом с нагрузкой  $R_H = 40$  Ом.

**Ответы, решения и методические указания**

8.2.1.  $U_{мпад} = 50$  В;  $U_{мотр} = 8,8$  В;  $U_{мн} = 58,8$  В;  $I_{Тк} = 0,588$  В;  $\dot{P}_U = 0,176$ ;  $\dot{P}_I = -0,176$ ;  $K_{БВ} = 0,7$ .

8.2.2.  $I_{Тнак} = 1$  А;  $U_{Тнак} = 280$  В.

8.2.3.  $K_{БВ} = 0,5$ ;  $R_H = \frac{\rho}{2} = 350$  м;  $R_H = \rho \cdot 2 = 140$  Ом.

8.2.4.  $U_{mmax} = 120$  В.

8.2.5.  $\dot{Z}_{вх} = 58$  Ом.

8.2.6.  $K_{БВ} = 0,6$ ;  $R_{вх max} = 167$  Ом;  $R_{вх min} = 60$  Ом;  $I_{mmin} = 3$  А;  $I_{mmax} = 5$  А.

8.2.7.  $R_H = 167$  Ом.

8.2.8.  $K_{БВ} = 0,6$ .

8.2.9.  $\dot{Z}_{вх} = 31,7 - j28,4$  Ом.

8.2.10.

1)  $\lambda = \lambda_r = 2$  м.

2) Волновое сопротивление короткозамкнутого участка длинной линии

$$\dot{Z}_{кз ab} = j\rho \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} x = j50 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2} 0,5 = \infty.$$

3)  $\dot{Z}_{ab} = \frac{\dot{Z}_{кз ab} \cdot R_1}{\dot{Z}_{кз ab} + R_1} \approx R_1 = 50$  Ом.

4) Так как  $R_1 = \rho$ , то на участке линии между  $R_1$  будет режим БВ.

Тогда  $\dot{Z}_{вх cd} = \rho = 50$  Ом и  $\dot{Z}_{cd} = R_{cd} = \frac{R_1 \rho}{R_1 + \rho} = 25$  Ом.

5) Так как участок линии от  $ef$  до  $cd$  нагружен на  $R_{cd} < \rho$ , то на этом участке будет режим смешанных волн:

$$\dot{Z}_{вх} = \rho \frac{K + j0,5(K^2 - 1)\sin 2\beta x}{K^2 \cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x}.$$

Так как  $x = \frac{\lambda}{4} = 0,5$  м, то  $\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} = \frac{\rho^2}{R_{\text{н}}} = 100$  Ом.

8.2.11.

1)  $\lambda_{\Gamma} = \lambda_{\text{л}} = 10$  м;  $\frac{\lambda}{4} = 2,5$  м;  $\frac{\lambda}{8} = 1,25$  м.

2)  $\dot{Z}_{\text{кз } ab} = j\rho \operatorname{tg} \beta x = j\rho$ .

3)  $\dot{Z}_{ab} = \frac{j\rho \frac{1}{j\omega c}}{j\rho + \frac{1}{j\omega c}} = \frac{\rho^2}{j(\rho - \rho)} = -j\infty$ .

4)  $\dot{Z}_{\text{вх } cd} = -j\rho \operatorname{ctg} \beta x = -j\rho \operatorname{ctg} \frac{2\pi \lambda}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = 0$  и  $\dot{Z}_{cd} = 0$ .

5)  $\dot{Z}_{\text{вх } mn} = j\rho \operatorname{tg} \beta x = \infty$ ;  $Z_{mn} = R = \rho$ .

Следовательно,  $\dot{Z}_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} = \rho$ .

8.2.12.

1) Длина волны в линии  $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{7,5 \cdot 10^8} = 0,4$  м.

2) Для того чтобы система, составленная из междуэлектродной ёмкости лампы  $C$  и из отрезка короткозамкнутой коаксиальной линии, представляла собой параллельный колебательный контур, настроенный на частоту  $f_0 = 750$  МГц, необходимо, чтобы

$$\dot{b}_c + \dot{Y}_{\text{вх.к.з}} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{b}_c = -\dot{Y}_{\text{вх.к.з}}.$$

3) Так как  $\dot{b}_c = j\omega_0 C_1 a \dot{Y}_{\text{вх.к.з}} = \frac{1}{\dot{Z}_{\text{вх.к.з}}} = \frac{1}{j\rho \operatorname{tg} \beta l_3}$ ,

то  $j\omega_0 c = j \frac{1}{\rho \operatorname{tg} \beta l_3}$  или  $\omega_0 c = \frac{1}{\rho \operatorname{tg} \beta l_3}$ .

4) Отсюда  $l_3 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega_0 c \rho} + \frac{\lambda_0}{2} n = \frac{\lambda_0}{25} \operatorname{arctg} \frac{1}{25 f_0 c \rho} + \frac{\lambda}{2} n$ ,

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Следовательно,

$$l_3 = \frac{2\pi}{0,4} \operatorname{arctg} \frac{1}{2\pi \cdot 750 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^{-12} \cdot 50} + \frac{0,4}{2} n =$$

$$= \frac{0,4}{6,28} \operatorname{arctg} 2,83 + 0,2n \approx (0,0784 + 0,2n) \text{ м.}$$

Итак,  $l_3 = 7,84$  см;  $27,84$  см и т.д.

8.2.13. При расчётах учесть потери только в проводах ( $R_1$ ). Коэффициент затухания  $\alpha$  рассчитывать по формуле

$$\alpha \cong \frac{R_1}{2\rho};$$

$$U_{\text{тн}} = 45,5 \text{ В.}$$

8.2.14.  $\dot{Z}_{\text{вх}} = 500$  Ом.

8.2.15.  $R_{\text{н}} = 71$  Ом;  $P_{\text{н}} = 52$  Вт;  $\eta = 0,94$ ; при согласованной нагрузке  $P_{\text{н max}} = 53$  Вт;  $\eta_{\text{max}} = 0,947$ .

8.2.16.  $\dot{Z}_{\text{вх}} = 300$  Ом;  $\dot{P}_{\text{ин}} = \frac{1}{3} I^2 \rho$ ; КБВ = 0,5.

8.2.17. Применить четвертьволновой трансформатор с  $\rho_{\text{T}} = 60$  Ом.



Дельта-функция (функция Дирака)

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), & a < t_0 < b, \\ \frac{1}{2} f(t_0), & t_0 = a, b, \\ 0, & t_0 < a, t_0 > b, \end{cases} \text{ при } t=0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = I.$$

Фильтрующие свойство  $\delta$ -функции

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0) dt = \begin{cases} f(t_0), & a < t_0 < b, \\ \frac{1}{2} f(t_0), & t_0 = a, b, \\ 0, & t_0 < a, t_0 > b, \end{cases}$$

единичная функция (функция Хевисайда)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t < 0; \\ \frac{1}{2}, & t = 0; \\ 0, & t > 0; \end{cases}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx, \quad \delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

Периодический сигнал  $f(t)$  с периодом  $T_n$  разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega_n t + b_k \sin k\Omega_n t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_{mk} e^{jk\Omega_n t},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) \cos k\Omega_n t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) \sin k\Omega_n t dt, \quad \dot{A}_{mk} = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(t) e^{-jk\Omega_n t} dt.$$

Средняя за период мощность периодического сигнала (выделяемая на единичном сопротивлении)

$$P = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |\dot{A}_{mk}|^2.$$

Спектральная плотность сигнала  $f(t)$  (прямое преобразование Фурье)

$$\dot{G}(\omega) = G(\omega) e^{j\phi(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Связь комплексной амплитуды ряда Фурье для периодической последовательности импульсов со спектральной плотностью одиночного импульса

$$\dot{A}_{mk} = \frac{2}{T_n} \dot{G}(k\Omega_n) = \frac{\Omega_n}{\pi} \dot{G}(k\Omega_n).$$

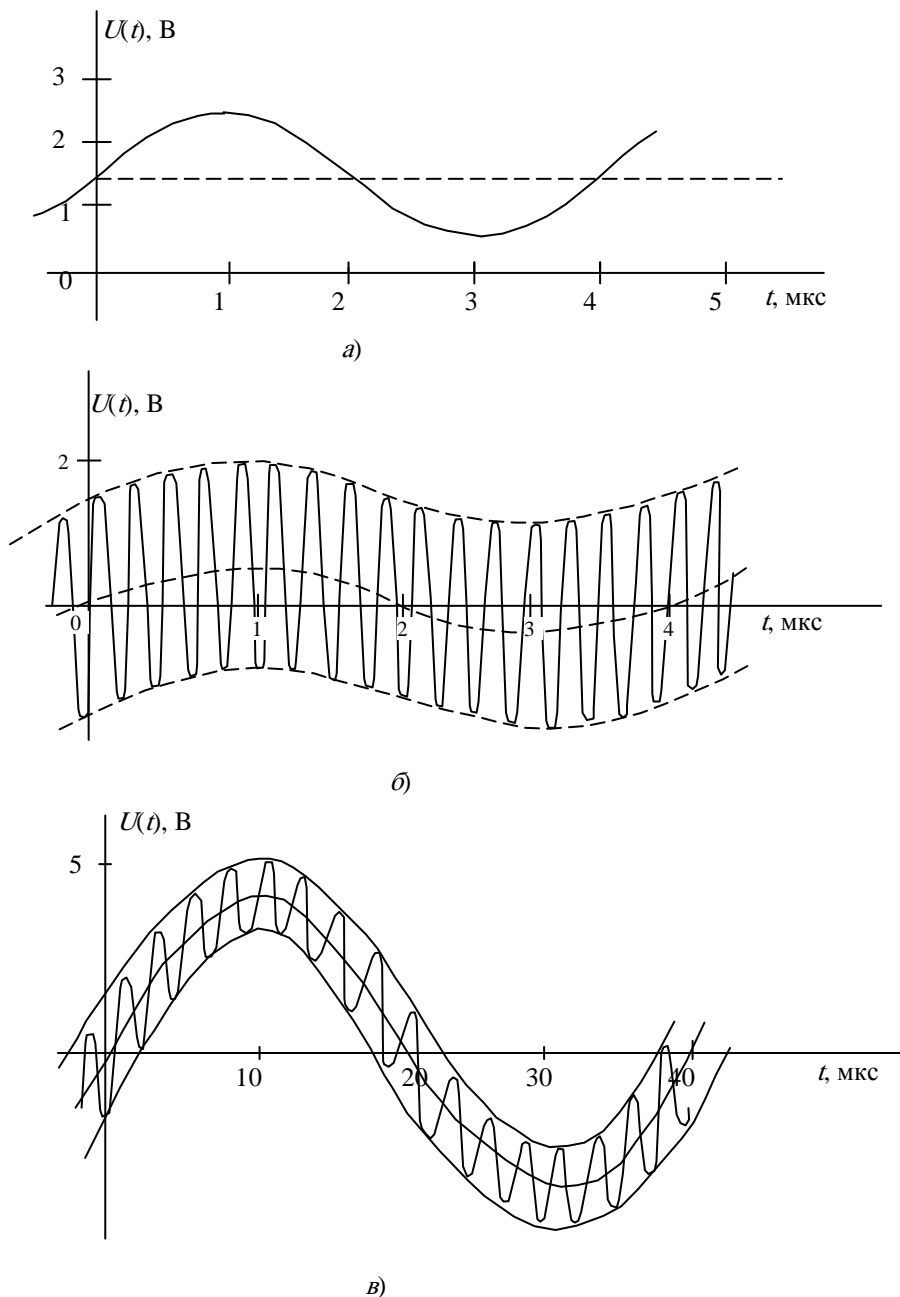
Энергия непериодического сигнала (выделяемая на единичном сопротивлении)

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\omega) d\omega.$$

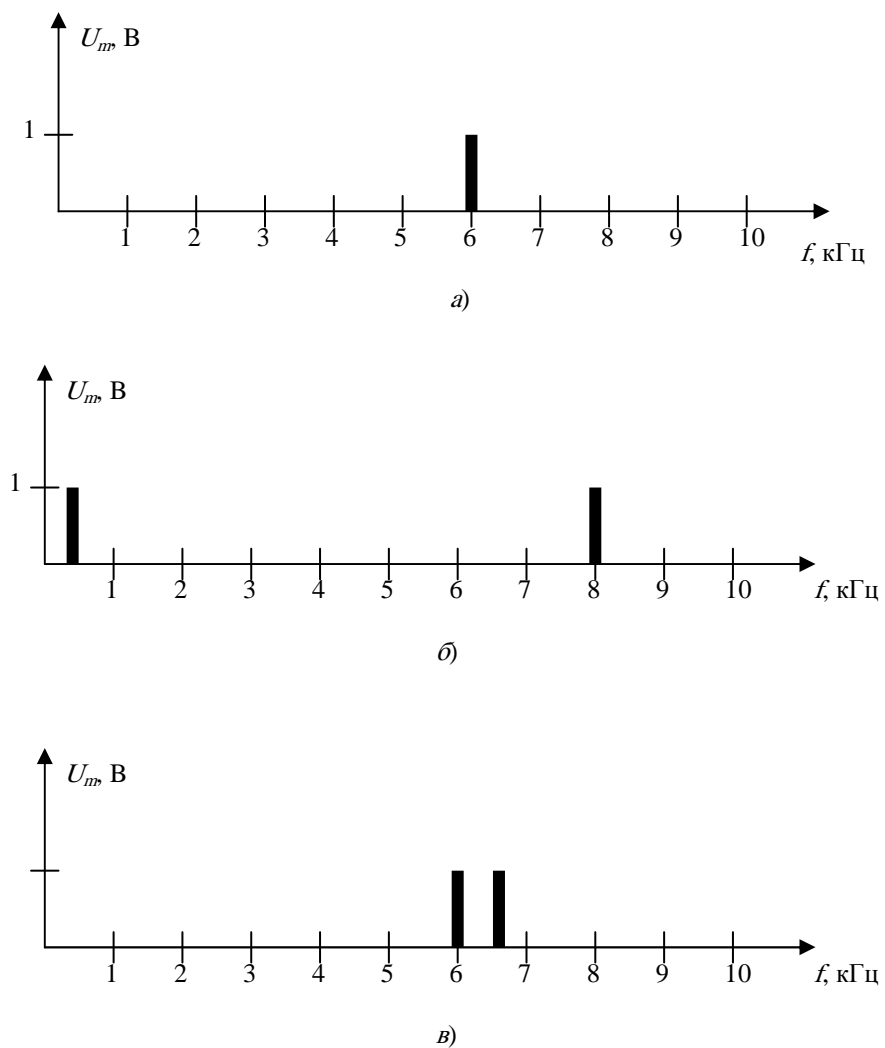
1. Что понимается под спектром периодического сигнала? Необходимость этого понятия.
2. Связаны ли между собой спектр амплитуд и спектр фаз сигнала?
3. Построить спектральную диаграмму периодической последовательности прямоугольных импульсов. Как она изменится, если: а) амплитуду импульса увеличить; б) длительность импульса уменьшить; в) период повторения увеличить?
4. Чем определяется активная ширина спектра сигнала?
5. Как по спектру амплитуд импульсов получить их энергетический спектр?
6. Что понимают под спектральной плотностью одиночного импульса? Какова необходимость введения этого понятия?
7. Написать и пояснить выражения для прямого и обратного преобразования Фурье.
8. Свойства спектральной функции.
9. Какова связь спектра периодического сигнала и спектральной функции импульса, повторением которого образован периодический сигнал?
10. Энергия импульса и теорема о спектрах.
11. Какова связь между длительностью импульса и активной шириной его спектра?

*Задачи*

9.1. Построить амплитудно-частотный и фазочастотный спектры (спектральные диаграммы АЧС и ФЧС), а также записать аналитические выражения сигналов, показанных на рис. 9.1.



**Рис. 9.1**

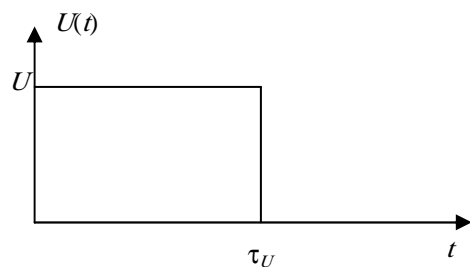


**Рис. 9.2**

9.2. Записать выражения для сигналов по их АЧС рис 9.2 (ФЧС равен нулю для всех гармоник, составляющих сигналы), изобразить их временные графики.

9.3. Используя единичную функцию  $I(t)$ , записать аналитическое выражение прямоугольного импульса  $U(t)$ , изображённого на рис. 9.3.

Дано:  $U = 5$  В;  $\tau_U = 1$  мкс.



**Рис. 9.3**

9.4. Вычислить частоту первой гармоники периодических сигналов (рис. 9.4). Найти постоянную составляющую этих сигналов, а также амплитуду первой гармоники.

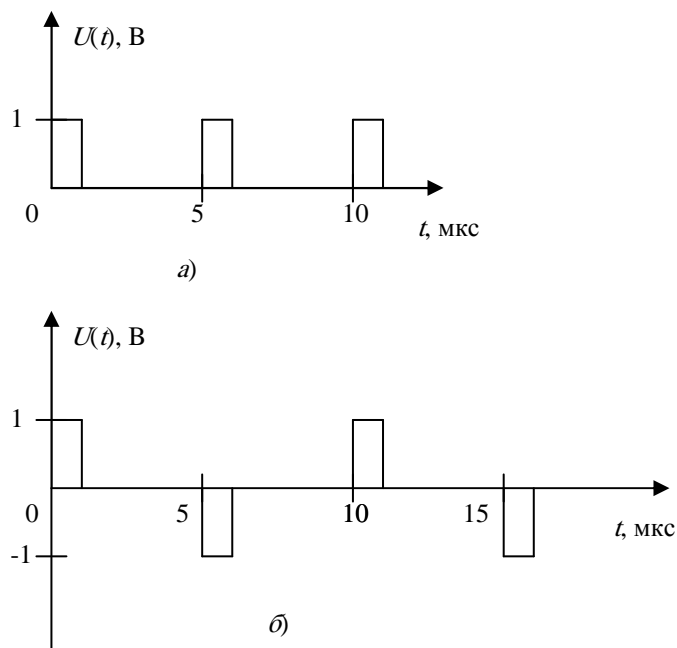


Рис. 9.4

9.5. Сумма периодических последовательностей импульсов  $U_1(t)$  и  $U_2(t)$ , изображённых на рис. 9.5, образуют периодическую последовательность  $U(t)$ , построить временную и спектральные диаграммы  $U(t)$ .

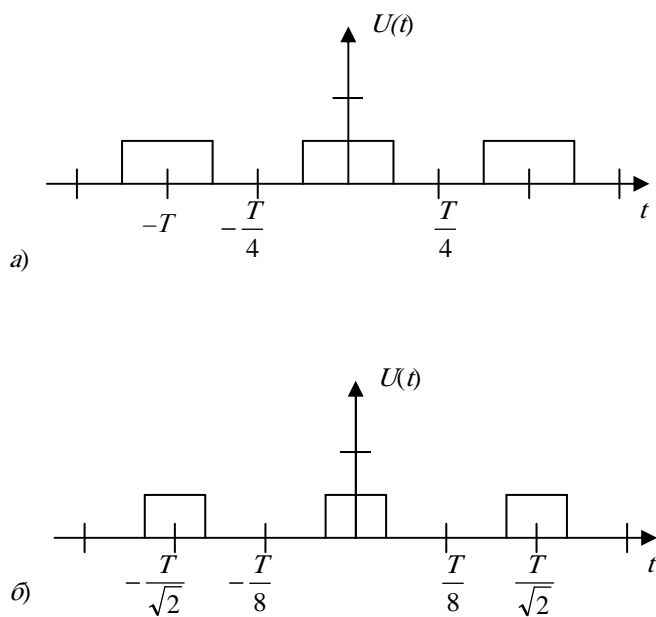


Рис. 9.5

9.6. Для сигнала, изображённого на рис. 9.6, вычислить мощность постоянной составляющей при  $U = 4$  В;  $T = 4$  мкс;  $\tau_U = 1$  мкс.

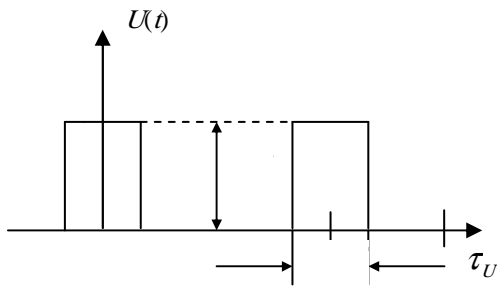


Рис. 9.6

9.7. АЧС периодической последовательности прямоугольных импульсов показан на рис. 9.7. Какова длительность импульсов, их амплитуда и частота повторения?

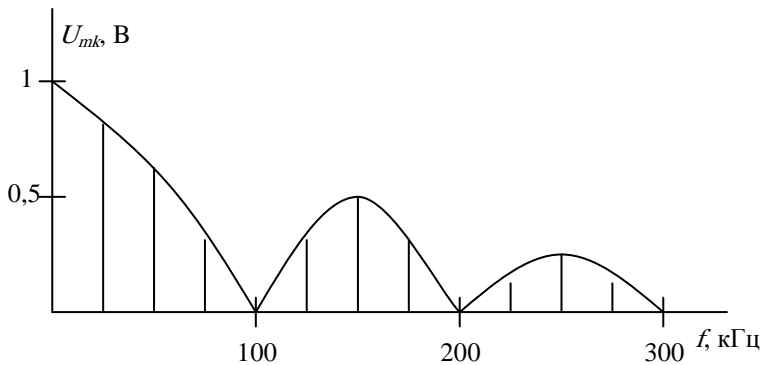


Рис. 9.7

9.8. Активная ширина спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов  $\Delta f_{\text{ви}} = 20$  кГц, скважность равна 5. Найти частоту повторения этих импульсов  $F_n$ .

9.9. Прямоугольные импульсы напряжения амплитудой 50 В и длительностью 10 мкс повторяются периодически. Определить частоту их повторения, если известно, что постоянная составляющая импульсов равна 0,5 В.

9.10. Радиосигнал представляет собой периодическую последовательность прямоугольных радиоимпульсов. Частота несущих колебаний  $f_0 = 800$  кГц, амплитуда импульсов  $U_m = 40$  В, период следования импульсов  $T_n = 0,5$  мс, длительность импульсов  $\tau_U = 125$  мкс. Найти АЧС радиосигнала и его огибающей. Ширину спектра ограничить первым нулём.

9.11. По видам и параметрам АЧС сигналов определить параметры этих сигналов (рис. 9.8).

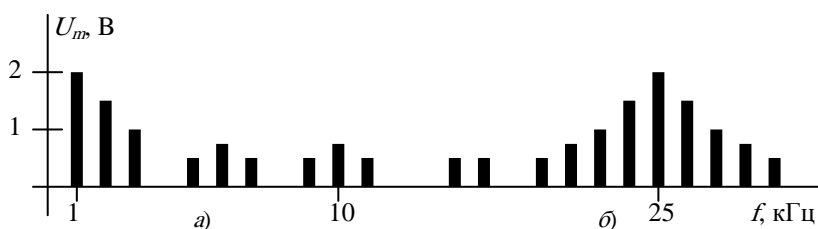


Рис. 9.8

9.12. На настроенный в резонанс ( $f_0 = 300$  кГц) последовательный колебательный контур воздействует периодическая последовательность прямоугольных радиоимпульсов тока с частотой повторения  $f_n = 2$  кГц, длительностью  $\tau_U = 0,2$  мс и частотой заполнения  $f_0 = 300$  кГц. Определить полосу пропускания контура и его добротность, исходя из условий малых искажений, т.е. из условия передачи спектра сигнала, ограниченного первыми нулями. Изобразить АЧС входного сигнала и сигнала на ёмкости контура.

9.13. На экране индикатора разведывательного приёмника получена спектральная диаграмма (АЧС) неизвестного сигнала рис. 9.9. Определить его характеристики ( $T_n$ ,  $F_n$ ,  $\tau_U$ ,  $\Delta f$ ), если длительность развёртки анализатора спектра равна 1000 мкс.

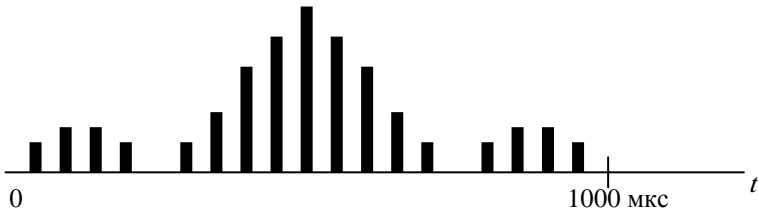


Рис. 9.9

9.14. На какой частоте значение  $G(\omega)$  импульса  $f(t) = 10 e^{-10^3 t} 1(t)$  В уменьшится в 10 раз по сравнению со значением  $G(0)$ . Вычислить произведение  $\Delta\omega\tau(u)$ , определяя  $\tau(u)$  и  $\Delta(\omega)$  из условия десятикратного уменьшения соответствующих максимальных уровней.

9.15. Вычислить значение модуля  $\dot{G}(0)$  для импульсов, показанных на рис. 9.10, а:  $U = 1$  В,  $\tau(u) = 1$  мкс; рис. 9.10, б:  $U = 10$  В,  $t_1 = 1$  мкс;  $t_2 = 2$  мкс.

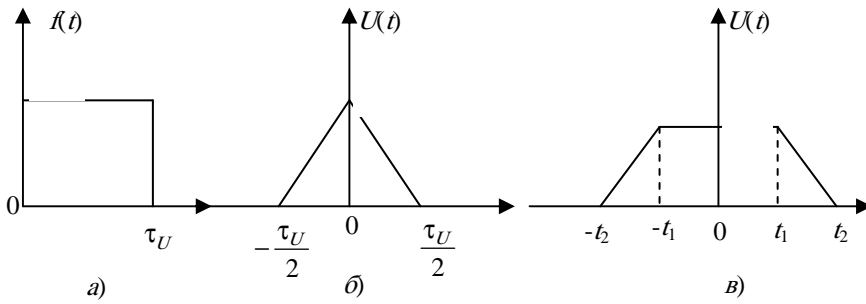


Рис. 9.10

9.16. Найти спектральную плотность сигнала, показанного на рис. 9.11.

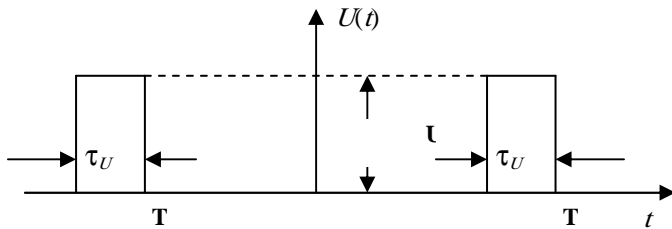


Рис. 9.11

9.17. Найти спектральную плотность импульса на рис. 9.10.

9.18. Сопоставить спектральные функции импульсов, изображённых на рис. 9.12.

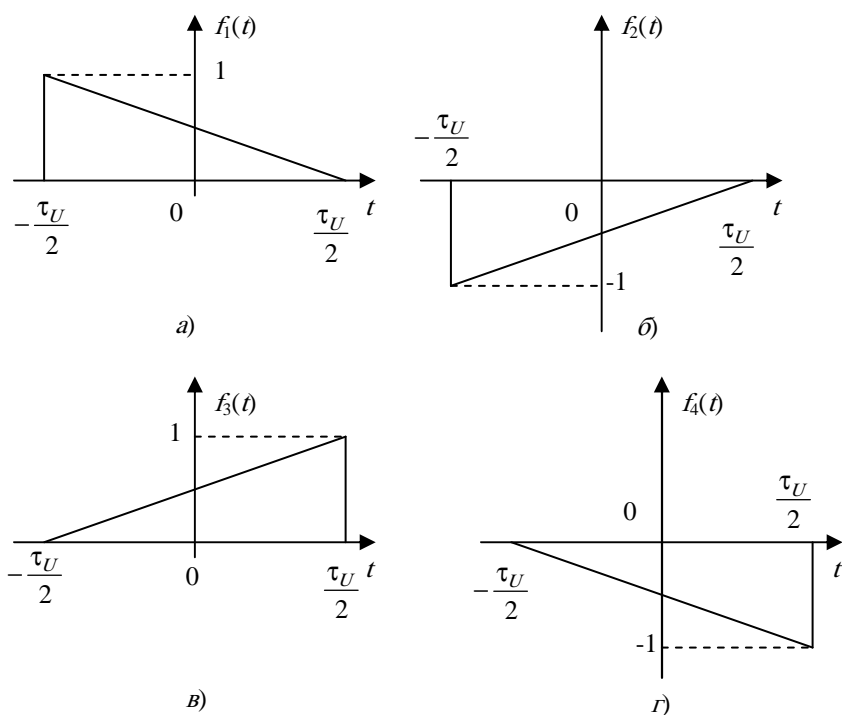


Рис. 9.12

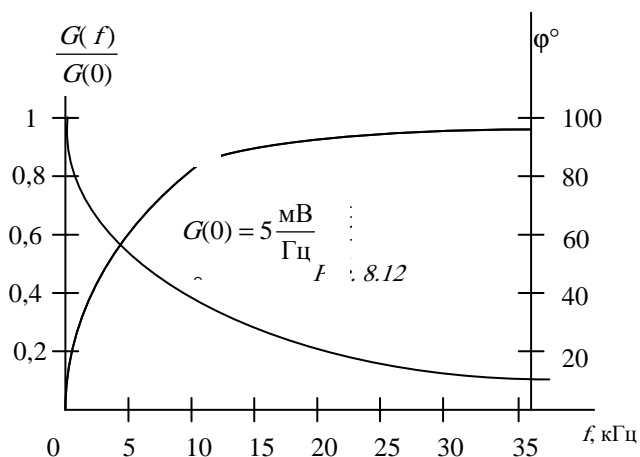
9.19. Сигнал  $U_m e^{-10^6 t}$ , усиленный без искажений в 2 раза, задержанный на время  $t = 1$  мкс, сжатый во времени в 4 раза, используется для модуляции несущего колебаний с  $f_0 = 100$  МГц. Найти спектральную плотность радиосигнала.

9.20. Найти значение ширины спектра  $\Delta\omega$  и длительность экспоненциального импульса  $U_m e^{-dt}$ , в пределах которых сосредоточено 90 % ( $k = 0,9$ ) его энергии.

9.21. На рисунке 9.13 приведена спектральная функция (АЧС и ФЧС) одиночного сигнала, который повторяется с  $F_n = 2,5$  кГц. Нарисовать график периодического сигнала. Вычислить постоянную составляющую и амплитуды первых четырёх гармоник, представить их в виде спектральной диаграммы (АЧС). Вычислить активную ширину спектра периодического сигнала на уровне 0,1 от максимума и найти число гармоник, заключённых в пределах активной ширины спектра. Указать, как изменится амплитуда гармоник с частотой  $f = 20$  кГц, если частота повторения уменьшится в 2 раза? Как изменится при этом амплитуда четвёртой гармоники?

Рис. 9.13

Ответы, решения и методические указания



9.3.  $[1(t) - 1(t - 10^{-6})]$  В.

9.4. а)  $F_n = 0,2 \cdot 10^6$  Гц, 0,2 В,  $\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$  В;

б)  $F_n = 0,1 \cdot 10^6$  Гц, 0 В,  $\frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$  В.

9.5. Воспользоваться свойством линейности операции суммирования ряда Фурье.

9.6.  $1 \text{ В}^2$ .

9.7.  $\tau_U = 10 \text{ мкс}$ ;  $U_m = 2 \text{ В}$ ;  $F_n = 25 \text{ кГц}$ .

9.9.  $F_n = 1 \text{ кГц}$ .

9.10. 1) Запишем выражение, для огибающей радиосигнала при условии, что радиоимпульсы расположены чётным образом относительно начала их отчёта:

$$U_{\text{ор}} = U_{BU}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\Omega_n t),$$

где  $a_0 = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{\tau_r}{2}}^{\frac{\tau_r}{2}} U_m dt$ ;

$$a_k = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{\tau_n}{2}}^{\frac{\tau_n}{2}} U_m \cos(k\Omega_n t) dt = \frac{2U_m}{T_n} \frac{2\Omega_n k \frac{\tau_n}{2}}{k \frac{2\pi}{T_n}} = \frac{2 \cdot 40}{k\pi} \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right),$$

при  $k=1$   $a_1 \approx 18 \text{ В}$ ;

$$k=2 \quad a_2 \approx \frac{80}{2\pi} \sin(2 \cdot 45^\circ) = 12,7 \text{ В};$$

$$k=3 \quad a_3 \approx \frac{80}{3\pi} \sin(3 \cdot 45^\circ) = 6 \text{ В};$$

$$k=4 \quad a_4 \approx \frac{80}{4\pi} \sin(4 \cdot 45^\circ) = 0,$$

так как скважность  $q = \frac{T_n}{\tau_n} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{125 \cdot 10^{-6}} = 4$ , то остальными гармониками можно пренебречь. Следовательно,

$$\begin{aligned} U_{01}(t) &= 10 + \sum_{k=1}^4 \frac{80}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{4} \cos 2k\pi \frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} t = \\ &= 10 + \sum_{k=1}^4 \frac{80}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{4} \cos 2k\pi \cdot 10^{-3} t = \\ &= 10 + 18 \cos 4\pi \cdot 10^3 t + 12,7 \cos 3\pi \cdot 10^3 t + 6 \cos 12\pi \cdot 10^3 t + 0. \end{aligned}$$

2) Построим спектральную диаграмму амплитуд огибающей радиосигнала (рис 9.14, а).

3) Найдём выражение для радиосигнала

$$\begin{aligned} U(t) &= U_{\text{ор}}(t) \cos 2\pi f_0 t = \frac{a_0}{2} \cos 2\pi f_0 t + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cos(2\pi f_0 + 2\pi k F_n) t + \\ &\quad + (\cos(2\pi f_0 - 2\pi k F_n) t)) = 10 \cos 2\pi 300 \cdot 10^3 t + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \frac{80}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{4} (\cos(2 \cdot 300 \cdot 10^3 + 2k\pi \cdot 2 \cdot 10^3) t + \\ &\quad + \cos(2\pi 300 \cdot 10^3 - 2k\pi \cdot 2 \cdot 10^3) t). \end{aligned}$$

Дальше расчёт можно не производить, так как составляющая с частотой  $f_0$  будет равна величине постоянной составляющей управляющего сигнала, а амплитуды остальных составляющих будут в два раза меньше соответствующих составляющих управляющего сигнала.

$$U_{f_0} = 10 \text{ В}; \quad U_{f_1} = 9 \text{ В}; \quad U_{f_2} = 6,35 \text{ В}; \quad U_{f_3} = 3 \text{ В}; \quad U_{f_4} = 0 \text{ В}.$$



4) Изобразим спектральную диаграмму амплитуд радиосигнала (рис. 9.14, б).

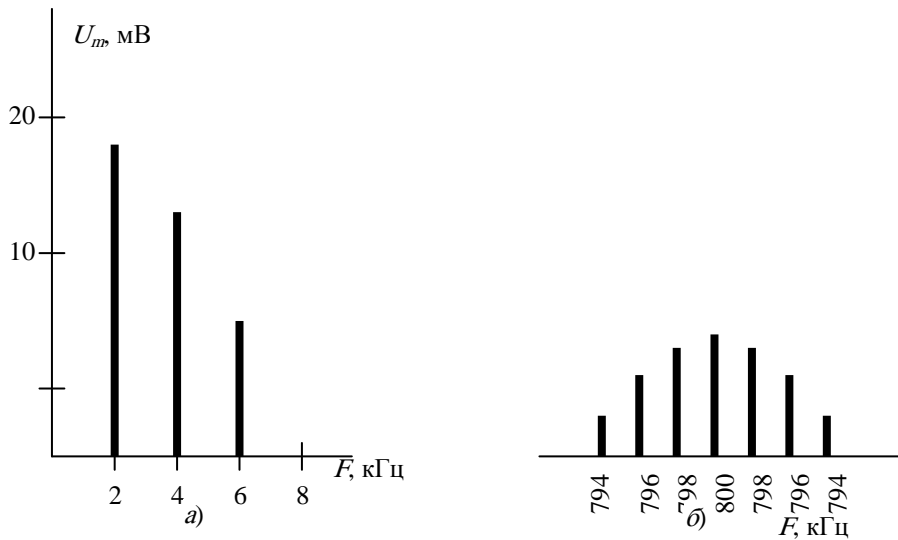


Рис. 9.14

9.12.  $\Delta f = 10$  кГц;  $Q = 30$ .

9.13.  $T_n = 50$  мкс;  $F_n = 20$  кГц;  $\tau_U = 10$  мкс;  $\Delta f = 200$  кГц.

9.14. Например, для определения  $\tau_U$

$$10e^{-10^3 \tau_U} = 0,1 \cdot 10 = 1 \text{ В.}$$

9.15. а)  $10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ ; б)  $5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ ; в)  $3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{рад}}$ .

9.16.  $\dot{G}(\omega) = 2U\tau_U \frac{\sin \frac{\omega\tau_U}{2}}{\frac{\omega\tau_U}{2}} \cos \omega T$ . Применить необходимые теоремы о спектрах.

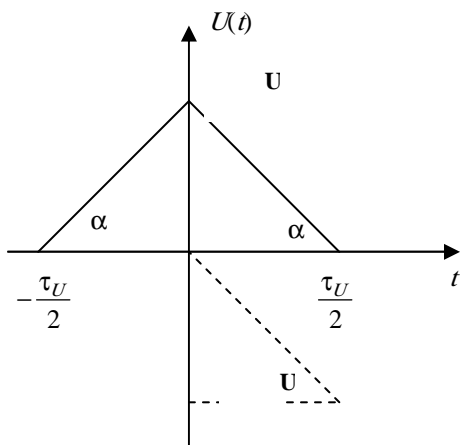


Рис. 9.15

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\frac{\tau_U}{2}}^{\frac{\tau_U}{2}} U(t) e^{-j\omega t} dt = \left. \begin{array}{l} \text{так как } U(t) - \text{четные (рис. 9.15),} \\ \text{то } \int_{-\frac{\tau_U}{2}}^{\frac{\tau_U}{2}} U(t) \sin \omega t dt = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\frac{\tau_U}{2}}^{\frac{\tau_U}{2}} U(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{\frac{\tau_U}{2}} U(t) \cos \omega t dt =$$

$$\begin{aligned}
&= U(t) = U - at = u - \operatorname{tg} \alpha t = U - \frac{U}{-\frac{\tau_U}{2}} t = U \left( 1 - \frac{2t}{\tau_U} \right); \\
&U \left( 1 - \frac{2t}{\tau_U} \right) \cos \omega t dt = 2U \int_0^{\frac{\tau_U}{2}} \cos \omega t dt - \frac{4U}{\tau_U} \int_0^{\frac{\tau_U}{2}} t \cos \omega t dt = \\
&= \frac{2U}{\omega} \sin \omega t \Big|_0^{\frac{\tau_U}{2}} - \frac{4U}{\tau_U} \left( \frac{\sin \omega t}{\omega} t \Big|_0^{\frac{\tau_U}{2}} - \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\tau_U}{2}} \sin \omega t dt \right) = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega \tau_U}{2} - \\
&-\frac{4U}{\tau_U} \int_0^{\frac{\tau_U}{2}} \frac{\sin \frac{\omega t}{2}}{\omega} \cdot \frac{\tau_U}{2} + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t = \frac{4U}{\tau_U \omega^2} \left( 1 - \cos \frac{\omega \tau_U}{2} \right) = \frac{4U}{\tau_U \omega^2} \cdot 2 \sin \frac{2\omega \tau_U}{4} = \\
&= \frac{8U \cdot \tau_U}{\omega^2 \tau_U^2} \sin^2 \frac{\omega \tau_U}{4} = \frac{U \tau_U}{2} \left( \frac{\sin \frac{\omega \tau_U}{4}}{\frac{\omega \tau_U}{4}} \right)^2 = \frac{U_m \tau_U}{2} \frac{\sin^2 x}{x^2}.
\end{aligned}$$

Эту же задачу можно решить, используя теорему запаздывания, теорему о спектральной плотности сигнала (если  $f(t) \rightarrow \dot{G}(\omega)$ , — то  $\int f(t) dt \rightarrow \frac{\dot{G}(\omega)}{j\omega}$ ) и зная спектральную плотность прямоугольного импульса.

9.18. Если  $f_1(t) \Rightarrow \dot{G}_1(\omega)$ , то  $f_2(t) \Rightarrow \dot{G}_2(\omega) = -\dot{G}_1(\omega)$ ;

$$f_3(t) \Rightarrow \dot{G}_3(\omega) = \dot{G}_1(\omega); f_4(t) \Rightarrow \dot{G}_4(\omega) = -\dot{G}_1(\omega).$$

9.20.

$$\dot{W}_{\tau_U}(\Delta\omega) = 0,9 \dot{W}_{\tau_U}(\Delta\omega) \rightarrow \infty = 0,9 W_{\Pi};$$

$$W_{\tau_U} = \int_0^{\tau_U} A_m^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A_m^2 e^{-2\alpha t}}{-2\alpha} \Big|_0^{\tau_U} = A_m^2 \frac{e^{-2\alpha \tau_U}}{-2\alpha} = A_m^2 \frac{1 - e^{-2\alpha \tau_U}}{2\alpha};$$

$$W_{\Pi} = \int_0^{\infty} f^2(t) dt = \int_0^{\infty} A_m^2 e^{-\alpha t} dt = \frac{A_m^2}{2\alpha};$$

$$A_m^2 \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} = 0,9 \frac{A_m^2}{2\alpha}; 1 - e^{-2\alpha \tau_U} = 0,9;$$

$$\tau_U = -\ln \frac{0,1}{2\alpha}; \tau_U = \frac{1,155}{\alpha};$$

$$W_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega} |\dot{G}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega} \frac{A_m^2}{\alpha^2 \left( \sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2} \right)^2} d\omega =$$

$$= \frac{A_m^2}{\pi} \int_0^{\Delta\omega} \frac{d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{A_m}{\pi \alpha} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega}{\alpha} \Big|_0^{\Delta\omega} =$$

$$= \frac{A_m^2}{\pi \alpha} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega}{\alpha} 0,9 \frac{A_m^2}{2\alpha} = \frac{A_m^2}{\pi \alpha} \operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega}{\alpha};$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\Delta\omega}{\alpha} = 0,9 \frac{\pi}{2};$$

$$\Delta\omega = \alpha \operatorname{tg} 0,45\pi; \Delta\omega = 6,16\alpha; \Delta\omega \tau_U = 7,1.$$

9.21. Периодическая последовательность экспоненциальных импульсов;  $A_0 = 12,5$  В;

$$20 \cos(2\pi \cdot 2,5 \cdot 10^3 t - 0,22\pi) \text{ В}; 13,5 \cos(2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 t - 0,31\pi) \text{ В};$$

$$10 \cos(2\pi \cdot 7,5 \cdot 10^3 t - 0,37\pi) \text{ В}; 8 \cos(2\pi \cdot 10^4 t - 0,41\pi) \text{ В};$$

$$\Delta f_{0,1} \approx 31 \text{ кГц}; N = 12.$$

Уменьшится в два раза. Станет равной 6,6 В.

## 10. Переходные процессы в линейных цепях. Анализ прохождения сложных сигналов через линейную цепь

Связь выходного сигнала  $y(t)$  с входным  $x(t)$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t), \quad (10.1)$$

где  $a_n, a_{n-1}, a_0, b_m, b_{m-1}, b_0$  – постоянные коэффициенты.

Решение дифференциального уравнения отыскивается в виде

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{пр}(t),$$

где  $y_{св}(t)$  – свободная составляющая колебаний в рассматриваемой цепи;  $y_{пр}(t)$  – принуждённая (вынужденная или установившаяся) составляющая.

Свободная составляющая  $y_{св}(t)$  является общим решением однородного дифференциального уравнения (без правой части), её характер не зависит от входного воздействия  $x(t)$  и определяется порядком дифференциального уравнения.

Принуждённая составляющая  $y_{пр}(t)$  зависит от входного воздействия  $x(t)$ .

Для линейных цепей первого порядка выходной сигнал определяется по формуле

$$y(t) = [y(0) - y_{пр}(0)] e^{-\frac{t}{\tau}} + y_{пр}(t), \quad (10.2)$$

где  $c = y(0) - y_{пр}(0)$  – постоянная интегрирования определяется на основании начальных условий;

$$\tau = R_3 C \quad \text{или} \quad L / R_3,$$

где  $R_3$  – эквивалентное сопротивление цепи.

Эквивалентным называют сопротивление, которым обладает электрическая цепь по отношению к зажимам накопителя энергии. При этом предполагается, что все источники напряжения замкнуты накоротко, а их внутренние сопротивления включены в соответствующие ветви цепи. Если в цепи имеются источники тока, то ветви с источником разрываются, а ветви с внутренней проводимостью сохраняются.

При воздействии на цепи первого порядка постоянного перепада реакция цепи определяется

$$y(t) = [y(0) - y(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} + y(\infty), \quad (10.3)$$

где  $y(0)$  – начальное значение реакции;  $y(\infty)$  – асимптотическое значение реакции.

Импульсная характеристика цепи  $h_\delta(t)$  – реакция цепи на  $\delta$ -функцию при нулевых начальных условиях.

Переходная характеристика цепи  $h_1(t)$  – реакция цепи на единичную функцию при нулевых начальных условиях.

Интеграл Дюамеля – форма связи выходного колебания  $y(t)$  со входным  $x(t)$ :

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h_\delta(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) h_\delta(\tau) d\tau. \quad (10.4)$$

Другие формы записи интеграла Дюамеля можно получить, учитывая связь импульсной характеристики с переходной:

$$h_\delta(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}; \quad (10.5)$$

$$y(t) = x(0)h_1(t) + \int_0^t x'(t - \tau) h_1(\tau) d\tau; \quad (10.6)$$

$$y(t) = x(t)h_1(0) + \int_0^t x(t-\tau)h_1(\tau) d\tau; \quad (10.7)$$

$$y(t) = x(0)h_1(t) + \int_0^t \dot{x}(\tau)h_1(t-\tau) d\tau; \quad (10.8)$$

$$y(t) = x(t)h_1(0) + \int_0^t x(\tau)\dot{h}_1(t-\tau) d\tau. \quad (10.9)$$

Частотный коэффициент передачи цепи  $K(\omega)$  – преобразование Фурье от импульсной характеристики  $h_\delta(t)$ :

$$K(\omega) = \int_0^\infty h_\delta(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (10.10)$$

$$h_\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Операторный коэффициент передачи цепи  $K(p)$  – преобразования Лапласа от импульсной характеристики  $h_\delta(t)$ :

$$K(p) = \int_0^\infty h_\delta(t) e^{-pt} dt; \quad (10.11)$$

$$h_\delta(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} K(p) e^{pt} dp.$$

Частотный коэффициент передачи  $K(\omega)$  можно определить из дифференциального уравнения цепи, а также путём непосредственного анализа исследуемой схемы.

Очевидно, что  $K(p) = K(\omega)/j\omega = p$ .

Связь спектральной плотности  $G_y(\omega)$  выходного сигнала  $y(t)$  со спектральной плотностью  $G_x(\omega)$  входного  $x(t)$

$$G_y(\omega) = G_x(\omega)K(\omega). \quad (10.12)$$

Связь изображения  $y(p)$  выходного сигнала  $y(t)$  с изображением  $x(p)$  входного  $x(t)$

$$y(p) = x(p)K(p). \quad (10.13)$$

## 10.1. КЛАССИЧЕСКИЙ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОДЫ

### Контрольные вопросы

1. Что понимают под переходным процессом? Какова роль переходных процессов в работе электротехнических устройств?
2. В чем суть анализа переходных процессов классическим методом, и какова последовательность его применения?
3. Записать и пояснить решения дифференциального уравнения  $n$ -го порядка в общем виде. Чем определяется порядок дифференциального уравнения цепи?
4. Написать выражение для прямого и обратного преобразований Лапласа и Фурье и пояснить, для какого класса функций применены эти преобразования.
5. В чём суть анализа переходных процессов операторным методом? В каких случаях следует использовать этот метод?
6. Запишите в развернутом виде выражение второго закона Кирхгофа в операторной форме и поясните входящие в него величины.

### Задачи

10.1.1. Схема электрической цепи приведена на рис. 10.1.

Составить дифференциальные уравнения: а) для определения напряжения  $U$ ; б) для определения тока  $I$ .

Примечание. Здесь и далее параметры электрической цепи и ЭДС, указанные на рисунках, считать заданными.

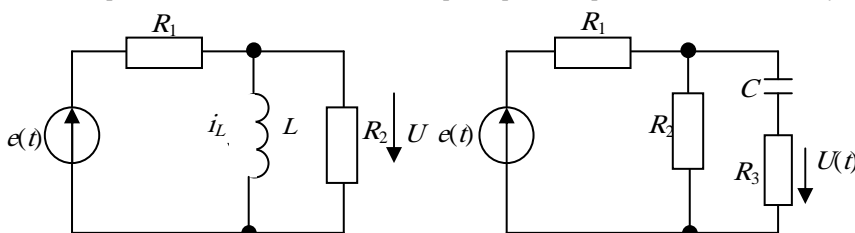


Рис. 10.1

Рис. 10.2

10.1.2. Схема электрической цепи приведена на рис. 10.2. Составить дифференциальное уравнение для определения напряжения  $U$ .

10.1.3. Схема электрической цепи приведена на рис. 10.3. Составить дифференциальные уравнения: а) для определения напряжения  $U$ ; б) для определения тока  $i$ .

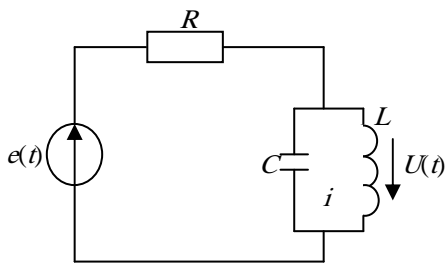


Рис. 10.3

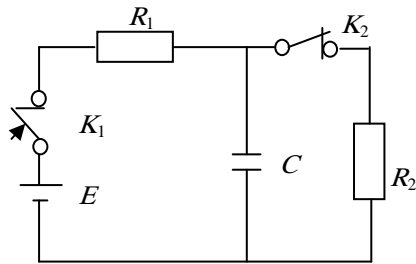


Рис. 10.4

10.1.4. Ёмкость  $C = 1$  мкФ замыкают на активное сопротивление. Начальное напряжение на емкости  $U_{C0} = 100$  В. Определить напряжение на емкости и ток в цепи через 3 мс после замыкания, если: а)  $R = 10$  кОм; б)  $R = 20$  кОм.

10.1.5. Схема цепи изображена на рис. 10.4. Ключ  $K_2$  замкнут, ёмкость  $C$  не заряжена. В момент времени  $t = 0$  включается источник ЭДС  $E$  (закрывается ключ  $K_1$ ).

Требуется:

- вывести формулы временных зависимостей напряжений на всех элементах схемы и токов в ветвях;
- найти величину напряжения, до которого зарядится ёмкость;
- определить промежуток времени, в течение которого процесс заряда ёмкости практически закончится;
- выполнить численные расчёты для б) и в), если  $C = 1$  мкФ;  $R_1 = 1$  МОм;  $R_2 = 0,5$  МОм;  $E = 300$  В.

10.1.6. В момент времени  $t = 0$  к последовательной  $RC$ -цепи подключается напряжение

$$U = 200 \cos(2,64 \cdot 10^3 t + 4\pi/3) \text{ В.}$$

Найти напряжение на ёмкости в момент времени  $t = T/2$ , где  $T$  – период подводимого колебания. Параметры цепи:  $R = 100$  кОм;  $C = 6500$  пФ.

10.1.7. Прямоугольный импульс длительностью  $\tau$  и амплитудой  $U_m$  поступает на вход  $RL$ -цепи (рис. 10.5). Определить законы изменения напряжения на активном сопротивлении и индуктивности и изобразить их графически, если по окончании действия импульса входные зажимы цепи (автоматически) мгновенно замыкаются накоротко ключом  $K$ .

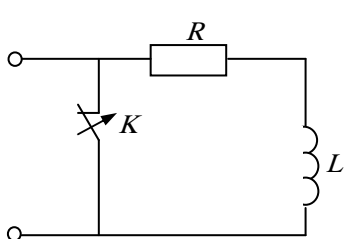


Рис. 10.5

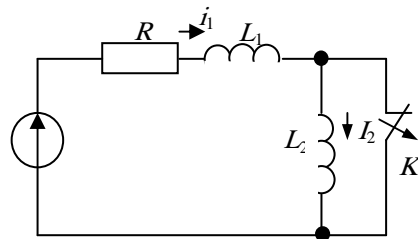


Рис. 10.6

10.1.8.  $RL$ -цепь (рис. 10.6) находится в установившемся режиме под действием постоянной ЭДС  $E$ . В момент  $t = 0$  ключ размыкается. Найти токи  $i_1$  и  $i_2$  через индуктивности в моменты времени  $t = 0_-$ ;  $t = 0_+$ .

10.1.9.  $KRC$ -цепи, находившейся в установившемся режиме, под действием постоянной ЭДС  $E$  в момент  $t = 0$  подключают ёмкость  $C_2$ , предварительно заряжённую до напряжения  $U_0$  (рис. 10.7). Найти напряжения  $U_{C1}$  и  $U_{C2}$  в моменты времени  $t = 0_-$ ;  $t = 0_+$ .

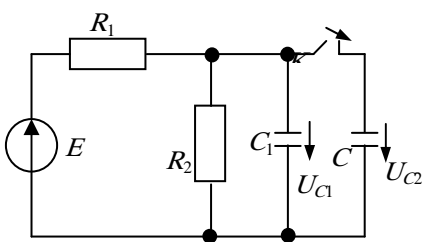


Рис. 10.7

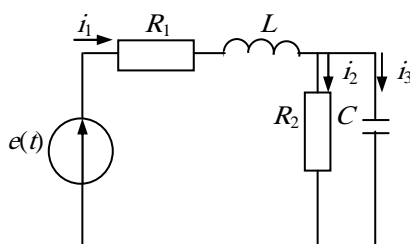


Рис. 10.8

10.1.10. В последовательном колебательном  $RLC$ -контуре ёмкость  $C$  заряжена до напряжения  $U_0$ . Определить закон изменения тока в контуре при разряде ёмкости, если  $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ .

10.1.11. Определить характер свободных процессов в последовательной  $RLC$ -цепи, составленной из элементов со следующими параметрами:  $R = 15$  Ом;  $L = 20$  мГн;  $C = 5000$  пФ. Внутреннее сопротивление источника сигнала  $R_i = 5$  Ом.

10.1.12. Определить частоту свободных колебаний  $\omega_{св}$  и логарифмический декремент затухания  $\theta$  последовательного колебательного контура, рассмотренного в задаче 10.1.11.

10.1.13. Схема электрической цепи приведена на рис. 10.1. Составить операторное уравнение для определения тока  $i$ .

10.1.14. Дано дифференциальное уравнение цепи

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E e^{-\beta t}.$$

Составить операторное уравнение цепи, учитывая, что в момент времени  $t = 0$  напряжение на ёмкости равно  $U_0$ , а ток через катушку равен нулю.

10.1.15. Построить операторную схему замещения и, используя законы Кирхгофа в операторной форме, составить уравнения электрического равновесия цепи, эквивалентная схема которой для мгновенных значений приведена на рис. 10.8.

10.1.16. Схема электрической цепи приведена на рис. 10.1. В момент времени  $t = 0$  ЭДС  $\epsilon(t)$  подключается к цепи. Найти закон изменения напряжения  $U(t)$  операторным методом. Параметры цепи:  $\epsilon(t) = 100$  В;  $R_1 = 100$  Ом;  $R_2 = 200$  Ом;  $L = 10$  мГн.

10.1.17. Решить задачу 10.1.10 операторным методом.

10.1.18. Решить задачу 10.1.16 для случая, когда индуктивность заменена ёмкостью  $C = 1$  мкФ.

10.1.19. В момент времени  $t = 0$  ЭДС  $\epsilon(t)$  подключается к последовательной  $RC$ -цепи. Определить закон изменения напряжения на ёмкости, используя операторный метод. Параметры цепи:  $\epsilon(t) = 10 \sin 10^7 t$  В;  $R = 10$  Ом;  $C = 1000$  пФ.

### Ответы, решения и методические указания

$$10.1.1. \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau} U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{de}{dt}; \quad \tau = \frac{L}{R_1 R_2} (R_1 + R_2);$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{e}{L}.$$

$$10.1.2. \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau} U = \frac{R_3}{R_{12} + R_3} \frac{de_3}{dt}; \quad \tau = (R_{12} + R_3)C;$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad e_3 = e \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$10.1.3. \frac{d^2 U}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt};$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{1}{LCR} e.$$

10.1.4. а) 74 В; 7,4 мА; б) 86 В; 4,3 мА.

$$10.1.5. \text{ а) } U_C = U_{R^2} = E \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right); \quad \tau = R_{12} C; \quad R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

$$i_C = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad i_{R_1} = \frac{E}{R_1 + R_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau}} \right);$$

$$\text{ б) } E \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad \text{ в) } 2,3\tau; \quad \text{ г) } 100 \text{ В; } 0,77 \text{ с.}$$

10.1.6. 116 В.

10.1.7. 1) Согласно второму закону Кирхгофа для любого момента времени ( $0 \ll t$ ,  $\tau_U$ ) справедливо равенство

$$U_R(t) + U_L(t) = U_m$$

или в дифференциальной форме

$$L \frac{d\dot{i}(t)}{dt} + R\dot{i}(t) = U_m,$$

т.е.

$$\frac{d\dot{i}(t)}{dt} + \frac{R}{L} \dot{i}(t) = \frac{U_m}{L}.$$

2) Решение такого уравнения в общем случае будет иметь вид

$$\dot{i}(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{P_k t} + i_b(t).$$

Поскольку цепь описывается дифференциальным уравнением первого порядка и имеет только один энергоёмкий элемент, то

$$i(t) = C_1 e^{pt} + i_b(t) = C e^{pt} + i_b(t),$$

где  $p$  – корень характеристического уравнения:

$$p + \frac{R}{L} = 0; \quad p = -\frac{R}{L}.$$

3) Частное решение уравнения для  $t = \infty$ , т.е. в установившемся режиме, имеет вид

$$i(\infty) = C e^{-\frac{R}{L} \infty} + i_b = i_b = \frac{U_M}{R} - I_0.$$

Следовательно,  $i(t) = C e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{U_M}{R} = C e^{-\frac{R}{L} t} + I_0.$

4) Найти постоянную интегрирования  $C$ . При  $t = 0$   $i(t) = 0$ , поэтому  $C = -\frac{U_M}{R} = -I_0.$

5) Тогда

$$i(t) = -I_0 e^{-\frac{R}{L} t} + I_0 = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

где  $\tau$  – постоянная времени цепи  $RL$ .

6) До момента  $t = \tau_U$  напряжения на резисторе и индуктивности будут иметь вид

$$U_R(t) = R I_0 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = U_M \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right);$$

$$U_L(t) = U_M - U_R = U_M e^{-\frac{t}{\tau}};$$

$$i(\tau_U) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{\tau_U}{\tau}} \right).$$

При  $t = \tau_U$

$$U_R(\tau_U) = U_R = U_M \left( 1 - e^{-\frac{\tau_U}{\tau}} \right); \quad U_L(\tau_U) = U_L = U_M e^{-\frac{\tau_U}{\tau}}.$$

7) При  $t > \tau_U$   $U_R(t) + U_L(t) = 0$  или  $L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) = 0$ ,

т.е.  $\frac{d i(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0.$

8) Сдвинув начало отсчёта времени на  $\tau_U$ , запишем решение дифференциального уравнения в виде

$$i(t - \tau_U) = C e^{p(t - \tau_U)}, \quad \text{где } p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}.$$

9) Определим постоянную интегрирования, исходя из граничных условий.

Так как катушка индуктивности в момент  $t = \tau_U$  препятствует мгновенному изменению тока в цепи, то он будет равен

$$i(\tau_U) = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{\tau_U}{\tau}} \right) = I_1.$$

Следовательно, при  $t = \tau_U$   $C e^{-\frac{1}{\tau}(\tau_U - \tau_U)} = I_1$ , или  $C = I_1.$

10) Окончательно получим  $i(t - \tau_U) = I_1 e^{-\frac{(t - \tau_U)}{\tau}};$

$$U_R = I_1 R e^{-\frac{t - \tau_U}{\tau}} = U_1 e^{-\frac{t - \tau_U}{\tau}} = U_M \left( 1 - e^{-\frac{\tau_U}{\tau}} \right) e^{-\frac{t - \tau_U}{\tau}};$$

$$U_L = -U_R = -U_1 e^{-\frac{t - \tau_U}{\tau}} = -U_M \left( 1 - e^{-\frac{\tau_U}{\tau}} \right) e^{-\frac{t - \tau_U}{\tau}}.$$

Эпюры напряжений представлены на рис. 10.9.

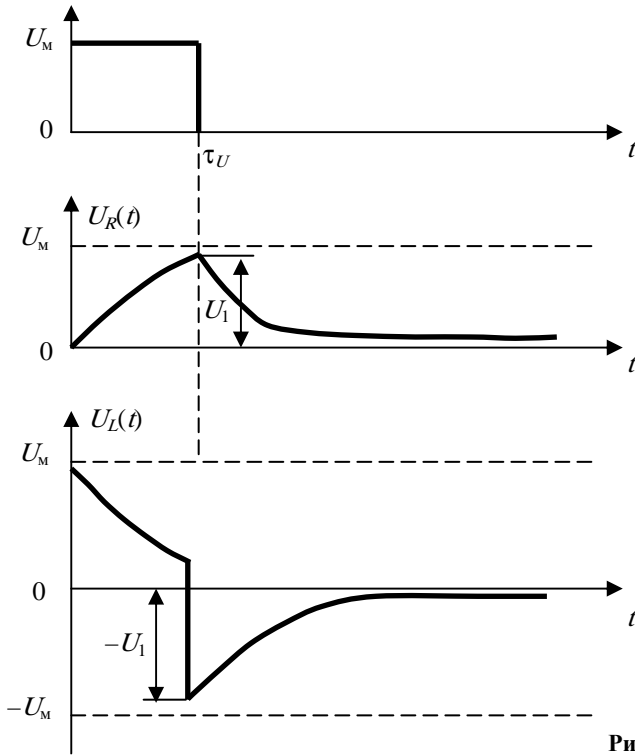


Рис. 10.9

10.1.8. До коммутации ток течёт через индуктивность  $L_1$  и замкнутый ключ, минуя индуктивность  $L_2$ :  $i_1(0-) = i_R(0-) = E/R$ ;  $i_2(0-) = 0$ . После коммутации ( $t = 0+$ ) токи через индуктивности изменяются скачками, и первый закон коммутации не выполняется.

Для определения токов  $i_1(0+)$  и  $i_2(0+)$  нужно использовать принцип непрерывности суммарного потокоцепления цепи в моменты

$$t = 0- \text{ и } t = 0+;$$

$$\psi(0-) + \psi_2(0-) = \psi_1(0+) + \psi_2(0+).$$

Выражая потокоцепление через токи ( $\psi = Li$ ) и учитывая, что  $i_2(0-) = 0$ ;  $i_1(0+) = i_2(0+)$ , получаем

$$i_1(0+) = i_2(0+) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{E}{R}.$$

10.1.9. Для момента времени  $t = 0-$   $U_{C_2}(0-)$  определяют из начальных условий,  $U_{C_1}(0-)$  – в результате расчёта напряжений  $U_{C_1}(0+)$  и  $U_{C_2}(0+)$  нужно использовать принцип непрерывности во времени суммарного заряда цепи

$$U_{C_2}(0-) = U_0, U_{C_1}(0-) = ER_2 / (R_1 + R_2);$$

$$U_{C_1}(0+) = U_{C_2}(0+) = \frac{1}{C_1 + C_2} \left( \frac{ER_2 C_1}{R_1 + R_2} + C_2 U_0 \right).$$

$$10.1.10. i = \frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\tau t} \sin \omega_c t; \quad \delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_c^2 = \frac{1}{LC} - \delta^2.$$

10.1.11. Критическое сопротивление контура

$$R_{кр} = 2\beta = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 4 \text{ кОм}.$$

Суммарное сопротивление контура  $R = 20 \text{ Ом} \ll R_{кр}$ . Свободные процессы в контуре имеют колебательный характер.

$$10.1.12. \omega_{св} \approx \omega_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ рад/с}; \quad \vartheta = 31,4.$$

$$10.1.13. I_L(p) = \frac{E(p)}{R_1} \frac{\alpha}{p + \alpha}; \quad \alpha = \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

$$10.1.14. \left( R + pL + \frac{1}{pC} \right) I(p) = \frac{E}{p + \beta} - \frac{U_0}{p}.$$

10.1.15. Операционная эквивалентная схема рассматриваемой цепи приведена на рис. 10.10. Уравнения электрического равновесия в операционной форме имеют вид



$$I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) = 0;$$

$$(R_1 + pL)I_1(p) + R_2I_2(p) = E(p) + Li_1(0);$$

$$\frac{1}{pC}I_3(p) - R_2I_2(p) = -\frac{U_C(0)}{p}.$$

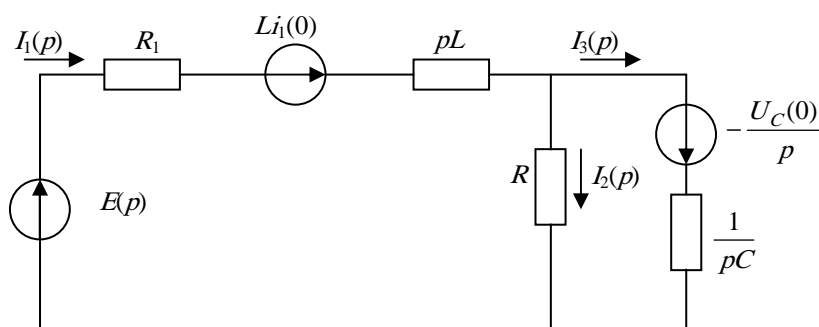


Рис. 10.10

10.1.16.  $U(t) = 66,7e^{6,67 \cdot 10^3 t}$  В.

10.1.17.  $i = \frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\delta t} \sin \omega_c t$ ;  $\delta = \frac{R}{2L}$ ;  $\omega_c^2 = \frac{1}{LC} - \delta^2$ .

10.1.18.  $U(t) = 66,7(1 - e^{-1,5 \cdot 10^7 t})$  В.

10.1.19.  $U_C(t) = 0,99e^{-10^8 t} + 9,95 \sin(10^7 t - 5^\circ 43')$  В.

## 10.2. СУПЕРПОЗИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

### Контрольные вопросы

1. Для каких цепей применимы суперпозиционные методы анализа переходных процессов и в чём их суть?
2. Что понимается под импульсной и переходной характеристиками цепи и какова связь между ними?
3. Написать формулы, выражающие связь между временными и частотными характеристиками линейных цепей.
4. Каким образом с помощью переходной характеристики цепи можно определить напряжение на её выходе?
5. Как рассчитывается переходный процесс с помощью импульсной характеристики цепи.
6. Дайте сравнительную характеристику классического, операторного, спектрального и временного суперпозиционных методов расчёта переходных процессов.

### Задачи

10.2.1. Найти операторную, импульсную и переходную характеристики цепей, частотные коэффициенты передачи которых равны:

а)  $K(\omega) = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma\omega}$ ;

б)  $K(\omega) = \frac{\gamma\omega C}{1 + \gamma\omega RC - \omega^2 LC}$ ;  $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ .

10.2.2. Определить переходные и импульсные характеристики простейшей  $RL$ -цепи (рис. 10.11) для следующих случаев: а) внешнее воздействие – напряжение  $U_1$ ; реакция – ток  $i_1$ ; б) внешнее воздействие – напряжение  $U_1$ ; реакция – напряжение  $U_2$ .

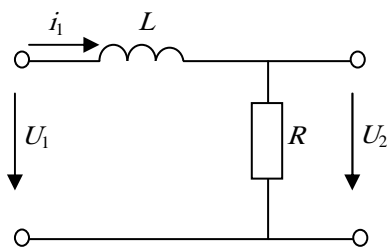


Рис. 10.11

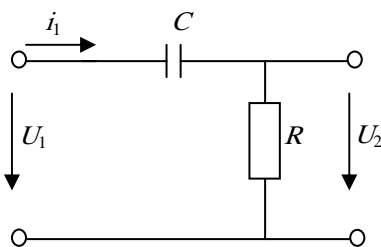


Рис. 10.12

10.2.3. Определить переходную и импульсную характеристики простейшей  $RC$ -цепи (рис. 10.12), если  $R = 1$  кОм;  $C = 1$  мкФ (внешнее воздействие – напряжение  $U_1$ , реакция – ток  $i_1$ ).

10.2.4. На вход некоторой цепи с нулевыми начальными условиями в момент времени  $t = 0$  подают экспоненциально убывающее напряжение  $U_1(t) = 2e^{-500t}$  В. Выходное напряжение  $U_2(t) = 4e^{-500t} - 4e^{-10^3 t}$  В. Найти переходную характеристику цепи.

10.2.5. Решить предыдущую задачу, если

$$U_2(t) = 4e^{-500t} - 2e^{-250t} \text{ В.}$$

10.2.6. На входе одного из каскадов радиолокационного дальномера стоит цепочка, изображённая на рис. 10.13. Найти напряжение на выходе цепи, если на её вход подаётся напряжение  $U_{\text{вх}}(t) = U_0 e^{-\alpha t}$ .

Задачу решить спектральным методом.

10.2.7. На цепь, изображённую на рис. 10.13, воздействует функция  $U_{\text{вх}}(t) = EI(t)$ . Определить спектральным методом напряжение на выходе цепи.

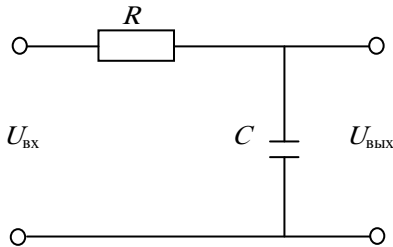


Рис. 10.13

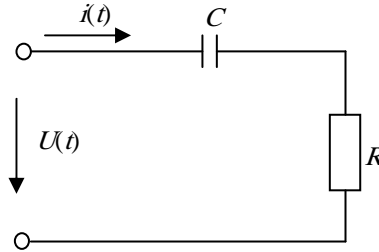


Рис. 10.14

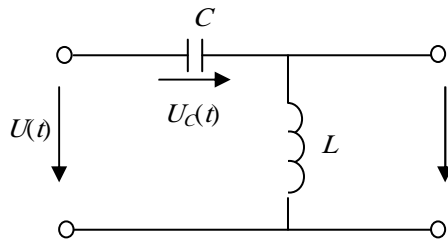


Рис. 10.15

10.2.8. Переходная характеристика цепи (рис. 10.12), рассмотренной в задаче 10.2.3,  $h_1(t) = 10^{-3} 2^{-10^3 t}$  см. Найти реакцию этой цепи на воздействие напряжения  $U$ :

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U_1 = \frac{100}{t_1} t \text{ В} & \text{при } 0 \leq t < t_1 = 10^{-3} \text{ с}; \\ U_2 = 100 \text{ В} & \text{при } t_1 \leq t < \infty, \end{cases}$$

10.2.9. Найти реакцию цепи, рассмотренной в предыдущей задаче, на заданное воздействие по известной импульсной характеристике

$$h_8(t) = 10^{-3} \delta(t) - e^{-10^3 t} \text{ См} \cdot \text{с}^{-1}.$$

10.2.10. Напряжение на входе последовательной  $RC$ -цепи (рис. 10.14) изменяется по следующему закону:

$$U = 100 \left( 1 - e^{-10^3 t} \right) I(t) \text{ В.}$$

Параметры элементов цепи:  $R = 1$  кОм;  $C = 2$  мкФ. Найти ток в цепи с использованием импульсной и переходной характеристик цепи.

10.2.11. Простейшую  $RL$ -цепь (рис. 10.11) в момент времени  $t = 0$  подключают к источнику экспоненциально убывающей ЭДС  $U_1 = E e^{-\alpha t}$ . Найти напряжение  $U_2(t)$  с помощью переходной характеристики цепи.

10.2.12. Решить предыдущую задачу, используя импульсную характеристику цепи.

10.2.13. Простейшую  $LC$ -цепь без потерь (рис. 10.15) подключают к источнику линейно возрастающей ЭДС  $U(t) = Kt$ , где  $K$  – коэффициент пропорциональности. Найти напряжения  $U_L(t)$  и  $U_C(t)$  с помощью переходной характеристики цепи.

10.2.14. Решить задачу 10.2.13, используя импульсную характеристику цепи.

10.2.15. Найти импульсные и переходные характеристики последовательного колебательного контура ( $Q \gg 1$ ). Реакцией контура на ЭДС в виде  $\delta$ -функции и единичной функции считать: а) ток; б) напряжение на емкости; в) напряжение на индуктивности.

## Ответы, решения и методические указания

10.2.1.

$$а) K(p) = \frac{\alpha}{\alpha + p}; \quad h_{\delta}(t) = \alpha e^{-\alpha t} \cdot 1(t); \quad h_1(t) = (1 - e^{-\alpha t}) \cdot 1(t);$$

$$б) K(p) = \frac{pC}{1 + pRC + p^2 LC}; \quad h_{\delta}(t) = \frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \left( \cos \omega_C t - \frac{\delta}{\omega_C} \sin \omega_C t \right) \cdot 1(t);$$

$$h_1(t) = \frac{1}{\omega_C L} e^{-\delta t} \sin \omega_C t \cdot 1(t); \quad \delta = \frac{R}{2L}; \quad \omega_C^2 = \frac{1}{LC} - \delta^2.$$

10.2.2.

1) Переходная характеристика цепи  $h_1(p)$  численно равна реакции цепи на воздействие единичного скачка тока или напряжения. Размерность  $h_1(t)$  равна отношению размерностей отклика и воздействия. В рассматриваемом случае переходная характеристика цепи численно равна входному току цепи  $i_1(t)$  при  $U_1(t) = \mathcal{I}(t)$  и имеет размерность проводимости. Учитывая, что  $\mathcal{I}(t) = I/p$ , находим изображение входного тока цепи

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{pZ(p)} = \frac{1}{L} [p(p + R/L)]^{-1}.$$

Переходя от изображения к оригиналу с помощью соотношения  $[p(p + \alpha)]^{-1} = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$ , получим переходную характеристику цепи  $h_1(t) = \frac{1}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$  См.

Импульсная характеристика цепи  $h_{\delta}(t)$  численно равна реакции цепи на воздействие единичного импульса тока или напряжения. Размерность импульсной характеристики равна отношению размерности отклика к размерности произведения воздействия на время. В рассматриваемом случае импульсная характеристика цепи численно равна входному току цепи  $i_1(t)$  при  $U_1(t) = \delta(t)$  и имеет размерность См  $\cdot$  с<sup>-1</sup>.

Учитывая  $\delta(t) = 1$ , определяем изображение входного тока цепи

$$I_1(p) = \frac{U_1(p)}{Z(p)} = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{L} \frac{1}{p + R/L}.$$

Переходя от изображения к оригиналу с помощью соотношения  $(p + \alpha)^{-1} = e^{-\alpha t}$ , находим импульсную характеристику цепи

$$h_{\delta}(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \text{ См} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Легко убедиться, что такое же выражение для  $h_{\delta}(t)$  можно получить, используя известное соотношение между переходной и импульсной характеристиками цепи

$$h_{\delta}(t) = h_1(0)\delta(t) + \frac{d}{dt} h_1(t).$$

2) Поскольку  $U_2 = i_1 R$ , можно записать

$$h_1(t) = 1 - e^{-\frac{R}{L}t}; \quad h_{\delta}(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

10.2.3.  $h_1(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{R}{RC}t} = 10^{-3} e^{-10^3 t};$

$$h_{\delta}(t) = \frac{1}{R} \delta(t) - \frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} = 10^{-3} \delta(t) - e^{-10^3 t}.$$

10.2.4. Найти изображение входного и выходного напряжений  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  и по ним операторный коэффициент передачи цепи по напряжению  $K(p)$ . Переходную характеристику цепи определяют с помощью соотношения  $h_1(t) = K(p) / p; \quad h_1(t) = 1 - e^{-10^3 t}.$

10.2.5.  $h_1(t) = 1e^{-250 t}$

10.2.6. Определим напряжение на (ёмкости) конденсаторе.

1) Находим спектральную функцию входного сигнала

$$G_{BX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\gamma\omega t} dt = \int_0^{\infty} U_0 e^{-\alpha t} e^{-\gamma\omega t} dt = \frac{U_0}{\alpha + \gamma\omega}.$$

2) Определяем

$$K(\omega) = \frac{\frac{1}{\gamma\omega C}}{R + \frac{1}{\gamma\omega C}} = \frac{1}{1 + \gamma\omega CR} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + \gamma\omega} = \frac{\beta}{\beta + \gamma\omega},$$

где  $\beta = \frac{1}{RC}$ .

3) Общее выражение для выходного сигнала

$$\begin{aligned} U_{\text{вых}}(t) = U_C(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) G_{\text{вых}}(\omega) e^{\gamma\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{\beta + \gamma\omega} \frac{U_0}{\alpha + \gamma\omega} e^{\gamma\omega t} d\omega = \\ &= \frac{\beta U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\beta + \gamma\omega)(\alpha + \gamma\omega)} e^{\gamma\omega t} d\omega = \frac{\beta U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\beta + \gamma\omega} e^{\gamma\omega t} d\omega + \frac{\beta U_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{\alpha + \gamma\omega} e^{\gamma\omega t} d\omega = \\ &= \beta U_0 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\beta + \gamma\omega} e^{\gamma\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B}{\alpha + \gamma\omega} e^{\gamma\omega t} d\omega \right) = \beta U_0 (Ae^{-\beta t} + Be^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

4) Найдём постоянные  $A$  и  $B$ . Так как

$$\frac{A}{\beta + \gamma\omega} + \frac{B}{\alpha + \gamma\omega} = \frac{1}{(\beta + \gamma\omega)(\alpha + \gamma\omega)},$$

то  $A\alpha + A\gamma\omega + B\beta + B\gamma\omega = 1$

или  $A\alpha + B\beta + \gamma\omega(A + B) = 1;$

отсюда

$$\begin{cases} A\alpha + B\beta = 1; \\ A + B = C; \\ \begin{cases} A = -B, \\ -B\alpha + B\beta = 1; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{1}{\beta - \alpha}; \\ A = \frac{-1}{\beta - \alpha}. \end{cases}$$

5) Окончательное выражение для напряжения на конденсаторе

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \beta U_0 \left( \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} \right) = \\ &= \frac{\beta U_0}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}) = \frac{\beta U_0}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}); \end{aligned}$$

а) при  $\alpha > \beta$   $U_0(t) = \frac{\beta U_0}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$  и график будет выглядеть как на рис. 10.16;

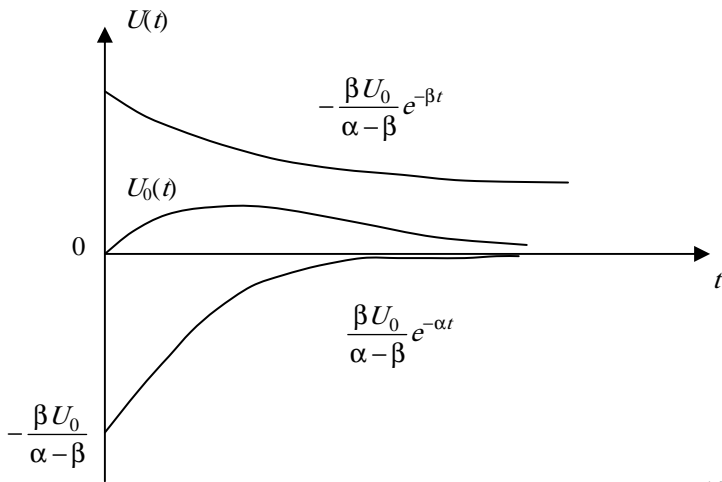


Рис. 10.16

б) при  $\alpha = \beta$   $e^{-\beta t} = e^{-\alpha t}$ , а  $U_0(t) = 0/0$ .

Раскроем неопределённость по правилу Лопиталя:

$$U_0(t)_{\alpha=\beta} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\beta U_0}{(\beta - \alpha)} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) = \lim_{t \rightarrow 0} \beta U_0 \frac{-t e^{-\alpha t} - 0}{-1} = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \beta U_0 t e^{-\alpha t} = \beta t U_0 e^{-\beta t}.$$

При  $t = 0$

$$U_0(t) = 0; \quad \dot{U}_0(t) = (\beta t U_0 e^{-\beta t})' = U_0 \beta e^{-\beta t} - U_0 \beta^2 t e^{-\beta t} = 0; \\ U_0 \beta e^{-\beta t} (1 - \beta t) = 0.$$

Так как  $e^{-\beta t} \neq 0$  в реальном масштабе времени, то

$$1 - \beta t = 0; \quad t = \frac{1}{\beta}.$$

При этом  $U_0(t) = U_0(t)_{\max} = \beta \frac{1}{\beta} U_0 e^{-\beta \frac{1}{\beta}} \approx 0,37 U_0$  (рис. 10.17);

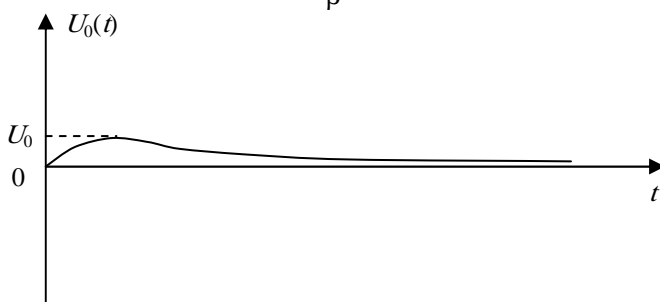


Рис. 10.17

в) при  $\alpha < \beta$   $U_0(t) = \frac{\beta U_0}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$  (рис. 10.18),

$$U_0(t) = U_{0\max} \quad \text{при} \quad t = \frac{\ln \frac{\alpha}{\beta}}{\alpha - \beta}.$$

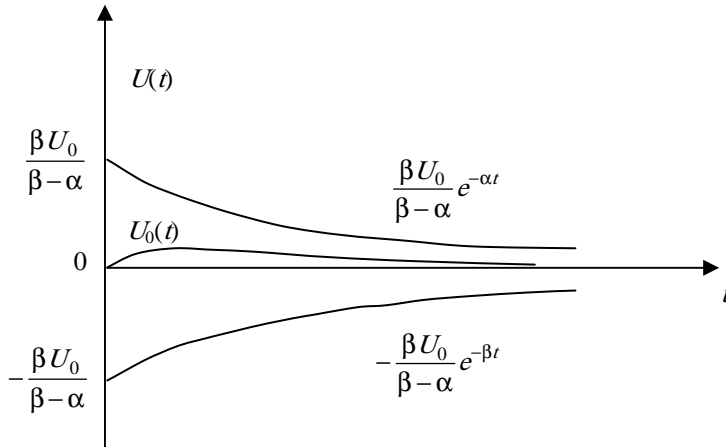


Рис. 10.18

$$10.2.7. U_0(t) = E \left( I - e^{-\frac{t}{RC}} \right) I(t).$$

10.2.8. Разделим исследуемый промежуток времени  $0 \leq t \leq \infty$  на два интервала: 1)  $0 \leq t \leq t_1$ ; 2)  $t \leq t < \infty$ . Определим реакцию цепи на заданное воздействие на каждом интервале времени.

На первом интервале ( $0 \leq t \leq t_1$ )

$$i(t) = \int_0^t \frac{dU_1}{dt} \Big|_{t=\tau} h_1(t-\tau) d\tau.$$

Учитывая, что на этом интервале времени

$$\frac{dU_1}{dt} \Big|_{t=\tau} = \frac{100}{t_1} = 10^5 \text{ В} \cdot \text{с}^{-1}; \quad h_1(t-\tau) = 10^{-3} e^{-10^3(t-\tau)} \text{ См},$$

получаем 
$$i(t) = 10^2 \int_0^t e^{-10^3(t-\tau)} d\tau.$$

Вынося  $e^{-10^3 t}$  из-под знака интегрирования и учитывая что  $\int_0^t e^{10^3 \tau} d\tau = 10^{-3} (e^{10^3 \tau} - 1)$ , окончательно находим

$$i(t) = 0,1 (1 - e^{-10^3 t}) \text{ А при } 0 \leq t < t_1.$$

На втором интервале времени ( $t_1 \leq t < \infty$ )

$$i(t) = \int_0^{t_1} \frac{dU}{dt} \Big|_{t=\tau} h_1(t-\tau) d\tau = 0,1 e^{-10^3 t} (e^{10^3 t_1} - 1) = 0,172 e^{-10^3 t} \text{ А}.$$

10.2.9. Как и в задаче 10.2.8, разделить исследуемый промежуток времени на два интервала: 1)  $0 \leq t < t_1$ ; 2)  $t_1 \leq t < \infty$ . Определить реакцию цепи на заданное воздействие на каждом интервале времени.

• На первом интервале времени ( $0 \leq t < t_1$ )

$$i(t) = \int_0^t U_1(\tau) h_8(t-\tau) d\tau = 0,1 (1 - e^{-10^3 t}) \text{ А}.$$

• На втором интервале времени ( $t_1 \leq t < \infty$ )

$$i(t) = \int_0^{t_1} U_1(\tau) h_8(t-\tau) d\tau + \int_{t_1}^t U_2(\tau) h_8(t-\tau) d\tau = 0,172 e^{-10^3 t} \text{ А}.$$

$$10.2.10. i(t) = 0,2 (e^{-500t} - e^{-10^3 t}) I(t), \text{ А}.$$

$$10.2.11. U_2(t) = \frac{E}{1 - \alpha\tau} (e^{-\alpha t} - e^{-t/\tau}), \quad \tau = L/R$$

10.2.13. Для отыскания переходной характеристики цепи найдём сначала операторный коэффициент передачи цепи по напряжению:

$$K(p) = \frac{U_L(p)}{U(p)} = \frac{PL}{PL + 1/PC} = \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2},$$

где  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  – резонансная частота последовательного колебательного контура.

Изображение переходной характеристики цепи

$$h_1(t) = K(p)/P = \frac{P}{P^2 + \omega_0^2}.$$

Учитывая, что  $p(p^2 + \alpha^2)^{-1} = \cos \alpha t$ , получим

$$h_1(t) = \cos \omega_0 t.$$

Напряжение на индуктивности при  $t \geq 0$

$$U_L(t) = U(0)h_1(t) + \int_0^t U(\tau)h_1(t-\tau)d\tau.$$

Поскольку  $U(0) = 0$ ;  $U(\tau) = \frac{dU(t)}{dt} = K$ ,

то 
$$U_L(t) = K \int_0^t \cos \omega_0(t-\tau)d\tau = \frac{K}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Напряжение на ёмкости при известных напряжениях  $U(t)$  и  $U_L(t)$

$$U_0(t) = U(t) - U_L(t) = Kt - \frac{K}{\omega_0} \sin \omega_0 t \text{ при } t \geq 0.$$

10.2.15.

а)  $h_\delta(t) = \frac{1}{L} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ ;  $h_1(t) = \frac{1}{\omega_0 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ ;

б)  $h_\delta(t) = \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ ;  $h_1(t) = 1 - e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ ;

в)  $h_\delta(t) = \delta(t) - \omega_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$ ;  $h_1(t) = e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$ .

## 11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Входное сопротивление  $Z(p)$  (или входная проводимость  $Y(p)$ ) физически реализуемого двухполюсника имеет вид дробно-рациональной функции комплексной частоты

$$p = \delta + \gamma\omega$$

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{M(p)}{N(p)} = \frac{a_m P^m + a_{m-1} P^{m-1} + \dots + a_1 P + a_0}{b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \dots + b_1 P + b_0} = \\ &= \frac{a_m (P - P_1^0)(P - P_2^0) \dots (P - P_m^0)}{b_n (P - P_1^\infty)(P - P_2^\infty) \dots (P - P_n^\infty)}, \end{aligned}$$

у которой:

- 1) коэффициенты  $a_i + b_j$  – действительные и положительные числа;
- 2) наибольшие и наименьшие показатели степени  $P$  числителя и знаменателя различаются не более чем на единицу;
- 3) действительная часть нулей  $P_i^0$  и полюсов  $P_j^\infty$  отрицательна или равна нулю;
- 4) кратные нули и полюсы на мнимой оси отсутствуют;
- 5) действительная часть входного сопротивления  $Z(p)$  (проводимости  $Y(p)$ ) при  $p = P = \gamma\omega$  положительна или равна нулю при любом значении  $\omega$ ;

Основными методами синтеза двухполосников по заданным функциям  $Z(p)$  (или  $Y(p)$ ) являются:

1. Метод разложения входного сопротивления  $Z(p)$  (входной проводимости  $Y(p)$ ) на простейшие дроби.
2. Метод разложения входного сопротивления  $Z(p)$  (входной проводимости  $Y(p)$ ) в непрерывную дробь.

Основные этапы решения задачи методом разложения  $Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$  на простейшие дроби:

1. Если степень полинома  $M(p)$  выше или равна степени полинома  $N(p)$ , осуществляется выделение целой части дроби  $\frac{M(p)}{N(p)}$ :

$$Z(p) = L_p + \frac{M'(p)}{N(p)}.$$

2. Получившаяся правильная дробь  $\frac{M'(p)}{N(p)}$  раскладывается на простейшие дроби.

3. Путём сравнения выражений простейших дробей с табличными выражениями входных сопротивлений простейших цепей (см. табл. 11.1) определяют структуру и параметры элементов простейших двухполосников.

4. Составляют схему синтезируемого двухполосника путём последовательного соединения простейших двухполосников (рис. 11.1, а)

При разложении входной проводимости  $Y(p)$  на простейшие дроби каждая дробь представляет собой проводимость простейшего двухполосника, структуру и параметры элементов, которых можно также определить, пользуясь табл. 11.1. Для этого рассматривают для каждой дроби её обратное выражение, соответствующее сопротивлению простейшего двухполосника. Схема синтезируемого двухполосника реализуется путём параллельного соединения простейших двухполосников (рис. 11.1, б)

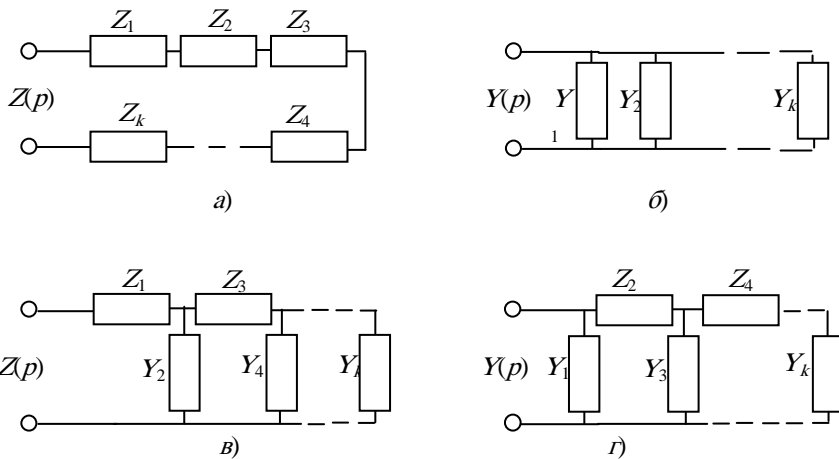


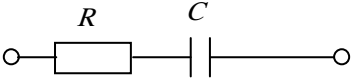
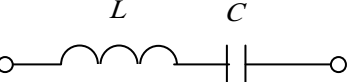
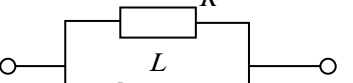
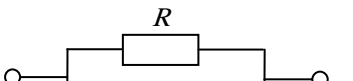
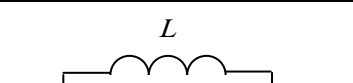
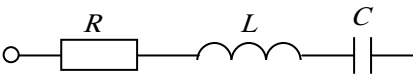
Рис. 11.1

### 11.1. Входное сопротивление простейших двухполосников

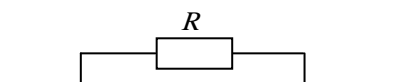
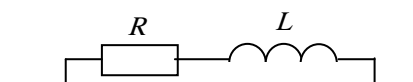
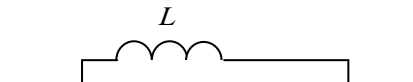
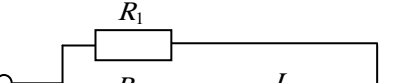
Схема двухполосника	Входное сопротивление $Z(p)$
1.	$Z = R$
2.	$Z = PL$
3.	$Z = \frac{1}{pC}$
4.	$Z = R + PL$

Продолжение табл. 11.1

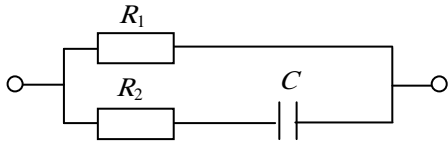


5.		$Z = R + \frac{1}{pC}$
6.		$Z = pL + \frac{1}{pC}$
7.		$Z = \frac{pR}{p + \frac{R}{L}}$
8.		$Z = \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}$
9.		$Z = \frac{p \frac{1}{C}}{p^2 + \frac{1}{LC}}$
10.		$Z = R + pL + \frac{1}{pC}$

Продолжение табл. 11.1

	Схема двухполюсника	Входное сопротивление $Z(p)$
11.		$Z = \frac{p \frac{1}{C}}{p^2 + p \frac{1}{RC} + \frac{1}{LC}}$
12.		$Z = \frac{p \frac{1}{C} + \frac{R}{LC}}{p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$
13.		$Z = \frac{p^2 R + p \frac{1}{C}}{p^2 + p \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$
14.		$Z = \frac{pR_1L + R_1R_2}{pL + R_1 + R_2}$

15.



$$Z = \frac{PR_1R_2 + \frac{R_1}{C}}{P(R_1 + R_2) + \frac{1}{C}}$$

На рисунке 11.1, *в* и *г* изображены схемы двухполюсников цепной (лестничной) структуры, входное сопротивление и проводимость которых могут быть представлены в виде непрерывной дроби:

$$Z(p) = Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{Y_4 + \dots + \frac{1}{Y_n}}}};$$

$$Y(p) = Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{Y_3 + \frac{1}{Z_4 + \dots + \frac{1}{Z_n}}}}.$$

Таким образом, чтобы реализовать двухполюсник в виде лестничной схемы, необходимо представить заданное входное сопротивление (или проводимость) в виде непрерывной дроби.

Основные этапы разложения  $Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$  в непрерывную дробь:

1. Располагая члены полиномов  $M(p)$  и  $N(p)$  либо по убывающим, либо по возрастающим степеням  $P$ , производят деление  $M(p)$  на  $N(p)$ . В результате будет получено сопротивление  $Z_1(p)$  и остаток

$$Z(p) = \frac{M(p)}{N(p)} = Z_1(p) + \frac{M'(p)}{N(p)}.$$

2. Путём деления знаменателя остатка  $N(p)$  на его числитель  $M'(p)$  получают проводимость  $Y_2(p)$  и остаток  $\frac{N'(p)}{M'(p)}$ :

$$\frac{M'(p)}{N(p)} = Y_2(p) + \frac{N'(p)}{M'(p)}.$$

3. Процедура (деление – обращение остатка) последовательного определения параметров элементов цепной схемы ( $Z_3(p)$ ;  $Y_4(p)$ ; ...) продолжается до тех пор, пока остаток не станет равным 0.

В процессе деления необходимо следить за тем, чтобы остаток соответствовал физически реализуемой цепи; частное от деления содержало  $P$  только в степени равной 0 или  $\pm 1$ . Если эти условия не будут выполняться, то необходимо осуществить деление, изменив порядок расположения членов делимого и делителя (например, от расположения по убывающим степеням перейти к расположению по возрастающим степеням).

Передаточная функция физически реализуемого четырёхполюсника

$$K(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_m P^m + a_{m-1} P^{m-1} + \dots + a_1 P + a_0}{b_n P^n + b_{n-1} P^{n-1} + \dots + b_1 P + b_0},$$

представляет собой дробно-рациональную функцию, с вещественными коэффициентами  $a_i$  и  $b_j$ , у которой:

- 1) действительная часть полюсов отрицательна или равна 0;
- 2) степень полинома числителя не превышает степень полинома знаменателя ( $m \leq n$ );
- 3) свободный член знаменателя  $b_0$  не должен равняться нулю.

Коэффициент передачи мощности (квадрат модуля коэффициента передачи) физически реализуемого четырёхполюсника

$$K_p(\omega) = K^2(\omega) = K(\gamma\omega)K(-\gamma\omega) = \frac{C(\omega^2)}{D(\omega^2)}.$$

представляет собой чётную дробно-рациональную функцию с вещественными коэффициентами.

При  $\omega^2 = -p^2$  коэффициент передачи мощности

$$K_p(p) = K(p)K(-p) = \frac{C(-p^2)}{D(-p^2)}$$

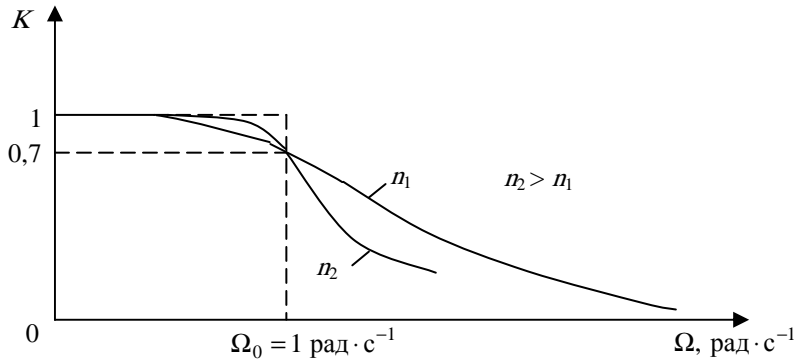
также представляет собой чётную дробно-рациональную функцию с вещественными коэффициентами, нули и полюсы которой имеют квадратную симметрию.

Одним из наиболее простых видов аппроксимации АЧХ четырёхполюсников являются максимально – плоская аппроксимация (по Баттерворту).

При аппроксимации нормированной идеальной АХЧ ФНЧ с частотой среза  $\Omega = 1$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$  (рис. 11.2) по Баттерворту используется выражение

$$K(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}},$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$  является порядком фильтра.



**Рис. 11.2**

АХЧ реальных фильтров различных видов (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) получают из выражения АХЧ нормированного ФНЧ (фильтра-прототипа) методом преобразования частоты. Сущность метода преобразования частоты заключается в замене переменной частоты  $\Omega$ , входящей в выражение АХЧ фильтра-прототипа новой переменной, при которой на новой шкале частот полосы пропускания и задерживания будут располагаться в нужных по условию решаемой задачи местах (в зависимости от вида фильтра).

АХЧ основных видов фильтров при аппроксимации по Баттерворту приведены в табл. 11.2 – 11.5.

Синтез четырёхполюсника по заданной АХЧ  $K(\omega)$  осуществляется в следующем порядке:

1. Определяют нормированное значение коэффициента передачи мощности

$$T^2(\omega) = \frac{K^2(\omega)}{K_{\max}^2} = \frac{K^2(\omega)}{R_n/4R_i},$$

где  $R_n$  – сопротивление нагрузки;  $R_i$  – внутреннее сопротивление источника.

2. Заменяя  $\omega^2$  на  $-p^2$ , получают выражение модуля коэффициента передачи мощности в операторной форме

$$|T(p)|^2 = T^2(\omega)|_{\omega^2 = -p^2}.$$

3. Определяют квадрат модуля коэффициента отражения

$$|\gamma(p)|^2 = \gamma(p)\gamma(-p) = 1 - |T(p)|^2.$$

4. Находят нули и полюсы выражения  $|\gamma(p)|^2$  и записывают выражение коэффициента отражения

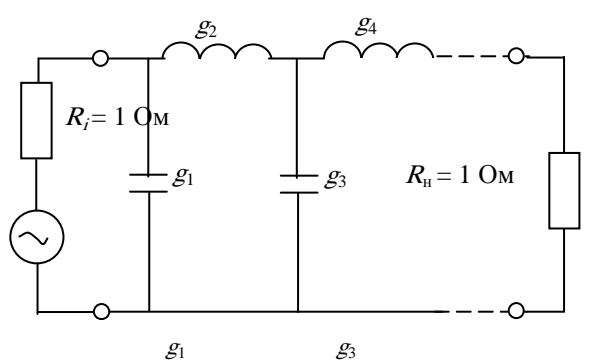
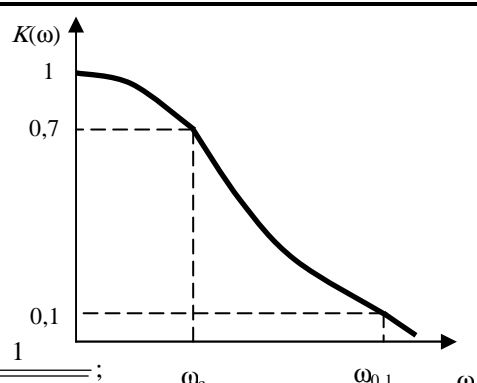
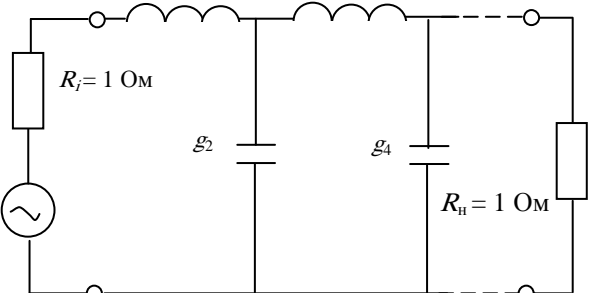
$$\gamma_{1,2}(p) = H \frac{(p \pm p_1^0)(p \pm p_2^0) \dots}{(p - p_1^\infty)(p - p_2^\infty)},$$

где множители знаменателя образованы полюсами с отрицательной действительной частью, а множители числителя – нулями с любым знаком действительной части.

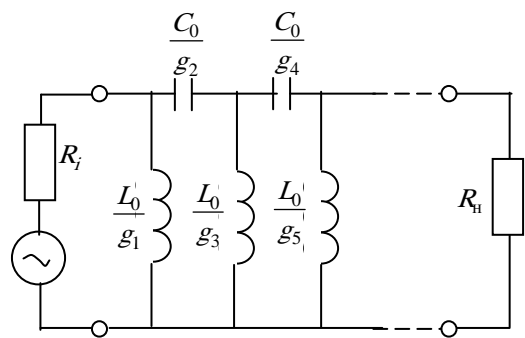
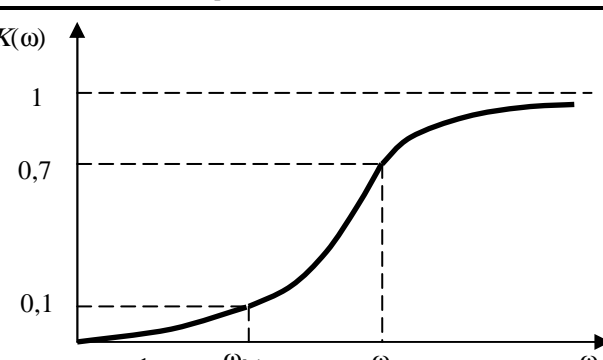
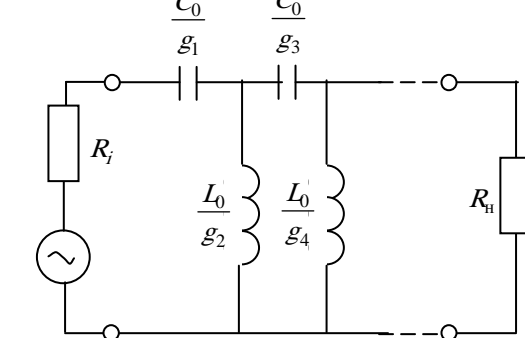
5. Находят входное сопротивление четырёхполюсника

$$Z_{1-4}(p) = R_i \frac{1 \pm \gamma_{1,2}(p)}{1 \mp \gamma_{1,2}(p)}.$$

### 11.2. Расчёт ФНЧ

Схемы	АЧХ и расчётные соотношения
	
	$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}};$ $n = \frac{1}{\lg K_{np}^{0.1}}; \quad K_{np}^{0.1} = \frac{\omega_{0.1}}{\omega_c}$ $L_0 = \frac{R_H}{\omega_c}; \quad C_0 = \frac{1}{R_H \omega_c};$ $R_H = R_j; \quad g_K = 2 \sin\left(\pi \frac{2K-1}{2n}\right)$

### 11.3. Расчёт ФВЧ

Схемы	АЧХ и расчётные соотношения
	
	$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{2n}}};$ $n = \frac{1}{\lg K_{np}^{0.1}}; \quad K_{np}^{0.1} = \frac{\omega_c}{\omega_{0.1}}$ $R_H = R_j; \quad g_K = 2 \sin\left(\pi \frac{2K-1}{2n}\right)$ $L_0 = \frac{R_H}{\omega_c}; \quad C_0 = \frac{1}{R_H \omega_c};$

### 11.4. Расчёт ПФ

Схемы	АЧХ и расчётные соотношения
	<p> <math>K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\text{пф}}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^{2n}}}</math>;  <math>\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}</math>; <math>\Delta\omega_{\text{пф}} = \omega_{c2} - \omega_{c1}</math>;  <math>n = \frac{1}{\lg K_{\text{нр}}^{0,1}}</math>; <math>K_{\text{нр}}^{0,1} = \frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{пф}}}</math>;  <math>R_{\text{н}} = R_i</math>; <math>g_K = 2 \sin \left( \pi \frac{2K-1}{2n} \right)</math>;  <math>L_0 = \frac{R_{\text{н}}}{\Delta\omega_{\text{пф}}}</math>; <math>C_0 = \frac{1}{R_{\text{н}}\Delta\omega_{\text{пф}}}</math> </p>

### 11.5. Расчёт РФ

Схемы	АЧХ и расчётные соотношения
	<p> <math>K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[ \frac{\Delta\omega_{\text{пф}} \omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right]^{2n}}}</math>; <math>\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}</math>;  <math>\Delta\omega_{\text{пф}} = \omega_{c2} - \omega_{c1}</math>; <math>n = \frac{1}{\lg K_{\text{нр}}^{0,1}}</math>; <math>K_{\text{нр}}^{0,1} = \frac{\Delta\omega_{\text{пф}}}{\Delta\omega_{0,1}}</math>; <math>R_{\text{н}} = R_i</math>;  <math>g_K = 2 \sin \left( \pi \frac{2K-1}{2n} \right)</math>; <math>L_0 = \frac{R_{\text{н}}}{\Delta\omega_{\text{пф}}}</math>; <math>C_0 = \frac{1}{R_{\text{н}}\Delta\omega_{\text{пф}}}</math> </p>

6. По полученному выражению  $Z(p)$  находят структуру и параметры элементов четырёхполюсника рассмотренным выше методом синтеза двухполюсников – разложением в непрерывную дробь.

В случае максимально-плоской аппроксимации нормированной АХЧ фильтра-прототипа с частотой среза  $\Omega = 1 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$  и  $R_{\text{н}} = R_{\text{л}} = 1 \text{ Ом}$  параметры его элементов могут быть определены по формуле

$$g_k = 2 \sin \left( \pi \frac{2k-1}{2n} \right),$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  – номер элемента;  $n$  – порядок фильтра, определяющий общее число элементов схемы.

При любом  $n$  возможны два вида схем фильтра-прототипа (рис. 11.3).

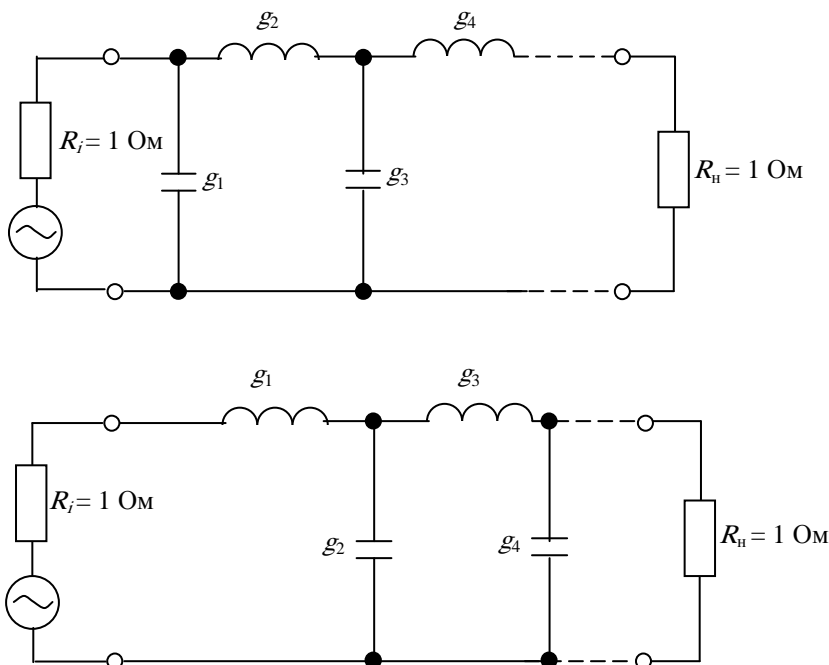


Рис. 11.3

Расчёт фильтров различных видов базируется на расчёте фильтра-прототипа (см. табл. 11.2 – 11.5).

### Контрольные вопросы

1. В чём заключается сущность задачи синтеза электрических цепей?
2. Что такое нули и полюса  $Z(p)$  и  $Y(p)$ ?
3. Сформулируйте условия физической реализуемости двухполюсников.
4. Назовите основные методы синтеза двухполюсников по заданному входному сопротивлению или проводимости. В чём их сущность?
5. Изобразите схемы двухполюсников, полученные методом разложения выражений  $Z(p)$  и  $Y(p)$  в непрерывную дробь.
6. Сформулируйте условия физической реализуемости четырёхполюсников.
7. Назовите виды аппроксимации АХЧ четырёхполюсников.
8. В чём сущность метода синтеза четырёхполюсника, по заданной АХЧ?
9. Что понимают под фильтром-прототипом?
10. В чём сущность метода преобразования частоты при расчёте фильтров?
11. Поясните порядок расчёта фильтров различных видов (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ).

### Задачи

11.1. Проверить выполняются ли условия физической реализуемости входного сопротивления двухполюсника

$$Z(p) = \frac{p^2 + P + 1}{p^2 + P + 4}.$$

11.2. Проверить, могут ли приведённые выражения представлять собой входные сопротивления некоторых двухполюсников:

- 1)  $\frac{5p-6}{25p^2+12p+2}$ ;
- 2)  $\frac{20p^2+12p+6}{12p^4+8p^3+12p^2+13p+1}$ ;

$$3) \frac{3p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 1}; \quad 4) \frac{2p^2 + p + 1}{(p+1)(p^2 + 1)};$$

$$5) \frac{2}{p^2 + 2p + 2}; \quad 6) \frac{p^3 + 2p}{p^4 + 2p^2 + 1};$$

$$7) \frac{3p^2}{p^2 + p + 2}; \quad 8) \frac{p^2 + 4}{p^3 + 9p}.$$

11.3. Отвечают ли условиям физической реализуемости функции входного сопротивления  $Z(p)$ , заданные в виде

$$1) \frac{p^2 + p + 1}{p^2 + 2p + 3j}; \quad 2) \frac{p^3 + p^2 + p + 1}{p + 2}; \quad 3) \frac{(p+1)^2}{p^2};$$

$$4) \frac{p^2 + 6p - 16}{p + 1}; \quad 5) \frac{p^2}{p^2 + 4}; \quad 6) \frac{p^2 + \sqrt{p+1}}{p^2 + 1};$$

$$7) \frac{2}{p^2 + 2p + 2}; \quad 8) \frac{5p}{2p^2 + 1}; \quad 9) \frac{p^4 + 1}{p^3 + p^2 + p + 1};$$

$$10) \frac{p^4 + 2p^2 + 1}{p^3 + p^2 + p + 1}; \quad 11) \frac{12p^4 + 12p^2 + 1}{6p^3 + 3p};$$

$$12) \frac{25 \cdot 10^{-12} p^2 + 1}{0,5 \cdot 10^{-12} p^3 + 70 \cdot 10^{-3} p}.$$

11.4. Воспользовавшись табл. 11.1, определить схемы и параметры элементов двухполюсников, соответствующих заданным  $Z(p)$  и  $Y(p)$ :

$$1) Z(p) = 5p + 4 + \frac{2}{p}; \quad 2) Z(p) = \frac{2}{p+3}; \quad 3) Z(p) = \frac{2}{3p+2};$$

$$4) Z(p) = \frac{3p+2}{5p}; \quad 5) Z(p) = \frac{8p^2+1}{6p}; \quad 6) Z(p) = \frac{p}{p+1};$$

$$7) Z(p) = \frac{2p}{4p+5} + \frac{3}{4p+5}; \quad 8) Z(p) = \frac{p^2+p}{p^2+p+1};$$

$$9) Y(p) = \frac{p^2+3}{3p}; \quad 10) Y(p) = \frac{p^2+2p+1}{4p}.$$

11.5. Реализовать функцию  $Z(p) = \frac{p^4 + 2p + 4}{p^3 + 3p}$  методом разложения на простейшие дроби.

11.6. Реализовать функцию  $Z(p) = \frac{p^4 + 5p^2 + 4}{p^3 + 3p}$  методом разложения в непрерывную дробь, располагая при делении полиномы сначала по убыванию, а затем по возрастающим степеням  $p$ , для получения двух различных схем двухполюсников.

11.7. Реализовать функцию  $Z(p) = \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 1}$  лестничной схемой.

11.8. Входное сопротивление цепи

$$Z(p) = \frac{6p^2 + 6p + 1}{2p^3 + 3p^2 + p},$$

определить схему цепи и параметры её элементов методом разложения на простейшие дроби и в непрерывную дробь.

11.9. Реализовать функцию  $Z(p) = \frac{p^4 + 9p^2 + 8}{p^3 + 3p}$  методом разложения в непрерывную дробь при расположении полиномов по убывающим и возрастающим степеням  $p$ .

11.10. Осуществить реализацию функции входного сопротивления

$$Z(p) = \frac{8p^4 + 40p^2 + 32}{20p^3 + 45p}.$$

разложением на простейшие дроби и разложением в непрерывную дробь.

11.11. Реализовать входное сопротивление

$$Z(p) = \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}$$

разложением на простейшие дроби и в непрерывную дробь.

11.12. Осуществить реализацию следующих функций разложением на простейшие дроби и в непрерывную дробь:

$$\begin{aligned} 1) Z(p) &= \frac{2p^2 + 1}{p^3 + p}; & 2) Z(p) &= \frac{(p+1)(p+3)}{P(P+2)}; \\ 3) Y(p) &= \frac{(p+1)(p+4)}{p+2}; & 4) Z(p) &= \frac{(p^2+1)(p^2+25)}{P(p^2+4)}; \\ 5) Z(p) &= \frac{p^2 + p + \frac{1}{6}}{p^3 + \frac{3}{2}p^2 + \frac{1}{2}p}; & 6) Y(p) &= \frac{(p+2)(p+4)}{(p+1)(p+3)}. \end{aligned}$$

11.13. Реализовать четырёхполосник, нагруженный на активное сопротивление  $R_n = \frac{3}{5}$  Ом, при аппроксимации его

амплитудно-частотной характеристики по Баттерворту  $K(\omega) = \frac{\frac{3}{8}}{\sqrt{1+\omega^4}}$  и сопротивлении источника  $R_i = 1$  Ом.

11.14. Реализовать четырёхполосник по АХЧ  $K(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\omega^6}}$ , если  $R_n = R_i = 1$  Ом.

11.15. Реализовать четырёхполосник при баттервортовской аппроксимации нормированного коэффициента передачи мощности функцией четвёртого порядка  $T^2(\omega) = \frac{1}{1+\omega^8}$  и  $R_n = R_i = 1$  Ом.

11.16. Рассчитать ПФ при  $R_n = R_i = 1$  Ом, если  $f_0 = 10$  кГц;  $\Delta f_{\text{пф}} = 3$  кГц;  $\Delta f_{0,1} = 9,6$  кГц.

11.17. Рассчитать ФНЧ при  $R_n = R_i = 2$  кОм, если  $\omega_c = 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ ;  $\omega_{0,1} = 1,8 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ .

11.18. Рассчитать ФВЧ при  $R_n = R_i = 2$  кОм, если  $\omega_c = 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ ;  $\omega_{0,1} = 0,55 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ .

11.19. Рассчитать ПФ при  $R_n = R_i = 2$  кОм, если  $\omega_c = 5 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ ;  $\omega_{c2} = 6 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ ;  $\Delta\omega_{0,1} = 1,8 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ .

11.20. Рассчитать РФ при  $R_n = R_i = 2$  кОм, если  $\omega_{c1} = 5 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ ;  $\omega_{c2} = 6 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ ;  $\Delta\omega_{0,1} = 0,55 \cdot 10^6$  рад  $\cdot$  с $^{-1}$ .

### Ответы, решения и методические указания

11.1. Проверим выполнение пяти условий физической реализуемости.

Заданная функция является дробно-рациональной. Условие 1) выполняется, так как все коэффициенты числителя и знаменателя  $Z(p)$  положительны.

Условие 2) тоже выполняется, так как наибольшие и наименьшие степени  $P$  в числителе и знаменателе одинаковы.

Для проверки 3) и 4) условий найдём нули и полюсы  $Z(p)$ , приравняв нулю числитель и знаменатель:

$$P^2 + P + 1 = 0; \quad P_{1,2}^0 = -0,5 \pm \gamma\sqrt{0,75};$$

$$P^2 + P + 4 = 0; \quad P_{1,2}^\infty = -0,5 \pm \gamma 0,5\sqrt{15}.$$

Из полученных результатов видим, что нули и полюсы лежат в левой полуплоскости, что соответствует выполнению условий 3) и 4). Для проверки 5) условия найдём  $Z(p)|_{p=\gamma\omega}$ , определим его действительную часть:

$$Z(p)|_{p=\gamma\omega} = \frac{-\omega^2 + \gamma\omega + 1}{-\omega^2 + \gamma\omega + 4} = \frac{(1 - \omega^2 + \gamma\omega)(4 - \omega^2 - \gamma\omega)}{(4 - \omega^2 + \gamma\omega)(4 - \omega^2 - \gamma\omega)} = \frac{(\omega^2 - 2) + \gamma 3\omega}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2};$$

$$\text{Re}\{Z(\gamma\omega)\} = \frac{(\omega^2 - 2)^2}{(4 - \omega^2)^2 + \omega^2}.$$

Так как действительная часть  $Z(\gamma\omega)$  при любом значении  $\omega$  положительна, то условие 5) выполняется.

Таким образом, заданная функция входного сопротивления  $Z(p)$  соответствует физически реализуемому двухполоснику.



11.2. Выражение 1) не может представлять собой  $Z(p)$ , как один из коэффициентов числителя отрицателен. Выражение 2) может представлять собой  $Z(p)$  потому, что максимальная степень  $P$  в знаменателе больше максимальной степени  $P$  числителя на два.

Выражение 3) не может представлять собой  $Z(p)$ , поэтому

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{3p^2 + p + 1}{p^3 + p^2 + p + 1} \right\}_{p=j\omega} = \frac{(1-2\omega^2)}{(1-\omega^2)(1+\omega^2)},$$

при значениях  $\omega$  от 0,707 до 1 отрицательно.

Выражение 4) соответствует всем условиям физической реализуемости и может представлять собой  $Z(p)$ .

Выражение 5) не может представлять собой  $Z(p)$ , так как наибольшие степени  $P$  числителя и знаменателя отличаются более, чем на единицу.

Выражение 6) не может представлять собой  $Z(p)$ , так как на мнимой оси имеются кратные полюсы в точках  $\pm j$ .

Выражение 7) не может представлять собой  $Z(p)$ , так как наименьшие степени  $P$  числителя и знаменателя отличаются больше, чем на единицу.

Выражение 8) соответствует всем условиям физической реализуемости и может представлять собой  $Z(p)$ .

11.3. Условиям физической реализуемости отвечают функции 8), 11) и 12).

11.4. Схемы двухполосников приведены на рис 11.4.

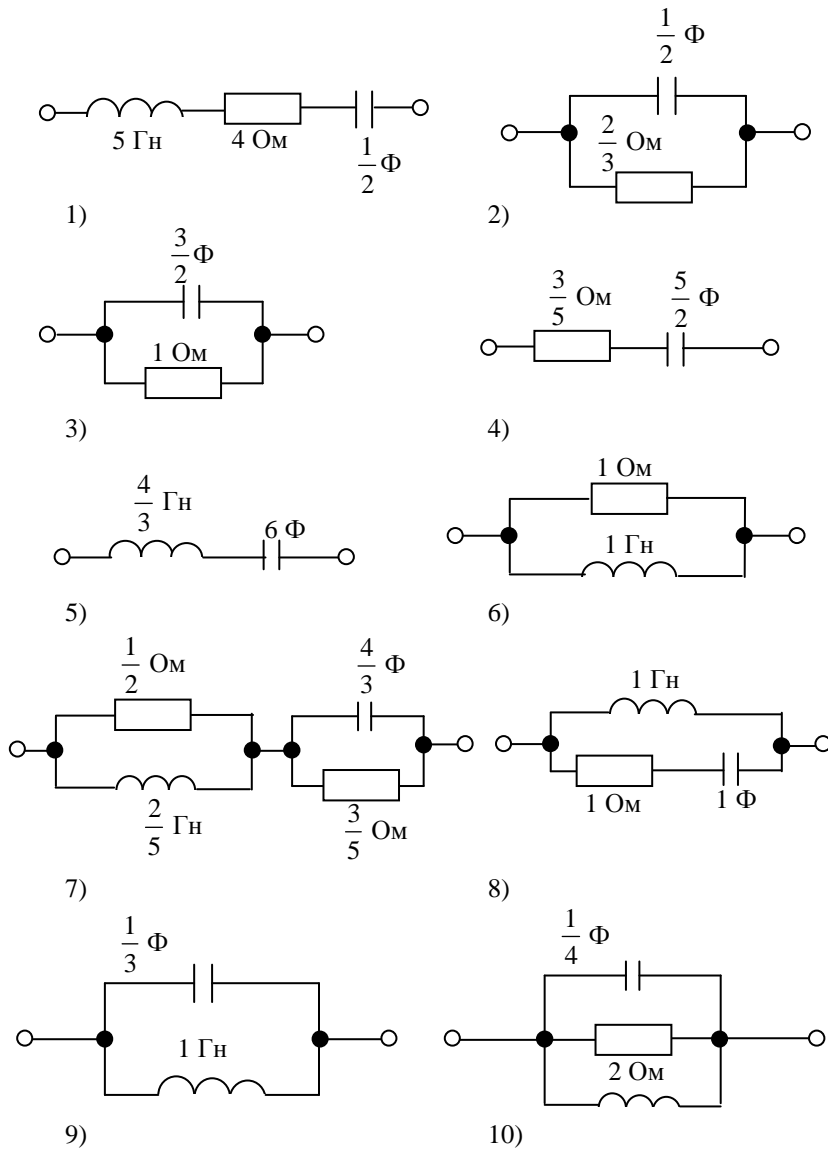


Рис. 11.4

11.5. Реализация осуществляется в следующей последовательности:

1) Выделяем целую часть  $Z(p)$ :

$$Z(p) = p + \frac{2p^2 + 4}{p^3 + 3p}.$$

2) Производим разложение получившейся правильной дроби на простейшие дроби:

$$\frac{2p^2 + 4}{p(p^2 + 3)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp}{p^2 + 3}.$$

Чтобы определить неизвестные коэффициенты  $A$  и  $B$ , приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числитель левой и правой части:

$$2p^2 + 4 = A(p^2 + 3) + Bp^2.$$

Приравнявая коэффициенты при  $P$  одинаковых степеней, получим

$$\begin{cases} A + B = 2; \\ 3A + B = 4; \end{cases} \quad A = \frac{4}{3};$$

$$B = \frac{2}{3}.$$

В результате получим функцию  $Z(p)$ , разложенную на простейшие дроби:

$$Z(p) = p + \frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{3}p}{p^2 + 3}.$$

3) Пользуясь табл. 11.1, находим схему и параметры элементов двухполюсника (рис. 11.5).

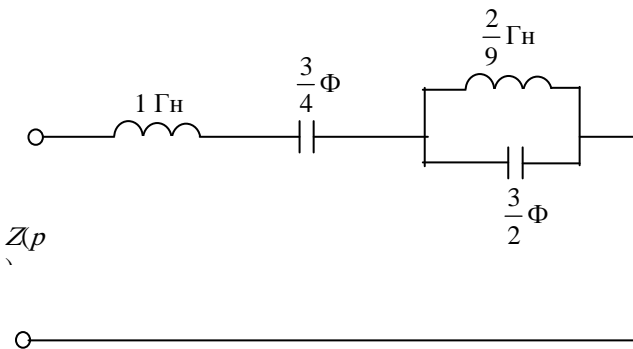


Рис. 11.5

11.6. Располагая полиномы числителя и знаменателя  $Z(p)$  в порядке убывания степеней  $P$  и пользуясь правилом деление – обращение остатка, выделяем элементы непрерывной дроби:

$$\begin{array}{l} - \frac{p^4 + 5p^2 + 4}{p^4 + 3p^2} \Bigg| \frac{p^3 + 3p}{p \rightarrow Z_1} \\ - \frac{p^3 + 3p}{p^3 + 2p} \Bigg| \frac{2p^2 + 4}{\frac{1}{2}p \rightarrow Y_2} \\ - \frac{2p^2 + 4}{2p^2} \Bigg| \frac{p}{2p \rightarrow Z_3} \\ \frac{4}{1} \Bigg| \frac{1}{4}p \rightarrow Y_4 \end{array}$$

и представляем  $Z(p)$  в виде непрерывной дроби

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2p + \frac{1}{\frac{1}{4}p}}}$$

Этой дроби соответствует схема двухполюсника на рис. 11.6.

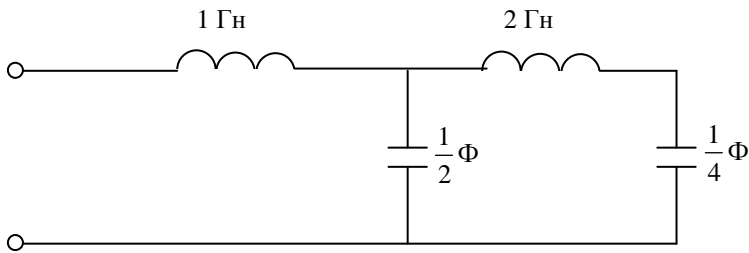


Рис. 11.6

Для получения второй схемы производим деление, расположив полиномы по возрастающим степеням  $P$ .

$$\begin{array}{r} 4 + 5p^2 + p^4 \left| \begin{array}{l} 3p + p^3 \\ 4 \\ 3p \end{array} \right. \rightarrow Z_1 \\ - \frac{4 + \frac{4}{3}p^2}{\frac{3}{3}} \\ \hline 3p + p^3 \left| \begin{array}{l} \frac{11}{3}p^2 + p^4 \\ 9 \\ 11 \end{array} \right. \rightarrow Y_2 \\ - \frac{3p + \frac{9}{11}p^3}{\frac{9}{11}} \\ \hline - \frac{\frac{11}{3}p^2 + p^4}{\frac{11}{3}p^2} \left| \begin{array}{l} \frac{2}{11}p^3 \\ \frac{121}{6p} \end{array} \right. \rightarrow Z_3 \\ - \frac{\frac{11}{3}p^2}{\frac{11}{3}p^2} \\ \hline - \frac{\frac{2}{11}p^3}{\frac{2}{11}p^3} \left| \begin{array}{l} p^4 \\ \frac{2}{11p} \end{array} \right. \rightarrow Y_4 \\ - \frac{\frac{2}{11}p^3}{\frac{2}{11}p^3} \\ \hline 0 \end{array}$$

Непрерывной дроби

$$Z(p) = \frac{4}{3}p + \frac{1}{\frac{9}{11p} + \frac{1}{\frac{121}{6p} + \frac{1}{\frac{2}{11p}}}}$$

соответствует схема двухполюсника на рис. 11.7.

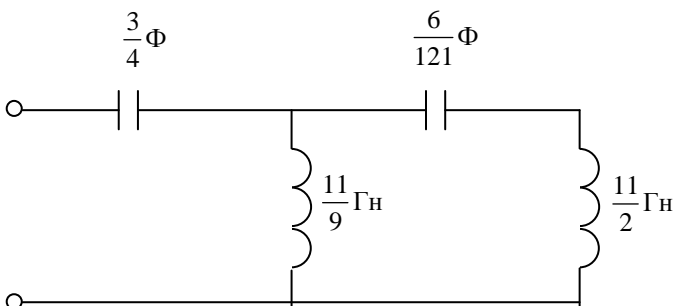


Рис. 11.7

11.7. Производим деление, расположив слагаемые по убывающим степеням  $p$ :

$$\begin{array}{r} \frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^3 + 2p^2 + p} \Big| \frac{2p^2 + 2p + 1}{p \rightarrow Z_1} \\ - \phantom{\frac{2p^3 + 3p^2 + 2p + 1}{2p^3 + 2p^2 + p}} \\ \hline \frac{2p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 2} \Big| \frac{p^2 + p + 1}{2} \\ - \phantom{\frac{2p^2 + 2p + 1}{2p^2 + 2p + 2}} \\ \hline -1 \end{array}$$

Так как получили остаток с отрицательным знаком, дальнейшее деление прекращаем и переходим к расположению по возрастающим степеням  $p$ :

$$\begin{array}{r} \frac{-1 + 2p + 2p^2}{1 + p + p^2} \Big| \frac{1 + p + p^2}{1 \rightarrow Y_2} \\ - \phantom{\frac{-1 + 2p + 2p^2}{1 + p + p^2}} \\ \hline \frac{1 + p + p^2}{1 + p} \Big| \frac{p + p^2}{1} \\ - \phantom{\frac{1 + p + p^2}{1 + p}} \\ \hline \frac{p + p^2}{p} \Big| \frac{p^2}{p} \rightarrow Z_3 \\ - \phantom{\frac{p + p^2}{p}} \\ \hline \frac{p}{p} \Big| \frac{1}{1} \rightarrow Y_4 \\ - \phantom{\frac{p}{p}} \\ \hline \frac{p^2}{p^2} \Big| \frac{p^2}{p^2} \\ - \phantom{\frac{p^2}{p^2}} \\ \hline 0 \end{array}$$

В результате получим схему на рис. 11.8.

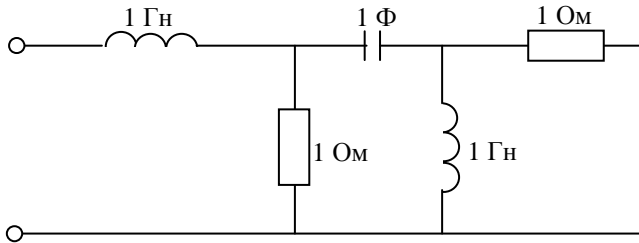


Рис. 11.8

11.8. При разложении  $Z(p)$  на простейшие дроби схема имеет вид рис. 11.9.

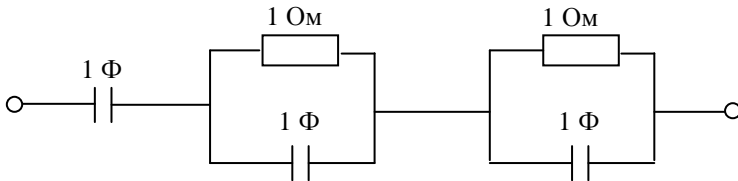


Рис. 11.9

При разложении  $Y(p) = \frac{1}{Z(p)}$  в непрерывную дробь схема имеет вид рис. 11.10.

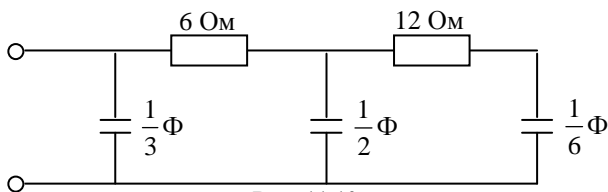


Рис. 11.10

11.9. Реализация по схемам рис. 11.11.

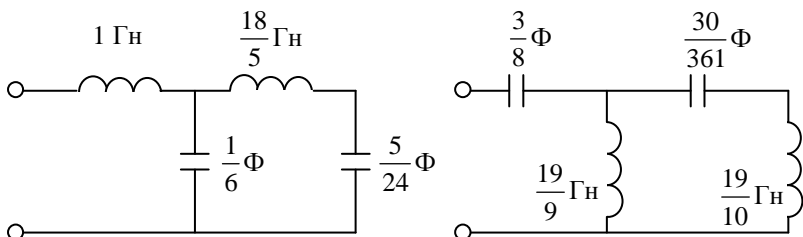


Рис. 11.11

11.10. При разложении на простейшие дроби входному сопротивлению

$$Z(p) = \frac{2}{5}p + \frac{32}{45} + \frac{7}{18} \frac{p}{p^2 + \frac{9}{4}}$$

соответствует схема двухполюсника на рис. 11.12.

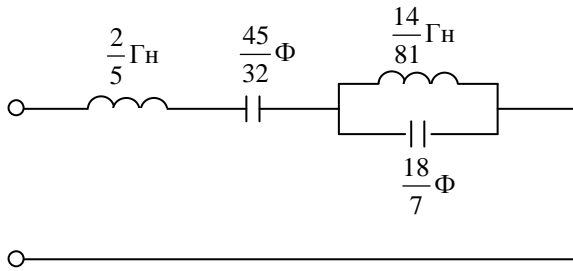


Рис. 11.12

При разложении в непрерывную дробь

$$Z(p) = \frac{2}{5}p + \frac{10}{11}p + \frac{1}{\frac{242}{175}p + \frac{1}{\frac{175}{352}p}}$$

или

$$Z(p) = \frac{32}{45p} + \frac{1}{\frac{405}{432p} + \frac{1}{\frac{6728}{1575p} + \frac{1}{\frac{175}{232p}}}}$$

В этом случае схемы двухполюсника представлены на рис. 11.13.

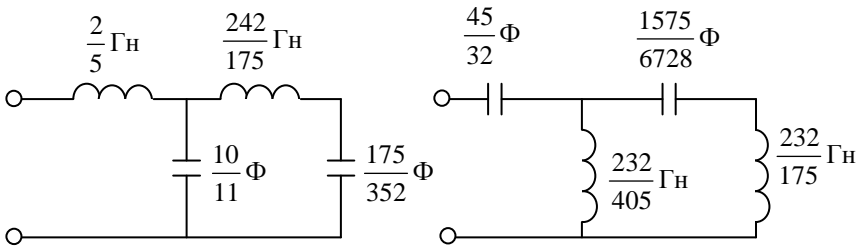


Рис. 11.13

11.11. Схемы реализации на рис. 11.14.

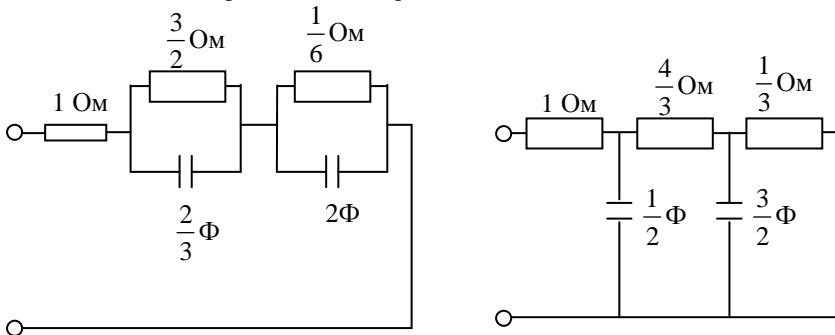


Рис. 11.14

11.12. Схемы реализации на рис. 11.15.

1)

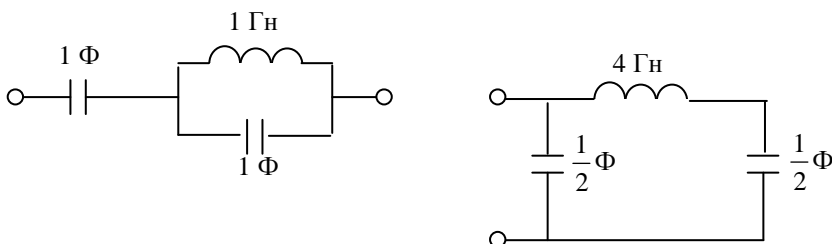


Рис. 11.15

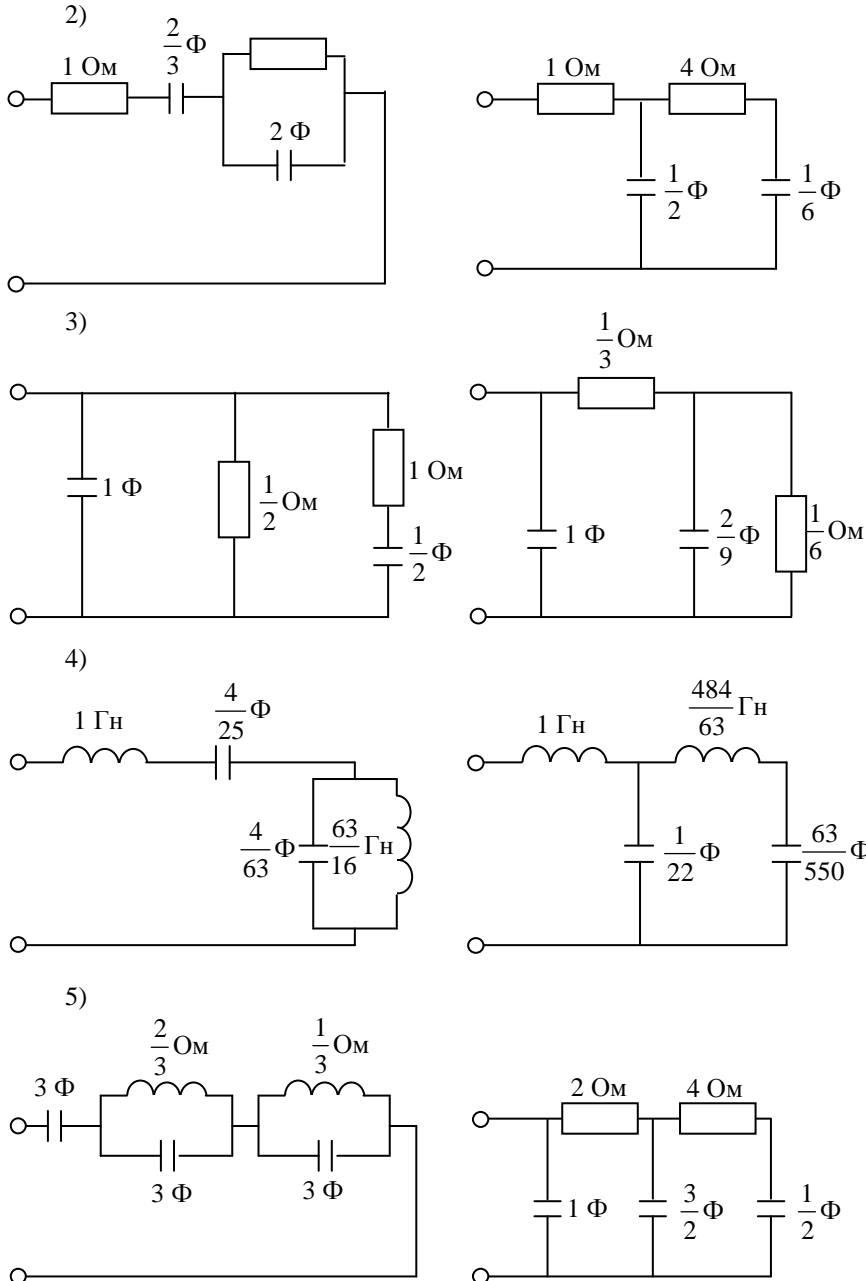


Рис. 11.15. Продолжение

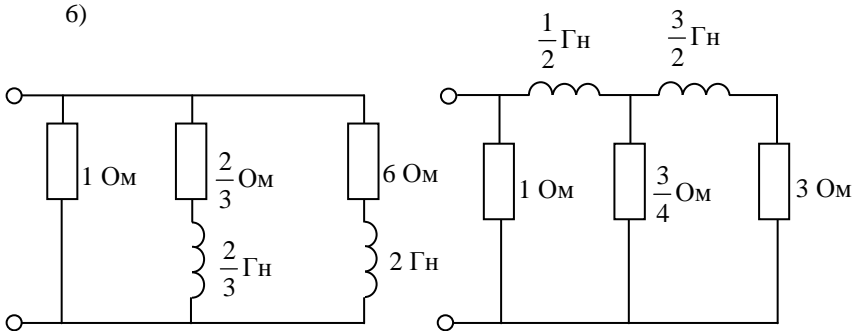


Рис. 11.15. Окончание

11.13. Реализацию осуществим по входному сопротивлению  $Z(p)$  четырёхполюсника. Для получения выражения  $Z(p)$  находим:

1. Нормированный коэффициент передачи мощности

$$T^2(\omega) = \frac{K^2(\omega)}{K_{\max}^2} = \frac{K^2(\omega)}{R_n/4R_i} = \frac{9}{64} = \frac{15}{\frac{3}{20}(1+\omega^4)} = \frac{15}{1+\omega^4}.$$

2. Модуль коэффициента передачи мощности в операторной форме

$$|T(p)|^2 = T^2(\omega) \Big|_{\omega^2 = -p^2} = \frac{15}{1+p^4}.$$

3. Квадрат модуля коэффициента отражения

$$|\gamma(p)|^2 = \gamma(p)\gamma(-p) = 1 - |T(p)|^2 = \frac{p^4 + \frac{1}{16}}{p^4 - 1}.$$

4. Нули и полюсы выражения  $|\gamma(p)|^2$ :

$$p^4 + \frac{1}{16} = 0; \quad p_{1-4}^0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\pm j} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} (1 \pm j);$$

$$p_1^0 = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} j; \quad p_2^0 = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} j; \quad p_3^0 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} j;$$

$$p_4^0 = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} j; \quad p^4 + 1 = 0; \quad p_{1-4}^\infty = \pm \sqrt{\pm j} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm j);$$

$$p_1^\infty = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j; \quad p_2^\infty = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j; \quad p_3^\infty = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j; \quad p_4^\infty = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} j.$$

4. Выражения коэффициента отражения:

$$\gamma_1(p) = \frac{(p - p_1^0)(p - p_2^0)}{(p - p_1^\infty)(p - p_2^\infty)} = \frac{\left(p + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} j\right) \left(p + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} j\right)}{\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j\right) \left(p + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j\right)} = \frac{p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{1}{4}}{p^2 + \sqrt{2} p + 1};$$

$$\gamma_2(p) = \frac{(p - p_3^0)(p - p_4^0)}{(p - p_3^\infty)(p - p_4^\infty)} = \frac{\left(p - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} j\right) \left(p - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} j\right)}{\left(p + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j\right) \left(p + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} j\right)} = \frac{p^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{1}{4}}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}.$$

Для получения выражений знаменателей  $\gamma_1(p)$  и  $\gamma_2(p)$  использованы полюсы с отрицательной действительной частью.

Для получения числителя  $\gamma_1(p)$  использованы нули с отрицательной действительной частью, а числителя  $\gamma_2(p)$  – нули с положительной действительной частью.

6. Входные сопротивления:

$$Z_1(p) = R_i \frac{1 + \gamma_1(p)}{1 - \gamma_1(p)} = 1 \frac{1 + \frac{p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{1}{4}}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}}{1 - \frac{p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{1}{4}}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}} = \frac{2p^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} p + \frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{3}{4}};$$

$$Z_2(p) = R_i \frac{1 - \gamma_1(p)}{1 + \gamma_1(p)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{3}{4}}{2p^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} p + \frac{5}{4}};$$

$$Z_3(p) = R_i \frac{1 + \gamma_2(p)}{1 - \gamma_2(p)} = 1 \frac{1 + \frac{p^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{1}{4}}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}}{1 - \frac{p^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{1}{4}}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}} = \frac{2p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{5}{4}}{\frac{3\sqrt{2}}{2} p + \frac{3}{4}};$$

$$Z_4(p) = R_i \frac{1 - \gamma_2(p)}{1 + \gamma_2(p)} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} p + \frac{3}{4}}{2p^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} p + \frac{5}{4}}$$

Используя разложение полученных выражений в непрерывные дроби, получим схемы четырёх четырёхполюсников (рис. 11.16):

$$a) Z_1(p) = 2\sqrt{2}p + \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{5}p + \frac{1}{\frac{5}{3}}}$$

$$б) Y_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)} = 2\sqrt{2}p + \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{5}p + \frac{1}{\frac{5}{3}}}$$

$$в) Z_3(p) = \frac{2\sqrt{2}}{3}p + \frac{1}{\frac{6\sqrt{2}}{5}p + \frac{1}{\frac{5}{3}}}$$

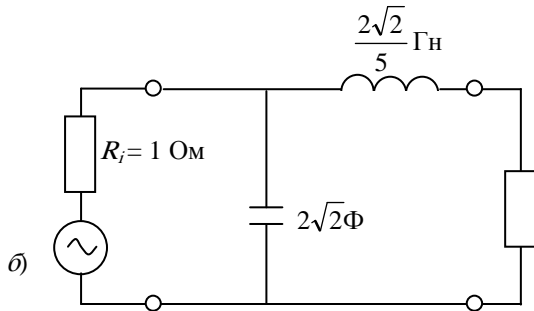
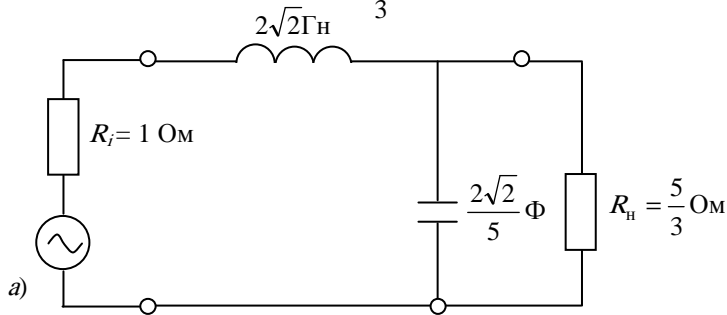


Рис. 11.16

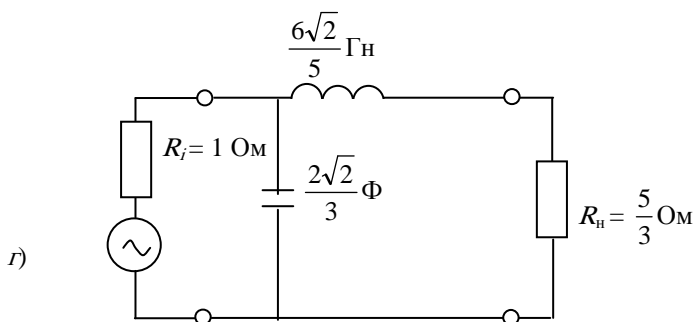
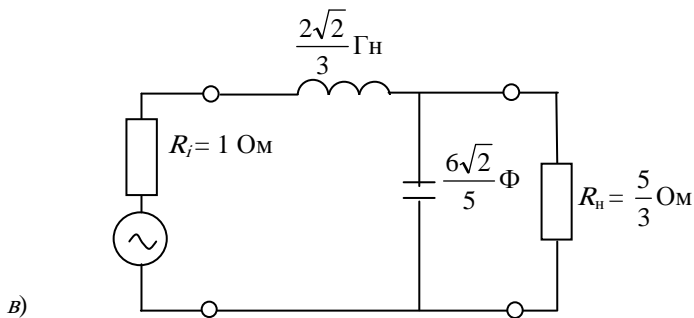


Рис. 11.16. Продолжение



$$г) Y_4(p) = \frac{1}{Z_4(p)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} p + \frac{1}{\frac{6\sqrt{2}}{5} p + \frac{1}{\frac{5}{3}}}$$

Из полученных схем условиям задачи удовлетворяют только те, в которых получено нужное сопротивление нагрузки  $R_H = \frac{3}{5}$  Ом, т.е. соответствующие  $Z_2(p)$  и  $Z_4(p)$ .

11.14. Схемы реализации представлены на рис. 11.17 и 11.18.

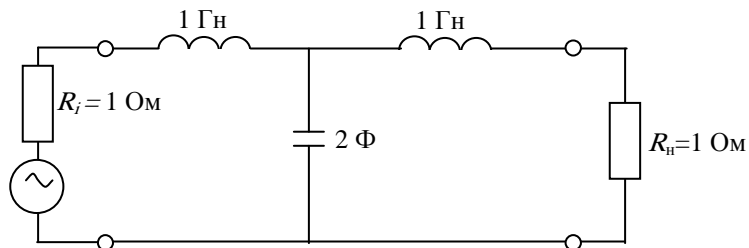


Рис. 11.17

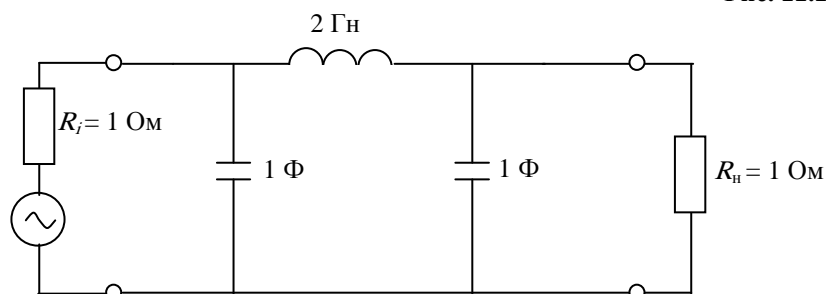


Рис. 11.18

11.15. Полюсами  $|\gamma(p)|^2$  являются:

$$p_{1-4}^{\infty} = \pm 0,383 \pm 0,924 j;$$

$$p_{5-8}^{\infty} = 0,924 \pm 0,383 j,$$

из которых для получения выражения  $\gamma(p)$  необходимо использовать те, которые имеют отрицательную действительную часть.

В результате синтеза получены схемы четырёхполюсников, представленные на рис. 11.19 и 11.20.

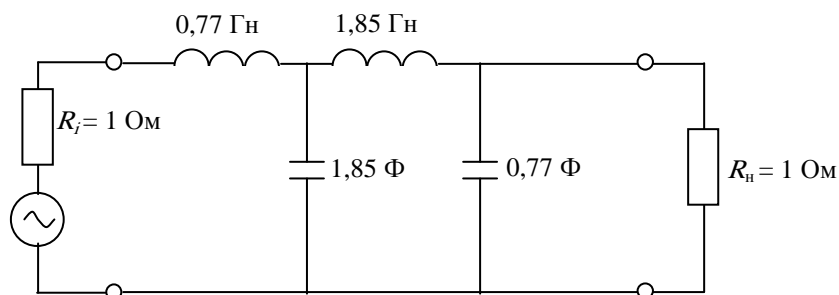


Рис. 11.19

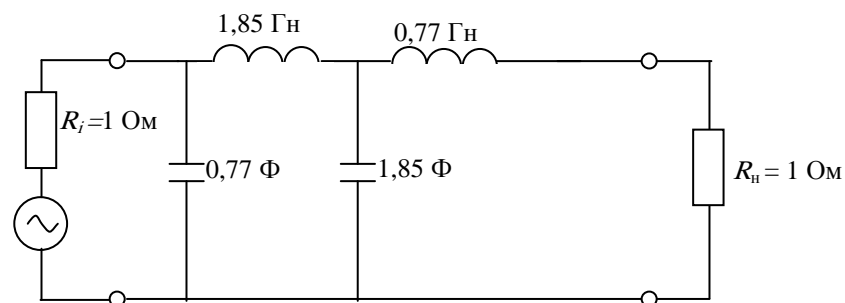


Рис. 11.20

11.16. Расчёт осуществляется в следующей последовательности:

1) Коэффициент прямоугольности АЧХ

$$K_{\text{пр}}^{0,1} = \frac{\Delta\omega_{0,1}}{\Delta\omega_{\text{пф}}} = \frac{2\pi\Delta f_{0,1}}{2\pi\Delta f_{\text{пф}}} = \frac{9,6}{3} = 3,2.$$

2) Порядок фильтра, определяющий число колебательных контуров

$$n = \frac{1}{\lg K_{\text{пр}}^{0,1}} = \frac{1}{\lg 3,2} \approx 2.$$

3) Параметры элементов фильтра-прототипа:

$$g_1 = 2 \sin\left(\pi \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 2}\right) = \sqrt{2} \approx 1,41;$$

$$g_2 = 2 \sin\left(\pi \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2}\right) = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

4) Параметры, определяющие переход от фильтра-прототипа к реальному фильтру:

$$L_0 = \frac{R_{\text{н}}}{2\pi\Delta f_{\text{пф}}} = \frac{10^3}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^3} = 53 \text{ мГн};$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi\Delta f_{\text{пф}} R_{\text{н}}} = \frac{1}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 10^3} = 53 \text{ нФ}.$$

5) Параметры элементов для схемы, начинающейся с последовательного колебательного контура:

$$L_1 = L_0 g_1 = 53 \cdot 1,41 = 75 \text{ мГн};$$

$$C_1 = \left(\frac{\Delta\omega_{\text{пф}}}{\omega_0}\right)^2 \frac{C_0}{g_1} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \frac{53}{1,41} = 3,38 \text{ нФ};$$

$$L_2 = \left(\frac{\Delta\omega_{\text{пф}}}{\omega_0}\right)^2 \frac{L_0}{g_2} = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \frac{53}{1,41} = 3,38 \text{ мГн};$$

$$C_2 = C_0 g_2 = 53 \cdot 1,41 = 75 \text{ нФ}.$$

Так как в данной задаче  $g_1 = g_2$ , то для второй схемы (рис. 11.21), начинающейся с параллельного колебательного контура, параметры элементов контуров остаются соответственно одинаковыми ( $L_1 = 3,38 \text{ мГн}$ ;  $C_1 = 75 \text{ нФ}$ ;  $L_2 = 75 \text{ мГн}$ ;  $C_2 = 3,38 \text{ нФ}$ ).

б) Схемы ПФ имеют вид (рис. 11.21).

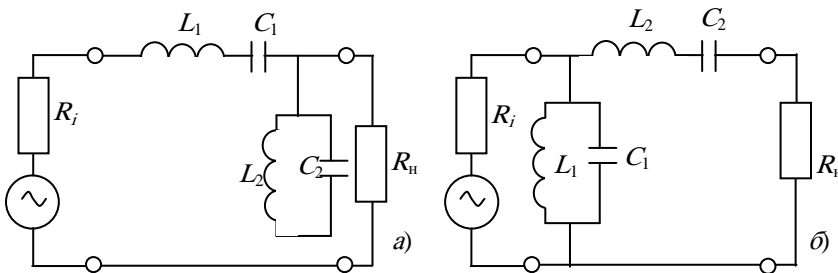


Рис. 11.21

11.17. Для первой схемы (табл. 11.2):

$$L_1 = 1,528 \text{ мГн}; C_2 = 924 \text{ пФ}; L_3 = 3,696 \text{ мГн}; C_4 = 383 \text{ пФ}.$$

Для второй схемы :

$$C_1 = 383 \text{ пФ}; L_2 = 3,696 \text{ мГн}; C_3 = 924 \text{ пФ}; L_4 = 1,528 \text{ мГн}.$$

11.18. Для первой схемы (табл. 11.3):

$$C_1 = 653 \text{ пФ}; L_2 = 1,08 \text{ мГн}; C_3 = 271 \text{ пФ}; L_4 = 2,61 \text{ мГн}.$$

Для второй схемы:

$$L_1 = 2,61 \text{ мГн}; C_2 = 271 \text{ пФ}; L_3 = 1,08 \text{ мГн}; C_4 = 655 \text{ пФ}.$$

11.19. Для первой схемы (табл. 11.4):

$$C_1 = 383 \text{ пФ}; L_1 = 87 \text{ мкГн}; L_2 = 3,7 \text{ мГн}; C_2 = 9 \text{ пФ};$$

$$C_3 = 924 \text{ пФ}; L_3 = 36 \text{ мкГн}; L_4 = 1,53 \text{ мГн}; C_4 = 22 \text{ пФ}.$$

Для второй схемы:

$$C_1 = 22 \text{ пФ}; L_1 = 1,53 \text{ мГн}; L_2 = 36 \text{ мкГн}; C_2 = 924 \text{ пФ};$$

$$C_3 = 9 \text{ пФ}; L_3 = 3,7 \text{ мГн}; L_4 = 87 \text{ мкГн}; C_4 = 383 \text{ пФ}.$$

11.20. Для первой схемы (табл. 11.5):

$$L_1 = 2,61 \text{ мГн}; C_1 = 12,8 \text{ пФ}; C_2 = 271 \text{ пФ}; L_2 = 123 \text{ мкГн};$$

$$L_3 = 108 \text{ мГн}; C_3 = 31 \text{ пФ}; C_4 = 653 \text{ пФ}; L_4 = 51 \text{ мкГн}.$$

Для второй схемы:

$$C_1 = 653 \text{ пФ}; L_1 = 51 \text{ мкГн}; C_2 = 31 \text{ пФ}; L_2 = 1,08 \text{ мГн};$$

$$L_3 = 123 \text{ мкГн}; C_3 = 271 \text{ пФ}; C_4 = 12,8 \text{ пФ}; L_4 = 2,61 \text{ мГн}.$$

## 12. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

### 12.1. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Изучение свойств и расчёт электростатического поля производится, исходя из его основных законов, которые математически могут быть выражены либо в интегральной, либо в дифференциальной форме. Электростатическое поле возникает вокруг неподвижных зарядов.

Исходным соотношением для расчёта является теорема Остроградского-Гаусса. Математически теорема выражена зависимостью

$$\int_S E ds = \frac{\sum Q}{\epsilon \epsilon_0},$$

где  $\sum Q$  – сумма зарядов, Кл;  $E$  – напряжённость электрического поля, В/м;  $\epsilon \epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость среды, Ф/м.

Теорема Гаусса: Поток вектора электрического поля сквозь произвольно заданную поверхность  $S$  равен алгебраической сумме свободных зарядов, расположенных в объёме, ограниченном этой поверхностью.

Напряжённость электрического поля есть векторная величина, определяемая отношением силы, действующей в поле, к величине заряда:

$$E = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Потенциал электрического поля  $\phi$  – работа по перемещению заряда в электрическом поле из одной точки пространства в другую, где он равен нулю

$$\phi_x = \int_x^\infty \vec{E} dl.$$

Градиент потенциала – скорость изменения потенциала по направлению его наибольшего возрастания:

$$\text{grad } \varphi = -\vec{E} = \frac{d\varphi}{dl}.$$

Электрическое смещение  $D$  – индукция электрического поля в диэлектрике:

$$D = E\epsilon\epsilon_0, \text{ Кл/м}^2.$$

Электрическая ёмкость – мера накопления зарядов в электрическом поле:

$$C = \frac{Q}{U},$$

где  $U$  – напряжение, разность потенциалов двух точек электрического поля.

Расчёт ёмкости может быть произведён по результатам измерения тока и напряжения при заданной частоте

$$C = \frac{I \cdot 10^6}{U 2\pi f}, \text{ мкФ.}$$

Практически пригодной формулой для расчёта напряжённости электрического поля любой точки между электродами является

$$E_x = \frac{Q}{\epsilon S_x}.$$

где  $S_x$  – эквипотенциальная поверхность, проведённая через точку с искомой напряжённостью электрического поля, м<sup>2</sup>.

Напряжённость электрического поля между электродами плоского конденсатора определяется из зависимости

$$E = \frac{U_C}{\epsilon S_x} = \frac{U\epsilon S_x}{\epsilon S_x x} = \frac{U}{x}, \text{ В/м,}$$

где  $x$  – расстояние между электродами.

При расчёте конденсатора со слоистой изоляцией напряжение между смежными слоями конденсатора распределяются обратно пропорционально ёмкостям этих слоев

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Для цилиндрического конденсатора в соответствии с теоремой Гаусса

$$E_x = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0 2\pi r_x l};$$

$$U = -\int_R^r E_x dx = -\frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \int_R^r \frac{dx}{r_x} = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 l} \ln \frac{R}{r};$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R}{r}}.$$

Исходя из этого, получим уравнение напряжённости электрического поля, пригодное для практических расчётов:

$$E_x = \frac{U}{2,3 X \ln \frac{R}{r}}.$$

Уравнение потенциала в слое изоляции цилиндрического конденсатора

$$\varphi_x = -\int_R^x E_x dx = -\frac{U}{2,3 \lg \frac{R}{r}} \int_R^x \frac{dx}{x} = \frac{U}{\lg \frac{R}{r}} \lg \frac{R}{x}.$$

При расчёте сложных систем, например состоящих из цилиндров с параллельными несовпадающими осями, вводят понятие электрической оси, вдоль которой расположен заряд каждого цилиндра, и используют два основных положения:

1) потенциал в любой точке электрического поля, созданного действием нескольких зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке поля каждым из зарядов в отдельности;

2) напряжённость в любой точке электрического поля определяется геометрической суммой напряжённостей электрических полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов.

Если два цилиндра (см. рис 12.1) с равными и разноименными зарядами расположены параллельно друг другу, то положение их электрических осей находится в точках пересечения прямой, соединяющей их геометрические центры, и вспомогательной окружности с диаметром, равным отрезку между двумя точками касания

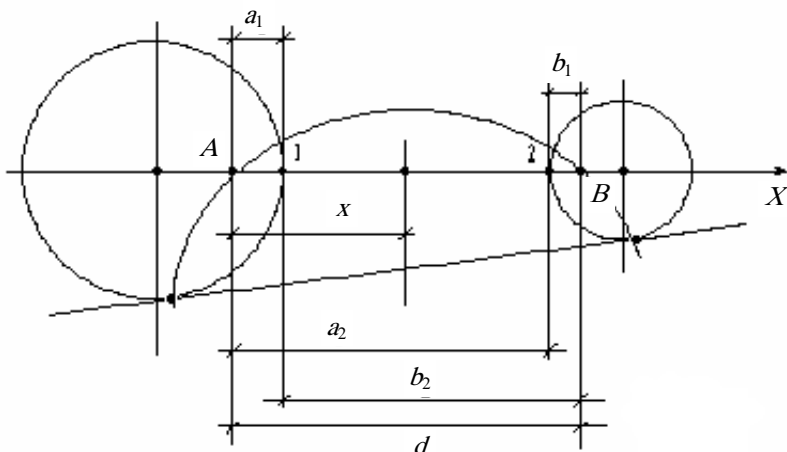


Рис. 12.1

касательной, проведённой к поверхностям рассматриваемых цилиндров:

$$\varphi_1 = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi l} \ln \frac{b_1}{a_1};$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi l} \ln \frac{b_2}{a_2}.$$

Действующее напряжение между цилиндрами равно разности потенциалов между рассматриваемыми точками

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi l} \ln \frac{b_1 - a_2}{a_1 b_2},$$

откуда в соответствии с определением ёмкости имеем

$$C = \frac{\varepsilon 2\pi l}{\ln \frac{b_1 - a_2}{b_2 a_1}}.$$

Напряжённость электрического поля в любой из точек (см. рис. 12.1) линии центров получим из теоремы Гаусса:

$$E_X = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi l} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right),$$

откуда

$$E_{\max} = \frac{Q}{\varepsilon 2\pi l} \left( \frac{1}{a_2} + \frac{1}{d-a_2} \right).$$

Выразив в этом выражении заряд через ёмкость и напряжение, получим зависимость, пригодную для практических расчётов:

$$E_{\max} = U \frac{\frac{1}{a_2} + \frac{1}{d-a_2}}{\ln \frac{b_1 a_2}{b_2 a_1}}.$$

Например, используя это выражение, получим уравнение для расчёта максимальной напряжённости электрического поля вблизи поверхности любого из проводов двухпроводной линии:

$$E_{\max} = U \frac{\frac{1}{\Delta_{1,2}} + \frac{1}{r}}{2 \ln \frac{\Delta_{1,2}}{r}},$$

где  $\Delta_{1,2}$  – расстояние между проводами;  $r$  – радиус провода.

## 12.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Основная физическая величина, характеризующая проводящую среду в электрическом поле, является плотность тока  $j$  [А/м<sup>2</sup>] и направлена она вдоль электрического поля.

Отсюда вытекает формулировка полного тока проводимости:

$$I = \int_S j dS.$$

Ток проводимости – упорядоченное движение электронов в проводнике под действием электрического поля.

Свойство среды проводить электрический ток называется проводимостью или электропроводностью  $\sigma$  [См].

Закон Ома в дифференциальной форме будет иметь вид

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Если в электромагнитном поле выделить некоторый объём, то ток вошедший в объём, будет равняться току, вышедшему из объёма, т.е.  $\oint j dS = 0$  или  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ .

Данное уравнение выражает принцип непрерывности полного тока и является первым законом Кирхгофа.

Следовательно, электрическое поле в однородной проводящей среде подчиняется уравнению Лапласа и поле постоянного тока в проводящей среде является полем потенциальным.

Например, из закона Ома, выраженного в дифференциальной форме, можно определить напряжённость электрического поля, образованного током молнии, растекающегося с полусферического заземлителя:

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I_M}{2\pi x^2 \sigma},$$

где  $x$  – текущий радиус.

Применив приращение радиуса  $dx$  вдоль линий тока, определим приращение напряжения на участке радиуса:

$$dU = Edx = \frac{I_M}{2\pi x^2 \sigma} dx.$$

Так как потенциал в точках, удалённых в бесконечность, равен нулю, выразим потенциал для любой точки поля, имеющей координату  $x$ , через интеграл с пределами от  $x$  до  $\infty$ :

$$\Phi_x = U_x = \int_x^\infty dU = \frac{I_M}{2\pi\sigma} \int_x^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{I_M}{2\pi\sigma} \left[ -\frac{1}{x} \right]_x^\infty = \frac{I_M}{2\pi\sigma x}.$$

Используя данную зависимость, можно рассчитать шаговое напряжение и напряжение прикосновения, а также сопротивление рассматриваемого заземлителя.

## 12.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Электрические токи непрерывно связаны с магнитным полем. Эта связь определяется интегральной формой закона полного тока

$$\oint_L H dl = \int_S \left( \sigma \vec{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) dS,$$

где  $\sigma E$  – ток проводимости;  $\epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  – ток смещения.

Следует отметить, что кроме  $\frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$  и  $i$  имеется ещё эмиссионный ток, который вызывается электронной эмиссией:

$$I_s = \rho \bar{v},$$

где  $\rho$  – плотность зарядов;  $v$  – скорость переноса.

Таким образом, все виды токов, имея различную физическую природу, обладают свойством создавать магнитное поле:

$$\text{rot } \bar{H} = j + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho \bar{v}.$$

Физический ротор (rot) характеризует поле в данной точке в отношении к способности образования вихрей.

Магнитный поток через некоторую поверхность  $S$  определяется как поток вектора  $B$  через эту поверхность:

$$\Phi = \int_S \bar{B} d\bar{S}, \text{ Вб.}$$

Если поверхность  $S$  замкнута и охватывает объём  $V$ , то поток, вошедший в объём, равен потоку, вышедшему из него, т.е.:

$$\oint \bar{B} d\bar{S} = 0.$$

В дифференциальной форме принцип непрерывности магнитного потока записывается так:

$$\text{div } \bar{B} = 0.$$

Физически дивергенция (div) означает исток или сток вектора в заданной точке, а отсутствие дивергенции означает солиноидальность поля.

Например, для расчёта индуктивности двухпроводной системы, необходимо знать магнитное поле вне и внутри провода, чтобы найти магнитный поток.

Для случая, когда  $R_1 > x$  (внутри провода), напряжённость магнитного поля находится из закона полного тока:

$$H = \frac{I}{2\pi R_1^2} x,$$

где  $R_1$  – радиус провода;  $x$  – текущая координата.

Отсюда магнитный поток

$$\Phi = \int B dS = \int \mu \mu_0 H dS = \frac{\mu \mu_0 I}{2\pi R_1^2} \int_0^{R_1} x dx;$$

$$\Phi = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} I^2.$$

Аналогично, в случае, когда  $R_1 < x$  (вне провода),

$$\Phi = \frac{\mu \mu_0 I^2}{2\pi} \ln \left( \frac{d}{R_1} \right).$$

Так как система симметрична, а токи в проводах направлены противоположно, то напряжённости полей, создаваемые каждым из проводников между их осями одинаковы.

Следовательно, суммарный магнитный поток  $\Phi_{\Sigma}$  будет в два раза больше потока от одного провода, а индуктивность находится из выражения

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu\mu_0}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{d}{R_1} \right) I.$$

Аналогия в расчёте электрических и магнитных полей проявляется в том, что для их потенциалов справедливы уравнения Пуассона и Лапласа и есть общие черты в структуре граничных условий.

Уравнение Пуассона имеет вид

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0},$$

или векторная форма уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Покажем взаимное соответствие между электрическим и магнитным полем на примере рис. 12.2 и 12.3.

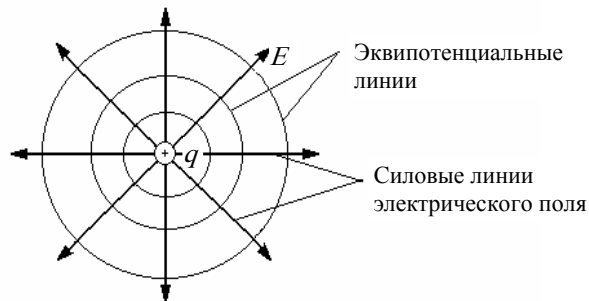


Рис. 12.2

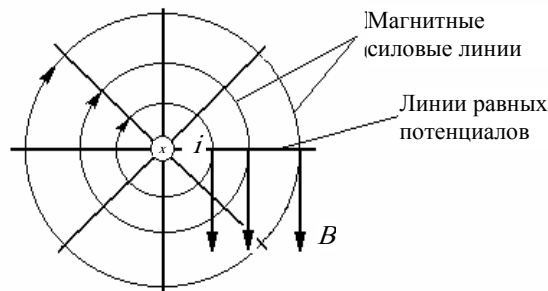


Рис. 12.3

#### 12.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Под электромагнитным полем понимают совокупность изменяющихся по времени, взаимосвязанных и порождающих друг друга электрического и магнитного полей.

Электромагнитное поле оказывает силовое воздействие на электрические заряды. Силовое воздействие определяется силой Лоренца

$$\bar{F} = q\bar{E} + q[\bar{v}\bar{B}].$$

Энергия в единице объёма, занятого полем в вакууме, равна сумме энергий электрической и магнитной компонент поля:



$$W_{\text{эм}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B}{2\mu_0},$$

где  $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^9}$ , Ф/м;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ , Гн/м.

Электрические и магнитные поля могут быть изменяющимися и неизменяющимися во времени. Неизменным в макроскопическом смысле электрическим полем является электростатическое поле, созданное совокупностью зарядов, неподвижных в пространстве и неизменных во времени. В этом случае существует электрическое поле, а магнитное отсутствует. При протекании постоянных токов по проводящим телам внутри и вне их существуют электрическое и магнитное поля, индуктивно не связанных друг с другом, поэтому их можно рассматривать отдельно.

Взаимосвязь электрического и магнитного полей наиболее отчётливо видна в уравнениях Максвелла, которые дают выражения для вихрей магнитного и электрического полей, отличные от их выражений в стационарных полях.

Истоки электромагнитного поля и выражения для энергии имеют ту же структуру что и в стационарных полях. Уравнения Максвелла могут быть описаны интегральными и дифференциальными соотношениями. Сведём все уравнения Максвелла в табл. 12.1.

### 12.1. Система уравнений Максвелла

Дифференциальная форма	Интегральная форма
Закон полного тока	
1. $\text{rot} \bar{H} = j + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$	1. $\oint_L H dl = \int_S (\sigma \bar{E} + \epsilon \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}) dS$
Закон электромагнитной индукции (Фарадея)	
2. $\text{rot} \bar{E} = -\mu_0 \mu \frac{\partial H}{\partial t}$	2. $\oint_L E dl = \int_S \mu \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} dS$
Теорема Остроградского-Гаусса	
3. $\text{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$	3. $\int_S \epsilon \epsilon_0 E dS = \int_V \rho dV$
Принцип непрерывности магнитного потока	
4. $\text{div} \bar{H} = 0$	4. $\oint \mu \mu_0 \bar{H} dS = 0$
Уравнение непрерывности электрического поля тока. (I-й закон Кирхгофа)	
5. $\text{div} j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	5. $\oint j dS = -\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dS$
Закон Ома	
6. $\bar{j} = \sigma \bar{E}$	6. $\oint j dl = \oint \sigma (E + E_{\text{стоп}}) dl$

Движение энергии электромагнитного поля, распределение потоков мощности электромагнитного поля характеризует вектор Умова-Пойтинга:

$$\bar{P}_{\text{эм}} = \bar{E} \bar{H}.$$

где  $P_{\text{эм}}$  – вектор электромагнитной энергии – поток электромагнитной энергии через заданную площадку, Вт/м<sup>2</sup>.

#### Задачи

12.1. К плоской проводящей шайбе (рис. 12.4) подводится напряжение от источника постоянного напряжения 1,57 В при помощи двух медных радиально расположенных пластин, врезанных в шайбу. Проводимость материала шайбы  $\sigma = 2 \cdot 10^6$  См/м.

Определить наибольшее и наименьшее значения плотности тока в шайбе и ток через источник. Размеры шайбы:  $r_1 = 50$  мм;  $r_2 = 80$  мм; толщина 1 мм. Потенциал каждой медной пластины считать во всех точках её постоянным.

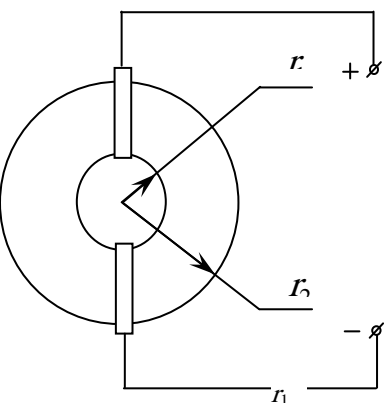


Рис. 12.4

12.2. Найти магнитное поле в т.  $M$ , создаваемое током  $J$  длинной тонкой ленты (рис. 12.5).

На каком расстоянии от оси ленты поле можно считать практически таким же, как и поле тока  $J$ , сосредоточенного на оси ленты.

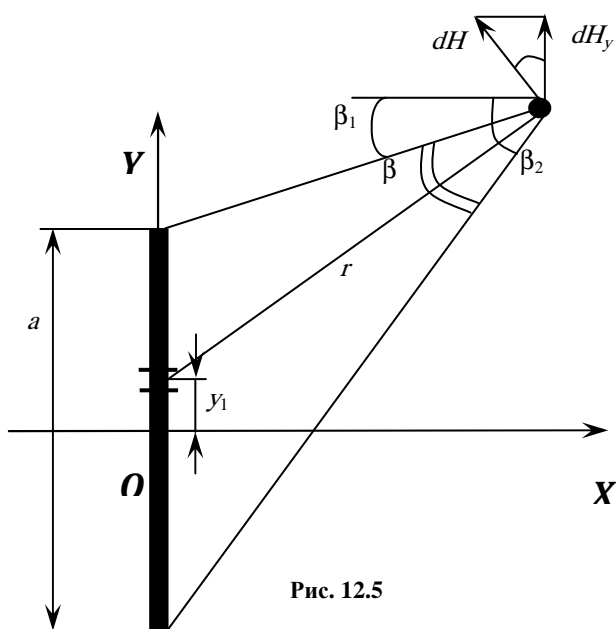


Рис. 12.5

12.3. Определить индуктивность коаксиального кабеля с радиусом жилы  $r$  и радиусом оболочки  $r_2$  и  $r_3$ , считая, что плотность тока в жиле и оболочке равны.

Магнитная проницаемость  $\mu = 1$ .

12.4. Плотность тока в плазме газового разряда  $j = j_z = \frac{j_0}{r/a + 1}$ , в цилиндрической системе координат. Здесь  $r$  – текущий радиус  $j_0$  и  $a$  – постоянные.

Определить напряжённость магнитного поля. Построить на одном графике зависимости  $j(r)$  и  $H(r)$ .

12.5. Заряд  $q_1 = 3,3 \cdot 10^{-8}$  Кл равномерно распределён вдоль отрезка прямой  $AB$  длиной 6 см. Определить силу, с которой заряд действует на точечный заряд  $q_2 = 6,7 \cdot 10^{-10}$  Кл, находящийся на той же прямой на расстоянии 5 см от середины  $O$  отрезка  $AB$ .

12.6. Заряд 50 СГСЭ,  $q_1 = 50$  СГСЭ  $= 1,67 \cdot 10^{-8}$  Кл, равномерно распределён вдоль тонкого кольца радиусом 5 см. Определить силу, с которой заряд действует на точечный заряд 10 СГСЭ,  $q_2 = 10$  СГСЭ  $= 3,3 \cdot 10^{-9}$  Кл, находящейся на расстоянии 10 см от центра кольца в точке, равноудалённой от всех точек кольца (рис. 12.6).

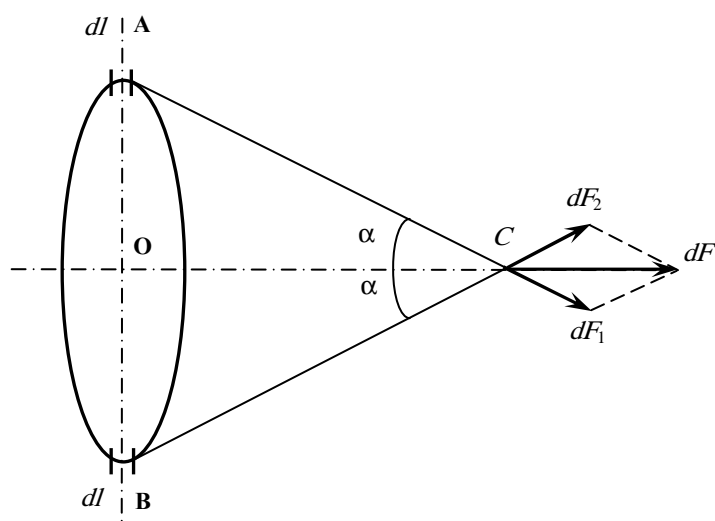


Рис. 12.6

12.7. Заряд  $q = 6,67 \cdot 10^{-9}$  Кл находится в точке, равноудалённой от всех точек некоторой окружности на расстоянии 4,5 см от её плоскости. Определить число силовых линий поля, проходящих внутри окружности, если радиус её 6 см (рис. 12.7).

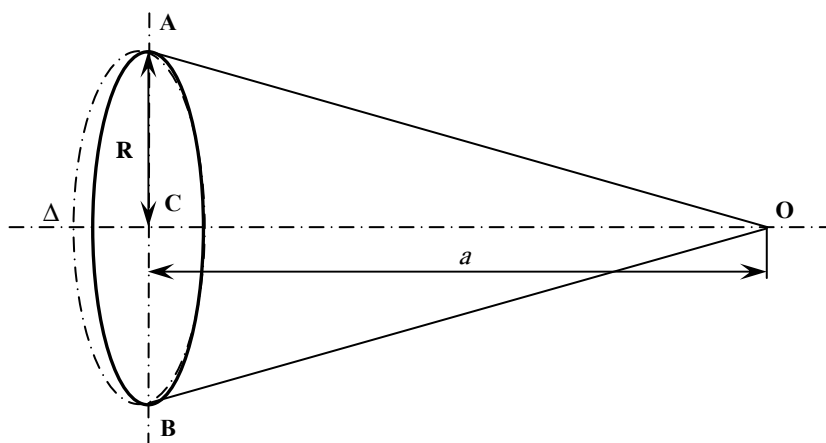


Рис. 12.7

12.8. Тонкая прямая нить длиной  $L = 80$  см несёт на себе заряд  $1,5 \cdot 10^{-7}$  Кл. Определить напряжённость поля в точке, находящейся недалеко от средней части нити на расстоянии  $r = 5$  мм от нити.

12.9. Две параллельные пластины заряжены одноименно, причём плотность заряда одной из пластин равна  $6,7 \cdot 10^{-6}$  Кл/м<sup>2</sup>, а другой –  $10 \cdot 10^{-6}$  Кл/м<sup>2</sup>. Расстояние между пластинами 1 см. Между пластинами вставлена расположенная параллельно им парафиновая пластинка толщиной 5 мм. Определить разность потенциалов между пластинами.

12.10. Кабель имеет жилу  $d_1 = 1$  см и свинцовую оболочку с  $d_2 = 2,6$  см – внутренний диаметр, отделённую от кабеля изоляцией с  $\epsilon = 4$  (рис. 12.8).

При каком напряжении между жилой и оболочкой начнётся разряд в воздушном зазоре толщиной 2 мм, если разряд в воздухе начинается при напряжённости поля  $5 \cdot 10^6$  В/м.

- Расчёт сделать для двух случаев:  
 1) зазор между жилой и изоляцией;  
 2) зазор между изоляцией и оболочкой.

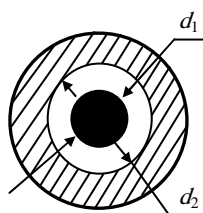


Рис. 12.8

12.11. Вертикальная антенна передатчика, работающего на частоте 10 МГц, имеет высоту 1,5 м.

Определить мощность на выходе передатчика, сопротивление излучения и максимальное значение тока в антенне, если на расстоянии 5 км действующее значение напряжённости  $E = 1$  мВ/м. В этой точке следует также подсчитать величину вектора Умова-Пойтинга. Поверхность земли в этой задаче считать плоской.

12.12. Определить пробивное напряжение проходного цилиндрического изолятора, работающего в установке с заданным напряжением  $U$ .

Изолятор имеет три слоя изоляции: бакелизированная бумага, масло и фарфор с пробивными напряжённостями электрического поля  $E_1, E_2, E_3$  при соответствующих диэлектрических проницаемостях  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ .

Токоведущий стержень имеет радиус  $R_0$ , а внешние радиусы слоёв изоляции соответственно равны  $R_1, R_2$  и  $R_3$  (рис. 12.9).

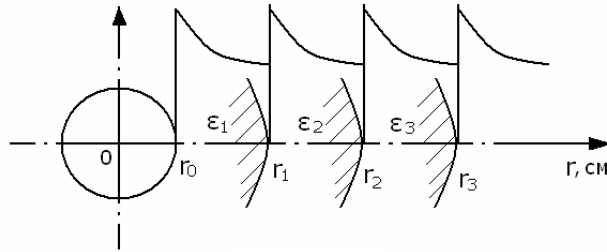


Рис. 12.9

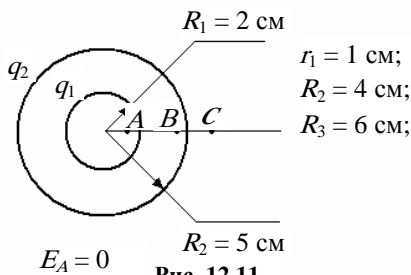
12.13. К пластинам плоского конденсатора, одна из которых заземлена, приложено 100 В. В воздушный зазор между ними 4 см вдвигается незаряженная тонкая металлическая пластина на расстоянии 3 см от заземлённой пластины. Определить напряжённость поля по обе стороны от неё (рис. 12.10).



Рис. 12.10

12.14. В конденсатор предыдущей задачи (рис. 12.10) вдвигаются две незаряженные тонкие проводящие пластины, соединённые проводником, на расстоянии 1 см от каждой из пластин. Определить напряжённость поля и потенциалы внутренних пластин.

12.15. Сферический конденсатор имеет следующие параметры (рис. 12.10):



$$q_1 = 1,3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}; \quad q_2 = -2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}.$$

Определить напряжённость и потенциал поля на расстоянии 1 см, 4 см, 6 см от центра шара.

12.16. Плоский конденсатор изготавливается из листов тонкого станиоля, проложенных слюдой. Сколько листов станиоля нужно взять, чтобы получить ёмкость 1 мкФ, если площадь листа 60 см<sup>2</sup>, а толщина слюдяных прокладок составляет 0,1 мм (рис. 12.12).

Ёмкость системы  $n$  листов равна ёмкости  $(n - 1)$ , т.е.  $(n - 1)$  параллельно соединённых плоских конденсаторов.

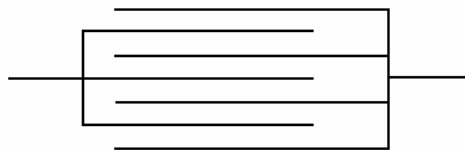


Рис. 12.12

12.17. Проволочная рамка, имеющая 250 витков, площадь которых 0,05 м<sup>2</sup>, равномерно вращается в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной силовым линиям. При скорости вращения 12 об/с максимальная ЭДС переменного тока оказывается равной 15 В. Определить магнитную индукцию поля.

12.18. В среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  на расстоянии  $l$  друг от друга расположены два плоских электрода, один из них соединён с «+» батареи с  $E = 1$  кВ (рис. 12.13). В этом пространстве распределён объёмный заряд с плотностью  $\rho$ :

$$\epsilon = 2; E = 1 \text{ кВ} = 10^3 \text{ В},$$

где  $\rho = -A\epsilon_0\epsilon x$  – распределение объёмного заряда с плотностью  $\rho$  между пластинами;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды;

$$A = 6 \text{ кВ/см}^3.$$

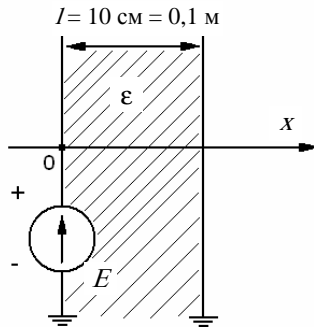


Рис. 12.13

Найти закон изменения потенциала в пространстве между электродами

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}.$$

12.19. Найти ёмкость двухпроводной линии на единицу длины, если радиусы проводов  $a$ , расстояние между ними  $d$ . Провода находятся в диэлектрике  $\epsilon_a = \epsilon_0\epsilon$  (рис. 12.14).

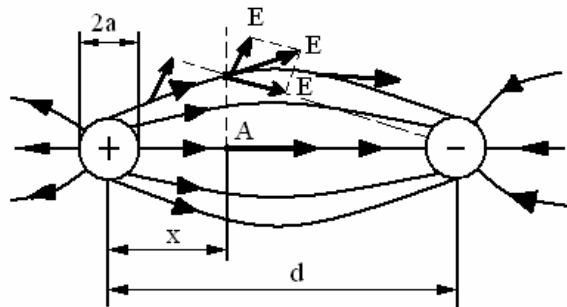


Рис. 12.14

12.20. В электрическом поле точечного заряда  $q$  напряжение между точками  $a$  и  $b$  равно 25 В. Определить величину и направление напряжённости поля в т.  $C$ , если точка  $a$ ,  $b$  и  $c$  лежат в одной плоскости, а расстояние от заряда  $q$ :  $R_a = 3$  см;  $R_b = 7$  см;  $R_c = 5$  см (рис. 12.15).

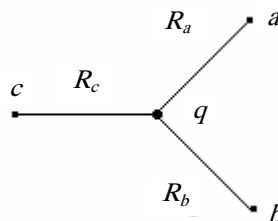


Рис. 12.15

11.21. Коаксиальный кабель имеет размеры внутренней жилы  $r_1 = 2$  мм и внешней оболочки  $r_2 = 5$  мм. Под какое напряжение можно включить кабель, если максимальная напряжённость поля не должна превышать  $1/3$  пробивной напряжённости, равной  $2 \cdot 10^4$  кВ/м.

12.22. Определить шаговое напряжение на расстоянии  $R_2 = 31$  м от заземлителя в виде полусферы, если токи стекания равен току короткого замыкания ( $2 \cdot 10^3$  А), а проводимость грунта  $\sigma = 10^{-2}$  См/м (рис. 12.16).

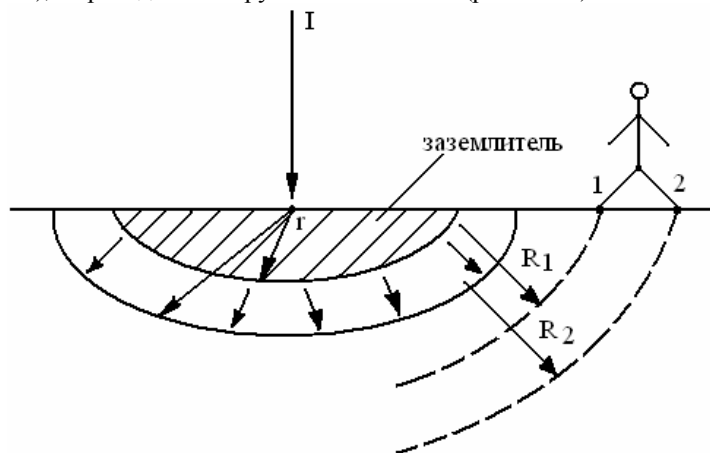


Рис. 12.16

Заземлитель – металлическая полусфера радиусами  $r, R$ , в которой стекает ток  $I$ .

12.23. Плоский контур вращается с угловой скоростью  $\omega$  в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной к полю. Индукция магнитного поля  $B$ . Определить силу тока в контуре, если индуктивность его  $L$ , а сопротивление  $R$ .

12.24. Вычислить диэлектрическую проницаемость  $\epsilon(\omega)$ , если  $\epsilon(t) = Ae^{-t/a}$ , где  $A$  и  $a$  – константы. Найти статическую диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_{ст} = \epsilon(0)$ .

12.25. Вычислить индуктивность единицы длины коаксиального кабеля, состоящего из двух цилиндрических трубок радиусами  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Толщиной стенок пренебречь. Магнитная проницаемость изоляции  $\mu$ .

12.26. Найти напряжённость магнитного поля прямого проводника с током  $i$  на расстоянии  $R$  от оси проводника (рис. 12.17).

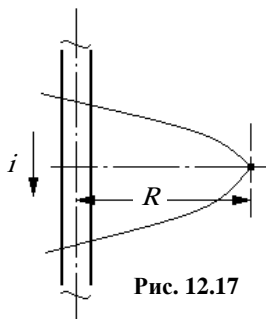


Рис. 12.17

12.27. В воду вертикально опущены две металлические трубы диаметром 50 мм и длиной 3 м на расстоянии  $d = 25$  м. Найти проводимость  $G$  между трубами, а также ток утечки, если проводимость воды  $\sigma = 10^{-1}$  См/м, приложенное к ним напряжение 10 В.

12.28. На тороидальном сердечнике с магнитной проницаемостью  $\mu \gg 1$  намотано 10 витков. Найти индуктивность такой катушки, если известны размеры сердечника:  $h = 0,01$  м;  $a = 0,02$  м;  $b = 0,05$  м;  $\mu = 10^3$ ;  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$  Гн/м.

12.29. В землю на расстоянии 2,5 м зарыты две металлические трубы диаметром 50 мм и длиной 1 м. Найти заряды на трубах при напряжении на них 1 кВ, если удельная проводимость земли  $\sigma = 10^{-2}$  См/м, с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 4$ , диэлектрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м (рис. 12.18).

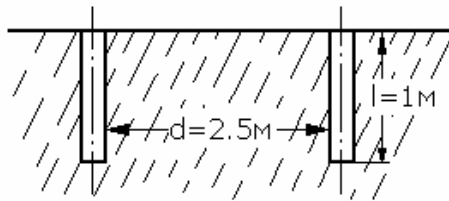


Рис. 12.18

12.30. Определить максимальную напряжённость электрического поля между двумя цилиндрическими проводниками, зарытыми в землю на расстоянии 2,5 м, если  $\epsilon = 4$ ;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м; напряжение  $U = 1$  кВ (рис. 12.19).

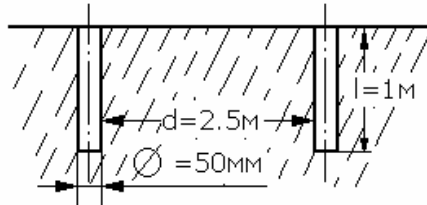


Рис. 12.19

12.31. Найти соотношение между напряжённостями электрического поля в проводнике и диэлектрике, если между медными пластинами, расположенными на расстоянии  $d = 1$  м, приложено напряжение  $U = 1$  кВ. Критическая плотность тока меди  $j = 10^7$  А/м<sup>2</sup>, а её проводимость  $\sigma = 5 \cdot 10^7$  См/м.

12.32. Проводник имеет форму длинного круглого цилиндра радиуса  $a$ , по которому течёт постоянный ток  $I$ , равномерно распределённый по его сечению. Рассмотреть миграцию энергии электромагнитного поля на поверхности проводника. Показать, что тепло, выделяющееся в проводнике, равно энергии электромагнитного поля, которая поступает в проводник извне.

12.33. Проводник имеет форму длинного круглого цилиндра радиуса  $a$ , по которому течёт постоянный ток  $I$ , равномерно распределённый по его сечению (проводимость  $\sigma$ ). Найти энергию тепловых потерь в проводнике.

### Ответы, решения и методические указания

12.1. Считая, что линии плотности тока и напряжённости поля совпадают с полуокружностями и напряжённость поля зависит только от радиуса, из уравнения  $U = \int E dl$  получаем  $E = U / \pi r$  и  $j = \sigma E = U \sigma / \pi r$ ;  $d = 1$  мм – толщина.

$$\text{Тогда } j_{\max} = U \sigma / \pi r_1 = \frac{1,57 \cdot 2 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 50 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2;$$

$$j_{\min} = U \sigma / \pi r_2 = \frac{1,57 \cdot 2 \cdot 10^6}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^{-3}} = 1,27 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2;$$

ток

$$\begin{aligned} J &= 2 \int j dS = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{U d\sigma}{\pi r} dr = \frac{2U d\sigma}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \\ &= \frac{2 \cdot 1,57 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^6}{\pi} \ln \frac{50}{80} = 940 \text{ А.} \end{aligned}$$

12.2. Ток, протекающий в элементах ленты  $dy_1$  ( $\parallel$ -оси  $Z$ ),

$$dJ = \frac{J}{a} dy_1.$$

Элементарное поле, создаваемое этим током,

$$dH = \frac{dJ}{2\pi r} = \frac{J}{a} \frac{dy_1}{2\pi r},$$

а составляющая поля в направлении оси  $y$

$$dH_y = dH \cos\beta = \frac{J}{a} \frac{dy_1}{2\pi r} \cos\beta.$$

Из рисунка 12.5 следует, что

$$r = x / \cos\beta; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{(y - y_1)}{x};$$

$$dy_1 = -x d\beta / \cos^2\beta.$$

При этом  $dH_y = -\frac{J}{2\pi a} (d\beta)$ , а

$$H_y = \int_{\beta_2}^{\beta_1} \frac{J}{2\pi a} d\beta = \frac{J}{2\pi a} (\beta_2 - \beta_1).$$

Составляющая элементарного поля в направлении оси  $x$

$$dH_x = \frac{J}{2\pi a} \frac{\sin\beta}{\cos\beta} d\beta$$

и 
$$H_x = \frac{J}{2\pi a} \ln \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_1} = \frac{J}{4\pi a} \ln \frac{x^2 + (y - a/2)^2}{x^2 + (y + a/2)^2}.$$

На оси  $y$  при  $a/2y \ll 1$

$$H_x = -\frac{J}{2\pi y} \left( 1 + \frac{1}{12} \frac{a^2}{y^2} \dots \right).$$

Если  $y \geq 2a$ , то с погрешностью не более 2 %  $H_x = -\frac{J}{2\pi y}$ , т.е. поля тока ленты на оси  $y$  такое же, как поле тока, сосредоточенного на оси ленты.

На оси  $x$  при  $a/2x \ll 1$

$$H_y = -\frac{J}{2\pi x} \left( 1 + \frac{1}{12} \frac{a^2}{x^2} \dots \right),$$

т.е. практически на таком же расстоянии, как и по оси  $y$ , поле тока ленты можно считать, как поле тока, сосредоточенного на оси ленты.

12.3. Индуктивность кабеля целесообразно определить, вычислив энергию магнитного поля  $W$  (на единицу длины кабеля) из выражения

$$W = \frac{L_0 J^2}{2}.$$

С другой стороны,

$$W = \int \frac{1}{2} \mu_0 H^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_{r=0}^{r_3} H^2 2\pi r dr,$$

где  $V$  – объём на единицу длины.

Применяя закон полного тока, определяем напряжённость поля:

- при  $0 < r < r_1$  получим  $H_1 = \frac{Jr}{2\pi r_1^2}$ ;
- при  $r_1 < r < r_2$  находим  $H_2 = \frac{Jr}{2\pi r}$ ;
- при  $r_2 < r < r_3$  напряжённость  $H_3 = J \frac{r_3^2 - r^2}{2\pi r (r_3^2 - r_2^2)}$ .

Тогда

$$W = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{r_1} \frac{J^2 r^3}{r_1^4} dr + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{J^2 dr}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r_2}^{r_3} \frac{J^2 (r_3^2 - r^2)}{(r_3^2 - r_2^2) r} dr.$$

Индуктивность кабеля на единицу длины



$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln \frac{r_3}{r_2} - \frac{3r_3^2 - r_2^2}{4(r_3^2 - r_2^2)} \right].$$

Первое слагаемое обусловлено магнитным полем внутри жилы, второе – полем между жилой и оболочкой, два последних слагаемых – полем внутри оболочки.

Обратим внимание, что индуктивность определяется отношением радиусов, а не их абсолютными значениями.

В случае, когда оболочка достаточно тонка  $(r_3 - r_2) \ll r_2$ ,

$$L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \frac{r_2}{r_1} \right).$$

12.4. Поле находим, интегрируя уравнение закона полного тока в дифференциальной форме  $\text{rot } H = j$ , которое в условиях задачи перепишем в виде

$$j_z = \text{rot}_z H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_a) = \frac{j_a}{r/a + 1}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$r H_a = a j_0 [r - a \ln(r + a) C].$$

Постоянная  $C$  определяется из условия  $H = H_a = 0$  при  $r_0 = 0$

$$0 = -\ln a C = \ln \frac{1}{aC}.$$

Тогда  $H = H_a = a j_0 \left[ 1 - \frac{a}{r} \ln \left( \frac{V}{a} + 1 \right) \right].$

12.5.

1)  $\gamma = \frac{q_1}{L}$  – линейная плотность заряда.

2)  $dF = \frac{q_2 \gamma dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{\gamma q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - \frac{L}{2}} - \frac{1}{r + \frac{L}{2}} \right)$  – сила  $dF$ , с которой заряд  $dq_1$  действует на заряд  $dq_2$ , помещённый в точке  $C$ ;

$dq = \gamma dx$  – элементарный заряд элементарного отрезка;  $x$  – расстояние между зарядами  $dq_1$  и  $dq_2$ .

3)  $F = \int_{r - \frac{L}{2}}^{r + \frac{L}{2}} \frac{q_2 \gamma dx}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{\gamma q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r - \frac{L}{2}} - \frac{1}{r + \frac{L}{2}} \right),$

интегрирование уравнения (2) в пределах  $x = r \pm \frac{L}{2}$ , так как при переходе от одного элемента к другому направление силы не меняется.

$$F = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4r^2 - L^2} = \frac{1}{\pi \cdot 8,8 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{3,3 \cdot 10^{-8} \cdot 6,7 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 0,05^2 - 0,06^2} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

12.6.  $\gamma = \frac{q_1}{2\pi R}$ ;  $dq = \gamma dl$ ;

$$dF_1 = \frac{q_2 dq}{4\pi\epsilon_0 AC^2} = \frac{\gamma q_2 dl}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + h^2)^2};$$

$$dF = dF_1 \cos \alpha + dF_2 \cos \alpha = 2 dF_1 \cos \alpha = 2 dF_1 \frac{OC}{AC};$$

$$\frac{OC}{AC} = \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}};$$

$$dF = \frac{\gamma h q_2 dl}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(R^2 + h^2)^3}};$$

$$F = \int_0^{\pi R} \frac{\gamma h q_2 dl}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{(R^2 + h^2)^3}} = \frac{R\gamma h q_2}{2\epsilon_0 \sqrt{(R^2 + h^2)^3}}.$$

Пределы от  $l=0$  до  $l=\pi R$ , так как мы рассматриваем одновременно элемент длины  $2dl$ . Сделаем подстановку:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{\sqrt{(R^2 + h^2)^3}} = \frac{1,67 \cdot 10^{-8} \cdot 3,3 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot \pi \cdot 8,84 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{0,1}{\sqrt{(0,05^2 + 0,1^2)^3}} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ Н.}$$

12.7. Число силовых линий, исходящих из заряда  $q$ , согласно теореме Остроградского-Гаусса

$$N_0 = \frac{q}{\epsilon_0},$$

$\frac{N_0}{4\pi}$  – число линий внутри телесного угла в один стерадиан;  $N = \frac{\omega}{4\pi} \frac{q}{\epsilon_0}$  – число линий внутри телесного угла  $\omega$ .

$$OA = r = \sqrt{a^2 + R^2},$$

где  $S = 2\pi r h$  – площадь поверхности сегмента;  $h = OC = r - a$ .

$$\omega = \frac{S}{r^2} = \frac{S}{r^2} = \frac{2\pi r(r-a)}{r^2} = 2\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right);$$

$$N = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right) q = \frac{1}{2 \cdot 8,84 \cdot 10^{-12}} \left(1 - \frac{0,045}{\sqrt{0,045^2 + 0,06^2}}\right) \cdot 6,67 \cdot 10^{-9} =$$

$$= 150 \text{ В} \cdot \text{м.}$$

12.8. Построим цилиндр радиуса  $r$ , ось которого совместим с нитью, пусть высота цилиндра  $H \ll L$ .

$E$  – напряжённость поля в любой точке боковой поверхности цилиндра;  $\gamma = \frac{q}{L}$  – линейная плотность заряда нити.

$N = 2\pi r HE$  – полный поток напряжённости.

В силу теоремы Остроградского-Гаусса

$$N = \frac{q_1}{\epsilon_0}, \text{ где } q_1 = \gamma H = q \frac{H}{L}.$$

Окончательно получаем

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r L} = \frac{1,5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot \pi \cdot 8,84 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8} = 6,75 \cdot 10^5 \text{ В/м.}$$

12.9.

$$U = U_1 + U_2,$$

где  $U_1$  – разность потенциалов на границах парафиновой пластинки;  $U_2$  – разность потенциалов на границах воздушного зазора.

$$U_1 = E_1 d_1; \quad U_2 = E_2 (d - d_1),$$

где  $E_1$  – напряжённость поля в парафине;  $E_2$  – напряжённость поля в воздушном зазоре.

Если поле создано равномерно заряженной бесконечной плоскостью, то

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0};$$

$$U = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\epsilon\epsilon_0} \left( \frac{d_1}{\epsilon} + d - d_1 \right), \text{ для парафина } \epsilon = 2;$$

$$U = \frac{10 \cdot 10^{-6} - 6,7 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 8,84 \cdot 10^{-12}} \left( \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} + 0,01 - 5 \cdot 10^{-3} \right) = 1400 \text{ В.}$$

12.10.

$$U = U' + U'',$$

где  $U'$  – на воздушном зазоре;  $U''$  – на слое изоляции.

1) В общем случае разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  равна

$$U_{AB} = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{r_B}{r_A},$$

где  $\gamma$  – линейная плотность зарядов цилиндра;  $r_A$  и  $r_B$  – расстояние точек  $A$  и  $B$  от оси цилиндра.

$$U' = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R_1}; \quad U'' = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

где  $R_1 = \frac{d_1}{2}$ ;  $R_2 = \frac{d_2}{2}$ ;  $R' = \frac{d_1}{2} + h$ ;

$$U = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( 1 + \frac{2h}{d_1} \right) + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{d_2}{d_1 + 2h} \right], \quad (12.1)$$

$E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 r_A}$ ;  $r_A = R_1$ , т.е. точка  $A$  в месте поля, где силовые линии имеют наибольшую густоту.

$$E = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon_0 R_1}, \text{ откуда } \frac{\gamma}{2\pi} = \epsilon_0 R_1 E = \frac{\epsilon_0}{2} d_1 E.$$

Подставив  $\gamma$  в уравнение (12.1), получим решение первой части задачи:

$$\begin{aligned} U &= \frac{d_1 E}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{2h}{d_1} \right) + \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{d_2}{d_1 + 2h} \right] = \\ &= \frac{0,01 \cdot 5 \cdot 10^6}{2} \left[ \ln \left( 1 + \frac{2 \cdot 0,02}{0,01} \right) + \frac{1}{4} \ln \frac{0,026}{0,01 + 2 \cdot 0,002} \right] = 12 \cdot 10^3 \text{ В.} \end{aligned}$$

2) Аналогично решается вторая часть задачи, учитывая, что разряд начнется, когда предельное значение напряжённости возникает на границе зазора, расстояние которой от оси  $R'' = \frac{d_2}{2} - h$ , получим

$$\begin{aligned} U &= \left( \frac{d_2}{2} - h \right) E \left( \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{d_2 - 2h}{d_1} + \ln \frac{d_2}{d_2 - 2h} \right) = \left( \frac{0,026}{2} - 0,002 \right) \cdot 5 \cdot 10^6 \times \\ &\times \left( \frac{1}{4} \ln \frac{0,026 - 2 \cdot 0,002}{0,01} + \ln \frac{0,026}{0,026 - 2 \cdot 0,002} \right) = 20 \cdot 10^3 \text{ В.} \end{aligned}$$

12.11. Поле антенны высотой  $h = 1,5$  м, расположенной вертикально, на поверхности земли, эквивалентного диполю длиной  $l = 2h = 3$  м, находящемуся в свободном пространстве. В дальней зоне такого диполя в точке, находящейся от него на расстоянии  $r = 5$  км на горизонтальной поверхности, проходящей через середину диполя, амплитуда напряжённости электрического поля

$$E_m = \frac{\mu_0 I 2 \pi f}{4 \pi r} I_m,$$

откуда амплитуда тока в антенне

$$I_m = \frac{2r}{\mu_0 I f} E_m = \frac{2 \cdot 5000}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^7} 10^{-3} \sqrt{2} = 0,374 \text{ А.}$$

Сопротивление излучения антенны

$$R = 1580 \frac{h^2}{\lambda^2} = 1580 \frac{1,5^2}{30^2} = 3,95 \text{ Ом.}$$

Мощность излучения антенны

$$P = R \frac{I_m^2}{2} = 3,95 \frac{0,374^2}{2} = 0,276 \text{ Вт.}$$

Вектор Умова-Пойнтинга в заданной точке

$$\Pi = EH = \frac{E^2}{Z_b} = \frac{10^{-6}}{377} = 2,65 \cdot 10^{-9} \text{ Вт/м}^2,$$

где  $Z_b = 377 \text{ Ом}$  – волновое сопротивление воздуха.

12.12. Под пробоем изолятора подразумевается последовательный пробой всех его слоёв. После пробоя одного из слоёв изолятор нужно рассматривать как двухслойный.

$$U_1 = 100 \text{ кВ}; \quad R_0 = 2,6 \text{ см};$$

$$E_1 = 110 \text{ кВ/см}; \quad \varepsilon_1 = 4,3; \quad R_1 = 4,1 \text{ см};$$

$$E_2 = 62 \text{ кВ/см}; \quad \varepsilon_2 = 2,8; \quad R_2 = 15,9 \text{ см};$$

$$E_3 = 72 \text{ кВ/см}; \quad \varepsilon_3 = 6,2; \quad R_3 = 21,2 \text{ см.}$$

Максимальная напряжённость электрического поля у внутренней поверхности любого из слоёв трёхслойного цилиндрического конденсатора определяется с помощью зависимости

$$E_{x\max} = \frac{U}{r_x \lg \frac{r_{x+1}}{r_x} \left( \frac{C_x}{C_1} + \frac{C_x}{C_2} + \frac{C_x}{C_3} \right)} \text{ кВ/см,}$$

где  $C$  – ёмкость, приходящаяся на единицу длины рассматриваемого слоя;  $r_x$  и  $r_{x+1}$  – радиус внутренней и наружной поверхностей исследуемого слоя.

Ёмкость, приходящаяся на единицу длины любого слоя многослойной конструкции, определяется по формуле

$$C_x = \frac{2\pi E_0 E'_1}{2,3 \lg \frac{r_{x+1}}{r_x}}, \text{ Ф/см.}$$

Откуда ёмкость первого слоя бекелизированной бумаги

$$C_1 = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 2,8}{2,3 \cdot \lg \frac{4,1}{2,6}} \cdot 10^{12} = 5,25 \text{ кФ/см.}$$

Ёмкость второго масляного слоя

$$C_2 = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 2,8}{2,3 \cdot \lg \frac{15,9}{4,1}} \cdot 10^{12} = 1,15 \text{ кФ/см.}$$

Ёмкость третьего фарфорового слоя

$$C_3 = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 6,2}{2,3 \cdot \lg \frac{21,2}{15,9}} \cdot 10^{12} = 11,99 \text{ кФ/см.}$$

Найденные значения ёмкости подставим в ранее записанную зависимость, откуда максимальная напряжённость электрического поля в среде первого слоя

$$E_{1 \max} = \frac{U}{r_0 \cdot 2,3 \lg \frac{r_1}{r_0} \left( \frac{C_1}{C_1} + \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1}{C_3} \right)} = \frac{110}{2,6 \cdot 2,3 \cdot \lg \frac{4,1}{2,6} \left( 1 + \frac{5,25}{1,15} + \frac{5,25}{11,09} \right)} =$$

$$= \frac{110}{1,1829 \cdot (1 + 4,565 + 0,438)} = 15,49 \text{ кВ/см.}$$

Максимальная напряжённость электрического поля во втором слое

$$E_{2 \max} = \frac{U}{r_1 \cdot 2,3 \lg \frac{r_2}{r_1} \left( 1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_2}{C_3} \right)} = \frac{110}{4,1 \cdot 2,3 \cdot \lg \frac{15,9}{4,1} \left( 1 + \frac{1,15}{5,25} + \frac{1,15}{11,99} \right)} =$$

$$= \frac{110}{5,55 \cdot (1 + 0,219 + 0,0959)} = 15,07 \text{ кВ/см.}$$

Максимальная напряжённость электрического поля в третьем слое

$$E_{3 \max} = \frac{U}{r_2 \cdot 2,3 \lg \frac{r_2}{r_1} \left( 1 + \frac{C_3}{C_1} + \frac{C_3}{C_2} \right)} = \frac{110}{15,9 \cdot 2,3 \cdot \lg \frac{21,2}{15,9} \left( 1 + \frac{11,99}{5,25} + \frac{11,99}{1,15} \right)} =$$

$$= \frac{110}{4,169 \cdot (1 + 2,284 + 10,426)} = 1,76 \text{ кВ/см.}$$

Сравнение значений максимальных напряжённостей электрических полей с заданными пробивными напряжённостями электрического поля показывает, что наиболее близкой к пробивной является максимальная напряжённость электрического поля второго слоя, для которого запас прочности  $K_2$  окажется равным

$$K_2 = \frac{E_{2 \text{ пр}}}{E_{2 \max}} = \frac{62}{15,07} = 4,11,$$

т.е., если увеличить приложенное к изолятору напряжение в  $K$  раз, то произойдёт пробой второго слоя при напряжении пробоя:

$$U_{\text{пр}} = UK_2 = 110 \cdot 4,11 = 452,1 \text{ кВ.}$$

После пробоя конденсатор становится как бы двухслойным.

Приложенное напряжение 452,1 кВ, распределившись между оставшимися слоями, вызовет пробой первого, а затем и третьего слоёв изолятора.

В этом нетрудно убедиться, приняв  $C_2$  равной бесконечности, и определив напряжённость электрического поля заново в первом случае

$$E'_{1 \max} = \frac{U}{r_0 \cdot 2,3 \lg \frac{r_1}{r_0} \left( 1 + 0 + \frac{C_1}{C_3} \right)} = \frac{452,1}{2,6 \cdot 2,3 \cdot \lg \frac{4,1}{2,6} \left( 1 + \frac{5,25}{11,99} \right)} =$$

$$= \frac{452,1}{1,1829 \cdot (1 + 0,438)} = 265,94 \text{ кВ/см.}$$

Следовательно, напряжение 452,1 кВ оказалось пробивным для трёх слоёв заданного конденсатора.  
12.13.

$$E = \frac{U}{d}; \quad \varphi_1 - 0 = E_a = \frac{a}{d} U;$$

$$E = \frac{100}{0,04} = 2500 \text{ В/м};$$

$$U = \frac{0,03}{0,04} \cdot 100 = 75 \text{ В}.$$

Между внутренними пластинами один потенциал  $\varphi_1 = \varphi_2$  и напряжённость поля в нём  $E = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{d - 2a} = 0$ . Напряжение  $U$ , приложенное к конденсатору, распределяется на два зазора (каждый шириной  $a$ ).

$$E = \frac{U}{2a} \text{ — напряжённость поля в этих зазорах. Потенциал внутренней пластины определим из условия, что } U - \varphi_1 = aE,$$

откуда  $U_1 = \frac{1}{2} U$ .

$$E = \frac{100}{2 \cdot 0,01} = 5000 \text{ В/м}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50 \text{ В}.$$

12.15.

$$\varphi_A = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{1,3 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,02} - \frac{2 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,05} = 2250 \text{ В},$$

(так как полагаем, что весь заряд помещён в центре, т.е. для шара это будет сумма).

Точка  $B$  расположена вне, но внутри оболочки, поэтому напряжённость в ней создаётся только зарядом шара.

$$E_b = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{1,3 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,04^2} = 7,3 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$\varphi_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{1,3 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,04} - \frac{2 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,05} = -675 \text{ В}.$$

Для т.  $C$   $E$  и  $\varphi$  определяется, если бы оба заряда находились в центре шара.

$$E_C = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3^2} = \frac{1,3 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,06^2} = 1,75 \cdot 10^{-4} \text{ В/м};$$

$$\varphi_C = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3} = \frac{1,3 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-8}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,06} = -1050 \text{ В}.$$

12.16.

$$C = (n-1) \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}; \quad n = \frac{Cd}{\epsilon_0 \epsilon S} + 1 = \frac{10^{-6} 10^{-4}}{7 \cdot \epsilon_0 \cdot 0,006} + 1 = 270.$$

12.17.

$$E_{\max} = N\omega\Phi_{\max}; \quad \omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 12 \text{ об/с}; \quad \Phi_{\max} = BS;$$

$$B = \frac{E_{\max}}{2\pi n N S} = \frac{15}{2\pi \cdot 12 \cdot 250 \cdot 0,05} = \\ = 15,9 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

12.18. Потенциал зависит только от  $x$  (от  $y$  и  $z$  не зависит). Поэтому уравнение Пуассона (векторная форма)

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0 \epsilon} = ax \quad \nabla^2 - \text{оператор Лапласа.}$$

$$a = 6 \frac{\text{кВ}}{\text{см}^3} = \frac{6 \cdot 10^3}{10^{-6}} = 6 \cdot 10^9 \text{ В/м}^3.$$

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = \frac{ax^2}{2} + C_1; & x=0; \quad \varphi = 1 \text{ кВ} = c_2 = 10^3 \text{ В}; \\ \varphi = \frac{ax^3}{6} + C_1 x + C_2, & x=0,1; \quad \varphi = 0. \end{cases}$$

$$0 = 10^3 + 0,1C_1 + a(0,1)^3/6; \quad 0 = 10^3 + 0,1C_1 + \frac{6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6}{6}; \quad 0,1C_1 = -2 \cdot 10^3;$$

$$c_1 = -2 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$\varphi = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 10^6}{6} x^3 - 2 \cdot 10^4 x + 10^3 = 10^9 x^3 - 2 \cdot 10^4 x + 10^3 \text{ В};$$

$$\varphi = 10^9 x^3 - 2 \cdot 10^4 x + 10^3 \text{ В.}$$

12.19. Поле двухпроводной линии:

$$1) \quad E = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d-x)} \quad - \text{метод наложения, где } q_1 - \text{заряд на единицу длины проволоки};$$

2) напряжение между проводами

$$U = \int_a^{d-a} E dx = \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{dx}{x} + \frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \int_a^{d-a} \frac{dx}{d-x} = \frac{q_1}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{q_1}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{d}{a}.$$

Ёмкость двухпроводной линии на единицу длины

$$C_1 = \frac{q_1}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{a}}.$$

12.20.

1) Напряжённость поля в произвольной точке (от точечного  $q$ )

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

$$2) \quad E_c = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_c^2}.$$

3) Напряжение между  $a$  и  $b$

$$U_{ab} = \int_{R_a}^{R_b} E dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_a}^{R_b} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right); \quad q = \frac{4\pi\epsilon_0 U_{ab}}{\left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)}.$$

$$4) \quad \text{Подставим } q = \frac{4\pi\epsilon_0 U_{ab}}{\left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)} \text{ в (2),}$$

$$E_c = \frac{U_{ab}}{\left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b}\right) R_c^2} = 525 \text{ В/м.}$$

12.21.

1) Напряжённость поля  $E$  на поверхности внутреннего цилиндра ( $r = r_1$ ) максимальна и равна

$$E_{\max} = \frac{U}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}; \left( E = \frac{U}{r} \frac{1}{\ln r} \frac{r_2}{r_1} \right).$$

2) По условию  $E_{\max} = E_{\text{пр}}/3 \rightarrow U = \frac{E_{\text{пр}}}{3} r_1 \ln \frac{r_2}{r_1} = 12,2 \text{ кВ.}$

12.22. Плотность тока в земле на поверхности полусферы радиусом  $R$

$$j = \frac{I}{2\pi R^2} \text{ (так как поверхность сферы } 4\pi R^2 \text{);}$$

$$E = j/\sigma = \frac{I}{2\pi\sigma R^2};$$

$\sigma = 10^{-2} \text{ 1/Ом} \cdot \text{м}$  – проводимость.

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} E dR = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = -\frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Найдём  $U_{12}$  на расстоянии, равном шагу человека (шаговое напряжение), если  $R_1 = 30 \text{ м}$ ,  $R_2 = 31 \text{ м}$ ; ток  $I_{\text{кз}} = 2 \cdot 10^3 \text{ А} = 2 \text{ кА}$ :

$$U_{12} = \frac{I_{\text{кз}}}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,14 \cdot 10^{-2}} \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{31} \right) = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 6,28 \cdot 10^{-2}} = 0,34 \cdot 10^2 = 34 \text{ В.}$$

Если  $R_1 = 10 \text{ м}$ ,  $R_2 = 11 \text{ м}$ , то  $U_{12} = 290 \text{ В}$ , что опасно!

12.23. ЭДС индукции

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} = SB\omega \sin(\omega t + \Theta),$$

где  $\Theta$  – угол между нормалью к контуру и направлением индукции магнитного поля  $B$  при  $t = 0$ .

Уравнение электрического равновесия RL-цепи

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Решение уравнения

$$I = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{SB\omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t + \Theta - \varphi),$$

где  $A$  – постоянная интегрирования, зависящая от начальной величины тока в цепи.

$\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$  – фазочастотная характеристика RL-цепи.



12.24. Применяем прямое преобразование Фурье

$$\varepsilon(\omega) = \int_0^{\omega} \varepsilon(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{a} + j\omega)t} dt = \frac{A}{\left(\frac{1}{a} + j\omega\right)}, \text{ при } \omega = 0 \quad \varepsilon(0) = Aa.$$

12.25. Энергия магнитного поля на единицу длины

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \mu \int_{R_1, R_2} H^2 2\pi R dR = \mu I^2 \ln \frac{R_2}{R_1},$$

откуда 
$$L = 2\mu \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

12.26. Применим закон Био-Савара-Лапласса:

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{idl \sin \Theta}{r^2}, \text{ где } \frac{dl \sin \Theta}{r} = d\alpha; \quad r = \frac{R}{\cos \alpha};$$

$\alpha$  – угол между направлением элемента тока  $I$  и радиусом-вектором  $r$ . При  $R = r$   $\alpha = 0$ .

12.27. Воспользуемся соотношением между проводимостью и ёмкостью в проводящей среде

$$G = \frac{\pi \kappa}{\ln \frac{d}{r}} = 0,13 \text{ См.}$$

Ток утечки

$$I = GU = 1,3 \text{ А.}$$

12.28. По первому уравнению Максвелла определяем напряжённость магнитного поля в сердечнике  $H = \frac{I}{2\pi r}$  и магнитный поток

$$\Phi = \int_S B dS = \frac{\mu_0 \mu I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \mu_0 \mu \frac{I h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

Так как магнитный поток увеличивается в  $n$  раз, то

$$L = \mu_0 \mu \frac{hn}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = 1,26 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3 \cdot \frac{10^{-2} \cdot 10}{6,28} \ln \frac{0,05}{0,02} = 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ Гн.}$$

12.29. Воспользуемся соотношением между ёмкостью и проводимостью среды

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}; \text{ и } C = \frac{G \varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma},$$

где  $G = \frac{\pi\sigma l}{\ln \frac{d}{r}}$ ; следовательно,  $q = CU$ .

12.30. По теореме Остроградского-Гаусса

$$\int_S E dS = \frac{q}{\epsilon_0 \epsilon}$$

где  $\int ds = 2\pi r l$  – боковая поверхность цилиндра.

На поверхности цилиндра ( $r = 2,5 \cdot 10^{-3}$  м)

$$E_{\max} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l r}, \text{ где } q = CU = \frac{\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{d}{r}} U \text{ (см. решение задачи 12.29).}$$

12.31. Напряжённость электрического поля между пластинами

$$E_n = \frac{U}{d} = 10^3 \text{ В/м.}$$

Напряжённость электрического поля тока

$$E_t = \frac{j}{\sigma} = \frac{10^7}{5 \cdot 10^7} = 0,2 \text{ В/м.}$$

Отношение  $\frac{E_n}{E_t} = \frac{10^3}{0,2} = 0,5 \cdot 10^4$ .

12.32. На поверхности проводника

$$E = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\pi a^2 \sigma}; \quad H = \frac{I}{2\pi a}.$$

Поверхностная плотность потока электромагнитной энергии (миграция энергии)

$$P = EH = \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma}; \quad \sigma \text{ – проводимость.}$$

12.33. Тепловые потери в проводнике

$$Q = \sigma E^2 = \frac{I^2}{\pi^2 a^4 \sigma} \text{ (решение задачи 12.32).}$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

---

Анализ использования практикума в учебном процессе показал, что проработав материалы этой книги даже не в полном объеме, что нередко бывает со студентами при обучении, у них появляется интерес в получении электротехнического образования. Этот первый этап профессионального познания является важным в подготовке будущего специалиста, способного самостоятельно решать современные электротехнические и технологические задачи в электроэнергетике. Дальнейшие шаги в этом направлении будут простыми и осознанными при формировании фундамента таких специальных дисциплин, как электромеханика и электропривод, электропитающие системы и электрические сети, переходные процессы в системах электроснабжения, информационная и измерительная техника, электротехнологические промышленные установки, релейная защита и автоматика, АСУ в энергетике, электроэнергетика и электромагнитная совместимость и ряд других, которые предусматриваются в государственных стандартах по профессиональному образованию.

Авторы книги будут признательны отзывам, предложениям и рекомендациям, которые помогут в дополнительных учебно-методических разработках при совершенствовании методического комплекса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники / Л.А. Бессонов. – М. : Высшая школа, 1973. – 752 с.
2. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы / И.С. Гоноровский. – М. : Связь, 1986. – 512 с.
3. Шебес, М.Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах / М.Р. Шебес. – М. : Высшая школа, 1973. – 248 с.
4. Тамм, И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – М. : Наука, 1976. – 616 с.
5. Борисов, Ю.М. Электротехника / Ю.М. Борисов, Д.Н. Липатов, Ю.Н. Зорин. – М. : Энергия, 1985. – 387 с.
6. Бронштейн, И.Н. Справочник по высшей математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендеев. – М. : Наука, 1986. – 483 с.
7. Ионкин, Н.А. Примеры и задачи по теоретическим основам электротехники / Н.А. Ионкин, Н.Н. Курдюков, Е.С. Кухаркин. – М. : Высшая школа, 1965. – 320 с.
8. Бессонов, Л.А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов. – М. : Высшая школа, 1980. – 427 с.
9. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М. : Наука, 1964. – 441 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П1. Единицы физических величин

Наименование величины	Единица измерения	Обозначение	
		русское	международное
Метр	метр	м	<i>m</i>
Время	секунда	с	<i>s</i>
Сила тока	ампер	А	<i>A</i>
Частота	герц	Гц	<i>Hz</i>
Электрическая ёмкость	фарад	Ф	<i>F</i>
Индуктивность	генри	Гн	<i>H</i>
Электрическое сопротивление	ом	Ом	$\Omega$
Электрическая проводимость	сименс	См	<i>S</i>
Электрическое напряжение	вольт	В	<i>V</i>
Напряжённость электрического поля	вольт на метр	В/м	<i>V/m</i>
Напряжённость магнитного поля	ампер на метр	А/м	<i>A/m</i>
Магнитный поток	вебер	Вб	<i>Wb</i>
Магнитная индукция	тесла	Тл	<i>T</i>
Электромагнитная энергия	джоуль	Дж	<i>J</i>
Активная мощность электрической цепи	ватт	Вт	<i>W</i>
Реактивная мощность электрической цепи	вар	вар	<i>var</i>
Полная мощность электрической цепи	вольт-ампер	В · А	<i>V · A</i>

## П2. Приставки кратных и дольных единиц

Кратность	Наименование приставки	Сокращённое обозначение	
		русское	латинское, греческое
$10^{12}$	тера	Т	<i>T</i>
$10^9$	гига	Г	<i>G</i>
$10^6$	мега	М	<i>M</i>
$10^3$	кило	к	<i>k</i>
$10^2$	гекто	г	<i>h</i>
10	дека	да	<i>da</i>
$10^{-4}$	деци	д	<i>d</i>
$10^{-2}$	санتي	с	<i>c</i>

Продолжение табл. П2

Кратность	Наименование приставки	Сокращённое обозначение	
		русское	латинское, греческое
$10^{-3}$	милли	м	<i>m</i>
$10^{-6}$	микро	мк	$\mu$
$10^{-9}$	нано	н	<i>n</i>
$10^{-12}$	пико	п	<i>p</i>

## П3. Элементарные математические соотношения

### Формулы сокращённого умножения и деления.

Возведение в степень двучлена:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Разность и сумма степеней:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Нахождение корней квадратных уравнений:

$$1) \quad ax^2 + bx + c = 0;$$

$$2) \quad x^2 + px + q = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

### Формула бинома Ньютона:

$$(x + a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1*2\dots k} x^{n-k} a^k + \dots + a^n.$$

Переход от одного основания логарифма к другому:

$$\log_b N = \log_a N \frac{1}{\log_a b};$$

$$\lg N = \ln N \lg e = 0,43429 \ln N;$$

$$\ln N = \lg N \frac{1}{\lg e} = 2,30259 \lg N.$$

## Основные тригонометрические соотношения

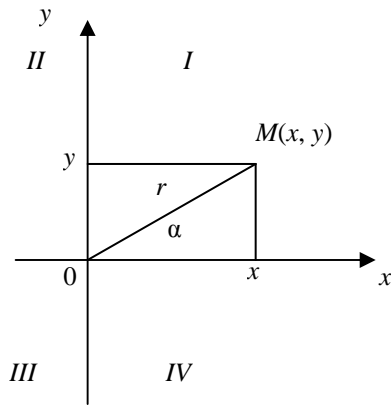


Рис. П1

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}; \quad \cos \alpha = \frac{x}{r};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y};$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}.$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha.$$

## П4. Формулы приведения

$x \backslash$ Функция	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos x$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\sec x$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$\sec \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$	$-\operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$-\sec \alpha$

## П5. Значения тригонометрических функций некоторых углов

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	0	$\infty$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\infty$	0	$\infty$
$\sec \alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	2	$\infty$	-1		1
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{2}$	1	$\infty$	-1	$\infty$

## П6. Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

## П7. Формулы умножения

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}.$$

## П8. Формулы деления

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

## П9. Производные от некоторых функций

$$1. \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

$$2. \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e.$$

$$3. \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}.$$

$$4. \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

$$5. \frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

$$6. \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

$$7. \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

$$8. \frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$9. \frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$10. \frac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \sec x.$$

$$11. \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$12. \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x.$$

$$13. \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$14. \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$15. \frac{d}{dx} \operatorname{arcctg} x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$16. \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$17. \frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$18. \frac{d}{dx} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x.$$

$$19. \frac{d}{dx} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x.$$

$$20. \frac{d}{dx} \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$21. \frac{d}{dx} \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$



## П10. Таблица интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c(n+1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

$$3. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$$

$$10. \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

$$14. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c.$$

$$15. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$$

$$17. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c.$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c.$$

$$19. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + c.$$

$$20. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + c.$$

$$21. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + c.$$

$$22. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c.$$

$$23. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$24. \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{\pi} e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

## П11. Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y;$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y};$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$$

$$\operatorname{th} x \operatorname{ctg} x = 1;$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

## П12. Основные формулы разложения

Формула Тейлора

$$f(x) = f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Ряд Фурье в тригонометрической форме

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\Omega_n t + \Psi_k) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\Omega_n t + b_k \sin k\Omega_n t),$$

$$\text{где } a_0 = \frac{2}{T_n} \int_{\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(x) dx; a_k = \frac{2}{T_n} \int_{\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(x) \cos k\Omega_n x dx; b_k = \frac{2}{T_n} \int_{\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(x) \sin k\Omega_n x dx.$$

Ряд Фурье в показательной форме

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{A}_k e^{jk\Omega_n x},$$

где

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T_n} \int_{-\frac{T_n}{2}}^{\frac{T_n}{2}} f(x) e^{-jk\Omega_n x} dx.$$

Интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx \right] e^{j\omega x} d\omega.$$

Прямое преобразование Фурье

$$\dot{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx.$$

Обратное преобразование Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{G}(\omega) e^{j\omega x} d\omega.$$

Разложение некоторых функций в степенные ряды

$$e^x = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right]$$

$$(1+x)^n = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

### П13. Преобразование Лапласа и теоремы операционного исчисления

$$1. \hat{f}(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx \text{ – прямое преобразование Лапласа.}$$

$$2. f(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \hat{f}(p) e^{px} dp \text{ – обратное преобразование Лапласа.}$$

3. Теорема дифференцирования

$$f'(x) \rightarrow p\hat{f}(p) - f(0); f^{(n)}(x) \rightarrow p^n \hat{f}(p) - \sum_{k=1}^n f^{(n-k)}(0)p^{k-1}.$$

4. Теорема интегрирования

$$\int_0^x f(x)dx \rightarrow \frac{\hat{f}(p)}{p}; \int_0^x \dots \int_0^x f(x)(dx)^n \rightarrow \frac{\hat{f}(p)}{p^n}.$$

5. Теорема подобия

$$f(ax) \rightarrow \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{p}{a}\right).$$

6. Теорема запаздывания

$$f(x - x_0) \rightarrow e^{-px_0} \hat{f}(p).$$

7. Теорема смещения

$$e^{ax} f(x) \rightarrow \hat{f}(p - a).$$

8. Первая теорема разложения

$$\hat{f}(p) = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \dots$$

9. Вторая теорема разложения

$$y(x) = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{M(P_k)}{P_k N'(p)|_{p=P_k}} e^{P_k x},$$

если  $\hat{y}(p) = \frac{M(p)}{P[N(p)]}$

или  $y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{M(P_k)}{N'(p)|_{p=P_k}} e^{P_k x},$

где  $M(p)$  и  $N(p)$  – полиномы, причём степень  $M(p)$  не выше степени  $N(p)$ , а уравнение  $N(p) = 0$  имеет простые, не кратные и не равные нулю корни;  $n$  – степень уравнения  $N(p) = 0$ ;  $P(k)$  – корень этого уравнения.

#### П14. Изображение по Лапласу некоторых функций

№	Изображение $\hat{f}(p)$	Оригинал $f(t), t > 0$
1.	$p$	$\delta'(t)$
2.	$1$	$\delta(t)$
3.	$\frac{1}{p}$	$1$
4.	$\frac{1}{p^2}$	$t$
5.	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
6.	$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$
7.	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$
8.	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$
9.	$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$

№	Изображение $\hat{f}(p)$	Оригинал $f(t), t > 0$
10.	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
11.	$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$
12.	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
13.	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
14.	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a} \left( \frac{1}{b}e^{-bt} - \frac{1}{a}e^{-at} \right)$
15.	$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{e^{-at} - [1 - (a-b)t]e^{-bt}}{(a-b)^2}$
16.	$\frac{p}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{[a + b(b-a)t]e^{-bt} - ae^{-at}}{(a-b)^2}$
17.	$\frac{p}{p+a}$	$\delta(t) - ae^{-at}$
18.	$\frac{p+a}{p+b}$	$\delta(t) + (a-b)e^{-bt}$
19.	$\frac{p+a}{p(p+b)}$	$\frac{a}{b} \left[ 1 - \left(1 - \frac{b}{a}\right)e^{-bt} \right]$
20.	$\frac{p+a}{(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{b-c} [(a-c)e^{-ct} - (a-b)e^{-bt}]$
21.	$\frac{p+a}{p(p+b)(p+c)}$	$\frac{a}{bc} + \frac{1}{b-c} \left[ \left(\frac{a}{b} - 1\right)e^{-bt} - \left(\frac{a}{b} - 1\right)e^{-ct} \right]$
22.	$e^{\pm pt_0}$	$\delta(t \pm t)$
23.	$\frac{p+a}{p^2(p+b)}$	$\frac{a}{b}t + \frac{b-a}{b^2}(1 - e^{-bt})$

Продолжение табл. П14

№	Изображение $\hat{f}(p)$	Оригинал $f(t), t > 0$
24.	$\frac{p(p+a)}{(p+b)(p+c)}$	$\delta(t) + \frac{1}{b-c} \times$ $\times [b(a-b)e^{-bt} - c(a-c)e^{-ct}]$
25.	$\frac{(p+a)(p+b)}{p+c}$	$\delta'(t) + (a+b-c)\delta(t) +$ $+ (a-c)(b-c)e^{-ct}$
26.	$\frac{(p+a)(p+b)}{p(p+c)}$	$\delta(t) + \frac{ab}{c} - \frac{(a-c)(b-c)}{c} e^{-ct}$
27.	$\frac{(p+a)(p+b)}{p^2(p+c)}$	$\frac{(a+b)c - ab}{c^2} + \frac{ab}{c}t +$ $+ \frac{(a-c)(b-c)}{c^2} e^{-ct}$
28.	$\frac{(p+a)(p+b)}{(p+c)(p+d)}$	$\delta(t) + \frac{1}{d-c} [(a-c)(b-c)e^{-ct} -$ $- (a-d)(b-d)e^{-dt}]$

29.	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)} \times$ $\times [(b-c)e^{-at} - (a-c)e^{-bt} + (a-b)e^{-ct}]$
30.	$\frac{p}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)} \times$ $\times [-a(b-c)e^{-at} + b(a-c)e^{-bt} - c(a-b)e^{-ct}]$
31.	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$
32.	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
33.	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
34.	$\frac{\omega \cos \psi - p \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t - \psi)$
35.	$\frac{p \cos \psi + \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t - \psi)$

Продолжение табл. П14

№	Изображение $\hat{f}(p)$	Оригинал $f(t), t > 0$
36.	$\frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega} t \sin \omega t$
37.	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$
38.	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	$1 - \cos \omega t$
39.	$\frac{1}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} e^{-at} \sin \omega t$
40.	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$
41.	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	shat
42.	$\frac{p}{p^2 - a^2}$	chat
43.	$\frac{a^2}{p(p^2 - a^2)}$	chat - 1

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ .....	4
1.1. Идеализированные элементы электрических цепей.	
Законы Кирхгофа .....	9
Контрольные вопросы .....	9
Задачи .....	9
Ответы, решения и методические указания .....	13
1.2. Гармонические функции. Идеализированные элементы	
при гармоническом воздействии .....	15
Контрольные вопросы .....	15
Задачи .....	15
Ответы, решения и методические указания .....	19

2.	АНАЛИЗ И РАСЧЁТ ПРОСТЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ .....	21
2.1.	Метод комплексных амплитуд. Простые цепи при гармоническом воздействии .....	27
	Контрольные вопросы .....	27
	Задачи .....	27
	Ответы, решения и методические указания .....	32
2.2.	Преобразование схем электрических цепей .....	34
	Контрольные вопросы .....	34
	Задачи .....	35
	Ответы, решения и методические указания .....	39
2.3.	Индуктивно-связанные электрические цепи .....	41
	Контрольные вопросы .....	41
	Задачи .....	42
	Ответы, решения и методические указания .....	47
3.	ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЁТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ .....	50
3.1.	Методы контурных токов и узловых напряжений .....	51
	Контрольные вопросы .....	51
	Задачи .....	52
	Ответы, решения и методические указания .....	56
3.2.	Методы наложения и эквивалентного генератора .....	60
	Контрольные вопросы .....	60
	Задачи .....	60
	Ответы, решения и методические указания .....	64
4.	СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ .....	66
4.1.	Входные и передаточные характеристики .....	69
	Контрольные вопросы .....	69
	Задачи .....	70
	Ответы, решения и методические указания .....	73
4.2.	Последовательный колебательный контур .....	76
	Контрольные вопросы .....	76
	Задачи .....	77
	Ответы, решения и методические указания .....	79
4.3.	Параллельный колебательный контур .....	80
	Контрольные вопросы .....	80
	Задачи .....	80
	Ответы, решения и методические указания .....	83
4.4.	Связанные колебательные контуры .....	84
	Контрольные вопросы .....	84
	Задачи .....	84
	Ответы, решения и методические указания .....	88
5.	ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ .....	91
5.1.	Общие сведения о трёхфазных цепях .....	91
5.2.	Симметричный режим работы трёхфазной цепи .....	94
5.3.	Несимметричный режим работы трёхфазной цепи .....	97
5.4.	Измерение мощности в трёхфазной цепи .....	101
5.5.	Трёхфазное вращающееся магнитное поле .....	103
5.6.	Несинусоидальные токи в трёхфазной цепи .....	107
5.7.	Метод симметричных составляющих для расчёта несимметричных трёхфазных систем .....	108
	Задачи .....	120
	Ответы, решения и методические указания .....	125
	Задачи для самостоятельного решения .....	134
6.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЁХПОЛЮСНИКОВ .....	138
	Контрольные вопросы .....	144
	Задачи .....	145
	Ответы, решения и методические указания .....	149
7.	РЕАКТИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ ТИПА К .....	158
	Задачи .....	164
	Ответы, решения и методические указания .....	166

8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ .....	173
8.1. Режим бегущих волн .....	175
8.2. Режим стоячих волн .....	175
8.3. Режим смешанных волн в длинных линиях .....	177
Контрольные вопросы .....	181
Задачи .....	183
Ответы, решения и методические указания .....	185
8.4. Согласование длинной линии с нагрузкой .....	187
Контрольные вопросы .....	187
Задачи .....	188
Ответы, решения и методические указания .....	192
9. ЧАСТОТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ .....	195
Контрольные вопросы .....	196
Задачи .....	197
Ответы, решения и методические указания .....	204
10. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ. АНАЛИЗ ПРОХОЖДЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ ЦЕПЬ .....	210
10.1. Классический и операторный методы .....	212
Контрольные вопросы .....	212
Задачи .....	212
Ответы, решения и методические указания .....	215
10.2. Суперпозиционные методы .....	220
Контрольные вопросы .....	220
Задачи .....	221
Ответы, решения и методические указания .....	223
11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ .....	230
Контрольные вопросы .....	242
Задачи .....	242
Ответы, решения и методические указания .....	245
12. ТЕОРИЯ ПОЛЯ .....	262
12.1. Электростатическое поле .....	262
12.2. Электрическое поле в проводящей среде .....	266
12.3. Магнитное поле .....	267
12.4. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла .....	270
Задачи .....	272
Ответы, решения и методические указания .....	281
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	298
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	299
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	300