Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания
для студентов 2 курса специальностей инженерного профиля
всех форм обучения

Тамбов
Издательство ТГТУ
2010

УДК 531.1 (075)
ББК В21я73-5
Г15

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета

Р е ц е н з е н т
Доктор технических наук, профессор
В.Ф. Першин

Г15 Относительное движение материальной точки. Теоретическая механика : метод. указ. / сост. : В.И. Галаев, Ю.В. Кулешов, О.В. Ломакина. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010. – 32 с. – 100 экз.

Рассматриваются вопросы динамики материальной точки в неинерциальных системах координат, относительно которых принципиальным является установление основного уравнения движения точки.

Показана необходимость использования указанных систем координат при решении практически важных задач, в которых целесообразным является рассмотрение относительного движения точки, тесно связанного с основными понятиями механики.

Предназначены для студентов 2 курса специальностей инженерного профиля всех форм обучения.

УДК 531.1 (075)
ББК В21я73-5

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет» (ТГТУ), 2010

Учебное издание

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания

Составители:
ГАЛАЕВ Валентин Иванович,
КУЛЕШОВ Юрий Васильевич,
ЛОМАКИНА Ольга Владимировна

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию И.В. Евсеева

Подписано в печать 08.02.2010
Формат 60×84 /16. 1,86 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 65.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Исследование динамики относительного движения является подтверждением значимости теоретической механики как фундаментальной дисциплины для формирования мышления студента в технологическом процессе подготовки специалистов инженерного профиля.

Изучение теории относительных движений имеет огромное значение в теории космических полётов, где приходится рассчитывать сложные траектории летательных аппаратов по отношению к подвижным системам координат, связанных с планетами.

Следует отметить, что в большинстве случаев показатели технологических процессов при обработке материалов, как качественные, так и количественные, зависят именно от характеристик движения материала относительно рабочих органов, которые сами совершают движения по отношению к корпусу машины. В основе теории переработки сыпучих и жидких материалов, к которой относятся сепарирование, транспортирование, смешивание, дозирование и другое, лежит теория относительного движения.

Целью изучения указанной темы является усвоение основного закона движения в подвижных (неинерциальных) системах координат. Благодаря пониманию основных особенностей относительного движения материальной точки студенты убеждаются в безграничных возможностях постижения закономерностей механического взаимодействия тел в окружающем нас мире, что отражает методологическую значимость этой темы для понимания законов механики.

1. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ И НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В кинематике не затрагивается вопрос о причинах, вызывающих движение, поэтому принципиальной разницы между различными системами координат нет, т.е. в этом отношении все они равноправны. В динамике при изучении законов движения дело обстоит совершенно иначе, так как здесь обнаруживается принципиальное различие между разными системами координат и преимущества одного класса систем координат по сравнению с другими.

Законы механики в разных системах координат имеют, вообще говоря, различный вид, поэтому может оказаться, что в произвольной системе координат законы даже простых явлений будут выглядеть очень сложно. Поэтому, возникает задача отыскания такой системы координат, в которой законы механики выглядели бы возможно более просто и которая наиболее удобна для описания механических явлений (такая система координат получила название инерциальной).

Исследование движения одной точки материального тела даёт полное представление о движении тела в целом, если оно совершает поступательное движение. В связи с этим, материальная точка – это точка, заменяющая реальное тело, которое в силу конкретных условий совершает только лишь поступательное движение. Материальной точке придаются все свойства поступательно движущегося тела, а возможность замены материальной точкой того или иного объекта зависит в большей степени от особенностей его движения и идеализации задачи, чем от размеров объекта.

Опыт показывает, что в любой системе координат произвольное тело вызывает некоторое ускорение свободной материальной точки, причём это ускорение становится бесконечно малым по мере удаления тела на бесконечно большое расстояние от точки.

Понятие об инерциальной системе координат связано с понятием об изолированной материальной точке, т.е. точке, которая находится на весьма больших расстояниях от всех прочих тел и, следовательно, свободна от взаимодействия с другими телами Вселенной или находится под действием уравновешенной системы сил.

Экспериментальные исследования показывают, что относительно одних систем координат ускорение такой точки равно нулю, а относительно других систем координат изолированная точка движется ускоренно. Например, изолированная материальная точка, покоящаяся относительно системы координат $ox_1y_1z_1$ и занимающая положение, отличное от начала координат O, будет иметь ускорение относительно системы координат $oxyz$, вращающейся вокруг оси z с угловой скоростью ω. Действительно, относительно системы координат $oxyz$ точка будет двигаться по окружности, и поэтому её ускорение относительно указанной системы координат не равно нулю.

Рассмотрим теперь вопрос, связанный с причиной возникновения ускорения материальной точки относительно произвольной системы координат. Опыт показывает, что этой причиной может быть как действие на точку каких-то определённых тел, так и свойства самой системы координат, так как ускорение различно относительно разных систем координат. Однако, можно предположить, что существует такая система координат, в которой ускорение материальной точки полностью обусловлено только взаимодействием её с другими телами и равно нулю при отсутствии указанного взаимодействия [1].

Система координат называется инерциальной, если по отношению к ней любая изолированная материальная точка либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно независимо от начального положения и направления начальной скорости (движение по инерции).

Системы координат, для которых условия приведённого определения для материальной точки не выполняются, называются неинерциальными. Так как любое тело во Вселенной не является полностью изолированным от воздействий, то инерциальные системы координат являются воображаемыми и могут быть введены с той или иной степенью приближения. Например, близкой к инерциальной является гелиоцентрическая система координат, начало которой совпадает с центром Солнца, а оси направлены на удалённые звезды; в меньшей степени условию инерциальности удовлетворяет геоцентрическая система координат, связанная с Землёй.

Первый закон классической механики или закон инерции Ньютона сводится к утверждению, что инерциальные системы координат существуют. Следует отметить, что утверждение в отношении той или иной системы координат о её инерциальности всегда нуждается в обосновании [2].

Существование инерциальных систем координат подтверждается с известной степенью точности простейшим экспериментом Гамилея, который заключался в наблюдении над отполированным металлическим шариком, скатывающимся по наклонной гладкой доске. Было установлено, что если угол наклона доски к горизонту стремится к нулю, то ускорение шарика также стремится к нулю. Отсюда был сделан вывод о том, что «когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая сопротивления то … движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца».

Последующие более точные опыты установили неинерциальность геоцентрической системы координат, которая фактически используется в эксперименте Галилея. В то же время наблюдения над ускорениями небесных тел показали инерциальность гелиоцентрической системы Коперника. Участие солнечной системы во вращении вокруг центра нашей Галактики приводит к малой неинерциальности гелиоцентрической системы, однако тогда за инерциальную систему координат можно принять систему, связанную с несколькими галактиками.

В силу закона инерции для объяснения равномерного и прямолинейного движения точки нет необходимости предполагать существование каких-либо причин, не заключающихся в свойствах материи, которые поддерживали бы такое движение точки. Более того, если при движении скорость точки изменяется, то отсюда следует заключение о существовании некоторых причин, изменяющих движение и не заключающихся в свойствах самой материи. Эти причины о сущности материи, называются силами, которые производят действия, заключающиеся в сообщении ускорений материальным точкам, на которые они действуют. Ускорение материальной точки является мерой её отклонения от инерциального состояния.

Система координат, которая движется поступательно равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы, также является инерциальной системой координат, так как ускорения материальной точки в этих системах координат одинаковы. Следовательно, инерциальных систем координат существует бесконечно много. Системы координат, движущиеся относительно инерциальной системы ускоренно, являются неинерциальными системами координат. Движение материальной точки относительно инерциальной системы координат, которую иногда условно называют неподвижной, называется абсолютным движением, а относительно неинерциальной системы координат, которую называют подвижной, называется относительным движением.

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ АБСОЛЮТНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из закона инерции Ньютона следует, что если на материальную точку в инерциальной системе координат действует сила, то она вызывает изменение скорости точки. Указанную связь между силой (мерой механического воздействия) и ускорением (мерой отклонения точки от инерциального состояния) устанавливает основной закон динамики (второй закон Ньютона): ускорение, которое сообщает материальной точке действующая на неё сила, в инерциальной системе координат пропорционально величине силы и имеет направление силы.

Как следует из основного закона динамики материальной точки, причиной нарушения инерциального состояния точки, т.е. появления ускорения у точки, является воздействие на неё других материальных точек или тел, а характеристикой этого воздействия является векторная величина, называемая силой, приложенной к данной точке. При этом, сила характеризует направленность воздействия на данную точку и интенсивность и зависимость результата воздействия, т.е. ускорения точки, от сопротивляемости материальной точки этому воздействию.

Основное уравнение динамики абсолютного движения материальной точки является аналитическим представлением этого закона и имеет вид

$$m\vec{W} = \vec{F}, \quad mW = F, \tag{2.1}$$

где $\vec{F}$ – вектор силы, действующей на материальную точку; $\vec{W}$ – вектор абсолютного ускорения точки.

Опыт показывает, что при любой по величине и направлению силе отношение F/W для данного тела остаётся постоянным; для разных же тел это отношение оказывается различным. Величина отношения F/W характеризует свойство инертности тел, которое выражает степень неподатливости тела к изменению его скорости. Для количественной характеристики инертности тела вводится физическая величина m, пропорциональная отношению F/W и называется массой тела.

Масса обладает следующими двумя важнейшими свойствами:

1) масса – величина аддитивная, т.е. масса составного тела равна сумме масс его частей;
2) масса тела – величина постоянная, не изменяющаяся при его движении.

Второй закон Ньютона устанавливает причину нарушения инерциального состояния материальной точки (действие на точку других материальных тел). Принцип независимости действия сил в соответствии с которым ускорение, полученное материальной точкой под действием системы сил, равно геометрической сумме ускорений этой точки от действия отдельных сил, позволяет записать основное уравнение динамики абсолютного движения материальной точки в виде

$$m\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k, \tag{2.2}$$

где $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = F$ – равнодействующая системы сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. Под действием системы сил материальная точка совершает такое же движение как и под действием одной силы, равной равнодействующей этой системы сил [3].

3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Первые два закона классической механики и полученные из них уравнения справедливы для движения материальной точки относительно инерциальной системы координат (неподвижной или движущейся равномерно, прямолинейно и поступательно). Между тем во многих случаях необходимо получить решение интересующей нас задачи в неинерциальной (подвижной) системе координат (например, движение спутника относительно поверхности Земли; движение математического маятника с подвижной точкой подвеса и др.). В связи с этим возникает вопрос: как следует изменить основное уравнение динамики, чтобы оно оказалось справедливым и для неинерциальных систем координат?

Различие в кинематических характеристиках в относительном и абсолютном движениях точки заключается в том, что относительное и абсолютное ускорения точки в этих движениях различны, что вызвано переносным движением. Будет естественно предположить, что для подвижной системы координат это различие в ускорениях существует вследствие действия каких-то дополнительных сил, кроме тех, которые действуют на материальную точку со стороны других материальных точек или тел. Тогда к этим силам возможно применение второго закона Ньютона, т.е. этот закон можно расширить, перенося его на относительное движение.

Следовательно, можно считать, что произведение массы материальной точки на её относительное ускорение равно равнодействующей тех сил, под действием которых точка получает относительное движение. Для выяснения характера таких сил и их отношения к силам, фактически приложенным к материальной точке, следует использовать соотношения между кинематическими характеристиками в абсолютном и относительном движениях.

Изучим движение материальной точки относительно неинерциальной подвижной системы координат *oxyz*, которая совершает заданное движение относительно инерциальной (условно неподвижной) системы координат $o_1x_1y_1z_1$. Пусть материальная точка M совершает движение по отношению к подвижной системе координат, которое называется относительным. Движение точки M по отношению к неподвижной системе координат называется абсолютным, а движение системы координат *oxyz* относительно системы координат $o_1x_1y_1z_1$ является для точки M переносным движением (см. рис. 1).

Наблюдатель, находящийся в инерциальной системе координат имеет право для изучения движения материальной точки применять законы механики, о которых речь шла выше, в частности второй закон Ньютона

$$m\vec{W} = \vec{F}, \tag{3.1}$$

где $\vec{W}$ – ускорение точки относительно инерциальной системы координат (абсолютное ускорение точки).

Если наблюдатель, находящийся в неинерциальной системе координат и считающий, что на точку M действует та же самая сила $\vec{F}$, попытается применить второй закон Ньютона, то он обнаружит, что этот закон в его системе координат не выполняется, т.е. масса, умноженная на ускорение, которое он наблюдает, не равна действующей на материальную точку силе $\vec{F}$..

В связи с этим, получим основное уравнение динамики относительного движения точки, считая, что переносное движение системы *oxyz* и силы, действующие на точку, известны.

В разделе «Кинематика» установлено, что абсолютное ускорение точки при её сложном движении равно геометрической сумме относительного $\vec{W}_r$, переносного $\vec{W}_e$ и кориолисова $\vec{W}_c$ ускорений этой точки

$$\vec{W} = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c. \tag{3.2}$$

Подставляя это значение $\vec{W}$ в равенство (3.1), получим

$$m(\vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_c) = \vec{F}.$$

Из этого уравнения определим произведение массы точки на её относительное ускорение

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + (-m\vec{W}_e) + (-m\vec{W}_c). \tag{3.3}$$

Введём два вектора $\vec{\Phi}_e = -m\vec{W}_e$, $\vec{\Phi}_c = -m\vec{W}_c$ и запишем равенство (3.3) в виде

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c. \tag{3.4}$$

В правой части формулы (3.4) к силе, действующей на материальную точку, добавляются два слагаемых – они появляются в результате наличия переносного и кориолисового ускорений точки. Векторы $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_c$ имеют размерность силы и называются силами инерции. Вектор $\vec{\Phi}_e$ называется переносной силой инерции, вектор $\vec{\Phi}_c$ – кориолисовой силой инерции. Переносная и кориолисова силы инерции получаются соответственно умножением переносного и кориолисова ускорений на массу точки, направление этих сил противоположно направлению соответствующих ускорений.

Равенство (3.4) можно трактовать как запись второго закона Ньютона применительно к неинерциальной системе координат, оно называется основным уравнением динамики относительного движения материальной точки. Как показывает это уравнение, произведение массы точки на её относительное ускорение не равно сумме действующих на неё сил.

Последние два вектора в правой части (3.4) можно рассматривать как поправки ко второму закону Ньютона, которые должен ввести наблюдатель, находящийся в неинерциальной системе координат, для того, чтобы в этой системе координат основное уравнение динамики сохранило форму второго закона Ньютона.

В результате мы получаем следующий метод: уравнение динамики относительного движения материальной точки в неинерциальной (подвижной) системе координат можно составить таким же образом как и уравнение динамики абсолютного движения этой точки в инерциальной системе координат, если к фактически действующим на точку силам добавить переносную и кориолисову силы инерции. Таким образом, второй закон Ньютона может быть применён и в неинерциальной системе координат с указанными выше поправками (введением особых сил, называемых силами инерции).

Сопоставление основных уравнений динамики абсолютного и относительного движений материальной точки показывает, что в инерциальной системе координат ускорение точки является только результатом действия на неё сил, т.е. её взаимодействия с другими материальными телами; в неинерциальной системе координат ускорение точки есть результат не только действия не неё сил, но и результат движения самой системы координат.

Динамической причиной движения точки с некоторым ускорением является действие на неё сил; кинематической причиной установления этого ускорения является движение самой системы координат. Если рассматривать движение материальной точки относительно различных неинерциальных систем координат, то силы, действующие на точку со стороны других тел и определяемые физическими законами взаимодействия, имеют одни и те же значения независимо от систем координат. Ускорения же материальной точки в её движениях относительно различных систем координат зависят как от действующих сил, так и от движения этих систем координат, а поэтому они различны. Последним объясняется то обстоятельство, что в неинерциальных системах координат зависимости, связывающие ускорения материальной точки и действующие на неё силы, различны.

В проекциях на оси подвижной системы координат *oxyz* из уравнения (3.4), учитывая, что сила является равнодействующей сил, действующих на материальную точку, получаем дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}; \\ m\ddot{z} = \sum F_{kz} + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}, \end{cases} \tag{3.5}$$

где x, y, z – относительные координаты точки.

Таким образом, относительно неинерциальной системы координат материальная точка движется так же, как если бы эта система координат была инерциальной и если бы к этой точке, кроме фактически действующих на неё сил, были приложены переносная и кориолисова силы инерции.

4. СИЛЫ ИНЕРЦИИ В ДИНАМИКЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из предыдущих рассуждений следует, что введение сил инерции позволяет сохранить по форме основное уравнение динамики и для неинерциальных систем координат: слева – произведение массы на ускорение, справа – силы. Но кроме сил (их можно назвать абсолютными силами), обусловленных действием определённых тел на материальную точку (сил взаимодействия), необходимо учесть и силы инерции, которые пропорциональны массе точки и зависят как от движения неинерциальной системы координат, так и от положения и скорости материальной точки в этой системе координат.

Для сил инерции нельзя указать физический источник в виде определённого тела, действующего на рассматриваемую материальную точку, поэтому силы инерции не имеют противодействующих и, в отличие от сил взаимодействия, не подчиняются третьему закону Ньютона. В связи с этим силы инерции нельзя назвать силами в обычном смысле слова, их можно назвать псевдосилами. Если в инерциальной системе координат наблюдаются такие явления как деформация тела или ускоренное движение точки, то они объясняются взаимодействием тел, т.е. действием некоторых сил (это основное свойство инерциальной системы координат). Но если эти же явления наблюдаются в неинерциальной системе координат, то они могут быть объяснены не взаимодействием тел, а движением самой неинерциальной системы координат.

Если между материальной точкой и телом, с которым связана неинерциальная система координат есть физическая связь, то силы инерции будут приложены не к материальной точке, а к телу. В этом случае основное уравнение динамики относительного движения точки можно рассматривать как распространение принципа Даламбера на задачу об определении относительного движения точки.

Применяя принцип Даламбера, мы мысленно останавливает движущуюся материальную точку, и для того, чтобы не изменить её взаимодействия с окружающими телами, вызывающими ускорение точки, прикладываем к точке силы инерции.

Таким образом, изучая относительное движение точки, мысленно останавливаем подвижную систему координат и для того, чтобы при этом не изменилось взаимодействие материальной точки с телом, связанным с подвижной системой координат, вводим силы инерции.

Следовательно, в рассмотренном случае, как и сила $\vec{F}$, силы инерции $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_c$ являются результатом взаимодействия между материальной точкой, находящейся в сложном движении, и некоторым телом, обусловливающим переносное движение. К этому телу и приложены силы инерции, причём их физическое действие может быть обнаружено наблюдениями и опытом.

Если материальная точка имеет относительное движение по движущейся материальной поверхности, то силы инерции проявятся в виде давления точки на эту поверхность. Например, повышенные нагрузки поезда на правый рельс в северном полушарии; подмыв правого берега рек северного полушария.

Если физическая связь между материальной точкой и телом, с которым связана подвижная система координат отсутствует, то силы инерции следует рассматривать как некоторые условные величины, введённые в основное уравнение динамики относительного движения точки. Физические силы, равные $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_c$ в этом случае не существуют. Например, можно составить уравнение движения материальной точки, брошенной под угол к горизонту, относительно системы координат, связанной с произвольным движущимся телом.

В относительном движении материальной точки для наблюдателя, связанного с подвижной системой координат, силы инерции «представляются» как реальные силы. Они могут вызвать относительное движение с ускорением у свободной материальной точки, не испытывающей реакции от материальных тел, с которыми связана подвижная система координат. Например, все падающие тела при своём движении отклоняются к востоку, что вызывается кориолисовой силой инерции.

Таким образом, основное уравнение динамики относительного движения в рассмотренных выше случаях необходимо рассматривать как метод исследования относительного движения материальной точки с помощью его фиктивного приведения к абсолютному движению.

Следует отметить, что все задачи динамики относительного движения материальной точки можно решить не вводя сил инерции, а оперируя только силами, физический источник которых мы можем указать. Действительно, проинтегрировав уравнение движения точки в инерциальной системе координат, мы найдём как функции времени абсолютные координаты точки. Зная закон движения неинерциальной (подвижной) системы координат, можно выразить относительные координаты точки, используя геометрическое соотношение между координатами точки в указанных системах координат.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ИНЕРЦИИ В ДИНАМИКЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Определение сил инерции $\vec{\Phi}_e$, $\vec{\Phi}_c$ и запись основного уравнения динамики материальной точки рассмотрим на частных случаях, соответствующих различным видам переносного движения.

1. Предположим, что подвижная система координат совершает поступательное движение, т.е. переносное движение является поступательным. В этом случае угловая скорость переносного движения $\vec{\omega}_e = 0$ и ускорение Кориолиса материальной точки $\vec{W}_c = 0$, так как $\vec{W}_c = 2[\vec{\omega}_e \vec{V}_r]$ ($\vec{V}_r$ – относительная скорость точки).

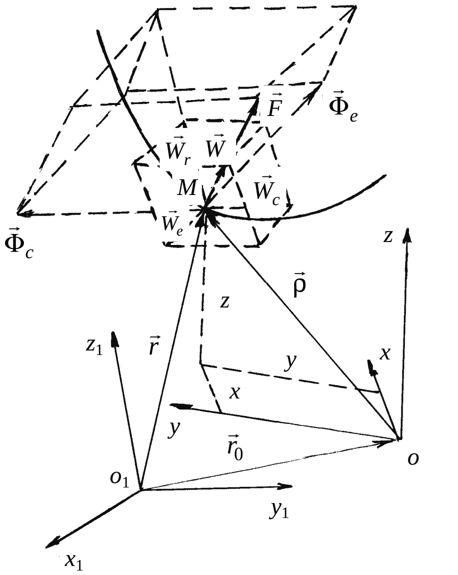


Рис. 1

Таким образом, кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c = 0$ и основное уравнение (3.4) примет вид

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e. \tag{5.1}$$

Следует учесть в этом случае, что переносная сила инерции не зависит от положения, занимаемого точкой в подвижной системе координат.

Формула для переносного ускорения точки имеет вид [3]

$$\vec{W}_e = \vec{W}_o + \left(\vec{\omega}_e \left(\vec{\omega}_e \vec{\rho}\right)\right) + \left(\vec{\varepsilon}_e \vec{\rho}\right). \tag{5.2}$$

Здесь $\vec{\omega}_e$, $\vec{\varepsilon}_e$ – угловая скорость и угловое ускорение подвижной системы координат; $\vec{W}_o$ – ускорение её начала; $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точки в подвижной системе координат (рис. 1).

Так как $\vec{\omega}_e = \vec{\varepsilon}_e = 0$, то $\vec{W}_e = \vec{W}_o$, и переносная сила инерции $\vec{\Phi}_e = -m\vec{W}_o$, $\Phi_e = mW_o$.

2. Предположим, что подвижная система совершает неравномерное вращение вокруг неподвижной оси (рис. 2). Тогда переносное ускорение $\vec{W}_e$ равно геометрической сумме вращательного и центростремительного ускорений

$$\vec{W}_e = \vec{W}_e^{\text{в}} + \vec{W}_e^{\text{ц}}.$$

Поэтому, переносная сила инерции имеет две составляющие: вращательную силу инерции $\vec{\Phi}_e^{\text{в}} = -m\vec{W}_e^{\text{в}}$ и центробежную силу инерции $\vec{\Phi}_e^{\text{ц}} = -m\vec{W}_e^{\text{ц}}$, т.е.

$$\vec{\Phi}_e = \vec{\Phi}_e^{\text{в}} + \vec{\Phi}_e^{\text{ц}}, \quad \vec{\Phi}_e^{\text{в}} \perp \vec{\Phi}_e^{\text{ц}}.$$

Уравнение (3.4) принимает вид

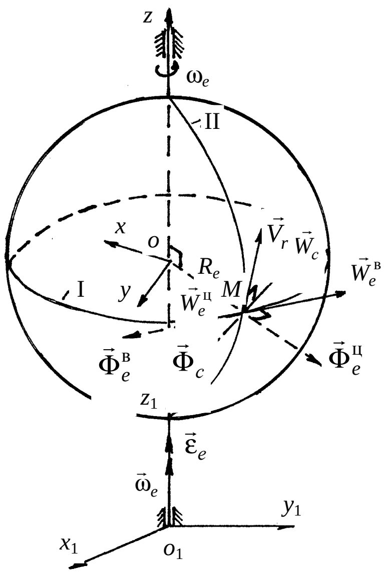
$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e^{\text{в}} + \vec{\Phi}_e^{\text{ц}} + \vec{\Phi}_c. \tag{5.3}$$

Переносное вращательное и переносное центростремительное ускорения точки определяются по формулам

$$W_e^{\text{в}} = R_e|\varepsilon_e|; \quad W_e^{\text{ц}} = R_e\omega_e^2,$$

где ω_e, ε_e – алгебраические величины угловой скорости и углового ускорения переносного вращения; R_e – расстояние материальной точки до оси вращения.

Переносная вращательная сила инерции равна $\Phi_e^{\text{в}} = mR_e|\varepsilon_e|$ и направлена противоположно вращательному ускорению $\vec{W}_e^{\text{в}}$; переносная центробежная сила



I – траектория переносного движения материальной точки
II – траектория относительного движения материальной точки

Рис. 2

инерции равна $\Phi_e^{ц} = m R_e \omega_e^2$ и направлена противоположно центростремительному ускорению $\vec{W}_e^{ц}$ (т.е. от оси переносного вращения).

Кориолисова сила инерции равна $\Phi_c = 2m|\omega_e|V_r \sin(\vec{\omega}_e, V_r)$ и направлена противоположно ускорению $\vec{W}_c$, перпендикулярно к векторам ω_e и $\vec{V}_r$.

3. Предположим, что подвижная система координат совершает равномерное вращение вокруг неподвижной оси. В этом случае $\vec{\varepsilon}_e = 0$ и $\Phi_e^{в} = 0$, поэтому основное уравнение динамики относительного движения точки примет вид

$$m\vec{W}_r = \vec{F} + \vec{\Phi}_e^{ц} + \vec{\Phi}_c. \qquad (5.4)$$

6. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Материальная точка находится в состоянии относительного равновесия, т.е. не совершает движения относительно подвижной системы координат, если относительная скорость и относительное ускорение точки равны нулю ($\vec{V}_r = \vec{W}_r = 0$). В этом случае кориолисова сила инерции обращается в нуль и абсолютное ускорение точки равно ее переносному ускорению, т.е. $\vec{W} = \vec{W}_e$.

Основное уравнение (3.4) принимает вид

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_e = 0. \qquad (6.1)$$

Равенство (6.1) выражает условие относительного равновесия материальной точки: геометрическая сумма непосредственно действующих на точку сил и переносной силы инерции равна нулю.

Условие (6.1) вовсе не означает, что после сообщения материальной точке начальной скорости она будет двигаться равномерно и прямолинейно, как это было в инерциальной системе координат. Если сообщить точке относительную скорость, то появится кориолисово ускорение и сила инерции $\vec{\Phi}_c$; при этом может измениться переносное ускорение (оно зависит от положения точки в подвижной системе координат), что вызовет изменение переносной силы инерции $\vec{\Phi}_e$.

В проекциях на оси подвижной системы координат из векторного равенства (6.1) получим три равенства в скалярной форме

$$\begin{cases} \sum F_{kx} + \Phi_{ex} = 0; \\ \sum F_{ky} + \Phi_{ey} = 0; \\ \sum F_{kz} + \Phi_{ez} = 0. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Выясним при каких условиях движение точки в подвижной системе координат является прямолинейным и равномерным. Полагая в (3.4) $\vec{W}_r = 0$, получим

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_c = 0. \qquad (6.3)$$

Равенство (6.3) выражает условие прямолинейного и равномерного движения материальной точки в подвижной системе координат, имеющей переносное движение; аналогичное условие в неподвижной (инерциальной) системе координат записывается в форме $\vec{F} = 0$.

Из равенств (6.2) следует, что уравнения относительного равновесия составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижной системе координат, если при этом к фактически действующим на точку силам добавить переносную силу инерции.

7. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Рассмотрим тот частный случай, когда подвижная система координат движется относительно инерциальной системы координат поступательно, прямолинейно и равномерно. Как отмечалось ранее, в этом случае кориолисова сила инерции равна нулю; кроме того переносное ускорение, а, следовательно, и переносная сила инерции так же равны нулю, так как начало подвижной системы координат движется равномерно и прямолинейно (5.2).

Таким образом, в рассматриваемом случае основное уравнение динамики относительного движения материальной точки примет вид

$$m\vec{W}_r = \vec{F}. \qquad (7.1)$$

В правой части уравнения (7.1) остались только фактически приложенные к точке силы, как в основном уравнении (2.1) абсолютного движения точки, т.е. подвижная система координат в этом случае также является инерциальной (в такой системе координат второй закон Ньютона применим в той же форме, как и в неподвижной системе). С динамической точки зрения относительное движение не отличается от абсолютного движения, т.е. относительное движение материальной точки по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно прямолинейно, и равномерно, происходит так же, как и по отношению к неподвижной (инерциальной) системе координат.

Все такие подвижные системы координат являются инерциальными и движение материальной точки относительно любой из них можно рассматривать как абсолютное движение. Уравнения движения точки как по отношению к основной инерциальной, так и по отношению к любой другой инерциальной системам координат оказываются одинаковыми.

Поэтому наблюдения над относительным движением материальной точки по отношению к любой из таких систем координат не позволяет определить, совершает ли эта система координат равномерное прямолинейное поступательное движение или находится в покое, т.е. не позволяет отличить одну инерциальную систему координат от другой. Это положение называется принципом относительности классической механики.

Сформулированный принцип относительности эквивалентен такому утверждению: если вы находитесь в лаборатории, оснащённой любыми измерительными приборами, но не можете прямым наблюдением над внешними предметами обнаружить движение лаборатории, то никакими измерительными приборами вы не сможете обнаружить её поступательного, прямолинейного и равномерного движения, но любое движение лаборатории при нарушении хотя бы одного из указанных трёх ограничений можно обнаружить при помощи измерительных приборов.

В качестве иллюстративного можно привести пример с пассажиром в каюте судна: если судно движется по спокойному морю поступательно, прямолинейно и равномерно, то, не глядя в иллюминатор, пассажир часто не сможет сказать, движется ли судно, или стоит на месте.

Всё сказанное достаточно ясно свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем координат, в которых одинаковы свойства пространства и времени.

8. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И РАВНОВЕСИЯ. РАВНОВЕСИЕ И ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗЕМЛИ

8.1. Невесомость

Теория относительного движения материальной точки позволяет пояснить такое явление, как состояние невесомости в космическом корабле, спутнике, падающем лифте, самолёте. Под невесомостью материальной точки в какой-нибудь системе координат понимают отсутствие давления точки на тела, находящиеся в покое в этой системе координат.

Любое тело, находящееся в корабле, спутнике и т.п., в то время, когда они подвержены только действию силы тяготения Земли как бы теряет свой «вес». Космонавт свободно «парит» в кабине, ни на что не опираясь; он может «положить» свой карандаш «в воздухе» и карандаш не будет падать. Жидкость, если она не смачивает стенки сосуда, стремится принять форму шара и т.д. Отметим, что все аппараты, в которых наблюдается состояние невесомости, находятся в состоянии ускоренного движения под действием только силы тяготения, в состоянии свободного падения.

Учитывая, что давление материальной точки на тело по величине равно силе реакции на материальную точку, невесомость наблюдают при равенстве нулю силы реакции от любого неподвижного тела в этой системе координат, с которым соприкасается неподвижная материальная точка.

Рассмотрим невесомость материальной точки в неинерциальной системе координат, жёстко скреплённой со свободным телом, которое движется под действием силы притяжения Земли (таким телом может быть искусственный спутник Земли за пределами её атмосферы).

Явление невесомости следует рассматривать для материальной точки, находящейся в относительном равновесии, которое имеет вид

$$\vec{R} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e = 0, \qquad (8.1)$$

где $\vec{R} = m\vec{g}$ – сила притяжения материальной точки Землёй; $\vec{N}$ – реакция спутника или любого неподвижного тела в этом спутнике; $\vec{\Phi}_e = -m\vec{W}_e$ – переносная сила инерции.

Из уравнения (8.1) следует, что $-\vec{N} = \vec{R} + \vec{\Phi}_e$. При невесомости $\vec{N} = 0$, поэтому $\vec{R} + \vec{\Phi}_e = 0$. Поэтому невесомость будет при выполнении условия

$$\vec{R} = -\vec{\Phi}_e = m\vec{W}_e, \qquad (8.2)$$

следовательно, когда переносное ускорение материальной точки $\vec{W}_e$ равно ускорению $\vec{g}$ от действия силы притяжения, так как $\vec{R} = m\vec{g}$. Это условие имеет место, если материальная точка находится в центре масс спутника, так как центр масс движется также только под действием внешней силы притяжения Земли и его ускорение равно $\vec{g}$.

В случае, если материальная точка находится не в центре масс, то переносное ускорение вследствие вращения спутника отлично от ускорения $\vec{g}$ и невесомости не будет. Однако, если спутник движется поступательно, то материальная точка находится в невесомости в любой точке спутника.

Такая же картина будет наблюдаться на самолёте, когда при некоторой скорости полёта лётчик выбирает режим так, чтобы силы, действующие на самолёт со стороны воздуха (подъёмная сила, сила сопротивления) уравновешивались полностью силой тяги; тогда под действием силы тяжести самолёт будет «падать» с ускорением $\vec{g}$ и лётчик наблюдает состояние невесомости.

В состоянии невесомости частицы тела освобождаются от взаимодействий и совершают движение как свободные материальные точки, что вызывает у человека ощущение, получившее название «невесомость».

В качестве примера рассмотрим как изменяется вес тела в ускоренно движущемся лифте. Будем называть весом не силу тяготения $\vec{R}$, действующую на тело, а силу $\vec{N}$, приложенную к полу лифта, удерживающего тело; $\vec{N}_1$ – сила, приложенная к телу со стороны пола лифта, причём $N_1 = N$, $\vec{N}_1 = -\vec{N}$ (рис. 3).

При движении лифта вниз с ускорением $\vec{W}_e$ уравнение относительного равновесия тела имеет вид

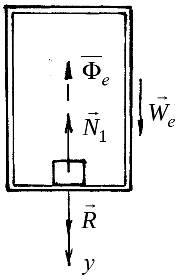


Рис. 3

$$\vec{R} + \vec{N}_1 + \vec{\Phi}_e = 0. \tag{8.3}$$

В проекции на вертикальную ось y из равенства (8.3) получим

$$R - N_1 - \Phi_e = 0, \qquad N_1 = N = R - \Phi_e.$$

В результате сила $\vec{N}$ определяется по формуле

$$N = m(g - W_e). \tag{8.4}$$

Сила $\vec{R}$ практически не меняется, а сила $\vec{N}$ (вес тела или сила давления тела на пол лифта) зависит от ускорения лифта.

Из формулы (8.4) ясно, что при $W_e = g$ получим N = 0, т.е. сила веса равна нулю; говорят, что тело потеряет вес и в лифте, движущимся с вертикальным ускорением $\vec{g}$, будет наблюдаться явление невесомости. Сила инерции равна и противоположна силе тяготения – сумма этих сил равна нулю (лифт может двигаться как вверх, так и вниз; важно, чтобы его ускорение было равно $\vec{g}$ и направлено вниз).

8.2. Равновесие материальной точки на поверхности земли. Отклонение линии отвеса от направления радиуса земли. Вес тела

Задачи динамики материальных тел относительно Земли имеют исключительное значение. К точности решения этих задач могут предъявляться различные требования, поэтому возникает необходимость установить, насколько существенным является отличие системы координат, связанной с Землёй, от инерциальной.

Движение Земли относительно инерциальной гелиоцентрической системы координат является сложным. Если не учитывать эффекты влияния луны и планет Солнечной системы, то можно считать, что Земля участвует в двух движениях: обращается вокруг Солнца по близкой к круговой орбите с радиусом R_0 = 149,6 $\cdot 10^6$ км (средняя линейная скорость такого движения составляет v_o = 29,8 км/с); вращается вокруг собственной оси с практически постоянной угловой скоростью $\omega_в \approx 0{,}729 \cdot 10^{-7} с^{-1}$, совершая один оборот в сутки.

С Землёй жёстко свяжем систему координат с началом в центре Земли; ускорение начала этой системы координат будет равно $\vec{W}_o = \dfrac{v_o^2}{R_o} \approx 5{,}9 \cdot 10^{-3}$ м/с^2. Это ускорение составляет $0{,}6 \cdot 10^{-1}$ % от ускорения силы тяжести, что позволяет его не учитывать [4]. Таким образом, будем считать, что Земля вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω_e и представляет собой однородный шар.

В качестве примера рассмотрим относительное равновесие (покой) материальной точки, находящейся на гладкой плоскости, на поверхности Земли. Условие относительного покоя точки M может быть записано в виде

$$\vec{R} + \vec{N} + \vec{\Phi}_e^{ц} = 0, \tag{8.5}$$

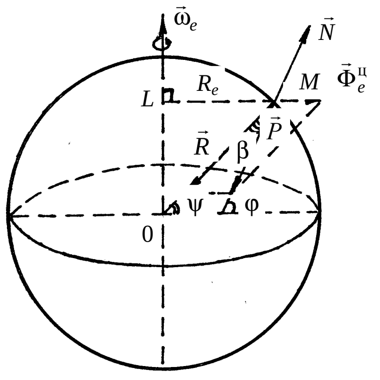


Рис. 4

где $\vec{R}$ – сила притяжения Земли, направленная к её центру; $\vec{N}$ – реакция опоры; $\vec{\Phi}_e^{ц}$ – переносная центробежная сила инерции (рис. 4).

Действие материальной точки на опору выражается силой $\vec{P} = -\vec{N}$, т.е. $\vec{P} = \vec{R} + \vec{\Phi}_e^{ц}$. Сила $\vec{P}$, представляющая равнодействующую сил притяжения Земли и переносной силы инерции, представляет собой ту силу, которая называется силой тяжести; направление этой силы является направлением вертикали в данной точке Земли, а плоскость, перпендикулярная к $\vec{P}$, является горизонтальной плоскостью.

При взвешивании тел определяется именно сила $\vec{P}$, так как с такой силой тело давит на чашку весов. Следовательно, вводя в уравнение равновесия силу $\vec{P}$, мы учитываем и силу $\vec{\Phi}_e^{ц}$, т.е. фактически учитываем влияние вращения Земли, а поэтому при составлении уравнений равновесия тел по отношению к Земле поправок на вращение Земли вводить не надо.

Угол φ между линией отвеса (линией действия силы тяжести $\vec{P}$) и экваториальной плоскостью называется географической широтой; угол ψ называется геоцентрической широтой (рис. 4).

Величину силы тяжести $\vec{P}$ можно записать в виде

$$\vec{P} = \sqrt{R^2 + (\Phi_e^{ц})^2 - 2R\Phi_e^{ц}\cos\psi},$$

где $R = mg_0$, $R_З$ – радиус Земли; g_0 – ускорение силы тяжести на полюсе; $\Phi_e^{ц} = mR_З\cos\psi\omega_e^2$.

Тогда

$$P = mg_0\sqrt{1 + \frac{R_З^2\cos^2\psi\omega^4}{g_0^2} - \frac{2R_З\cos^2\psi\omega^2}{g_0^2}}. \qquad (8.6)$$

Учитывая, что $\frac{R_З^2\omega^4}{g_0^2} << \frac{R_З\omega_e^2}{g_0^2}$ и $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x (x < 1)$, из формулы (8.6) получим

$$P = mg_0\left(1 - \frac{\omega_e^2 R_З}{g_0^2}\cos^2\psi\right). \qquad (8.7)$$

В результате получаем, что сила тяжести переменная величина, зависящая от широты места (от широты места зависит и ускорение силы тяжести)

$$g = g_0\left(1 - \frac{\omega_e^2 R_З}{g_0^2}\cos^2\psi\right). \qquad (8.8)$$

Наименьшее значение ускорение g имеет на экваторе (сила тяжести так же имеет наименьшее значение)

$$g_э = g_0\left(1 - \frac{1}{290}\right) \approx 9{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Наибольшее значение ускорение g (сила тяжести) имеет на полюсе $g_0 \approx 9{,}83$ м/с^2.

Опытная проверка формулы (8.8) производилась с помощью часов с маятником, которые на экваторе отставали. Это отставание часов объясняется тем, что на экваторе ускорение g имеет наименьшее значение и, как следует из формулы для периода $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, период колебаний маятника увеличивается.

Переносной силой инерции, вызванной вращением Земли, объясняется её незначительное сжатие к плоскости экватора.

8.3. Движение материальной точки относительно поверхности земли

Учёт влияния вращения Земли необходимо принимать во внимание или при больших скоростях движения (полёт ракет дальнего действия) или для движений, длившихся достаточно долго (течение рек, воздушные и морские течения). Рассмотрим качественную картину влияния вращения Земли на движение тел.

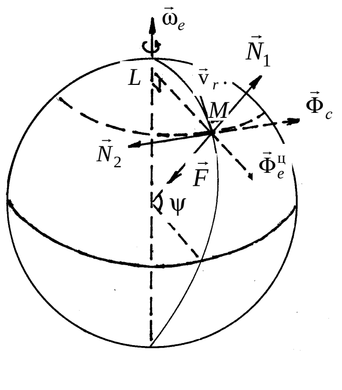


Рис. 5

Пусть в меридиональном направлении с юга на север, в северном полушарии движется поезд массой m со скоростью $\vec{v}_r$. На поезд действуют сила притяжения Земли $\vec{R}$, реакция со стороны левого и правого рельса, которую разложим на вертикальную $\vec{N}_1$ (направленную противоположно $\vec{R}$) и горизонтальную $\vec{N}_2$ (направленную перпендикулярно плоскости меридиана) составляющие (рис. 5).

Чтобы записать уравнение динамики поезда в неинерциальной системе координат (связанной с Землёй), которая равномерно вращается с угловой скоростью ω_e, необходимо к указанным силам добавить переносную $\vec{\Phi}_e^{ц}$ и кориолисову $\vec{\Phi}_c$ силы инерции. Переносное ускорение направлено к оси вращения Земли, кориолисово ускорение направлено на Запад; силы $\vec{\Phi}_e^{ц}$, $\vec{\Phi}_c$ направлены противоположно указанным ускорениям.

Основное уравнение динамики относительного движения поезда имеет вид

$$m\vec{W}_r = \vec{R} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_e^{ц} + \vec{\Phi}_c. \qquad (8.9)$$

Вектор относительного ускорения $\vec{W}_r$ расположен в плоскости меридиана, поэтому в проекции на касательную к параллели уравнения (8.9) получим

$$N_2 - \Phi_c = 0. \qquad (8.10)$$

Из уравнения (8.10) находим $N_2 = \Phi_c = 2m\omega_e v_r \sin\psi$. Таким образом, горизонтальная реакция рельс направлена налево, если смотреть по направлению движения поезда. По третьему закону Ньютона, давление поезда на рельс направлено противоположно, т.е. действует на правый рельс (это правило не меняется и при движении поезда с севера на юг).

Вследствие этого на двухпутных железных дорогах в северном полушарии правые рельсы изнашиваются быстрее, чем левые.

Таким же образом объясняется размыв правых берегов рек (они более отрывистые) северного полушария. В южном полушарии быстрее изнашиваются левые рельсы и размываются левые берега рек; в северном полушарии северный ветер имеет тенденцию обратиться в восточный, чем объясняются северо-восточные пассаты в этом полушарии.

Кориолисова сила инерции будет и тогда, когда поезд движется по параллели. Если движение происходит на восток, то кориолисова сила инерции направлена от оси Земли; при движении на запад она направлена к её оси (рис. 6).

Проекция кориолисовой силы инерции на горизонтальную плоскость равна $\Phi_c \sin\psi = 2m \mathrm{v}_r \omega_e \sin\psi$, т.е. той же величине, что и при движении по меридиану, и направлена также вправо по отношению к движению поезда. Таким образом, правый рельс изнашивается быстрее (правый берег реки размывается) в северном полушарии независимо от направления движения.

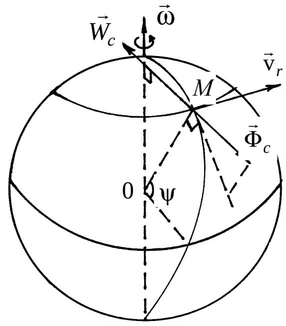


Рис. 6

8.4. Падение свободной материальной точки в пустоте с нулевой начальной скоростью относительно вращающейся земли

Отклонение материальной точки от вертикального направления к востоку и югу, которая начинает падение без начальной скорости относительно вращающейся Земли, было предсказано Ньютоном и подтверждено экспериментально в 1795 г.

Для материальной точки, падающей с высоты h вблизи поверхности Земли, основное уравнение динамики относительного движения имеет вид

$$m\vec{W}_r = \vec{P} + \vec{\Phi}_c, \qquad (8.11)$$

где $\vec{P}$ – сила тяжести $\vec{P} = (\vec{R} + \vec{\Phi}_e)$; $\vec{R}$ – сила притяжения Земли; $\vec{\Phi}_c$ – кориолисова сила инерции.

Так как вектор скорости свободно падающей материальной точки близок к вертикали места, то кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c = -2m[\vec{\omega}_e \vec{\mathrm{v}}_r]$ почти перпендикулярна к плоскости меридиана и направлена на восток. Запишем векторное равенство (8.11) в проекциях на ость x, направленную по касательной к параллели на восток, на ось y, направленную по касательной к меридиану на север, и ось z, направленную по вертикали вверх. В указанной подвижной системе координат векторы $\vec{\omega}_e$ (угловой скорости Земли) и $\vec{\mathrm{v}}_r$ имеют следующие координатные представления:

$$\vec{\omega}_r = \{0;\ \vec{\omega}_e \cos\varphi;\ \vec{\omega}_e \sin\varphi\};$$
$$\vec{\mathrm{v}}_r = \{\dot{x};\ \dot{y};\ \dot{z}\}.$$

Дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega_e(\dot{z}\cos\varphi - \dot{y}\sin\varphi); \\ m\ddot{y} = -2m\omega_e \dot{x}\sin\varphi; \\ m\ddot{z} = -mg + m\omega_e \dot{x}\cos\varphi, \end{cases} \qquad (8.12)$$

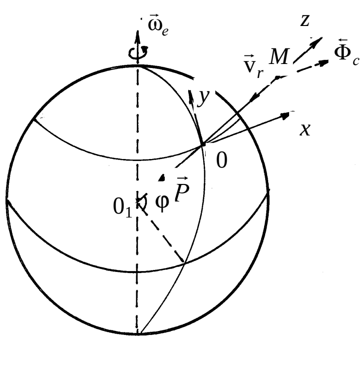


Рис. 7

где φ – широта места; g – ускорение силы тяжести на широте φ.

Дифференциальные уравнения (8.12) нужно проинтегрировать при начальных условиях: при $t = 0$, $x = y = 0$, $z = h$, $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$.

Из второго и третьего уравнений (8.12) с учётом начальных условий получаем

$$\dot{y} = -2\omega_e x\sin\varphi,\quad \dot{z} = -gt + 2\omega_e x\cos\varphi. \qquad (8.13)$$

Подставляя в первое уравнение (8.12), получим линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + 4\omega_e x = 2\omega_e gt\, x\cos\varphi. \qquad (8.14)$$

Интегрируя это уравнение при указанных выше начальных условиях, получим

$$x = \frac{g\cos\varphi}{4\omega_e^2}(2\omega_e t - \sin 2\omega_e t), \qquad (8.15)$$

после этого по (8.13) находим y и z

$$
\left.
\begin{aligned}
y &= \frac{g\sin\varphi\cos\varphi}{4\omega_e^2}(1-\cos 2\omega_e t - 2\omega_e^2 t^2),\\
z &= h - \frac{g\cos^2\varphi}{4\omega_e^2}(1-\cos 2\omega_e t) - \frac{gt^2\sin^2\varphi}{2}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{8.16}
$$

При падении с небольшой высоты величина $\omega_e t$ мала, поэтому разложим тригонометрические функции $\sin 2\omega_e t$, $\cos 2\omega_e t$ в ряд Маклорена, пренебрегая членами $(\omega_e t)^n$ $n > 4$. В результате получим приближенные формулы

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= \frac{g\cos\varphi}{3\omega_e^2}(\omega_e t)^3, \quad y = \frac{g\sin 2\varphi}{12\omega_e^2}(\omega_e t)^4,\\
z &= h - \frac{g}{2\omega_e^2}(\omega_e t)^2 + \frac{g\cos^2\varphi(\omega_e t)^4}{6\omega_e^2}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{8.17}
$$

Полагая $z = 0$, находим из третьего уравнения системы (8.17) $(\omega_e t)^2$

$$
\frac{\cos^2\varphi}{6}(\omega_e t)^4 - \frac{(\omega_e t)^2}{2} + \beta\frac{h}{R} = 0, \quad \beta = \frac{R\omega_e^2}{g} \approx \frac{1}{290},
$$

$$
(\omega_e t)^2 = \frac{3}{2\cos^2\varphi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{3}\cos^2\varphi\frac{\beta h}{R}}\right).
$$

Знак минус перед квадратным корнем выбран вследствие того, что при $h = 0$, $\omega_e t = 0$.

Используя формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ $(x < 1)$, находим приближенные формулы

$$
(\omega_e t)^2 = \frac{2\beta h}{R}, \quad x = \frac{g\cos\varphi}{3\omega_e^2}\left(\frac{2\beta h}{R}\right)^{3/2} = \frac{g\omega_e\cos\varphi}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2},
$$

$$
y_1 = -\frac{g\sin 2\varphi}{12\omega_e^2}\left(\frac{2\beta h}{R}\right)^2 = -\frac{h\sin\varphi}{3}\frac{\beta h}{R}.
$$

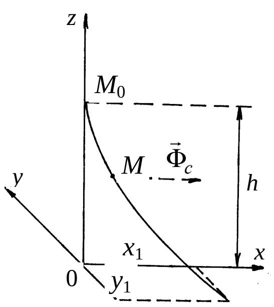


Рис. 8

Таким образом, материальная точка, свободно падающая на Землю, отклоняется к востоку на величину x_1; величина $y_1 < 0$ соответствует отклонению точки к югу. Так как $\beta \approx 1/290$, отношение $h\ /\ R$ мало, то величина y_1 есть малая второго порядка по отношению к x_1, причём $|y_1 / x_1| = \sin\varphi\sqrt{\beta h / 2R}$ (рис. 8).

8.5. Маятник Фуко

Если материальная точка подвешена на нити, отклонена и отпущена без начальной скорости и её движение рассматривается относительно Земли, то будем иметь так называемый маятник Фуко, движение которого явилось одним из доказательств вращения Земли (1851 г.).

Рассмотрим простую схему опыта. Пусть наблюдатель сидит на стуле, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси в направлении против хода часовой стрелки (если смотреть сверху) с угловой скоростью ω; со стулом жёстко соединён столик, над которым подвешен маятник; на конце груза маятника вделана чернильница, в дне которой тонкое отверстие с насадкой для истечения чернил; на столике натянут лист белой бумаги.

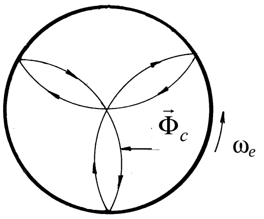


Рис. 9

Маятник оттянут в вертикальной плоскости и отпущен без начальной скорости. Если бы стул со столиком не вращались, то маятник колебался бы в этой вертикальной плоскости и на листе бумаги был бы вычерчен отрезок неизменной прямой. При вращении стула со столиком на бумаге вычерчивается розетка (рис. 9); таково наблюдаемое явление. Указанная схема эквивалентна маятнику Фуко, колеблющемуся на полюсе.

В неподвижной системе координат нет сил, которые заставили бы маятник изменить плоскость качания, и он будет сохранять её неизменной в пространстве, а диск (или Земля) поворачивается под ним. Очевидно, что на полюсе плоскость колебаний маятника будет вращаться с угловой скоростью вращения Земли в направлении, противоположном вращению Земли.

Если же отнести колебания маятника на полюсе к системе координат, связанной с Землёй, то вращение плоскости колебаний можно представить себе как результат действия кориолисовой силы инерции, которая перпендикулярна к плоскости вращения и расположена всё время в горизонтальной плоскости. Эта сила пропорциональна скорости движения груза маятника и угловой скорости вращения Земли и направлена так, что её действие заворачивает траекторию в нужную сторону.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ И РАВНОВЕСИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

При решении задач рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

1. Выбрать неподвижную (инерциальную) систему координат и подвижную.
2. Разложить абсолютное движение материальной точки на относительное и переносное.
3. Изобразить материальную точку в промежуточном положении, соответствующем положительным относительным координатам этой точки, и предположить, что точка движется в сторону возрастания этих координат.
4. Показать на рисунке фактически действующие (абсолютные) силы, приложенные к материальной точке.
5. Определить переносное и кориолисово ускорения материальной точки и переносную и кориолисову силы инерции (в случае поступательного переносного движения или равновесия кориолисова сила инерции равна нулю). Добавить эти силы инерции к действующим на точку силам.
6. В зависимости от характера рассматриваемой задачи составить дифференциальные уравнения относительного движения или уравнения относительного равновесия материальной точки в проекциях на подвижные оси координат.
7. В случае, если решается задача динамики, проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения движения материальной точки с учетом начальных условий её относительного движения.
8. Определить требуемые в поставленной задаче величины.

При относительном криволинейном движении материальной точки удобно составлять дифференциальные уравнения движения в проекциях на естественные оси координат.

10. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ И РАВНОВЕСИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задача 1. Груз *1* массой m спускается вниз по боковой грани призмы *2*, расположенной под углом α к горизонту. Призма движется по горизонтальной плоскости вправо с ускорением $\vec{W}_e$. Определить ускорение груза по отношению к призме и давление груза на боковую грань призмы, если коэффициент трения скольжения груза о боковую грань призмы равен f (рис. 10).

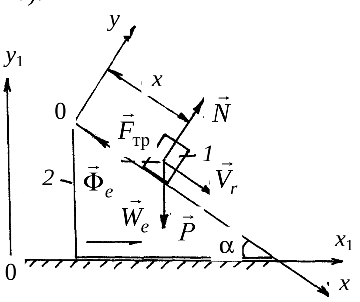


Рис. 10

Решение. Движение груза *1* является сложным, которое может быть разложено на переносное движение вместе с призмой (это движение поступательное) и на относительное по отношению к призме *2* (это движение прямолинейное). На груз *1* действуют силы: $\vec{P}$ – сила тяжести груза; $\vec{N}$ – нормальная реакция боковой грани призмы; $\vec{F}_{тр}$ – сила трения скольжения, направленная противоположно направлению движения груза.

Для решения задачи методом динамики относительного движения точки к указанным силам добавляем переносную и кориолисову силы инерции. Так как переносное движение поступательное, то $\vec{\Phi}_c = 0$. Переносная сила инерции $\vec{\Phi}_e$ направлено противоположно вектору ускорения $\vec{W}_e$, т.е. влево и равна по модулю $\Phi_e = mW_e$.

Направляем ось x подвижной системы координат oxy вдоль боковой грани призмы. Дифференциальные уравнения движения груза в проекциях на оси x и y имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx} + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} + \Phi_{ey} + \Phi_{cy} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - F_{тр} - \Phi_e\cos\alpha; \\ m\ddot{y} = N - mg\cos\alpha - \Phi_e\sin\alpha. \end{cases} \tag{10.1}$$

Так как относительное ускорение груза перпендикулярно оси y, то $\ddot{y} = 0$. Тогда $N = mg\left(\cos\varphi + \dfrac{W_e}{g}\sin\varphi\right)$. Давление груза на боковую грань призмы по величине равно нормальной реакции N. Сила трения $F_{тр} = f\ N$.

Относительное ускорение $W_r = \ddot{x}$ определяется из первого уравнения системы (10.1)

$$W_r = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) - W_e(\cos\alpha + f\sin\alpha). \tag{10.2}$$

Используя это уравнение, можно найти то значение ускорения призмы, при котором груз *1* будет находиться в покое по отношению к призме, если его начальная относительная скорость равна нулю. Полагая в равенстве (10.2) $W_r = 0$, получим

$$W_e = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/(\cos\alpha + f\sin\alpha).$$

Задача 2. Шарик M перемещается по цилиндрическому каналу тела A. Тело A равномерно вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z_1. Масса шарика m = 0,03 кг, угловая скорость тела A $\omega = 2\pi$ с$^{-1}$, h = 0,2 м. Найти уравнение $x = x(t)$ относительного движения шарика M, если в начальный момент времени t = 0, $x = x_0$ = 0,3 м, $V_{rx} = \dot{x} = \dot{x}_0 = 0$. За начало отсчёта принять точку O [5].

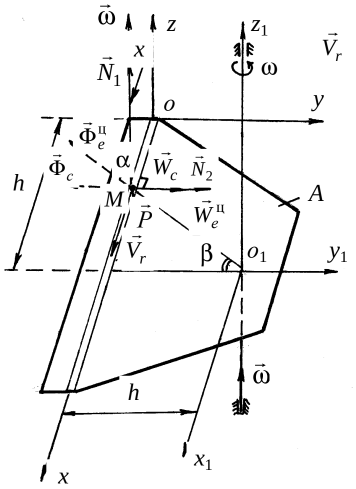


Рис. 11

Решение. Подвижную систему отсчёта $oxyz$ свяжем с вращающимся каналом, совместив ось x с траекторией относительного движения шарика M (рис. 11). К шарику M приложены силы: вес $\vec{P}$ и нормальная реакция стенки трубки; её можно разложить на две составляющие $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Присоединим к этим силам, переносную центробежную силу инерции $\vec{\Phi}_e^{ц}$ и кориолисову силу инерции $\vec{\Phi}_c$, направленные противоположно ускорениям $\vec{W}_e^{ц}$ и $\vec{W}_c$. Направление $\vec{W}_c$ найдём по известному правилу, предположив, что проекция скорости V_r на ось x положительна.

В рассматриваемом примере кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c$ параллельна оси y и перпендикулярна к плоскости zx. Модули сил инерции определяются по формулам

$$\Phi_e^{ц} = mW_e^{ц} = m\omega^2\sqrt{h^2 + (h - x)^2},$$

$$\Phi_c = mW_c = \; = 2m\omega V_r \sin 90^\circ = 2m\omega V_r, \quad V_r = |\dot{x}|.$$

Основное уравнение относительного движения шарика в данном случае имеет вид

$$m\vec{W}_r = \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_e^{ц} + \vec{\Phi}_c. \qquad (10.3)$$

Проектируем обе части этого уравнения на ось x, т.е. составляем дифференциальное уравнение относительного движения шарика вдоль оси x ($x = OM$).

$$m\ddot{x} = -\Phi_e^{ц}\cos\varphi = -\Phi_e^{ц}\sin\beta \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = -m\omega^2\sqrt{h^2 + (h - x)^2}\;\frac{h - x}{\sqrt{h^2 + (h - x)^2}}, \quad m\ddot{x} = -(h - x)m\omega^2, \quad \ddot{x} = (x - h)\omega^2.$$

Последнее уравнение представим в виде $\ddot{x} - \omega^2 x = -h\omega^2$.

Начальные условия движения: $t = 0$, $x = x_0$ = 0,3 м, $V_{rx} = \dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

Общее решение этого уравнения имеет вид $x = x_1 + x_2$, где x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения, x_2 – частное решение исходного уравнения.

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, его корни, $\lambda_{1,2} = \pm\omega$; $x_1 = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{\omega t}$.

Частное решение ищем в виде $x_2 = A$, $\ddot{x}_2 = 0$, тогда $-\omega^2 A = -h\omega^2$ и $A = h$.

В результате $x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + h$, $\dot{x} = \omega C_1 e^{\omega t} - \omega C_2 e^{-\omega t}$. Находим постоянные C_1 и C_2

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= C_1 + C_2 + h; \\ \dot{x}_0 &= \omega C_1 - \omega C_2; \end{aligned}\right\}$$

$$C_1 = \frac{\omega(x_0 - h) + x_0}{2\omega};$$

$$C_2 = \frac{\omega(x_0 - h) + x_0}{2\omega}.$$

Уравнение относительного движения шарика M

$$x = (x_0 - h)\,\mathrm{ch}\,\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\mathrm{sh}\,\omega t + h \quad \text{или} \quad x = 0{,}1\,\mathrm{ch}\,(2\pi t) + 0{,}2, \text{ м}.$$

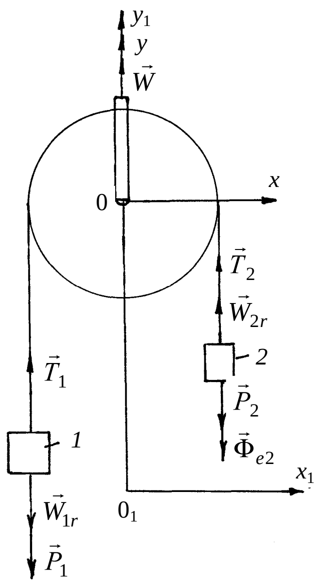


Рис. 12

Задача 3. Через блок перекинута нерастяжимая нить (рис. 12), на концах которой висят грузы с массам m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$). Блок начинают поднимать вверх с ускорением W относительно Земли. Предполагая, что нить скользит по блоку без трения, найти силу натяжения T нити и ускорение W_1 груза массой m_1 относительно Земли.

Решение. Выбираем положительное направление осей координат как это показано на рис. 12. Запишем для грузов основное уравнение динамики относительного движения, добавляя к действующим на грузы силам переносные силы инерции (кориолисовы силы инерции равны нулю, так как переносное движение поступательное)

$$\begin{cases} m_1\vec{W}_{1r} = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 + \vec{\Phi}_{e1}; \\ m_2\vec{W}_{2r} = \vec{P}_2 + \vec{T}_2 + \vec{\Phi}_{e2}, \end{cases} \tag{10.4}$$

где $P_1 = m_1 g$; $P_2 = m_2 g$; $T_1 = T_2 = T$, $\Phi_{e1} = m_1 W$, $\Phi_{e2} = m_2 W$.

В проекции на подвижную ось y из системы уравнений получим

$$\begin{cases} m_1\vec{W}_{1r} = -m_1 g + T - m_1 W; \\ m_2\vec{W}_{2r} = -m_2 g + T - m_2 W. \end{cases} \tag{10.5}$$

Учитывая, что $W_{2y} = -W_{1y}$, из системы уравнений (10.5) получаем

$$W_{1y} = \frac{(m_2 - m_1)(g + W)}{(m_1 + m_2)}.$$

Абсолютное ускорение груза *1*, т.е. его ускорение относительно Земли, равно

$$W_1 = W_{1y} + W = \frac{2m_2 W + (m_2 - m_1)g}{(m_1 + m_2)}.$$

Натяжение нити T определяется, например, из первого уравнения системы (10.5)

$$T = \frac{2m_1 m_2 (g + W)}{(m_1 + m_2)}.$$

Задача 4. Исследовать колебания маятника в вагоне, который движется по прямому горизонтальному пути с постоянным ускорением W (рис. 13).

Решение. Переносным движением для маятника является движение вагона, это движение поступательное. Вращение маятника относительно точки A является относительным. На материальную точку действуют сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и реакция нити, т.е. сила $\vec{T}$. Вводим силы инерции. Так как переносное движение поступательное с постоянным ускорением, то $\vec{\Phi}_e = -m\vec{W}$, $\Phi_e = mW$, $\vec{\Phi}_c = 0$.

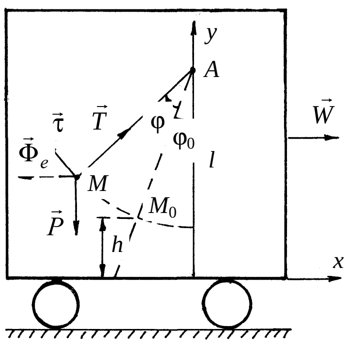


Рис. 13

Найдём предварительно угол φ_0, соответствующий положению относительного равновесия маятника, в котором

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{\Phi}_e = 0. \tag{10.6}$$

Из равенства (10.6) в проекции на прямую, перпендикулярную AM_0 получим

$$P\sin\varphi_0 - \Phi_e\cos\varphi_0 = 0,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\Phi_e}{P} = \frac{W}{g},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg}(W/g), \quad \sin\varphi_0 = \frac{W}{\sqrt{W^2 + g^2}}, \quad \cos\varphi_0 = \frac{g}{\sqrt{W^2 + g^2}}.$$

Исследуем малые колебания маятника около положения равновесия. Пусть φ – угол отклонения маятника. Так как колебания малые, то считаем $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$.

Уравнение динамики относительного движения материальной точки запишем в проекции на касательную к траектории её относительного движения

$$m\frac{dV_r}{dt} = \Phi_e\cos(\varphi + \varphi_0) - P\sin(\varphi + \varphi_0). \tag{10.7}$$

С учётом того, что $V_r = l\dot{\varphi}$, уравнение (10.7) запишем в виде

$$ml\ddot{\varphi} = mW(\cos\varphi\cos\varphi_0 - \sin\varphi\sin\varphi_0) - mg(\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0)$$

или

$$l\ddot{\varphi} = -\varphi(W\sin\varphi_0 + g\cos\varphi_0) + W\cos\varphi_0 - g\sin\varphi =$$

$$= -\varphi\left(W\frac{W}{\sqrt{W^2+g^2}}+g\frac{g}{\sqrt{W^2+g^2}}\right) = -\varphi\sqrt{W^2+g^2}.$$

В результате получим дифференциальное уравнение колебаний математического маятника в виде

$$\ddot{\varphi}+\frac{\sqrt{W^2+g^2}}{l}\varphi = 0. \qquad (10.8)$$

Уравнение (10.8) показывает, что период колебаний маятника $T = 2\pi\frac{l}{\sqrt{W^2+g^2}}$.

Задача 5. Предположим, что в положении относительного равновесия маятника (см. предыдущую задачу) нить перерезают и материальная точка начинает свободно падать. Определить траекторию точки относительно вагона, если падение точки начинается с высоты *h*.

В случае свободного падения сила $\vec{T}=0$. Дифференциальные уравнения относительного движения точки имеют вид

$$m\ddot{x} = -mW, \qquad m\ddot{y} = -mg.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\dot{x} = -Wt + C_1, \qquad \dot{y} = -gt + C_2.$$

Так как при $t = 0$ (в начальный момент времени) относительная скорость точки равна нулю, то $C_1 = C_2 = 0$. В результате $\dot{x} = -Wt,\ \dot{y} = -gt.$ Интегрируя эти уравнения, получаем $x = -Wt^2/2 + C_3,\ \ y = -gt^2/2 + C_4$.

При $t = 0$ $x = -l\sin\varphi_0 = -lW\big/\sqrt{W^2+g^2}$, $y = h$, тогда $C_3 = -lW\big/\sqrt{W^2+g^2}$, $C_4 = h$.

Закон относительного движения точки имеет вид

$$x = -Wt^2/2 - lW\big/\sqrt{W^2+g^2}, \quad y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая из этих уравнений время *t*, получаем уравнение траектории относительного движения точки

$$y - \frac{g}{W}\left(x+\frac{lW}{\sqrt{W^2+g^2}}\right) = h. \qquad (10.9)$$

Уравнение (10.9) есть уравнение прямой линии, проходящей через точку M_o и точку подвеса *A* маятника (рис. 13).

Задача 6. Проволочное кольцо радиусом *R* вращается вокруг вертикального диаметра *AB* с постоянной угловой скоростью ω. На кольце находится небольшая муфта *M*, которая может без трения скользить по нему. Определить положение относительного равновесия муфты (рис. 14).

Решение. Рассматриваем поведение муфты в системе координат *xAy*, связанной с вращающимся кольцом. На муфту действуют сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, нормальная реакция $\vec{N}$. Согласно условию относительного равновесия добавляем переносную силу инерции $\vec{\Phi}_e = -m\vec{W}_e$, $\Phi_e = mW_e$; $W_e = \omega^2 x = \omega^2 R\sin\varphi$.

Для относительного равновесия муфты необходимо и достаточно, чтобы проекции сил $\vec{\Phi}_e$ и $m\vec{g}$ на касательную к окружности были равны и противоположны по знаку

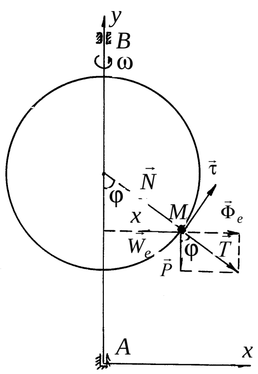


Рис. 14

$$mg\sin\varphi - \Phi_e\cos\varphi = 0,\ \sin\varphi(g-\omega^2 R\cos\varphi) = 0. \qquad (10.10)$$

Из уравнения (10.10) находим

$$\sin\varphi = 0,\ \ \varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = \pi;\ \ \cos\varphi = \frac{g}{R\omega^2},\ \ \varphi_3 = \arccos\left(\frac{g}{R\omega^2}\right).$$

Положение равновесия соответствующее углу φ_3, возможно только при $\omega \ge \sqrt{g/R}$.

Найдём величину нормальной реакции *N* в положениях равновесия муфты

$$N = T = \sqrt{(mg)^2+\Phi_e^2} = m\sqrt{g^2+\omega^4R^2\sin^2\varphi}.$$

При $\varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = \pi,\ \ N = mg$; при $\varphi_3 = \arccos(g/R\omega^2)$.

$$N = m\sqrt{g^2+\omega^4R(1-g^2/R^2\omega^4)} = m\omega^2 R.$$

Устойчивость или неустойчивость найденных положений равновесия определяется параметрами ω, *R* рассматриваемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзерман, М.А. Классическая механика / М.А. Айзерман. – М. : Наука, 1980.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 2.
3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Наука, 1995.
4. Голубев, Ю.Ф. Основы теоретической механики / Ю.Ф. Голубев. – М. : Изд-во МГУ, 2000.
5. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского. – М. : Высшая школа, 1985.