

Э.П. АГАБЕКЯН

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ
РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ**

◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ГОУ ВПО ТГТУ ◆

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

Э.П. АГАБЕКЯН

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ
РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ**

Рекомендовано Научно-техническим советом университета
в качестве препринта



Тамбов
Издательство ГОУ ВПО ТГТУ
2010

УДК 519.866
ББК У.в631
А23

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
С.М. Дзюба

Доктор экономических наук, профессор
Б.И. Герасимов

Агабекян, Э.П.

А23 Математическое моделирование саморазвивающейся рыночной экономики : препринт / Э.П. Агабекян. – Тамбов : Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 32 с. – 70 экз. – ISBN 978-5-8265-0953-1.

Посвящён исследованию модели движения капитала и спроса под действием изменения нормы прибыли в условиях саморазвивающейся рыночной экономики с помощью символьных вычислений в распределённой компьютерной среде для получения более точных результатов, чем ранее известные. Проводится анализ результатов исследования, практического значения и качества данной модели, её реалистичности.

Предназначен для студентов экономических специальностей и аспирантов специальности 080013.

ББК У.в631

УДК 519.866

ISBN 978-5-8265-0953-1

© Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ГОУ ВПО ТГТУ), 2010

Научное издание

АГАБЕКЯН Эмиль Паргегович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ
РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ**

Препринт

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 29.10.2010
Формат 60 × 84/16. 1,86 усл. печ. л. Тираж 70 экз. Заказ № 527

Издательско-полиграфический центр ГОУ ВПО ТГТУ
392000, Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

На современном этапе развития человечества метод математического моделирования является одним из ключевых при исследовании реальных событий, происходящих в различных отраслях человеческой деятельности. Особенно актуальным является применение математического моделирования в экономике, а в частности – для исследования процессов в саморазвивающихся рыночных системах.

Одним из примеров математического метода исследования является распределённая модель саморазвивающейся рыночной экономики, предложенная одним из авторов в книге [7]. Модель представляет собой систему трёх нелинейных дифференциальных уравнений, два из которых описывают изменение и интенсивность движения (диффузию) капитала и спроса в пространстве технологий под воздействием изменения нормы прибыли. Последнее описывается третьим обыкновенным дифференциальным уравнением.

Одним из главных отличий данной модели является наличие в ней последовательности бифуркаций рождения периодических однородных пространственных решений произвольного периода, формирующих однородный по пространству, но хаотический во времени аттрактор. Последнее невозможно как для системы реакция-диффузия, так и для уравнения Курамото-Цузуки, причём переход к хаосу осуществляется субгармоническим каскадом бифуркаций устойчивых циклов. Поэтому наличие в экономической системе ещё и диффузионных процессов должно приводить к осуществлению в ней сложных режимов диффузионного хаоса.

Предложенная авторами распределённая модель саморазвивающейся рыночной экономики является пока одной из немногих экономико-математических моделей, обладающих такими свойствами. Поэтому мы подробно остановимся на выводе и анализе её уравнений и на вытекающих из этого анализа интересных результатах, важных как с точки зрения математики, так и с точки зрения их различных экономических приложений.

Целью данной работы является исследование качества модели саморазвивающейся рыночной экономики и поиск таких решений системы, при которых модель была бы актуальна для применения её на практике.

Мы будем проводить наше исследование с помощью символьных вычислений в распределённой компьютерной среде, что должно позволить получить более точные результаты, чем ранее известные.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ

В модели рассматривается неструктурированная замкнутая экономическая система, процесс развития которой происходит в конечномерном евклидовом пространстве R^n , называемом пространством технологий. Каждая точка c пространства R^n соответствует определённой технологии производства некоторого продукта и имеет своими координатами затраты c_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ресурса i на единицу выпускаемого продукта. Для описания основных характеристик экономической системы используются следующие функции:

$\tilde{K}(t, c)$ – плотность распределения капитала в момент t в пространстве технологий, т.е. стоимость капитала (суммарная стоимость производительного, товарного и денежного капитала), задействованного предпринимателями в момент t в производстве некоторого потребительского продукта по технологии (по затратам) c и в производстве средств производства этого продукта;

$C_T(t, c)$ – плотность распределения производительного (постоянного $K(t, c)$ и переменного $H(t, c)$) капитала предпринимателей;

$Y(t, c)$ – плотность распределения товарного капитала предпринимателей, равная товарным запасам в момент t , произведённого с затратами c потребительского продукта и средств для его производства;

$M(t, c)$ – плотность распределения денежного капитала предпринимателей (платёжеспособный спрос предпринимателей на средства производства и рабочую силу для производства продукции по технологии c);

$D_1(t, c)$, $D_2(t, c)$ и $D_3(t, c)$ – платёжеспособный спрос предпринимателей, трудящихся и государства на произведённый по технологии c продукт;

$u(t, c)$ – распределение нормы прибыли в момент t в пространстве технологий;

$\rho C_T(t, c, \cdot)$ и $\rho M(t, c, \cdot)$ – векторы плотности потока соответственно производного и денежного капитала, т.е. количество капитала, прошедшего через единицу поверхности некоторого объёма пространства технологий R^n в единицу времени;

$\rho D_1(t, c, \cdot)$, $\rho D_2(t, c, \cdot)$ и $\rho D_3(t, c, \cdot)$ – векторы плотности потока платёжеспособного спроса соответственно предпринимателей, трудящихся и государства на потребительские товары, определяемые как количество денежных средств, прошедших через единицу поверхности некоторого объёма пространства технологий R^n в единицу времени;

$R_1(t, c)$, $R_2(t, c)$ и $R_3(t, c)$ – текущее потребление соответственно предпринимателями, трудящимися и государством потребительских товаров, произведённых по технологии c ;

I – часть средств, вырученных предпринимателями от продажи, идущая на накопление;

C_K и G – источники формирования платёжеспособного спроса предпринимателей и государства на потребительские товары, произведённые по технологии c ;

C_L – источник платёжеспособного спроса трудящихся;

α, ν и μ – некоторые константы.

Рассмотрим подробно процесс кругооборота капитала, принимая его длительность за единицу. Первая стадия кругооборота капитала происходит в сфере обращения. Денежный капитал предпринимателей M затрачивается на покупку средств производства (постоянного капитала ΔK) и рабочей силы (переменного капитала ΔH). Соединение предпринимателем постоянного и переменного капитала означает их производительное потребление и даёт начало следующей стадии кругооборота капитала – производству стоимости и прибавочной стоимости. Капитал, сменив денежную форму M на форму производного капитала ($C_T = K + H$), продолжает движение в сфере производства. При этом стоимость производительного капитала уменьшается на часть стоимости переменного капитала ωH , которая выплачивается трудящимся в виде заработной платы и на часть стоимости μK постоянного капитала вследствие выбытия оборотного капитала. Одновременно в технологическом пространстве возникают потоки производительного капитала $\rho_T(t, c, \cdot)$ из мест с менее высокой в места с более высокой нормой прибыли. Следовательно, для произвольного объёма υ пространства R^n уравнение, описывающее изменение производительного капитала имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\upsilon} C_T(t, c) d\upsilon = \int_{\upsilon} (-\omega H - \mu K + \Delta K + \Delta H) d\upsilon - \int_S \rho_T(t, c, \cdot) dS.$$

Переходя в последнем интеграле к интегрированию по объёму и в силу произвольности объёма интегрирования υ , получаем

$$\frac{dC_T(t, c)}{dt} = -\text{div} \rho_T(t, c, \cdot) + \Delta K - \mu K + \Delta H - \omega H. \quad (1.1)$$

В результате производства капитал приобретает товарную форму, причём стоимость вновь произведённых товаров складывается из амортизации νK и вновь созданной трудящимися стоимости, которая состоит из стоимости переменного капитала ωH и прибавочной стоимости $u C_T$. Произведённые по технологии c товары покупаются предпринимателями R_1 , трудящимися R_2 и государством R_3 . Таким образом, уравнение изменения товарного капитала имеет вид

$$\frac{dY(t, c)}{dt} = \nu K + \omega H + u C_T - (R_1 + R_2 + R_3). \quad (1.2)$$

Продавая произведённые товары на рынке, предприниматель реализует в деньгах заключённую в них стоимость. Капитал меняет товарную форму на денежную, причём источником прироста денежного капитала предпринимателей является идущая на накопление часть I средств, вырученных от продажи потребительских товаров, а стоком – стоимость вновь авансированного производительного капитала $\Delta K + \Delta H$. Вместе с тем, в технологическом пространстве возникают потоки денежного капитала $\rho_M(t, c, \cdot)$, направленные в места с более высокой нормой прибыли. Это означает стремление ссудных капиталистов вкладывать свои деньги в развитие таких производств, которые обеспечивают получение наибольшей прибыли и, следовательно, большего процента на ссудный капитал. Таким образом, применяя тот же подход, что и в уравнениях (1.1) – (1.2), получаем уравнение движения денежного капитала

$$\frac{dM(t, c)}{dt} = -\text{div} \rho_M(t, c, \cdot) + I - \Delta H - \Delta K. \quad (1.3)$$

Сложив уравнения (1.1) – (1.3), получим уравнение движения капитала в виде

$$\frac{d\tilde{K}(t, c)}{dt} = -\text{div} \rho(t, c, \cdot) + (\nu - \mu)K + u C_T + I - R, \quad (1.4)$$

где $R = R_1 + R_2 + R_3$; $\rho = \rho_T + \rho_M$; $\tilde{K} = C_T + Y + M$.

Уравнение (1.4) описывает стремление капитала к самовозрастанию. Если производство прибыльно, то капитал возрастает, производство расширяется, растёт постоянный и переменный капитал. Но этот процесс не может происходить бесконечно. Существуют факторы, которые по мере роста капитала способствуют снижению нормы прибыли, что в конечном счёте ведёт к свёртыванию производства, безработице, кризису. Такими факторами являются: периодическое превышение предложения над спросом на потребительские товары, невозможность реализовать произведённую продукцию на рынке из-за недостатка платёжеспособного спроса; периодическое превышение спроса на средства производства над ограниченным предложением денежного капитала и спроса на рабочую силу над её ограниченным предложением на стадиях подъёма и расширения масштабов производства. Эти факторы можно формализовать, используя функцию платёжеспособного спроса.

Как отмечено выше, часть I денежных средств R , вырученных предпринимателями от продажи потребительских товаров, идёт на накопление капитала. Другие же части C_K и G являются источниками формирования платёжеспособного спроса D_1 и D_3 предпринимателей и государства на потребительские товары, произведённые по технологии c . Стоком платёжеспособного спроса D_1 и D_3 в точке c пространства R^n является стоимость купленных ими товаров R_1 и R_3 . Вместе с тем в технологическом пространстве возникают потоки $\rho D_1(t, c, \cdot)$ и $\rho D_2(t, c, \cdot)$ платёжеспособного спроса соответственно предпринимателей и государства, стремящиеся распределить его по всему пространству в соответствии с

потребительскими стоимостями движения платёжеспособного спроса предпринимателей и государства на потребительские товары имеют вид:

$$\frac{dD_1(t, c)}{dt} = -\operatorname{div} \rho D_1(t, c, \cdot) + C_K - R_1, \quad (1.5)$$

$$\frac{dD_3(t, c)}{dt} = -\operatorname{div} \rho D_3(t, c, \cdot) + G - R_3. \quad (1.6)$$

Источником платёжеспособного спроса трудящихся C_L в точке c является их заработная плата $\omega H (C_L = \omega H)$, а стоком – стоимость купленных ими потребительских товаров R_2 . Таким образом,

$$\frac{dD_2(t, c)}{dt} = -\operatorname{div} \rho D_2(t, c, \cdot) + C_L - R_2, \quad (1.7)$$

Складывая уравнения (1.5) – (1.7), получим уравнение движения платёжеспособного спроса в виде

$$\frac{dD(t, c)}{dt} = -\operatorname{div} \rho D(t, c, \cdot) + C_L + C_K + G - R, \quad (1.8)$$

где $\rho D = \rho D_1 + \rho D_2 + \rho D_3$.

Перепроизводство не означает, что товары вообще не могут быть проданы и потреблены. Но они не могут быть проданы по ценам, обеспечивающим предпринимателям определённую норму прибыли. Поэтому превышение предложения потребительских товаров и рабочей силы $Y + H$ над платёжеспособным спросом D и денежным капиталом M ведёт к уменьшению цен, увеличению нормы ссудного процента и, следовательно, в конечном итоге, к снижению нормы прибыли

$$\frac{du(t, x)}{dt} = \alpha((D + M) - (Y + H)). \quad (1.9)$$

Таким образом, система уравнений саморазвивающейся рыночной экономики может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}(t, c)}{dt} &= -\operatorname{div} \rho(t, c, \cdot) + (v - \mu)K + uC_T + I - R; \\ \frac{dD(t, c)}{dt} &= -\operatorname{div} \rho_D(t, c, \cdot) + C_L + C_K + G - R; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\frac{du(t, c)}{dt} = \alpha((D + M) - (Y + H));$$

$$\tilde{K} = C_T + Y + M; \quad C_T = K + H; \quad R = C_K + G + I.$$

Если проинтегрировать уравнения системы (1.10) по положительному ортангу технологического пространства, то, учитывая, что

$$\int_{R^n} \operatorname{div} \rho(t, c, \cdot) dc = \int_{R^n} \operatorname{div} \rho_D(t, c, \cdot) dc = 0,$$

можно получить систему уравнений, описывающих изменение макропоказателей рыночной экономики во времени:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}(t, c)}{dt} &= (v - \mu)K + uC_T + I - R; \\ \frac{dD(t, c)}{dt} &= C_L + C_K + G - R; \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{du(t, c)}{dt} = \alpha(D + M - Y - H);$$

$$\tilde{K} = C_T + Y + M;$$

$$C_T = K + H;$$

$$R = C_K + G + I.$$

Заметим, что если сложить первые два уравнения системы (1.11), то получим уравнение изменения стоимости всех элементов, участвующих в экономическом развитии

$$\frac{d(\tilde{K}(t, c) + D(t, c))}{dt} = (v - \mu)K + C_L + uC_T - R,$$

где $vK + C_L + uC_T$ – совокупный общественный продукт, а $C_L + uC_T$ – национальный доход.

Системы (1.10), (1.11) являются недоопределёнными, так как содержат шесть уравнений (три из которых дифференциальные) и двенадцать переменных плюс потоки капитала и спроса. Доопределить системы (1.10) или (1.11) можно различными поведенческими уравнениями (связями), имеющими наглядную экономическую интерпретацию в терминах рыночной экономики. Предлагается следующий (безусловно, не единственный) способ доопределения системы (1.10), а следовательно, и (1.11).

Вектор плотности потока капитала пропорционален градиенту нормы прибыли, причём коэффициент пропорциональности не является постоянным, а зависит как от точки c пространства технологий, так и от самой нормы прибыли

$$\rho(t, c, \cdot) = k_1(c, \tilde{K}, u) \text{grad } u(t, c). \quad (1.12)$$

Процесс диффузии капитала определяется коэффициентом диффузии $k_1(c, \tilde{K}, u)$, который характеризует свойства экономической среды. В зависимости от вида k_1 (в общем случае k_1 – тензор) среда может быть однородной или неоднородной, изотропной или анизотропной. Различные экономические механизмы переноса капитала могут давать разные, в том числе нелинейные, зависимости k_1 от \tilde{K} и u .

Так как за уменьшением нормы прибыли стоит прежде всего уменьшение спроса на товар, то можно предположить, что вектор плотности потока платёжеспособного спроса на потребительские товары пропорционален градиенту нормы прибыли, а коэффициент пропорциональности зависит от точки c пространства технологий, величины платёжеспособного спроса и от самой нормы прибыли

$$\rho D(t, c, \cdot) = k_2(c, D, u) \text{grad } u(t, c). \quad (1.13)$$

Коэффициент $k_2(c, D, u)$ определяет процесс диффузии платёжеспособного спроса на потребительские товары и характеризует экономическую среду со стороны потребительских свойств выпускаемых по различным технологиям товаров, их качества, престижности и моды на эти товары.

Стоимость приобретённых на рынке потребительских товаров пропорциональна как стоимости товарного капитала, так и платёжеспособному спросу на потребительские товары

$$R = \beta Y D. \quad (1.14)$$

Денежные средства G , являющиеся источником формирования платёжеспособного спроса государства, являются частью всех средств, вырученных предпринимателями от продажи потребительских товаров (налоги, акцизы, пошлины и т.д.)

$$G = \delta R. \quad (1.15)$$

Денежные средства C_k , являющиеся источником формирования платёжеспособного спроса предпринимателей, составляют часть прибавочной стоимости, полученной в процессе производства и оставшейся после расчётов с государством

$$C_k = \varepsilon(1 - \tilde{\delta})u C_T, \quad \varepsilon < 1. \quad (1.16)$$

Полагая в (1.16) $\sigma = \varepsilon(1 - \delta)$ и $\tilde{\delta} = \delta$, получим $C_k = \sigma u C_T$, где $\sigma < 1 - \delta$.

Наконец, в уравнения (1.10) – (1.16) удобно ввести величины, характеризующие органическое $\gamma = \frac{K}{H}$, производительное $\theta = \frac{C_T}{M}$ и товарное $\eta = \frac{Y}{M}$ строение капитала. С учётом выше сказанного система (1.10) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{K}(t, c)}{dt} &= -\text{div}(k_1(c, \tilde{K}, u) \text{grad } u) + \frac{\gamma\theta(v - \mu)\tilde{K}}{(\gamma + 1)(1 + \theta + \eta)} + \\ &+ \frac{\theta(1 - \sigma)\tilde{K}u}{1 + \theta + \eta} - \frac{\beta\delta\eta\tilde{K}D}{1 + \theta + \eta}; \\ \frac{dD(t, c)}{dt} &= -\text{div}(k_2(c, D, u) \text{grad } u) + \frac{\omega\theta\tilde{K}}{(1 + \gamma)(1 + \theta + \eta)} + \\ &+ \frac{\sigma\theta\tilde{K}u}{1 + \theta + \eta} - \frac{\beta(1 - \delta)\eta\tilde{K}D}{1 + \theta + \eta}; \\ \frac{du(t, c)}{dt} &= \alpha \left(D - \frac{\theta + (\eta - 1)(\gamma + 1)}{(1 + \theta + \eta)(\gamma + 1)} \tilde{K} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отметим, что система уравнений (1.17) является частным случаем систем с многокомпонентной диффузией, где активатором – переменной, по которой осуществляется положительная обратная связь, является капитал, а ингибитором – переменной, подавляющей процесс нарастания капитала – платёжеспособный спрос населения. Причём, процесс взаимодействия активатора и ингибитора происходит под управлением ещё одной переменной – нормы прибыли, а коэффициенты диффузии в общем случае нелинейно зависят от свойств экономической среды. Это позволяет предположить существование у системы (1.17) сложных нелинейных структур, таких как предельные циклы, торы, автоволны, диссипативные структуры. Наличие трёх уравнений даёт основание для существования в системе хаотических режимов поведения и диффузионного хаоса.

Введём новые переменные

$$x = \frac{\beta\eta}{1+\theta+\eta} \tilde{K}, \quad y = \frac{\beta\eta(1+\gamma)}{\omega\theta} D, \quad z = \frac{1+\gamma}{\omega} u$$

и, положив в общем случае $v = \mu$, сведём систему (1.17) к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t,c)}{dt} &= -\text{div}(d_1(c,x,z)\text{grad } z) + bx((1-\sigma)z - \delta y); \\ \frac{dy(t,c)}{dt} &= -\text{div}(d_2(c,y,z)\text{grad } z) + x(1 - (1-\delta)y + \sigma z); \\ \frac{dz(t,c)}{dt} &= a(y - dx), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$a = \frac{\alpha\theta}{\beta\eta}; \quad b = \frac{\omega\theta}{(1+\theta+\eta)(1+\gamma)}; \quad d = \frac{\theta + (\eta-1)(1+\gamma)}{\omega\theta}. \quad (1.19)$$

Аналогично система (1.11), описывающая изменение макроэкономических показателей, может быть сведена к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= bx((1-\sigma)z - \delta y); \\ \dot{y}(t) &= x(1 - (1-\delta)y + \sigma z); \\ \dot{z}(t) &= a(y - dx). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Данная модель исследовалась в книге [7], в результате чего были обнаружены аттракторы. *Аттрактор*, как известно, неразложимое притягивающее множество. Аттракторы нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющие введённому выше определению, бывают простыми (регулярными) и сложными (нерегулярными).

В современной литературе нет строгого определения регулярности аттрактора. Интуитивно это понятие связано с достаточной простотой поведения решений систем дифференциальных уравнений на таком аттракторе и с достаточной гладкостью самого аттрактора.

Таким образом, *простыми (регулярными)* аттракторами принято считать устойчивые (асимптотически устойчивые) особые точки, устойчивые (орбитально асимптотически устойчивые) предельные циклы и устойчивые инвариантные торы. Все эти аттракторы являются подмногообразиями фазового пространства (например, предельный цикл и двумерный инвариантный тор – это, соответственно, одномерное и двумерное подмногообразия). Динамика систем с такими аттракторами не является хаотической, а носит асимптотически сходящийся, периодический или, самое сложное, эргодический характер. Главное – это то, что траектории систем с простыми (регулярными) аттракторами глобально устойчивы по отношению к малым возмущениям, что означает их глобальную предсказуемость.

В современной литературе используется несколько различных определений *сложных (нерегулярных) аттракторов*, отражающих разные стороны нерегулярности поведения принадлежащих им траекторий. Основным смысл всех определений заключается в том, что на самом нерегулярном аттракторе движение должно быть неустойчивым: траектории системы должны быстро расходиться, оставаясь на аттракторе. При этом поведение решений диссипативной системы с нерегулярным аттрактором будет характеризоваться сочетанием глобального сжатия фазового объёма с локальной неустойчивостью отдельных фазовых траекторий.

Часто *хаотическим* аттрактором называется аттрактор, динамика которого характеризуется положительным показателем Ляпунова. Большинство исследователей справедливо связывают понятие хаотичности с наличием на аттракторе более сложных, чем эргодические, режимов поведения, в которых со временем начальная область Ω_0 таким образом распределяется по всему инвариантному множеству B , что её отдельные части можно будет обнаружить в любом сколь угодно малом открытом подмножестве $A \subset B$ независимо от размеров, формы и расположения исходной области Ω_0 . Говорят, что такие системы или движения обладают свойством перемешивания. Аттрактор, движение по которому обладает свойством перемешивания, называется стохастическим аттрактором. Для перемешивающих систем близкие в начальный момент времени траектории уже не остаются близкими в последующие моменты времени. Разбегание фазовых траекторий означает непредсказуемость поведения решений системы. Любая погрешность в определении траектории в начальный момент времени может привести

со временем к совершенно непредвиденным результатам. С другой стороны, движение по стохастическому аттрактору кроме непредсказуемости обладает также и свойством необратимости. Зная положение фазовой точки в конечный момент времени, невозможно сказать, где точка находилась в начальный момент.

Однако, в [1] мы исследовали данную модель более совершенной программой и наши результаты не сошлись с результатами, полученными в книге [7]. В данной модели нами регулярных аттракторов обнаружено не было, тем самым подтверждая нашу гипотезу хаотичности экономики.

2. ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДУ

Всегда необходимо учитывать, что при решении задачи Коши для проверки условий сохранения режимов важно иметь зависимость решения на каждом отрезке от начальных данных.

$$x^*(t) = \varphi_i(x^*(t_i), t - t_i), t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Одним из методов установления зависимости решения от начальных данных является метод разложения решения в ряд. Будем рассматривать задачу Коши для системы ОДУ, в которой правая часть не зависит явно от времени:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), t \in [t_0, T], \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Приближённое решение в окрестности точки x_0 может быть представлено в виде формулы Тейлора:

$$x(t) = x_0 + \dot{x}_0(t - t_0) + \frac{\ddot{x}_0}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x_0^{(s)}}{s!}(t - t_0)^s + \frac{x^{(s+1)}(\xi)}{(s+1)!}(t - t_0)^{(s+1)}, \quad (2.1)$$

где $x_0^{(k)} = x^{(k)}(t_0)$; $\xi \in (t_0, t)$; $k = 3, \dots, s$.

Выражения для вычисления производных, входящих в формулу (2.1), имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) = \varphi^1(x); \\ \ddot{x} &= \frac{df}{dx} f(x) = \varphi^2(x); \\ &\dots \\ x^s &= \frac{d\varphi^{s-1}}{dx} f(x) = \varphi^s(x); \\ \frac{d\varphi^s}{dx} &= \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_1^s}{dx_1} & \frac{d\varphi_1^s}{dx_2} & \dots & \frac{d\varphi_1^s}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2^s}{dx_1} & \frac{d\varphi_2^s}{dx_2} & \dots & \frac{d\varphi_2^s}{dx_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d\varphi_n^s}{dx_1} & \frac{d\varphi_n^s}{dx_2} & \dots & \frac{d\varphi_n^s}{dx_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вычисление производных $\varphi^1(x), \dots, \varphi^s(x)$ осуществляется в символьном виде, и полученные символьные выражения хранятся для последующего использования, тем самым хранится информация о зависимости решения от начальных условий. В случае, когда правые части являются многочленами многих переменных или дробно-рациональными функциями, дифференцирование правых частей выполняется достаточно просто. Вычисления могут быть эффективно распределены при двух условиях:

1) для каждого $i = \overline{1, n}$ производные компоненты x_i могут вычисляться от других $x_j, j \neq i$:

$$x_i^{(s)} = \varphi_i^s = \sum_{j=1}^n \frac{d\varphi_i^{s-1}}{dx_j} f_j, \quad s = 2;$$

2) вычисление $\frac{d\varphi_i^s}{dx_j}$ может вестись независимо для всех $j = \overline{1, n}$.

В силу того, что алгоритм решения задачи Коши хорошо распараллеливается, его реализация может быть выполнена с применением таких распространённых технологий параллельных вычислений как PVM или MPI. Таким образом, информационно-алгоритмическим ресурсом, используемым для решения этой вычислительной подзадачи, будет программный компонент, реализующий решение задачи Коши с использованием параллельных вычислений на суперкомпьютере или кластере.

2.1. СИМВОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И СХЕМА ИХ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Преимущества символьного подхода

- Возможность установить зависимость от входных, что зачастую не предусматривается классическими численными методами.
- Механизм символьного представления функций позволяет установить более гибкую зависимость «значение переменной – значение функций».
- Символьное представление задачи может стать ключевым моментом при построении распределённого алгоритма решения.

Рассмотрим этот вопрос более детально на примере задачи Коши для системы ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)); \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0;$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in D \subset V^n, \quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad t \in [t_0, T],$$

$\forall i = 1, \dots, n, \quad f_i(x_1, \dots, x_n)$ – аналитические функции в D .

Системы дифференциальных уравнений с правыми частями, задаваемыми многомерными многочленами

В силу аналитичности каждой из функций $f_i(x_1, \dots, x_n)$, их в свою очередь можно аппроксимировать посредством многомерной формулы Тейлора многомерными многочленами $P_i = [x_1, \dots, x_n]$ на D с любой степенью точности. Но и системы дифференциальных уравнений с правыми частями, задаваемыми многомерными многочленами, являются исключительно важным и интересным объектом (например, знаменитый аттрактор Лоренца представляет собой систему из трёх дифференциальных уравнений с правыми частями, задаваемыми трёхмерными многочленами второго порядка).

Итак,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = P_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)); \\ \frac{dx_2}{dt} = P_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = P_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)). \end{cases}$$

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0.$$

Будем искать решение в виде суммы ряда Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$x(t) = x^0 + \sum_{k=1}^N x^{(k)} \Big|_{t_0} \frac{(t-t_0)^k}{k!} + R_{N+1}(t),$$

где $R_{N+1}(t) = (t-t_0)^{N+1} \frac{x^{(N+1)}(\tilde{t})}{(N+1)!}$, $\tilde{t} \in [t_0, T]$;

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0); \quad x^{(k)} \Big|_{t_0} = \Phi^k \Big|_{x_0},$$

где $\Phi^k = \frac{d\Phi^{k-1}}{dx} \bar{P}[x_1, \dots, x_n]$; $\bar{P}[x_1, \dots, x_n] = (P_1[x_1, \dots, x_n], \dots, P_m[x_1, \dots, x_n])$;

$$\Phi^1 = \bar{P}[x_1, \dots, x_n]; \quad \frac{d\Phi^{k-1}}{dx} - \text{матрица частных производных,}$$

$$\frac{d\Phi^{k-1}}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{d\Phi_1^{k-1}}{dx_1} & \dots & \frac{d\Phi_1^{k-1}}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\Phi_n^{k-1}}{dx_1} & \dots & \frac{d\Phi_n^{k-1}}{dx_n} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\bar{x}(t) = x^0 + \sum_{k=1}^N x^{(k)} \Big|_{t_0} \frac{(t-t_0)^k}{k!}$, тогда $\|x(t) - \bar{x}(t)\| = \|R_{N+1}(t)\|$.

Таким образом, если требуется найти решение задачи Коши с любой заданной степенью точности ε , то достаточно вычислить столько членов ряда N_0 , чтобы $\|R_N(T_{\text{сходимости}})\| \leq \varepsilon \quad \forall N \geq N_0$, где $T_{\text{сходимости}}$ радиус сходимости ряда Тейлора, определяющего решение $x(t)$. Существенным здесь является то, что данный метод позволяет установить зависимость решения $x(t)$ от начальных данных x^0 .

Каждая итерация алгоритма включает следующую последовательность действий.

1. Вычисление символического выражения для производной $x^{(k)}$:

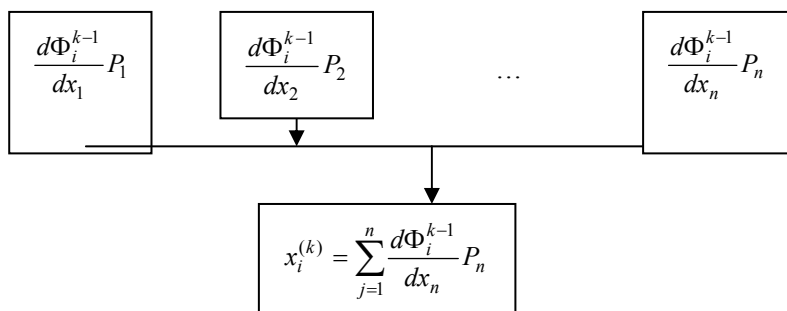


Рис. 2.1

Здесь важным моментом является то, что выражения, помещённые в прямоугольники, могут вычисляться независимо, вообще говоря, на различных вычислителях. При этом вычисления проводятся одновременно для всех $\forall i = 1, \dots, n$.

2. Вычисление матрицы частных производных $\frac{d\Phi^k}{dx} (m \times n)$:

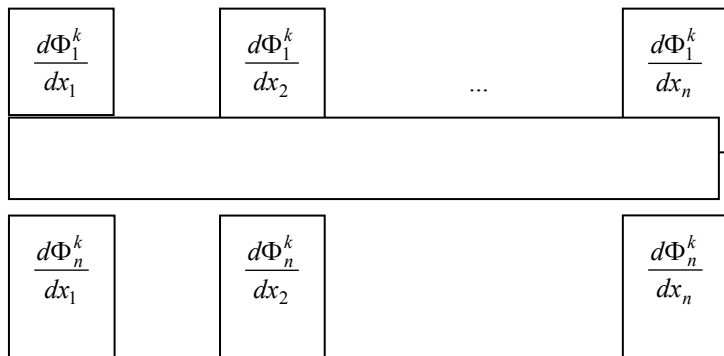


Рис. 2.2

Здесь справедливы те же рассуждения с тем замечанием, что на каждом вычислителе должен быть установлен инструмент для вычисления производной функции, заданной в символическом виде. В случае с многочленами, такой инструмент может быть реализован с достаточно высокой степенью эффективности.

3. Вычисление значения производной $x^{(k)} \Big|_{t_0}$.

Вычисление $x^{(k)} \Big|_{t_0}$ сводится к общему вопросу о вычислении некоторого многочлена $P[x_1, \dots, x_n]$ в точке (x_1^0, \dots, x_n^0) , рассмотрим его более подробно. Для начала обратимся к традиционной схеме Горнера:

$$P[x] = a_M x^M + a_{M-1} x^{M-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Каждый раз, вынося наибольший общий множитель соседних слагаемых, преобразуем многочлен к форме с минимальным числом умножений:

$$P[x] = (\dots((a_M x + a_{M-1})x + a_{M-2})x + \dots)x + a_0.$$

Представим многочлен $P[x_1, \dots, x_n]$ следующим образом:

$$P[x_1, \dots, x_n] = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}; \quad \alpha = (\lambda_1, \dots, \lambda_n);$$

$$x^{\alpha} = x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}.$$

Обозначим через $|\alpha|$ сумму $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, и упорядочим слагаемые в многочлене $P[x_1, \dots, x_n]$ по убыванию $|\alpha|$:

$$P[x_1, \dots, x_n] = \sum_{i=1}^M a_{\alpha_i} x^{\alpha_i}; \quad |\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \dots \geq |\alpha_M|.$$

Сопоставим многочлену $P[x_1, \dots, x_n]$ матрицу $A(n+1 \times M)$, столбцами которой являются $(n+1)$ -номерные вектора ξ_i :

$$\xi_i = (c^i p^i[x_1, \dots, x_n], \lambda_1^i, \dots, \lambda_n^i),$$

здесь c^i – константа; $p^i[x_1, \dots, x_n]$ – многочлен.

Для каждой пары столбцов составим вектор:

$$\xi^{ij} = (\text{НОД}(c^i, c^j) p^{ij}[x_1, \dots, x_n], \min(\lambda_1^i, \lambda_1^j), \dots, \min(\lambda_n^i, \lambda_n^j)),$$

при этом многочлен $p^{ij}[x_1, \dots, x_n]$ имеет вид:

$$p^{ij}[x_1, \dots, x_n] = \frac{c^i}{\text{НОД}(c^i, c^j)} p^i[x_1, \dots, x_n] x_1^{\lambda_1^i - \min(\lambda_1^i, \lambda_1^j)} \dots x_n^{\lambda_n^i - \min(\lambda_n^i, \lambda_n^j)} +$$

$$+ \frac{c^j}{\text{НОД}(c^i, c^j)} p^j[x_1, \dots, x_n] x_1^{\lambda_1^j - \min(\lambda_1^i, \lambda_1^j)} \dots x_n^{\lambda_n^j - \min(\lambda_n^i, \lambda_n^j)},$$

$$i = 1, \dots, M-1; \quad j = i+1, \dots, M.$$

Среди полученных векторов ξ^{ij} , а их будет

$$M-1 + M-2 + \dots + 1 = \frac{M(M-1)}{2},$$

выберем тот, для которого сумма $\sum_{k=1}^n \min(\lambda_k^i, \lambda_k^j)$ максимальна и обозначим его ξ^{\max} . В матрице $A(n+1 \times M)$ заменим столбцы, из которых был получен вектор ξ^{\max} , на столбец соответствующий вектору ξ^{\max} ,

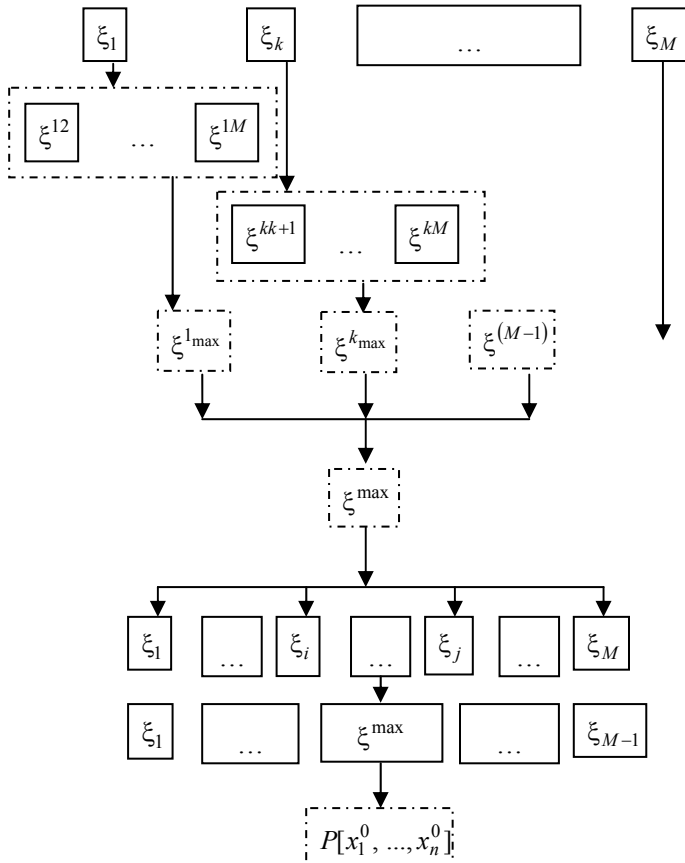


Рис. 2.3

так что $A(n+1 \times M) \rightarrow A(n+1 \times M - 1)$. Далее с новой матрицей $A(n+1 \times M - 1)$ проделаем то же самое. Тем самым за конечное число шагов многочлен $P[x_1, \dots, x_n]$ можно преобразовать к виду оптимальному для вычисления $P[x_1^0, \dots, x_n^0]$.

4. Оценка остаточного члена $\|R_N(t)\|$:

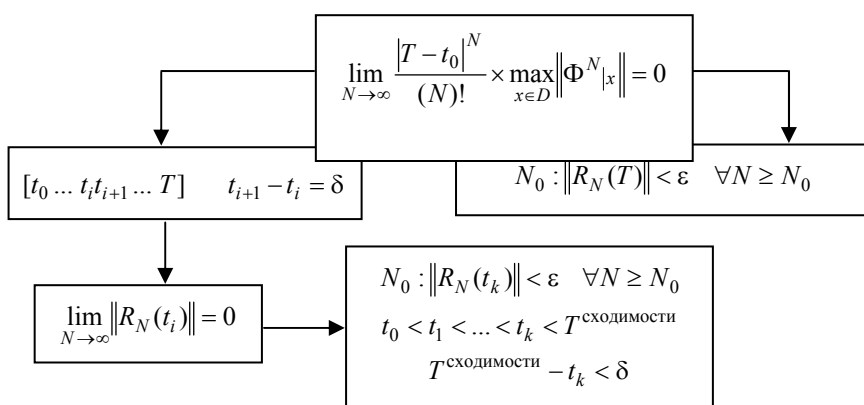


Рис. 2.4

Завершающий этап в процессе построения решения $x(t)$ включает следующие подзадачи:

1. Определить существует ли предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \|R_N(T)\| = 0$ и, если существует, то определить, равен ли он нулю. В случае положительного ответа перейти к пункту 2, в случае отрицательного к пункту 3.

2. Определить номер N_0 , начиная с которого выполнено соотношение $\|R_N(T)\| < \epsilon \quad \forall N \geq N_0$.

3. Весь отрезок $[t_0, T]$ разбивается точками t_i , так что $t_{i+1} - t_i = \delta$ – есть некоторая фиксированная величина: $[t_0 \dots t_i t_{i+1} \dots T] \quad t_{i+1} - t_i = \delta$.

4. Для каждого $t_i, i = 1, \dots, M = \frac{T-t_0}{\delta}$ осуществляется проверка $\lim_{N \rightarrow \infty} \|R_N(t_i)\| = 0$, последняя точка t_i , для которой предел существует и равен нулю, даёт оценку для радиуса сходимости ряда Тейлора $T^{\text{сходимости}} - t_k < \delta$.

5. Далее требуется определить номер N_0 , начиная с которого выполнено соотношение $\|R_N(t_k)\| < \epsilon \quad \forall N \geq N_0$.

Здесь важно отметить, что остаточный член $\|R_N(t)\|$ представлен в символьном виде, что существенно упрощает и оптимизирует процесс его оценивания.

3. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ САМОРАЗВИВАЮЩЕЙСЯ РЫНОЧНОЙ ЭКОНОМИКИ

Преобразуем систему (1.20) к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= b(1 - \sigma)xz - b\delta xy; \\ \dot{y}(t) &= x - (1 - \delta)xy + \sigma xz; \\ \dot{z}(t) &= ay - adx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Будем отыскивать решения системы (3.1) в виде рядов

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (t - t_0)^i; \\ y(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (t - t_0)^i; \\ z(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i (t - t_0)^i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

причём коэффициенты α_0, β_0 и γ_0 определяются по начальным условиям, т.е.

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x_0; \\ \beta_0 &= y_0; \\ \gamma_0 &= z_0, \end{aligned}$$

где x_0, y_0 и z_0 – задаются, а число t_0 можно выбрать произвольно в силу автономности системы (1.20).

Применяя процедуру символьного дифференцирования, описанную в работах [6, 12], для расчёта коэффициентов степенных рядов, можно отыскать решения нормальных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с заданной точностью в распределённой вычислительной среде. Однако, ввиду того, что система (1.20) имеет полиномиальную правую часть, попытаемся получить формулы для расчёта коэффициентов (3.2), чтобы сократить объём символьных вычислений. Для этого продифференцируем (3.2):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\alpha_{i+1}(t-t_0)^i; \\ \frac{dy}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\beta_{i+1}(t-t_0)^i; \\ \frac{dz}{dt} &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\gamma_{i+1}(t-t_0)^i.\end{aligned}$$

Далее найдём произведения степенных рядов в форме Коши:

$$\begin{aligned}xz &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j} (t-t_0)^i; \\ xy &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j} (t-t_0)^i.\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, из системы (1.20) получаем рекуррентные соотношения для расчёта коэффициентов рядов (3.2):

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1} &= \frac{b(1-\sigma) \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j} - b\delta \sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j}}{i+1}; \\ \beta_{i+1} &= \frac{\alpha_i - (1-\delta) \sum_{j=0}^i \alpha_j \beta_{i-j} + \sigma \sum_{j=0}^i \alpha_j \gamma_{i-j}}{i+1}; \\ \gamma_{i+1} &= \frac{a\beta_i - ad\alpha_i}{i+1}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Несмотря на то, что система (1.20) диссипативна и её правая часть всюду аналитична, радиус Δt сходимости рядов (3.2) ограничен. Численный эксперимент показал, что $\Delta t = 0,01$ для $r \in [14,350]$, $\sigma = 10$ и $b = \frac{8}{3}$. Поэтому описанным методом мы можем получить только часть траектории.

Чтобы построить дугу L траектории системы Лоренца на отрезке времени $[0, T]$, где T – задаётся, рассмотрим множество точек T_k , причём

$$T_k = k\Delta t, k = \overline{0, q}, q = \text{round} \frac{T}{\Delta t},$$

где $\text{round } a = a$, если a – целое; $\text{round } a = [a] + 1$ в противном случае, делящих отрезок $[0, T]$ на отрезки $[T_{m-1}, T_m]$ ($m = \overline{1, q}$) сходимости рядов (3.2). Для первого отрезка времени (при $m = 1$) мы задаём начальное условие x_0, y_0 и z_0 для момента времени $t_0 = T_0$. По формулам (3.3) вычисляем α_i, β_i и γ_i до такого значения i , при котором имеет место оценка для заданной точности ε_c вычислений:

$$\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2} \Delta t^i < \varepsilon_c.$$

Обозначим полученные полиномы $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ для $m = 1$ через $x_1(t)$, $y_1(t)$ и $z_1(t)$ соответственно. Далее переходим к аналогичному расчёту коэффициентов полиномов $x_2(t)$, $y_2(t)$ и $z_2(t)$, принимая

$$\begin{aligned}t_0 &= T_1; \\ x_0 &= x_1(T_1); \\ y_0 &= y_1(T_1); \\ z_0 &= z_1(T_1).\end{aligned}$$

В общем случае для m -го отрезка времени имеем условия:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= T_{m-1}; \\
 x_0 &= x_{m-1}(T_{m-1}); \\
 y_0 &= y_{m-1}(T_{m-1}); \\
 z_0 &= z_{m-1}(T_{m-1}),
 \end{aligned}$$

определяющие функции $x_m(t)$, $y_m(t)$ и $z_m(t)$.

Обозначим через $X(t)$, $Y(t)$ и $Z(t)$ функции, описывающие дугу L и составленные из функций $x_m(t)$, $y_m(t)$ и $z_m(t)$ соответственно.

Графическое представление дуги L будем осуществлять в проекции на плоскость xOy . Для этого удобно использовать пакет символьных вычислений Maxima [14], развёрнутый в операционной системе Linux.

После того, как произведён расчёт коэффициентов полиномов $x_m(t)$ и $y_m(t)$, формируются символьные выражения для этих функций, которые потом записываются в соответствующие мотивы массивы строк m -й строкой. После завершения процедуры формирования символьных выражений для всех частей, из которых последовательно будет составлена результирующая дуга L , формируются символьные выражения для функций $X(t)$ и $Y(t)$, используя оператор `if` пакета Maxima. Все эти действия осуществляются в программе, разработанной на языке C++. Затем программа записывает в текстовый файл полученные выражения для $X(t)$ и $Y(t)$ и вызов функции `plot2d` пакета Maxima для построения кривой, заданной в параметрическом виде. Далее в программе вызывается команда Maxima с использованием перенаправления ввода данных (как интерфейс взаимодействия с пакетом) для передачи данных пакету из полученного текстового файла.

Заметим, что идея такой реализации символьных вычислений использовалась в работе [12] для осуществления символьного дифференцирования и расчёта значений производных.

4. КАЧЕСТВО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Было проведено исследование поведения многих решений системы (1.20) для классических значений её параметров (исследование проводилось с помощью программы, представленной в [13]). Вычисления показали, что гипотеза существования аттракторов в системе (1.20) вызывает сомнения. При одних и тех же значениях параметров, применяемых нами и авторами в работе [7], результаты получались не соответствующими друг другу.

Под качеством будем понимать реалистичность, в том смысле сколь данные, полученные с помощью модели, могут соответствовать реальным данным. В соответствии с этим мы видим, что реальная картина наблюдается там, где отсутствует цикл, положительное равновесие и тому подобное.

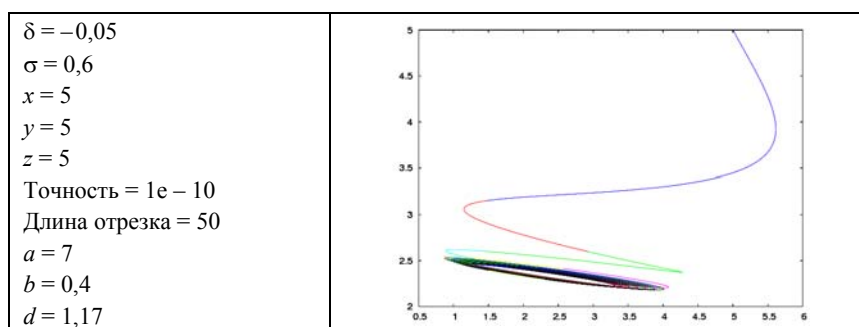
Как известно ни одна модель не действует на длительном промежутке времени. Модель со временем либо становится неактуальной, либо нуждается в адаптации к новым условиям экономики и модернизации, так как экономические показатели не могут быть постоянными и регулярно изменяются под воздействием внешней и внутренней среды субъекта экономики.

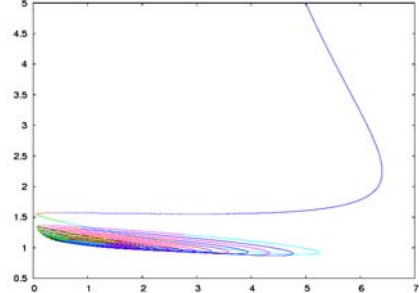
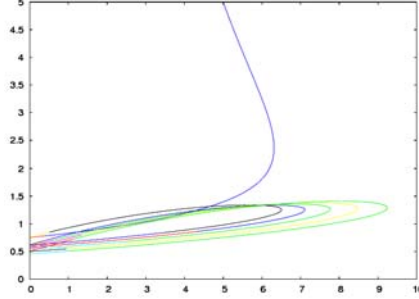
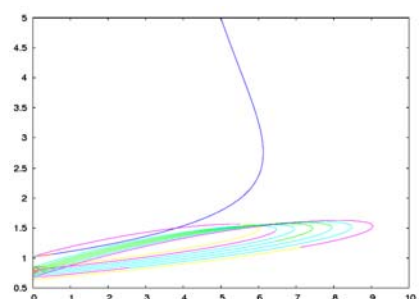
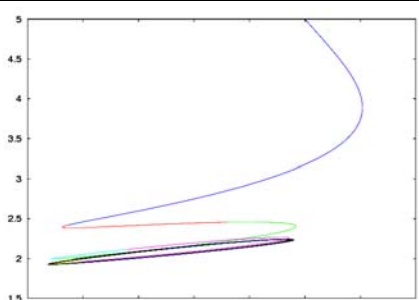
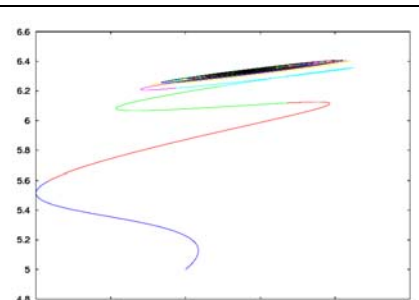
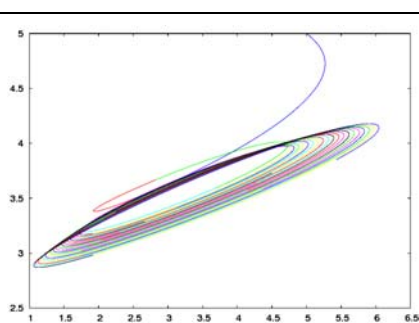
Таким образом, мы можем говорить о цикличности экономики лишь в том контексте, что имеют место быть определённые фазы цикла (например: кризис, депрессия, оживление и подъём), но мы не можем говорить о повторяемости экономических показателей, так же как и не можем сказать, что за кризисом всегда наступает депрессия, либо за депрессией подъём. Проведённые нами исследования в работе [1] показали, что экономические процессы носят хаотический характер, вследствие чего мы не можем говорить о наличии регулярных аттракторов в данной модели.

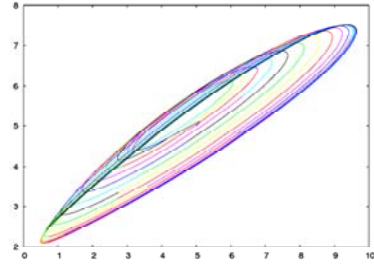
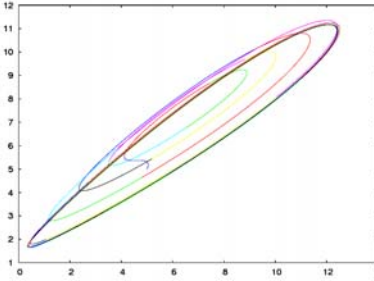
Исходя из качества полученных результатов, мы разделили графики на 3 группы:

- 1) высокое качество (значения параметров, при которых модель наиболее реалистична, циклов не наблюдается, равновесие неустойчиво);
- 2) среднее качество (значения параметров, при которых качество модели имеет определённые недостатки – циклов не наблюдается, равновесие неустойчиво, но скорость протекания процессов медленная);
- 3) низкое качество (значения параметров, при которых модель является абсолютно нереалистичной).

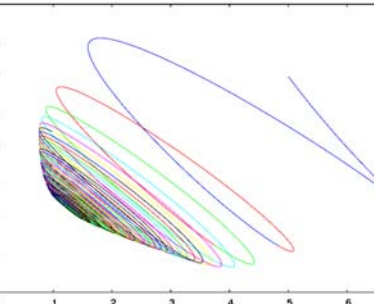
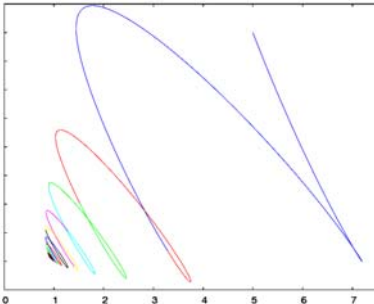
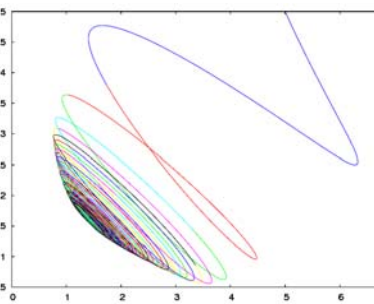
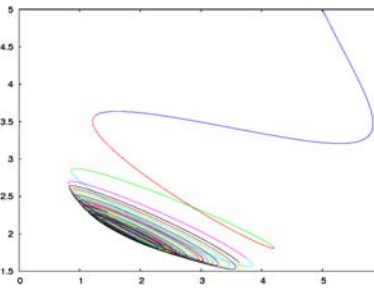
Высокое качество

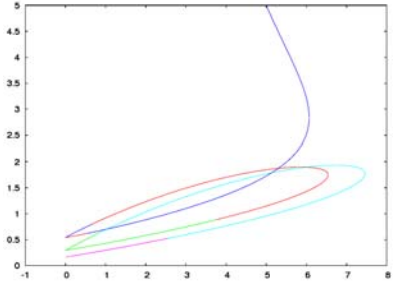
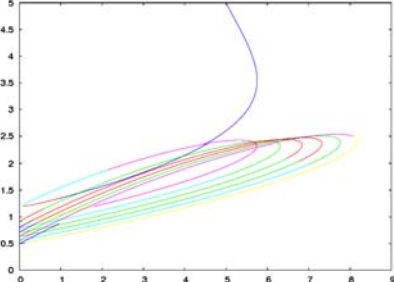


$\delta = -0,05$ $\sigma = 0,05$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,05$ $\sigma = 0,05$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,05$ $\sigma = 0,2$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,05$ $\sigma = 0,5$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,05$ $\sigma = 0,8$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,1$ $\sigma = 0,65$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	

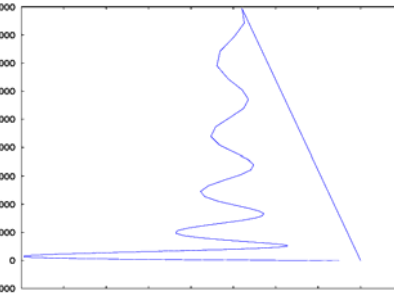
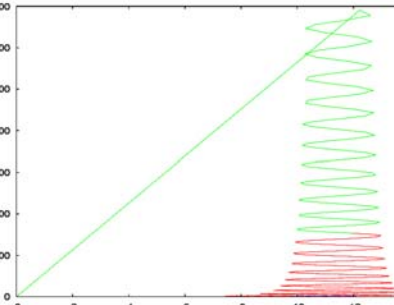
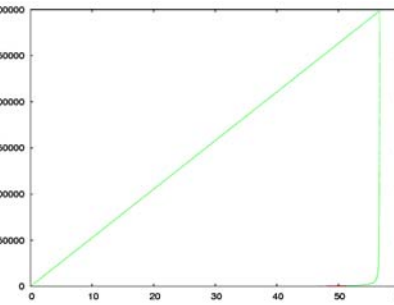
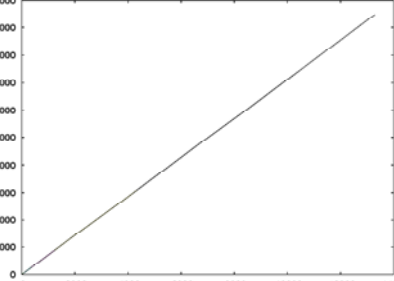
$\delta = 0,2$ $\sigma = 0,65$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,25$ $\sigma = 0,65$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	

Среднее качество

$\delta = -1,2$ $\sigma = 0,6$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = -1,2$ $\sigma = 0,15$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = -0,6$ $\sigma = 0,6$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = -0,2$ $\sigma = 0,6$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	

$\delta = 0,1$ $\sigma = 0,2$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,1$ $\sigma = 0,4$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	

Низкое качество

$\delta = -1,2$ $\sigma = 0,8$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = -0,05$ $\sigma = 1,5$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,1$ $\sigma = 1$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,2$ $\sigma = 0,8$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	

$\delta = 0,25$ $\sigma = 0,4$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,35$ $\sigma = 0,4$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,35$ $\sigma = 0,6$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	
$\delta = 0,4$ $\sigma = 0,25$ $x = 5$ $y = 5$ $z = 5$ Точность = $1e - 10$ Длина отрезка = 50 $a = 7$ $b = 0,4$ $d = 1,17$	

Исходя из этого сгруппируем качество модели в зависимости от значений параметров:

Качество модели	Значение параметров, δ ; σ	
Высокое	1. (-0,05; 0,6)	6. (0,05; 0,8)
	2. (-0,05; 0,05)	7. (0,1; 0,65)
	3. (0,05; 0,05)	8. (0,2; 0,65)
	4. (0,05; 0,2)	9. (0,25; 0,65)
	5. (0,05; 0,5)	
Среднее	1. (-1,2; 0,6)	4. (-0,2; 0,6)
	2. (-1,2; 0,15)	5. (0,1; 0,2)
	3. (-0,6; 0,6)	6. (0,1; 0,4)
Низкое	1. (-1,2; 0,8)	5. (0,25; 0,4)
	2. (-0,05; 1,5)	6. (0,35; 0,4)
	3. (0,1; 1)	7. (0,35; 0,6)
	4. (0,2; 0,8)	8. (0,4; 0,25)

Таким образом, несложный анализ показывает, что модель саморазвивающейся рыночной экономики реалистична при значениях параметров в диапазонах: с $[-0,05; 0,6]$ по $[0,25; 0,65]$. Именно в этих пределах данная модель может быть использована для решения задач оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агабекян, Э.П. Исследование модели движения капитала и спроса под воздействием норм прибыли в условиях саморазвивающейся рыночной экономики в распределённой компьютерной среде / Э.П. Агабекян // Вопросы современной науки и практики. – 2009. – Вып. 2.
2. Афанасьев, А.П. Продолжение траекторий в оптимальном управлении / А.П. Афанасьев // Труды Института системного анализа Российской академии наук (ИСА РАН). – М. : УРСС, 2005. – Т. 17. – 208 с.
3. Афанасьев, А.П. Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 240 с.
4. Баутин, Н.Н. Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонович. – М. : Наука, 1990. – 488 с.
5. Дернов, А.В. О новых подходах к проблеме управления хаосом : сб. тр. ф-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова / А.В. Дернов. – М. : Диалог МГУ, 2002. – Вып. 1. – С. 31.
6. Емельянов, С.В. Проблемы вычислений в распределённой среде: организация вычислений в глобальных сетях / С.В. Емельянов, А.П. Афанасьев. – М. : РОХОС, 2004. – 176 с.
7. Магницкий, Н.А. Новые методы хаотической динамики / Н.А. Магницкий, С.В. Свиридов. – М. : УРСС, 2004. – 319 с.
8. Магницкий, Н.А. Распределённая модель саморазвивающейся рыночной экономики / Н.А. Магницкий, С.В. Сидоров // Нелинейная динамика и управление : сб. статей ; под ред. : С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – 2002. – Вып. 2. – С. 243 – 262.
9. Магницкий, Н.А. Математическая модель саморазвивающейся рыночной экономики / Н.А. Магницкий // Тр. ВНИИСИ АН СССР, 1991. – С. 16 – 22.
10. Панюков, А.В. Математическое моделирование экономических процессов / А.В. Панюков. – М. : УРСС, 2010. – 192 с.
11. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М. : НАУКА, 1974. – 4-е изд. – 331 с.
12. Пчелинцев, А.Н. Об отыскании решений системы, описывающей процесс распространения тепла в неограниченной пластине, методом рядов Тэйлора / А.Н. Пчелинцев, Л.А. Мишина, Н.И. Теряев // Труды ТГТУ. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – Вып. 21. – С. 150 – 154.
13. http://cluster.tstu.ru/tiki-download_file.php?fileId=4.
14. <http://maxima.sourceforge.net>. Maxima, a Computer Algebra System.