А.П. ГЛАДКИХ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗМЕЩЕНИЯ КАПИТАЛА В САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

♦ Издательство ГОУ ВПО ТГТУ ♦

УДК 519.866
ББК У.в631я031
Г522

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор экономических наук, профессор ГОУ ВПО ТГТУ
Л.В. Пархоменко

Доктор экономических наук,
профессор ГОУ ВПО ТГУ им. Г.Р. Державина
Т.Г. Осадчая

Гладких, А.П.
Г522 Моделирование и оптимизация процесса размещения капитала в саморазвивающейся рыночной экономике : монография / А.П. Гладких. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0952-4.

Даны описания нового метода моделирования, использующего символьное интегрирование, а также оптимизационного метода и ряда алгоритмов для его применения. Совокупность научных выводов и практических рекомендаций можно квалифицировать как решение научной проблемы, имеющей важное экономическое значение.

Предназначена для специалистов, занимающихся инвестиционно-финансовой деятельностью, а также может быть использована при обучении студентов экономических специальностей высших учебных заведений.

УДК 519.866
ББК У.в631я031

ISBN 978-5-8265-0952-4

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Тамбовский государственный технический университет"

А.П. ГЛАДКИХ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗМЕЩЕНИЯ КАПИТАЛА В САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Рекомендовано Научно-техническим советом
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
"Тамбовский государственный технический университет"
в качестве монографии

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

Научное издание

ГЛАДКИХ Александр Петрович

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РАЗМЕЩЕНИЯ КАПИТАЛА В САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКЕ

Монография

Редактор Е.С. Кузнецова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 19.10.2010
Формат 60×84/16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 495

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

В экономике часто наблюдались и наблюдаются хаотичные колебания экономических показателей, случается, что, казалось бы, изначально незначительные внешние явления оказывают впоследствии серьезные воздействия на развитие экономической ситуации, приводят к качественной модификации поведения и структуры экономических систем. Протекание экономических процессов выглядит неожиданным и не вписывается в рамки классических линейных экономических моделей. Как правило, классические модели описывают процессы, не учитывая внешние воздействия, и поэтому процессы, представленные такими моделями, одинаково протекают при различных внешних условиях.

В современных условиях рынка экономические системы открыты, нелинейны и неравновесны. Они имеют тенденции к самоорганизации, взаимодействию с окружающей средой, чувствительны к изменению внешних условий. Эволюционное развитие этих систем зависит от многих параметров и причин, которые не могут быть указаны с абсолютной точностью. Непредсказуемость поведения связана не только с неполнотой информации об их подсистемах, состоянии этих подсистем, но и с тем, что развитие некоторых систем очень чувствительно к начальным условиям, что было обнаружено еще в 1961 г. Э. Лоренцом.

С этими вопросами связана проблематика моделирования и оптимизации процессов и явлений, протекающих в экономике, одним из которых, безусловно, важнейшим в определении экономического развития, является процесс управления размещением капитала. Это один из факторов производства, который подвергается эффективному управлению и влияя на который возможно оказывать значительное регуляторное воздействие на развитие экономической ситуации.

В настоящее время здесь все чаще применяется синергетический подход, основанный на применении нелинейных моделей, хаотической динамике и, как следствие, дающих возможность нелинейной реакции на изменение параметров системы. Новые модели, основанные на нелинейной динамике, позволяют достигнуть лучшей результативности в сопоставлении с реальными показателями. Анализ нелинейных моделей достаточно сложен, но при решении многих задач он необходим. Ввиду сложности проведения исследований хаотических нелинейных систем необходимы современные высокоточные методы их изучения.

Вследствие этого разработка средств и алгоритмов анализа, повышение скорости и производительности методов изучения нелинейных моделей являются одними из важных задач. Их несовершенство, отсутствие, недостаточное количество и сложность для практического использования препятствуют, на текущий момент, выполнению быстрых и эффективных исследований с применением моделирования и получением правильных адекватных результатов.

Указанные обстоятельства свидетельствуют, что данная тематика является важной и актуальной, позволяет оптимизировать процессы экономического развития и определить ключевые параметры роста.

Моделирование как метод экономического исследования стало применяться еще в XIX в., когда О. Курно в книге "Исследование математических принципов теории богатства" впервые применил числовые методы анализа и предложил математическую модель экономики, позволяющую рассматривать различные возникающие на рынке ситуации.

В настоящее время в области экономического моделирования накоплен значительный теоретический и практический опыт, что частично освещено в работах российских и зарубежных ученых: А.Ф. Гамецкого, Н.Ш. Кремера, В.В. Лебедева, Ж.-П. Обена, А. Прохорова, P. Bak, M. Evans, I. Harrell.

Вместе с тем экономико-математические модели, описывающие основные закономерности и тенденции динамики развития объектов, представляют относительно новый инструментарий. Для его использования и применения существует настоятельная необходимость в разработке высокоточных методов анализа, исследования этих экономико-математических моделей, оценки их применимости и адекватности результатов, получаемых с помощью экономического моделирования.

1. ОБЗОР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. ОБЗОР ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Появление экономики относят к эпохе Просвещения, вторая половина XVIII и начало XIX вв. В 1758 г. доктор короля Людовика XV Ф. Кенэ выпустил работу "Экономическая таблица", в которой привел числовые данные, описывающие национальную экономику. Это и было одной из первых попыток применить математический аппарат в качестве средства анализа экономических процессов.

В период эпохи Просвещения вера в силу человеческого разума была безгранична. С помощью разума считалось возможным понять и определить все законы Вселенной. Нет сомнения, что многие основоположники экономической науки, такие как Смит, Риккардо, Милль, Маршалл и другие, подверглись воздействию политических и социальных аспектов эпохи Просвещения. Это прослеживается в разговорах о "невидимой руке", о конкурентных рынках и т.д.

В это время в экономике стала преобладать идея, заключающаяся в похожести поведения людей с некоторыми стандартными схемами, которые использовались в естественных науках. В 1838 г. была выпущена книга О. Курно "Исследование математических принципов теории богатства". В ней впервые были применены числовые методы при анализе конкуренции, а также предлагалась математическая модель экономики, позволяющая рассматривать различные возникающие на рынке ситуации.

В последующие периоды наблюдалось дальнейшее увеличение применения математических подходов в экономической теории. Ведущие экономисты того времени, такие как Вальрас, Парето, все чаще прибегали к математическому описанию для объяснения экономических процессов и явлений, все больше использовали математические методы в своих научных исследованиях.

В России экономический анализ разрабатывался отечественными учеными. Среди известных результатов прежде всего стоит отметить работы Е.Е. Слуцкого, посвященные исследованиям модели поведения потребителя, В.В. Леонтьева, которым была предложена линейная модель многоотраслевой экономики.

Большинство классических моделей были линейными, явления изучались отдельно от среды, а сложные системы представлялись как продукт наложения отдельных элементов. На протяжении периода второй половины XIX в. – начала XX в. субъективные линейно детерминистические представления являлись причинами, которые не давали выйти экономической науке на уровень предсказательной способности.

Стоит заметить, что процесс размещения капитала и управления им на рынке, как одним из основных факторов производства, непосредственно связан с экономическим развитием. Другой фактор – "труд" обычно слабо подвержен воздействию извне, в то время как величина капитала может подвергаться регулированию с помощью инвестиционных процессов.

В настоящее время в экономической теории существуют различные экономико-математические модели, характеризующие огромное множество экономических процессов и задач. Среди математических экономических моделей существует следующая классификация, которая не претендует на полноту и может отличаться от других подобных, но имеет своей целью систематизировать существующие математические модели по некоторым особенным признакам. Итак:

– аналитическая модель – содержит функциональное математическое представление экономических зависимостей между входными и выходными переменным;

– вероятностная модель – описывается с помощью случайных величин; конечные результаты, получаемые с применением такой модели, могут отличаться при одинаковых исходных данных и значениях параметров;

– детерминированная модель – предполагает существование аналитической зависимости между входными, выходными величинами и параметрами, в такой модели при использовании одного и того же набора исходных данных гарантирован одинаковый конечный набор;

– линейная модель – представляет систему в виде линейных зависимостей между входными и выходными переменными;

– нелинейная модель – содержит нелинейные функциональные зависимости в описании системы;

– матричная модель – отображает соотношения между элементами системы в матричной, табличной форме;

– дискретная модель – переменные и параметры модели представляют собой дискретные величины;

– непрерывная модель – переменные и параметры такой модели являются непрерывными величинами;

– равновесная модель – модель, в которой в результате взаимодействия составных частей системы подразумевается достижение состояния равновесия;

– неравновесная модель – моделирует систему или процесс, который не приходит к состоянию равновесия, в результате возникают избыточные явления;

– регрессионная модель – базируется на уравнении регрессии;

– сетевая модель – использует вспомогательные инструменты и подходы, например методы и алгоритмы теории графов;

– числовая модель – основывается на использовании числовых характеристик моделируемой системы;

– эконометрическая модель – использует методы математической статистики;

– динамическая модель – содержит в описании переменную времени, т.е. другие присутствующие в модели функциональные зависимости между переменными рассматриваются с течением времени;

– статическая модель – модель, в которой все зависимости рассматриваются в один момент времени. Динамическая модель может быть приведена к статической путем фиксации момента времени и рассмотрением текущего состояния системы;

– трендовая модель – динамическая модель, отражающая развитие экономической системы с помощью ее основных показателей.

Экономические модели также подразделяются на закрытые и открытые, макро- и микроэкономические.

Закрытая модель представляет собой модель системы, которая рассматривается как бы отдельно, не взаимодействующей с внешней средой. Поведение такой модели зависит только от внутренних закономерностей и исходного состояния системы.

Открытая модель учитывает взаимодействие с окружающей средой, что, естественно, делает ее более адекватной и гибкой.

Микроэкономическая модель описывает развитие и структуру отдельного элемента экономической системы.

Макроэкономическая модель моделирует функционирование экономики объекта в целом, такие модели используются при прогнозировании развития экономических процессов, в них используется анализ общих закономерностей эволюции и развития.

Однако четкой грани между макромоделями и микромоделями не существует. Микроэкономические модели, как правило, описывают более конкретные процессы, в то время как макроэкономические – более общие и глобальные.

Модели макроэкономического развития и роста представляют собой абстрактное упрощенное описание реальных экономических явлений, однако дают возможность исследовать некоторые отдельные закономерности. Далее предлагается обзор некоторых таких моделей и их основных черт.

1.1.1. КЕЙНСИАНСКАЯ ТЕОРИЯ

В центре кейнсианской теории – факторы, определяющие уровень и динамику национального дохода, а также уровень занятости. Эти факторы Кейнс рассматривал на основе формирования так называемого эффективного спроса. Эффективный спрос – это, по Кейнсу, совокупный платежеспособный спрос, определяющий объем занятости. Главным компонентом эффективного спроса являются расходы на личное потребление C и инвестиции I.

Эффективный спрос базируется на "склонности к потреблению" и "склонности к сбережению". Согласно Кейнсу, доход является основным фактором, определяющим потребление и сбережения. С увеличением доходов растет и спрос, возрастают расходы на потребление, но не в той пропорции, в которой увеличивается доход. Потребительская функция, по Кейнсу, выглядит следующим образом: чем выше доход, тем меньше склонность к увеличению потребления. Рост расходов на покупку дорогостоящих предметов длительного пользования требует накопления части дохода, т.е. увеличения сбережения.

Кейнс предлагает простую макроэкономическую модель рынка:

$$Y = C + S, \qquad (1.1.1.1)$$

где Y – доход; C – потребление; S – сбережение.

В центре модели следующие предпосылки:

– доход = ценности продукции = потреблению + инвестиции ($Y = C + I$);
– сбережение = доходу – потребление ($S = Y - C$);
– сбережения = инвестициям ($S = I$).

Неравенство этих величин служит признаком нарушения экономического равновесия.

Кейнс считал, что при росте дохода доля эффективного спроса, обеспечиваемая личным потреблением, все время падает, и поэтому расширяющийся объем сбережений должен постоянно поглощаться растущим спросом на инвестиции. Размер инвестиций Кейнс выделял в качестве главного фактора эффективного спроса, а следовательно, занятости и национального дохода. В то время как в классических представлениях сразу же допускалось, что все сбережения переходят в инвестиции, Кейнс полагал, что создание необходимого для полной занятости объема инвестиций является сложной, важной для экономики проблемой. При росте дохода потребление сокращается, сбережения растут, а инвестиции могут и не увеличиваться.

Кейнс считал, что объем инвестиций зависит от стимулов к инвестированию. Увеличение инвестирования происходит, пока норма прибыли падает до уровня процента. При этом рентабельность капитала уменьшается, смысл в новых инвестициях пропадает.

Снижение предельной эффективности капитала Кейнс связывает прежде всего со значительной аккумуляцией капиталов. Огромное значение в кейнсианской теории придается прогнозам относительно будущих доходов. Экономические кризисы Кейнс объясняет потерей веры в будущие доходы.

Важное место в теории Кейнса принадлежит мультипликатору, выражающему связь между инвестициями и национальным доходом. Суть состоит в том, что при увеличении инвестиций в одной из отраслей вырастает приращение потребления и дохода не только в данной отрасли, но и в сопряженных отраслях. Это выражается формулами:

$$\Delta Y = K \Delta I \qquad (1.1.1.2)$$

и

$$K = \frac{\Delta Y}{\Delta I}, \qquad (1.1.1.3)$$

где ΔY – прирост дохода; ΔI – прирост инвестиций; K – мультипликатор.

Мультипликатор является функцией, которая связывает приросты национального дохода и личного потребления вследствие инвестиций. Инвестиции, однако, имеют двоякий характер: они не только создают доход, но, расширяя капитальный запас, увеличивают ресурсы, которыми может располагать хозяйство. Но в кейнсианской модели макроэкономического равновесия этот аспект инвестиций игнорировался; предполагалось, что запас капитала остается постоянным. Однако в конечном счете в какой-то момент инвестирование неизбежно приводит к такому увеличению запаса капитальных благ, когда игнорировать указанный эффект далее становится просто невозможным. При расширении капитального запаса особую важность приобретает то обстоятельство, что увеличение капитала должно быть пущено по назначению, чтобы обеспечивать полное использование всего возросшего капитального запаса. Иначе возникает капитал, производственно не задействованный. Пока равновесная пропорция не нарушена, циклических колебаний нет, если же они происходят, это означает, что пропорция отклоняется то в одну, то в другую сторону от равновесной величины. При этом колебания капитала и производства взаимосвязаны. Маневрирование капиталом должно преследовать постоянно ускользающую цель – достичь нормальной величины относительно размеров ежегодного производства. Последнее же не остается на постоянном уровне, и под влиянием изменений в ходе размещения капитала и управления им оно тоже колеблется.

Во второй половине XX в. теория Кейнса стала подвергаться критике со стороны ряда экономистов за то, что не учитывала динамическое развитие экономики. Модель Кейнса была развита и дополнена динамическим анализом. Среди ученых, работавших в этом направлении, значимые результаты были достигнуты ведущими теоретиками неокейнсианства Е. Домаром и Р. Харродом.

1.1.2. МОДЕЛЬ ДОМАРА

В модели Домара кейнсианское условие равенства сбережений будущим инвестициям предполагается выполненным:

$$S = I\,.$$

Кроме того, предполагается, что сбережения и инвестиции составляют s – постоянную долю национального продукта:

$$S = I = sY, \quad 0 < s < 1\,, \tag{1.1.2.1}$$

где

$$\Delta Y = Y(t+1) - Y(t)\,.$$

Y обозначает физический объем годового национального дохода. Предполагается, что размеры национального продукта достаточны для того, чтобы полностью привести в действие наличный запас капитальных благ. Таким образом, мы можем считать Y национальным продуктом при условии полного использования производственных мощностей.

По Домару, инвестиции текущего года, фигурирующие в уравнении (1.1.2.1), вызовут рост производственных мощностей; масштабы такого расширения могут быть описаны следующим образом:

$$\sigma I = \sigma s Y\,.$$

Коэффициент σ является показателем капиталоотдачи, величиной, обратной определяемому технологическими условиями предельному отношению капитал–продукт:

$$\frac{\Delta K}{\Delta Y} = \frac{I}{\Delta Y},$$

где K – капитальный запас, а ΔK соответственно представляет собой величину чистых инвестиций. Коэффициент σ показывает среднее потенциальное годовое увеличение национального продукта в результате инвестирования единицы мировой валюты или соответствующего роста капитального запаса вместе с другими наличными ресурсами. Следовательно, σI – потенциальное увеличение годового национального продукта в результате инвестиций текущего года. Как было замечено выше, инвестиции вызывают прирост производственных мощностей, которые при полном задействовании вызывают прирост национального дохода:

$$\Delta Y = \sigma I\,. \tag{1.1.2.2}$$

Таким образом, национальный доход будущего года должен увеличиться по сравнению с текущим годом на величину добавочной производственной мощности, обеспечиваемой инвестициями I.

В то же время, как следует из кейнсианской теории мультипликатора, увеличение инвестиций вызывает рост национального дохода:

$$Y = S + I\,.$$

В самом деле, при склонности к сбережению s увеличение годового дохода ΔY, вызванное ростом годовых инвестиций на ΔI, может быть выражено в таком виде:

$$\Delta Y = \frac{1}{s}\Delta I\,, \tag{1.1.2.3}$$

где $\frac{1}{s}$ представляет собой мультипликатор.

Подставив уравнение (1.1.2.3) в (1.1.2.2), получим:

$$\sigma I = \frac{1}{s}\Delta I\,. \tag{1.1.2.4}$$

Откуда после преобразований получаем:

$$\frac{\Delta I}{I} = \sigma s\,. \tag{1.1.2.5}$$

Так как инвестиции и сбережения составляют постоянную долю национального продукта, из этого необходимо следует, что национальный доход тоже должен расти темпом, равным σs, т.е.:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sigma s\,. \tag{1.1.2.6}$$

Таким образом, экономическое развитие при полном использовании производственных мощностей прямо пропорционально σ и s. Это достаточно оправданно, так при увеличении s сбережений и инвестиций происходит увеличение производственных мощностей, что соответственно должно вести к увеличению национального продукта для предотвращения образования избыточных мощностей. Все выше сказанное относится и к коэффициенту σ.

Темп роста, равный σs, является темпом равновесного экономического роста.

Уравнение (1.1.2.6) может быть записано также как

$$\frac{Y(t+1)-Y(t)}{Y(t)}=\sigma s \tag{1.1.2.7}$$

или

$$Y(t+1)=(1+\sigma s)\,Y(t)\,. \tag{1.1.2.8}$$

Это является окончательным уравнением динамики национального дохода. Данная модель содержит требование полного задействования образующихся в результате влияния инвестиций производственных мощностей, т.е. увеличения национального дохода в соответствии с увеличением продукта, вызванным приростом инвестиций. Также модель опирается на условие равенства сбережений будущим инвестициям, но использует это предложение уже в контексте динамического развития.

Из выражения (1.1.2.5) следует, что

$$\Delta I=\sigma s I\,. \tag{1.1.2.9}$$

Используя (1.1.2.2) и подставив в (1.1.2.9), можно получить:

$$\Delta I=s\Delta Y=\Delta S\,. \tag{1.1.2.10}$$

Из (1.1.2.10) видно, что при устойчивом экономическом развитии сохраняется равенство приростов инвестиций и сбережений.

Стоит заметить, что в модели Домара отсутствуют какие-либо факторы формирования инвестиций, указывающие на сам процесс их образования и поведения, кроме мультипликативного эффекта.

1.1.3. МОДЕЛЬ ХАРРОДА

Модель Харрода основывается на принципе акселерации и соответствует принципам инвестиционного подхода. В ней используются следующие идеи. Принимается, что инвестиционные решения текущего периода должны учитывать будущие ожидаемые события, независимо от того, как формируются эти ожидания – под влиянием прошлого имеющегося опыта или на основе текущих экономических предпосылок. Условием осуществления инвестиций принимается рост дохода, т.е. инвестиции рассматриваются как некоторая функция от увеличения дохода, а следовательно, размер будущих сбережений тоже зависит от прироста дохода. В модели также принимается условие макроэкономического равновесия:

$$S=I\,. \tag{1.1.3.1}$$

Предполагается, что сбережения S представляют собой постоянную долю s дохода:

$$S=sY,\ \ 0<s<1\,, \tag{1.1.3.2}$$

где s – средняя склонность к сбережению.

Инвестиции составляют некоторую постоянную долю от прироста дохода:

$$I=\alpha\Delta Y\,, \tag{1.1.3.3}$$

где α – коэффициент акселерации.

При подстановке (1.1.3.2) и (1.1.3.3) в соотношение (1.1.3.1) получается следующее выражение:

$$sY=\alpha\Delta Y \tag{1.1.3.4}$$

или

$$\frac{\Delta Y}{Y}=\frac{s}{\alpha}\,. \tag{1.1.3.5}$$

Выражение (1.1.3.5) может быть записано также как

$$\frac{Y(t+1)-Y(t)}{Y(t)}=\frac{s}{\alpha}\,.$$

После преобразований получается уравнение динамики

$$Y(t+1) = \left(1 + \frac{s}{\alpha}\right) Y(t) . \qquad (1.1.3.6)$$

Условием сохранения состояния равновесия между спрогнозированными сбережениями и инвестициями является показатель $\frac{s}{\alpha}$ увеличения национального продукта. Регуляторская функция осуществляется следующим образом: при увеличении доли сбережений соответственно требуется увеличение национального продукта, который бы поглотил эти сбережения. При этом требуется увеличение дополнительных инвестиций в экономике, вызванных спрогнозируемым увеличением национального продукта.

В то же время при уменьшении коэффициента акселерации α требуется меньше инвестиций для достижения заданного уровня национального продукта. Он показывает, что предприниматели будут на увеличение дохода ΔY инвестировать вложения $\alpha \Delta Y$, при соответствующем увеличение капитального запаса.

Однако в модели Харрода для действительного отражения темпа равновесного экономического развития, при котором выполняется полная загрузка мощностей в соответствии с ожиданиями, показатель акселерации α помимо простой характеристики поведения должен быть конкретной величиной. Он должен показывать, что уровень инвестиций, порожденных для создания дополнительных мощностей, обеспечивающих рост реального дохода на величину ΔY, соответствует уровню капитальных вложений при данной величине соотношения капитал – продукт.

Таким образом, коэффициент α должен быть равен величине, обратной коэффициенту предельной капиталоотдачи σ в модели Домара; или так как величина s в моделях Домара и Харрода одна и та же, то величина $\frac{s}{\alpha}$ должна быть равна величине σs, т.е. равновесному темпу экономического роста, по Домару. В этом случае экономический рост обеспечивается с полной загрузкой производственных мощностей при равенстве между планируемыми сбережениями и порождаемыми инвестициями.

1.1.4. МОДЕЛИ ГУДВИНА И ХИКСА

Развитием моделей Домара и Харрода послужили модели Гудвина и Хикса. В модели Гудвина к формулировке принципа акселерации добавлено использование ограничения на инвестиции сверху. Модель Гудвина задается следующими соотношениями:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + A(t);$$
$$C(t) = bY(t-1);$$

$$I(t) = \begin{cases} P(t),\ \overline{K(t)} > K(t-1),\ P(t) > 0; \\ 0, \overline{K(t)} = K(t-1); \\ p(t),\ \overline{K(t)} < K(t-1),\ P(t) < 0, \end{cases} \qquad (1.1.4.1)$$

где Y – конечный доход; C – потребительские расходы; I – расходы на чистые инвестиции; A – автономные расходы; $K, \overline{K}$ – соответственно фактический и желаемый основной капитал; P, p – соответственно верхний и нижний пределы для истых инвестиций.

Как видно из функциональной зависимости инвестиций от уровня фактического и ожидаемого основного капитала, в модели Гудвина наблюдаются периодические колебания. В случае, когда уровень ожидаемого капитала больше, чем фактический, чистые инвестиции положительны – происходит инвестирование, и уровень фактического капитала начинает возрастать. При совпадении уровней ожидаемого и фактического капитала инвестирования не происходит и капитал не изменяется. Если фактический уровень капитала превышает ожидаемый, то наблюдается дезинвестирование и соответственно капитал уменьшается.

Одной из наиболее известных колебательных и циклических моделей является модель мультипликационно-акселерационного взаимодействия (МА-модель). Простейшая модель такого типа состоит из уравнений, описывающих формирование дохода из расходов и динамическое поведение его основных действующих составляющих:

$$Y(t) = C(t) + I(t) + A(t);$$
$$C(t) = bY(t-1);$$
$$I(t) = \alpha(Y(t-1) - Y(t-2)) . \qquad (1.1.4.2)$$

Если под влиянием каких-либо факторов экономическое развитие отклоняется от равновесной траектории роста, то характер ее дальнейшего движения определяется коэффициентами МА-модели. При некотором их сочетании возможны колебания около равновесной траектории.

При величине акселератора, равной единице, амплитуда колебаний остается постоянной. При акселераторе менее единицы происходит постепенное затухание колебаний. В случае акселератора со значением, превышающим единицу, – наоборот, увеличение.

Проблема устойчивости циклических колебаний стала одной из основных в МА-моделях. Хикс предложил МА-модель с так называемым взрывным акселератором, больше единицы, и двумя сдерживающими ограничениями сверху и снизу.

Равновесие, описываемое МА-моделью, при взрывном акселераторе неустойчиво. При возникновении колебательный процесс имеет расходящийся характер до тех пор, пока в действие не вступают ограничения. В итоге цикл становится незатухающим, но размах колебаний не изменяется.

1.1.5. МОДЕЛЬ СОЛОУ

Модель Солоу – одна из признанных неоклассических моделей экономического развития. Неоклассические представления при исследовании экономического роста основываются на следующих предположениях:

– стоимость продукции создается всеми производственными факторами;

– каждый фактор производства влияет на создание стоимости продукции в соответствии со всеми предельными продуктами;

– существует количественная зависимость между выпуском продукции и ресурсами, необходимыми для ее производства, и зависимость между самими ресурсами;

– между факторами производства существует взаимозаменяемость.

Модель Солоу базируется на предпосылке совершенной конкуренции, обусловливающей полную загрузку ресурсов. Необходимым условием в модели является равенство совокупного спроса и совокупного предложения. При этом совокупное предложение в модели Солоу определяется на основании производственной функции Кобба–Дугласа, выражающей функциональную зависимость между объемом производства, используемыми факторами и их взаимной комбинацией. Эта функция, позволяющая оценить вклад различных факторов производства в увеличение объема производства и соответственно в прирост национального дохода, имеет следующий вид:

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{1.1.5.1}$$

где Y – объем производства; K – капитал; L – труд; A, α, β – параметры или коэффициенты производственной функции: A – коэффициент пропорциональности; α и β – коэффициенты эластичности объема производства по затратам труда и капитала.

Эмпирическим путем на основе статистических данных о динамике основного капитала, отработанных человеко-часов рабочих и служащих и физического объема продукции обрабатывающей промышленности США за 1899 – 1922 гг. Ч. Кобб и П. Дуглас определили следующие параметры производственной функции: $A = 1{,}01$; $\alpha = 0{,}25$; $\beta = 0{,}75$.

В общем виде объем национального выпуска Y является функцией трех факторов производства – труда L, капитала K, земли N:

$$Y = f(L, K, N). \tag{1.1.5.2}$$

Ввиду малой эффективности в экономических системах с высоким технологическим уровнем фактор земли в модели Солоу опускается.

Объем производства представляется следующей формулой:

$$Y = \frac{\Delta Y}{\Delta L} L + \frac{\Delta Y}{\Delta K} K, \tag{1.1.5.3}$$

где $\frac{\Delta Y}{\Delta L}$ – предельный продукт труда; $\frac{\Delta Y}{\Delta K}$ – предельный продукт капитала.

Таким образом, общий продукт представляется как сумма произведений затраченного количества труда и капитала на их предельные продукты, т.е. на прирост продуктов ΔY от увеличения затрат труда ΔL и затрат капитала ΔK.

Если y – производительность труда, а k – капиталовооруженность труда, т.е. размер выпуска продукции на одного работника, то

$$y = \frac{Y}{L}; \tag{1.1.5.4}$$

$$k = \frac{K}{L}. \tag{1.1.5.5}$$

Зависимость производительности труда от капиталовооруженности может быть представлена функцией:

$$y = f(k). \tag{1.1.5.6}$$

При увеличении капиталовооруженности труда его производительность увеличивается, но скорость возрастания производительности падает.

Выпуск продукции в модели Солоу определяется инвестиционным и потребительским спросом:

$$y = c + i, \tag{1.1.5.7}$$

где c и i – потребление и инвестиции.

Доход разделяется на потребление и сбережение в соответствии с нормой сбережения s. Потребление выражается следующей зависимостью:

$$c = (1 - s)\,y. \qquad (1.1.5.8)$$

Тогда, подставив (1.1.5.8) в (1.1.5.7), доход y можно представить как

$$y = (1 - s)\,y + i. \qquad (1.1.5.9)$$

Из выражения (1.1.5.9) следует, что

$$i = sy. \qquad (1.1.5.10)$$

Таким образом, инвестиции в расчете на одного работника являются частью дохода, приходящегося на одного работника.

Учитывая (1.1.5.6), (1.1.5.7) и (1.1.5.10), условие равновесия может быть выражено как

$$f(k) = c + i \qquad (1.1.5.11)$$

или

$$f(k) = \frac{i}{s}. \qquad (1.1.5.12)$$

Производственная функция характеризует предложение, а накопление капитала выражает спрос на производственную продукцию. Объем же капитала меняется под воздействием инвестиции выбытия. При повышении уровня капиталовооруженности k возрастает уровень производства $f(k)$ и увеличиваются инвестиции i. Чем выше норма сбережений, тем больший запас капитала обеспечивается и, соответственно, более высокий уровень производства.

Другим фактором непрерывного экономического роста в условиях устойчивой экономики является рост населения. Для устойчивости экономики необходимо, чтобы инвестиции $sf(k)$ компенсировали выбытие капитала и рост капитала. Однако, если рост населения не сопровождается увеличением инвестиций, то это ведет к уменьшению запаса капитала на одного работника и, следовательно, к снижению дохода.

Следующей причиной экономического роста является технический прогресс. В неоклассической теории технический прогресс – это качественные изменения в производстве. Производственная функция, учитывающая технический прогресс, записывается в общем виде так:

$$sf(K, L_{\varepsilon}, \varepsilon)\ , \qquad (1.1.5.13)$$

где ε – эффективность труда одного работника, зависящая от здоровья, образования, квалификации; L_{ε} – численность эффективных единиц рабочей силы.

Технический прогресс вызывает прирост эффективности ε с постоянным темпом g. Например, если g = 5%, то прирост продукции от каждой единицы труда увеличится на 5% в год, и соответственно объем производства возрастает пропорционально увеличению рабочей силы на 5% в год.

Если же численность занятых L растет с темпом n, а эффективность ε растет с темпом g, то L_{ε} будет увеличиваться с темпом $n + g$. Объем производства на единицу труда с постоянной эффективностью

$$y_1 = \frac{Y}{L_{\varepsilon}}. \qquad (1.1.5.14)$$

Состояние устойчивого равновесия достигается при условии

$$sf(k_1) = (d + n + g)\,k_1, \qquad (1.1.5.15)$$

где d – норма амортизации.

Из выражения (1.1.5.15) следует, что существует только один уровень капиталовооруженности k_1, при котором выполняется условие сохранения соотношения капитала и выпуска продукции, которые относятся к единице труда при постоянной эффективности (рис. 1.1.5.1.).

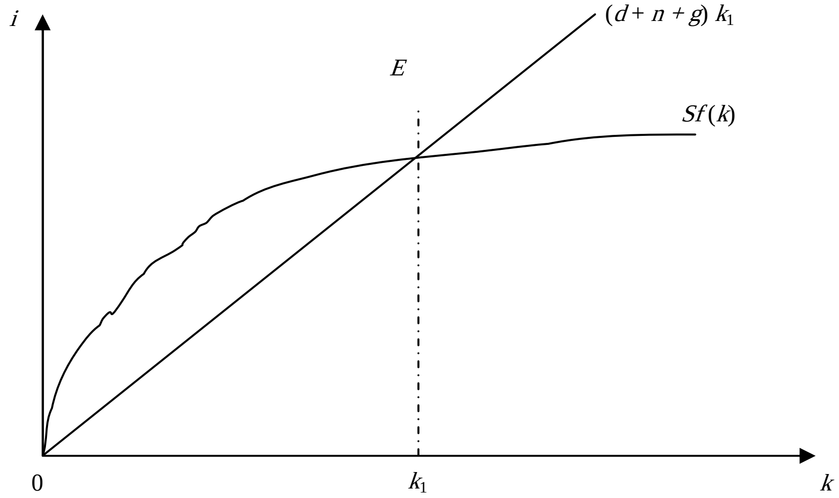


Рис. 1.1.5.1. Условие постоянства капитала и выпуска продукции, приходящихся на единицу труда с неизменной эффективностью [1]

В устойчивом состоянии k_1 при наличии технического прогресса общий объем капитала K и выпуск Y должен увеличиваться с темпом $n+g$. Технический прогресс в модели Солоу является обязательным условием непрерывного экономического развития.

Модель Солоу позволяет точнее отразить протекающие экономические процессы, объясняя протекание равновесного экономического развития при полном использовании ресурсов. Прежде всего, нестабильность динамического равновесия, присутствующая в кейнсианских моделях, объясняется как следствие отсутствия взаимозаменяемости факторов производства. Взаимозаменяемость факторов основывается на предпосылке о совершенной конкуренции на рынках, что само по себе является несколько утопичным, и учете в модели влияния технического прогресса.

1.2. МОДЕЛЬ САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ

В настоящее время, когда экономическая теория и инвестиционные финансы сталкиваются с проблемой хаоса на рынках капитала, рынки предстают как сложные системы, способные к адаптации. Сложность поведения объясняется нелинейностью и многомерностью динамических систем. Подавляющее большинство экономических процессов протекает во времени. Математические модели, адекватные объекту исследования, должны быть динамическими.

Примером такой существенно нелинейной экономико-математической модели является модель саморазвивающейся рыночной экономики [65]. Достоинством данной модели является описание экономических процессов при помощи нелинейных дифференциальных уравнений, которых в модели три. Два из них описывают изменение и интенсивность движения капитала и спроса в пространстве технологий под воздействием изменения нормы прибыли. Третье как раз описывает сам процесс изменения нормы прибыли. Таким образом, модель позволяет адекватно описывать хаотичное нелинейное поведение, наблюдаемое в распределенных экономических системах. Предположения, используемые в модели, носят достаточно универсальный характер, что также способствует учитыванию турбулентного характера траекторий движения, наличию бифуркаций, характеризующихся кардинальным изменением в силу каких-либо факторов характера протекания процесса. Такие явления принадлежат уже к области приложений методов нелинейного динамического анализа. Для проведения такого анализа необходимы новые методы математического исследования, позволяющие увидеть и понять особенности, нелинейности динамической системы.

Рассмотрим подробнее математическую модель рыночной экономики [65]. Описываемый процесс развития происходит в евклидовом пространстве технологий $\Re^n$, каждая точка c пространства соответствует определенной технологии производства некоторого продукта и имеет своими координатами затраты c_i, $i = 1, 2, ..., n$ ресурса i на единицу выпускаемого продукта. В модели используются следующие обозначения:

– $\tilde{K}(t, c)$ – плотность распределения капитала в момент t в пространстве технологий, т.е. суммарная стоимость капитала (производительного, товарного и денежного), задействованного предпринимателями в момент t в производстве некоторого потребительского продукта по технологии c и в производстве средств производства этого продукта;

– $C_T(t, c)$ – плотность распределения производительного капитала предпринимателей;

– $Y(t, c)$ – плотность распределения товарного капитала предпринимателей, равная товарным запасам в момент t, произведенного с затратами c потребительского продукта и средств для его производства;

– $M(t, c)$ – плотность распределения денежного капитала предпринимателей, выражающая платежеспособный спрос предпринимателей на средства производства и рабочую силу для производства продукции по технологии c;

– $D_1(t,c)$, $D_2(t,c)$, $D_3(t,c)$ – платежеспособный спрос соответственно предпринимателей, трудящихся и государства на произведенный по технологии c потребительский продукт;

– $u(t,c)$ – распределение нормы прибыли в момент t в пространстве технологий;

– $\rho_{C_T}(t,c,\cdot)$ и $\rho_M(t,c,\cdot)$ – векторы плотности потока соответственно производительного и денежного капитала, т.е. количество капитала, прошедшего через единицу поверхности некоторого объема пространства технологий в единицу времени;

– $\rho_{D_1}(t,c,\cdot)$, $\rho_{D_2}(t,c,\cdot)$ и $\rho_{D_3}(t,c,\cdot)$ – векторы плотности потока платежеспособного спроса соответственно предпринимателей, трудящихся и государства на потребительские товары, т.е. количество денежных средств, прошедших через единицу поверхности некоторого объема пространства технологий в единицу времени;

– $R_1(t,c)$, $R_2(t,c)$, $R_3(t,c)$ – текущее потребление соответственно предпринимателями, трудящимися и государством потребительских товаров, произведенных по технологии c.

В модели предлагается следующее описание процессов, происходящих в рыночной экономике. Денежный капитал предпринимателей M затрачивается на покупку средств производства (постоянного капитала ΔK) и рабочей силы (переменного капитала ΔH). Следующей стадией кругооборота капитала является производство стоимости и прибавочной стоимости. Капитал меняет денежную форму M на производительную C_T:

$$C_T = K + H. \qquad (1.2.1)$$

При этом стоимость производительного капитала уменьшается на часть стоимости переменного капитала ωH, которая выплачивается в виде заработной платы, и на часть стоимости постоянного капитала μK вследствие выбытия оборотного капитала, а также физического и морального износа средств производства. Одновременно возникают потоки производительного капитала $\rho_T(t,c,\cdot)$ из мест с менее высокой нормой прибыли в места с более высокой. Для некоторого произвольного объема ν пространства $\Re^n$ уравнение, описывающее изменение производительного капитала, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\nu C_T(t,c)\,d\nu = \int_\nu (-\omega H - \mu K + \Delta K + \Delta H)\,d\nu - \int_S \rho_T(t,c,\cdot)\,dS. \qquad (1.2.2)$$

Переходя в (1.2.2) к интегрированию по объему и в силу произвольности объема интегрирования ν, получаем:

$$\frac{\partial C_T(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho_T(t,c,\cdot) + \Delta K - \mu K + \Delta H - \omega H. \qquad (1.2.3)$$

В результате производства капитал приобретает товарную форму, причем стоимость вновь произведенных товаров складывается из амортизации υK и вновь созданной трудящимися стоимости переменного капитала ωK и прибавочной стоимости uC_T. Товары, произведенные по технологии c, приобретаются предпринимателями R_1, трудящимися R_2 и государством R_3. Уравнение изменения товарного капитала имеет вид:

$$\frac{\partial Y(t,c)}{\partial t} = \upsilon K + \omega H + uC_T - (R_1 + R_2 + R_3). \qquad (1.2.4)$$

Продавая произведенные товары на рынке, предприниматель реализует заключенную в них стоимость в деньгах. Капитал меняет форму из денежной на товарную. Часть I средств, вырученных от продажи потребительских товаров, идет на накопление и является, таким образом, источником прироста денежного капитала предпринимателей. В то же время другая часть средств, вырученных от продажи, идет на авансирование производительного капитала $\Delta K + \Delta H$, в технологическом пространстве возникают потоки денежного капитала $\rho_M(t,c,\cdot)$, направленные в места с более высокой нормой прибыли. Таким образом, применяя аналогичный подход, что и выше в уравнениях (1.2.2), (1.2.3), уравнение движения денежного капитала можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial M(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho_M(t,c,\cdot) + I - \Delta H - \Delta K. \qquad (1.2.5)$$

Сложив уравнения (1.2.3) – (1.2.5), получим уравнение движения капитала в виде

$$\frac{\partial \tilde{K}(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho(t,c,\cdot) + (\upsilon - \mu)\,K + uC_T + I - R, \qquad (1.2.6)$$

где $R = R_1 + R_2 + R_3$, $\rho = \rho_T + \rho_M$, $\tilde{K} = C_T + Y + M$.

Части денежных средств C_k и G от продажи потребительских товаров являются источниками формирования платежеспособного спроса D_1 и D_3 предпринимателей и государства на потребительские товары, произведенные по технологии *c*. Платежеспособный спрос D_1 и D_3 удовлетворяется покупкой товаров R_1 и R_3. Вместе с тем в технологическом пространстве возникают потоки $\rho_{D_1}(t,c,\cdot)$ и $\rho_{D_3}(t,c,\cdot)$ платежеспособного спроса соответственно предпринимателей и государства, стремящиеся распределить его по всему пространству технологий в соответствии с потребительскими стоимостями товаров, выпускаемых по различным технологиям. Поэтому уравнения движения платежеспособного спроса предпринимателей и государства на потребительские товары имеют вид:

$$\frac{\partial D_1(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho_{D_1}(t,c,\cdot) + C_K - R_1\,; \qquad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial D_3(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho_{D_3}(t,c,\cdot) + G - R_3\,. \qquad (1.2.8)$$

Источником платежеспособного спроса трудящихся C_L в точке c является их заработная плата ωH, которую они расходуют на приобретение товаров R_2. Таким образом,

$$\frac{\partial D_2(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho_{D_2}(t,c,\cdot) + C_L - R_2\,. \qquad (1.2.9)$$

Если сложить уравнения (1.2.7) – (1.2.9), получится уравнение движения платежеспособного спроса:

$$\frac{\partial D(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho_D(t,c,\cdot) + C_L + C_K + G - R, \qquad (1.2.10)$$

где $\rho_D = \rho_{D_1} + \rho_{D_2} + \rho_{D_3}$.

Перепроизводство означает, что товары не могут быть проданы по ценам, обеспечивающим предпринимателям определенную долю прибыли. Поэтому превышение предложения потребительских товаров и рабочей силы $Y+H$ над платежеспособным спросом D и денежным капиталом M ведет к уменьшению цен и в результате к снижению нормы прибыли:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha((D+M)-(Y+H))\,. \qquad (1.2.11)$$

Таким образом, модель рыночной экономики может быть представлена следующей системой:

$$\frac{\partial \tilde{K}(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho(t,c,\cdot) + (\upsilon-\mu)\,K + uC_T + I - R\,;$$

$$\frac{\partial D(t,c)}{\partial t} = -\operatorname{div}\rho_D(t,c,\cdot) + C_L + C_K + G - R\,;$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha((D+M)-(Y+H))\,;$$

$$\tilde{K} = C_T + Y + M; \quad C_T = K + H; \quad R = C_K + G + I. \qquad (1.2.12)$$

Учитывая, что

$$\int_{\Re_+^n} \operatorname{div}\rho\,(t,c,\cdot)\,dc = \int_{\Re_+^n} \operatorname{div}\rho_D(t,c,\cdot)\,dc = 0\,,$$

система (1.2.12) может быть сведена к следующей:

$$\frac{\partial \tilde{K}(t,c)}{\partial t} = (\upsilon-\mu)\,K + uC_T + I - R\,;$$

$$\frac{\partial D(t,c)}{\partial t} = C_L + C_K + G - R\,;$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha(D + M - Y - H)\,;$$

$$\tilde{K} = C_T + Y + M; \quad C_T = K + H; \quad R = C_K + G + I. \tag{1.2.13}$$

Системы (1.2.12) и (1.2.13) включают по шесть уравнений и двенадцать неизвестных переменных плюс потоки капитала и спроса. Для доопределения в модели предлагаются следующие предположения.

Предположения. Вектор плотности потока капитала пропорционален градиенту нормы прибыли, причем коэффициент пропорциональности не является постоянным, а зависит как от точки c пространства технологий, так и от самой нормы прибыли:

$$\rho(t, c, \cdot) = k_1(c, \tilde{K}, u)\,\mathrm{grad}\, u(t, c)\,. \tag{1.2.14}$$

Коэффициент $k_1(c, \tilde{K}, u)$ характеризует свойства экономической среды и определяет процесс диффузии капитала.

Вектор плотности потока платежеспособного спроса на потребительские товары пропорционален градиенту нормы прибыли:

$$\rho_D(t, c, \cdot) = k_2(c, D, u)\,\mathrm{grad}\, u(t, c)\,. \tag{1.2.15}$$

Коэффициент пропорциональности зависит от точки c пространства технологий, величины платежеспособного спроса и от самой нормы прибыли. Коэффициент $k_2(c, D, u)$ характеризует экономическую среду со стороны потребительских свойств выпускаемых по различным технологиям товаров.

Стоимость приобретенных на рынке товаров пропорциональна как стоимости товарного капитала, так и платежеспособному спросу на них:

$$R = \beta\, YD. \tag{1.2.16}$$

Денежные средства G, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса государства, есть часть всех средств, вырученных предпринимателями от продажи потребительских товаров:

$$G = \delta R\,. \tag{1.2.17}$$

Так как $C_L \le (1-\delta)\, R$, то $0 < \delta \le \delta_0 < 1$.

Денежные средства C_K, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса предпринимателей, составляют часть прибавочной стоимости, полученной в процессе производства и оставшейся после расчетов с государством:

$$C_K = \varepsilon(1-\tilde{\delta})\, uC_T, \ \ \varepsilon < 1\,. \tag{1.2.18}$$

Приняв $\sigma = \varepsilon(1-\delta)$ и $\tilde{\delta} = \delta$, можно записать:

$$C_K = \sigma u C_T, \ \ \sigma < 1 - \delta\,.$$

В модель также вводятся величины, характеризующие органическое $\gamma = K/H$, производительное $\vartheta = C_T/M$ и товарное $\eta = Y/M$ строение капитала.

При этом система (1.2.12) принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{K}(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(k_1(c, \tilde{K}, u)\,\mathrm{grad}\, u) + \frac{\gamma\vartheta}{(\gamma+1)(1+\vartheta+\eta)}(\upsilon - \mu)\,\tilde{K} + $$
$$+ \frac{\vartheta(1-\sigma)\tilde{K}u}{1+\vartheta+\eta} - \frac{\beta\delta\eta\tilde{K}D}{1+\vartheta+\eta};$$

$$\frac{\partial D(t,c)}{\partial t} = -\mathrm{div}\,(k_2(c, D, u)) + \frac{\omega\vartheta\tilde{K}}{(\gamma+1)(1+\vartheta+\eta)} + \frac{\sigma\vartheta\tilde{K}u}{1+\vartheta+\eta} - \frac{\beta(1-\delta)\eta\tilde{K}D}{1+\vartheta+\eta};$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \alpha\left(D - \frac{\vartheta + (\eta-1)(\gamma+1)}{(1+\vartheta+\eta)(\gamma+1)}\tilde{K}\right). \tag{1.2.19}$$

Если ввести новые переменные

$$x_1 = \frac{\beta\eta}{1+\vartheta+\eta}\tilde{K}; \ \ x_2 = \frac{\beta\eta(1+\gamma)}{\omega\vartheta}D; \ \ x_3 = \frac{1+\gamma}{\omega}u\,;$$

$$b=\frac{\omega\vartheta}{(1+\vartheta+\eta)(1+\gamma)};\ a=\frac{\alpha\vartheta}{\beta\eta};\ d=\frac{\vartheta+(\eta-1)(1+\gamma)}{\omega\vartheta},$$

то система (1.2.19) может быть сведена к следующей:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1(t,c)}{\partial t}=-\mathrm{div}(d_1(c,x,z)\,\mathrm{grad}\,z)+bx_1((1-\sigma)x_3-\delta x_2);\\ \dfrac{\partial x_2(t,c)}{\partial t}=-\mathrm{div}(d_2(c,x,z)\,\mathrm{grad}\,z)+x_1(1-(1-\delta)x_2+\sigma x_3);\\ \dfrac{\partial x_3(t,c)}{\partial t}=a(x_2-dx_1),\end{cases}\quad(1.2.20)$$

где $\upsilon=\mu$, а система (1.2.13) – соответственно к

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x_1(t,c)}{\partial t}=bx_1((1-\sigma)x_3-\delta x_2);\\ \dfrac{\partial x_2(t,c)}{\partial t}=x_1(1-(1-\delta)x_2+\sigma x_3);\\ \dfrac{\partial x_3(t,c)}{\partial t}=a(x_2-dx_1).\end{cases}\quad(1.2.21)$$

1.3. ПОДВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИТОГОВ

Рыночная экономика является важнейшим объектом исследований, в экономической теории прочно закрепились различные модели взаимодействия рынков рабочей силы, товаров и денег и другие [1, 2].

Экономическая теория и теория рынков капитала долгое время использовали ньютоновское представление о стремлении самоорганизующейся системы к равновесию, а также ключевую концепцию Адама Смита, заключающуюся в предположении о существовании на рынке автоматического равновесного механизма.

Модели функционирования капитала позволяют объяснить многие происходящие на рынке явления, но не все. К примеру, количество флуктуаций на рынке капитала превосходит то число, которое можно объяснить эффектами шума. Еще в начале XX в. растущие объемы экономических временных рядов перестали совпадать с прогнозами линейных автономных детерминистических моделей. В 1989 г. Лоренц указывал, что сравнительная статика может использоваться для анализа, только когда динамический процесс сходится к новому устойчивому состоянию после окончания переходного возмущения. В 1992 г. Дэй показывает, что макро- и микроэкономические показатели подвержены беспорядочным флуктуациям, а выводы классических моделей о стремлении экономических процессов к устойчивому или упорядоченному состоянию фактически не подтверждены.

Концепции вероятностных расчетов в анализе рынков капитала исходят из ценовой публичной информации. Изменение в ценах происходит при появлении новой информации, предприниматели оценивают важность информации и на основании этого выстраивают свои дальнейшие действия, таким образом влияя на формирование равновесной цены. При этом рынок формируется из всей совокупности как верных, так и ошибочных решений участников рынка. Свежая информация влияет на появление завтрашней прибыли или убытка, вчерашняя информация не является актуальной в смысле пользы капиталообразования. Таким образом, в вероятностных концепциях прибыли, убытки, цены и другие экономические показатели являются случайными величинами и подвергаются случайному блужданию. В предельных случаях их вероятностное распределение стремится к нормальному.

Однако в последнее время практические результаты размещения активов показывают, что цены активов могут изменяться значительно, скачкообразно. При этом временные ряды ценообразования предстают беспорядочными [115]. Эти моменты распределения доходности размещения капитала отличаются от нормального распределения, на котором базируется классическая теория процесса размещения капитала. Для разрешения существующих противоречий, изучения и объяснения явных различий во временных рядах рыночных прибылей между реальными данными и прогнозируемыми при помощи классических подходов необходимы новые методы и модели, которые позволят достичь большей результативности.

Задача математического моделирования состоит в построении адекватной математической модели исследуемого экономического объекта и дальнейшем анализе свойств этой модели с помощью доступных, надежных, точных и достоверных методов.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СИМВОЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1. СУЩНОСТЬ ПОДХОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование рассматривается как особая форма эксперимента, эксперимента не над самим объектом, а над его копией. Математическая модель описывается математическими структурами с помощью математического аппарата.

Все методы математического моделирования можно разделить на две группы:

– моделирование, основанное на точных аналитических математических алгоритмах;

– моделирование, основанное на численных методах.

В первом случае моделирование основывается на применении аналитических методов решения при исследовании. Динамика различных процессов описывается с помощью дифференциальных уравнений.

В ряде случаев эти уравнения допускают линеаризацию и могут быть записаны в виде:

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n y = \varphi(t), \tag{2.1.1}$$

где $y(t)$ – неизвестная функция; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – постоянные коэффициенты; $\varphi(t)$ – некоторая функция, выражающая внешнее воздействие, оказываемое на систему.

Общим решением дифференциального уравнения n порядка является неизвестная функция $y(t)$. Зная начальные условия, накладываемые на функцию $y(t)$ и на ее производные вплоть до $n-1$ порядка включительно, можно найти решение $y(t)$. Для этого используются классический и операционный методы, которые позволяют получить функцию $y(t)$ в символьном виде.

В общем случае при решении классическим методом решение неоднородного дифференциального уравнения, т.е. уравнения с ненулевой правой частью предполагает нахождение суммы общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения $y_1(t)$ и частного решения $y_2(t)$ неоднородного дифференциального уравнения. В ограниченном ряде случаев вида левой части (2.1.1) возможно такое преобразование, которое позволяет найти решение путем непосредственного интегрирования.

Классический метод анализа процессов в настоящее время применяется редко, в основном при работе с простейшими объектами, поскольку исследование более сложных процессов часто приводит к сложным преобразованиям при нахождении частного решения и бывает просто неосуществимо.

Суть операционного метода состоит в проведении интегрального преобразования Лапласа функции, входящей в состав дифференциального уравнения, по правилу:

$$Y(s) = \int_0^\infty y(t)\, e^{-st}\, dt, \tag{2.1.2}$$

где $s = \alpha + j\beta$ – комплексная переменная.

Это преобразование сопоставляет функции действительного переменного функцию комплексного переменного $y(t) \to Y(s)$. При этом для линейных дифференциальных уравнений существует *изоморфизм*, или взаимно-однозначное соответствие между оригинальными функциями и их изображениями – образами Лапласа.

Существует также и обратное преобразование Лапласа, выраженное соотношением:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} Y(s)\, e^{-st}\, dt, \tag{2.1.3}$$

где $\sigma = \mathrm{Re}\ s$.

Преобразование Лапласа сводит дифференцирование функции оригинала к умножению ее образа на комплексную переменную s, поэтому решение дифференциального уравнения в пространстве оригиналов сводится к решению алгебраического уравнения в пространстве изображений.

В общем случае при использовании операционного метода выполняют следующие процедуры:

– выполняя преобразование Лапласа левой и правой части дифференциального уравнения с учетом начальных условий, переходят от дифференциального уравнения для функции оригинала $y(t)$ к алгебраическому уравнению для $Y(s)$;

– решая алгебраическое уравнение, находят в пространстве изображений в явном виде выражение для $Y(s)$;

– выполняют обратное преобразование и находят неизвестную функцию $y(t)$.

Часто при анализе изучаемых процессов присутствует нелинейное функциональное поведение, которое приходится учитывать. Это, в свою очередь, определяет появление нелинейностей в дифференциальных уравнениях. Наличие нелинейностей в дифференциальных уравнениях обусловливает невозможность их точного аналитического решения или приводит к трудоемким громоздким выкладкам.

Кроме того, коэффициенты в левой части дифференциального уравнения могут быть определены с экспериментальной ошибкой, а это, в свою очередь, может сильно обесценить получаемый точный аналитический результат. Точные методы не пригодны также в случае, если правая часть дифференциального уравнения представлена не в аналитической форме, а в виде таблицы или графика.

Во всех этих случаях приходится использовать моделирование, опирающееся на численные методы. В отличие от аналитических, они позволяют произвести исследование огромного разнообразия объектов. Конечно, сам процесс анализа часто превращается в совершенно не тривиальный и долгий, но при этом открывается гораздо больше возможностей для исследования.

Большинство существующих численных методов предполагает замену производной на конечное приращение и преобразование дифференциального уравнения в конечно-разностное уравнение. С этой целью интервал поиска решения разбивается на множество промежутков и решение ищется на каждом из этих кусочков. Чем мельче шаг разбиения, тем точнее получается результат, поэтому эффективное применение численных методов предполагает использование компьютеров с достаточным быстродействием.

Простейшим численным методом решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) является метод Эйлера, который заключается в следующем. Рассматривается уравнение $y' = f(x, y)$. В окрестностях узлов $x = x_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ значение производной y' заменяется на приближенное значение, выраженное отношением приращения функции к приращению аргумента. При этом значения функции y в узлах x_i заменим значениями функции y_i:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(x_i, y_i), \tag{2.1.4}$$

где h_i – приращение аргумента x_i.

Полученное аппроксимационное выражение имеет первый порядок точности, поскольку при замене $y' = f(x, y)$ на $\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = f(x_i, y_i)$ допускается погрешность $O(h_i)$.

С целью упрощения узлы можно считать $h = \mathrm{const}$, т.е. $h_i = x_{i+1} - x_i,\ \ i = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда из равенства (2.1.4) следует:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots \tag{2.1.5}$$

Выражение (2.1.5) представляет собой приближенное нахождение значения функции y в точке x_{i+1} при помощи разложения в ряд Тейлора с отбрасыванием членов второго и более высоких порядков.

Начальные условия определяются соотношением $y(x_0) = y_0$. Согласно выражению (2.1.5) значение y_1 может быть определено как:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0). \tag{2.1.6}$$

Аналогично могут быть найдены значения функции в других узлах, например:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1). \tag{2.1.7}$$

Общее рекуррентное выражение можно представить в виде:

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}). \tag{2.1.8}$$

Если на правой границе интервала использовать точное значение производной к решению, то получается неявный метод Эйлера–Коши, или метод трапеций второго порядка точности:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h(f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i))}{2}; \tag{2.1.9}$$

$$x_i = x_{i-1} + h. \tag{2.1.10}$$

Существуют также многошаговые методы решения задачи Коши. В них решение в текущем состоянии зависит от данных в нескольких предыдущих. Многие многошаговые методы различного порядка точности построены на использовании эквивалентного дифференциальному интегрального уравнения:

$$y_i = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y(x))\, dx. \tag{2.1.11}$$

Если решение задачи Коши получено в узлах вплоть до i-го, то подынтегральная функция может быть аппроксимирована интерполяционным многочленом какой-либо степени. В частности, если аппроксимировать подынтегральную функцию ее значением на правом конце в точке, то получается метод Эйлера.

При решении систем нелинейных уравнений прямые методы решения неизвестны, однако широко применяются итерационные методы. Общий вид объекта, описываемого системой нелинейных уравнений, может быть представлен следующим образом:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n)=0; \\ f_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n)=0; \\ \vdots \\ f_n(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n)=0 \end{cases} \tag{2.1.12}$$

или

$$f_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n)=0,\quad i=\overline{1...n}. \tag{2.1.13}$$

Решением данной системы является вектор

$$\overline{X}=[x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n], \tag{2.1.14}$$

удовлетворяющий системе (2.1.13) с точностью ε и определяющий точку в n-мерном Евклидовом пространстве.

Эффективность итерационных методов зависит от выбора начального приближения, начальной точки, вектора

$$\overline{X_0}=[x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ ...,\ x_n^0]. \tag{2.1.15}$$

Область, в которой начальное приближение $\overline{X_0}$ сходится к искомому решению, называется областью сходимости. Если начальное приближение $\overline{X_0}$ не попадает в область сходимости, то решение системы получить не удается.

Для применения итерационного метода система (2.1.13) должна быть преобразована к виду:

$$\begin{cases} x_1=\varphi_1(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n); \\ x_2=\varphi_2(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n); \\ \vdots \\ x_n=\varphi_n(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n) \end{cases} \tag{2.1.16}$$

или

$$x_i=\varphi_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ ...,\ x_n),\quad i=\overline{1\ ...\ n}. \tag{2.1.17}$$

Далее, выбрав начальное приближение $\overline{X_0}=[x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0,\ ...,\ x_n^0]$ и использовав систему (2.1.17), итерационный процесс поиска выполняется согласно следующему выражению:

$$x_i^k=\varphi_i(x_1^{k-1},\ x_2^{k-1},\ x_3^{k-1},\ ...,\ x_n^{k-1}), \tag{2.1.18}$$

т.е. на каждом k-м шаге поиска вектор переменных $\overline{X}$ находится, используя значения переменных на предыдущем $k-1$ шаге.

Итерационный процесс поиска прекращается при выполнении условия

$$\left|x_j^k-x_j^{k-1}\right|\le\varepsilon,\quad j=\overline{1,\ n}. \tag{2.1.19}$$

При этом условие (2.1.19) должно выполняться одновременно по всем переменным.

Другим методом, применяющимся при исследовании систем нелинейных уравнений, является метод Ньютона. Он обеспечивает более быструю сходимость по сравнению с методом итераций.

В основе метода Ньютона лежит идея линеаризации всех нелинейных уравнений системы (2.1.12). В соответствии с определением производной, разложив каждое уравнение системы (2.1.12) в ряд Тейлора, можно получить следующую систему для определения приращений $h_j,\ j=\overline{1,\ n}$:

$$\begin{cases} f_1(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) + h_1\dfrac{\delta f_1}{\delta x_1} + h_2\dfrac{\delta f_1}{\delta x_2} + ... + h_n\dfrac{\delta f_1}{\delta x_n} + R_1; \\ f_2(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) + h_1\dfrac{\delta f_2}{\delta x_1} + h_2\dfrac{\delta f_2}{\delta x_2} + ... + h_n\dfrac{\delta f_2}{\delta x_n} + R_2; \\ \vdots \\ f_n(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) + h_1\dfrac{\delta f_n}{\delta x_1} + h_2\dfrac{\delta f_{n1}}{\delta x_2} + ... + h_n\dfrac{\delta f_n}{\delta x_n} + R_n, \end{cases} \tag{2.1.20}$$

где h_j, $j=\overline{1, n}$ – приращение по каждой x_j; R_j, $j=1, ..., n$ – остаточные нелинейные члены второго и более высоких порядков каждого ряда Тейлора.

Если приращения h_j таковы, что переменные x_j принимают значения, близкие к корню, то можно считать, что:

$$\begin{cases} f_1(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) = 0; \\ f_2(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) = 0; \\ \vdots \\ f_n(x_1+h_1, x_2+h_2, ..., x_n+h_n) = 0. \end{cases} \tag{2.1.21}$$

Тогда решение системы (2.1.21) сводится к решению системы линейных уравнений, в которой неизвестными являются приращения h_j, $j=\overline{1, n}$:

$$\begin{cases} h_1\dfrac{\delta f_1(\overline{X})}{\delta x_1} + h_2\dfrac{\delta f_1(\overline{X})}{\delta x_2} + ... + h_n\dfrac{\delta f_1(\overline{X})}{\delta x_n} + R_1, = -f_1(\overline{X}); \\ h_1\dfrac{\delta f_2(\overline{X})}{\delta x_1} + h_2\dfrac{\delta f_2(\overline{X})}{\delta x_2} + ... + h_n\dfrac{\delta f_2(\overline{X})}{\delta x_n} + R_2 = -f_2(\overline{X}); \\ \vdots \\ h_1\dfrac{\delta f_n(\overline{X})}{\delta x_1} + h_2\dfrac{\delta f_n(\overline{X})}{\delta x_2} + ... + h_n\dfrac{\delta f_n(\overline{X})}{\delta x_n} + R_n = -f_n(\overline{X}), \end{cases} \tag{2.1.22}$$

где $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Значения R_j в системе можно отбросить ввиду того, что они являются пренебрежимо малыми величинами. В матричной форме система (2.1.22) может быть представлена так:

$$A * H = B, \tag{2.1.23}$$

где

$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\delta f_1(\overline{X})}{\delta x_1} & \dfrac{\delta f_1(\overline{X})}{\delta x_2} & ... & \dfrac{\delta f_1(\overline{X})}{\delta x_n} \\ \dfrac{\delta f_2(\overline{X})}{\delta x_1} & \dfrac{\delta f_2(\overline{X})}{\delta x_2} & ... & \dfrac{\delta f_2(\overline{X})}{\delta x_n} \\ .... & & & \\ \dfrac{\delta f_n(\overline{X})}{\delta x_1} & \dfrac{\delta f_n(\overline{X})}{\delta x_2} & ... & \dfrac{\delta f_n(\overline{X})}{\delta x_n} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов системы;

$B = \begin{bmatrix} -f_1(\overline{X}) \\ -f_2(\overline{X}) \\ \dots \\ -f_n(\overline{X}) \end{bmatrix}$ – вектор свободных членов;

$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_n \end{bmatrix}$ – вектор неизвестных системы.

Матрица A, составленная из частных производных $a_{ij} = \dfrac{\delta f_i}{\delta x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$, называется матрицей Якоби или Якобианом.

На первом этапе реализации метода Ньютона необходимо привести систему к соответствующему виду (2.1.22) или (2.1.23). Далее выбирается вектор начальных значений $\overline{X_0}$, решение системы (2.1.12) находится в результате итерационного процесса:

$$x_j^k = x_j^{k-1} + h_j^{k-1}, \quad j = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.1.24}$$

Значения приращений h_j^{k-1} определяются из решения системы (2.1.22) линейных алгебраических уравнений, все коэффициенты которой выражаются через известное предыдущее состояние $\overline{X^{k-1}} = (x_1^{k-1}, x_2^{k-1}, \dots, x_n^{k-1})$:

$$\begin{cases} h_1^{k-1} \dfrac{\delta f_1(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_1} + h_2^{k-1} \dfrac{\delta f_1(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_2} + \dots + h_n^{k-1} \dfrac{\delta f_1(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_n} + R_1, = - f_1(\overline{X^{k-1}}); \\ h_1^{k-1} \dfrac{\delta f_2(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_1} + h_2^{k-1} \dfrac{\delta f_2(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_2} + \dots + h_n^{k-1} \dfrac{\delta f_2(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_n} + R_2 = - f_2(\overline{X^{k-1}}); \\ \vdots \\ h_1^{k-1} \dfrac{\delta f_n(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_1} + h_2^{k-1} \dfrac{\delta f_n(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_2} + \dots + h_n^{k-1} \dfrac{\delta f_n(\overline{X^{k-1}})}{\delta x_n} + R_n = - f_n(\overline{X^{k-1}}). \end{cases}$$

Процесс итераций заканчивается при выполнении условия

$$\left| h_j \right| \le \varepsilon, \quad j = \overline{1, n} \tag{2.1.25}$$

по всем приращениям одновременно.

В методе Ньютона на каждом шаге итерационного процесса поиска необходимо формировать матрицу Якоби, при этом каждый элемент матрицы можно определить следующим образом:

– аналитически, как частную производную $\dfrac{\delta f_i}{\delta x_j}$;

– методом численного дифференцирования, с использованием вычисления отношения приращения функции к приращению аргумента с помощью приближенного выражения $\dfrac{\delta f_i}{\delta x_j} \approx \dfrac{\Delta f_i}{\Delta x_j}$.

Частная производная $f_i(\overline{X})$ по первой координате x_1 определяется как:

$$\frac{\delta f_i}{\delta x_j} \approx \frac{f_i(x_1 + h_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}{h_1}, \tag{2.1.26}$$

а частная производная $f_i(\overline{X})$ по координате x_j:

$$\frac{\delta f_i}{\delta x_j} \approx \frac{f_i(x_1, x_2, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h_j}, \tag{2.1.27}$$

где $h_j \approx \varepsilon$.

Метод Ньютона имеет преимущества по сравнению с другими методами. Но для метода Ньютона также существует проблема сходимости, с увеличением числа неизвестных область сходимости уменьшается.

2.2. МЕТОД СИМВОЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящее время важность исследования динамических систем определяется возможностью прогнозирования их поведения и, следовательно, возможностью прогнозирования социальных, экономических и природных объектов, описываемых такими системами. Стоит заметить, что большинство социально-экономических и естественных процессов представляются скорее не как детерминистические, а как динамически нестабильные системы. В пользу этих доводов говорят многочисленные проводимые ранее исследования, которые расходились с выводами классических моделей. В экономике постоянно наблюдались и наблюдаются хаотичные колебания экономических показателей, а в развитии экономических процессов не просматривается тенденция стремления к состоянию равновесия.

В исследованиях динамических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, было установлено, что поведение некоторых детерминистических динамических систем практически совпадает с поведением случайных объектов. Такое хаотическое поведение вроде бы трудно состыкуется с самим определением динамической системы, подразумевающим возможность однозначного определения конечного состояния по известному начальному. На самом деле это достаточно закономерно и было установлено в исследованиях ученых над динамическими системами.

В 1908 г. французский математик А. Пуанкаре предвидел высокую чувствительность сложных динамических систем к малейшему изменению начальных условий. А в 1961 г. практические результаты, полученные Э. Лоренцом в проводимом им погодном моделировании, показали, что даже небольшая неточность в задании исходного состояния системы с течением времени быстро возрастает, что делает сложным прогнозирование конечных результатов на продолжительном временном отрезке. Стоит также заметить, что из-за всегда присутствующей погрешности измерений задание начального состояния системы всегда производится с некоторой неточностью. Вследствие этого в поведении динамических систем возникают хаотические режимы, характеризующиеся нерегулярным, беспорядочным изменением переменных во времени.

Поведение, связанное с беспорядочностью флуктуаций частоты и амплитуды экономических показателей, отсутствием устойчивости, характерно для экономических процессов. Как следствие, применение нелинейных хаотических моделей для описания экономических процессов приводит к получению результатов, сопоставимых с реальными данными, и объясняет расхождения с действительностью прогнозов, получаемых ранее с помощью классических экономических моделей. В то же время ввиду сложности исследований хаотических динамических систем, описываемых нелинейными математическими моделями, необходимы современные высокоточные методы моделирования и анализа. Рассмотрим далее новый метод исследования нелинейных динамических систем, который опирается на операцию символьного интегрирования. При использовании этого метода выполнение вычислений производится в символьном виде и достигается уменьшение систематической ошибки.

В качестве объекта исследования рассмотрим векторное дифференциальное уравнение вида:

$$\dot{x} = Ax + f(x), \tag{2.2.1}$$

с начальными условиями

$$x(0) = C,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $f(x)$ – полилинейная форма; A – квадратичная матрица.

Эквивалентное интегральное уравнение, соответствующее (2.2.1):

$$x(t) = C + \int_0^t [Ax(\tau) + f(x(\tau))]\, d\tau. \tag{2.2.2}$$

Применяя метод последовательных приближений к (2.2.2), получим:

$$x_{N+1}(t) = C + \int_0^t [Ax_N(\tau) + f(x_N(\tau))]\, d\tau. \tag{2.2.3}$$

В соответствии с (2.2.3) имеем начальное приближение:

$$x_1(t) = C + \int_0^t [Ax_0(\tau) + f(x_0(\tau))]\, d\tau = C + Ax_0(t)t + f(x_0(t))\, t$$

и

$$\begin{aligned} x_2(t) &= C + \int_0^t [A(C + Ax_0(\tau)\tau + f(x_0(\tau))\tau) + f(x_1(\tau))]\, d\tau = \\ &= C + ACt + \frac{A^2t^2}{2} x_0(t) + \frac{Af(x_0(t))\, t^2}{2} + F_1(x_0(t),\, t), \end{aligned}$$

где $F_1(x_0(t), t) = \int_0^t f(x_1(\tau))\, d\tau = tf(C + Ax_0(t)t + f(x_0(t))\, t)$;

$$\begin{aligned} x_3(t) = C + \int_0^t \Bigg[& A\left(C + AC\tau + \frac{A^2\tau^2}{2} x_0(\tau) + \frac{Af(x_0(\tau))\, \tau^2}{2} + F_1(x_0(\tau), \tau)\right) + \\ & + f(x_2(\tau)) \Bigg] d\tau = C + ACt + \frac{A^2t^2}{2} C + \frac{A^3t^3}{3!} x_0(t) + \frac{A^2 f(x_0(t))\, t^3}{3!} + \\ & + tAF_1(x_0(t), t) + F_2(x_0(t), t) \end{aligned}$$

или, подставив значение $F_1(x_0(t), t)$:

$$x_3(t) = C + ACt + \frac{A^2t^2}{2}C + \frac{A^3t^3}{3!}x_0(t) + \frac{A^2 f(x_0(t))\,t^3}{3!} +$$
$$+ t^2 Af(C + Ax_0(t)\,t + f(x_0(t))\,t) + F_2(x_0(t), t),$$

где

$$F_2(x_0(t), t) = \int_0^t f(x_2(\tau))\,d\tau = tf(x_2(\tau)) = tf\left(C + ACt + \frac{A^2t^2}{2}x_0(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{Af(x_0(t))t^2}{2} + tf(C + Ax_0(t)\,t + f(x_0(t))\,t)\right).$$

Продолжая вычисления аналогичным образом, получим:

$$x_{N+1}(t) = \left[E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots + \frac{(At)^{(N+1)}}{(N+1)!}\right]C + \frac{A^N f(x_0(t))\,t^{(N+1)}}{(N+1)!} + F_N(x_0(t), t). \tag{2.2.4}$$

Учитывая, что в (2.2.4) при $N \to \infty$ слагаемое $\frac{A^N f(x_0(t))\,t^{(N+1)}}{(N+1)!} \to 0$, а сумма $E + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots + \frac{(At)^{(N+1)}}{(N+1)!}$ представляет из себя определение матричной экспоненты e^{At} в ряд, получим следующую формулу для $x_{N+1}(t)$:

$$x_{N+1}(t) = e^{At}C + F_N(x_0(t), t)\,, \tag{2.2.5}$$

где $F_N(x_0(t), t) = \underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{N} f(x_0(\tau))\,d\tau$.

Оператор, представляющий собой правую часть (2.2.2), при малых значениях t является сжимающим. Поэтому существует такое положительное число T, что на отрезке $[0,\ T]$ схема (2.2.5) сходится к решению уравнения (2.2.2), причем равномерно. Это решение имеет вид:

$$x(t) = e^{At}C + F(x_0(t), t)\,.$$

2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЭТАЛОННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СИМВОЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Аттрактор Лоренца считается эталонной системой в том смысле, что идеально демонстрирует хаотическое поведение, наблюдаемое в динамических системах. Ввиду этого в качестве примера исследования динамического объекта с использованием метода символьного интегрирования рассмотрим систему Лоренца, которая состоит из трех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -Sx_1 + Sx_2\,; \\ \dot{x}_2 = (r - x_3)\,x_1 - x_2\,; \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3\,, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

где $S,\ r,\ b$ – параметры.

В системе (2.3.1) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ – вектор независимых переменных; $A = \begin{bmatrix} -S & S & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов; $f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}$ – вектор нелинейных частей.

Алгоритм символьного интегрирования в исследовании динамических систем, изложенный выше в параграфе 2.2, реализован в виде программы на языке Sage. Результаты практических расчетов, выполненные в соответствии с предложенным методом и полученные с помощью данной программы, представлены на рис. 2.3.1 – 2.3.3. Значения параметров в расчете – $S = 10,\ r = 28,\ b = 8/3$; вектор начальных значений $x_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$.

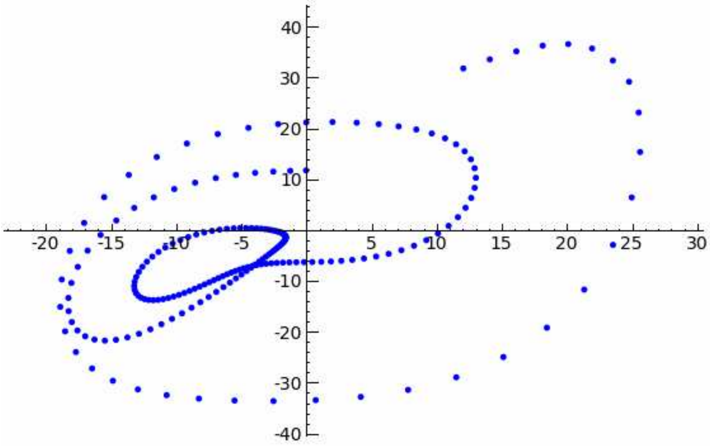


Рис. 2.3.1. График траектории движения системы в координатах *x, y* при количестве временных отрезков *n* = 200 и продолжительности *T* = 0,01 каждого временного отрезка

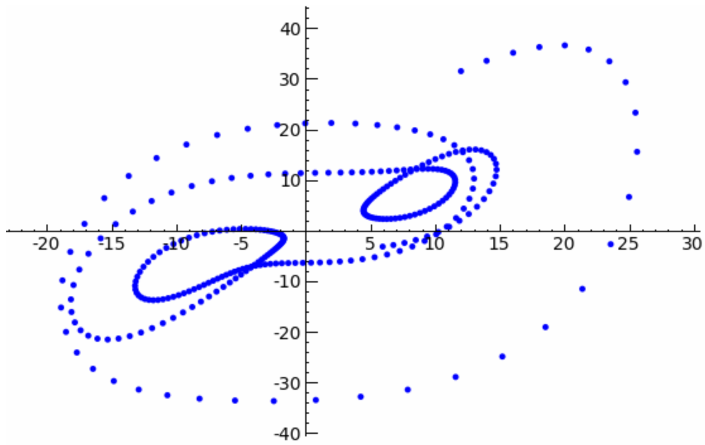


Рис. 2.3.2. График траектории движения системы в координатах *x, y* при количестве временных отрезков *n* = 300 и продолжительности *T* = 0,01 каждого временного отрезка

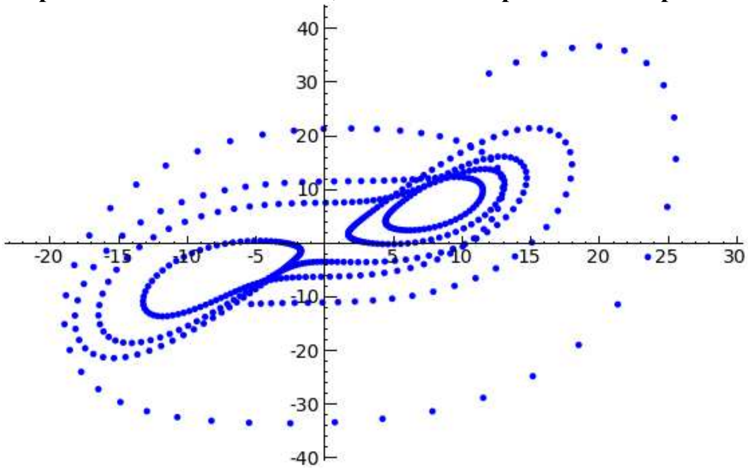


Рис. 2.3.3. График траектории движения системы в координатах *x, y* при количестве временных отрезков *n* = 500 и продолжительности *T* = 0,01 каждого временного отрезка

Практические результаты для аттрактора Лоренца, вычисленные с использованием изложенного метода, соответствуют полученным в результате других исследований (например, [83]) и говорят об адекватности метода имитационного моделирования с использованием символьного алгоритма интегрирования, позволяющего проводить изучение динамических хаотических систем путем построения траекторий движения системы. Выполнение вычислительных операций производится в символьном виде, что позволяет получить высокоточные результаты.

2.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СИМВОЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В соответствии с моделью, описанной в § 1.2, объект рыночной экономики может быть описан следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = bx_1((1-\sigma)x_3 - \delta x_2); \\ \dot{x}_2 = x_1(1-(1-\delta)x_2 + \sigma x_3); \\ \dot{x}_3 = a(x_2 - dx_1) \end{cases} \qquad (2.4.1)$$

или в альтернативном виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = bx_1x_3 - bx_1x_3\sigma - \delta x_1\delta x_2; \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1x_2 - x_1x_2\delta + x_1\sigma x_3; \\ \dot{x}_3 = ax_2 - adx_1, \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

где b, a, d – общие параметры; δ – параметр, определяющий денежные средства, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса государства; σ – параметр, определяющий денежные средства, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса предпринимателей.

В системе (2.4.2) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ – вектор независимых переменных; $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -ad & a & 0 \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов; $f(x) = \begin{bmatrix} bx_1x_3 - \sigma bx_1x_3 - b\delta x_1x_2 \\ -x_1x_2 - \delta x_1x_2 + \sigma x_1x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ – вектор нелинейных частей.

Результаты решения (2.4.2), полученные с помощью программы на языке математической системы Sage, представлены на рис. 2.4.1 – 2.4.5. Графики выполнены в координатах (x, y) – (капитал, платежеспособный спрос). Значения общих параметров в расчете: $b = 0{,}4$; $a = 3{,}7$; $d = 1{,}7$.

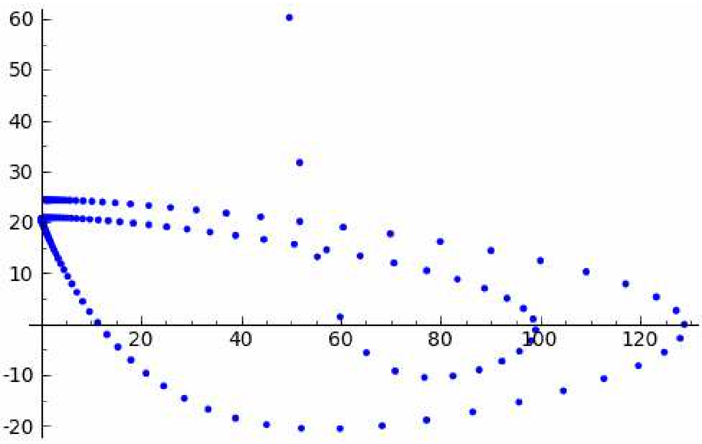


Рис. 2.4.1. График траектории движения системы при δ = 0,5; σ = –1; n = 300; T = 0,005; $x0$ = 50; $y0$ = 106; $z0$ = 25; b = 0,4; a = 3,7; d = 1,7

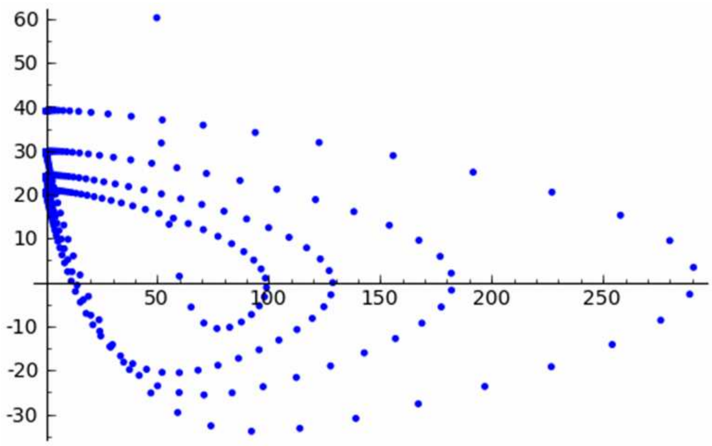


Рис. 2.4.2. График траектории движения системы при δ = 0,5; σ = –1; n = 800; T = 0,005; $x0$ = 50; $y0$ = 106; $z0$ = 25; b = 0,4; a = 3,7; d = 1,7

На рисунках 2.4.1 и 2.4.2 видно развитие экономической модели в том случае, когда денежные средства, являющиеся источником формирования платежеспособного спроса предпринимателей ($\sigma < 0$), забираются государством. В данной ситуации наблюдается постепенное снижение уровня потребления и, как следствие, капитализации, затем сменяющееся очередным подъемом экономическое развитие происходит циклическим образом.

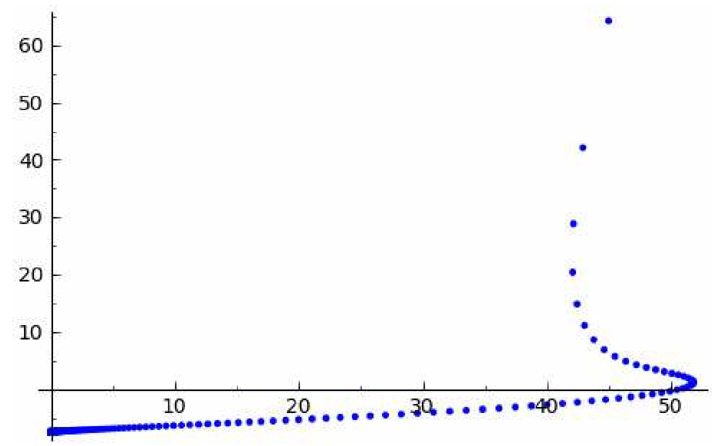


Рис. 2.4.3. График траектории движения системы при δ = 0,65; σ = 0,05; n = 300; T = 0,005; $x0$ = 50; $y0$ = 106; $z0$ = 25; b = 0,4; a = 3,7; d = 1,7

По достижении $\sigma \geq 0$ наблюдается разрушение циклического развития, что показано на рис. 2.4.3 и 2.4.4. Экономическое развитие происходит таким образом, что с течением времени отмечается падение капитала и платежеспособного спроса государства. При этом отмечается снижение спроса предпринимателей, влекущее уменьшение капитализации и затем кризис и разрушение экономики.

На рисунке 2.4.5 показана ситуация, когда $\sigma < 0$ и $\delta < 0$. При этом наблюдается интересный вариант развития, который характеризуется колебаниями уровней капитала и платежеспособного спроса, однако как следствие такой неустойчивости наступает постепенное снижение капитализации и потребления. Платежеспособный спрос также уменьшается, и экономическая система приходит к некоторому стационарному состоянию упадка с низкими значениями капитала и платежеспособного спроса.

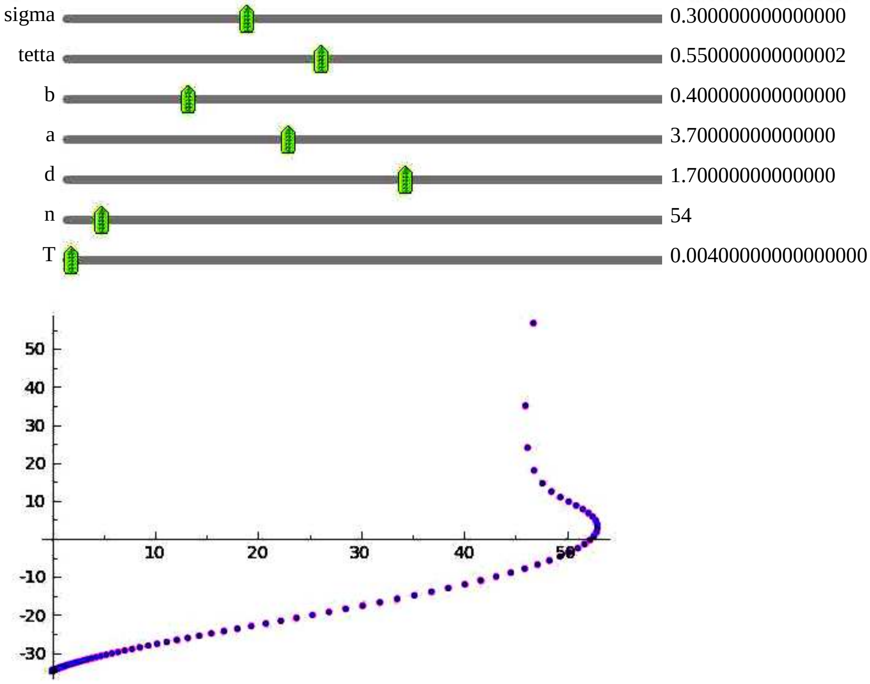


Рис. 2.4.4. График траектории движения системы при δ = 0,3; σ = 0,55; n = 54; T = 0,004; x0 = 50; y0 = 106; z0 = 25; b = 0,4; a = 3,7; d = 1,7

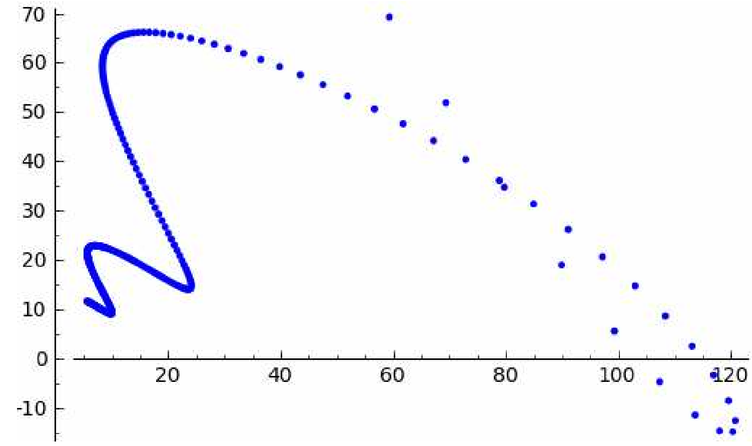


Рис. 2.4.5. График траектории движения системы при δ = –0,5; σ = –1; n = 300; T = 0,005; x0 = 300; y0 = 86; z0 = 25; b = 0,4; a = 3,7; d = 1,7

Полученные результаты показывают высокую чувствительность модели к изменению параметров σ и δ и несколько расходятся с приведенными, например, в [65]. В частности, при положительном платежеспособном спросе предпринимателей и государства циклическое развитие экономической модели наблюдается далеко не всегда.

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим запись объекта исследования с управлением в общем виде в форме векторного дифференциального уравнения:

$$\frac{dX}{dt} = g(X) + U; \quad X(t_0) = X_0, \qquad (3.1.1)$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $U = (u_1, u_2, ..., u_m)$ – векторы состояния и управления соответственно.

Управление может осуществляться подбором параметров системы. Предположим, что управление выбирается так, что траектория развития системы (3.1.1) должна стремиться к заданному состоянию оптимальным, наибыстрейшим образом (рис. 3.1.1).

Итак, рассматриваемая задача заключается в минимизации времени перевода объекта, описываемого (3.1.1), из исходного состояния в заданное при соответствующих управлениях U из множества допустимых управлений $\{U_l\}$, $l = 1, ..., M$, т.е. в минимизации интеграла:

$$\int_0^T dt \to \min \quad \text{при } U \in \{U_l\}, \ l = 1, ..., M. \qquad (3.1.2)$$

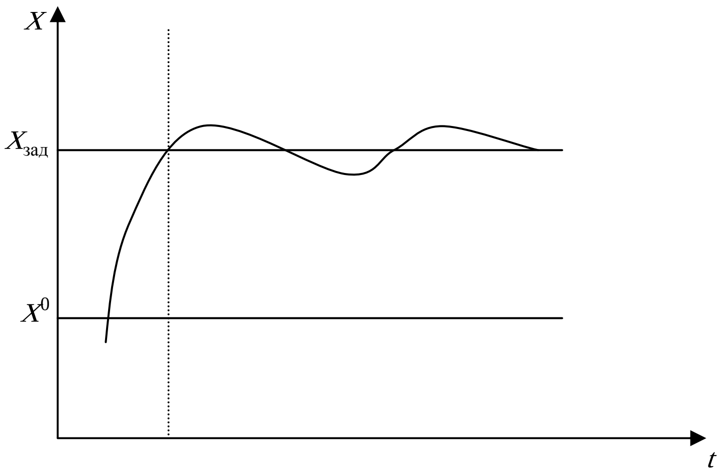


Рис. 3.1.1. Схема выхода траектории развития системы на заданное состояние

В общем виде математическая формулировка поставленной задачи может быть представлена так:

$$\frac{dX}{dt} = g(X, U);$$

$$X(t_0) = X_0;$$

$$\int_0^T dt \to \min \quad \text{при } U \in \{U_l\}, \ l = 1, ..., M. \qquad (3.1.3)$$

Для решения поставленной задачи далее приводится обзор оптимизационных методов, который дает возможность определить некоторую ориентировочную структуру методов и задач оптимизации.

3.2. ОБЗОР ОПТИМИЗАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Методы оптимизации классифицируют в соответствии с задачами оптимизации:

– локальные методы – предназначены для поиска локального экстремума целевой функции;

– глобальные методы – предназначены для определения глобального экстремума многоэкстремальных целевых функций. При глобальном поиске основной задачей является выявление тенденций глобального поведения целевой функции.

По размерности допустимого множества методы оптимизации делятся на методы одномерной оптимизации и методы многомерной оптимизации.

По виду целевой функции и допустимого множества задачи оптимизации и методы их решения можно разделить на следующие:

– задачи оптимизации, в которых целевая функция $f(\overline{X})$ и ограничения $g_i(\overline{X}),\ i=1, ..., m$ являются линейными функциями, разрешаются так называемыми методами линейного программирования;

– задачи оптимизации, в которых целевая функция $f(\overline{X})$ и ограничения $g_i(\overline{X}),\ i=1, ..., m$ являются нелинейными функциями и множество допустимых значений x является подмножеством конечномерного векторного пространства. В этом случае применяются методы нелинейного программирования.

Помимо подразделения на линейные и нелинейные, оптимизационные методы делятся на:

– численные методы;
– графические методы.

Задачи линейного программирования были первыми подробно изученными задачами поиска экстремума функций при наличии ограничений типа неравенств. В 1820 г. Ж. Фурье и затем в 1947 г. Дж. Данциг разработали симплекс-метод, который стал базовым при решении задач линейного программирования. В нем предлагается осуществление направленного перебора смежных вершин в направлении возрастания целевой функции.

Одним из первых исследователей задачи линейного программирования в общей форме был Джон фон Нейман, доказавший основную теорему о матричных играх и изучивший экономическую модель, носящую его имя. Советский академик Л.В. Канторович сформулировал ряд задач линейного программирования и предложил для их решения метод разрешающих множителей, незначительно отличающийся от симплекс-метода.

В 1931 г. венгерский математик Б. Эгервари рассмотрел математическую постановку и решил задачу линейного программирования, имеющую название "проблема выбора", метод решения получил название "венгерского метода".

Канторовичем Л.В. совместно с Гавуриным М.К. в 1949 г. был разработан метод потенциалов, который применяется при решении транспортных задач. В последующих работах Л.В. Канторовича, В.С. Немчинова, В.В. Новожилова, А.Л. Лурье, А. Брудно, А.Г. Аганбегяна, Д.Б. Юдина, Е.Г. Гольштейна и других получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного и нелинейного программирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем.

Методам линейного программирования посвящено много работ зарубежных ученых. В 1941 г. Ф.Л. Хитчкок поставил транспортную задачу. Первыми в этом направлении также были прикладные исследования С. Картайно и С. Дрейфуса, работа Р. Беллмана [13], в которых оптимизационные подходы освещаются на основе теории динамического программирования. Существенным преимуществом решения с помощью метода динамического программирования является то, что в качестве решения получается оптимизирующая политика, причем данные этой оптимальной политики улучшаются в процессе решения для каждого нового шага или этапа. Дальнейшее развитие и изложение данного подхода дано в работах Р. Беллмана и С. Дрейфуса [13], Р. Беллмана [12], Р. Беллмана и Р. Калабы [14], Р. Калабы, в которых делается акцент при рассмотрении данной задачи в самых разнообразных областях применения.

Некоторые похожие и близкие задачи были рассмотрены Р. Ховардом, Х. Кашнером и Дж. Бреаквэллом, М. Полаком и Н. Вайбенсоном.

Оптимизационные алгоритмы на основе транспортных задач были предложены Флойдом, Дейкстрой. Эти алгоритмы базируются на графовой структуре и, соответственно, теории графов.

Проблемам оптимальности были посвящены работы Форда и Фалкерсона, М. Поллака, где решение рассматривается на основе линейного программирования. Некоторые методы, основанные на графовой теории, затронуты в работах Хопкрофта и Карпа, которые позволяют использовать более эффективные алгоритмы, ограничить число фаз в методе Диница, таким образом делая его более оптимальным.

Одновременно с развитием линейного программирования большое внимание уделялось задачам нелинейного программирования, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейны.

В общем виде задача нелинейного программирования состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{3.2.1}$$

при условии

$$\left.\begin{array}{l} g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i,\ i=\overline{1, k}; \\ g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i,\ i=\overline{k+1, m}, \end{array}\right\} \tag{3.2.2}$$

где $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – некоторые известные функции n переменных; b_i – заданные числа.

Класс задач нелинейного программирования шире класса задач линейного программирования. Даже если область допустимых решений выпуклая, то в ряде задач целевая функция может иметь несколько локальных экстремумов. С помощью же большинства вычислительных методов можно найти точку локального экстремума, но нельзя установить, является она точкой глобального экстремума или нет. Если задача содержит нелинейные ограничения, то область допустимых решений не является выпуклой и решение задачи сильно затрудняется.

В случае, когда задача нелинейного программирования (3.2.1; 3.2.2) содержит только ограничения в виде равенств, отсутствуют условия неотрицательности переменных, и $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются функциями, непрерывными вместе со своими частными производными можно воспользоваться классическим методом отыскания условного экстремума функций нескольких переменных, например, методом множителей Лагранжа. Для этого вводится набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, называемых множителями Лагранжа, и составляется функция Лагранжа:

$$F(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m) = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) \right] \quad . \qquad (3.2.3)$$

После этого составляется и решается следующая система из $n + m$ уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1,\ n}\,; \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = b_i - g_i(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = 0, \quad i = \overline{1,\ m} \end{cases} \qquad (3.2.4)$$

с неизвестными $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_m$.

Решив систему уравнений (3.2.4), получают все точки, в которых функция (3.2.1) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума. Метод множителей Лагранжа имеет ограниченное применение, так как система (3.2.4), как правило, имеет несколько решений.

В 1951 г. была опубликована работа Куна и Таккера, в которой были приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для решения задач нелинейного программирования: если $\hat{x} \in \arg\min f$ при наложенных ограничениях – решение задачи, то найдется ненулевой вектор множителей Лагранжа $\lambda \in \Re^m$, такой, что для функции Лагранжа $L(x) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ выполняются условия:

- стационарности – $\min\limits_{x} L(x) = L(\hat{x})$;
- дополняющей нежесткости – $\lambda_i g_i(\hat{x}) = 0,\ i = 1,\ ...,\ m$;
- неотрицательности – $\lambda_i \geq 0,\ i = 1,\ ...,\ m$.

Перечисленные необходимые условия минимума функции в общем случае не являются достаточными. Существует несколько вариантов дополнительных условий, которые делают их достаточными. Работа Куна–Таккера послужила основой для последующих исследований в этой области.

Метод множителей Лагранжа и условия Каруша–Куна–Таккера относят к классическим аналитическим методам.

В работах Денниса (J.B. Dennis), Розена (J.B. Rosen) и Зонтендейка (G. Zontendijk) разработаны градиентные методы решения задач нелинейного программирования.

К оптимизационной теории относятся методы математического программирования, связанные с решением задач с целью выбора оптимальной программы действий. Математическое программирование используется при решении оптимизационных задач исследования операций. Однако в общем случае способ нахождения экстремума полностью определяется классом задачи.

3.3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Траектория развития системы может развиваться определенным образом в зависимости от выбранного вектора управляющих воздействий (рис. 3.3.1).

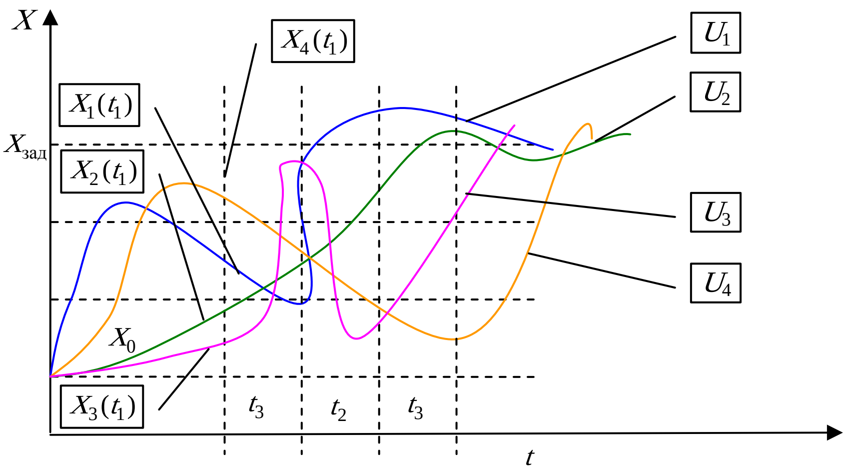


Рис. 3.3.1. Схема развития системы с течением времени при различных векторах управления

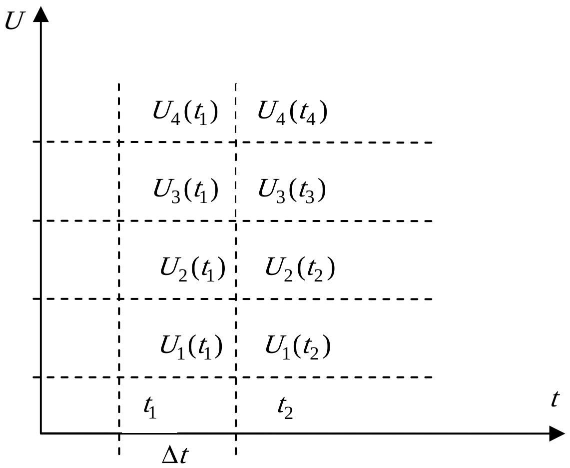


Рис. 3.3.2. График возможных управляющих воздействий в определенные моменты времени

Рассмотрим процесс развития системы с точки зрения предельного перехода между непрерывным и дискретным многошаговым процессом развития. Разобьем временной отрезок на n равных временных промежутков Δt. В определенный момент времени может быть выбрано некоторое управление (рис. 3.3.2).

Рассмотрим переход системы из i-го состояния в j-е для упрощения обозначений в скалярном варианте. В векторно-матричном случае аналогичные результаты будет нетрудно получить. Примем в качестве описания процесса развития объекта выражение (3.1.1). Процесс трансформации i-го состояния в j-е может быть представлен как:

$$j - i = \Delta i = (ai + u)\Delta t, \qquad (3.3.1)$$

где $g(i) = ai$, a – некоторый коэффициент, Δt – бесконечно малая величина.

Из (3.3.1) непосредственно следует, что

$$j = i + (ai + u)\Delta t. \qquad (3.3.2)$$

Таким образом, если система в момент времени T находится в состоянии i, то через промежуток Δt она может перейти в какое-то состояние j в зависимости от приложенного управления u, что условно показано на рис. 3.3.3. Состояние j может быть определено по формуле:

$$j_l = i + (ai + u_l)\Delta t, \quad l = 1, ..., M. \qquad (3.3.3)$$

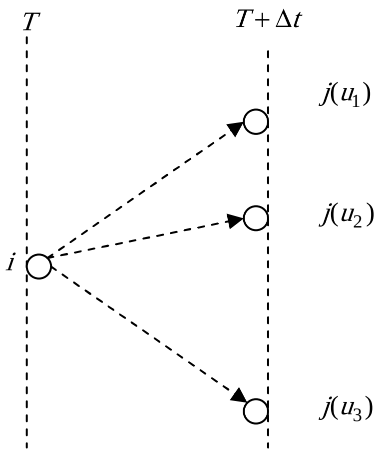


Рис. 3.3.3. Схема перехода системы из i-го состояния в j-е за временной промежуток Δt в зависимости от выбранного управляющего воздействия u

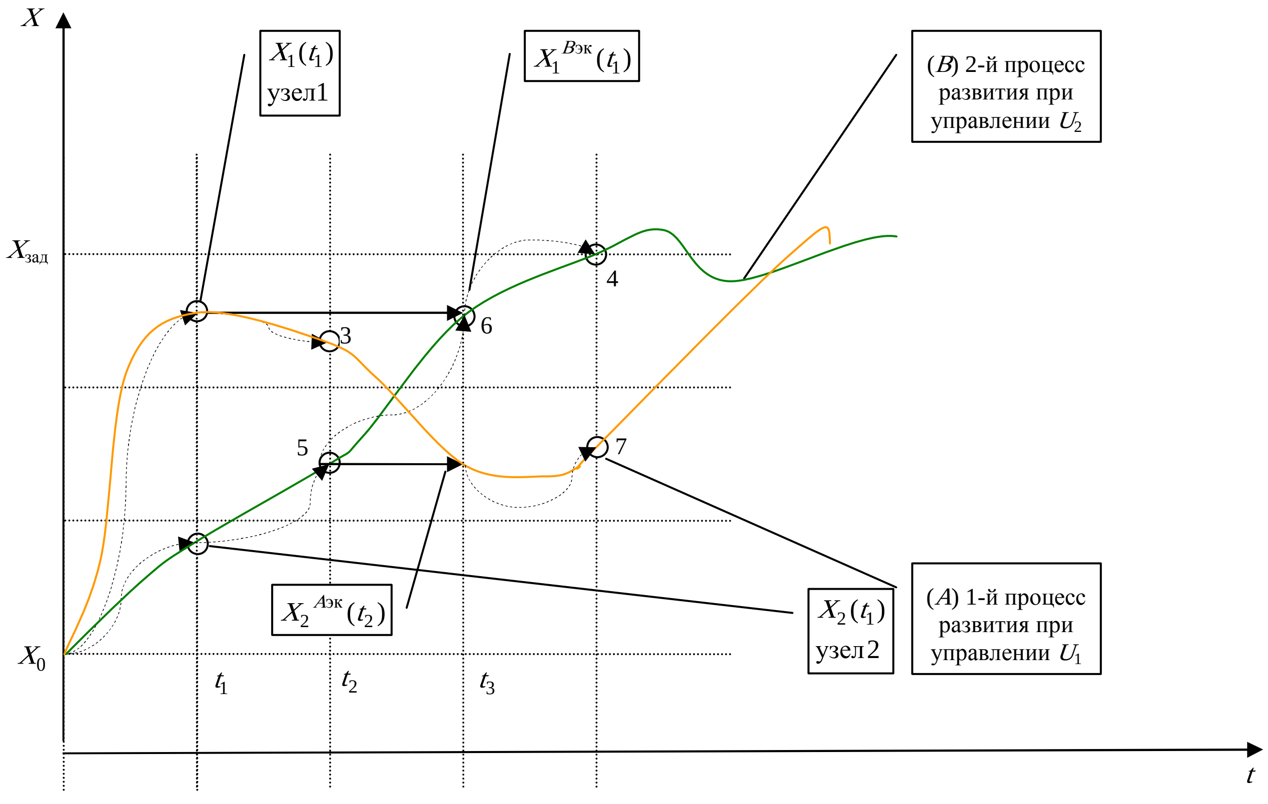


Рис. 3.3.4. Графическое изображение алгоритма управления развитием системы

Далее рассмотрим дискретный процесс управления развитием системы на примере двух возможных процессов, изображенных на рис. 3.3.4. Первоначально система находится в исходном состоянии X_0. В момент времени t_1 система в зависимости от выбранного управления U_1 или U_2 может оказаться соответственно в состоянии 1 (узел 1) или 2 (узел 2), что условно может быть также отображено граф-схемой состояний (рис. 3.3.5). Если объект окажется в состоянии 1, то при управлении выборе управления U_1 в следующий момент времени t_2 система окажется в состоянии 3 (узел 3). Если же к системе, находящейся в состоянии $X_1(t_1)$ (узел 1), приложить управление U_2, то система в следующий момент времени $t_1+\Delta t$ в соответствии с траекторией развития (*В*) (рис. 3.3.4), из состояния $X_1^{Вэк}(t_1)$ по траектории (*В*) эквивалентного состоянию $X_1(t_1)$ по траектории (*А*), перейдет в некоторое состояние 4 (узел 4). Отметим, что состояние системы в узле 4 отвечает заданному.

В случае, когда объект из исходного состояния X_0 окажется в состоянии 2 в момент времени t_1 при выборе управления U_2, дальнейшее развитие возможно следующим образом. При выборе управления U_2 объект в следующий момент дискретизации $t_1+\Delta t$ будет в состоянии 5 (узел 5). Так как состояния $X_2^{Аэк}(t_1)$ эквивалентного по траектории (*А*) состоянию $X_2(t_1)$ по траектории (*В*) в данном случае по мере дальнейшего развития

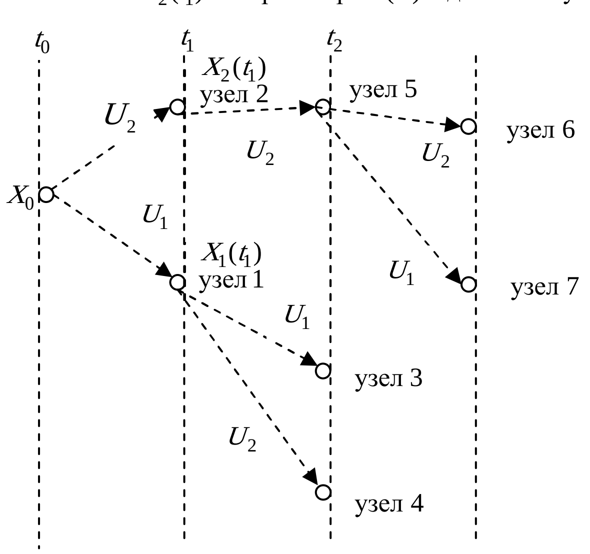


Рис. 3.3.5. Граф-схема возможных состояний развития объекта и их взаимозависимостей

процесса 2 не наблюдается, то другого альтернативного U_2 управления из узла 2 нет. Вследствие чего на граф-схеме (рис. 3.3.5) из узла 2 следует только одна возможная связь к узлу 5 при управлении U_2. Однако вот уже из узла 5 возможно попасть в следующий момент дискретизации либо в состояние 6 (узел 6) при управлении U_2, либо в состояние 7 (узел 7) при движении под управлением U_1 из эквивалентного состояния $X_2^{A\text{эк}}(t_2)$ по траектории (*B*).

Рис. 3.3.6. Блок-схема алгоритма дискретизации возможных состояний объекта

Таким образом, можно получить полную структуру графа вариантов развития системы.

Блок-схема алгоритма дискретизации состояний объекта может быть представлена следующим образом (рис. 3.3.6).

Критерий остановки определяется условиями конкретной задачи, но явным условием является достижение $X_{\text{зад}}$ заданного состояния системы по всем имеющимся траекториям движения.

3.4. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ

Предлагаемый алгоритм дальнейшей оптимизации основан на методе динамического программирования и принципе оптимальности. Мы предполагаем, что имеется некий граф (рис. 3.3.5) возможных состояний i, $j = i + (ai + y)\Delta t$ системы, которым поставлены в соответствие определенные обозначения этих состояний в качестве узлов. Этот граф сформирован в результате использования алгоритма дискретизации. Мы желаем определить путь перехода в графе состояний, который соединяет два заданных узла (исходный и заданный) и полное время прохождения по которому не больше, чем для любого другого пути, соединяющего заданные узлы.

Предположим, что N – желаемое состояние, в которое необходимо перевести систему, f_i – время перехода системы из некоторого состояния i в желаемое состояние N наискорейшим образом. Очевидно, что $f_N = 0$.

Исходя из принципа оптимальности [12 – 14], получим следующую основную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &f_i = \min_{y_l}[t_{i,(i+(ai+y_l)\Delta t)} + f_{i+(ai+y_l)\Delta t}] \\ &f_N = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.1)$$

где $i, j = 1, 2, ..., N$, $l = 1, ..., M$.

В качестве исходного приближения f_i^0 выберем

$$f_i^0 = t_{i,(i+(ai+y_S)\Delta t)}, \quad i = 1, 2, ..., N, \qquad (3.4.2)$$

где y_S – управление, соответствующее желаемому состоянию N. В случае отсутствия управления y_S, соответствующего переходу в N-е состояние, $f_i^0 = t_{i,\,(i+(ai+y_S)\,\Delta t)}$ принимается равным ∞.

Применение схемы (3.4.1) численно может быть осуществлено итерационным методом с начальным приближением (3.4.2):

$$\left.\begin{aligned} &f_i^{(k+1)\Delta t} = \min_{y_l}[t_{i,\,(i+(ai+y_l)\,\Delta t)} + f^{k\Delta t}{}_{i+(ai+y_l)\,\Delta t}] \\ &f^{(k+1)\Delta t}{}_N = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.3)$$

3.5. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СХЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве примера использования описанного выше оптимизационного метода рассмотрим два варианта возможного развития экономической системы, описанной в § 2.3. Возможные траектории движения показаны на рис. 3.5.1.

Исходное состояние X_0 и заданное $X_{зад}$ показаны на рис. 3.5.2.

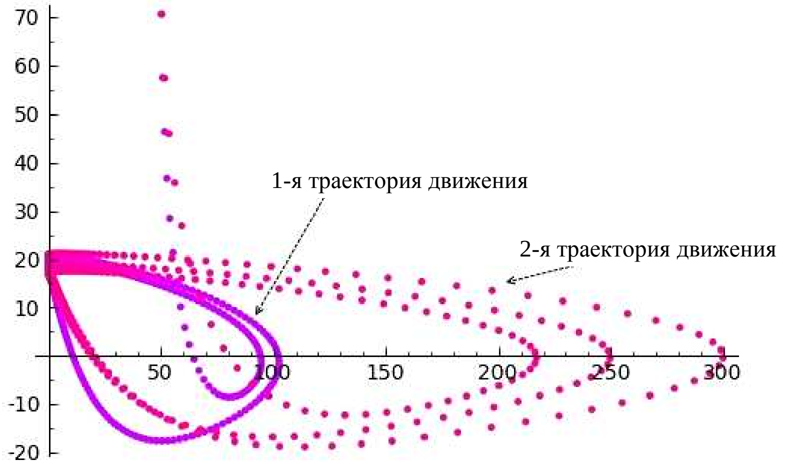


Рис. 3.5.1. Возможные траектории развития экономической системы

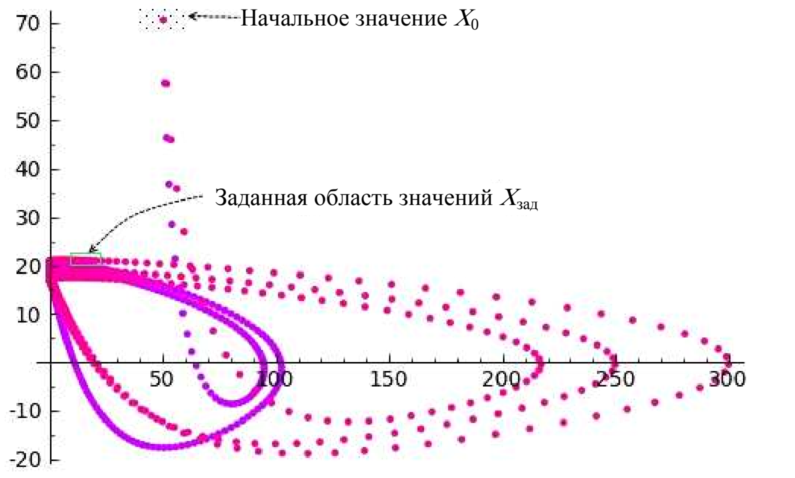


Рис. 3.5.2. Исходное X_0 и заданное $X_{зад}$ состояния системы

В следующий момент дискретизации система может оказаться в узлах 1 или 2, что показано на рис. 3.5.3.

Возможное дальнейшее будущее развитие системы по траекториям движения при соответствующих управлениях показано на рис. 3.5.4.

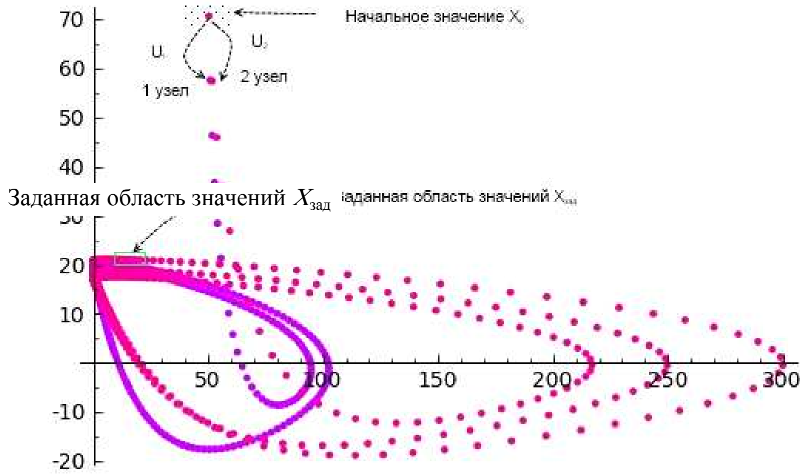


Рис. 3.5.3. Возможное состояние системы в следующий момент дискретизации $t_0 + \Delta t$

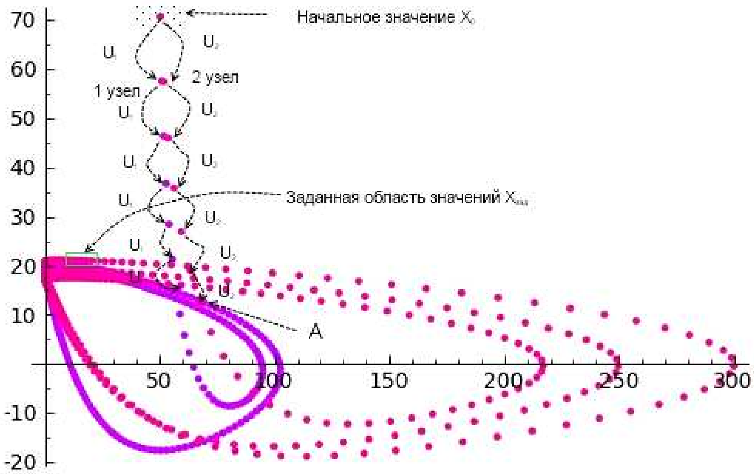


Рис. 3.5.4. Развитие системы по траекториям до состояния *A*

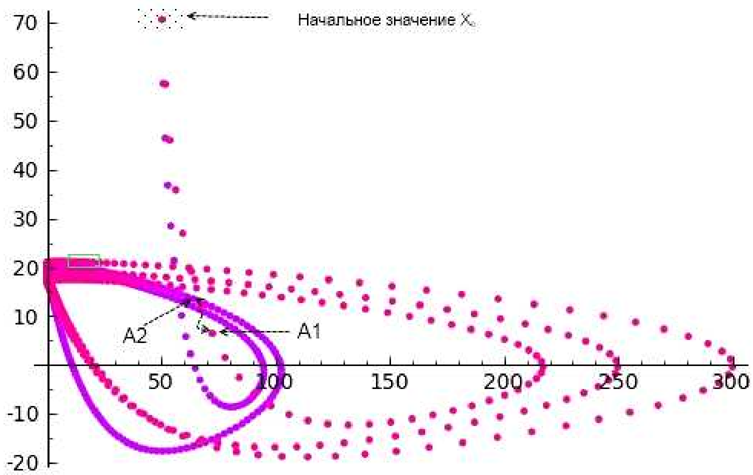


Рис. 3.5.5. Возможные варианты развития системы из состояния *A*

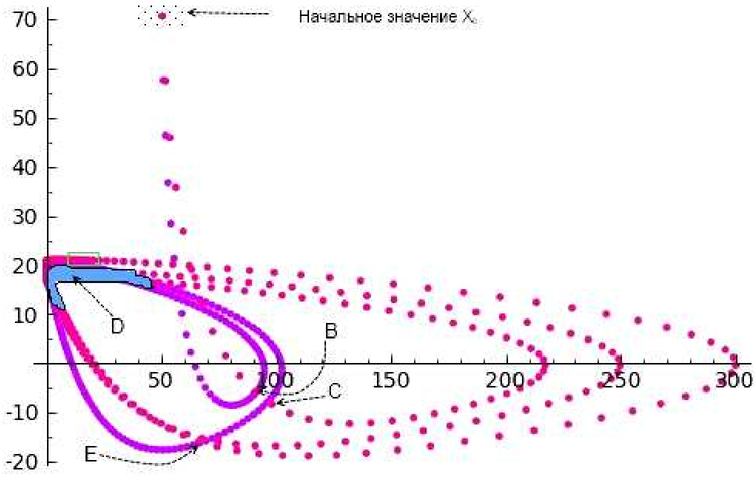


Рис. 3.5.6. Дополнительные к точке *A* вариативные состояния развития при движении по 2-й траектории

В точке A при развитии системы по 2-й траектории движения существуют следующие варианты развития. При выборе управления U_2 система в следующий момент дискретизации перейдет в состояние $A1$ по 1-й траектории, а при управлении U_1 – в состояние $A2$ по 2-й траектории развития (рис. 3.5.5). При этом состояние $A2$ достигается из состояния $A_{экв}$ по 1-й траектории эквивалентного состоянию A по 2-й траектории.

При дальнейшем движении по 2-й траектории вариативными узлами развития также являются точки B, C и E, а также перекрываемые значения траекторий в области D (рис. 3.5.6).

Из всех возможных состояний развития по всем траекториям движения системы в соответствии с алгоритмом дискретизации составляется граф возможных состояний развития системы, который используется затем оптимизационным алгоритмом для определения наискорейшего пути перевода системы из начального состояния в заданное при допустимых управлениях.

4. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

4.1. ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД С ПЕРЕМЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. АЛГОРИТМ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Постановка задачи оптимизации остается прежней и совпадает с описанной в § 3.1, а математическая формулировка также может быть представлена (3.1.3). По сравнению с предыдущим вариантом оптимизации изменения коснутся алгоритма дискретизации.

Рассмотрим ситуацию, когда время перехода между i-м и j-м состояниями системы может быть определено как некоторое t_{ij} в зависимости от самих состояний i, j системы и выбранного управляющего воздействия, сами значения состояний определены (рис. 4.1.1).

Из формулы (3.3.1) время t_{ij} может быть определено как:

$$t_{ij} = \frac{\Delta_{j-i}}{ai + y_l}, \tag{4.1.1}$$

где $\Delta_{j-i} = j - i$ есть разность значений состояний j и i системы; y_l – l-е управление, $l = 1, \ldots, M$.

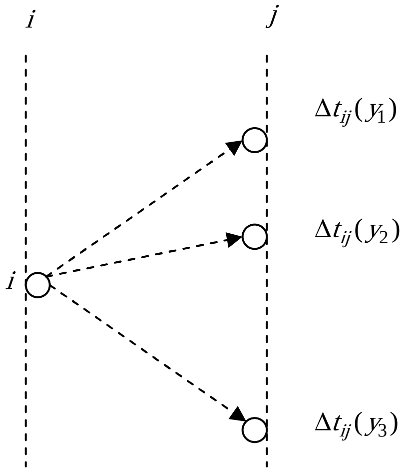


Рис. 4.1.1. Переход системы из *i*-го состояния в *j*-е за временной промежуток Δt_{ij} в зависимости от выбранного управляющего воздействия *y*

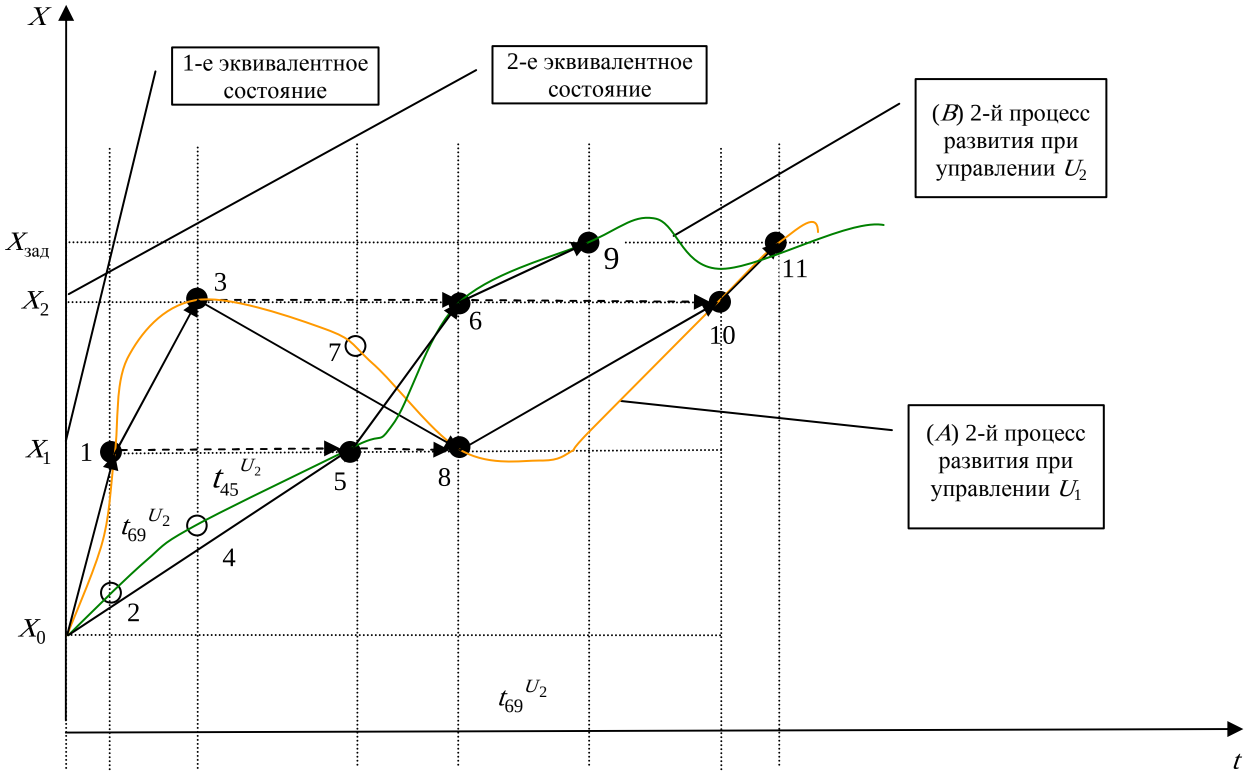


Рис. 4.1.2. Графическое изображение алгоритма дискретизации с переменным временем перехода между состояниями:

● – вариативные точки; ▶ – эквивалентное состояние на другой траектории; → – переход по одной траектории

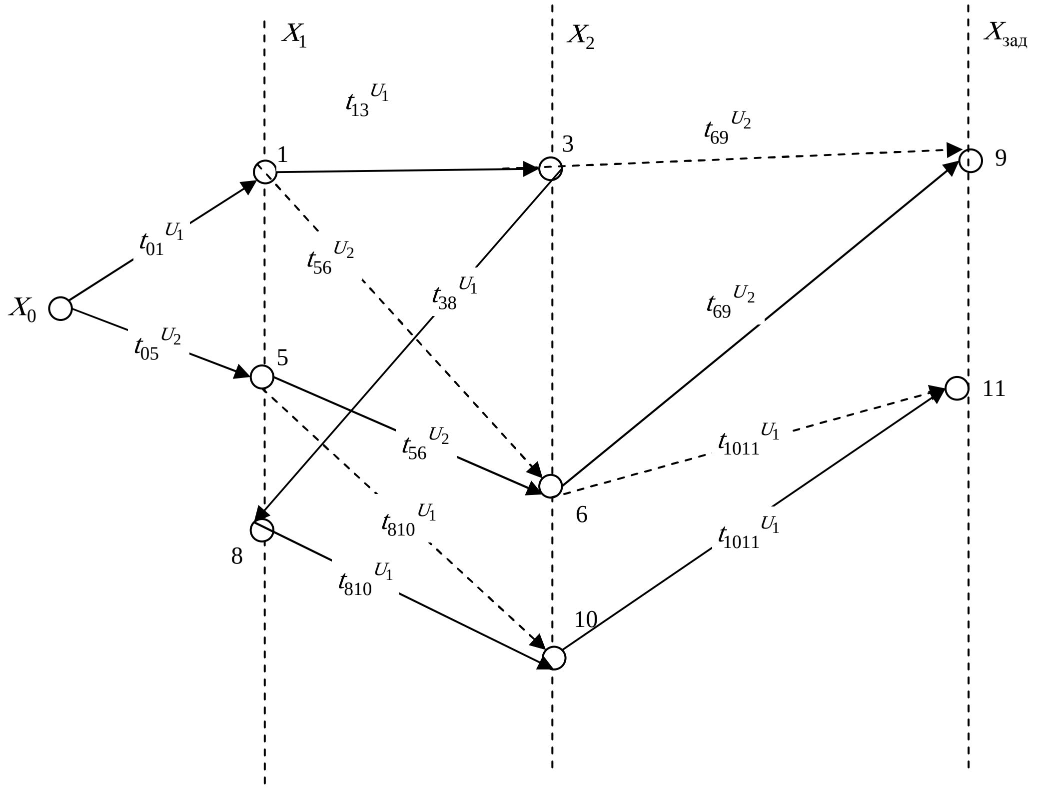


Рис. 4.1.3. Граф-схема возможных состояний развития объекта и их взаимозависимостей:
– эквивалентное состояние на другой траектории; – переход по одной траектории

Дискретный процесс развития в данном случае отличается от изображенного на рис. 3.3.4 тем, что временные промежутки рассматриваются не в качестве некоторой малой величины дискретизации Δ, а зависят от состояний перехода *i*, *j* системы и выбранного управляющего воздействия (рис. 4.1.2).

При движении по траектории *A* система перейдет в узел 1 за время $t_{01}^{U_1}$. За это же время при управлении U_2 и соответственно движении по траектории *B* система окажется в узле 2 и не достигнет такого же состояния, как в узле 1. Чтобы достичь состояния, эквивалентного состоянию в

Рис. 4.1.4. Блок-схема алгоритма дискретизации состояний объекта с переменным временем перехода между состояниями

узле 1, при движении по траектории B необходимо попасть в узел 5. При этом необходимое время перехода из состояния X_0 в X_1 при движении по траектории B, как видно из рисунка 4.1.2, будет $t_{01}^{U_2} + t_{24}^{U_2} + t_{45}^{U_2}$.

Из состояния 1 возможен непосредственный переход по траектории A в узел 3 за время $t_{13}^{U_1}$ или через эквивалентное первому пятое состояние по траектории B в состояние 6 за время $t_{56}^{U_2}$.

Таким образом, может быть определена схема возможных состояний развития объекта и их взаимосвязей в виде графа (рис. 4.1.3). При использовании данного алгоритма дискретизации граф строится из вариативных точек, т.е. точек, в которых возможен выбор управления для определения соответствующего развития. На рисунке 4.1.2 такие точки изображены закрашенными, прямые переходы между состояниями показаны сплошными стрелками, а переходы через эквивалентное состояние по другой траектории – пунктирными.

Блок-схема алгоритма дискретизации с переменным временем представлена на рис. 4.1.4.

4.2. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

Применяя, как и выше, принцип оптимальности, получим следующую оптимизирующую стратегию:

$$f_i = \min_{y_l} [t_{ij} + f_{i+(ai+y_l)t_{ij}}] \qquad (4.2.1)$$

или

$$f_i = \min_{y_l} \left[\frac{\Delta_{j-i}}{ai+y_l} + f_{i+(ai+y_l)\frac{\Delta_{j-i}}{ai+y_l}} \right]. \qquad (4.2.2)$$

Общая основная система уравнений в данном случае:

$$
\left.\begin{aligned}
f_i &= \min_{y_l}\left[\frac{\Delta_{j-i}}{ai+y_l}+f_{i+(ai+y_l)\frac{\Delta_{j-i}}{ai+y_l}}\right]\\
f_N &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.3}
$$

где $i, j = 1, 2, ..., N$; $l = 1, ..., M$.

Начальное приближение f_i^0 в данном случае:

$$
f_i^0 = t_{iN} = \frac{\Delta_{N-i}}{ai+y_S}, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{4.2.4}
$$

где y_S – управление, соответствующее желаемому состоянию N. В случае отсутствия управления y_S, соответствующего переходу в N-е состояние, $f_i^0 = t_{iN}$ принимается равным ∞.

Аналогично, как и в случае схемы (3.4.1), вычисления могут осуществляться при помощи последовательных приближений:

$$
\left.\begin{aligned}
f_i^{k+1} &= \min_{i\neq j}\left[\frac{\Delta_{j-i}}{ai+y_{ij}}+f^k_{i+(ai+y_{ij})\frac{\Delta_{j-i}}{ai+y_{ij}}}\right]\\
f_N &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.2.5}
$$

4.3. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ

Рассмотрим, как и ранее, два варианта возможного развития экономической системы, описанной в § 2.4. Возможные траектории движения показаны на рис. 4.3.1.

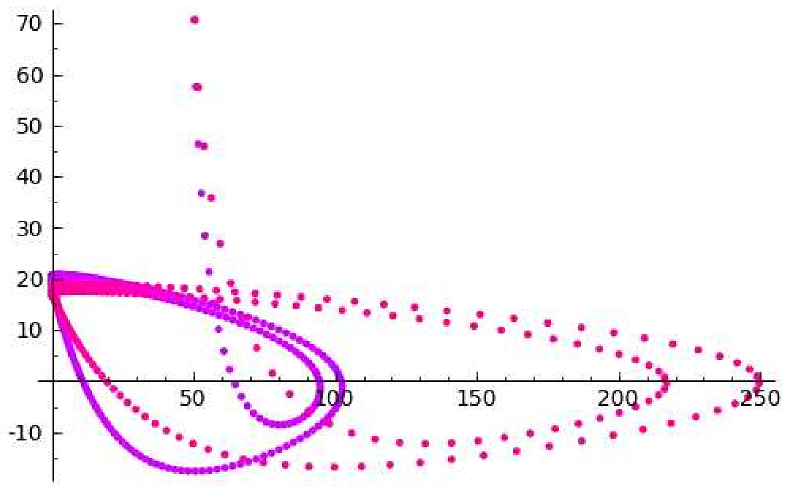


Рис. 4.3.1. Возможные траектории развития экономической системы

В соответствии с алгоритмом дискретизации, задавшись определенной величиной ε окрестности, мы определяем вариационные точки, т.е. точки, в которых значения системы при движении по различным траекториям отличаются на величину, попадающую в заданную ε окрестность (рис. 4.3.2).

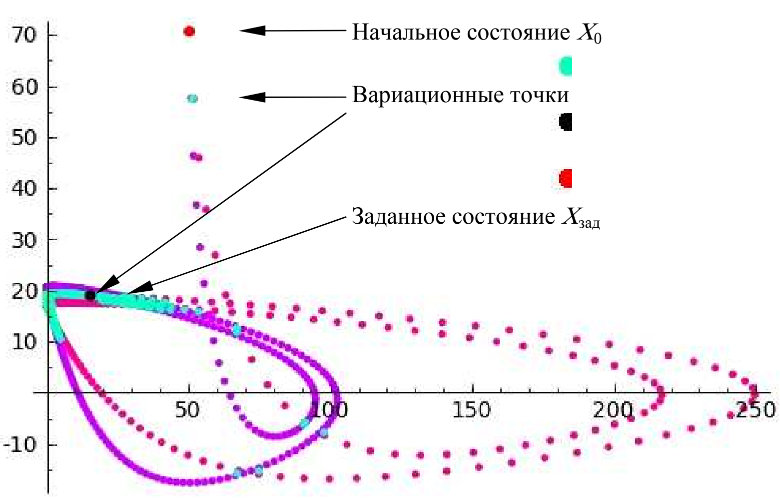


Рис. 4.3.2. Определение вариационных точек по траекториям развития

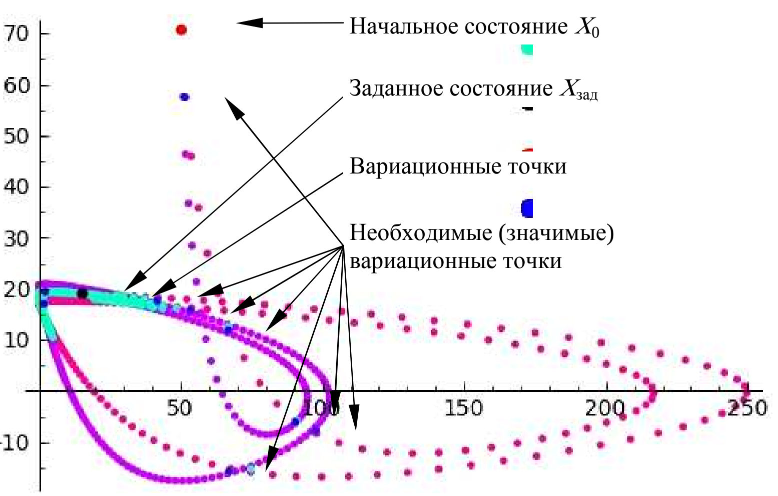


Рис. 4.3.3. Определение необходимых (значимых) вариационных точек по траекториям развития

Выделение множества необходимых (значимых) вариативных точек $P_v^{need} \subset P_v$ из всего множества вариативных точек P_v показано на рис. 4.3.3.

На этом этапе у нас имеется множество P_v^{need} необходимых вариативных точек, и в соответствии со вторым пунктом блок-схемы алгоритма дискретизации с переменным временем для каждого состояния $p_j \in P_v^{need}$ определено время перехода системы из начального состояния по каждой траектории движения. Эти значения времени представлены на рис. 4.3.4. для каждого вариационного состояния в формате (время по одной траектории развития до этого состояния, время по другой траектории развития до этого состояния).

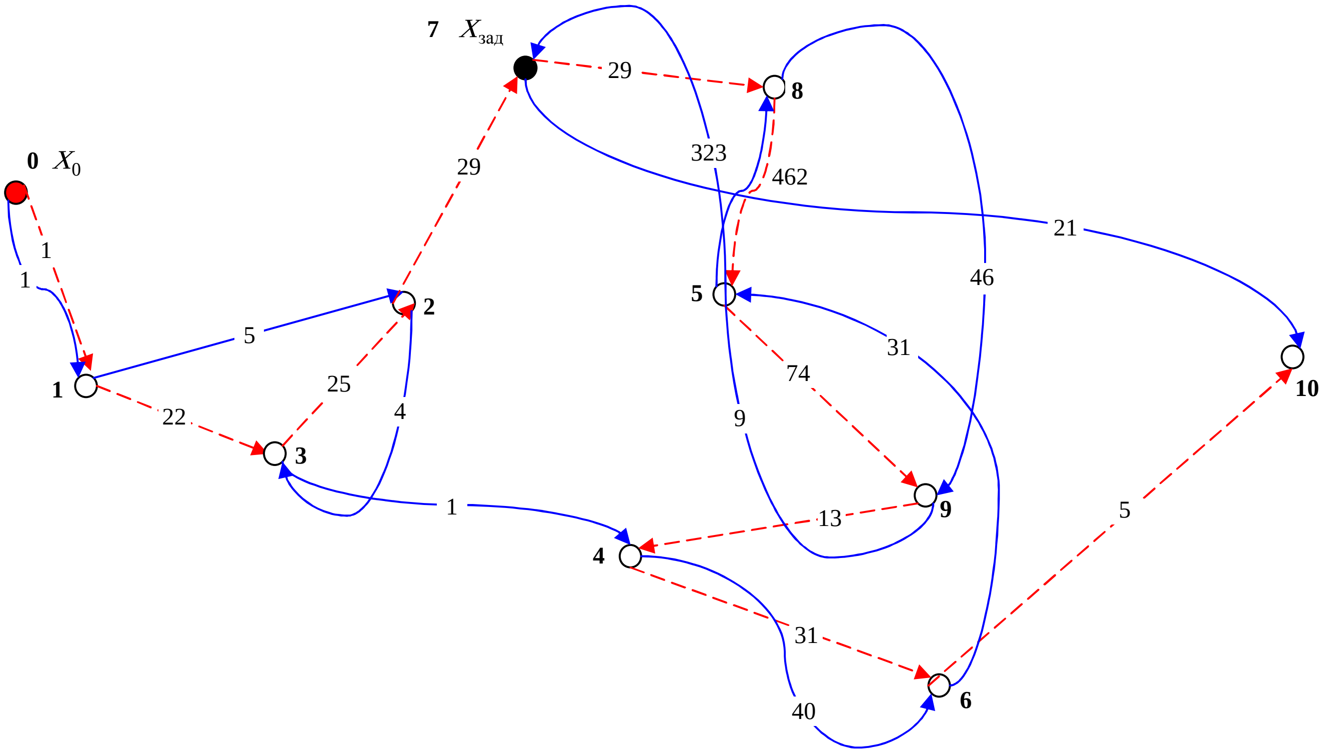
Следующим шагом является формирование множества Γ и соответствующего графа возможных состояний перехода системы для каждого вариативного состояния $p_j \in P_v^{need}$ по допустимым траекториям движения. Этот граф представлен на рис. 4.3.5. Начальным состоянием системы является узел 0, заданным состоянием – узел 7. При движении по 1-й траектории возможного развития система перейдет из исходного состояния в заданное за время $t_{07}^{U_1} = 77$, при движении по 2-й – за время $t_{07}^{U_2} = 460$.

Завершающим действием оптимизации динамики процесса развития является выполнение алгоритма оптимизации с переменным временем, описанного в § 4.2. Результатом его выполнения является нахождение наискорейшего пути перевода системы из исходного в заданное состояние. Применительно к графу, изображенному на рис. 4.3.5, это пути 0(U_1)–1(U_1)–2(U_2)–7 с общим временем перехода из состояния 0 в состояние 7 $t_{07} = t_{01}^{U_1} + t_{12}^{U_1} + t_{27}^{U_2} = 35$ и 0(U_2)–1(U_1)–2(U_2)–7 с общим временем $t_{07} = t_{01}^{U_2} + t_{12}^{U_1} + t_{27}^{U_2} = 35$.

[[1, 1], [48, 6], [23, 10], [655, 11], [686, 51], [568, 82], [642, 405], [691, 451], [106, 481]]

Рис. 4.3.4. Время достижения вариационных точек по различным траекториям развития

Рис. 4.3.5. Граф вариационных состояний развития объекта и их взаимозависимостей



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена проблематика моделирования и оптимизации процессов и явлений, протекающих в экономике, одним из которых, безусловно, важнейшим в определении экономического развития, является процесс управления размещением капитала. Это один из факторов производства, который подвергается эффективному управлению и влияя на который возможно оказывать значительное регуляторное воздействие на развитие экономической ситуации. Использование адекватных моделей есть ключ к успеху экономического прогнозирования. Однако проделанный обзор исторического развития области экономического моделирования показывает, что хотя с течением времени математические модели и становятся более адекватными реально протекающим процессам, но вместе с этим они становятся все более сложными, нелинейными, открытыми и неравновесными. Для работы с ними необходимы новые современные высокоточные математические методы, один из которых предложен, разработан и описан во второй главе монографии.

Данный метод предполагает, что поведение исследуемого экономического объекта описывается системой дифференциальных уравнений с полилинейной правой частью. Решение находится интегрированием в символьном виде методом последовательных приближений, что позволяет повысить точность и эффективность получаемых в исследовании результатов.

Третья глава посвящена безусловно важной проблеме своевременного принятия оптимальных решений по управлению экономическим развитием, по приведению экономической системы в заданное требуемое состояние наискорейшим образом. В работе показана возможность осуществления такой оптимизации динамики развития экономических процессов. Предлагаемый метод описывает оптимизацию процесса развития на основе анализа возможного движения по моделируемым траекториям при различном управляющем воздействии на параметры экономико-математической модели. Метод основан на дискретизирующем алгоритме, в результате исполнения которого выполняется построение графа возможных состояний развития системы по траекториям движения. На следующем этапе на графе применяется алгоритм нахождения оптимальной траектории между исходным состоянием и заданным при соответствующих управлениях.

Таким образом, в монографии приведен материал, который будет полезен научным работникам, специализирующимся в области моделирования и оптимизации управления экономических систем; специалистам, занимающимся инвестиционно-финансовой деятельностью; может быть использован при обучении в высших учебных заведениях, в направлении новых актуальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абчук, В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций / В.А. Абчук. – СПб. : Союз, 1999.

2. Агапова, Т.А. Макроэкономика : учебник / Т.А. Агапова, С.В. Серегина. – М., 1999.

3. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Глава 4. Задачи динамического программирования / И.Л. Акулич. – М. : Высшая школа, 1986. – 319 с. – ISBN 5-06-002663-9.

4. Аллен, Р.Дж. Математическая экономия / Р.Дж. Аллен. – М., 1963.

5. Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, А.Ю. Дубинский, Н.В. Копченова. – М. : Высшая школа, 1994.

6. Аршинов, В.И. Синергетика как феномен постнеклассической науки / В.И. Аршинов. – М., 1999. – ISBN 5-201-02017-8.

7. Ашманов, С.А. Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1984.
8. Бабушка, И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. – М. : Мир, 1969.
9. Баумоль, У. Экономическая теория и исследование операций / У. Баумоль. – М., 1965.
10. Бахвалов, Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н.С. Бахвалов. – М. : Наука, 1975.
11. Башарин, Г.П. Начала финансовой математики / Г.П. Башарин. – М. : ИНФРА-М, 1997.
12. Беллман, Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1960.
13. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус ; пер. с англ. – М. : Наука, 1965. – 460 с.
14. Беллман, Р. Динамическое программирование и современная теория управления / Р. Беллман, Р. Калаба. – М., 1969. – 120 с.
15. Блауг, М. Экономическая мысль в ретроспективе / М. Блауг ; пер. с англ. – М., 1994. – 277 с.
16. Борисов, Е.Ф. Экономическая теория : учебник / Е.Ф. Борисов. – М. : Юрист, 1997.
17. Борисов, Е.Ф. Экономическая теория / Е.Ф. Борисов. – М., 1997.
18. Бородкин, Л.И. "Порядок из хаоса": концепции синергетики в методологии исторических исследований / Л.И. Бородкин // Новая и новейшая история. – 2003. – № 2. – ISSN 0029-5124.
19. Бренделева, Е.А. Неоинституциональная теория / Е.А. Бренделева ; под ред. М.Н. Чепурина. – М. : ТЕИС, 2003. – 254 с.
20. Вагнер, Г. Основы исследования операций / Г. Вагнер. – М. : Мир, 1972. – Т. 1 – 4.
21. Введение в рыночную экономику / под ред. А.Я. Лифшица и И.Н. Никулиной. – М. : Высшая школа, 1994.
22. Венецкий, И.Г. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе / И.Г. Венецкий, В.И. Венецкая.
23. Управление риском. Риск, устойчивое развитие, синергетика / В.А. Владимиров, Ю.Л. Воробьев, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов и др. – М. : Наука, 2000. – 432 с. – http://www.keldysh.ru/papers/2003/source/book/ gmalin/risk.htm.
24. Власов, М.П. Моделирование экономических процессов / М.П. Власов. – Ростов н/Д. : Феникс, 2005. – 409 с.
25. Габасов, Р. Основы динамического программирования / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск : Изд-во БГУ, 1975. – 262 с.
26. Гамецкий, А.Ф. Математическое моделирование макроэкономических процессов / А.Ф. Гамецкий, Д.И. Соломон. – Еврика, 1997.
27. Гатаулин, А.М. Математическое моделирование экономических процессов / А.М. Гатаулин, Г.В. Гаврилов, Т.М. Сорокина и др. – М. : Агропромиздат, 1990.
28. Геронимус, Б.Л. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте / Б.Л. Геронимус, Л.В. Царфин. – М. : Транспорт, 1990.
29. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие / В.Е. Гмурман. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1977.
30. Горчаков, А.А. Компьютерные экономико-математические модели / А.А. Горчаков, А.А. Орлова. – М. : ЮНИТИ, 1995.
31. Евланов, Л.Г. Теория и практика принятия решений / Л.Г. Евланов. – М. : Экономика, 1984.
32. Замков, О.О. Математические методы в экономике : учебник / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М. : МГУ им. М.В. Ломоносова, Изд-во "ДИС", 1997.
33. Заславский, Г.М. Стохастическая необратимость в нелинейных системах / Г.М. Заславский. – М. : Наука, 1970.
34. Ивашковский, С.Н. Макроэкономика / С.Н. Ивашковский. – М. : Дело, 2000.
35. Интервью с профессором Г. Хакеном // Вопросы философии. – 2000. – № 3.
36. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – М. : Прогресс, 1975.
37. Ицкович, И.А. Анализ линейных экономико-математических моделей / И.А. Ицкович. – Новосибирск : Наука, 1976.
38. Канке, В.А. Концепции современного естествознания : учебник / В.А. Канке. – М. : Логос, 2001.
39. Капица, С.П. Синергетика и прогнозы будущего / С.П. Капица, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий. – 3-е изд. – М. : Эдиториал УРСС, 2003. – 286 с.
40. Карасев, А.И. Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева. – М. : Экономика, 1987.
41. Кейнс, Дж.М. Избранные произведения / Дж.М. Кейнс ; пер. с англ. – М., 1993; Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / Авт. пред. А.А. Самарский. – М. : Наука, 1988.
42. Колемаев, В.А. Математическая экономика : учебник / В.А. Колемаев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.
43. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике / П.В. Конюховский. – СПб. : Питер, 2000.
44. Кормен, Т. Динамическое программирование. Глава 15 / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн ; под ред. И.В. Красикова. – 2-е изд. // Алгоритмы: построение и анализ = Introduction to Algorithms. – М. : Вильямс, 2005. – 1296 с. – ISBN 5-8459-0857-4.
45. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М., 1970.
46. Коуз, Р. Фирма, рынок и право / Р. Коуз. – М. : Дело ЛТД, 1993. – 192 с.
47. Краковский, Ю.М. Имитационное моделирование / Ю.М. Краковский. – Иркутск, 2002.
48. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер. – М. : ЮНИТИ, 2006.

49. Кроновер, Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер. – М. : Техносфера, 2006. – 488 с.
50. Крылов, А.Н. Прикладная математика и ее значение для техники / А.Н. Крылов. – М.–Л., 1931. – С. 6.
51. Кузнецов, С.П. Динамический хаос : курс лекций / С.П. Кузнецов. – М. : Физматлит, 2001.
52. Кузнецов, Ю.Н. Математическое программирование : учебное пособие / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1980.
53. Кузнецов, Ю.Н. Высшая математика. Математическое программирование / Ю.Н. Кузнецов. – Минск : Высшая школа, 1997.
54. Кулагина, О.С. К вопросу о моделировании эволюционного процесса / О.С. Кулагина, А.А. Ляпунов // сб. "Проблемы кибернетики". – М. : Наука, 1966. – Вып. 16.
55. Куракин, П.В. На пороге "субъективной" синергетики (синергетика II). Синергетика / П.В. Куракин, Г.Г. Малинецкий // Труды семинара. – М. : Изд-во МГУ, 2000. – Т. 3. – С. 242 – 250.
56. Курдюмов, С.П. Нелинейная динамика и проблемы прогноза / С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, И.Г. Медведев, Н.А. Митин // Безопасность Евразии. – 2001. – № 2. – С. 481 – 517.
57. Курицкий, Б.Я. Поиск оптимальных решений в EXCEL / Б.Я. Курицкий. – М., 2000. – 245 с.
58. Курс экономической теории / под общ. ред. М.Н. Чепурина, Е.Л. Киселевой. – Киров : АСА, 1994.
59. Ларичев, О.И. Теория и методы принятия решений : учебник / О.И. Ларичев. – М. : Логос, 2003. – 392 с.
60. Лебедев, В.В. Математическое моделирование социально-эконо-мических процессов / В.В. Лебедев. – М., 1997.
61. Лотов, А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В. Лотов. – М. : Наука, 1984.
62. Магницкий, Н.А. Новые методы хаотической динамики / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 320 с.
63. Малинецкий, Г.Г. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.В. Подлазов. – М. : УРСС, 2006. – ISBN 5-484-00200-1.
64. Малинецкий, Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 326 с.
65. Малинецкий, Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику / Г.Г. Малинецкий. – М. : Эдиториал УРСС, 2000.
66. Малинецкий, Г.Г. Парадигма самоорганизованной критичности. Иерархия моделей и пределы предсказуемости / Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1997. – Т. 5, № 5.
67. Малинецкий, Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Эдиториал УРСС, 2002. – 358 с.
68. Малыхин, В.И. Математика в экономике : учебное пособие / В.И. Малыхин. – М. : ИНФРА-М, 2002.
69. Маршалл, А. Принципы экономической науки / А. Маршалл ; пер. с англ. – М., 1993. – Т. 1. – С. 49–50.
70. Математические методы анализа экономики / под. ред. А.Я. Боярского. – М. : Изд-во МГУ, 1983.
71. Мун, Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 312 с.
72. Нейман, Дж. Теория самовоспроизводящихся автоматов / Дж. Нейман. – М. : Мир, 1971.
73. Неймарк, Ю.И. Стохастические и хаотические колебания / Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда. – М., 1987. – 424 с.
74. Немыцкий, В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. – М.–Л. : ГИТТЛ, 1947. – 551 с.
75. Николис, Г. Самоорганизация в неравновесных системах / Г. Николис, И. Пригожин. – М. : Мир, 1979.
76. Новое в синергетике. Взгляд в третье тысячелетие : сборник статей / под ред. Г.Г. Малинецкого, С.П. Курдюмова. – М. : Наука, 2002.
77. Обен, Ж-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения / Ж-П. Обен. – М. : Мир, 1988.
78. Овчинников, Г.П. Макроэкономика / Г.П. Овчинников. – СПб. : Издание электротехнического института связи, 1993.
79. Олейник, А.Н. Институциональная экономика / А.Н. Олейник. – М. : ИНФРА-М, 2000. – 416 с.
80. Орехов, Н.А. Математические методы и модели в экономике : учебное пособие / Н.А. Орехов, А.Г. Левин, Е.А. Горбунов ; под ред. проф. Н.А. Орехова. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2004.
81. Павловский, Ю.Н. Имитационное моделирование и системы / Ю.Н. Павловский. – М., 2000.
82. Петров, А.А. Опыт математического моделирования экономики / А.А. Петров, И.Г. Поспелов, А.А. Шананин. – М., 1996.
83. Погонин, В.А. Об отыскании обобщенно-периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений / В.А. Погонин, А.Н. Пчелинцев // Системы управления и информационные технологии. – Воронеж : Научная книга, 2009. – № 2(36). – С. 27 – 31.
84. Политическая экономия / пер. Г. Кузнецова и др. – М. : Издательство политической литературы, 1988.
85. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – 2-е изд. – М., 1965.
86. Пределы предсказуемости : сб. статей / под ред. Ю.А. Кравцова. – М. : Центрком, 1997.
87. Прохоров, А. История эконометрики. Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке: историческая ретроспектива / А. Прохоров // Квантиль. – № 4. – Март, 2008.
88. Пучков, В.Ф. Математические модели макроэкономики : учебное пособие / В.Ф. Пучков. – Гатчина : Изд-во ЛОИЭФ, 2005. – 157 с.
89. Райзберг, Б.А. Современный экономический словарь / Б.А. Райзберг, Л.Ш. Лозовский, Е.Б. Стародубцева. – М., 2003.
90. Раппопорт, В.С. Развитие организационных форм управления научно-техническим прогрессом в промышленности / В.С. Раппопорт. – М., 1979.
91. Редько, В.Г. Эволюционная кибернетика / В.Г. Редько. – М. : Наука, 2001.

92. Резниченко, С.С. Экономико-математические методы и моделирование в планировании и управлении горным производством / С.С. Резниченко, М.П. Подальский, А.А. Ашихмин. – М. : Недра, 1991.
93. Рыночная экономика: Теория рыночной экономики. Макроэкономика. В 3-х т. / под ред. Ю.Б. Рубина. – М., 1992. – Т. 1.
94. Сакович, В.А. Оптимальные решения экономических задач / В.А. Сакович. – М. : Высшая школа, 1982.
95. Самарский, А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М., 1997.
96. Самуэльсон, П. Экономика. В 2-х т. / П. Самуэльсон. – М. : Машиностроение, 1997. – Т. 2.
97. Современная экономика / под ред. О.Ю. Мамедова. – Ростов н/Д. : Феникс, 1995.
98. Солоу, Р. Экономическая теория ресурсов или ресурсы экономической теории / Р. Солоу // В кн. "Рынки факторов производства". – СПб., 1999.
99. Справочник по математике для экономистов / В.Е. Барбаумов, В.И. Ермаков, Н.Н. Кривенцова и др. ; под ред. В.И. Ермакова. – М. : Высшая школа, 1987.
100. Столерю, Л. Равновесие и экономический рост: принципы макроэкономического анализа / Л. Столерю. – М., 1974.
101. Тихомиров, Н.П. Моделирование социальных процессов / Н.П. Тихомиров, В.Я. Райцин, Ю.Н. Гаврилец, Ю.Д. Спиридонов. – М., 1993.
102. Трояновский, В.М. Элементы математического моделирования в макроэкономике / В.М. Трояновский. – М. : Изд-во РДЛ, 2001.
103. Уильямсон, О.И. Экономические институты капитализма: Фирма, рынки, "отношенческая" контрактация / О.И. Уильямсон. – СПб. : Лениздат, CEV Press, 1996. – 702 с.
104. Управление – это наука и искусство / А. Файоль, Г. Эмерсон, Ф. Тейлор, Г. Форд. – М. : Республика, 1992. – 352 с.
105. Формалев, Ф.В. Численные методы / Ф.В. Формалев, Д.Л. Ре- визников. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004.
106. Хаггет, П. Пространственный анализ в экономической географии / П. Хаггет ; пер. с англ. Ю.Г. Липец, С.Н. Тагер. – М., 1968.
107. Хакен, Г. Синергетика / Г. Хакен. – М. : Мир, 1980.
108. Хакен, Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Г. Хакен. – М. : Мир, 1985. – 423с.
109. Хаотические системы // Тематический выпуск журнала ТИИЭР. – 1987. – Т. 75, № 8. – 175 с.
110. Хемминг, Р.Ф. Численные методы (для научных работников и инженеров) / Р.Ф. Хемминг. – М., 1972.
111. Чернавский, Д.С. Динамика экономической структуры общества / Д.С. Чернавский, Г.Г. Пирогов и др. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. – 1996. – Т. 4, № 3.
112. Шелобаев, С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учебное пособие / С.И. Шелобаев. – М. : ЮНИТИ, 2000.
113. Шильников, Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца / Л.П. Шильников // Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркации рождения цикла и ее приложения. – М. : Мир, 1980.
114. Шимко, П.Д. Оптимальное управление экономическими системами : учебное пособие / П.Д. Шимко. – СПб., 2000.
115. Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные ряды. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика", 2001. – 528 с.
116. Щербина, О.А. Методологические аспекты динамического программирования / О.А. Щербина // Динамические системы. – 2007. – Вып. 22. – С. 21 – 36.
117. Экономика : учебник / под ред. доц. А.С. Булатова. – 1997.
118. Экономико-математические методы и прикладные модели / под ред. Н.Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 1999.
119. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебное пособие / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др. ; под ред. В.В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ.
120. Экономико-математическое моделирование : учебник / под общ. ред. И.Н. Дрогобыцкого. – М. : Изд-во "Экзамен", 2004.
121. Экономическая теория / под ред. В.Д. Камаева. – М. : Владос, 1999.
122. Экономическая теория / под ред. И.П. Николаевой. – М. : Проспект, 2000.
123. Ясин, Е. Экономический рост как цель и как средство / Е. Ясин // Вопросы экономики. – 2001. – № 9. – С. 4 – 15.
124. Aoki, N. Topological Theory of Dynamical Systems / N. Aoki, K. Hiraide. – Amsterdam, Netherlands : North-Holland, 1994.
125. Arrow, K. The organization of economic activity: Issues pertinent to the choice of market versus no market allocation / K. Arrow // In the Analysis and Evaluation of Public Expenditure: The PPB System. – 1969. – Vol. 1.
126. Bak, P. How nature works: the science of self-organized criticality / P. Bak. – New York : Springer-Verlag Inc., 1996.
127. Современная экономика / под ред. О.Ю. Мамедова. – Ростов н/Д. : Феникс, 1995. – С. 134.
128. Dalman, C.I. The Problem of Externality / C.I. Dalman // The Journal of Law and Economics 22, April 1979. – N 1.
129. Devaney, R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems / R.L. Devaney. – Addison. Wesley Publ. Co., Inc., 1989. – 336 p.
130. Dorfman, J.R. An Introduction to Chaos in Nonequilibrium StatisticalMechanics / J.R. Dorfman // Cambridge University Press, 1999. 288 p.
131. Evans, M., Harrell, I.I. Dynamical Systems and Chaos / M. Evans, I.I. Harrell.
132. Evolution, Games and Learning: Models for Adaptation in Machines and Nature // Physica D V.22D, N (1 – 3), 1986.
133. Lorenz, E.N. Deterministic nonperiodic flow / E.N. Lorenz // Journ. of the Atmospheric Science. – 1963. – Vol. 20. – P. 130 – 141.
134. North, D. Measuring the Transactional Sector in American Economy, 1870 – 1970. – In: Long-term Factors in American Economic Growth / D. North, J. Wallis. – Chicago, 1986.
135. Ott, E. Chaos in Dynamical Systems / E. Ott // Cambridge University Press, 1993. – 385 p.
136. Sornette, D. Large financial crashes / D. Sornette, A. Johansen // Physica A. – 1997. – Vol. 245, N 3–4.

137. Thompson, J.M.T. Nonlinear dynamics and chaos / J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. – New York : Wiley, 1986. – 376 p.
138. Waldrop, M.M. Complexity: The emerging science at the edge of order and chaos / M.M. Waldrop. – New York : Touchstone, 1993.

ОГЛАВЛЕНИЕ