Б.И. ГЕРАСИМОВ, Н.П. ПУЧКОВ, Д.Н. ПРОТАСОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

♦ Издательство ГОУ ВПО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»**

Б.И. ГЕРАСИМОВ, Н.П. ПУЧКОВ, Д.Н. ПРОТАСОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

*Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов 2 курса специальностей 080105, 080109
всех форм обучения*

Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

УДК 330.4 (075.8)
ББК У.в631я73
Г371

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
С.М. Дзюба

Доктор экономических наук, профессор
В.И. Абдукаримов

Герасимов, Б.И.

Г371 Дифференциальные динамические модели : учебное пособие / Б.И. Герасимов, Н.П. Пучков, Д.Н. Протасов. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0947-0.

Рассмотрены методология и инструментарий основных экономико-математических методов и построенных на их основе дифференциальных динамических моделей, которые могут быть использованы в рыночной экономике и управлении для повышения их эффективности.

Приведены практические рекомендации по использованию математического моделирования для решения оптимизационных задач методами дифференциального и динамического моделирования.

Предназначено для студентов 2 курса специальностей 080105, 080109 всех форм обучения.

УДК 330.4 (075.8)
ББК У.в631я73

ISBN 978-5-8265-0947-0

Учебное издание

ГЕРАСИМОВ Борис Иванович,
ПУЧКОВ Николай Петрович,
ПРОТАСОВ Дмитрий Николаевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Учебное пособие

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано в печать 19.10.2010
Формат 60×84/16. 4,65 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 492

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

В последние столетия математические методы всё настойчивее проникают в гуманитарные науки и в частности, в экономику. Недооценка применения математических методов в гуманитарных науках была характерной, по-видимому, для большей части XX в. Так, например, выдающийся английский экономист А. Маршалл не видел особых преимуществ в использовании математики в экономических исследованиях. Рассуждая о значении математики для экономической науки, он в своём фундаментальном труде, написанном около ста лет тому назад, отмечал, что «подготовка в области математики полезна тем, что она позволяет овладеть максимально сжатым и точным языком для ясного выражения некоторых общих отношений и некоторых коротких процессов экономических рассуждений, которые действительно могут быть выражены обычным языком, но без равноценной чёткости схемы». Несмотря на эти слова, А. Маршалл в своих работах широко использовал аппарат дифференциального исчисления, в то время как К. Маркс ограничивался в своих работах преимущественно арифметическими примерами.

Экономика и управление – это прикладные науки, и их важная практическая задача заключается в использовании методов обоснования и выбора тех или иных решений. В общем случае для научного познания любого явления или процесса можно пользоваться в качестве инструментариев такими четырьмя методами: теоретическим анализом; наблюдением; научным экспериментом; моделированием. Если первые три подхода успешно используются, например, в технических науках, то на долю экономики и управления выпадает последнее (за исключением наблюдения, используемого в статистике). Объяснить это можно тем, что экономические процессы достаточно длительны. Для сбора необходимого для теоретического анализа статистического материала часто необходимы годы и десятилетия, из-за этого усложняется проявление действующих закономерностей и влияние многочисленных отдельных факторов. То же имеет отношение и к научному эксперименту, чтобы результаты были достоверны и надёжны, экономический эксперимент должен быть длительным и многомасштабным. Таким образом, в распоряжении экономистов и менеджеров остаётся только одно – моделирование экономических явлений и процессов. Здесь имеется в виду не масштабное физическое моделирование, как в технических науках (модели судов, которые испытываются в исследовательских бассейнах, модели самолётов, которые продуваются в аэродинамических трубах, и т.п.), что для экономики и управления нереально, а аналоговое и, прежде всего, математическое моделирование.

В последние 20 – 30 лет ситуация стала меняться существенным образом, причём не только в экономике, но и в социологии, истории, психологии и других областях обществознания. Это в большой степени связано с тем, что, как оказалось, многие результаты анализа социально-экономических процессов не могут быть получены без использования математических моделей, несмотря на то, что после осмысления эти результаты выражаются и интерпретируются на обычном языке и зачастую становятся «очевидными» и «само собой разумеющимися».

Применение метода математического моделирования в экономике – объективный этап её развития, связанный с существованием устойчивых количественных закономерностей и возможностью формализованного описания многих, хотя и далеко не всех, экономических процессов.

Согласно современным представлениям, развитие всех наук происходит фактически по единой схеме, которая включает несколько периодов. А.А. Дородницын выделял следующие четыре: описательный период; период упорядочения и систематизации накопленной информации; период выявления и установления связей и соотношений; «точный» период, в котором широко используется метод математического моделирования для анализа различных объектов этой науки.

В настоящее время к точным наукам относят математику и науки физического цикла (механику, термодинамику, квантовую механику и др.). Все остальные науки до сих пор остаются преимущественно описательными, хотя многие из них, в том числе биология, экономика, социология и история используют математические методы анализа. Например, в последние десятилетия в гуманитарных науках появились математические модели развития культуры, построены и исследованы математические модели мобилизации, циклического развития социокультурных процессов, модели взаимодействия народа и правительства и др.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ

1.1. ИЗ ИСТОРИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Несмотря на то, что задачи естествознания служили основными побудительными толчками, способствующими развитию математики, параллельно развивались приложения математики в социально-экономических науках. Возникающие здесь задачи вызвали разработку нового математического инструментария, что в конечном итоге привело к формированию таких разделов математики, как линейное и нелинейное программирование, теория массового обслуживания, теория игр и др.

Многие современные понятия экономики имеют большую историю. Например, попытки построить функцию полезности на основе наблюдений за реакцией индивидуумов на вероятностные ситуации восходят к статье Д. Бернулли (1738) о Санкт-Петербургском парадоксе. В этой работе был обоснован принцип снижающейся предельной полезности.

Считается, что математические методы в экономике, как метод анализа макроэкономических процессов, начали использоваться ещё в XVIII в. Опубликовав работу «Экономические таблицы», французский экономист лейб-медик короля Людовика XV доктор Франсуа Кене впервые сделал попытку формализовать процесс общественного воспроизводства. В этой работе была сделана первая попытка количественно описать национальную экономику. В дальнейшем К. Марксом было осуществлено научное обоснование этого процесса за счёт создания схем воспроизводства, которые имели большое влияние на развитие экономической науки.

Одно из первых логически последовательных изложений математической модели экономики было выполнено О. Курно в книге «Исследование математических принципов теории богатства», опубликованной во Франции в 1838 г. В этой работе количественные методы были использованы для анализа конкуренции на рынке товара при различных рыночных ситуациях. В частности, была построена и исследована динамическая модель дуополии. О вкладе О. Курно в развитие математического моделирования экономических процессов, а также о препятствиях, ограничивающих распространение этого метода, замечательно сказал в предисловии своей книги «Принципы экономической науки» А. Маршалл: «... когда приходится использовать слишком много символов, разбирать их становится трудно всем, кроме самого автора. Правда, гений Курно должен придать новый стимул умственной деятельности всех, кто испытывает на себе влияние его трудов, а равные ему по уровню математики в состоянии использовать своё излюбленное оружие, чтобы пробить себе дорогу к самой сути тех труднейших проблем экономической теории, которые до сих пор затрагивались весьма поверхностно».

В последующие годы происходила интенсивная математизация экономической теории. Например, в книге У. Джевонса «Краткое описание общей математической теории политической экономии» (1862) понятие полезности было использовано для формализованного описания поведения потребителя.

В конце XIX в. были разработаны и начали использоваться статистические методы, которые составили предпосылки к возникновению новой науки – эконометрии, представляющей собой одно из ответвлений экономико-математических методов по изучению количественной стороны экономических явлений и процессов средствами математического анализа и математической статистики. Возникают такие направления математико- статистического исследования, как статистические методы парной и множественной регрессии, теории корреляции, проверки гипотез, теории ошибок, выборочного исследования (английские учёные Ф. Гальтон, Р. Гамильтон, К. Пирсон, американский исследователь Р. Фишер и др.). Впервые представители школы К. Пирсона начали изучать корреляции в биологии и строить линейные регрессии.

О значении метода математического моделирования в работах по исследованию экономических процессов, выполненных во второй половине XIX в., лучше всего говорит следующий факт: среди выдающихся экономистов этого периода «... только Кларк и Бем-Баверк сумели внести фундаментальный вклад в экономическую теорию без использования или знания математики».

В начале XX в. трудами английского статистика Гукера с помощью методов корреляционно-регрессионного анализа, основанных школой К. Пирсона, начали изучаться взаимозависимости между экономическими показателями. В этот период появляются работы по развитию методов математической статистики и применению этих методов в экономическом анализе (исследование Мура, работы И. Кобба и П. Дугласа о производственной функции как одной из первых эконометрических моделей и др.). Именно эти труды стали основой современной эконометрии.

К началу XX в. усилиями Л. Вальраса, В. Парето, Ф. Эджворта и других классическая экономическая наука была переведена на достаточно строгий математический язык. Поэтому начало XX в. можно считать периодом, когда математическое моделирование окончательно утвердилось в экономике, как науке.

В 1910 г. львовским учёным П. Чомпой в его книге «Очерки эконометрии и естественной бухгалтерии, которая основывается на политической экономии», а позже независимо от него норвежским учёным Р. Фришем (1926) предложен термин «эконометрия» как наука об измерениях в экономике.

Осмысление важности управления рисками как способами стабилизации производства началось в начале XX в. благодаря работам английского экономиста А. Маршалла, американских экономистов Д.М. Кейнса, Ф.Х. Найта и других, поставивших на научную основу изучение личного, предпринимательского, финансового рисков.

Расширение использования математических методов в экономике способствовало развитию системного подхода. Например, Л. Вальрас считал, что все социальные явления – религия, политика, экономика и духовная жизнь – тесно связаны между собой. Это соответствует современному пониманию того, что экономика является подсистемой целостной системы социально-экономических отношений, вследствие чего изучение собственно экономики и предсказание траектории её развития на перспективу должно опираться на анализ объекта более общей природы – социально-экономической системы.

Усложнение в XX в. проблем экономики и управления вызвало дальнейшее развитие методов их анализа. В результате обобщения накопленного опыта и естественной эволюции науки сложилась современная методология исследования социально-экономических проблем как на микро-, так и макроуровнях, опирающаяся на системный подход. Использование принципа системности, без которого невозможно эффективное управление, включает, наряду с содержательным анализом изучаемых процессов, применение метода математического моделирования.

Если исследование отдельных экономических проблем в XIX в., в частности процесса расширенного общественного воспроизводства, основывалось преимущественно на соотношениях алгебры, то в начале XX в. при общем анализе динамики экономической системы находят применение и такие разделы высшей математики, как линейная алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление. Но такой подход имел отношение, преимущественно, в исследовании общих глобальных характеристик экономической системы. Между тем практические потребности диктовали необходимость не только в глобальных, но и в более конкретных экономических показателях и характеристиках. Это привело к созданию в 20-е гг. XX в. в СССР системы межотраслевого баланса, которая является непосредственным продолжением схем воспроизводства. Был составлен первый в мире баланс народного хозяйства СССР на 1922 – 1924 гг., проведён ряд исследований по моделированию процесса расширенного воспроизводства и использования статистической теории в изучении хозяйственной конъюнктуры и прогнозировании. Отечественные разработки межотраслевого баланса повлияли на работы американского экономиста русского происхождения В.В. Леонтьева (позже лауреата Нобелевской премии по экономике в 1973 г.). Разработанная В.В. Леонтьевым модель межотраслевого баланса о производстве и распределении продукции в США вошла в литературу под названием метода анализа экономики «расходы – выпуск».

Математизация экономической науки в XX в. осуществлялась представителями многих стран, в том числе и России, где вопросы объективного анализа социально-экономических процессов всегда были в центре внимания научной общественности. Несмотря на известные трудности послеоктябрьского периода многие результаты, полученные российскими математиками-экономистами, стали достоянием мировой культуры.

К ним, прежде всего, следует отнести анализ Е. Слуцким модели поведения потребителя; открытие Н. Кондратьевым длинных волн в экономике; разработку первого баланса народного хозяйства СССР за 1923–1924 гг., на основе которого была построена широко известная ныне модель В. Леонтьева; развитие Л. Канторовичем методов исследования линейных систем.

В начале 30-х гг. XX в. эконометрия становится отдельной отраслью науки после основания эконометрического общества в США, которое определило себя как «Международное общество для развития экономической теории и её связи со статистикой и математикой».

В 30-е гг. Я. Тинбергеном, Л. Клейном, Р. Стоуном были разработаны модели экономики, какие описываются системой многих уравнений, так называемой системой одновременных уравнений в эконометрии.

В середине 30-х гг. американским математиком Дж. фон Нейманом была сконструирована одна из первых макроэкономических математических моделей экономической динамики, которая вошла в литературу под названием модели Неймана расширенной экономики (1937). Посвящённая реализации оптимального планирования и управления, модель представляла собой одну из первых задач получения наилучших решений, т.е. задач математического программирования.

Математическое программирование – это направление прикладной математики по решению задач получения оптимума (максимума или минимума) некоторой функции, которая является целью рассматриваемой задачи (поэтому она называется целевой функцией), при наличии ограничений на переменные. Термин «программирование» здесь употребляется не в смысле программирования на ЭВМ, хотя решение задач математического программирования большой размерности невозможно без ЭВМ, а ввиду получения наилучшего (оптимального) плана или программы работы конкретного экономического объекта. Невзирая на неудачное название термина, он сохранился до нашего времени в силу широкого распространения в мире. Более простое, а потому и наиболее разработанное ответвление математического программирования – линейное программирование. Оно получило широкое распространение и использование в экономической практике и заключается в поиске оптимального решения.

В 70 – 90-х гг. экономико-математическое моделирование стало признанным средством анализа экономических проблем. В отечественной практике в 70-х гг. появляются автоматизированные системы управления (АСУ), предназначенные для оптимизации управления сложными производственными процессами и экономическими системами.

В конце 80-х гг. много передовых корпораций разных отраслей начали интересоваться вопросами учёта рисков, которые стали важной функцией менеджмента.

Конец XX – начало XXI в. знаменуется в мире высокими темпами развития теории и практики экономико-математического моделирования. Нобелевскими лауреатами по экономике становятся, как было отмечено ранее, В.В. Леонтьев (1973) и Л.В. Канторович (1975). Нобелевской премией по экономике в 1983 г. награждается Ж. Дебре, который работал в отрасли математизации экономической теории, а в 2000 г. – Дж. Хекман и Д. Мак-Фадден за разработку микроэконометрии и методов статистического анализа и др.

В настоящее время наблюдается внедрение в отечественную практику экономико-математических методов и моделей с использованием программных комплексов. Растёт роль экономико-математического моделирования как одного из средств совершенствования экономики с научно обоснованными путями последующего развития и прогнозами на будущее в рыночных условиях.

К обьективным проблемам, ограничивающим эффективность применения метода математического моделирования при анализе социально-экономических процессов, следует отнести исключительное разнообразие и разнородность объектов моделирования: в этой области имеют место элементы управляемости и стихийности, детерминированности и существенной неоднозначности, сочетание процессов технического (производственного) и социального характера. Поэтому до сих пор не существует окончательно сформировавшегося подхода к анализу и прогнозированию процессов рыночной экономики, вследствие чего расчёты носят преимущественно оценочный характер.

Отметим ещё одно из препятствий. Рекомендации и выводы, полученные на основе анализа адекватной модели, могут оказаться невостребованными на практике по следующей причине: управленец при принятии решения может предпочесть опереться на интуицию и даже иметь нерешённую проблему, чем использовать модели, в которых он ничего не понимает, и стать, таким образом, заложником разработчика-математика.

Нобелевский лауреат по экономике В. Леонтьев отмечал, что негативному отношению к математическим методам анализа при принятии решений служит: «...пренебрежение академической экономической наукой упорным, систематическим, эмпирическим анализом и увлечение изящными, но пустыми, формальными, главным образом математическими, теоретическими «упражнениями».

В этой связи следует сказать следующее. В основе двух полярных направлений математического моделирования (аксиоматической теоретической математической экономики, с одной стороны, и прикладных социально-экономических исследований, с другой) лежат одни и те же базовые теоретические модели экономики. Поэтому эффективность применения математического моделирования связана, прежде всего, с пониманием допущений, используемых при построении этих моделей, которые и определяют пределы их применимости.

Слабое представление о возможностях метода моделирования, о пределах применимости той или иной модели приводит к следующему. Реакцией на несоответствие ожиданий и конкретных результатов социально-экономической политики, полученных на основе анализа неадекватных моделей, зачастую служат эмоциональные выводы такого рода: «экономические законы в России не действуют», «умом Россию не понять», «моделирование в наших условиях бессмысленно» и т.д. Но ведь это всё равно, что рассчитывать траекторию движения баллистической ракеты по формуле из школьной задачи о движении тела, брошенного под углом к горизонту, а потом возмущаться расхождением теории и практики!

О неудовлетворённости исследователей, не только отечественных, но и зарубежных, тем, в какой степени используются их аналитические разработки при принятии управленческих решений, свидетельствует следующее, весьма горькое, высказывание П. Самуэльсона: «...экономический анализ и экономическая действительность – это два разных мира, и лучшее, что можно посоветовать экономистам, – это продолжать двигать вперёд логику и теорию своей науки. А для того, чтобы избежать крушения надежд или повальной шизофрении, целесообразнее всего удалиться в стены академий и работать здесь ради одной лишь достойной награды – самоодобрения исследователя».

Да, конечно, применение метода математического моделирования при анализе конкретных экономических процессов – не панацея, его возможности достаточно ограничены. Это не механика, здесь всё гораздо сложнее. И если, например, расчёты траектории той же баллистической ракеты, выполненные на основе достаточно совершенной математической модели динамики полёта, всё равно требуют введения поправочных коэффициентов, учитывающих влияние неучтённых факторов (скорости ветра, рельефа местности и т.д.), то в экономике число факторов, влияющих на отклонение теоретических выводов от реальности, не только слишком велико, но многие из них в принципе оказываются неформализуемыми.

Поэтому, говоря о пределах применимости метода математического моделирования при обосновании управленческих решений, уместно вспомнить слова американского математика Т. Саати, сказавшего об исследовании операций, что это «...искусство давать плохие ответы на те практические вопросы, на которые даются ещё более плохие ответы другими способами».

А.А. Самарский, основатель и первый директор Института математического моделирования РАН, отмечает, что математическое (компьютерное) моделирование представляет собой развитие и обобщение естественнонаучных методов исследования, соединённых с современной информационной технологией.

В случае использования метода математического моделирования процесс познания и управления выражается с помощью следующей схемы: объект-модель – алгоритм-программа – ЭВМ – управление объектом. А поскольку модель – главное звено этой схемы, то разработка адекватной математической модели и последующее экспериментирование с нею на ЭВМ может обеспечить органичное сочетание сильных сторон теоретических методов и натурных экспериментов.

В полной мере сказанное относится к применению математического моделирования в области анализа социально-экономических процессов, где значение вычислительных экспериментов (многовариантных расчётов) ещё более возрастает. Последнее обусловлено тем, что в этих областях науки проведение натурных экспериментов либо сильно ограничено, либо невозможно из-за необратимости изучаемых процессов, а использование интуиции и плохо обоснованных прогнозных оценок нередко приводит к неожиданным результатам, которые характеризуются известным современным афоризмом «хотели как лучше, а получилось как всегда».

1.2. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ В ЭКОНОМИКЕ И УПРАВЛЕНИИ

Будущие специалисты по экономике и управлению должны свободно ориентироваться в принятии решений с использованием экономико-математических методов и построенных на их основе моделей, уметь реализовывать их с использованием соответствующего инструментария.

Целью рассмотрения вопросов пособия является формирование системы знаний по методологии и инструментариям построения и использования разных типов экономико-математических моделей.

Если между двумя объектами может быть установлено какое-либо сходство, то один из этих объектов может рассматриваться как оригинал, а другой – как модель. Отношения «оригинал–модель» могут иметь место и между различным числом объектов.

Таким образом, модель – это условный образ объекта (в качестве которого могут выступать системы или понятия), формирующий представление о нём в некоторой форме, отличной от реального существования данного объекта. Модель какого-либо объекта отображает его основные характеристические свойства в некоторой абстрактной форме. Также модель может полностью или частично воспроизводить структуру, которая моделируется, систему и её функции.

Аналоговая модель заменяет исследуемый объект аналогом, который ведёт себя как реальный объект, но не выглядит таким. Пример аналоговой модели – организационная схема управления предприятием. При её построении руководство представляет себе последовательность прохождения команд и формальную зависимость между индивидами и их деятельностью. Такая аналоговая модель является более простым и эффективным средством воспроизведения и проявления сложных взаимосвязей структуры крупного предприятия.

Однако в экономике и управлении наиболее распространенными и эффективными являются математические модели.

Экономико-математическое моделирование – это научное направление по фундаментальной, естественнонаучной и общеэкономической подготовке бакалавров по экономике и управлению. В этом направлении чётко реализуется одна из основных идей математической подготовки специалистов в вузе экономического направления – идея математического моделирования экономических явлений и процессов.

Цель – это фундаментальное понятие, потому что экономическая деятельность всегда целенаправлена. Под целью понимают желаемый результат, который должен быть достигнутым.

Альтернативы – возможны варианты мероприятий, на основании которых принимается решение. Таких вариантов может быть несколько. Альтернативы могут быть дискретными или непрерывными. Количество дискретных альтернатив конечно: например, заменить определённый вид оборудования или нет (в данном случае альтернативы две). Альтернативы могут выбираться на непрерывном множестве: например, заменить оборудование данного вида (через день, два, неделю, месяц, год и т.д.); тогда количество альтернатив бесконечно, и под решением понимают выбор одной альтернативы из множества возможных.

Система – это множественное число взаимосвязанных элементов, которые составляют определённое единство. Элемент системы – часть системы, которая, исходя из цели и функций данной системы, является неделимой.

Сложная система – это множество разных структур и элементов этих структур. Подсистема – часть системы, которая выделена с определённой целью; может рассматриваться как самостоятельная система.

Системный подход – главный научный принцип исследования систем в кибернетике, согласно которому необходимо учитывать взаимосвязи между элементами системы, между системой и внешней средой, между состоянием системы в данное время и в будущем. Основное понятие в кибернетике.

Моделирование – процесс построения, реализации и исследования модели, который способен заменить реальную систему и дать информацию о ней.

Математическая модель – это описание исследуемого экономического явления или процесса с помощью абстрактных математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике и управлении позволяет сделать более глубоким количественный экономический анализ, расширить область экономической информации, интенсифицировать экономические расчёты. Математическая модель отличается по своей природе от оригинала. Исследование свойств оригинала с помощью математической модели удобнее, является более дешёвым, занимает меньше времени по сравнению с физическим моделированием, которое используется в технике (т.е. имеет ту же природу, что и оригинал). Более того, целый ряд экономических систем невозможно изобразить с помощью физических моделей.

Математическая модель экономического объекта – это его гомоморфное отображение в виде совокупности уравнений, неравенств, логических отношений.

Гомоморфизм – понятие математики и логики, обозначающее такое соотношение между двумя системами, при котором:

– каждому элементу и каждому отношению между элементами соответствует один элемент и одно отношение между элементами другой системы;

– при выполнении некоторого отношения между элементами первой системы выполняется соответствующее отношение между соответствующими элементами второй системы.

Принято говорить, что вторая система (как совокупность элементов и отношений) представляет собой гомоморфный образ (модель) первой системы, называемой оригиналом. Реальная система может иметь различные гомоморфные ей модели. Понятие гомоморфизма является фундаментальным теоретическим обоснованием моделирования, в том числе и экономико-математического.

Экономико-математическая модель, включает в себя систему уравнений и неравенств математического описания экономических процессов и явлений, которые состоят из набора переменных и параметров, с целью его исследования и управления. Переменные величины характеризуют, например, объём выработанной продукции, капитальных вложений, перевозок и т.п. Переменные разделяются на две группы: объясняющие (независимые), которые являются заранее заданными и независимыми; объясняемые (зависимые), которые являются результативными показателями. Переменные величины могут быть двух групп: внешние переменные (экзогенные), когда они определяются вне данной модели и считаются для модели заданными; внутренние переменные (эндогенные), которые определяются в результате исследования данной модели. Параметры – это численные признаки показателей, такие, как нормы расходов сырья, материалов, времени на производство и т.п. Во всех случаях необходимо, чтобы модель имела достаточно детальное описание объекта, которое позволяло бы осуществлять измерение экономических величин и определять их взаимосвязь, чтобы были выделены факторы, влияющие на исследуемые показатели.

Эконометрическая модель – разновидность экономико-математической модели, параметры которой оцениваются с помощью методов математической статистики. Одним из основных подходов в измерении связи между исследуемыми показателями в эконометрической модели является корреляционно-регрессионный анализ. Он представляет собой комплекс методов, с помощью которых определяется вид уравнения для описания исследуемых показателей и производится расчёт их параметров (регрессионный анализ), а также устанавливается теснота и значимость связи между переменными в уравнении или уравнениях (корреляционный анализ).

Экономико-математические методы – обобщённое название комплекса экономико-математических подходов, объединённых для изучения экономики и управления и предназначенных для построения, реализации и исследования экономических моделей.

Процесс моделирования пока ещё не алгоритмизирован по причинам огромной сложности логического построения и математического описания этой работы. Однако в практике моделирования выработаны определённые принципы, которыми необходимо пользоваться и которые будут рассмотрены ниже.

Динамическая система – всякая система, которая изменяется во времени (в отличие от статической системы). Математически это принято выражать через переменные (координаты). Процесс их изменения характеризуется траекторией: $Q(t) = [g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)]$, где координаты $g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)$ являются функциями времени t.

Среди таких систем наиболее просты линейные динамические системы, в которых связи между входными величинами, параметрами состояния и выходными величинами носят характер линейных зависимостей.

В экономико-математических моделях динамические системы могут отражаться двояко: во-первых, с помощью описания состояния системы в определённые моменты времени; получаются как бы моментальные снимки (или, лучше, кадры фильма о её развитии), называемые статическими моделями. Во-вторых, с помощью динамических моделей экономики, описывающих сам процесс развития системы. Примером первого вида моделей служит межотраслевой баланс (статический), примерами второго – динамические модели межотраслевого баланса, модели теории экономического роста.

Динамические модели экономики – модели, описывающие экономику в развитии (в отличие от статических, характеризующих её состояние в определённый момент). Модель является динамической, если как минимум одна её переменная относится к периоду времени, отличному от времени, к которому отнесены другие переменные.

Существуют два принципиально различных подхода к построению таких моделей. Первый подход – оптимизационный. Оптимизационная модель позволяет из нескольких альтернативных вариантов выбрать наилучший вариант по любому признаку. Он состоит в выборе из числа возможных траекторий (путей) экономического развития оптимальной траектории (например, обеспечивающей наибольший объём фонда потребления за плановый период). Второй подход заключается в исследовании равновесия в экономической системе. В этом случае, переходя к экономической динамике, используют понятие «равновесная траектория» (т.е. уравновешенный, сбалансированный экономический рост), которая представляет собой результат взаимодействия множества ячеек экономической системы.

В общем виде динамические модели сводятся к описанию следующих экономических явлений: начального состояния экономики, технологических способов производства (каждый «способ» говорит о том, что из набора ресурсов x можно в течение единицы времени произвести набор продуктов y), а также (при первом из названных подходов) – критерия оптимальности.

Используемые в реальной динамической модели временные ряды содержат три элемента – тренд, сезонные переменные и случайную переменную (остаток), во многих моделях рыночной экономики выделяется ещё одна составляющая – циклическая. В качестве экзогенных величин могут выступать, например, выявленные статистическим путём макроэкономические зависимости, сведения о демографических процессах и т.п.; в качестве эндогенных величин – темпы роста, показатели экономической эффективности и др.

Математическое описание динамических моделей производится с помощью систем дифференциальных уравнений (в моделях с непрерывным временем), разностных уравнений (в моделях с дискретным временем), а также систем обыкновенных алгебраических уравнений.

С помощью динамических моделей решаются, в частности, следующие задачи планирования и прогнозирования экономических процессов: определение траектории экономической системы, её состояний в заданные моменты времени, анализ системы на устойчивость, анализ структурных сдвигов.

Если модель и объект моделирования имеют некоторые общие свойства, то возникает возможность изучения объекта на основании исследования свойств соответствующей модели. При этом в зависимости от конкретной цели модель может быть более или менее точной. Например, при анализе аэродинамических свойств автомобиля существенно, чтобы форма модели соответствовала форме этого автомобиля, а при проектировании гаража в качестве модели автомобиля достаточно использовать параллелепипед, так как в этом случае достаточно знать лишь его геометрические размеры – длину, ширину и высоту.

Частным видом моделей являются математические модели, которые отражают объект (процесс) с помощью математической символики. Исследование изучаемого объекта (процесса) на основе изучения свойств его математической модели составляет суть метода математического моделирования. При этом, как правило, при анализе сложных процессов невозможно ограничиться аналитическими методами: требуется разрабатывать компьютерные модели и привлекать вычислительную технику для выполнения вычислительных экспериментов с моделью. В развитие этого направления исследований существенный вклад внесли и российские учёные: А.А. Дородницын, Л.В. Канторович, М.В. Келдыш, Н.Н. Моисеев, В.С. Немчинов, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов и др.

Важнейшую роль при использовании метода математического моделирования играет информация. Об этом говорит, например, определение модели, данное Н.Н. Моисеевым: «Под моделью мы будем понимать упрощённое, если угодно, упакованное знание, несущее вполне определённую, ограниченную информацию о предмете (явлении), отражающее те или иные его отдельные свойства. Модель можно рассматривать как специальную форму кодирования информации. Можно сказать, что модель содержит в себе потенциальное знание, которое человек, исследуя её, может приобрести». Это определение отражает следующий существенный факт: применение метода математического моделирования может быть эффективным лишь тогда, когда в модели будет «закодирована» информация, которую исследователи до её анализа не знали.

1.3. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ЕГО ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ

В настоящее время сфера возможного использования экономико-математических методов и моделей в планировании и управлении значительна, и с каждым годом она расширяется, но область их фактического использования на практике связана с такими трудностями, как:

• сложность моделирования экономических процессов и явлений с учётом производственных отношений (поведения людей, их интересов, индивидуального принятия решения и др.);

• необходимость «встраивания» математических моделей в существующую систему планирования и управления;

• трудности проверки в решении новых социально-экономических задач и т.п.

К эффективным средствам преодоления этих трудностей можно отнести такие:

• имитационное моделирование, которое даёт возможность руководителю, принимающему решения, с помощью ПК включиться в процесс построения экономико-математической модели с принятием оптимального решения на её основе (главный принцип имитационного моделирования: «Что будет, если ...»);

• системный анализ, который допускает комплексное проведение исследования экономических процессов с учётом всех существующих элементов и их взаимосвязей, изучения отдельных хозяйственных объектов как структурных частей более общих систем, выявления роли каждого из них в функционировании экономического процесса в целом;

• программно-целевой метод планирования, основанный на формировании целей и подцелей экономического развития, на которые нужно направить наибольшие силы и средства, и разработке программ их достижения.

Рассмотрим вопрос о классификации экономико-математических моделей, что имеет немаловажное методологическое значение.

Существует несколько классификаций экономико-математических моделей. С нашей точки зрения, экономико-математические модели можно классифицировать по таким признакам:

1) назначению;

2) степени вероятности;

3) способу описания;

4) способу учёта измены процесса по времени;

5) точности математического отображения рассматриваемых явлений.

По назначению модели целесообразно разбить на четыре класса: имитационные; балансовые; сетевые; оптимизационные.

По степени вероятности модели разделяются на два типа: вероятные (стохастические), параметры которых и внешние изменения носят случайный характер; детерминированные, в которых игнорируется случайный характер изменения параметров.

По способу описания модели делятся на три класса: аналитические, в которых показатели описываются математическими формулами или системой формул; эконометрические (статистические), которые предназначены для анализа и прогнозирования рассматриваемых экономических явлений в условиях неопределённости исходных данных и реализуются методами математической статистики; смешанные, в которых наиболее простые блоки описываются аналитическими зависимостями, а в других блоках, где описание аналитическими формулами может привести к значительным искажениям, используется эконометрическое моделирование.

По способу учёта изменения процесса по времени модели разделяются на три класса: статические, в которых предусматривается, что входные параметры не изменяются по времени; многошаговые, в которых время протекания процесса делится на «шаги» (интервалы) и в рамках одного шага процесс рассматривается статическим; динамические, где учитывается непрерывное изменение времени.

По точности математического отображения рассматриваемых явлений модели делятся на две группы: линейные, зависимости в которых имеют переменные у первой степени и не включают их обратных величин и произведение переменных; нелинейные.

Экономико-математические модели отражают наиболее существенные, с точки зрения исследователя, свойства реального экономического объекта (явления, процесса) с помощью того или иного математического аппарата. Все существующие экономико-математические модели можно разделить в зависимости от критерия классификации на различные группы.

Например, по степени агрегирования объектов исследования все экономические модели можно представить как объединение моделей микроэкономики и моделей макроэкономики.

Можно выделить следующие основные классы экономико-математических моделей:

1. Макроэкономические модели рассматривают экономику как единое целое, связывая между собой укрупнённые материальные и финансовые показатели: ВНП, потребление, инвестиции, занятость и т.д. Эти модели, абстрагируясь от поведения отдельных экономических элементов (таких, как домашние хозяйства и фирмы), а также от различий между отдельными рынками, используются для анализа и прогнозирования целостной экономической системы.

2. Микроэкономические модели описывают поведение основных элементов (структурных и функциональных составляющих) экономической системы и различных форм взаимодействия этих элементов при заданных условиях (уровень рыночной ставки %, инфляция, безработица и т.д.). Эти условия, в свою очередь, оказывают серьёзное влияние на поведение основных элементов системы. Наиболее серьёзные теоретические результаты в микроэкономическом моделировании были получены при изучении олигополии с использованием аппарата теории игр.

К моделям микроэкономики относятся модели, в которых рассматриваются экономические процессы на «нижнем» уровне – на уровне покупателя, продавца, производителя продукции (предприятия). К основным моделям этого класса традиционно относят следующие:

– модели поведения потребителя, позволяющие строить функции спроса;

– модели производства и обмена, позволяющие проанализировать возможности оптимального распределения ограниченных ресурсов производства и определить оптимальную структуру цен. Здесь особо выделяют модели однопродуктовой и двухпродуктовой фирм, позволяющие обосновать свойства функции предложения;

– модели рынка, которые описывают взаимодействие покупателя и производителя продукции, приводящее к равновесию на рынке;

– модели конкуренции, отражающие противодействие различных производителей продукции (или продавцов) при её реализации (модели дуополии, олигополии и др.).

3. Равновесные модели описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех сил, стремящаяся вывести её из данного состояния, равна нулю.

4. Оптимизационные модели присутствуют в основном на микроуровне. Для этих моделей характерно наличие одного или нескольких критериев и системных ограничений.

5. Статические модели описывают некоторый объект в определённый (фиксированный) момент времени.

6. Динамические модели включают взаимосвязи переменных во времени. Динамические модели обычно используют аппарат теории дифференциальных игр и разностных уравнений.

7. Детерминированные модели предполагают жёсткие функциональные связи между переменными моделями.

8. Стохастические модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют инструментарий теории вероятностей и математической статистики.

9. Эконометрические модели строятся на основе изучения и анализа эмпирических данных.

Другой подход к классификации экономико-математических моделей связан с учётом фактора времени. В этом случае все разнообразные модели экономических процессов разделяют на следующие два класса: статические и динамические.

В статических экономико-математических моделях все переменные и зависимости отнесены к одному моменту времени. Такими моделями могут описываться как статические системы, координаты которых на изучаемом отрезке времени считаются постоянными, так и динамические системы (в этом случае параметры модели характеризуют состояние системы в заданный момент времени). Например, так изучаются проблемы размещения производства, отраслевая структура экономики на основе статического межотраслевого баланса и другие экономические процессы. Что касается динамических моделей, то они описывают экономику в развитии и поэтому служат основой прогнозов соответствующих процессов. Эти прогнозы, в свою очередь, используются для обоснования перспективных планов и программ.

Формально модель является динамической, если хотя бы одна из её переменных зависит от времени. Существуют два принципиально различных подхода к построению динамических моделей. Первый подход основан на постановке оптимизационной задачи, когда наряду с моделью формулируется некоторый критерий оптимальности. При таком подходе на основании анализа решения оптимизационной задачи принимаются те или иные рекомендации для руководящих органов. Второй подход основан на исследовании различных вариантов развития. В обоих случаях для определения параметров модели используется информация о динамике процесса в базовом периоде.

В общем случае динамические модели сводятся к описанию начального состояния системы, технологических способов производства, инвестиционных процессов, ограничений на переменные (например, экологического характера), а также – при постановке оптимизационной задачи – критерия оптимальности.

Математическое описание динамических моделей осуществляется, как правило, с использованием либо систем дифференциальных уравнений (в случае моделей с непрерывным временем), либо систем разностных уравнений (в случае моделей с дискретным временем).

Можно также разделить все экономико-математические модели по критерию используемого математического аппарата. В этом случае получим модели, анализ которых опирается на решение задач линейного и нелинейного программирования, динамического программирования, оптимального управления, теории игр, теории массового обслуживания и др.

При изучении развития многих процессов экономики на основе математического моделирования возникает задача построения аналитической зависимости, которая связывает значения переменных, характеризующих этот процесс, со временем. Один из основных подходов к построению таких зависимостей – составление системы уравнений, описывающих динамику процесса, и последующее их решение. При этом различают динамические модели двух видов: дискретные и непрерывные. В первом случае модель описывается конечноразностными уравнениями, а во втором – дифференциальными.

При анализе динамических процессов экономики большой теоретический и практический интерес представляет исследование моделей в зависимости от различных внешних воздействий и связанная с этим задача устойчивости равновесных решений по отношению к тем или иным возмущениям. Результатом таких исследований являются разработка своевременных рекомендаций по предотвращению возникающего несоответствия в структуре рассматриваемой системы, определение момента попадания системы в критическую область.

Одними из наиболее распространённых моделей являются оптимизационные, которые, как правило, используются на микроуровне (т.е. данные задачи используются чаще всего субъектами рынка: фирмами, корпорациями и т.д.).

Оптимизационные модели

Отличительными признаками оптимизационных моделей являются:

– наличие одного или нескольких критериев оптимальности (критерий оптимальности – это признак, по которому множество или одно решение задачи признаётся наилучшим); наиболее типичными критериями в экономических оптимизационных задачах являются: максимум дохода или прибыли, минимум издержек, минимальное время для выполнения задания и др.;

– система ограничений, которая формируется, исходя из содержательной постановки задачи, и представляет собой систему уравнений или неравенств.

Математически эти задачи относятся к задачам на условный экстремум. Постановка таких задач, представленных в общем виде, выглядит следующим образом:

• найти условный максимум (или минимум) функции:

$$Y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min); \tag{1.2.1}$$

• при условии, что независимые переменные удовлетворяют ограничениям:

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \qquad (1.2.2)$$

Эта задача является задачей на условный локальный максимум или минимум. Термин «условный» появляется в данном случае в связи с тем, что независимые переменные удовлетворяют условию – системе ограничений (1.2.2). Обычно вместо двух терминов «максимум и минимум» используют один – экстремум. В задаче на условный экстремум функцию $Y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min)$ называют целевой, так как её максимизация или минимизация часто есть формальное выражение какой-либо цели (например, максимизация объёма производства продукции при фиксированных затратах).

Функцию G называют функцией, задающей ограничения. Если в задаче на условный экстремум ограничения в виде системы уравнений $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ заменить на ограничения в виде системы неравенств и добавить требования (ограничения) неотрицательности переменных $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$, то получим задачу математического программирования, в которой необходимо:

• найти экстремум функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min); \qquad (1.2.3)$$

• при условии, что независимые переменные удовлетворяют системам ограничений:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0. \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

В задаче математического программирования функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ также называют целевой функцией; систему неравенств (1.2.4) – специальными ограничениями задачи математического программирования, а неравенства $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$ – общими ограничениями задачи линейного программирования.

Задача линейного программирования – частный случай задачи математического программирования, в которой целевая функция и ограничения являются линейными. Именно этот класс оптимизационных моделей наиболее широко применяется в экономике. Разработаны специальные пакеты программ линейного программирования для решения этого класса задач.

Процесс построения экономико-математических моделей общего типа состоит из следующих взаимосвязанных этапов.

Первый этап – постановка задачи, где формируется цель запланированного мероприятия, ставятся задачи исследования, проводится качественное описание объекта. Данный этап заключается в формулировке законов, связывающих основные элементы модели, где под законами подразумеваются определённые количественные связи между элементами модели.

Уровень детализации модели зависит от конкретной цели исследования. Будем считать, что цель поставлена. Это значит, что в результате исследования того или иного объекта (процесса) на основе моделирования требуется найти ответ на конкретные вопросы, касающиеся его функционирования, перспектив развития и т.д.

Задача построения адекватной модели решается как компромисс между сложностью описания изучаемого объекта (детализацией), которая в большой степени зависит также и от цели исследования, и минимизацией ресурсов (усилий) для получения ответов на вопросы, которые стоят перед разработчиками модели.

Вопрос о степени адекватности разрабатываемой модели является центральным при применении метода моделирования. Для построения адекватной математической модели требуются широкие знания фактов, относящихся к изучаемому процессу, глубокое проникновение в его теорию, анализ статистической и иной информации, отражающей функционирование объекта исследования. Поэтому на первом этапе особенно важно сотрудничество специалистов различных направлений науки.

Необходимость такого сотрудничества обусловлена тем, что степень адекватности разрабатываемой модели зависит, прежде всего, от этого этапа: именно здесь происходит структуризация модели, здесь устанавливаются взаимосвязи между её элементами, здесь закладываются основы математической задачи. В результате сотрудничества специалистов различных направлений, в той или иной мере относящихся к области изучаемого объекта, строится его концептуальная модель. Понятно, что уровень адекватности математической модели в большой степени определяется допущениями, используемыми при построении соответствующей концептуальной модели. К сожалению, приходится констатировать следующее: характерным недостатком изложения экономико-математических моделей является нечёткое обсуждение ключевых гипотез

Второй этап – разработка описательной модели, где формулируются и обосновываются показатели и система основных предположений. Этот этап заключается в формализации сформулированных гипотез, что выражается записью в математических терминах качественных представлений о связях между объектами (подсистемами) концептуальной модели. Эти взаимосвязи устанавливаются на основе тех или иных гипотез, вследствие чего один и тот же процесс в зависимости от используемых гипотез может описываться различными математическими моделями.

Третий этап – разработка математической модели изучаемого объекта с выбором методов исследования, программного обеспечения ПК или составление алгоритма и программы для ПК по новым задачам. На третьем этапе выполняется анализ математических задач, к которым приводят используемые математические модели. В качестве таких задач могут быть разнообразные задачи исследования операций, в которых решаются проблемы выбора наилучшего в некотором смысле варианта из некоторого набора альтернатив; теории вероятностей и теории массового обслуживания, дифференциального и интегрального исчисления, где исследуются процессы с учётом стохастичности и неопределённости некоторых переменных и др. Основным вопросом здесь является решение так называемой прямой задачи, которая заключается в получении в результате анализа модели выходных данных для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемого процесса.

Четвёртый этап – решение задачи на базе разработанной модели, состоящее в реализации пакета прикладных или разработанных программ для ПК. Выходные данные прямой задачи являются теоретическими следствиями входных данных и тех гипотез, которые были заложены в концептуальную и математическую модели. Из сказанного следует, что на этом этапе центр тяжести исследований переносится на решение математических проблем с использованием соответствующего математического аппарата и вычислительной техники. Применение ЭВМ приобретает принципиальное значение особенно при постановке сложных математических задач, исследование которых осуществляется с помощью различных численных методов и выполнением вычислительных экспериментов.

Пятый этап – проверка и настройка модели, т.е. установление соответствия модели описываемому экономическому процессу. Анализ разработанной математической модели включает сравнение результатов исследования математической модели с практикой. На этом этапе происходит выяснение того, удовлетворяет ли принятая модель критерию практики, т.е. выясняется вопрос о том, в какой степени согласуются результаты наблюдений, представления разработчиков модели о изучаемом процессе с теоретическими следствиями модели в пределах точности наблюдений. Если отклонения теоретических следствий от наблюдений выходят за пределы точности наблюдений, то делается вывод о неадекватности используемой модели изучаемому процессу, вследствие чего модель отклоняется.

Здесь следует особо подчеркнуть, что «правдоподобное» изменение переменных модели – необходимое, но не достаточное условие адекватности модели. Пренебрежительное отношение к анализу гипотез моделей приводит к тому, что часто для анализа социально-экономических процессов и принятия ответственных «судьбоносных» решений используются модели (модельные представления), неадекватно отражающие эти процессы. Это происходит, например, тогда, когда единственным критерием адекватности модели оказывается «правдоподобное» изменение её переменных.

Такое же «обоснование» выводов можно обнаружить и в литературе по экономической теории. Например, в макроэкономике часто делается вывод об адекватном описании механизма возникновения колебаний национального дохода в модели делового цикла Самуэльсона-Хикса на том лишь основании, что при определённых значениях параметров этой модели значения национального дохода изменяются циклически. Однако существуют различные модели макроэкономики, в которых используются другие гипотезы о природе колебаний национального дохода и которые тоже обладают свойством цикличности. Поэтому вопрос об адекватности моделей не может решаться формально, на основании прямолинейного понимания принципа «соответствия теории практике».

Шестой этап – представление результатов решения в форме, удобной для изучения, анализ материалов модели на основе обработки результатов, модернизация модели в случае необходимости построения новой, более адекватной модели.

Опыт, накопленный несколькими поколениями учёных, свидетельствует о том, что даже при исследовании сравнительно простых процессов редко удаётся с первого шага построить адекватную математическую модель и подобрать точные её параметры. Построение новой модели осуществляется на основе всестороннего анализа старой модели с использованием, если это необходимо, вычислительных экспериментов.

Анализ модели может привести к изменению представлений исследователей о характере взаимовлияния различных переменных, что, в свою очередь, приводит к необходимости пересмотра гипотез модели и даже полной замене некоторых из них. Поэтому процесс математического моделирования носит, как правило, циклический характер.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

2.1. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ С УЧАСТИЕМ ВНЕШНИХ ИНВЕСТИЦИЙ КАК ФОРМЫ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПОДДЕРЖКИ

Основы дифференциального анализа деятельности предприятий как хозрасчётных единиц заложены в работах, вышедших ещё в 1980 г. Предложенные методы позволяли исследовать динамику развития предприятия (т.е. проследить достаточно долговременные последствия принятых решений) с помощью дифференциальных уравнений, содержащих набор наиболее существенных переменных, которые отражают влияние как внешних факторов (например, динамики инвестиций), так и внутренних характеристик предприятия (себестоимость, фондоотдача и т.д.). Предприятие представлялось очень упрощённо, с использованием сильно агрегированных показателей, принимались гипотезы о монопродуктивности предприятия, неизменности и единственности применяемой технологии, что требует в ряде случаев специального обоснования достоверности и применимости получаемых результатов.

Одна из первых экономико-математических моделей, разработанных применительно к малому промышленному предприятию, была описана в 1997 г. и рассматривала промышленное предприятие, функционирующее в экономическом симбиозе с крупной фирмой, являясь имитационной динамической моделью с дискретным временем.

Данная модель позволяла рассчитать динамику развития промышленного предприятия, осуществляющего диверсификационную стратегию, в состав которой входила деятельность по промышленному производству, коммерции и инновационным разработкам. Функционирование предприятия существенно определялось деятельностью крупного партнёра (фирмы), со стороны которого определялись заявки на производственную, коммерческую и инновационную деятельность малой структуры. Оба предприятия формировали общие фонды, предназначенные для целевого развития предприятий, при этом часть средств этих фондов формировалась за счёт доходов, полученных в результате взаимовыгодного взаимодействия. Полученный результат интерпретировался как «попадание» предприятия в зону одинакового благоприятствования для обоих рассмотренных видов деятельности. Таким образом, данная экономико-математическая модель позволяла рассматривать её как инструмент, позволяющий сформировать необходимые внешние условия функционирования малой фирмы, в частности, стимулировать развитие её производственной деятельности (что важно для развития и рациональной ориентации малого бизнеса на потребности реального сектора). Таким образом, парадокс истории в том, что концептуальные основы такого анализа оказались малоприменимыми для нового класса объектов – промышленных предприятий, которых ещё не было в период разработки моделей плановой экономики.

С современной точки зрения на данный инструментарий, принципы и гипотезы моделирования, используемые в литературе, в большей степени применимы для малых, нежели крупных предприятий. Малые промышленные предприятия, как правило, узкоспециализированные и монопродуктовые, используют одну технологию, не меняя её в процессе своего функционирования и т.д. Наблюдаемые в настоящее время условия формирующегося рынка, полная экономическая самостоятельность предприятий, принципиально иная налоговая система требуют нового этапа исследований для соответствующей адаптации этих методов и, в частности, учёта новых переменных и взаимосвязей между ними.

Приведём пример. В условиях административно-командной системы управления народным хозяйством предприятие должно было не только произвести продукцию, реализовать её и получить прибыль, но и «заслужить право» оставить часть прибыли в собственном распоряжении в виде фондов экономического стимулирования: фонда развития, фонда поощрения, фонда социально-культурных мероприятий. Размер этих фондов определялся по особой методике и зависел от темпов роста реализации и рентабельности предприятия. Остальная часть прибыли из процесса воспроизводства изымалась (различные обязательные отчисления, платежи в бюджет и т.д.).

В настоящее время подобная система формирования фондов развития отсутствует, из прибыли предприятие должно отчислять лишь налоги. Таким образом модели, отражающие динамику воспроизводственного процесса на предприятии в дореформенное и послереформенное время, существенно различны, хотя и предполагают использование общих методических принципов.

Рассмотрим экономико-математические модели, основанные на решении обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих различные способы инвестирования в бизнесе (самофинансирование, государственная поддержка, кредитование). Модели позволяют исследовать динамику развития различных предприятий в зависимости от выбранных инвестиционных стратегий: «чистых» (использование одного инвестиционного источника) и «смешанных» (применение комбинированных схем финансирования), а также выявить условия доступности кредитов.

Немалую роль в формировании ресурсного потенциала любого предприятия играет внешний кредитно-инвестиционный фактор. Его действие проявляется через потоки финансовых средств из различных источников в виде:

1) государственных инвестиций;

2) инвестиций из различных фондов;

3) кредитных ресурсов, предоставляемых банковской системой;

4) кредитных ресурсов, предоставляемых другими юридическими и физическими лицами (кредитные организации, инвестиционные фонды, иностранные инвесторы, ростовщики и т.д.).

Таким образом, внешний кредитно-инвестиционный фактор дополняет действие рассмотренной положительной обратной связи экономического объекта и определяет темпы динамики его развития. При этом важными оказываются как величина осуществляемой кредитно-инвестиционной поддержки и её регулярность (динамика инвестиций во времени), так и другие условия её предоставления (плата за инвестиционный ресурс в виде ставки процента за кредит, сроки возврата кредита и т.д.).

Наблюдаемые в настоящее время условия формирующегося рынка, полная экономическая самостоятельность предприятий, новая система взаимосвязей переменных, принципиально иная налоговая система требуют нового этапа исследований для соответствующей адаптации этих методов и, в частности, учёта кредита, налоговых льгот для предприятий и т.п. Предлагаемый в данной статье инструментальный комплекс состоит из четырёх дифференциальных моделей, и представлен рис. 2.1.1. При построении моделей использовался принцип от простого к сложному.

Рассмотрим адаптированную к условиям турбулентной среды базовую модель динамики предприятия, использующего внешние инвестиции как форму государственной поддержки (модель М1), представленную С.Р. Хачатряном и предназначенную для промышленных предприятий, функционирующих в условиях, описываемых системой предпосылок:

1) предприятие может развиваться как за счёт внутренних источников (прибыли, амортизации), так и за счёт государственной поддержки в виде инвестиций;

2) рассматриваются три различных стратегии государственной поддержки бизнеса: а) постоянная (с фиксированными объёмами инвестиций для каждого периода); б) линейно возрастающая (с известным постоянным темпом роста инвестиций); в) нелинейно возрастающая (с нарастающим темпом и минимальным уровнем гарантированного государственного субсидирования). Собственная инвестиционная стратегия предприятия определяется долей чистой прибыли (которая предполагается постоянной), отчисляемой на реинвестирование;

Рис. 2.1.1. Характеристика моделей промышленных предприятий

3) основные производственные фонды являются единственным лимитирующим фактором, от которого зависит выпуск продукции;

4) любое предприятие функционирует при неизменной технологии, что предполагает постоянство его фондоотдачи;

5) производственная деятельность описывается однофакторной функцией Леонтьева. Темпы развития предприятия характеризуются динамикой основных производственных фондов, которые, в свою очередь, определяются величиной инвестиционных ресурсов (отчислениями от прибыли и величиной финансовой поддержки), а также влиянием внешних факторов с возмущением, прогнозировать которые мы не можем (инфляция, рост цен на сырьё).

Данная модель является адаптированной к изменениям внешней среды путём введения в выражение (2.1.5) обобщённой функции, которая определяет появление возмущений в момент времени t_0, и величины внешних возмущений α, оказывающей влияние на основные производственные фонды.

Зависимости между основными переменными модели предприятия показывают взаимосвязь между агрегированными переменными (такими, как объём выпуска, стоимость основных производственных фондов и темпы их прироста, общая и чистая прибыль, сумма налоговых отчислений и т.д.) и могут быть представлены следующей совокупностью уравнений:

$$P(t) = fA(t); \tag{2.1.1}$$

$$M^{\text{об}}(t) = (1-c)P(t); \tag{2.1.2}$$

$$M(t) = M^{\text{об}}(t) - N(t); \tag{2.1.3}$$

$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M^{\text{об}}(t); \tag{2.1.4}$$

$$dA/dt = \xi M(t) + I(t) + \alpha\delta(t); \tag{2.1.5}$$

$$t \in [0,T],\ \ t_0 \in [0,T),\ \ \xi \in [0,1],\ \ K_\Lambda \in (0,1];$$

$$\delta(t) = \theta'(t),\ \ \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t - t_0 \ge 0, \\ 0 & \text{при } t - t_0 < 0, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

где $P(t)$ – выпуск продукции в момент t в стоимостном выражении; f – показатель фондоотдачи; $A(t)$ – стоимость основных производственных фондов; c – доля удельной себестоимости выпуска продукции в стоимостном выражении; $M^{\text{об}}(t)$ – общая прибыль предприятия; $M(t)$ – чистая прибыль предприятия за вычетом налоговых отчислений; $N(t)$ – сумма налоговых отчислений; τ_1, τ_2 – ставки налогообложения на объём выпуска и прибыль соответственно; ξ – доля чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, $0 \le \xi \le 1$; K_Λ – коэффициент, отражающий долю реинвестируемых средств прибыли, не имеющих льгот по налогообложению (не все реинвестируемые средства освобождаются от налогов), характеризующий соотношение общей и чистой прибыли предприятия, и оцениваемый статистическим путём $0 < K_\Lambda \le 1$;

$I(t)$ – внешние инвестиции, полученные предприятием; $\theta(t)$ – функция Хевисайда (обобщённая функция); α – величина внешних возмущений.

При этом уравнения: (2.1.1) – определяет линейную производственную функцию промышленного предприятия; (2.1.2) – характеризует процесс формирования его общей прибыли за вычетом издержек производства; (2.1.3) – описывает величину чистой прибыли за вычетом общей суммы налоговых отчислений; (2.1.4) – требует специальных пояснений. Уравнение является обобщённым способом расчёта налоговых отчислений, представляющим собой линейную комбинацию альтернативных вариантов налогообложения, действующих в бизнесе (предполагается, что переменные τ_1, τ_2 могут принимать нулевые значения при отсутствии соответствующего налогового варианта). С достаточной условностью можно выделить три группы вариантов, определяющих зависимость налогов от: 1) объёмов производства; 2) общей прибыли; 3) объёмов производства и общей прибыли. Так, в российских условиях, характеризующихся множественностью вариантов налогообложения, налоги могут рассчитываться по одной из трёх схем: общей (третья группа); упрощённой в двух вариантах (первая и вторая группа соответственно); вменённому доходу (первая группа). В целях общности описания в соотношении (2.1.4) учтён также вариант льготного налогообложения инвестиционно активных предприятий, в соответствии с которым реинвестированная часть чистой прибыли $M(t)$ не облагается налогом. Таким образом, имеем:

$$\tau_1 = \begin{cases} 0, & \text{если налоги не зависят от обьёмов производства,} \\ \bar{\tau}_1, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\tau_2 = \begin{cases} 0, & \text{если налоги не зависят от общей прибыли предприятия,} \\ \bar{\tau}_2, & \text{ставка налогов по льготной схеме,} \\ \bar{\tau}_2/1-\xi, & \text{ставка налогов при отсутствии льгот,} \end{cases}$$

где $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ – ставки налогообложения по действующему налоговому законодательству. Здесь льготы, предоставляемые предприятиям, реинвестирующим свою прибыль в производство, учитываются с помощью доли инвестиционных отчислений ξ и коэффициента K_Λ (величина его обычно зависит от границы действия льгот $\xi \le \bar{\xi}$).

Уравнение (2.1.5) описывает динамику прироста основных производственных фондов за счёт собственных средств и внешних инвестиций, при этом учитывается влияние внешних факторов с возмущением, прогнозировать которые мы не можем (инфляция, рост цен на сырьё). Влияние возмущений происходит с помощью введения обобщённой функции, которая оказывает воздействие на основные производственные фонды в определённый момент t_0 времени.

Подставляя (2.1.2) и (2.1.4) в соотношение (2.1.3), получаем

$$M(t) = P(t)(1-c) - \tau_1 P(t) - \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M(t) =$$

$$= P(t)[(1-c) - \tau_1] - \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M(t). \qquad (2.1.7)$$

Выражая явным образом переменную $M(t)$ в соотношении (2.1.7), имеем:

$$M(t) = \frac{(1-c-\tau_1)P(t)}{1+\tau_2 K_\Lambda (1-\xi)}. \qquad (2.1.8)$$

Отсюда, после подстановки (2.1.8) в (2.1.5) имеем

$$dA/dt = \hat{a}P(t) + I(t) + \alpha\delta(t), \qquad (2.1.9)$$

где $\hat{a} = \dfrac{(1-c-\tau_1)\xi}{1+\tau_2 K_\Lambda (1-\xi)}$.

Учитывая (2.1.1), система соотношений (2.1.1) – (2.1.4) преобразуется к линейному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$dA/dt = f\hat{a}A(t) + I(t) + \alpha\delta(t). \qquad (2.1.10)$$

Общим решением дифференциального уравнения является:

$$A(t) = A_0 \exp\left(\int_0^t a\,ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a\,d\xi\right)(I(t) + \alpha\delta(t))\,ds, \text{ где } A_0 = A(0).$$

Рассмотрим три частных случая динамики инвестиций $I(t)$:

$$1)\ I(t)=I_0=\text{const};\quad 2)\ I(t)=\beta t;\quad 3)\ I(t)=Be^{\beta t}. \tag{2.1.11}$$

Они соответствуют трём стратегиям государственной финансовой поддержки российского предпринимательства: 1) постоянной – с фиксированными объёмами инвестиций для каждого периода; 2) возрастающей – по линейному закону с темпом роста инвестиций $\beta>0$; 3) возрастающей – по нелинейному (экспоненциальному) закону со средним темпом $\beta>0$ и с минимальным уровнем гарантированной государственной поддержки ($I(0)=B$ при $t=0$).

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2.1.10) для рассматриваемых правых частей имеет вид:

$$A(t)=\left(A_0+{I_0}/{a}+{\alpha\theta(t)}/{a}\right)e^{at}-{I_0}/{a}+\alpha\theta(t)e^{a(t-t_0)}, \tag{2.1.12}$$

$$A(t)=\left(A_0+{\beta}/{a^2}+{\alpha\theta(t)}/{a}\right)e^{at}-{\beta(at+1)}/{a^2}+\alpha\theta(t)e^{a(t-t_0)}, \tag{2.1.13}$$

$$A(t)=\left(A_0+{B}/{(a-\beta)}+{\alpha\theta(t)}/{a}\right)e^{at}-{Be^{\beta t}}/{(a-\beta)}+\alpha\theta(t)e^{a(t-t_0)}, \tag{2.1.14}$$

где $A_0=A(0)$.

Сопоставляя темпы роста основных фондов для различных вариантов инвестирования предприятия, убеждаемся в том, что они соответствуют интенсивности финансовой поддержки, а также зависят от параметров, характеризующих деятельность рассматриваемого экономического объекта, экономических характеристик предприятия, определяющих значение переменной a, а также величины внешних возмущений α (см. (2.1.9) и (2.1.10)).

Математическая структура основного уравнения динамики промышленного предприятия (2.1.10), как и структура полученных решений (2.1.12) – (2.1.14), соответствует результатам дифференциального анализа применительно к предприятию как хозяйственному объекту. Однако экономическое содержание переменных, входящих в полученные решения, для сопоставляемых исследований различно и определяется исходными посылками рассматриваемых в каждом случае моделей.

Рассмотрим более сложный случай, при котором не только внешние, но и внутренние инвестиции предприятия являются функцией времени. Этот случай учитывается в модели путём описания динамики переменной, отражающей долю чистой прибыли, отчисляемой на реинвестирование, как известной функции времени $\xi(t)$. При любом виде функции $\xi(t)$ данная модель предприятия становится нелинейной.

По своему экономическому содержанию данная переменная – управляющий параметр, определяемый собственником данного предприятия, и характеризующий размер средств, направляемых на потребление и накопление. Поэтому введение в модель динамики переменной $\xi(t)$ описывает определённую стратегию поведения руководства предприятия при распределении чистой прибыли.

Примем следующие предпосылки.

Промышленное предприятие рассматривается на временном интервале $[0,T]$. Пусть $\xi(t)$ – известная монотонно возрастающая функция времени, для которой задан верхний предел изменения Ψ (определяемый экспертно или на основе статистического анализа $0<\Psi\le 1$, $\xi(T)=\Psi$). Внешние инвестиции являются некоторой функцией времени $I(t)$, причём $\int\limits_0^t I(t)dt=I^t$. Требуется определить верхнюю границу изменения основных фондов предприятия $A(t)$ и оценить их величину к концу периода T.

С учётом сделанных предпосылок уравнение (2.1.10) имеет вид:

$${dA}/{dt}=a(t)A(t)+I(t)+\alpha\,\delta(t), \tag{2.1.15}$$

где

$$a(t)=\frac{(1-c-\tau_1)\xi(t)}{1+\tau_2K_\Lambda(1-\xi(t))}f. \tag{2.1.16}$$

Соотношение (2.1.15) – нелинейное дифференциальное уравнение с возбуждением, решение которого зависит от вида функции $I(t)$. Если оно неразрешимо в явном виде относительно $A(t)$ его можно решать приближёнными методами. Кроме того, для него определяема верхняя оценка динамики $A(t)$.

Проинтегрировав обе части уравнения (2.1.15) на интервале $[0,t]$, получаем:

$$A(t)-A(0)=\int_0^t a(t)A(t)dt+\int_0^t I(t)dt+\int_0^t \alpha\delta(t)dt\ . \qquad (2.1.17)$$

С учётом того, что $A_0 = A(0)$, $\theta(t_0)=\int_a^b \delta(t)dt$ и $\int_0^t I(t)dt = I^t$, получаем:

$$A(t)=A_0+I^t+\int_0^t a(t)A(t)dt+\alpha\theta(t)\,. \qquad (2.1.18)$$

Для уравнения (2.1.18) применима оценка Гроноулла-Беллмана:

$$A(t)\le (A_0+I^t+\alpha\theta(t))e^{\int_0^t a(t)dt}\ . \qquad (2.1.19)$$

Видим, что $a(t)$ растёт монотонно с ростом $\xi(t)$, что следует из соотношения (2.1.16). Следовательно, максимальное значение функция $a(t)$ достигает при $\xi(t)$ в конце периода T. Это позволяет получить верхнюю оценку динамики основных фондов в упрощённом виде:

$$A(t)\le (A_0+I^t+\alpha\theta(t))e^{\{\overline{a}t\}}\ , \qquad (2.1.20)$$

где $\overline{a}=a(T)$ при $\xi(t)=\Psi$.

Для определённости зададим функцию $\xi(t)$ в виде функции:

$$\xi(t)=\gamma t^2\ , \qquad (2.1.21)$$

где γ – темп «наращивания» процесса реинвестирования средств предприятия. Данная функция отражает ситуацию улучшения инвестиционного климата и активизацию инвестиционных процессов, в частности процессов самофинансирования предприятия.

В соответствии со сделанными предпосылками будем считать:

$$\xi(t)=\begin{cases}\gamma t^2 & \text{при } t\le T,\\ \psi & \text{при } t=T.\end{cases} \qquad (2.1.22)$$

Вид этой зависимости изображён на рис. 2.1.2.

Так как $\xi(T)=\gamma T^2=\Psi$, по определению заданной функции (2.1.22), получаем величину темпа реинвестирования:

$$\gamma=\frac{\Psi}{T^2}\ . \qquad (2.1.23)$$

Подставляя (2.1.23) в выражение (2.1.22), получаем:

$$\xi(t)=\frac{\Psi t^2}{T^2}\ . \qquad (2.1.24)$$

Полученное выражение (2.1.24) позволяет определить параметр $a(t)$ в соответствии с формулой (2.1.16). Обозначив $m=f(1-c-\tau_1)$ и $n=\tau_2K_\Lambda$ приходим к следующему выражению:

$$a(t)=\frac{m\Psi t^2/T^2}{1+n\left(1-\Psi t^2/T^2\right)}=\frac{m\Psi t^2}{T^2\left(1+n-n\Psi t^2/T^2\right)}\ . \qquad (2.1.25)$$

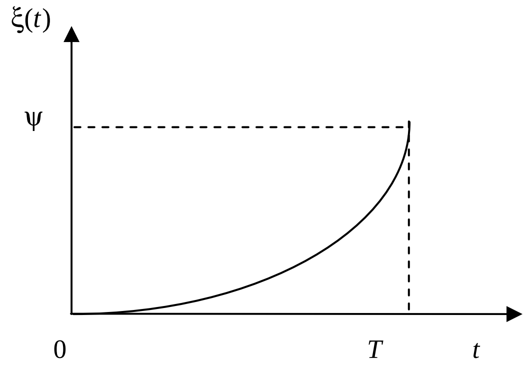

Рис. 2.1.2. Динамика доли средств,
реинвестируемых промышленным предприятием

Подставив (2.1.25) в формулу (2.1.19), получим оценку для верхней границы фондов $A(t)$ для рассмотренного вида функции $\xi(t)$. С этой целью вычислим интеграл $E(t)=\int_0^t a(z)dz$.

Получаем, что

$$E(t)=\frac{m\Psi}{T^2}\int_0^t \frac{z^2}{1+n-n\Psi z^2/T^2}\,dz\,. \qquad (2.1.26)$$

Обозначим $g=1+n$, $G=\frac{n\Psi}{T^2}$.

Тогда

$$E(t)=\frac{mG}{n}\int_0^z \frac{z^2}{g-Gz^2}\,dz=\frac{m}{n}\left[-t+\int_0^z \frac{dz}{1-G/g\, z^2}\right]. \qquad (2.1.27)$$

Обозначив $\mu=\sqrt{\frac{G}{g}}$ и преобразуя выражение (2.1.27), получим:

$$E(t)=\frac{m}{n}\left[-t+\frac{1}{\mu}\int_0^z \frac{d\mu z}{1-(\mu z)^2}\right]=\frac{m}{n}\left[-t+\frac{1}{2\mu}\ln\left|\frac{1-\mu t}{1+\mu t}\right|\right].$$

Итак, оценка верхней границы основных фондов при $z=T$ в соответствии с формулой (2.1.19) имеет вид:

$$A(T)\le (A_0+I^T+\alpha\theta(T))e^{\frac{m}{n}\left[-t+\frac{1}{2\mu}\ln\left|\frac{1-\mu T}{1+\mu T}\right|\right]}, \qquad (2.1.28)$$

или
$$A(T)\le (A_0+I^T+\alpha)\left|\frac{1-\mu t}{1+\mu t}\right|^{\frac{1}{2\mu}} e^{-\frac{mT}{n}},$$

где $m=f(1-c-\tau_1)$, $n=\tau_2 K_\Lambda$, $\mu=\sqrt{n\psi/T^2(1-n)}$, $g=\frac{n\Psi}{T^2}$.

Из формулы (2.1.28) следует, что величина верхней границы динамики основных фондов зависит от их начального уровня A_0, общего объёма выделенных за период инвестиций I^T, величины возмущений α и от целого ряда других факторов. К числу факторов, форсирующих динамику процесса, относятся переменные, определяющие эффективность производства, величину удельной прибыли предприятия (входят в параметр m) и его фондоотдачу. К числу факторов, тормозящих динамику, относятся переменные, ограничивающие долю инвестирования и характеризующие налоговый пресс на предприятие (входят в параметры n и μ).

Исследование форсирующих факторов роста предприятия как функций времени показывает использование в экономико-математическом анализе производственных функций нелинейного типа, что определяет необходимость разработки соответствующих модификаций модели.

К числу экономических характеристик, влияющих на динамику развития предприятия, относится доля чистой прибыли, направляемой на инвестирование. В связи с этим в данной работе рассмотрена ещё одна стратегия – стратегия интенсификации внутреннего инвестирования, которая отражает тенденцию активизации процессов самофинансирования предприятия, наблюдаемую в современных условиях некоторого ухудшения инвестиционного климата. При этом рост внутренних инвестиций определяется долей чистой прибыли, задаваемой в виде возрастающей (например, степенной) функции от времени. Проведя исследование видим, что в новых условиях модель М1 становится нелинейной, а решение соответствующего ей нелинейного дифференциального уравнения зависит от вида правой части (функции внешнего инвестирования). В том случае, если оно неразрешимо аналитически, оно решается приближёнными численными методами.

Оценка динамики основных фондов предприятия проводится также для случая изменяющейся во времени фондоотдачи $f(t)$. Этот случай соответствует внедрению новых технологий производства, обуславливающих рост эффективности и повышение производительности труда, применению различных организационно-технических мероприятий, изменяющих фондоёмкость процессов и т.д., и приводит к нелинейной модели. Общая оценка динамики фондов описывается неравенством (2.1.19). Конкретная величина этой оценки определяется характером изменения функции фондоотдачи $f(t)$, входящей в переменную $a(t)$. Фактически данный случай означает использование в модели предприятия новой производственной функции. В связи с этим возникает задача проведения анализа динамики различных типов предприятий, производственный процесс которых описывается разными производственными функциями, в том числе и нелинейными.

2.2. МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим промышленное предприятие, функционирующее в условиях, описываемых той же системой предпосылок, которая используется в адаптированной модели М1, показывающей взаимосвязь между агрегированными переменными (такими как объём выпуска, стоимость основных производственных фондов и темпы их прироста, общая и чистая прибыль, сумма налоговых отчислений и т.д.) и учитывающей влияние турбулентной среды. Однако вместо однофакторной производственной функции, описываемой соотношением (2.1.1), будем использовать нелинейные виды производственных функций.

Адаптированная модель М2 основана на системе предпосылок 1 – 4 модели М1. Вместо линейной производственной функции (предпосылка 5) используются нелинейные виды однофакторных производственных функций Леонтьева (см. предпосылку 5 в адаптированной модели М1), в том числе:

1) степенная – для описания функционирования новообразованного предприятия, освоившего относительно свободную рыночную нишу и имеющего высокий потенциал развития;

2) экспоненциальная, с затухающими темпами и наличием асимптоты – для предприятия, имеющего ограничения по спросу.

Зависимости между основными переменными адаптированной модели М2 предприятия показывают взаимосвязь между агрегированными переменными (такими, как объём выпуска, стоимость основных производственных фондов и темпы их прироста, общая и чистая прибыль, сумма налоговых отчислений и т.д.) и могут быть представлены следующей совокупностью уравнений:

$$P(t) = fA(t)\,; \tag{2.2.1}$$

$$M^{\text{об}}(t) = (1-c)P(t)\,; \tag{2.2.2}$$

$$M(t) = M^{\text{об}}(t) - N(t)\,; \tag{2.2.3}$$

$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi)^{\text{об}} M(t)\,; \tag{2.2.4}$$

$$dA/dt = \hat{a}P(t) + I(t) + \alpha\,\delta(t)\,; \tag{2.2.5}$$

$$t \in [0,T]\,; \quad t_0 \in [0,T)\,; \quad \xi \in [0,1]\,; \quad K_\Lambda \in (0,1]\,;$$

$$\delta(t) = \theta'(t)\,,\ \theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t - t_0 \ge 0, \\ 0 & \text{при } t - t_0 < 0. \end{cases}$$

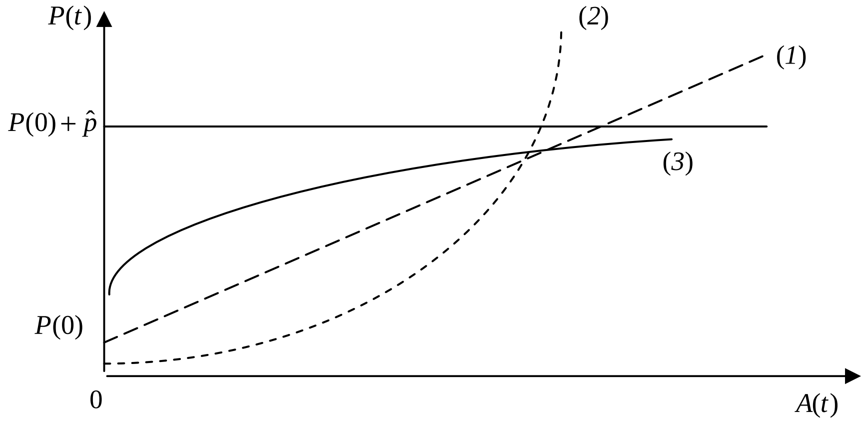

Рис. 2.2.1. Виды производственных функций промышленного предприятия:

1 – линейная: $P(t) = fA(t)$; *2* – степенная: $P(t) = \gamma[A(t)]^m$;

3 – с затухающим темпом роста: $P(t) = P_0 + \hat{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-A(t)}\right)$

Уравнение (2.2.5) описывает динамику прироста основных производственных фондов за счёт собственных средств и внешних инвестиций, с учётом непредвиденных факторов.

Динамика развития промышленных предприятий часто характеризуется значительной нелинейностью (рис. 2.2.1). Так, на первых стадиях их роста могут наблюдаться значительные темпы развития, которые затем сменяются затухающей динамикой.

1. *Случай степенной производственной функции.* Для описания функционирования новообразованного промышленного предприятия, освоившего относительно свободную нишу и имеющего высокий потенциал развития, используем степенную функцию вида

$$P(t) = \gamma[A(t)]^m. \tag{2.2.6}$$

При лимитирующем факторе основных производственных фондов она является частным случаем известной функции Кобба-Дугласа, имеющей вид:

$$P(t) = \gamma A(t)^m L^\lambda, \quad m + \lambda = 1, \tag{2.2.7}$$

где γ – параметр этой функции; L – трудовые ресурсы; m и λ – коэффициенты эластичности замены основных фондов и труда соответственно.

Используя соотношение $dA/dt = \hat{a}P(t) + I(t) + \alpha\delta(t)$ и обозначив $P(t) = \gamma[A(t)]^m$ получаем основное уравнение динамики предприятия в случае степенной производственной функции, которое имеет вид:

$$dA/dt = \bar{a}\left[A(t)\right]^m + I(t) + \alpha\delta(t), \tag{2.2.8}$$

где $\bar{a} = \gamma \dfrac{(1 - c - \tau_1)\xi(t)}{1 + \tau_2 K_\Lambda (1 - \xi(t))}$.

Анализ уравнения (2.2.8) показал, что оно неразрешимо в явном виде для некоторых видов правых частей. Так, для случаев $I(t) = I_0 = \mathrm{const}$ и $I(t) = \beta_1 \mathrm{e}^{\beta_2 t}$ это уравнение целесообразно решать приближёнными методами.

Уравнение (2.2.8) неразрешимо также для случая $I(t) = \beta A(t)$, т.е. для такой ситуации, когда поток государственных инвестиций пропорционален динамике основных фондов промышленного предприятия с коэффициентом пропорциональности $\beta\,(0 < \beta < 1)$. Иными словами, в рассматриваемом случае реализуется следующая стратегия государственной поддержки – чем больше предприятие, тем больше инвестиций ему выделяется.

При этом (2.2.8) принимает вид:

$$dA/dt = \bar{a}[A(t)]^m + \beta A(t) + \alpha\delta(t). \tag{2.2.9}$$

Качественный анализ динамики $A(t)$ из соотношения (2.2.9) с помощью численных методов свидетельствует, что рост основных фондов определяется в данной модели их начальным состоянием A_0, структурными характеристиками объекта $\bar{a}$, а также соотношением темпа роста инвестиций β, показателем эффективности производства χ и величиной возмущения α.

Для промышленного предприятия могут быть использованы также функции, отражающие процесс насыщения производства продукции.

2. Случай экспоненциальной производственной функции. Динамика предприятий часто характеризуется значительной нелинейностью, на первых стадиях могут наблюдаться высокие темпы роста, которые затем снижаются. При этом в модели используются функции, отражающие процесс насыщения производства продукции:

$$P(t) = P_0 + \hat{p}(1 - e^{-A(t)}), \tag{2.2.10}$$

где $P_0 = P(0)$ – начальный уровень производства; $\hat{p}$ – предел насыщения; $P(t) \to P(0) + \hat{p}$ при $t \to \infty$. (рис. 2.2.1).

Функция (2.2.10) отражает процесс роста промышленного предприятия до некоторого предела (асимптоты), определяемого внешними условиями (например, сбытом продукции, максимально возможным уровнем интенсификации труда небольшого штата сотрудников и т.д.). Дальнейшее падение производства в условиях мобильности бизнеса почти всегда означает свёртывание производства и организацию нового дела, поэтому случаи снижения выпуска продукции в данной модели не рассматриваются.

Используя полученное ранее соотношение (2.1.9), отражающее связь между динамикой основных производственных фондов и производственной функцией при наличии внешних инвестиций, получаем:

$$dA/dt = \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 e^{-A(t)} + I(t) + \alpha\delta(t), \tag{2.2.11}$$

где $\tilde{a}_1 = \hat{a}(P_0 + \hat{p})$ и $\tilde{a}_2 = \hat{a}\,\hat{p}$.

В том случае, если динамика внешних инвестиций известна и задана соответственно соотношениями:

1) $I(t) = I_0 = \text{const}$; 2) $I(t) = \beta_1 e^{\beta_2 t}$.

Из нелинейного дифференциального уравнения (2.2.11) получаем следующие варианты динамики основных производственных фондов.

1. Для постоянных инвестиций $I(t) = I_0 = \text{const}$.

В этом случае уравнение (2.2.11) приобретает вид:

$$dA/dt + \tilde{a}_2 e^{-A(t)} = \tilde{a}_1 + I_0 + \alpha\delta(t).$$

Решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$A(t) = \ln\left[\frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_1 + I_0} e^{\alpha\theta(t)} - (\tilde{a}_2\theta(t)e^{-\alpha}t - C)e^{(\tilde{a}_1 + I_0)t + \alpha\theta(t)}\right],$$

где C определяется по начальному условию $A(0) = A_0$, $(C > \tilde{a}_2 t)$.

2. Для растущих с темпом β_2 инвестиций $I(t) = \beta_1 e^{\beta_2 t}$.

В этом случае уравнение (2.2.11) примет вид:

$$dA/dt + \tilde{a}_2 e^{-A(t)} = \tilde{a}_1 + \beta_1 e^{\beta_2 t} + \alpha\delta(t).$$

Сделав необходимые преобразования, получаем:

$$A(t) = \ln\left(\frac{-\tilde{a}_2}{\beta_2} e^{-\alpha\theta(t) - \tilde{a}_1 t}\left(e^{\frac{\beta_1}{\beta_2}e^{\beta_2 t}} + \alpha\theta(t)\right)\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^n e^{\beta_2 n t}}{n!\left(n - \frac{\tilde{a}_1}{\beta_2}\right)} + Ce^{\frac{\beta_1}{\beta_2}e^{\beta_2 t} + \tilde{a}_1 t + \alpha\theta(t)}\right),$$

где C определяется по начальному условию $A(0) = A_0$,

$$C=e^{A_0-\frac{\beta_1}{\beta_2}}-\frac{\tilde{a}_2}{\beta_2}\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^n}{n!\left(n-\frac{\tilde{a}_1}{\beta_2}\right)}.$$

2.3. МОДЕЛЬ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ, ПРИВЛЕКАЮЩЕГО ЕДИНОВРЕМЕННЫЙ КРЕДИТНЫЙ РЕСУРС ПРИ УСЛОВИИ РАВНОМЕРНОГО ПОГАШЕНИЯ ДОЛГА

Исследуем динамику предприятия, функционирующего в условиях, описанных гипотезами адаптированной модели М1, но без государственной поддержки: $I(t)=0$. Рассмотрим ситуацию единовременного кредитования предприятия, осуществляющего равномерное погашение долга с учётом начисления процентов, что сказывается на его показателях прибыли (возмещение основного долга) и себестоимости (затраты, связанные с выплатой процента).

Предполагается, что предоставление кредита осуществляется единожды в начальный момент времени, что влечёт за собой увеличение стоимости начального размера основных фондов предприятия. По кредиту начисляются сложные проценты, а его погашение (с учётом процентов) производится равными суммами и завершается к концу рассматриваемого периода. При этом необходимость возврата долга уменьшает прибыль предприятия (за счёт возмещения основного долга) и обусловливает рост удельной себестоимости продукции (за счёт начисления процентных издержек).

Использование заёмных средств предприятием хотя и является нагрузкой на прибыль предприятия, но одновременно оказывает известный положительный эффект, обусловленный уменьшением величины налогооблагаемой прибыли, за счёт выплаты процентов.

Считаем, что предоставление единовременного кредита в момент времени $t=0$ в размере K_0 отражается в модели путём увеличения стоимости начальных основных производственных фондов A_0 на сумму кредита K_0. По кредиту начисляются сложные проценты, непрерывным аналогом которых является функция e^{rt}. Таким образом, размер долгового обязательства $D(t)$, погашаемого к моменту t, составляет величину:

$$D(t)=K_0e^{rt},\ t=0,\ ...,\ T.$$

При условии равномерного погашения долга, выданного на период T, величина выплачиваемой в каждый момент t суммы долговых обязательств $Z(t)$ является постоянной и рассчитывается следующим образом:

$$Z(t)=K_0e^{rT}\Big/T=\text{const}.$$

Величина $Z(t)$ представляется в виде суммы двух слагаемых: $\hat{S}$ –части основного долга в момент *t*; $\hat{s}$ – процентов, выплачиваемых в этом же периоде:

$$Z(t)=\frac{K_0e^{rT}}{T}=\frac{K_0(e^{rT}-1)+K_0}{T}=\hat{S}+\hat{s}.$$

Константа $\hat{S}$ уменьшает прибыль предприятия $M(t)$ для каждого t, а константа $\hat{s}$ – обусловливает рост удельной себестоимости следующим образом:

$$\tilde{c}=c+\hat{s}/P(t),$$

где $\tilde{c}$ – новая удельная себестоимость.

Следовательно, величина общей прибыли $M^{\text{об}}(t)$ изменяется таким образом, что

$$M^{\text{об}}(t)=[1-c-\hat{s}/P(t)]P(t)=(1-c)P(t)-\hat{s}.$$

С учётом сделанных предположений система соотношений динамической модели предприятия может быть записана следующим образом:

$$\tilde{A}_0=A_0+K_0; \tag{2.3.1}$$

$$P(t)=fA(t); \tag{2.3.2}$$

$$M^{\text{об}}(t)=(1-c)P(t)-\hat{s}; \tag{2.3.3}$$

$$M(t) = M^{\text{об}}(t) - N(t)\,; \qquad (2.3.4)$$

$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M^{\text{об}}(t)\,; \qquad (2.3.5)$$

$$dA/_{dt} = \xi(M(t) - \hat{S}) + \alpha\delta(t)\,; \qquad (2.3.6)$$

$$t \in [0,T]\,, \quad t_0 \in [0,T)\,, \quad \xi \in [0,1]\,, \quad K_\Lambda \in (0,1]\,;$$

$$\delta(t) = \theta'(t)\,,\ \theta(t) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ t - t_0 \ge 0, \\ 0 \ \text{ при } \ t - t_0 < 0. \end{cases}$$

Сопоставим полученную систему уравнений (2.3.1) – (2.3.6) с системой (2.1.1) – (2.1.5) для модели M1. Видно, что их математическая структура идентична (с точностью до констант и начальных условий) и при условии $I_0 = \xi\,\hat{S}$ и $A_0 = \tilde{A}_0 - K_0$ система (2.1.1) – (2.1.5) трансформируется в систему (2.3.1) – (2.3.6). Поэтому решение системы (2.3.1) – (2.3.6) представляет собой следующее соотношение:

$$dA/_{dt} = \bar{a}A(t)^{\alpha} + I(t) + \alpha\delta(t)\,, \qquad (2.3.7)$$

где

$$\bar{a}(t) = \frac{(1 - c - \hat{s} - \tau_1)\xi}{1 + \tau_2 K_\lambda (1-\xi)} f\,. \qquad (2.3.8)$$

Действительно, при $I_0 = \xi\,\hat{S}$ и $A_0 = \tilde{A}_0 - K_0$ система (2.1.1) – (2.1.5) трансформируется в систему (2.3.1) – (2.3.6), поэтому её решение является аналогом решения (2.1.12):

$$A(t) = \left[(A_0 + K_0) - \xi\hat{S}/\bar{a}\right]e^{\bar{a}t} + \xi\hat{S}/\bar{a} + \alpha\theta(t)e^{\bar{a}(t-t_0)}\,. \qquad (2.3.9)$$

Анализ соотношения (2.3.7) свидетельствует, что темп роста системы в значительной степени определяется показателем экспоненты $\bar{a}$, зависящим главным образом от внутреннего экономического механизма промышленного предприятия, тем не менее соотношение констант, определяющих условия кредитования и формирующих сомножитель экспоненты, может существенно повлиять на динамику его основных производственных фондов.

Исследуем схему равномерного погашения кредитной задолженности с начислением процентов в дискретном времени. Тогда процентные платежи рассчитываются следующим образом:

$$\Pi = K_0 r + \left(K_0 - \frac{K_0}{T}\right)r + \left(K_0 - \frac{2K_0}{T}\right)r + \ldots + \left(K_0 - \frac{(T-1)K_0}{T}\right)r = K_0 r\frac{T+1}{2}\,.$$

Платёж в дискретный момент t, как и ранее, состоит из погашения основного долга и процентов:

$$P(t) = \frac{K_0}{T} + \frac{K_0 r(T+1)}{2T} = \hat{S} + \hat{s}\,,$$

где $\hat{S} = \dfrac{K_0}{T}$, $\hat{s} = \dfrac{K_0 r(T+1)}{2T}$.

При этом $\int_0^T \hat{S}dt = \dfrac{K_0}{T}\int_0^T dt = K_0$ основной долг,

$\int_0^T \hat{s}\,dt = \int_0^T \dfrac{K_0 r(T+1)}{2T}dt = \dfrac{K_0 r(T+1)}{2}$ – начисленный процент.

Важным вопросом является исследование условий доступности кредита для предприятия.

Анализ модели M3 свидетельствует, что для обеспечения роста предприятия должны быть выполнены два условия:

1) необходимое (размер процентов по кредиту не должен превышать общей прибыли):

$$M^{\text{об}}(t) = (1-c)P(t) - \hat{s} > 0\,; \qquad (2.3.10)$$

2) достаточное (размер чистой прибыли должен превышать долговые обязательства):

$$dA/dt > 0 \text{ или } M(t) - \hat{S} > 0 \text{ при } \xi > 0 \, . \qquad (2.3.11)$$

В том случае, если эти условия не выполняются, предприятию не целесообразно брать кредит – он недоступный.

Для характеристики доступности кредита могут быть использованы также другие соотношения и показатели.

Так, в экономических исследованиях величина доступности кредита обычно оценивается индикатором $\mu(t)$, который вычисляется как отношение долгового обязательства $S(t)$ к величине $M(t)$:

$$\mu(t) = \frac{S(t)}{M(t)} = \frac{\hat{S}}{M(t)} \, .$$

Если $\mu(t) \le 1$, кредит в момент t является доступным, если $\mu(t) > 1$ – соответственно недоступным. Чем величина $\mu(t) < 1$ меньше, тем кредит более доступен для предприятия. Соотношение параметров, входящих в $\hat{S}$ и $M(t)$ и обеспечивающих доступность кредитов для предприятия, в данном случае будет выглядеть так:

$$\mu(t) = \frac{\dfrac{K_0}{T}}{\dfrac{1 - c - \hat{s} - \tau_1}{1 + \tau_2 K_\lambda (1 - \xi)} f \, A(t)} \, .$$

При фиксированной сумме кредита K_0 его доступность в каждый момент времени t зависит от динамики основных фондов системы (т.е. от тех параметров, которые определяют эту динамику): при достаточно быстром росте $A(t)$ обеспечивается выполнение условия $\mu(t) < 1$.

Неравенства (2.3.10) и (2.3.11) свидетельствуют о целесообразности исследования вопросов, связанных с условиями предоставления и возврата заёмных средств, так как они существенно влияют на доступность кредитов. Поскольку проблема кредитования предприятий является весьма актуальной (последние два года процесс кредитования предприятий различных форм собственности заметно интенсифицировался), дальнейшее развитие рассмотренного инструментария целесообразно осуществлять как по пути более детального анализа процессов кредитования, так и в направлении построения более общих вариантов моделей предприятия, учитывающих многоканальные (комбинированные) схемы финансирования.

2.4. ОБОБЩЁННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА СТРАТЕГИЙ РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ И КОМБИНИРОВАННЫХ СХЕМ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Рассмотрим динамическую модель, предполагающую функционирование промышленного предприятия в условиях, близких к описываемым в моделях М1 – М3, но отличающихся от них по следующим направлениям.

В указанных моделях М1 – М3 предполагалось, что если доля средств от чистой прибыли $M(t)$ реинвестируемая в развитие промышленного предприятия, составляет величину ξ, то оставшаяся часть этой прибыли в размере $(1-\xi)M(t)$ идёт на потребление. Однако при реализации инвестиционных проектов, а также в условиях привлечения кредитных ресурсов и разных схем их погашения может возникнуть необходимость накопления средств для выполнения определённых обязательств по погашению кредитной задолженности. В этом случае часть чистой прибыли в размере $(1-\chi)(1-\xi)M(t)$ идёт на потребление, а другая – в размере $\chi(1-\xi)M(t)$, где $0 \le \chi \le 1$, идёт на «внешние» вложения с использованием, например, имеющихся в распоряжении промышленного предприятия финансовых инструментов. Целесообразность подобной процедуры возникает лишь в том случае, когда доходность от используемых финансовых инструментов выше внутренней инвестиционной доходности предприятия.

В данной модели считается, что промышленное предприятие может одновременно использовать четыре различных финансово-инвестицион-
ных источника для своего развития: а) собственные средства (часть реинвестируемой прибыли); б) кредиты (предполагается, что кредиты выдаются ежегодно в виде кредитной линии); в) государственная инвестиционная поддержка (предполагается в виде государственного субсидирования кредитов – между величиной кредитов и государственными инвестициями соблюдается известная пропорциональность на всём рассматриваемом промежутке времени); г) доход от внешних инвестиций промышленного предприятия (за счёт части свободной прибыли). В моделях, рассмотренных ранее, учитывается либо один, либо два из перечисленных выше источников финансирования.

Отличительной особенностью данной модели являются также условия предоставления и погашения кредита. В модели М4 рассматриваются льготные условия кредитования, характерные именно для среднего и малого бизнеса: погашение кредита осуществляется из двух источников: проценты включаются в себестоимость, основной долг компенсируется за счёт внешнего инвестирования. Таким образом, внутренняя инвестиционная программа предприятия $\xi M(t)$ сохраняется неизменной.

Кроме того, в отличие от моделей М1 – М3, в уравнении динамики фондов учитывается процесс их выбытия, связанный с моральным и физическим износом. Данная проблема актуальна для всех современных российских предприятий ввиду значительной изношенности их основных фондов. К 2009 г. по экспертным оценкам прогнозируется беспрецедентный (обвальный) уровень выбытия основных фондов, составляющий ввиду крайнего их износа до 70 – 80% их стоимости. В описанной ситуации для обеспечения развития промышленного предприятия оказывается важным, во-первых, скорость обновления фондов, во-вторых, размер и условия предоставления кредита (т.е. принятая схема кредитования). Эти условия могут либо благоприятствовать успешному росту и развитию предприятия, либо тормозить темпы его динамики.

Предлагаемая адаптированная модель является в указанном смысле обобщённой и более полно отображает факторы, влияющие на развитие промышленного предприятия. В обобщённой модели промышленного предприятия используются гипотезы 1, 3, 4, 5 модели М1. Кроме того, добавлены следующие гипотезы: 2 – государственная поддержка определяется спросом предприятия на кредиты; 6 – часть свободной прибыли предприятия размещается в доходные финансовые инструменты; 7 – заёмные средства привлекаются в виде кредитной линии; 8 – основной долг погашается за счёт доходов от внешнего инвестирования; 9 – учитывается процесс выбытия основных фондов.

С учётом сделанных предположений система соотношений промышленного предприятия для обобщённой адаптированной модели может быть записана следующим образом:

$$P(t) = fA(t)\,; \qquad (2.4.1)$$

$$M^{\text{об}}(t) = (1-c)P(t) - \hat{s}(t)\,; \qquad (2.4.2)$$

$$M(t) = M^{\text{об}}(t) - N(t)\,; \qquad (2.4.3)$$

$$N(t) = \tau_1 P(t) + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi) M(t)\,; \qquad (2.4.4)$$

$$I(t) = \lambda K(t)\,; \qquad (2.4.5)$$

$$dA\big/dt = \xi(M(t) - \hat{S}) + (1+\lambda)K(t) - \mu A(t) + \alpha\delta(t)\,; \qquad (2.4.6)$$

$$t \in [0,T]\,,\ t_0 \in [0,T)\,,\ \xi \in [0,1]\,,\ K_\Lambda \in (0,1]\,;$$

$$\delta(t) = \theta'(t)\,,\ \theta(t) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ t - t_0 \ge 0, \\ 0 \ \text{ при } \ t - t_0 < 0. \end{cases}$$

В данной модели используются величины $\hat{S}(t)$ и $\hat{s}(t)$ – процентные платежи и размер погашения основного долга соответственно, аналогичные переменным, введённым в модели М3, являются функциями времени и зависят от принятой схемы кредитования; λ – коэффициент соотношения государственного финансирования $I(t)$ и объёмов кредитования $K(t)$, т.е. предполагаем, что государственная поддержка (инвестирование) пропорциональна кредитам $I(t) = \lambda K(t)$, $\mu > 0$ – коэффициент выбытия основных фондов, где t – время, T – горизонт моделирования.

Использование гипотезы (8) позволило в значительной мере вывести процесс погашения основного долга за рамки главного направления производственно-финансовой деятельности промышленного предприятия и в максимальной степени сохранить структуру базовой модели М1. Остальные переменные соответствуют ранее введённым обозначениям.

В соотношении (2.4.2) сумма процентов $\hat{s}(t)$ учитывается в себестоимости продукции таким образом, что общий размер затрат увеличивается и составляет величину $\left(c + \dfrac{\hat{s}(t)}{P(t)}\right)P(t)$. Отсюда общая прибыль промышленного предприятия определяется из следующего соотношения:

$$P(t) - \left(c + \frac{\hat{s}(t)}{P(t)}\right)P(t) = (1-c)P(t) - \hat{s}(t)\,.$$

Запишем основное уравнение динамики рассматриваемого объекта, проведя необходимые преобразования. Из соотношений (2.4.3) и (2.4.4) получим явное выражение для показателя чистой прибыли предприятия $M(t)$.

Так как $[1 + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi)]M(t) = (1 - c - \tau_1)P(t) - \hat{s}(t)$, то

$$M(t) = \frac{(1 - c - \tau_1)P(t) - \hat{s}(t)}{1 + \tau_2 K_\Lambda (1-\xi)}\,. \qquad (2.4.7)$$

Вводя обозначения $a = \dfrac{(1-c-\tau_1)f}{1+\tau_2 K_\Lambda(1-\xi)}$ и $b = \dfrac{1}{1+\tau_2 K_\Lambda(1-\xi)}$, получаем следующую линейную зависимость $M(t)$ от переменных $A(t)$ и $\hat{s}(t)$:

$$M(t) = aA(t) - b\hat{s}(t)\,. \qquad (2.4.8)$$

Подставив (2.4.5) в (2.4.2) и обозначив $\gamma = \xi a - \mu$ – параметр, определяющий эффективность предприятия и темп его роста, получаем:

$$dA/dt = \gamma A(t) + (1+\lambda)K(t) - \xi(b\hat{s}(t) + \hat{S}(t)) + \alpha\delta(t)\,. \qquad (2.4.9)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (2.4.9) зависит от вида функций $K(t)$, $\hat{S}(t)$ и $\hat{s}(t)$, определяемых условиями кредитования.

Рассмотрим три типовых схемы кредитования ($i = 1, 2, 3$, где i номер схемы), различные комбинации которых позволяют достаточно полно представить множество условий предоставления кредитов предприятиям различной формы собственности в реальной экономической практике.

В целях удобства сопоставления схем будем считать общим для них единый способ формирования кредитных ресурсов для рассматриваемого промышленного предприятия – инвестирование методом «кредитной линии». При этом общий объём выделяемых кредитных ресурсов $\overline{K}$ распределён в периоде $[0,T]$ по некоторому известному закону $K(t)$, отображаемому соответствующим классом функций (линейная или нелинейная зависимость), а схемы кредитования различаются условиями (механизмами) погашения долга:

– «воздушный шар» (в этой схеме период погашения долга приходится на конец периода кредитования, причём в этот момент предполагается либо единовременное погашение всей задолженности по кредиту, либо возврат только основного долга, но с процентными выплатами в течение всего срока кредитования);

– равномерное погашение (функция выплаты долговых обязательств имеет линейный характер);

– «кредитные каникулы» (выплата долговых обязательств начинается с некоторым интервалом).

Особенности условий погашения долговых обязательств отображаются различными функциями $D(t)$, характеризующими суммы накопленных выплат долга.

Рассмотрим различные виды функций $K(t)$ и $D(t)$, описанные в литературе по финансовой математике, у которых для нас представляет интерес форма их модельного отображения.

Если ввести переменную ежегодных выплат долговых обязательств $d(t)$ как сумму долговой части и процентов, то можно записать:

$$d(t) = \hat{s}(t) + \overline{S}(t)\,, \quad D(t) = \int_0^t d(\tau)d(\tau)\,. \qquad (2.4.10)$$

Таким образом, вид функции возмещения долговых обязательств $D(t)$ определяется условиями ежегодных выплат $d(t)$, которые, в свою очередь, заданы конкретными схемами погашения долга.

Точно так же можно ввести функции накопленного кредитного финансирования $\Phi^{к}(t)$ и общей кредитной задолженности предприятия $\overline{\Phi}^{к}(t)$, которые в условиях кредитной линии будут монотонно возрастающими, а их вид будет определяться способом задания функции $K(t)$ и величиной процента r:

$$\Phi^{к}(t) = \int_0^t K(\tau)d\tau\,, \quad \overline{\Phi}^{к}(t) = \int_0^t e^{r(T-\tau)}K(\tau)d\tau\,.$$

Остаток долговых обязательств (текущая ссудная задолженность промышленного предприятия перед банком) описывается функцией $O(t)$, динамика которой зависит от соотношения функций $D(t)$ и $\overline{\Phi}^{к}(t)$:

$$O(t) = \overline{\Phi}^{к}(t) - D(t)\,.$$

Рассмотрим процесс формирования «кредитной линии», т.е. найдём величину потока кредитов $K(t)$ для конкретного вида функции. Будем считать $K(t)$ убывающей линейной функцией времени, заданной на интервале [0, T] и описывающей на этом интервале процесс равномерного распределения инвестиций объёма $\overline{K}$. Данный вид зависимости является типичным, так как затраты начальных этапов большинства инвестиционных проектов обычно бывают наиболее капиталоёмкими.

В соответствии с выбором зависимости имеем:

$$K(t) = \omega_1 - \omega_2 t,$$

где ω_1, ω_2 – параметры линейной функции, определяемые из условий:

$$\begin{cases} \int_0^T K(t)dt = \overline{K}, \\ K(t) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует:

$$\omega_1 = 2\overline{K}/T, \quad \omega_2 = 2\overline{K}/T^2, \quad K(t) = {}^{2\overline{K}(1-t/T)}\!\diagup_{T}.$$

Исследуем на периоде $[0,T]$ процесс формирования кредитной задолженности D, которая определяется величиной начисленных процентов с непрерывными темпами роста r для кредитного потока $K(t)$.

$$D = \int_0^T e^{r(T-t)}K(t)dt = \frac{2\overline{K}}{T}\int_0^T (1-t/T)e^{r(T-t)}dt = \frac{2\overline{K}}{r^2T^2}\left(rTe^{rT} - e^{rT} + 1\right). \quad (2.4.11)$$

Исследование доступности кредитов для промышленных предприятий

Как известно, доступность кредита означает возможность его погашения в установленный кредитным договором срок в полном объёме вместе с начисленными процентами и при этом иметь хотя бы неотрицательную прибыль (доходы). Исследуем этот вопрос для обобщённой адаптированной модели, учитывая, что в ней описывается диверсифицированная финансово-инвестиционная стратегия; т.е. имеется два источника получения доходов:

1) собственное производство промышленного предприятия;
2) финансовые инструменты.

В связи с этим вопрос о платёжеспособности предприятия может быть рассмотрен в трёх аспектах:

1) «платёжеспособность» (эффективность) используемых финансовых инструментов, характеризующая их возможность оплатить долги по кредиту. Это исследование показывает, насколько удачно промышленное предприятие выбрало внешнюю инвестиционную стратегию;

2) «платёжеспособность» (эффективность) внутренней стратегии промышленного предприятия, т.е. достаточность его собственной расчётной прибыли для выплат долгов по кредиту;

3) «полная платёжеспособность» смешанной (диверсифицированной) стратегии, т.е. способность промышленного предприятия погасить долг за счёт имеющихся источников доходов – прибыли предприятия и доходов от внешних финансовых инвестиций в ценные бумаги.

При исследовании определяются условия, при которых различные стратегии предприятия оказываются эффективными и обеспечивают выплату кредитного долга в указанном выше смысле. Совершенно ясно, что доступность кредита зависит от двух типов факторов: а) от полученных доходов (рентабельность предприятия, доходность ценных бумаг и т.д.), б) от ставок, объёмов и сроков выплат обязательств по кредитам.

Как уже указывалось, одной из наиболее распространённых схем кредитования в малом и среднем бизнесе является выдача кредита по «кредитной линии», описываемой монотонно убывающей функции; а погашение долга – непрерывное и равными частями (с учётом как основного долга, так и процентов). Соответствующая этой схеме зависимость определена формулами:

$$K(t) = {}^{2\overline{K}(1-t/T)}\!\diagup_{T}, \quad \hat{S}(t) = \frac{\overline{K}}{T} = \hat{S}, \quad \hat{s}(t) = \frac{D-\overline{K}}{T} = \hat{s}, \text{ для } t \in [0,T].$$

В соответствии с ними для любого t, где $t \in [0,T]$, должны быть выполнены условия:

$$1) \quad \hat{S}(t) + \hat{s}(t) \le D^{\Phi}(t); \quad (1)$$

2) $\hat{S}(t)+\hat{s}(t)\le M(t);$ (2)

3) $\hat{S}(t)+\hat{s}(t)\le D^{\Phi}(t)+M(t),$ (3)

где $D^{\Phi}(t)$ – доход от использования финансовых инструментов, а долговые обязательства определены следующим образом:

Данные неравенства (1) – (3) характеризуют различные способы проверки достаточности средств при использовании внешней, внутренней и диверсифицированной стратегий соответственно.

Заметим, что данный тест ограничен в сфере своего применения. Так, использование финансовых инструментов не всегда позволяет получать доходы в каждый фиксированный момент времени (по условиям, определённым конкретным видом ценных бумаг). Поэтому тест на проверку данной стратегии в этом случае следует делать интегральным (накопительным) для всего периода. Точно также стратегия достаточности собственных средств может быть не выполнена, но это не означает неплатёжеспособности предприятия в целом. Наиболее полная характеристика платёжеспособности даётся соотношением $\hat{S}(t)+\hat{s}(t)\le D^{\Phi}(t)+M(t)$.

В связи с этим сформулируем условия, при которых целесообразно применение теста на доступность кредита, представленного соотношениями:

1) ценные бумаги ликвидны; доход по ним, а также стоимость их погашения могут быть получены в каждый момент времени (см. соотношение (1));

2) размер взятого кредита небольшой, а доходность финансовых инструментов высокая, что делает возможным постановку задачи компенсации долгов по кредиту за счёт ценных бумаг (см. соотношение (1);

3) размер кредита небольшой, а прибыльность промышленного предприятия высокая и может позволить предприятию выплату кредита за счёт собственных средств (см. соотношение (2));

4) в том случае, если соблюдаются условия (1) и (2) или хотя бы одно из них, будет соблюдено и условие (3). То есть каждое из условий (1) и (2) является достаточным для соблюдения условия (3);

5) условие (3) может быть выполнено при несоблюдении условий (1) и (2);

6) условия (1) – (3) следует применять в тех случаях, когда по принятой схеме кредитования предусмотрен дискретный (дробный) способ погашения долговых обязательств в каждый момент.

Рассмотрим процесс погашения кредитной задолженности по различным схемам кредитования. Введём соответствующий индекс номера кредитной схемы $i=1,\ 2,\ 3$ и рассчитаем величины $A_i(t)$ и $M_i(t)$.

Кредитование по схеме «воздушный шар»

Согласно этой схеме $(i=1)$ кредитование осуществляется на всём периоде [0, *T*], а погашение всего долга осуществляется в конце срока кредитования, т.е. в момент времени T. Данная схема имеет достаточно широкое распространение в сфере малого и среднего бизнеса. Эта схема имеет две модификации: 1) выплата процентов по долгу в течение периода кредитования; 2) выплата процентов и основного долга общей суммой единовременно в момент окончания срока кредитования *T*.

Рассмотрим *первую модификацию*, в соответствии с которой на интервале [0, *T*], в течение срока кредитования основной долг не погашается, а осуществляются равномерно только процентные выплаты, включаемые в себестоимость, тогда:

$$\begin{cases} \hat{s}(t)=(D-\overline{K})/T=\hat{s}, \\ \hat{S}(T)=\begin{cases} 0 \ \text{при} \ t\ne T, \\ \overline{K} \ \text{при} \ t=T+0. \end{cases} \end{cases}$$

В этих условиях с учётом условий погашения долга, основное уравнение динамики основных фондов как решение дифференциального уравнения (2.4.9) примет вид:

$$A_1(t)=e^{\gamma t}\left(A_0+\int_0^t[(1+\lambda)K(\tau)-\xi\, b\hat{s}+\alpha\delta(t)]e^{-\gamma\tau}d\tau\right), \qquad (2.4.12)$$

где A_0 – начальное значение фондов; $\gamma=\xi a-\mu$ – параметр, определяющий эффективность предприятия и темп его роста.

Произведя преобразования для $A_1(t)$ получаем следующее выражение:

$$A_1(t)=e^{\gamma t}\left(A_0+\frac{2(1+\lambda)\overline{K}}{\gamma T}\left[e^{-\gamma t}(\frac{t}{T}-g)+g\right]+g_1e^{-\gamma t}-g_1+\alpha\theta(t)e^{-\gamma t_0}\right)=$$

$$=(A_0-g_1+\hat{g}_1\, gT)e^{\gamma t}+\hat{g}_1 t-\hat{g}_1 gT+g_1+\alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma},$$

где $\hat{g}_1=\dfrac{2(1+\lambda)\overline{K}}{\gamma T^2}$, $g=1-\dfrac{1}{\gamma T}$, $g_1=\dfrac{\xi b\hat{s}}{\gamma}$.

Обозначив $\overline{g}_1=\hat{g}_1 gT-g_1$, получим окончательно:

$$A_1(t)=(A_0+\overline{g}_1)e^{\gamma t}+\hat{g}_1 t-\overline{g}_1+\alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma} \qquad (2.4.13)$$

для $t \in [0,T]$.

Соотношение (2.4.13) характеризует в рассматриваемом случае динамику промышленного предприятия как сумму экспоненциальной и линейной функций, параметры которых зависят как от внутренних, так и от внешних управляющих переменных, входящих в $\bar{g}_1$, $\hat{g}_1$ и g_1.

Так как основной долг погашается в конце периода, то часть долга (доля χ свободной прибыли предприятия) в соответствии с предпосылкой (6) в течение рассматриваемого периода в размере $\chi(1-\xi)M_1(t)$ может быть инвестирована во внешние финансовые инструменты, а остальная часть $(1-\chi)(1-\xi)M_1(t)$ идёт на потребление. Схемы инвестирования этих средств зависят от стратегии предприятия. Это могут быть, в частности, вложения в государственные ценные бумаги, депозиты, обеспечивающие гарантированный доход с различными, но небольшими уровнями рисков.

Пусть σ – средний индекс доходности потока вложений свободных средств для накопления финансовых ресурсов предприятия в целях погашения основного долга. Тогда совокупные накопления $\hat{M}_1(T)$ предприятия, использующего инструменты внешнего инвестирования со средней доходностью σ на эти цели, равны:

$$\hat{M}_1(T) = \rho\int_0^T M_1(t)e^{\sigma(T-t)}dt\,,\ \forall\rho,\, 0 \le \rho \le 1\,, \tag{2.4.14}$$

где $\rho = \chi(1-\xi)$ – доля внешнего инвестирования от прибыли предприятия.

С учётом (2.4.8) соотношение (2.4.14) примет вид:

$$\hat{M}_1(T) = \rho e^{\sigma T}\int_0^T \left[aA_1(t) - b\hat{s}\right]e^{-t\sigma}dt\,. \tag{2.4.15}$$

Подставляя в (2.4.15) выражение (2.4.13), для $A_1(t)$ получим:

$$\hat{M}_1(T) = \rho a e^{\sigma T}\left\{(A_0 + \bar{g}_1)\int_0^T e^{(\gamma-\sigma)t}dt + \right.$$

$$\left. + \hat{g}_1\int_0^T te^{-\sigma t}dt - (\bar{g}_1 + b\hat{s}/a)\int_0^T e^{-\sigma t}dt + \alpha\int_0^T \theta(t)e^{-\gamma t_0}dt\right\} =$$

$$= \rho a e^{\sigma T}\left\{(A_0 + \bar{g}_1)\frac{e^{(\gamma-\sigma)T} - 1}{\gamma - \sigma} + \frac{\hat{g}_1}{\sigma}\left[\left(\frac{1}{\sigma} + T\right)e^{-\sigma T} - \frac{1}{\sigma}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sigma}\left(\bar{g}_1 + \frac{b\hat{s}}{a}\right)(1 - e^{-\sigma T}) + \frac{\alpha}{\sigma}\theta(T)e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0} - e^{-\sigma T}\right)\right\}.$$

Используя линейную часть разложения функции e^x в ряд при малых x (т.е. полагая $e^x \approx 1 + x$) и проводя необходимые преобразования, получим, что доход от внешнего инвестирования к концу периода, выраженный в исходных переменных моделирования, к концу периода составит:

$$\hat{M}_1(T) \approx \rho a T e^{\sigma T}\left(A_0 - {2(1+\lambda)\bar{K}}\big/{T\gamma} - {b\hat{s}}\big/{a} + \frac{\alpha}{\sigma T}e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0} - e^{-\sigma T}\right)\right). \tag{2.4.16}$$

Формула (2.4.16) получена для модификации схемы кредитования «воздушный шар», предусматривающей выплату процентов $\hat{S}$ в течение всего периода рассмотрения.

Вторая модификация схемы «воздушный шар» предполагает следующие условия погашения долга:

$$\begin{cases} \hat{s}_{12}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \in [0,T], \\ D - \bar{K} & \text{для } t = T + 0, \end{cases} \\ \hat{S}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t \in [0,T], \\ \bar{K} & \text{для } t = T + 0. \end{cases} \end{cases}$$

Иными словами, в соответствии со второй модификацией этой схемы выплата процентов и погашение основного долга производятся в конце периода. Очевидно, что динамика основных фондов $A_1'(t)$ по второй модификации соответствует (с точностью до констант) динамике $A_1(t)$ по первой модификации. Это означает, что в соотношении (2.4.13) при расчёте константы $g_1 = \frac{\xi b\hat{s}}{\gamma}$ для интервала $[0,T]$ следует считать $\hat{s}=0$, а для момента времени $T+0$ следует положить $\hat{s} = D - \overline{K}$. Таким образом, имеем:

$$A_1'(t) = \begin{cases} (A_0 + \overline{g}_1 + g_1)e^{\gamma t} + \hat{g}_1 t - \overline{g}_1 - g_1 + \alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma} \text{ при } t \in [0,T], \\ (A_0 + \overline{g}_1 + g_1)e^{\gamma t} + \hat{g}_1 t - \overline{g}_1 - g_1 - \frac{\xi b}{\gamma}(D - \overline{K}) + \alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma} \text{ при } t = T+0. \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Точно так же доход от внешнего инвестирования $\widehat{M}_1'(t)$ по второй модификации может быть получен из (2.4.17):

$$\widehat{M}_1'(T) = \begin{cases} \rho a T e^{\sigma T}\left(A_0 - \frac{2(1+\lambda)\overline{K}}{\gamma T} + \frac{\alpha}{\sigma T} e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0} - e^{-\sigma T}\right)\right) \text{ при } t \in [0,T], \\ \rho a T e^{\sigma T}\left(A_0 - \frac{2(1+\lambda)\overline{K}}{\gamma T} - \frac{b}{a}(D - \overline{K}) + \frac{\alpha}{\sigma T} e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0} - e^{-\sigma T}\right)\right) \text{ при } t = T+0. \end{cases}$$

Схема равномерного погашения кредита

По этой схеме $(i=2)$ период кредитования и период погашения долга совпадают, причём ежегодная сумма погашения задолженности является постоянной. Данная схема является достаточно распространённой как среди малых, так и среди крупных предприятий. Заметим, что эта схема предполагает равномерное погашение долгов по кредитной линии и отличается от условий кредитования в модели М3, где равномерно погашается единовременный кредит.

Пусть кредитная задолженность D, вычисленная для кредитной линии (2.4.10), погашается равномерно так, что для $t \in [0,T]$

$$\begin{cases} \hat{s}(t) = \frac{D - \overline{K}}{T} = \hat{s} \quad \text{для} \quad t \in [0,T], \\ \hat{S}(t) = \frac{\overline{K}}{T} = \hat{S} \quad \text{для} \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Тогда, в соответствии с общим решением основного дифференциального уравнения (2.4.9) , для второй схемы погашения кредита имеем:

$$A_2(t) = e^{\gamma t}\left\{ A_0 + \int_0^t (1+\lambda)K(\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau - \xi(b\hat{s} + \hat{S})\int_0^t e^{-\gamma\tau}d\tau + \int_0^t \alpha\delta(\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau \right\}. \quad (2.4.18)$$

Преобразовав выражение для $A_1(t)$ и вводя новые обозначения для констант, получаем:

$$A_2(t) = (A_0 + \overline{g}_2)e^{\gamma t} + \hat{g}_2 t - \overline{g}_2 + \alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma},$$

где $\overline{g}_2 = \overline{g}_1 - \frac{\xi\hat{S}}{\gamma}$, $\hat{g}_2 = \hat{g}_1$.

Таким образом, динамика основных фондов во второй схеме кредитования подчиняется принципиально тем же закономерностям, что и для первой схемы.

Величина фонда $\widehat{M}_2(T)$, накопленного за счёт внешних финансовых инструментов, определяется следующим образом:

$$\widehat{M}_2(t) = \rho\int_0^T M_2(t)e^{\sigma(T-t)}dt. \quad (2.4.19)$$

С учётом соотношений (2.4.8) и (2.4.19) получаем:

$$\widehat{M}_2(t) = \rho e^{\sigma T}\int_0^T (aA_2(t) - b\hat{s})e^{-\sigma t}dt. \quad (2.4.20)$$

Поскольку функция $A_2(t)$ в соотношении (2.4.17) отличается от функции $A_1(t)$ в соотношении (2.4.20) только постоянными коэффициентами, можно воспользоваться уже полученным ранее решением (2.4.16) с соответствующей корректировкой коэффициентов:

$$\hat{M}_2(T) \approx \rho a T e^{\sigma t}\left(A_0 - \hat{g}_2 T - b\hat{s}/a + \frac{\alpha}{\sigma T}e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0} - e^{-\sigma T}\right)\right),$$

где $\hat{g}_2 = \hat{g}_1$, $\hat{s} = (D - \overline{K})/T$.

Схема «кредитных каникул»

Данная схема $(i = 3)$ рассматривается как одна из льгот, предоставляемых малым предприятиям. В течение срока «кредитных каникул» $[0, k]$ погашение долга и процентов по нему не производится, а затем в течение периода $[k, T]$ осуществляется выплата задолженности, например, по схеме её равномерного погашения. В данной схеме период погашения долга представляет собой значительную часть периода кредитования, при этом

$$\begin{cases} \hat{s}_3(t) = 0 \quad \text{для } t \in [0, k), \\ \hat{s}(t) = \dfrac{D - \overline{K}}{T - k} = \hat{s} \ \text{ для } t \in [k, T], \\ \hat{S}(t) = 0 \ \text{ для } t \in [0, k), \\ \hat{S}(t) = \dfrac{\overline{K}}{T - k} = \hat{S} \ \text{ для } t \in [k, T]. \end{cases}$$

Третья схема является комбинацией первой схемы (если рассматривать вторую её модификацию) и второй схемы, причём точкой их «стыковки» является момент времени k. Сложность третьей схемы состоит в необходимости сопряжения указанных двух схем в точке k. Это означает, что константа интегрирования должна быть подобрана из условий равенства значений соответствующих функций $A_1'(t)$ и $A_2(t)$ друг другу в точке k, что обеспечит непрерывность рассматриваемой зависимости $A_3(t)$.

Для любого $t \in [0, k]$ будет выполнено

$$A_3(t) = (A_0 + \overline{g}_1)e^{\gamma t} + \hat{g}_1 t - \overline{g}_1 + \alpha\theta(t)e^{(t - t_0)\gamma},$$

где $\overline{g}_1' = \hat{g}_1 \overline{g}_1 = g_1 g T$, $t_0 \in [0, T]$.

Данное выражение для $A_3(t)$ может быть получено из соотношения (2.4.17), в котором рассчитывается $A_1'(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Для любого $t \in [0, T]$ выражение для $A_3(t)$ определяется как решение уравнения (2.4.9), но с учётом других пределов интегрирования и новых начальных условий. Это означает, что по аналогии с соотношением (2.4.18), описывающим динамику основных фондов для схемы равномерного погашения долга, можно записать:

$$A_3'(t) = e^{\gamma t}\left\{ C + \int_0^t [(1 + \lambda)K(\tau) - \xi(b\hat{s} + \hat{S}) + \alpha\delta(\tau)]e^{-\gamma\tau} d\tau \right\}, \qquad (2.4.21)$$

где $t \in [0, k]$ и C – константа интегрирования, соответствующая начальному значению основных фондов $A_3'(t)$ в точке k.

Перейдём к интервалу $[k, T]$ и проведя расчёт динамики основных фондов получим окончательный вид функции $A_3'(t)$ для $t \in [k, T]$:

$$A_3'(t) = (A_0 + \overline{g}_3)e^{\gamma t} + \hat{g}_1\Big((t - Tg) - (k - Tg)e^{-\gamma(k - t)}\Big) +$$

$$+ \left(\frac{\xi\hat{S}}{\gamma} - g_1 \right)\left[1 - e^{-\gamma(k - t)}\right] + \alpha\theta(t)e^{\gamma(t - t_0)}.$$

Учитывая, что $\overline{g}_3 = \overline{g}_1' + \hat{g}_1(k - gT)e^{-\gamma k}$ и $\overline{g}_1' = \hat{g}_1 g T$, получаем:

$$A_3'(t) = (A_0 + \overline{g}_1')e^{\gamma t} + \hat{g}_1\Big((k - Tg) - (k - Tg)e^{-\gamma(k - t)}\Big) -$$

$$-\left(\frac{\xi\hat{S}}{\gamma}+g_1\right)e^{-\gamma(k-t)}-\left(\frac{\xi\hat{S}}{\gamma}+g_1\right)+\hat{g}_1 t-\hat{g}_1 gT+\alpha\theta(t)e^{\gamma(t-t_0)}=$$

$$=(A_0+\overline{g}_3')e^{\gamma t}+\hat{g}_1 t-\overline{\overline{g}}_3+\alpha\theta(t)e^{\gamma(t-t_0)},$$

где $\overline{g}_3'=\overline{g}_1'-(g_1+\frac{\xi\hat{S}}{\gamma})e^{-\gamma k}$, $\overline{\overline{g}}_3=\overline{g}_1-\xi\hat{S}/\gamma$.

Итак, динамика основных фондов по третьей схеме кредитования имеет следующий вид:

$$A_3(t)=\begin{cases}(A_0+\overline{g}_1')e^{\gamma t}+\hat{g}_1 t-\overline{g}_1'+\alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma} & \text{при } t\in[0,k),\\ (A_0+\overline{g}_3')e^{\gamma t}+\hat{g}_1' t-\overline{\overline{g}}_3+\alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma} & \text{при } t=[k,T],\end{cases}$$

где $\overline{g}_3'=\overline{g}_1'-(g_1+\frac{\xi\hat{S}}{\gamma})e^{-\gamma k}$, $\overline{\overline{g}}_3=\overline{g}_1-\xi\hat{S}/\gamma$.

Оценка накопленной к концу периода прибыли осуществляется с учётом того, что: 1) функция $A_3(t)$ описывается различным образом на двух интервалах времени; 2) на втором интервале осуществляется погашение долга.

Имеем

$$\widehat{M}_3(T)=\rho\int_0^T M_3(t)e^{\sigma(T-t)}dt=$$
$$=-\frac{\overline{g}_1}{\sigma}\left(ke^{-\sigma k}+\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma k}-1)\right)+\frac{\alpha}{\sigma k}\theta(t)e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0}-e^{-\sigma k}\right),$$

если $t_0\in[0,k]$.

$$\hat{M}_3(T)=\rho aTe^{\sigma T}\left[A_0T+\overline{g}_1k(k-1)+\overline{g}_1T+\hat{g}_1(T^2-k^2)-\right.$$
$$\left.-(\overline{\overline{g}}_3+b\hat{s}/a)(T-k)+\frac{\alpha}{\sigma k}\theta(t)e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0}-e^{-\sigma k}\right)\right]. \quad (2.4.22)$$

Используя линейную часть разложения экспонент в соотношениях (2.4.21) и (2.4.20) и подставляя результат в (2.4.22), получаем:

$$\widehat{M}_3(T)\approx\rho ae^{\sigma T}\left\{\frac{(A_0+\overline{g}_1)(\gamma-\sigma)k}{\gamma-\sigma}-\frac{g_1\sigma k}{\sigma}-\frac{\hat{g}_1}{\sigma}\left(k(1-\sigma k)-\frac{1}{\sigma}\sigma k\right)+\right.$$
$$+\frac{(A_0+\overline{g}_3)(\gamma-\sigma)(T-k)}{\gamma-\sigma}+\frac{\alpha}{\sigma k}\theta(t)e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0}-e^{-\sigma k}\right)-$$
$$-\frac{\hat{g}_1}{\delta}\left(T(1-\sigma T)-k(1-\sigma k)-\frac{1}{\sigma}\sigma(k-T)\right)+$$
$$\left.+\frac{\overline{\overline{g}}_3\sigma(k-T)}{\sigma}-\frac{b\hat{s}}{a}(T-k)+\frac{\alpha}{\sigma T}\theta(t)e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma k}-e^{-\sigma T}\right)\right\}=$$
$$=\rho aTe^{\sigma T}\left(A_0T+\overline{g}_1k(k-1)+\overline{g}_1T+\hat{g}_1(T^2-k^2)-\left(\overline{\overline{g}}_3+\frac{b\hat{s}}{a}\right)(T-k)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{\sigma k}\theta(t)e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0}-e^{-\sigma k}\right)+\frac{\alpha}{\sigma T}\theta(t)e^{-\gamma t_0}\left(e^{-\sigma t_0}-e^{-\sigma T}\right)\right).$$

Проанализировав свойства полученных зависимостей, получим:

1. Во всех схемах динамика основных фондов имеет идентичную структуру и определяется как линейная комбинация экспоненциальной и линейной функций. Во всех зависимостях $A_i(t)$ имеются «сквозные» параметры: $\hat{g}_1$, входящий во все соотношения в качестве параметра при линейной функции, γ, являющийся показателем степени при экспоненте, и $\alpha e^{-\gamma t_0}$ показывающий влияние на основные фонды неучтённых факторов в виде скачка (рис. 2.4.1). Эти параметры определяют темпы (скорость) роста рассматриваемого показателя. Таким образом, разница в величине основных фондов определяется в основном коэффициентами, стоящими при экспоненциальной функции $e^{\gamma t}$.

2. Линейная комбинация рассматриваемых функций (линейной и экспоненты) в каждой из схем формируется по общему правилу: если исключить из рассмотрения начальную константу A_0 и величину скачка $\alpha e^{-\gamma t_0}$, то другие коэффициенты при экспоненте $e^{\gamma t}$ и свободные члены в линейной функции равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

3. Так как в соответствии со сделанными гипотезами внутренняя инвестиционная стратегия промышленного предприятия не зависела от внешних финансовых инструментов (вложения в которые осуществлялись из фонда потребления), на динамику основных фондов не влияет показатель постоянной эффективности внешних вложений σ, а влияет показатель γ, интегрально характеризующий эффективность работы промышленного предприятия. Ещё один фактор, влияющий на динамику $A_i(t)$ – это условия погашения кредита, которые определяют величину коэффициентов линейной комбинации рассматриваемых функций.

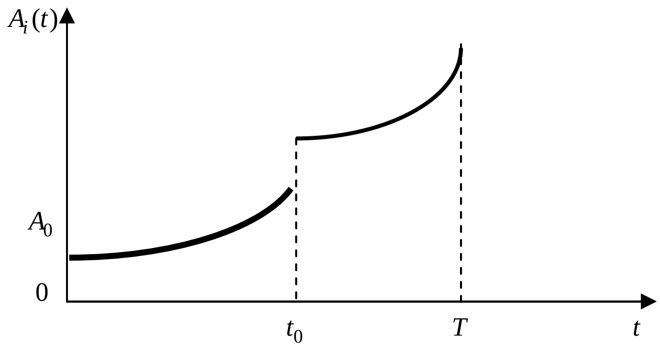

Рис. 2.4.1. Поведение динамики основных фондов во время скачка ($\alpha > 0$), *i* = 1, 2, 3

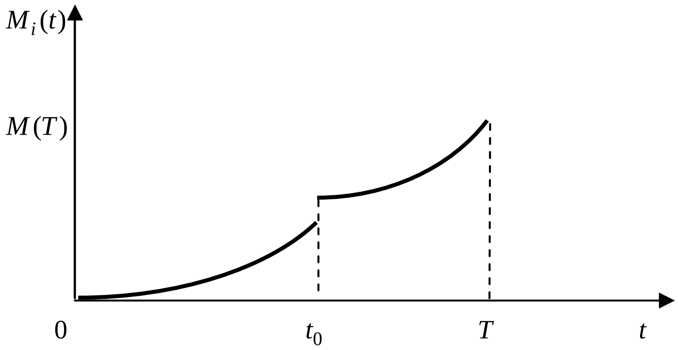

Рис. 2.4.2. Поведение функции накопленной прибыли

4. Общие свойства полученных зависимостей позволяют рассматривать их как семейство кривых (траекторий развития), исходящих из начальной точки:

$$A_0 = A_1'(0) = A_2(0) = A_3(0) .$$

Анализ адекватности полученных адаптированных дифференциальных динамических моделей показал, что величина основных фондов для различных схем финансирования отличается от базовых на величину, равную $\alpha\theta(t)e^{(t-t_0)\gamma}$. Что говорит о том, что в момент времени t_0 происходит изменение значения основных фондов (скачок) на величину $\pm\alpha$ (в зависимости от характера изменения). Это позволяет более точно описать данные динамические модели.

Заметим, что выплата долга по кредиту предполагает наличие у предприятия достаточных средств. Для оценки достаточности средств в работе необходимо рассмотреть величину накопленной на конец периода в результате внешнего инвестирования прибыли.

Сравнение вариантов накопленной прибыли $\hat{M}_i(T)$ свидетельствует о том, что первая и вторая модификации схемы в условиях сделанной приближённой оценки (разложение функции $e^{\gamma t}$ в ряд до второго члена) не различаются: $\hat{M}_1(T) \approx \hat{M}_1'(T)$. Схема II даёт меньшее накопление прибыли $\hat{M}_2(T) \le \hat{M}_2(T)$. Схема III ввиду сложности полученной зависимости для анализа затруднена; результаты этого анализа существенно зависят от соотношений параметров T и σ, т.е.

длительности «кредитных каникул».

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В этой главе мы рассмотрим некоторые примеры применения теории дифференциальных уравнений в непрерывных моделях экономики, где независимой переменной является время t. Такие модели достаточно эффективны при исследовании эволюции экономических систем на длительных интервалах времени, эти системы являются предметом исследования экономической динамики.

3.1. ЭФФЕКТИВНОСТЬ РЕКЛАМЫ

Предположим, что торговыми учреждениями реализуется продукция В, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь x покупателей. Предположим далее, что для ускорения сбыта продукции В были даны рекламные объявления по радио и телевидению. Последующая информация о продукции распространяется среди покупателей посредством общения друг с другом. С большой степенью достоверности можно считать, что после рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции В пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей, о нём ещё не знающих.

Если условиться, что время отсчитывается после рекламных объявлений, когда о товаре узнало N/γ человек, то приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x) \tag{3.1.1}$$

с начальными условиями $x = N/\gamma$ при $t = 0$. В уравнении (3.1.1) коэффициент k – это положительный коэффициент пропорциональности. Интегрируя уравнение (3.1.1), находим, что $\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x} = kt + C.$

Полагая $NC = C_1$, приходим к равенству:

$$\frac{x}{N-x} = Ae^{Nkt}, \text{ где } A = e^{C_1}.$$

Если последнее уравнение разрешить относительно x, то получим соотношение

$$x = N\frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt}+1} = \frac{NA}{A+e^{-Nkt}}. \tag{3.1.2}$$

В экономической литературе уравнение (3.1.2) обычно называют уравнением логистической кривой.

Если учесть теперь начальные условия, то уравнение (3.1.1) перепишется в виде

$$x = \frac{N}{1+(\gamma-1)e^{-Nkt}}.$$

В заключение отметим, что к уравнению (3.1.1) сводится, в частности, к задаче о распространении технологических новшеств.

3.2. СПРОС И ПРЕДЛОЖЕНИЕ

Как известно, спрос и предложение – экономические категории товарного производства, возникающие и функционирующие на рынке в сфере товарного обмена. При этом спрос – представленная на рынке потребность в товарах, а предложение – продукт, который есть на рынке или может быть доставлен на него. Одним из экономических законов товарного производства является закон спроса и предложения, который заключается в единстве спроса и предложения и их объективном стремлении к соответствию.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в течение некоторого (достаточно продолжительного) времени фермер продаёт на рынке фрукты (например, яблоки), причём продаёт их после уборки урожая, с недельными перерывами. Тогда при имеющихся у фермера запасах фруктов недельное предложение будет зависеть как от ожидаемой цены в наступающей неделе, так и от предполагаемого изменения цены в последующие недели. Если в наступающей неделе предполагается, что цена упадёт, а в последующие недели повысится, то предложение будет сдерживаться при условии превышения ожидаемого повышения цен над издержками хранения. При этом предложение товара в ближайшую неделю будет тем меньшим, чем большим предполагается в дальнейшем повышение цены. И наоборот, если в наступающей неделе цена будет высокой, а затем ожидается её падение, то предложение увеличится тем больше, чем большим предполагается понижение цены в дальнейшем.

Если обозначить через p цену на фрукты в наступающей неделе, а через p' – так называемую тенденцию формирования цены (производную цены по времени), то как спрос, так и предложение будут функциями указанных величин. При этом, как показывает практика, в зависимости от разных факторов спрос и предложение могут быть различными функциями цены и тенденции формирования цены. В частности, одна из таких функций задаётся линейной зависимостью, математически описываемой соотношением $y = ap' + bp + c$, где a, b, c – некоторые вещественные постоянные. А тогда если, например, в рассматриваемой задаче цена на фрукты вначале составляла 1 р. за 1 кг, через t недель она была уже $p(t)$ р. за 1 кг, а спрос g и предложение s определялись соответственно соотношениями:

$$g = 4p' - 2p + 39\,,\ \ s = 44p' + 2p - 1\,,$$

то для того, чтобы спрос соответствовал предложению, необходимо выполнение равенства: $g = s$,

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Отсюда приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dp}{p-1} = -10dt.$$

Интегрируя, находим, что $p = Ce^{-10t} + 10$. Если же учесть начальные условия $p = 1$ при $t \to 1$, то окончательно получаем:

$$p = -9e^{-10t} + 10\,. \tag{3.2.1}$$

Таким образом, если требовать, чтобы между спросом и предложением всё время сохранялось равновесие, необходимо, чтобы цена изменялась в соответствии с формулой (3.2.1).

3.3. МОДЕЛЬ ЕСТЕСТВЕННОГО РОСТА ВЫПУСКА

Будем полагать, что некоторая продукция продаётся по фиксированной цене P. Обозначим через $Q(t)$ количество продукции, реализованной на момент времени t, тогда на этот момент времени получен доход, равный $PQ(t)$. Пусть часть указанного дохода расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции:

$$I(t) = mPQ(t), \tag{3.3.1}$$

где m – норма инвестиции, постоянное число, причём $0 < m < 1$.

Если исходить из предположения о ненасыщаемости рынка (или о полной реализации производимой продукции), то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого опять будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведёт к росту скорости выпуска (акселерации), причём скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций:

$$Q' = l\,I, \tag{3.3.2}$$

где $1/l$ – норма акселерации. Подставив в (3.3.2) формулу (3.3.1), получим:

$$Q' = kQ\,,\ \text{где}\ \ k = lmP. \tag{3.3.3}$$

Дифференциальное уравнение (3.3.3) представляет собой уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$Q = Ce^{kt}\,,$$

где C – произвольная постоянная. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ зафиксирован (задан) объём выпуска продукции Q_0. Тогда из этого условия можно выразить постоянную C:

$$Q_0 = Ce^{kt_0}, \text{ откуда } C = Q_0 e^{-kt_0}.$$

Отсюда получаем частное решение уравнения (3.3.3) – решение задачи Коши для этого уравнения:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}. \qquad (3.3.4)$$

Заметим, что математические модели обладают свойством общности. Например, из результатов биологических опытов следует, что процесс размножения бактерий также описывается уравнением (3.3.3). Процесс радиоактивного распада тоже подчиняется закономерности, установленной формулой (3.3.3).

3.4. РОСТ ВЫПУСКА В УСЛОВИЯХ КОНКУРЕНЦИИ

Снимем в рассматриваемой модели предположение о ненасыщаемости рынка. Пусть $P = P(Q)$ – убывающая функция, т.е. с увеличением объёма продукции на рынке цена на неё падает:

$$dP/dQ < 0.$$

Из формул (3.3.1) – (3.3.3) получаем нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно Q с разделяющимися переменными:

$$Q' = \alpha P(Q) Q. \qquad (3.4.1)$$

Поскольку все сомножители в правой части этого уравнения положительны, $Q' > 0$, т.е. функция $Q(t)$ возрастающая.

Характер возрастания функции определяется её второй производной. Из уравнения (3.4.1) получаем:

$$Q'' = \alpha\left[Q'P(Q) + Q\frac{dP}{dQ}Q'\right] = \alpha Q'\left[P + Q\frac{dP}{dQ}\right].$$

Это равенство можно преобразовать, введя эластичность спроса $E(P) = \dfrac{dQ}{dP}\dfrac{P}{Q}$, откуда $Q'' = \alpha Q'P\left[1 + \dfrac{dP}{dQ}\dfrac{Q}{P}\right]$ или, так как $dQ/dP < 0$, а значит $E < 0$, окончательно получаем:

$$Q'' = \alpha Q'P\left[1 - \frac{1}{|E|}\right]. \qquad (3.4.2)$$

Из уравнения (3.4.2) следует, что при эластичном спросе, т.е. когда $|E| > 1$, $Q'' > 0$, и график функции $Q(t)$ имеет направление выпуклости вниз, что означает прогрессирующий рост. При неэластичном спросе $|E| < 1$, $Q'' < 0$ – направление выпуклости функции $Q(t)$ вверх, что означает замедленный рост (насыщение). Для простоты примем зависимость $P(t)$ в виде линейной функции (рис. 3.4.1):

$$P(t) = a - bQ, \; a > 0, \; b > 0. \qquad (3.4.3)$$

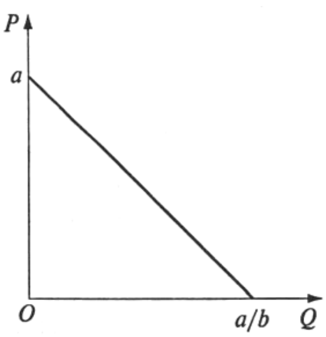

Рис. 3.4.1

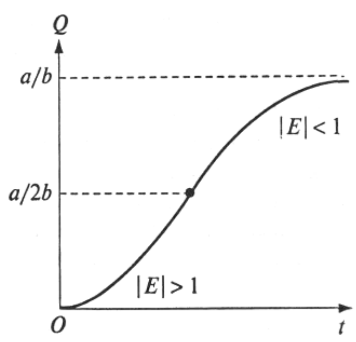

Рис. 3.4.2

Тогда уравнение (3.4.1) имеет вид:

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q, \qquad (3.4.4)$$

откуда

$$Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ). \qquad (3.4.5)$$

Из соотношений (3.4.4) и (3.4.5) получаем: $Q' = 0$ при $Q = 0$ и при $Q = a/b$; $Q'' > 0$ при $Q < a/2b$ и $Q'' < 0$ при $Q > a/2b$; $Q = a/2b$ – точка перегиба графика функции $Q = Q(t)$. Приведённый на рис. 3.4.2 график этой функции (одной из интегральных кривых дифференциального уравнения (3.4.4)) носит название логистической кривой.

Аналогичные кривые характеризуют и другие процессы, например, размножение бактерий в ограниченной среде обитания, динамику эпидемий внутри ограниченной общности биологических организмов.

3.5. МОДЕЛЬ РЫНКА С ПРОГНОЗИРУЕМЫМИ ЦЕНАМИ

Рассмотрим модель рынка с прогнозируемыми ценами. В простых моделях рынка спрос и предложение обычно полагают зависящими только от текущей цены на товар. Однако спрос и предложение в реальных ситуациях зависят ещё и от тенденции ценообразования и темпов изменения цены. В моделях с непрерывными и дифференцируемыми по времени t функциями эти характеристики описываются соответственно первой и второй производными функции цены $P(t)$.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть функции спроса D и предложения S имеют следующие зависимости от цены P и её производных:

$$D(t) = 3P'' - P' - 2P + 18;$$
(3.5.1)
$$S(t) = 4P'' + P' + 3P + 3.$$

Принятые в (3.5.1) зависимости вполне реалистичны: поясним это на слагаемых с производными функции цены.

1. Спрос «подогревается» темпом изменения цены: если темп роста увеличивается ($P'' > 0$), то интерес рынка к товару становится больше, и наоборот. Быстрый рост цены отпугивает покупателя, поэтому слагаемое с первой производной функции цены входит со знаком минус.

2. Предложение в ещё большей мере усиливается темпом изменения цены, поэтому коэффициент при P'' в функции $S(t)$ больше, чем в $D(t)$. Рост цены также увеличивает предложение, поэтому слагаемое, содержащее P' входит в выражение для $S(t)$ со знаком плюс.

Требуется установить зависимость цены от времени. Поскольку равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D = S$, приравняем правые части уравнений (3.5.1). После приведения подобных получаем:

$$P'' + 2P' + 5P = 15. \qquad (3.5.2)$$

Соотношение (3.5.2) представляет собой линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $P(t)$. Общее решение такого уравнения состоит из суммы какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 2k + 5 = 0. \qquad (3.5.3)$$

Его корни – комплексно-сопряжённые числа: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$ и, следовательно, общее решение однородного уравнения даётся формулой

$$\tilde{P}(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. В качестве частного решения неоднородного уравнения (3.5.2) возьмём решение $P = P_{\text{ч.р}} = A$ – постоянную величину как установившуюся цену. Подстановка в уравнение (3.5.2) даёт значение $P_{\text{ч.р}} = 3$.

Таким образом, общее решение уравнения (3.5.2) имеет вид:

$$P(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + 3. \qquad (3.5.4)$$

Нетрудно видеть, что $P(t) \to P_{\text{ч.р}} = 3$ при $t \to \infty$ т.е., все интегральные кривые имеют горизонтальную асимптоту $P = 3$ и колеблются около неё. Это означает, что все цены стремятся к стационарной цене $P_{\text{ч.р}} = 3$ с колебаниями около неё, причём амплитуда этих колебаний затухает со временем.

3.6. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КЕЙНСА

Рассмотрим простейшую балансовую модель, включающую в себя основные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть $Y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ – соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Все эти величины рассматриваются как функции времени *t*. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \tag{3.6.1}$$

где $a(t)$ – коэффициент склонности к потреблению ($0 < a(t) < 1$); $b(t)$ – автономное (конечное) потребление; $k(t)$ – норма акселерации. Все функции, входящие в уравнения (3.6.1), положительны.

Поясним смысл уравнений (3.6.1). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу – этот баланс отражён в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего потребления некоторой части национального дохода в народном хозяйстве плюс конечное потребление – эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным, он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход.

Будем полагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$, являющиеся характеристиками функционирования и развития государства, заданы. Требуется найти динамику национального дохода, т.е. Y как функцию времени *t*.

Подставим выражения для $S(t)$ из второго уравнения и $I(t)$ из третьего уравнения в первое уравнение. После приведения подобных получаем дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$:

$$Y'(t) = \frac{1 - a(t)}{k(t)} Y(t) - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)}. \tag{3.6.2}$$

Проанализируем более простой случай, полагая основные параметры задачи $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$, $E(t)$ постоянными числами. Тогда уравнение (3.6.2) упрощается до случая линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y'(t) = \frac{1 - a}{k} Y(t) - \frac{b + E}{k}. \tag{3.6.3}$$

Как известно, общее решение неоднородного уравнения есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. В качестве частного решения уравнения (3.6.3) возьмём так называемое равновесное (стационарное) решение, когда $Y' = 0$, т.е.:

$$Y_p = \frac{b + E}{1 - a}. \tag{3.6.4}$$

Проанализировав данное выражение видим, что эта величина положительна. Общее решение однородного уравнения задаётся формулой $\tilde{y} = Ce^{\frac{1-a}{k}t}$, так что общее решение уравнения (3.6.3) имеет вид:

$$Y(t) = \frac{b + E}{1 - a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}. \tag{3.6.5}$$

Интегральные кривые уравнения (3.6.3) показаны на рис. 3.6.1. Если в начальный момент времени $Y_0 < Y_p$, то $C = Y_0 - Y_p < 0$ и кривые уходят вниз от равновесного решения (3.6.4), т.е. национальный доход со временем падает при заданных параметрах задачи a, b, k, E, так как показатель экспоненты в (3.6.5) положителен. Если же $Y_0 > Y_p$, то $C > 0$ и национальный доход растёт во времени; интегральные кривые уходят вверх от равновесной прямой $Y = Y_p$.

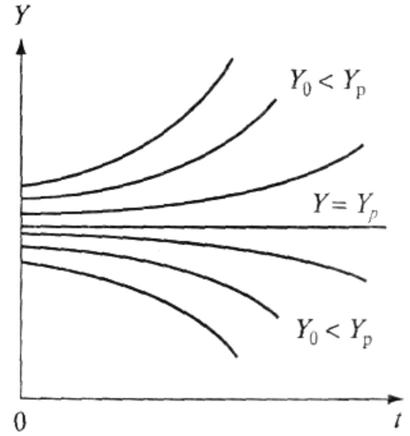

Рис. 3.6.1

Согласно классификации уравнение (3.6.3) является автономным. На фазовой плоскости точка $Y = Y_p$ представляет собой точку неустойчивого равновесия.

3.7. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА

Пусть $Y = F(K, L)$ – национальный доход, где F – однородная производственная функция первого порядка $F(tK, tL) = tF(K, L)$; K – объём капиталовложений (производственных фондов); L – объём затрат труда. Введём в рассмотрение величину фондовооружённости $k = K/L$, тогда производительность труда выражается формулой:

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(k,1). \tag{3.7.1}$$

Рассматриваемая задача заключается в описании динамики фондовооруженности, т.е. представлении ее как функции от времени *t*. Поскольку любая модель базируется на некоторых предпосылках, нам нужно сделать ряд предположений и ввести ряд определяющих параметров. В данном случае будем полагать, что верны следующие предположения:

1) имеет место естественный прирост во времени трудовых ресурсов

$$L' = \alpha L; \tag{3.7.2}$$

2) инвестиции расходуются на увеличение производственных фондов и на амортизацию, т.е.

$$I = K' + \beta k, \tag{3.7.3}$$

где β – норма амортизации.

Тогда, если λ – норма инвестиций, то $I = \lambda Y = K' + \beta k$, или

$$K' = \lambda F(K, L) - \beta k. \tag{3.7.4}$$

Из определения фондовооружённости k вытекает, что

$$\ln k = \ln K - \ln L.$$

Дифференцируя это равенство по t имеем:

$$\frac{k'}{k} = \frac{K'}{K} - \frac{L'}{L}.$$

Подставив в это соотношение выражения (3.7.1) и (3.7.3), получаем уравнение относительно неизвестной функции k:

$$k' = \lambda f(k) - (\alpha + \beta)k, \tag{3.7.5}$$

где $f(k)$ определена по формуле (3.7.1).

Полученное соотношение (3.7.5) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (которое является автономным). Выделим стационарное решение этого уравнения из условия $k' = 0$, тогда следует, что:

$$\lambda f(k) - (\alpha + \beta)k = 0, \qquad (3.7.6)$$

т.е. определена $k_{st} = \text{const}$ – постоянная величина, являющаяся корнем этого нелинейного алгебраического уравнения.

Рассмотрим конкретную задачу: для производственной функции $F(K,L) = \sqrt{KL}$, найти интегральные кривые уравнения (3.7.5) и стационарное решение.

Из уравнения (3.7.1) следует, что $f(k) = \sqrt{k}$, и тогда уравнение (3.7.5) имеет вид:

$$k' = \lambda\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k.$$

Стационарное решение этого уравнения следует из равенства $\lambda\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0$, откуда получаем ненулевое частное решение уравнения (3.7.5):

$$k_{st} = \lambda^2 \Big/ (\alpha + \beta)^2 .$$

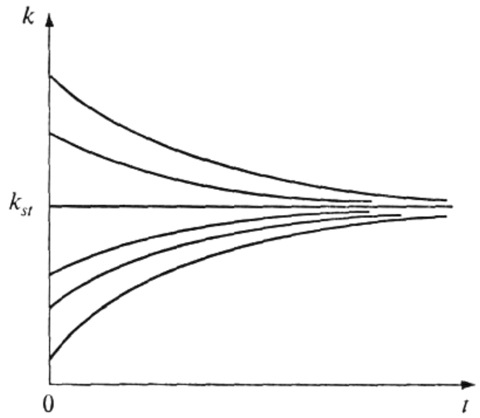

Рис. 3.7.1

Дифференциальное уравнение (3.7.5) решаем методом разделения переменных:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left(\lambda - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right)} = dt .$$

Интегрируя это уравнение с заменой переменной $z = \sqrt{k}$, получаем его общее решение в окончательном виде:

$$k(t) = \left[\frac{1}{\alpha + \beta} + Ce^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t} \right]^2 . \qquad (3.7.7)$$

Семейство интегральных кривых сходится сверху и снизу к стационарному решению (рис. 3.7.1), т.е. $k \to k_{st}$ при $t \to \infty$. Следовательно, при неизменных входных параметрах задачи λ, α и β функция фондовооружённости в данном случае устойчиво стремится к стационарному значению независимо от начальных условий. Такая стационарная точка $k = k_{st}$ является точкой устойчивого равновесия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Внешняя среда функционирования российских предприятий характеризуется высокой степенью нестабильности и неопределённости. Для того чтобы выжить предприятия должны быть способны своевременно реагировать на изменяющиеся условия функционирования, как можно более безболезненно к ним приспосабливаться, извлекая максимум выгоды из рыночных возможностей, используя потенциал предприятия. Это требует организации на предприятии постоянного прогнозирования и контроля за изменениями внешней турбулентной среды, применения адекватного экономико-математического инструментария, а также создания методики, позволяющей оперативно и эффективно анализировать динамику предприятия, используя информационные технологии для решения задач данного вида. Проведённое исследование охватывает ряд вопросов, решение которых, должно позволить хозяйствующей организации, осуществляющей кредитно-инвестиционную деятельность, оптимизировать работу.

Выработанная методика анализа кредитно-инвестиционных ресурсов предприятия позволяет повысить эффективность использования капитала с помощью разработанного математического аппарата, адаптированного к заданным дифференциальным динамическим моделям развития промышленного предприятия, использующих стандартные варианты инвестиционных вложений и их комбинаций (самофинансирование, государственные инвестиции, кредиты), с учётом влияния факторов не поддающихся прогнозированию (изменение курса валют, цен на сырьё, инфляция), возникающих в условиях турбулентного рынка.

С этой целью исследованы полученные аналитические зависимости, описывающие различные варианты динамики основных фондов и прибыли предприятия при различных схемах его кредитования.

Проведённые исследования позволяют повысить обоснованность и эффективность принимаемых инвестиционно-финансовых решений в условиях турбулентного рынка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашманов, С.А. Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. – М. : Наука, 1984.
2. Афанасьев, М.Ю. Исследование операций в экономике / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М. : ИНФРА-М, 2003.
3. Багриновский, К.А. Экономико-математические методы и модели (микроэкономика) : учебное пособие / К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М. : Изд-во РУДН, 1999.
4. Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2001.
5. Бирман, И.Я. Оптимальная экономика / И.Я. Бирман. – М. : Экономика, 1968.
6. Егорова, Н.Е. Динамические модели развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционные ресурсы / Н.Е. Егорова, С.Р. Хачатрян. – М. : ЦЭМИ РАН, Препринт, 2001.
7. Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М. : ДИС, 1997.
8. Иванова, Н.Ю. Экономико-математическое моделирование малого бизнеса (обзор подходов) // Экономика и математические методы / Н.Ю. Иванова, А.И. Орлов. – 2001. – № 2.
10. Исследование операций в экономике / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
11. Клейнер, Г.Б. Экономико-математическое моделирование и экономическая теория // Экономика и математические методы / Г.Б. Клейнер. – 2001. – № 3.
12. Колемаев, В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. – М. : Юнити, 1998.
13. Кузнецов, Б.Т. Математические методы и модели исследования операций / Б.Т. Кузнецов. – М. : Юнити-Дана, 2005.
14. Кремер, Н.Ш. Исследование операций в экономике / Н.Ш. Кремер. – М. : Юнити, 1997.
15. Лебедев, В.В. Математика в экономике и управлении / В.В. Лебедев. – М. : НВТ Дизайн, 2004.
16. Пинегина, М.В. Экономико-математические методы и модели / М.В. Пинегина. – М. : Экзамен, 2002.
17. Самарский, А.А. Математическое моделирование / А.А. Самарский, А.Л. Михайлов. – М. : Наука, 1997.
18. Трусов, П.В. Введение в математическое моделирование / П.В. Трусов. – М. : Юнити, 1999.
19. Федосеев, В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели / В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов. – М. : ЮНИТИ, 2000.
20. Хачатрян, С.Р. Методы и модели решения экономических задач : научно-методическое пособие / С.Р. Хачатрян, М.В. Пинегина, В.П. Буянов. – М. : Экзамен, 2002.
21. Четыркин, Е.М. Финансовая математика / Е.М. Четыркин. – М. : Дело ЛТД, 2003.
22. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций / А.С. Шапкин. – М. : Дашков и К°, 2006.
23. Экономико-математические методы и модели / под ред. А.В. Кузнецова. – Минск : БГЭУ, 1999.

ОГЛАВЛЕНИЕ