

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

**В.А. ВАНИН, В.Г. ОДНОЛЬКО,
С.И. ПЕСТРЕЦОВ, В.Х. ФИДАРОВ, А.Н. КОЛОДИН**

НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Рекомендовано Учёным советом университета
в качестве учебного пособия



Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

УДК 621:001.8(075)
ББК К5в4я73
Н347

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры
«Машины и аппараты химических производств» ТГТУ
В.Я. Борщёв

Главный конструктор ОГК
ОАО «Тамбовгальванотехника им. С.И. Лившица»
В.В. Каледин

Ванин, В.А.

Н347 Научные исследования в технологии машиностроения :
учебное пособие / В.А. Ванин, В.Г. Однолько, С.И. Пестрецов,
В.Х. Фидаров, А.Н. Колодин. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн.
ун-та, 2009. – 232 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0881-7.

Излагаются основы проведения теоретических и экспериментальных исследований, методика обработки экспериментальных данных, в том числе с применением физико-математического пакета Mathcad 2001 Professional и офисного приложения Microsoft Excel, рассматриваются некоторые вопросы теории решения изобретательских задач.

Предназначено для студентов всех форм обучения, обучающихся по направлениям подготовки магистров: 150400 «Технологические машины и оборудование», 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», 151000 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»; специальности подготовки дипломированных специалистов 151001 «Технология машиностроения» и направлениям подготовки бакалавров: 150900 «Технология, оборудование и автоматизация машиностроительных производств», 151000 «Конструкторско-технологическое обеспечение автоматизированных машиностроительных производств».

УДК 621:001.8(075)
ББК К5в4я73

ISBN 978-5-8265-0881-7 © ГОУ ВПО Тамбовский государственный
технический университет (ТГТУ), 2009

Учебное издание

ВАНИН Василий Агафонович,
ОДНОЛЬКО Валерий Григорьевич,
ПЕСТРЕЦОВ Сергей Иванович,
ФИДАРОВ Валерий Хазбиевич,
КОЛОДИН Андрей Николаевич

НАУЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В ТЕХНОЛОГИИ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Л.В. Комбарова
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. Зотова

Подписано в печать 22.12.2009
Формат 60 × 84/16. 13,49 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 613

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Современное производство требует от специалиста принятия квалифицированных инженерных решений при проектировании, изготовлении и эксплуатации технологического оборудования. Умение проводить научные исследования становится необходимостью, так как часто лишь с их помощью удаётся учесть особенности конкретных условий производства и выявить резервы повышения его эффективности.

Подготовка будущих специалистов должна в этой связи включать не только изучение основ техники и технологии, но и методологии проведения научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ. Знание физики процесса в совокупности с научно обоснованным и грамотно поставленным экспериментом позволяют исследователю иметь чёткое представление о сущности протекающих в рассматриваемой системе процессов, выявлять факторы и условия, влияющие на их ход, определять направление движения к оптимальным структуре, конструктивным и режимным параметрам технологических процессов и оборудования.

Сложность задач, решаемых при проведении научных исследований, обуславливает применение компьютерных технологий. Поэтому для современного исследователя важно умение использовать различные пакеты прикладных программ, позволяющих проводить обработку экспериментальных данных и моделирования процессов.

Выводы, полученные в результате проведения исследования, должны иметь практическое применение в организации технологического процесса или в конструкции оборудования. Такие выводы могут быть как организационно-технического характера, так и имеющие отношение к изобретательской деятельности. Последнее обстоятельство указывает на необходимость владения специалистом основами патентования и приёмами теории решения изобретательских задач.

Исходя из выше изложенного, в настоящем учебном пособии излагаются основы проведения теоретических и экспериментальных исследований, методика обработки экспериментальных данных, в том числе с применением физико-математического пакета Mathcad 2001 Professional и офисного приложения Microsoft Excel, приводятся сведения о информационно-поисковых системах, рассматриваются некоторые вопросы теории решения изобретательских задач.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОРГАНИЗАЦИИ И ОСУЩЕСТВЛЕНИИ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ

Научное исследование – это изучение закономерностей развития явлений объективного мира и их объяснение.

По формам организации исследования разделяют на лабораторные, полевые, лабораторно-полевые, полупромышленные, промышленные.

Научными исследованиями занимаются научно-исследовательские, проектно-конструкторские, технологические институты.

Академические НИИ (входят в систему организации РАН и АН республик) проводят фундаментальные исследования. Ведомственные НИИ, подчинённые соответствующим министерствам и ведомствам, выполняют исследования прикладного характера, направленные на внедрение новой техники и технологий.

В вузах ведутся научно-исследовательские работы (НИР):

– *госбюджетные* – за счёт средств государства, отпускаемых университету на конкурсной основе (гранты, различные научно-технические программы и т.д.);

– *хоздоговорные* – выполняются на основе двухсторонних хозяйственных договоров между вузом и предприятием за счёт средств предприятия.

Научные исследования состоят из собственно научных изысканий и вспомогательных организационных мероприятий, направленных на обеспечение технических возможностей проведения таких исследований.

В зависимости от поставленной задачи содержанием научных исследований могут быть [1]:

а) поисковые исследования и разработка научно-технических предпосылок решения поставленной задачи;

б) разработка экспериментально-теоретических основ совершенствования существующих или создания новых процессов или технических объектов (машин, оборудования и т.д.);

в) выполнение опытно-конструкторских разработок объектов;

д) доводка и испытание разработанных объектов или процессов.

Первый и второй этапы выполняют обычно научно-исследовательские институты, а третий и четвёртый – проектно-конструкторские организации и научно-исследовательские учреждения по испытанию машин при участии вышеуказанных научно-исследовательских учреждений.

Опытно-конструкторские разработки предусматривают доведение результатов НИР до уровня серийного производства разрабатываемых объектов на заводах и других предприятиях и включают выполнение проектно-технической документации, опытную проверку разработанных технических, технологических или производственных решений.

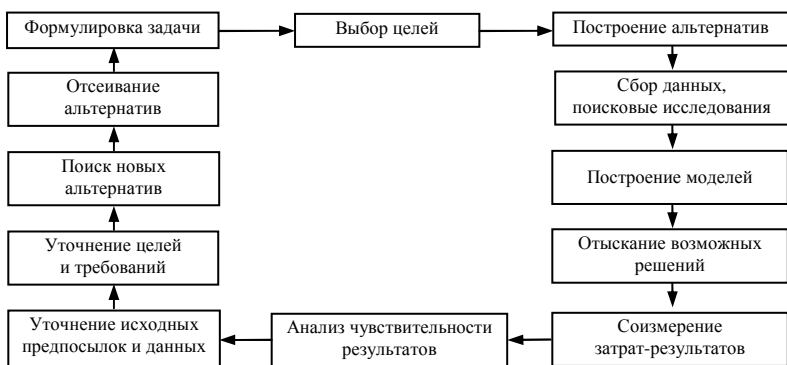


Рис. 1.1. Схема шагового метода формулировки и решения научно-технических задач

Оптимальный срок фундаментальных исследований 6–7 лет; поисковых, основная цель которых выявить наилучший вариант научного и технического решения задачи составляет 1–2 года; прикладных исследований – 2–3 года; опытно-конструкторских разработок – 1–2 года.

Общая схема формулировки и последовательного решения научно-технической задачи приводится на рис. 1.1.

2. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ И ТВОРЧЕСТВА

Методология – философское учение о методах познания и преобразования действительности, применения принципов мировоззрения к процессу познания, духовному творчеству и практике.

Любое научное исследование состоит в том, чтобы обнаружить, сформулировать и решить некоторый взаимосвязанный комплекс теоретических или практических задач, который составляет *научную проблему*.

Проблема обычно возникает как следствие обострения объективных противоречий между достигнутым объёмом и уровнем научных знаний и необходимостью решения новых научно-исследовательских или практических производственных задач.

Для решения проблемы предпринимаются специальные научные исследования. *Под научным исследованием в широком смысле следует понимать* комплекс теоретических построений и экспериментальных операций, выполняемых в отношении объекта (процесса) исследований для определения его свойств и закономерностей поведения с целью их познавательного или практического применения [1].

Способы исследования, а также способы подхода к изучаемым явлениям, плановый путь научного познания и установления истины, называют *методами*. Различают *следующие методы исследований*: всеобщий метод, общенаучные методы и конкретно-научные (частные) методы.

Всеобщий метод – это метод познания мира и конкретных объектов вообще вне зависимости от их физической природы. Таким единственно правильным и последовательно научным методом является *диалектический метод*.

2.1. ЗАКОНЫ РАЗВИТИЯ ТЕХНИКИ

Развитие техники происходит согласно законам диалектики, при этом собственно *законы техники* можно разделить на две группы:

1) *законы организации систем* (определяют жизнеспособность системы);

2) *законы эволюции систем* (определяют развитие систем).

Наиболее общие из законов диалектики следующие:

1. *Закон единства и борьбы противоположностей* характеризует одно из основных понятий теории решения изобретательских задач (ТРИЗ) – *противоречие*, которое будет подробно рассмотрено далее.

2. *Закон перехода количественных изменений в качественные* вскрывает общий механизм развития. Учёт закона перехода количественных изменений в качественные происходит на этапе выбора задачи и прогнозирования развития систем.

Любая система (в том числе и техническая) проходит несколько этапов своего развития (рис. 2.1) [2]. Участок *III* свидетельствует о появлении в системе некоторых противоречий. Прекращение роста данной системы (участок *IV*) не означает прекращение прогресса в этой области. Появляются новые более совершенные системы – происходит скачок в развитии (рис. 2.2, *a*). Это типичный пример проявления закона перехода количественных изменений в качественные. На смену системе *1* приходит 2. Скачкообразное развитие продолжается – появляются системы 3, 4 и т.д. Общий прогресс в отрасли отражается касательной (пунктирная линия) к данным кривым (рис. 2.2, *б*).

3. *Закон отрицания отрицания* (процесс развития происходит по спирали, но на более высоком уровне с применением новых элементов, материалов, технологий и т.д.).

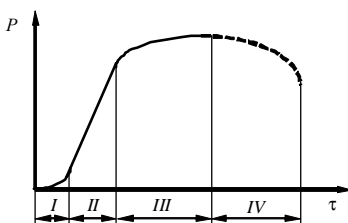


Рис. 2.1. S-образная кривая развития технических систем:

I – «зарождение» системы (появление идеи и опытных образцов);

II – промышленное изготовление системы и доработка системы в соответствии с требованиями рынка; *III* – незначительное «дожимание» системы;

IV – ухудшение определённых параметров системы

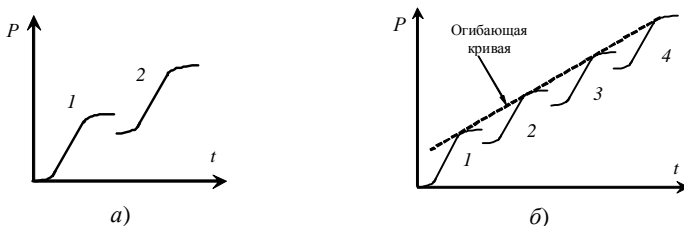


Рис. 2.2. Развитие систем:

a – скачкообразное развитие; *б* – общий прогресс в отрасли

К законам *организации систем* относятся:

4. **Закон полноты частей системы:** необходимым условием принципиальной жизнеспособности технической системы является наличие и минимальная работоспособность основных частей системы. Чтобы техническая система была управляемой необходимо, чтобы хотя бы одна её часть была управляемой.

5. **Закон «энергетической проводимости» системы:** необходимым условием принципиальной жизнеспособности технической системы является сквозной проход энергии по всем частям системы.

6. **Закон согласования ритмики системы:** необходимым условием принципиальной жизнеспособности технической системы является согласование ритмики (частоты колебаний, периодичности) всех частей системы.

К законам *эволюции систем* относятся:

7. **Закон увеличения степени идеальности системы.**

8. **Закон неравномерности развития частей системы** (чем сложнее система, тем не равномернее развитие её частей).

9. **Закон перехода в надсистему** (исчерпав возможности развития, система включается в надсистему).

10. **Закон перехода с макроуровня на микроуровень** (развитие рабочих органов системы идёт сначала на макро-, а затем на микроуровне). Это одна из главных тенденций развития современных систем.

11. **Закон увеличения степени вепольности** (см. п. 11.2).

Методические рекомендации к индивидуальному заданию по теме 2.1. В качестве индивидуального задания для студентов по этой теме рекомендуется рассмотреть в хронологической последовательности развитие средств транспорта, радиоэлектроники, бытовой и компьютерной техники. Желательно отразить эволюцию систем в виде графиков, аналогичных приведённым на рис. 2.1 и 2.2.

2.2. ОБЩЕНАУЧНЫЕ МЕТОДЫ

Основными из таких методов являются [1]:

- **наблюдение** – способ познания, основанный на непосредственном восприятии предметов и явлений при помощи органов чувств без вмешательства в процесс со стороны исследователя;

- *сравнение* – установление различия между объектами или нахождение в них общего при помощи органов чувств или специальных приборов;

- *счёт* – нахождение числа, определяющего количественное соотношение однотипных объектов или их параметров, характеризующих те или иные свойства;

- *измерение* – физический процесс определения численного значения некоторой величины путём сравнения её с эталоном;

- *эксперимент* – проверяется истинность выдвигаемых гипотез или происходит выявление закономерностей объективного мира; в ходе эксперимента условия могут изолироваться, усиливаться, ослабляться и т.д.;

- *обобщение* – определение общего понятия, в котором находится отражение основного свойства, характеризующего объект определённого класса;

- *метод индукции*, основанный на умозаключении, берущем своё начало от частных случаев и приводящем к общему выводу, от единичных факторов к обобщениям;

- *метод дедукции*, основанный на умозаключении от общего к частному, от общих суждений о явлениях, процессах и объектах к конкретным выводам о них;

- *анализ* – метод мысленного расчленения или физического разложения исследуемого объекта на составные части и последующего их изучения;

- *синтез* – метод изучения объекта в его целостности и во взаимосвязи его частей.

На практике при изучении сложных систем методы анализа часто чередуются с методами синтеза, но синтез относится обычно к заключительному этапу исследования.

Анализ или синтез можно проводить при помощи следующих методов:

- *прямого или эмпирического* (используется для выделения отдельных частей объекта, обнаружения его свойств, проведения простейших измерений и т.п.);

- *возвратного или элементарно-теоретического*, базирующегося на представлениях о причинно-следственных связях различных явлений;

- *структурно-генетического* (выявление и исключение явлений, оказывающих сложное влияние на объект);

- *абстрагирования* (из объекта выделяются и изучаются наиболее существенные его признаки);

- *анalogии* (выявляются сходства, существующие в природе и технике). Следует иметь в виду, что аналогия тесно связана с *моделированием или модельным экспериментом*;

- *аксиоматического* (некоторые утверждения (аксиомы) принимаются без доказательств и используются для получения остальных знаний по определённым логическим правилам);

– *ранжирования* (среди большого количества факторов выделяются главные и исключаются второстепенные, существенно не влияющие на исследуемое явление или объект);

– *формализации* (объект или явление отображается в знаковой форме какого-либо искусственного языка (химии, математики и т.д.) и дальнейшие исследования проводятся при помощи этого языка);

– *гипотетического* (научная гипотеза разрабатывается на основе изучения физико-химических, механических и других свойств объекта). При использовании этого метода исследователи прибегают к идеализации, когда объекты наделяются гипотетическими, практически неосуществимыми свойствами;

– *исторического* (исследование возникновения, формирования и развития объектов в хронологическом порядке).

Все перечисленные методы условно можно разделить на ряд уровней: эмпирический, экспериментально-теоретический, теоретический и мето-теоретический.

Методы экспериментально-теоретического уровня (эксперимент, анализ и синтез, индукция и дедукция, моделирование, гипотетический и исторический методы) помогают исследователю обнаружить те или иные достоверные факты и произвести их накопление.

Методы теоретического уровня (абстрагирование, идеализация, формализация, анализ и синтез, индукция и дедукция, обобщение и т.д.) позволяют производить логическое исследование собранных фактов, осуществлять выработку понятий, суждений и умозаключений, а также теоретических обобщений.

С помощью *мето-теоретических методов* (диалектический метод и системный анализ) исследуется сама теория: пути построения и границы её применения, системы положений и понятий данной теории.

2.3. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ КАК МЕТОД НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Вследствие резко возросшей сложности объектов и систем стало трудно осуществимым, а порой и вообще невозможным теоретическое или экспериментальное исследование этих объектов или систем традиционными методами. Экспериментальные исследования усложнились, стали весьма трудоёмкими, снизилась безошибочность результатов этих исследований. Необходимость изучения свойств и функционирования таких систем привела к разработке и применению *системного анализа*.

Методы системного анализа применяются, главным образом, для выбора оптимальной структуры объекта, рационального взаимодействия его элементов и получения максимального конечного эффекта.

Важнейшими характеристиками систем являются их структура, сложность и организация [1].

Структура системы определяется совокупностью отношений между элементами (подсистемами).

Сложность системы характеризуется количеством переменных, необходимых для описания её состояния.

Организация системы – это уровень целесообразности набора её элементов и характера взаимодействия между ними, обеспечивающий целенаправленное функционирование системы.

Взаимодействие составных частей системы с обрабатываемыми материалами или внешней средой проявляется в виде тех или иных эксплуатационных показателей.

Вся совокупность рабочих процессов, операций, технологических и производственных процессов, осуществляемых системой, составляет *процесс её функционирования*.

Под *рабочим процессом* понимают совокупность взаимодействий орудий труда и объектов труда, направленных на обработку или переработку последних с доведением к такому виду, в котором они необходимы для человеческого общества.

Под *технологическим процессом* понимают процесс, протекающий в объекте труда при его обработке или переработке.

Под *операцией* понимают какие-либо действия, приводящие к изменению состояния или местонахождения орудия или предмета труда.

Системный подход к исследованию сложных систем включает следующие основные этапы: рассмотрение системы как целого, обладающего свойствами, отличающимися от совокупности свойств его элементов; исследование элементов как самостоятельных систем а, также рассмотрение самой системы как элемента (подсистемы) другой (более сложной) системы; анализ всего многообразия свойств элементов системы, отношений между ними и свойств системы в целом; оптимизация структуры и процессов функционирования системы путём подчинения задач её элементов общей цели, стоящей перед системой.

Исследование объекта как системы предусматривает прежде всего построение его модели теоретическим или экспериментальным методом. Модель (описание объекта на том или ином языке) отображает группу его основных свойств и представляется обычно в виде *функционального, морфологического и информационного описания*.

Модель функционирования объекта (функциональное описание) описывает изменение некоторых его характеристик во времени.

Морфологическое описание раскрывает строение объекта: его элементы, структуру и связи, среди которых обычно выделяют *информационные, энергетические и вещественные*.

Информационное описание показывает организацию объекта как системы и возникающие в ней информационные потоки.

Системный анализ эффективности функционирования объектов осуществляется с помощью специальных теоретических и эксперимен-

тальных методов. Эти методы позволяют выделять взаимосвязанные элементарные структурные единицы (подсистемы) объекта – *этап декомпозиции и структуризации*; оценивать их свойства и параметры – *этап параметризации*; устанавливать зависимости между параметрами подсистем и действующими внешними и внутренними факторами – *этап идентификации* (собственно построение математической модели), а затем осуществлять исследование полученных моделей известными методами анализа и синтеза.

Таким образом, *системный анализ включает в себя в четыре этапа*:

1) *постановка задачи исследования* (определяются объект, цели и задачи исследования, а также критерии для изучения и управления объектом);

2) *определение границ изучаемой системы и её структуры* (объекты и процессы, имеющие отношение к поставленной задаче разбиваются на изучаемую систему и внешнюю среду).

В этом случае различают *замкнутые и открытые системы*. При исследовании замкнутых систем влиянием внешней среды на их поведение пренебрегают. Затем выделяют отдельные составные части системы, её элементы и устанавливают взаимодействие между ними и внешней средой;

3) *разработка математического описания исследуемой системы*;

4) *проверка адекватности математического описания и его уточнение*.

На этом же этапе проводится и собственно оптимизация системы по какому-либо из выбранных критериев. В качестве критериев оптимизации чаще всего принимаются: минимум энергозатрат на проведение процесса или минимум приведённых затрат, который включает в себя как энергозатраты на проведение процесса, так и затраты на изготовление и эксплуатацию оборудования.

3. ПОИСК, НАКОПЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Поиск, накопление и обработка научной информации проводятся на основе изучения периодических изданий органов Государственной системы научно-технической информации (ГСНТИ) и Международной системы научной и технической информации (МСНТИ), библиотечных каталогов, а также с помощью информационно-поисковых систем и информационных сетей.

Основной принцип функционирования ГСНТИ – централизованная одноразовая обработка мирового информационного потока документов в области науки и техники федеральными органами НТИ и научно-техническими библиотеками и многократное использование потребителями информации из федеральных фондов через сеть информационных организаций в отраслях и регионах.

В состав ГСНТИ входят федеральные органы научно-технической информации (НТИ) и научно-технические библиотеки, отраслевые органы НТИ, региональные центры НТИ.

Основной продукцией крупнейших центров НТИ и одновременно основой информационных ресурсов всей системы органов НТИ являются вторичные информационные издания: реферативные журналы, библиографические указатели, экспресс-информация, сигнальная информация, обзорно-аналитическая информация. Всего выпускается около 400 реферативных и библиографических изданий. Ряд этих изданий формируется в электронной форме.

Библиотечная сеть России насчитывает около 150 тысяч библиотек и включает, например:

- систему научно-технических библиотек и справочно-информационных фондов, которая входит в состав Российской ГСНТИ;
- информационно-библиотечную систему Российской академии наук (РАН);
- библиотечную сеть высших учебных заведений России.

Информационные ресурсы российских библиотек организованы на основе сочетания двух главных принципов: отраслевого и территориального. Практически каждая отрасль знаний имеет основное, центральное книгохранилище на федеральном уровне. Наряду с этим на каждом территориальном уровне есть центральная универсальная общедоступная библиотека.

Самые значительные базы данных сформированы в ИНИОН (более 2 млн. записей), РНБ (около 2 млн. записей), РГБ (более 1 млн. записей), ГПНТБ России (более 1 млн. записей, из них «Сводный каталог научно-технической литературы» – около 480 тыс. записей), ЦНСХБ (750 тыс. записей).

Архивный фонд Российской Федерации в соответствии с формой собственности на документы состоит из государственной и негосударственной частей.

В непосредственном ведении Росархива находится свыше 193 млн. ед. хр. документов, находящихся в федеральных архивах, а также в государственных и муниципальных архивах субъектов Российской Федерации. Этот объём в среднем ежегодно увеличивается на 1,6 млн. ед. хр., в основном за счёт приёма документов от более 119 тыс. учреждений, организаций и предприятий государственной и негосударственной форм собственности, являющихся источниками комплектования государственных и муниципальных архивов.

С составом и содержанием хранящихся в архивах документов можно ознакомиться с помощью справочников о фондах. Ежегодно в России издаётся 10 – 12 таких справочников.

В настоящее время особое значение приобрели информационные системы, в том числе и автоматизированные, позволяющие в достаточно короткое время осуществить поиск необходимой информации, провести её анализ и систематизацию. Важным достоинством информационных систем является возможность хранения большого объёма информации и оперативное её извлечение с целью дальнейшего использования.

Автоматизированная информационная система (АИС) использует компьютер, включенный в локальную сеть предприятия или в глобальную сеть Internet.

Применительно к проведению научных исследований и реализации их результатов на практике по целевому назначению АИС можно классифицировать следующим образом [3]:

- *административные* (management information system – MIS), целью которых является сбор и обработка всех данных, необходимых для планирования, обслуживания, проверки, оценки и управления деятельностью организации;

- *информационные системы руководителей* (ИСП, или executive information system – EIS) для обеспечения руководителей и менеджеров простым и понятным доступом к информации, нужной им для выработки стратегических планов, отслеживания деловой и экономической активности, выделения проблем и возможностей, принятия решений;

- *склады данных* (data warehouses) – база данных, хранящая всю информацию, касающуюся деятельности компании. Все прикладные программы компании могут обращаться к ней с различными запросами. Основу информационных ресурсов предприятий и организаций отраслей материального производства составляют электронные массивы информации (банки и базы данных, вспомогательные информационные файлы управленческого и технологического назначения и т.д.) и традиционные справочно-информационные фонды;

- *системы автоматизированного проектирования* (САПР, или CAD/CAE – computer assisted design/engineering);

- *системы поддержки решений* (СПР, или decision support systems – DSS) позволяют пользователю изучать альтернативы, задавать вопросы типа «что будет, если...», оперировать изменяющимися условиями и принимать решения в непредвиденных ситуациях. Чтобы облегчить применение моделей, СПР очень часто посвящаются узкой предметной области;

- *экспертные системы* (ЭС, или expert system – ES) содержат знания и опыт одного или более специалистов в определённой предметной области. Экспертная система направляет процесс поиска решения, выдаёт обоснованные решения и гарантирует применение существенных для предметной области критериев качества решения. ЭС, кроме базы данных, содержит базу знаний (фактов и правил логического вывода), которая моделирует познания эксперта в какой-то предметной

области. Чаще всего такие системы применяются для того, чтобы «расширить» сферу деятельности ведущих специалистов фирмы или «привлечь» эксперта со стороны;

– *системы конечного пользователя* (СКП, или end user system – EUS) разрабатываются пользователями, чтобы удовлетворить свои собственные нужды в поиске и обработке информации, разработке приложений. Они обычно состоят из персонального компьютера и набора инструментальных средств типа СПР.

Разрабатываются также *интеллектуальные системы* – информационные комплексы, оснащённые искусственным интеллектом (ИИ). Они могут быть полного и неполного информационного цикла, т.е. могут творить новое состояние объекта, а могут выполнять и усечённые функции – связи, обработки знаний и т.д. Существует понятие о *творческих системах*. Примером творческой системы может служить перспективный алгоритм решения изобретательских задач, о котором подробнее рассказано в п. 11.3.

Накопление, хранение и обмен данными между пользователями может осуществляться с помощью компьютерных сетей.

В зависимости от территориального расположения абонентских систем компьютерные сети можно разделить на три основные класса [4 – 6]:

- 1) глобальные сети (WAN-Wide Area Network);
- 2) региональные сети (MAN-Metropolitan Area Network);
- 3) локальные сети (LAN-Local Area Network).

Глобальная компьютерная сеть объединяет абонентов, расположенных в различных странах, на различных континентах.

Региональная компьютерная сеть связывает абонентов, расположенных на значительном расстоянии друг от друга. Она может включать абонентов внутри большого города, экономического региона, отдельной страны.

Локальная компьютерная сеть объединяет абонентов, расположенных в пределах небольшой территории.

Internet представляет собой глобальную компьютерную сеть. Основные ячейки Internet – локальные вычислительные сети. Существуют также компьютеры, самостоятельно подключенные к Internet. Они называются хост-компьютерами (host – хозяин). Обмен информацией между пользователями может производиться с помощью электронной почты, телеконференций, с помощью протокола FTP и взаимодействия с другими компьютерами.

Вся информация, размещаемая в сети Internet, находится на Web-серверах. Например, *Microsoft Internet Information Server (MIIS)* интегрируется с базами данных Microsoft SQL Server.

Наиболее популярны среди российских пользователей поисковые системы Rambler, Yandex, Апорт, Google, MSN, Yahoo.

4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

4.1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Теоретические исследования – это исследования, основанные на аксиомах, законах, принципах, постулатах и теоремах [1]. Теоретические исследования позволяют в значительной степени сократить сроки и уменьшить материальные затраты на проведение исследований.

Задачами теоретического исследования являются:

- обобщение результатов исследования;
- нахождение общих закономерностей путём обработки и интерпретации опытных данных;
- распространение результатов исследования на ряд подобных объектов без повторения всего объёма исследований;
- изучение объекта недоступного для непосредственного исследования;
- повышение надёжности экспериментального исследования объекта.

Теоретическое исследование завершается формулированием теории.

Основным содержанием теоретических исследований являются [1]:

- изучение физической природы исследуемых объектов, явлений и процессов;
- построение принципиальных схем исследуемых объектов (например, машин, машинных агрегатов и т.д.) и схем технологических процессов;
- построение эквивалентных схем исследуемых процессов, например, построение эквивалентных схем машин и агрегатов, на которых указаны точки приведённых масс, оси приведённых моментов инерции и другие механические характеристики;
- построение расчётных моделей функционирования объектов исследования;
- решение задач анализа параметров исследуемых объектов.

При проведении теоретических исследований, основанных на принципах анализа и синтеза, широко используются *методы расчленения и объединения элементов исследуемой системы*. В процессе расчленения выделяются существенные и несущественные параметры, основные элементы и связи между ними. *Метод объединения элементов*, наоборот, подразумевает комплексный подход к изучению исследуемой системы. Такой подход используется в так называемой *общей теории систем*, в которой выделяются два направления. Первое связано с развитием теории как философской концепции, второе – со строгим математическим описанием закономерностей формирования и развития любых систем.

4.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ В НАУЧНОМ И ТЕХНИЧЕСКОМ ТВОРЧЕСТВЕ

При теоретических исследованиях прибегают к построению моделей функционирования объектов, используя для этого различные математические методы. При этом в зависимости от сложности исследуемого объекта и цели исследования строят физические, расчётные и математические модели [1].

Физические модели содержат полное описание поведения объекта. В модели входят без упрощений все известные функциональные и прочие соотношения и связи между параметрами процесса, а также полученные экспериментальные данные, касающиеся рассматриваемых процессов. По этим причинам модели получаются неоправданно сложными и не вполне определёнными, что затрудняет возможность их применения для решения задач анализа или синтеза.

Расчётные модели строят на основе допущений. При этом сложные математические зависимости, описывающие процессы, заменяют приближенными (аппроксимированными) соотношениями, некоторые переменные величины – их средними значениями, нелинейные выражения – линейными и т.д. Упрощение реальных объектов и выполняемых ими функций позволяет затем использовать при моделировании формальные методы современной математики и вычислительной техники.

Под математическими моделями процессов понимают расчётные модели, построенные аналитическими методами или полученные экспериментально. Это могут быть также алгоритмы решения уравнений и составленные на их основе программы для ЭВМ.

В зависимости от метода построения модели разделяют на два типа: гносеологические (познавательные) и информационные.

Гносеологические модели описывают различные физические, технологические и другие процессы, протекающие в объектах.

Информационные модели – это математические модели, используемые для решения задач анализа или синтеза параметров систем, а также для решения задач управления объектами или системами с применением автоматизированных систем управления. Содержащаяся в них информация используется для выработки способов активных воздействий на объект для получения от него заданных (оптимальных) показателей.

Математическое описание процессов практически реализуется составлением алгоритмов, с помощью которых на ЭВМ получают численные характеристики процессов. Варьируя исходные данные, удаётся установить оптимальные условия процесса. Получив решение, необходимо выявить его соответствие изучаемому объекту, т.е. экспериментально проверить адекватность математической модели.

4.2.1. Последовательность решения исследовательских задач математическими методами

Решение практических задач математическими методами осуществляется в следующей последовательности: постановка задачи исследования, выбор типа и вида математической модели, анализ решения уравнений математического описания [7].

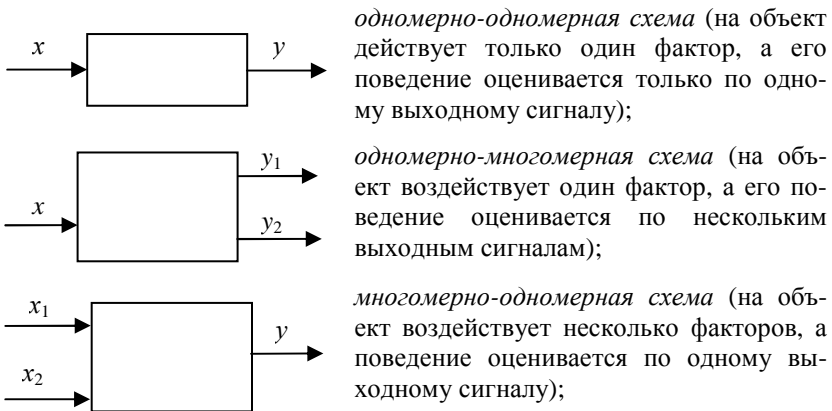
Постановка задачи исследования осуществляется в виде задания критериев изучения или управления объектом. При этом устанавливается схема взаимодействия объекта с окружающей средой и учитываются только существенные факторы, система представляется замкнутой.

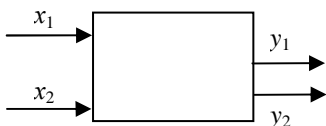
Выбор типа математической модели осуществляется на основе анализа данных, полученных при поисковом эксперименте. При этом устанавливается: линейность или нелинейность, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность объектов или систем.

Линейность устанавливается по характеру статической характеристики объекта. Под статической характеристикой объекта понимается связь между величиной внешнего воздействия на объект (величины входного сигнала) и максимальной величиной его реакции на внешнее воздействие (максимальной амплитуды выходной характеристики системы). Под выходной характеристикой системы понимается изменение выходного сигнала системы во времени. Применение линейных моделей значительно упрощает дальнейший анализ объектов или систем.

Нелинейность статической характеристики и наличие запаздывания в реагировании объекта на внешнее воздействие свидетельствуют о нелинейности объекта. В этом случае для его моделирования применяется нелинейная модель.

Результаты поискового эксперимента позволяют установить схему взаимодействия объекта с внешней средой по количеству входных звеньев. Схемы взаимодействия могут быть следующие [1]:





многомерно-многомерная схема (на объект воздействует несколько факторов и его поведение оценивается по нескольким выходным сигналам).

Выбор отрезков времени, на которых устанавливается статичность или динамичность объекта, должен быть обоснованным. Так, например, при выборе достаточно больших отрезков времени установлено, что объект или система статичны. Если уменьшить интервал времени то, может оказаться, что объект или система станут динамичными.

Выбор вида математической модели включает задание области определения исследуемых параметров объекта, их ограничение и установление зависимостей между ними. Для количественных (числовых) параметров зависимости задаются в виде системы алгебраических или дифференциальных уравнений, а для качественных – в виде табличных способов задания функции.

4.3. МЕТОДИКИ ПОСТРОЕНИЯ РАСЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

4.3.1. Детерминированные механические системы первого и второго порядков

Технологическое оборудование, применяемое в машиностроительном производстве имеет различную сложность по конструкции и выполняемым процессам. Если оборудование оценивать по наличию независимых параметров (числу степеней свободы), то это могут быть *системы первого, второго или более высокого порядка*. Для анализа и синтеза их параметров строятся эквивалентные схемы и модели функционирования.

Простейшими системами являются системы первого порядка. Их поведение может быть описано уравнениями вида (при постоянных коэффициентах) [1]:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad (4.1)$$

где $x(t)$ – переменная состояния; $u(t)$ – входное воздействие; a и b – постоянные коэффициенты; и если коэффициенты a и b являются функциями времени:

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + b(t)u(t). \quad (4.2)$$

Если $\dot{x}(t)$ принять в качестве выходной переменной, то уравнение (4.1) можно записать в виде:

$$y(t) = cx(t) + du(t), \quad (4.3)$$

где c и d – вещественные скалярные константы.

Нелинейные системы первого порядка с переменными коэффициентами описываются дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t)], u(t), t; \\ y(t) = q[x(t)], u(t), t. \end{cases} \quad (4.4)$$

Если система имеет несколько выходов:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t]; \\ y_n(t) = q_n[x(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), t]. \end{cases} \quad (4.5)$$

Технические системы, у которых массы перемещаются с ускорениями, относятся к *динамическим системам*, при этом возникают силы инерции, равные произведению масс на вторые производные от координат по времени. Такие системы относятся к *системам второго порядка*.

Поведение некоторых систем второго порядка можно описать (при входном воздействии $u(t)$ и выходном сигнале $y(t)$):

– дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2}; \quad (4.6)$$

– двумя связанными дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1u(t); \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2u(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

и уравнением

$$y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + du(t). \quad (4.8)$$

Модели функционирования реальных объектов, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями (4.6), могут быть применены лишь в частных случаях. В общем же случае такие модели описываются дифференциальными уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами (4.2). Классический метод решения таких уравнений состоит в отыскании функций в виде бесконечных полиномов и определении функции методом вариации постоянных.

Метод интегрирования с помощью степенных рядов применяется для интегрирования дифференциальных нелинейных уравнений второго и более высокого порядка, если уравнения необходимо упростить или уравнения не приводятся к тем видам уравнений, методы решения которых известны [1]. При этом полагают, что искомая функция может быть представлена в виде:

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (4.9)$$

где a_n ($n = 0, 1, 2, \dots, \infty$) – постоянные коэффициенты; n – число членов ряда; x_0 и y_0 – начальные значения переменных x и y .

Для применения этого метода интегрирования, необходимо иметь, например, значения функции $u(v-1)$ и производных от неё, где v – порядок системы при заданных в данных точках значениях аргумента. Кроме того, необходимо в каждом конкретном случае дополнительно исследовать, выполняется ли условие сходимости ряда.

4.3.2. Многомассовые динамические системы

В общем случае линеаризованная форма дифференциального уравнения для многомассовой динамической системы в отношении входной x и выходной y координат, имеет вид:

$$D(p)y = M(p)x. \quad (4.10)$$

Для составления дифференциального уравнения, описывающего поведение всей системы в целом необходимо, пользуясь уравнениями связей исключить из уравнений составляющих звеньев переменные и перейти к одному уравнению, определяющему поведение какой-либо одной, интересующей исследователя, выходной координаты в зависимости от внешних воздействий, приложенных к системе. Для получения решения используют представление передаточной функции через изображения искомой функции $f(t)$, получаемой в результате её преобразования по методу Лапласа

$$L_1[f(t)] = F_{\text{л}}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (4.11)$$

где $s = a + i\beta$ – комплексная переменная.

Функция $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция $F(s)$ – *изображением функции $f(t)$* . Если, например, $f(t) = (1-at)e^{-at}$ – оригинал, то

$$F_{\text{л}}(s) = \frac{s}{(s+a)^2} \text{ – изображение по Лапласу.}$$

Методика построения расчётной модели производится в следующей последовательности [1]: 1) построение принципиальной схемы агрегата; 2) построение эквивалентной схемы агрегата (схемы, на которой показаны полюсы твёрдых тел, точки приведённых масс и оси приведённых моментов инерции вращающихся масс объекта, векторы приведённых сил моментов и скоростей); 3) выбор системы отсчёта, направления координатных осей и точек их начала; 4) составление уравнений связей (стационарные и нестационарные голономные или неголономные связи); 5) выбор исходных уравнений динамики, в соответствии с которыми будут составляться уравнения движения рассматриваемой системы (уравнения Даламбера, Лагранжа, Аппеля, Гамильтона и др.); 6) составление выражения кинетической энергии; 7) составление

выражения обобщённой силы; 8) составление уравнений движения рассматриваемой системы в развёрнутом виде.

Голономные связи – это связи геометрические, в уравнения которых входят только координаты, если они стационарные, или координаты и время, если они нестационарные.

Неголономные связи – это дифференциальные связи, в уравнения которых кроме координат входят также производные от координат по времени.

В общем случае линеаризованная расчётная модель функционирования многомассовых систем, приведённая к системе нормальных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m; \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $u_1 = f_1(t)$, $u_2 = f_2(t)$, ..., $u_m = f_m(t)$ – составляющие вектора входных воздействий.

4.4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ КОНТРОЛЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Процесс выбора математической модели объекта заканчивается её *предварительным контролем* по следующим показателям:

- размерность;
- порядок (определяются порядки складываемых величин, мало-значительными слагаемыми пренебрегают);
- характер зависимостей (осуществляется проверка направления и скорости изменения одних величин при изменении других);
- экстремальные ситуации (оценивается возможное состояние системы при приближении параметров модели к минимальным и максимальным значениям);
- граничные условия;
- математическая замкнутость (проверяется, содержит ли модель необходимое число уравнений для определения её параметров и оценивается, что математическая модель даёт однозначное решение);
- физический смысл (осуществляется проверка физического содержания промежуточных соотношений);
- устойчивость модели (осуществляется проверка того, что варьирование исходных данных не приведёт к существенному изменению решения).

4.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

4.5.1. Передаточная функция и частотная характеристика системы

Поведение некоторых технических систем и их выходное значение можно описать дифференциальным уравнением с постоянными или переменными коэффициентами [1]:

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_n \dot{x} + a_0 x = b_m f^{(m)}(t) + \dots b_1 \dot{f}(t) + b_0 f(t), \quad (4.13)$$

где $f(t)$ – внешние (входные) детерминированные воздействия; $f^{(m)}(t)$, $\dot{f}(t)$ – производные от внешнего воздействия $f(t)$.

При постоянных коэффициентах общий интеграл этого уравнения состоит из двух частей: общего интеграла уравнения без правой части и частного интеграла уравнения, представляющего собой выражение, которое при подстановке его в левую часть уравнения превращает его в тождество. При постоянных коэффициентах a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 решение однородного уравнения $a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ имеет вид $x_{cb} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$, если все корни различны. Решение второй части нужно искать в виде указанного выше выражения.

При оценке динамических свойств исследуемых систем для упрощения принимают, что входное воздействие $f(t)$ представляет собой гармоническую функцию времени, т.е. функция $f(t)$ имеет вид:

$$A(t) = A_0 [\cos(\omega t + \varphi_0)],$$

где A_0 – амплитуда; ω – угловая частота; φ_0 – фаза.

Если фаза равна нулю, то

$$A(t) = A_0 \cos \omega t = \frac{A_0}{2} e^{j\omega t} + \frac{A_0}{2} e^{-j\omega t}, \quad (4.14)$$

при $j = \sqrt{-1}$.

Тогда частные решения уравнения (4.13) при постоянных значениях коэффициентов будут иметь вид:

$$x_{1b} = \frac{f_0}{2} \Phi(j\omega) e^{j\omega t}; \quad (4.15)$$

$$x_{2b} = \frac{f_0}{2} \Phi(-j\omega) e^{-j\omega t}. \quad (4.16)$$

С учётом подстановки выражения (4.15) в (4.13) и отделения в числителе и знаменателе этого выражения вещественную часть от мнимой, получим

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\text{где } A(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{bc - ad}{ac - bd} \right) = \operatorname{arctg} \left[\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right];$$

$$P(\omega) = \frac{ac + ab}{c^2 + d^2} = A(\omega) \cos \varphi(\omega); Q(\omega) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = A(\omega) \sin \varphi(\omega).$$

Функция $\Phi(j\omega)$ называется *передаточной функцией*.

Значения передаточной функции можно получить также в виде отношения изображений по Лапласу выходной и входной величин, т.е. с помощью выражения

$$F(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-pt} dt, \quad (4.17)$$

где $\psi(t)$ – оригинал функции; $F(p)$ – её изображение; $p = s + i\omega$ – комплексное переменное ($i = \sqrt{-1}$).

Применив преобразование Лапласа (4.17) к уравнению (4.13), получим

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}.$$

Следовательно, *передаточная функция представляет собой отношение изображения выходной координаты к изображению входной координаты при нулевых начальных условиях*.

Для характеристики поведения динамических систем прибегают обычно к стандартному гармоническому воздействию. Для того чтобы получить значение передаточной функции, достаточно в передаточную функцию системы вместо S подставить $j\omega$, т.е.

$$W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}.$$

Такого вида *передаточная функция называется частотной*.

Эту функцию можно преобразовать к такому виду:

$$W(j\omega) = V(\omega) + iV(\omega),$$

где $V(\omega)$ и $iV(\omega)$ – вещественная и мнимая составляющие частотной передаточной функции.

Если, например, $W(j\omega) = \frac{b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}$, то

$$V(\omega) = \frac{AB + a_1 b_1 \omega^2}{B^2 + a_1^2 \omega^2} \quad \text{и} \quad iV(\omega) = \frac{Bb_1 + Aa_1}{B^2 + a_1^2 \omega^2},$$

где $A = b_0 - b_1 \omega^2$, $B = a_0 - \omega^2$.

Таким образом, поведение системы, т.е. значение координаты, можно исследовать на основании изменения значений передаточной функции $W(a_1, a_2, b_0, b_1, b_2)$, которая является *оператором динамических систем*.

Если функция $f(x)$ является случайной, то необходимо искать стационарное решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, основанное на теории случайных функций. Согласно этой теории, следует искать не значение самой координаты, а плотность распределения вероятностей этой координаты.

Передаточные и частотные функции используются, например, для исследования систем автоматического управления и виброустойчивости процесса резания.

4.5.2. Понятие функционала и вариационного исчисления

Значения того или иного показателя (процесса), свойственного данной динамической системе, можно выразить аналитически. Обычно интенсивность изменения показателя определяется значением первой производной последнего по соответствующим переменным. При этом значение производной может зависеть не только от аргументов, но и от самих функций и производных от функций по аргументам. Так, в случае одной независимой переменной имеем [1]: $\frac{dJ}{dx} = F(x, y, y')$.

Отсюда

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx. \quad (4.18)$$

Функция F зависит не только от аргумента x , но и от самой функции и её производных. Такого рода функции называются *функционалами*. Задача при этом заключается в том, чтобы отыскать такую функцию $y = f(x)$, при которой функционал J от тех или иных параметров и показателей процесса, свойственных данной системе, принимал бы экстремальное значение $J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \min(\text{или } \max)$.

Одним из простейших методов, при помощи которых можно решить эту задачу, является прямой *метод вариационного исчисления* или *метод Рунца*. Метод заключается в том, что значение некоторого функционала J рассматривается на всевозможных линейных комбинациях

Одним из простейших методов, при помощи которых можно решить эту задачу, является прямой *метод вариационного исчисления* или *метод Рунца*. Метод заключается в том, что значение некоторого функционала J рассматривается на всевозможных линейных комбинациях

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x) \quad (4.19)$$

с постоянными коэффициентами, составленными из n первых функций некоторой выбранной последовательности $W_1(x), \dots, W_n(x)$, удовлетво-

ряющих начальным условиям. При этом коэффициенты α_i должны быть выбраны так, чтобы функционал J достигал экстремума, т.е. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ должны быть определены из системы уравнений $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$), где $\varphi = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, n)$ – функция, в которую превращается функционал J на линейных комбинациях (4.19). При $n \rightarrow \infty$ в случае существования предела функции получается точное, а при ограниченном n – приближённое решение.

Задача определения экстремума функций значительно усложняется, если величина, экстремальное значение которой требуется определить, выражается через функционал. Для решения такого рода задач применяются: *метод вариационного исчисления, принцип максимума и метод динамического программирования.*

Основной задачей *вариационного исчисления* является нахождение экстремума функционала (4.18). Предполагается, что функция F является однозначной и непрерывной вместе со своими частными производными до третьего порядка включительно при всех значениях x и y в некоторой области R плоскости и при всех конечных значениях $y', y = y_0$ при $f(x) = f(x_0)$; $y = y_1$, при $f(x) = f(x_1)$. Решить задачу можно, применив уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (4.20)$$

В общем случае, если функция $F(x, y, y')$ действительно содержит y' , то уравнение Эйлера (4.20) является уравнением второго порядка и его общий интеграл $f_1(x, C_1, C_2)$ содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 , определяемые из условий, что кривая проходит через заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) .

Для определения характера экстремума служит условие Лежандра, согласно которому при $F_{yy'} \geq 0$ имеет место минимум, а при $F_{yy'} \leq 0$ – максимум. В литературе [1] приведены решения отыскания экстремума интеграла от функционала, когда функционал зависит от нескольких переменных и первых производных от них по времени или функции, доставляющие экстремум функционалу, сами подчинены дополнительным условиям, т.е. имеет место условный экстремум.

Метод динамического программирования применяется для решения задач оптимального управления системами, поведение которых описывается при помощи дифференциальных уравнений. Особенность метода состоит в том, что для отыскания оптимального управления исследуемая операция разбивается на ряд последовательных шагов. При этом функционал, характеризующий качество работы динамической системы, выражается суммой функционалов на каждом шаге

$J = \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n, u_n)$ [1]. Оптимальное значение функционала $J_i^*(x_i)$ на лю-

бом i -ом шаге определяется из соотношения:

$$\begin{aligned} J_i^*(x_i) &= \min \left\{ f_0(x_i, u_i) + J_{i+1}^*[x_i + f(x_i, u_i)] \right\} = \\ &= \left\{ f_0(x_i, u_i^*) + J_{i+1}^*[x_i + f(x_i, u_i^*)] \right\}, \end{aligned}$$

где u_i^* – оптимальное управляющее воздействие; x_i – значение координат.

5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

5.1. Классификация, типы и задачи эксперимента

По числу переменных эксперименты классифицируются на одно- и многофакторные: при однофакторных изменению и регистрации под- лежит один фактор (одна независимая переменная), при многофактор- ных – несколько факторов или независимых переменных [8].

Объекты исследований в экспериментах делятся на статистиче- ские и детерминированные, управляемые и неуправляемые.

В статистических объектах отклик (случайная зависимая пере- менная y) находится в стохастической связи со случайными или неслу- чайными факторами x_1, x_2, \dots, x_n . Так в механообработке, примером свя- зи со случайными факторами является зависимость характеристик ка- чества готовых деталей от характеристик качества заготовок при их обработке, а связи с неслучайными факторами – зависимость характе- ристик качества готовых деталей от режимов обработки. *Стохастиче- ская связь проявляется* в том, что изменение независимой величины приводит к изменению закона распределения зависимой случайной величины. Простейшим её видом является связь, при которой с измене- нием независимой переменной изменяется математическое ожидание или среднее значение отклика.

Для детерминированных объектов характерны функциональные связи между неслучайными величинами, когда каждому значению ар- гумента соответствует строго определённое значение функции.

Управляемость объекта определяется возможностью воспроизве- дения на нём результатов опыта. Для проверки этого свойства можно провести эксперимент при некоторых выбранных уровнях исследуемых факторов, а затем повторить его несколько раз через неравные проме- жутки времени и сравнить результаты.

Воспроизводимость результатов характеризуется разбросом их значений. Если он не превышает некоторой заранее заданной величины (требований к точности эксперимента), то объект удовлетворяет требо- ванию воспроизводимости результатов эксперимента.

В зависимости от способа выбора уровней факторов (значений независимых переменных) эксперименты делятся на пассивные и активные. Эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте задаются исследователем, называется *активным*. Эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем называется *пассивным*.

Экспериментальные исследования классифицируют также на *качественные* (с целью установления только факта существования явления) и *количественные, лабораторные и промышленные*. В последнее время всё большее распространение получают *автоматизированные экспериментальные исследования*.

Различают также эксперименты: *отсеивающие, сравнительные* (сравнение двух или нескольких объектов и выбор лучшего из них по заданным критериям качества), *экстремальные* (отыскания экстремума функции отклика, по которому оптимизируются параметры объекта или режимы протекания процессов посредством автоматического управления), *описательные* (определение механизмов явлений и характера протекания процессов для их анализа и последующей постановки задач синтеза) и эксперименты по составлению диаграмм состояния (вариант описательных экспериментов).

Разновидностью экспериментальных исследований могут быть и различного рода *испытания*: предварительные заводские испытания опытного образца, приёмочные испытания доработанных образцов, подготавливаемых к массовому выпуску (из опытной партии или установочной серии); контрольные испытания при массовом производстве машин и испытания образцов после капитального ремонта [1]. На всех этапах испытаний выполняются разнообразные технологические, эксплуатационные и технические эксперименты, предусмотренные программами испытаний по различным видам оценок. По результатам испытаний принимаются решения о проведении доработки машин, улучшении их агрегатирования с энергетическими средствами, выпуске опытных партий для проверки и постановки на производство.

При всём необъятном многообразии целей, которые может поставить перед собой исследователь, *задачи эксперимента*, как правило, можно отнести к одному из указанных ниже типов [9]:

– *задача измерения некоторой величины при фиксированных условиях* (для получения справочных данных, которые потом будут использованы в теоретических или конструкторских расчётах);

– *задача проверки гипотезы* (подтвердить (или опровергнуть) с помощью эксперимента ту или иную теорию; доказать, что изделия, выполненные по новой технологии, превосходят по своим параметрам старые образцы; выявить факторы, влияющие на интересующую нас величину, например, срок службы прибора; обнаружить связь между различными характеристиками объектов (или подтвердить отсутствие

такой связи) и другое); задачи такого рода решаются по алгоритму статистической проверки гипотез;

- *задача выяснения механизма явления;*
- *задача оптимизации* (типичная задача конструкторских и технологических разработок);
- *динамические измерения;*
- *классификация наблюдений, или распознавание образов.*

Некоторые из перечисленных типов задач могут быть как конечной целью эксперимента, так и промежуточным этапом при решении задач более «высокого» уровня.

5.2. ОСНОВНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДОЛОГИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Экспериментальное исследование включает ряд этапов: формулирование цели, выдвижение гипотезы об исследуемом объекте, планирование эксперимента, проведение эксперимента, обработка и анализ результатов, проверка правильности выдвинутой гипотезы, выдвижение новой гипотезы, проверка условий окончания эксперимента, планирование нового эксперимента [1, 8]. Таким образом, исследование объекта состоит из повторяющихся циклов, причём от цикла к циклу растёт объём знаний об объекте, а выдвигаемые гипотезы всё более приближаются к действительности.

Формулировка цели эксперимента (постановка задачи) – важнейший и часто наиболее творческий этап в деятельности экспериментатора или разработчика новой техники и технологии. Именно цель определяет план проведения эксперимента и способ обработки полученных результатов, а также их использование для принятия решений.

Главная цель, которая ставится перед экспериментальными исследованиями, состоит в построении математических моделей объектов, т.е. в идентификации этих объектов.

Вследствие развития методов системного подхода и прикладных методов исследования сложных систем на основе построения их математических моделей в последние годы осуществляется всё более тесная связь теоретических исследований с экспериментальными, т.е. развиваются *комбинированные экспериментально-теоретические методы исследования.* Математическая модель в этом случае выступает связующим звеном теоретических и экспериментальных исследований.

К числу специальных методов экспериментирования относится также проведение эксперимента на ЭВМ, так называемое *имитационное моделирование (вычислительный эксперимент),* т.е. моделирование, воспроизводящее по специальной программе близкую к реальной картину работы объекта.

Натурные экспериментальные исследования составляют один из основных видов исследований, так как только они могут дать достоверную картину о явлениях и процессах. Но для получения по ним достаточно точных значений необходимых статистических характеристик обычно требуется проведение большого количества экспериментов, что связано со значительными затратами времени и материальных средств.

Заканчивается экспериментальное исследование решением задач анализа и синтеза: установлением основных свойств и закономерностей функционирования и установлением оптимальных значений параметров или режимов работы исследуемого объекта или системы.

В качестве показателей эффективности системы и её подсистем выбирают числовые характеристики, оценивающие степень их соответствия поставленным задачам. Обычно они определяются как функционалы от входных и выходных величин и параметров системы, например, различные технико-эксплуатационные характеристики, экономические показатели и др.

5.3. РАЗРАБОТКА ПЛАН-ПРОГРАММЫ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для сокращения продолжительности и повышения эффективности эксперимента необходимо до его проведения *установить интервалы между значениями факторов*. Вначале определяют общие пределы изменения независимых факторов, обусловленные их физической природой или возможностями оборудования. Например, применительно к технологии обработки металлов такими ограничениями являются: температура плавления или предел прочности исследуемого металла, предельные значения частот вращения и подачи станка и др. Затем определяют, как следует изменять уровни факторов внутри этих областей [1, 8].

Существует два основных критерия, на основе которых производится выбор точек, отвечающих условиям проведения опыта: 1) относительная точность данных на различных участках области планирования; 2) характер экспериментальной функции.

Во многих случаях получаемые данные имеют неодинаковую точность на различных участках области экспериментирования. Например, для многих механических систем испытания, проводимые при пониженной мощности или малом давлении, напоре, будут наименее точными.

Если анализ ошибок показывает, что на каком-то участке области экспериментирования данные вызывают наибольшие сомнения, то, естественно, стараются заполнить этот участок большим числом опытных точек.

Если точность измерений одинакова для всех факторов и отклика, то желательно, чтобы расстояние между точками на экспериментальной кривой было постоянным на всей её длине.

Выбор необходимых интервалов между точками производится не для того, чтобы получить симметричную или удобную кривую, а чтобы обеспечить на всех участках кривой одинаковую точность экспериментальных данных.

По существу все эксперименты невоспроизводимы: ни один образец или прибор после использования не возвращается к исходному состоянию. Но изменения в них в процессе эксперимента настолько малы, что их невозможно обнаружить. В этом смысле эксперимент считается воспроизводимым и допускает выбор последовательности условий его выполнения.

Имеется *два основных типа однофакторного эксперимента*: последовательный и рандомизированный (случайный).

Суть последовательного эксперимента заключается в том, что уровень фактора изменяется скачкообразно. После каждого шага производится анализ результатов и на основании этого анализа принимается решение о ходе дальнейшей работы.

Последовательный эксперимент целесообразен в следующих случаях [8]: 1) если известно, что он невоспроизводим; 2) когда испытываемая система (объект) имеет некоторые особенности, которые можно обнаружить лишь при получении данных в регулярной последовательности (при анализе стабильности технологического процесса механической обработки); 3) если продолжительность, стоимость или сложность экспериментов таковы, что рандомизированный эксперимент нецелесообразен.

Если уровень фактора меняется случайным образом, принимая то меньшие, то большие значения, *план эксперимента называется рандомизированным*. Основной целью рандомизации является сведение эффекта некоторого неслучайного фактора к случайной ошибке.

Рандомизация плана эксперимента может быть достигнута с помощью: 1) таблицы случайных чисел [10]; 2) «игрового» метода; 3) введения специальных блоков.

5.4. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ. ВИДЫ ПОДОБИЯ. ЧИСЛА ПОДОБИЯ

Выводы теории подобия строятся на основании исследования дифференциальных уравнений, описывающих течение изучаемого процесса.

При составлении дифференциального уравнения процесс рассматривают в произвольно выделенном элементарном объеме в течение произвольно выбранного малого интервала времени. Применительно к изучаемому в элементарном объеме процессу дается математическая формулировка соответствующего общего закона физики.

При составлении дифференциального уравнения отвлекаются от частных особенностей процесса, поэтому оно описывает целый *класс процессов*, в пределах которого действуют примененные физические законы. Для описания единичного процесса дифференциальное уравнение дополняют данными, характеризующими этот процесс, т.е. *условиями однозначности* [1, 8, 11, 12].

Условия однозначности включают: 1) геометрические размеры и форму объема, в котором протекает процесс; 2) физические свойства среды, существенные для рассматриваемого процесса; 3) граничные ус-

ловия, характеризующие взаимодействие среды с телами, ограничивающими объём, в котором протекает процесс; 4) начальное состояние системы, т.е. её состояние в момент, когда начинается изучение процесса.

Теория подобия позволяет распространить данные единичного опыта на определённую *группу подобных процессов*. Чтобы выделить из класса группу подобных процессов, нужно условия однозначности задать в форме произведения соответствующих параметров на постоянные числовые множители, т.е. создать подобие условий однозначности. *Подобие условий однозначности включает подобие*: геометрическое, временное, физических величин, граничных и начальных условий.

Геометрическое подобие объектов (систем) соблюдается, если отношение всех сходственных размеров двух сравниваемых объектов является величиной постоянной [12]: $l''_1/l'_1 = l''_2/l'_2 = \dots = K_\ell$, где $l'_1, l'_2 \dots$ – размеры, характеризующие первый объект; $l''_1, l''_2 \dots$ – размеры, характеризующие второй объект, подобный первому; K_ℓ – множитель линейного (геометрического) преобразования, сохраняющий постоянное значение для двух подобных объектов (при переходе к третьему объекту, подобному первому, множитель преобразования K_ℓ получает другое значение).

Временное подобие соблюдается, если отношение между сходственными интервалами времени процесса сохраняет постоянное значение [12]: $\tau''_1/\tau'_1 = \tau''_2/\tau'_2 = \dots = K_\tau$, где $\tau'_1, \tau'_2 \dots$ – интервалы времени в первом процессе; $\tau''_1, \tau''_2 \dots$ – интервалы времени во втором процессе, подобном первому; K_τ – множитель временного преобразования, сохраняющий постоянное значение для двух подобных объектов. Временное подобие процессов называют *гомохронностью* (однородностью во времени). Одновременность протекания процессов, являющаяся частным случаем гомохронности (при $K_\tau = 1$), называют *синхронностью*; в этом случае сходственные моменты времени совпадают.

Подобие физических величин соблюдается, если отношение значений этих величин для подобных процессов в сходственные моменты времени является величиной постоянной. Если значение физических величин не постоянно во всём объёме, охваченном процессом, то для подобных процессов должно соблюдаться *подобие полей физических величин*.

Поле физической величины называют совокупность мгновенных значений физической величины во всём объёме, охваченном процессом. *Подобие полей физических величин* соблюдается, если отношение значений этих величин для подобных процессов в сходственных точках объёма в сходственные моменты времени является величиной постоянной. Если рассматриваются векторные физические величины, то для подобных процессов направление их должно совпадать.

Подобие граничных условий определяется тем, что все значения величин, характеризующих эти условия на границах системы, для сходственных точек в сходственные моменты времени находятся в постоянных соотношениях.

Подобие начальных условий означает, что в момент, когда начинается изучение процесса (начальный момент), соблюдается подобие полей всех физических величин во всём объёме, охваченном изучаемым процессом.

Условия однозначности являются индивидуальными признаками различных процессов одного и того же класса. По этим индивидуальным признакам и различают между собой процессы.

Понятие подобия процессов значительно шире, чем понятие подобия условий однозначности. Подобие процессов распространяется на весь объём и на весь период их протекания. Подобие условий однозначности распространяется на весь объём только в начальный момент, а в последующие моменты условия однозначности определяют подобие только на границе.

Процессы подобны, если они описываются одним и тем же дифференциальным уравнением (или системой дифференциальных уравнений) при подобных условиях однозначности.

Функциональную зависимость между подобными процессами можно записать в общем виде [12]:

– для первого процесса

$$F(\ell', \tau', \rho' \dots) = 0; \quad (5.1)$$

– для второго процесса, подобного первому

$$F(\ell'', \tau'', \rho'' \dots) = 0 \text{ или } F(K_\ell \cdot \ell', K_\tau \cdot \tau', K_\rho \cdot \rho' \dots) = 0. \quad (5.2)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) описывают подобные процессы и не должны отличаться одно от другого. Следовательно, *для соблюдения подобия нужно найти и выдержать условия, при которых умножение переменных на постоянные множители не меняло бы уравнения.*

Числа подобия получают из дифференциальных уравнений любой степени сложности по следующей схеме. В качестве примера возьмём уравнение, выражающее второй закон механики (сила равна произведению массы на ускорение) [12]. Разделим обе части уравнения

$$f = m \frac{dw}{d\tau} \quad (5.3)$$

на правую часть; тогда обе части станут безразмерными величинами:

$$\frac{fd\tau}{mdw} = 1. \quad (5.4)$$

Аналогично уравнениям (5.1) и (5.2) запишем уравнение (5.4) для двух процессов:

$$\frac{f'd\tau'}{m'dw'} = 1; \quad (5.5)$$

$$\frac{f''d\tau''}{m''dw''} = 1. \quad (5.6)$$

Переменные уравнения (5.6) выразим через переменные уравнения (5.5) путём умножения их на соответствующие множители преобразования и, вынося постоянные K_f и K_w из-под знака дифференцирования, получим:

$$\frac{K_f K_\tau}{K_m K_w} \frac{f'd\tau'}{m'dw'} = 1. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.5) и (5.7) отличаются комплексом из произведения постоянных величин. Эти уравнения будут одинаковы только в том случае, если комплекс из произведений постоянных величин (множителей преобразования), входящий в уравнение (5.7), равен единице.

Если заменим множители преобразования в уравнении (5.7) соответствующими отношениями переменных, то получим другую форму уравнения, выражающего подобие процессов:

$$\frac{f'\tau'}{m'w'} = \frac{f''\tau''}{m''w''} = \dots \text{idem}. \quad (5.8)$$

Безразмерные комплексы, составленные по типу комплекса в соотношении (5.8), получили название *чисел подобия*.

Числа подобия обычно обозначают двумя первыми буквами фамилий учёных, известных своими работами в соответствующей области наук. Полученное число (5.8) называется числом Ньютона и определяет механическое подобие: $Ne = \frac{f\tau}{mw}$.

Числа подобия, представляющие собой отношение двух одноимённых величин и получающиеся непосредственно из условий задачи исследования, называют *параметрическими числами подобия*.

Физические величины, характеризующие процесс, могут иметь различное значение для разных точек объёма. В этом случае обычно пользуются усреднёнными значениями физической величины. Числа подобия, составленные из усреднённых значений физических величин, называют *усреднёнными числами подобия*.

Если в выражение числа подобия входит линейный размер, то выбирают тот размер, который наиболее полно характеризует систему, охватываемую процессом (например, диаметр при рассмотрении процесса движения жидкости по трубе). Линейный размер, включаемый в число подобия и являющийся наиболее характерным для рассматриваемой системы, называют *определяющим*, или *характерным линейным размером*.

Равенство определяющих чисел подобия (критериев) является условием подобия процессов.

Числа подобия, в состав которых входит хотя бы одна физическая величина, не входящая в условия однозначности, называют *неопределяющими*, или *определяемыми числами подобия*. *Равенство неопределяющих чисел подобия является следствием подобия процессов.*

В опытах нужно измерять все величины, входящие в числа подобия изучаемого процесса. Результаты опытов нужно представлять в виде уравнения подобия, т.е. в виде зависимости между членами подобия.

Вид функциональной зависимости между числами подобия определяется опытом. Обычно эта функциональная зависимость даётся в виде графика или в виде степенных функций [12].

5.5. ИЗМЕРЕНИЯ, ИХ ВИДЫ И КЛАССЫ

Измерение – это определение значения физической величины опытным путём при помощи специальных технических средств.

На практике задача измерения включает не только определение числа, выражающего отношение измеряемой величины к общепринятой единице измерения, но и определение при этом допущенной погрешности.

Непосредственный процесс измерения состоит из наблюдения и отсчёта.

Цель наблюдения – фиксация факта наступления какого-либо определённого события. После наступления ожидаемого события производится считывание показания прибора со шкалы лимба или цифрового табло, определение массы эталонного вещества (гирь) и т.д.

Наличие такой связи между отсчётом и значением измеряемой величины характеризуется *уравнением измерения*. По виду этих уравнений *измерения можно разделить на три группы*: прямые, косвенные и совместные [1, 8, 11].

При прямом измерении уравнение имеет вид:

$$y = Cx,$$

где y – значение измеряемой величины в принятых для неё единицах; C – цена деления шкалы или единичного показания цифрового табло, переводной коэффициент от единицы меры свойства эталонного вещества к значению измеряемой величины в единицах измеряемой величины; x – отсчёт по измерительному устройству (в делениях шкалы или непосредственно на цифровом табло) или количественная характеристика какого-либо свойства эталонного вещества (например, масса гирь при взвешивании).

При прямых измерениях искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных (измерение длины линейкой, углов – транспортиром или измерение какой-либо величины прибором, шкала которого проградуирована в единицах измеряемой величины).

Для косвенного измерения характерно уравнение

$$z = f(x, y, \dots; a, b, \dots),$$

где z – значение измеряемой величины в принятых для неё единицах; x, y, \dots – результаты прямых измерений; a, b, \dots – физические константы и постоянные приборов.

Примером *совместных измерений* может служить оценка параметров некоторой прямой $y = \alpha + \beta x$: тангенса угла её наклона β к оси абсцисс и значения ординаты α при нулевом значении абсциссы ($x = 0$). Аналогичные измерения одноимённых величин называются *совокупными*.

Измерения, при которых число опытов и соответственно число уравнений измерений равно числу измеряемых величин, называют *однократными*, если же число опытов и соответственно число уравнений измерения превышает число измеряемых величин – *многократными*. Измерения проводятся многократно, когда необходимо уменьшить случайную ошибку измерений.

В зависимости от точности результатов можно выделить три класса измерений [1, 8, 11]: 1) эталонные, результат которых должен иметь максимально возможную точность при достигнутом уровне техники и науки (измерения физических констант); 2) контрольно-поверочные, при которых ошибка результата не превышает заранее заданного допуска (измерения в поверочных или контрольно-измерительных лабораториях при поверке приборов); 3) технические, ошибка результатов которых определяется характеристиками измерительного комплекса.

Измерение, основанное на прямых измерениях одной или нескольких основных величин и (или) использовании значений физических констант и функциональных зависимостей, называется *абсолютным*. Размерность результата абсолютных измерений та же, что и измеряемой величины (например, измерение плотности тела).

Относительным называется измерение отношения величины к одноимённой величине, играющей роль единицы. Такое сравнение позволяет установить, во сколько раз (k) одна величина больше другой. Уравнение относительных измерений: $y = kx$. Примеры относительных измерений: измерение массы тела на весах, длины различного рода линейками, микрометрами, штангенциркулями; разности потенциалов – вольтметрами; силы тока – амперметрами и т.д.

В случае относительных измерений используются приборы, которые предварительно калибруются с помощью эталона единицы соответствующей величины. Таким образом, чтобы были возможны относительные измерения некоторых величин, необходимо создать эталоны единиц этих величин и с их помощью произвести калибровку приборов.

5.6. ОШИБКИ И ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ, ИХ ВИДЫ, ПРИРОДА ВОЗНИКНОВЕНИЯ, ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ

Ошибки измерения принято подразделять на систематические, случайные и грубые (промахи) [8].

Систематическая ошибка остаётся постоянной на протяжении одной серии измерений или изменяется по какому-либо закону (например, при взвешивании на чашечных весах с помощью неточных гирь).

Систематические ошибки в свою очередь классифицируются по их источникам и свойствам.

Источниками систематических погрешностей могут быть метод измерения, средства измерений и экспериментатор. Соответственно принято различать систематические погрешности на методические, инструментальные и личные.

По свойствам систематические погрешности делят на постоянные и закономерно изменяющиеся. Последние в свою очередь подразделяются на прогрессирующие, периодические и изменяющиеся по сложному закону. *Прогрессирующие погрешности* – это погрешности, монотонно возрастающие или убывающие в процессе измерений (изменение рабочего тока потенциометра из-за падения напряжения на клеммах питающего его аккумулятора). *Периодические погрешности* – погрешности, изменяющиеся с определённым периодом.

Систематические ошибки по характеру их проявления можно разделить на четыре группы [13]:

1. *Ошибки, природа которых известна, а величина может быть достаточно точно определена.* Они могут быть устранены введением соответствующих поправок. Если поправка на порядок (в 10 раз и более) меньше точности измерений, то учитывать её нет смысла. Часто принимают, что если поправка не превышает 0,005 от средней квадратической ошибки s результата измерений, то ею следует пренебречь. Эта рекомендация чрезмерно жёсткая, обычно можно пренебречь поправками, имеющими большее значение.

2. *Ошибки известного происхождения, но неизвестной величины* (погрешность измерительных приборов, которая определяется иногда классом точности прибора). Систематические ошибки данного типа не могут быть исключены.

3. *Неявные ошибки, о существовании которых можно и не подозревать*, хотя они могут быть весьма значительными и потому опасными.

Так, например, при определении плотности какого-то металла измерением объёма и массы образца можно получить грубую ошибку, если образец содержит внутри пустоты, например, пузыри воздуха, образовавшиеся при отливке.

Один из наиболее надёжных способов исключения таких погрешностей – проведение измерений той же величины другими методами и

в других условиях. Совпадение полученных результатов служит известной, хотя и не абсолютной гарантией их правильности.

4. *Ошибки, обусловленные свойствами объекта и не связанные непосредственно с измерительными операциями.*

Измеряется диаметр цилиндра, который считается круглым, но в действительности имеет форму овала (эллипса). Если измерить диаметр один раз в какой-либо плоскости и считать цилиндр круглым, то вычисленная по результатам этого измерения площадь сечения цилиндра будет содержать систематическую ошибку, определяемую степенью овальности цилиндра и выбранным для измерения диаметром. Действительный диаметр цилиндра будет характеризовать его среднее значение, полученное по результатам ряда измерений в различных плоскостях. При этом систематическая ошибка будет переведена в разряд случайных.

Случайная ошибка возникает в результате совместного влияния различных случайных факторов (вибрация, внешние поля, климатические явления и т.п.). Эти ошибки не могут быть учтены ни расчётным, ни опытным путём. Для оценки случайных ошибок используется аппарат теории вероятностей и математической статистики. С увеличением числа измерений случайная ошибка эксперимента уменьшается.

Грубая ошибка (промах) обусловлена часто недостаточным вниманием экспериментатора. Они возникают, например, из-за ошибки в записи, отсчёта по соседней шкале, неправильного включения прибора и т.п.

Полученный результат измерения имеет ценность только в том случае, если известна оценка погрешности этого результата и доверительная вероятность этой оценки погрешности. Различают абсолютную и относительную погрешности.

Абсолютная погрешность – это разность между измеренным x_i и истинным значением физической величины. Поскольку «истинное» значение величины установить невозможно, в метрологии пользуются так называемым «действительным» x_d значением, полученным с помощью образцового прибора.

Абсолютная погрешность измерения косвенной величины вычисляется по формуле

$$\Delta Y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i ,$$

где Y – результат косвенных измерений зависит от результатов прямых измерений x_1, x_1, \dots, x_n следующим образом $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и известны относительные погрешности физических величин x_1, x_1, \dots, x_n .

Более объективной оценкой результатов измерений является использование *среднеквадратичной погрешности*. Кроме того, установлено, что приведённая зависимость определения абсолютной погрешности косвенного измерения не изменяет своего вида, если вместо ΔY использовать σ_Y , а вместо Δx_i использовать σ_{x_i} .

Более полное представление о неточности измерения даёт значение *относительной погрешности* $\gamma = \frac{x_{\text{и}} - x_{\text{д}}}{x_{\text{д}}} = \frac{\Delta x}{x_{\text{д}}}$. Обычно $\Delta x \leq x_{\text{и}}, x_{\text{д}}$, $x_{\text{и}} \approx x_{\text{д}}$, поэтому $\gamma = \Delta x / x_{\text{д}}$, т.е. при вычислении относительной погрешности абсолютную погрешность можно относить к измеренному значению физической величины.

Абсолютная и относительная погрешности характеризуют измерительное средство (прибор) только при одном его показании. Полностью оценить качество прибора можно по его *приведённой погрешности*: $\gamma = \Delta x / x_{\text{н}}$, где $x_{\text{н}}$ – нормирующее значение (условно принятое значение, которое может быть равно верхнему пределу или диапазону шкалы и т.д.). По приведённой погрешности указывается *класс точности прибора* и обозначается на их шкале. Для определения соответствия прибора его классу точности, прибор периодически подвергают проверке, при которой определяют максимальное значение приведённой погрешности и *вариацию показаний* $\varepsilon = \delta x / x$, где δx – максимальная разность между показаниями прибора при прямом и обратном ходе; x – нормирующее значение. Вариация прибора должна быть меньше его приведённой погрешности (класса точности). Класс точности указан на панели прибора и может принимать следующий ряд значений: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 – прецизионные; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 – технические приборы. Менее точные приборы обозначения класса не имеют. Если на приборе указан класс точности 0,5, то это значит, что показания прибора правильны с точностью до 0,5 % от всего диапазона измерений по шкале прибора. Например, если вольтметр имеет шкалу, градуированную до 150 В, класс точности 0,5, то он даёт абсолютную основную погрешность не более $\pm 0,75$ В.

Максимальные погрешности, даваемые измерительными линейками, микрометрами и некоторыми другими приборами, иногда наносятся на самом приборе или указываются в прилагаемом к нему паспорте. Если таких указаний нет, точность измерений составляет не менее 0,2 цены деления шкалы прибора.

Постоянные систематические ошибки можно устранить методом двойного измерения (проводятся два измерения, при которых роли левой и правой частей установки последовательно меняются, например, весы) и методом компенсации (проведение измерений два раза таким образом, чтобы ошибка вошла в результаты один раз с одним знаком, а другой раз – с другим, например, термопары) [13].

Для предупреждения прогрессирующей погрешности используют два наблюдения, выполненных с фиксацией времени. Если результаты наблюдений E_1 и E_2 удовлетворяют зависимостям

$$E_1 = x + K\tau_1, \quad E_2 = x + K\tau_2,$$

где x – истинное значение измеряемой величины; K – коэффициент пропорциональности, учитывающий изменение погрешности измерения во времени; τ_1, τ_2 – моменты времени выполнения наблюдений, то

$$x = \frac{E_1\tau_2 - E_2\tau_1}{\tau_2 - \tau_1}.$$

5.6.1. Методика обработки прямых и косвенных измерений

Методика обработки прямых и косвенных измерений изложена в работе [14]. Приведём некоторые сведения из этой работы.

Наилучшей оценкой истинного значения величины X является *выборочное среднее значение*

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{n=1}^N x_N}{N}, \quad (5.9)$$

где x_N – отсчёт величины X ; N – число отсчётов.

Для оценки разброса отсчётов при измерении используется *выборочное среднее квадратическое отклонение* отсчётов

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (x_N - \langle x \rangle)^2}{N - 1}}. \quad (5.10)$$

Выборочное среднее является случайной величиной и его разброс относительно истинного значения измеряемой величины оценивается *выборочным средним квадратическим отклонением среднего значения*

$$S_{\langle x \rangle} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}. \quad (5.11)$$

Доверительным интервалом называется интервал $[\langle x \rangle - \Delta, \langle x \rangle + \Delta]$, который с заданной степенью достоверности включает в себя истинное значение измеряемой величины.

Доверительной вероятностью (надёжностью) результата серии наблюдений называется вероятность α , с которой доверительный интервал включает истинное значение измеряемой величины.

Случайную составляющую погрешности принято выражать как полуширину доверительного интервала. Размер доверительного интервала обычно задают в виде кратного $S_{\langle x \rangle}$ значения.

Тогда случайная составляющая погрешности многократных измерений определяется как:

$$\Delta_x = t_\alpha S_{\langle x \rangle}, \quad (5.12)$$

где t_α – безразмерный коэффициент доверия (коэффициент Стьюдента).

5.1. Значения коэффициента Стьюдента в зависимости от числа измерений

Число измерений	Надёжность					
	0,5	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,5	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,82	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,77	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,74	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,73	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,72	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,71	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,71	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,70	1,8	2,3	2,8	3,2	4,8
20	0,69	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
>20	0,67	1,6	2,0	2,5	2,8	3,3

Коэффициент t_α показывает, во сколько раз нужно увеличить $S_{\langle x \rangle}$, чтобы при заданном числе измерений получить заданную надёжность их результата. Коэффициент t_α определяют по статистическим таблицам (табл. 5.1).

Полная погрешность Δx прямых измерений равна квадратичной сумме её составляющих: инструментальной Δ_a и случайной Δ_x .

Обработку прямых измерений рекомендуется начинать с проверки отсчётов на наличие *промахов*. Из полученного ряда, содержащего N отсчётов, выбирается аномальный отсчёт x_k и вычисляется модуль его отклонения от среднего значения в долях выборочного среднего квадратического отклонения:

$$\Delta Z = \frac{|x_k - \langle x \rangle|}{S_x}, \quad (5.13)$$

Затем вычисляется вероятность этого отклонения, а также ожидаемое число n измерений, которые дадут отсчёты, имеющие отклонение Z не меньшее, чем испытуемый. Если получено $n < 0,5$ (при округлении до целого $n = 0$), то отсчёт x_k считается промахом. Эту процедуру можно изменить и вычислить ожидаемое число M отсчётов, среди которых будет хотя бы один аномальный. Если $M > N$, то отсчёт x_k считается промахом. Связь между M и Z приведена в табл. 5.2.

5.2. Отбор промахов по критерию Шовене

Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M
1,00	2	1,40	3	1,80	7	2,20	18	2,60	54
1,02	2	1,42	3	1,82	7	2,22	19	2,62	57
1,04	2	1,44	3	1,84	8	2,24	20	2,64	60
1,06	2	1,46	3	1,86	8	2,26	21	2,66	64
1,08	2	1,48	4	1,88	8	2,28	22	2,68	68
1,10	2	1,50	4	1,90	9	2,30	23	2,70	72
1,12	2	1,52	4	1,92	9	2,32	25	2,72	77
1,14	2	1,54	4	1,94	10	2,34	26	2,74	81
1,16	2	1,56	4	1,96	10	2,36	27	2,76	87
1,18	2	1,58	4	1,98	10	2,38	29	2,78	92
1,20	2	1,60	5	2,00	11	2,40	30	2,80	98
1,22	2	1,62	5	2,02	12	2,42	32	2,82	104
1,24	2	1,64	5	2,04	12	2,44	34	2,84	111
1,26	2	1,66	5	2,06	13	2,46	36	2,86	118
1,28	2	1,68	5	2,08	13	2,48	38	2,88	126
1,30	3	1,70	6	2,10	14	2,50	40	2,90	134
1,32	3	1,72	6	2,12	15	2,52	43	2,92	143
1,34	3	1,74	6	2,14	16	2,54	45	2,94	152
1,36	3	1,76	6	2,16	16	2,56	48	2,96	163
1,38	3	1,78	7	2,18	17	2,58	51	2,98	173

Алгоритм обработки прямых измерений:

1. Определить инструментальную погрешность.
2. Вычислить среднее значение серии измерений по формуле (5.9).
3. Вычислить среднее квадратическое отклонение отсчёта по формуле (5.10). Если промах устранён, то перейти к формуле (5.12), иначе к (5.11).
4. Проверить отсчёты на наличие промаха:
 - отобрать аномальный отсчёт;
 - вычислить его относительное отклонение по формуле (5.13);
 - определить ожидаемое число отсчётов, среди которых может быть аномальный, если это число больше числа отсчётов, то исключить аномальный отсчёт и перейти к формуле (5.9); иначе перейти к (5.12).
5. Вычислить выборочное среднее квадратическое отклонение среднего значения по формуле (5.11).

6. Определить коэффициент доверия для заданной надёжности и полученного числа отсчётов.

7. Вычислить случайную погрешность по формуле (5.12).

8. Вычислить полную погрешность.

9. После округлений результат обработки измерений записать в форме: $x = (\langle x \rangle \pm \Delta x)/Y$; $\delta = (\Delta x/\langle x \rangle) \cdot 100 \%$; α .

Иногда необходимо объединить результаты нескольких серий прямых измерений одной и той же физической величины.

Пусть результаты M измерений представлены в виде $x = \langle x_1 \rangle \pm \Delta_{x1}$; $x = \langle x_2 \rangle \pm \Delta_{x2}$; $x = \langle x_3 \rangle \pm \Delta_{x3}$; ...; $x = \langle x_M \rangle \pm \Delta_M$. Наилучшее значение $\langle x \rangle$ и его погрешность Δ_x вычисляются по формулам:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{m=1}^M w_m x_m}{\int_{m=1}^M w_m}; \quad \Delta x = \left(\frac{\int_{m=1}^M w_m}{M} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $w_m = 1/(\Delta x_m)^2$ – статистический вес каждой серии измерений.

Рассмотрим методику обработки косвенных измерений.

Пусть $u = f(x, y, \dots)$ функциональная зависимость между измеряемой величиной u и величинами x, y, \dots , значения которых найдены прямыми измерениями. Действительное значение $\langle u \rangle$ определяется как:

$$\langle u \rangle = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \dots). \quad (5.14)$$

Получим выражение для погрешности Δu . Если зафиксировать значения всех аргументов кроме одного, например x , то приращение функции при изменении её аргумента имеет вид:

$$\Delta_x u = f(\langle x \rangle + \Delta x, \langle y \rangle, \dots) - f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \dots). \quad (5.15)$$

Если значение Δx мало, то в интервале $[\langle x \rangle - \Delta x, \langle x \rangle + \Delta x]$ функцию $u = f(x)$ можно считать линейной.

Величина $\Delta_x u$ характеризует погрешность Δu , обусловленную погрешностью Δx . Аналогично определяются составляющие погрешности Δu , вносимые другими аргументами. Полная погрешность Δu косвенных измерений u вычисляется либо с помощью квадратичного суммирования, либо суммирования по модулю её составляющих, вносимых каждым аргументом:

$$\Delta u = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \dots)^{1/2}; \quad (5.16)$$

$$\Delta u = |\Delta x| + |\Delta y| + \dots \quad (5.17)$$

Соотношение (5.16) применяется в том случае, когда выполняются два условия. Во-первых, погрешность аргументов обусловлена влиянием многих факторов, среди которых нет преобладающего фактора. Во-вторых, погрешности аргументов статистически не связаны. В остальных случаях используется соотношение (5.17). Однако правило суммирования (5.17) часто приводит к завышенному значению погрешности косвенных измерений.

Алгоритм обработки косвенных измерений:

1. По известной зависимости измеряемой величины от её аргументов, значения которых найдены с помощью прямых измерений, вычислить действительное значение функции по формуле (5.14).

2. Вычислить составляющие погрешности как приращения функции по каждому аргументу по формуле (5.15) или найти частные производные по всем аргументам и вычислить составляющие погрешности.

3. Вычислить полную погрешность функции по формуле (5.16) или по формуле (5.17).

Правила округления приближенных чисел. Незначащими цифрами числа называются нули в начале десятичных дробей, меньших 1, и нули в конце числа, заменившие цифры, отброшенные после округления. Остальные цифры называются значащими.

Сомнительной цифрой результата измерения называется цифра, стоящая в разряде, соответствующем старшему разряду со значащей цифрой в значении погрешности. Цифры, стоящие слева от сомнительной называются *верными*, а справа – *неверными*.

Например, числа 586 ± 6 ; $0,00234 \pm 0,0002$; $1,00 \pm 0,03$; 2000 ± 30 содержат по три значащие цифры. При округлении числа $299\,793 \pm 1$ до значения $3 \cdot 10^5$ допущена погрешность 207, поэтому в полученном числе сотни являются сомнительной цифрой и, следовательно, последние два нуля – незначащие.

Погрешность обычно выражается одной значащей цифрой и лишь при особо ответственных измерениях – двумя.

Округление погрешности и действительного значения. Погрешность округляется до одной значащей цифры. Эта цифра является сомнительной, так как значение погрешности не имеет верных цифр.

Действительное значение округляется до цифры, разряд которой равен разряду значащей цифры погрешности. Последняя цифра действительного значения сомнительная, остальные цифры – верные.

При особо точных измерениях погрешность округляется до двух значащих цифр, если первая из них меньше 4-х и до одной цифры, если первая цифра больше 3-х. Иногда в качестве второй цифры оставляют 0 или 5.

В числовом значении измеряемой величины, считанном со шкалы прибора, записываются только верные цифры и сомнительная цифра, разряд которой определяется по значению инструментальной погрешности прибора.

Округление чисел. Лишние цифры у целых чисел заменяются нулями, а у десятичных дробей отбрасываются. Если заменяемая нулем или отбрасываемая цифра старшего разряда меньше 5, то оставшиеся цифры не изменяются. Если указанная цифра больше 5, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на 1. Если заменяемая нулем или отбрасываемая цифра равна 5, то округление производится следующим образом: последняя цифра в округлённом числе остаётся без изменения, если она чётная, и увеличивается на 1, если она нечётная.

Округление при вычислениях. При записи результатов промежуточных вычислений сохраняется одна запасная цифра – цифра, стоящая справа от сомнительной. При сложении и вычитании приближенных чисел разряд сомнительной цифры результата совпадает со старшим из разрядов сомнительных цифр слагаемых. Результат умножения и деления содержит столько значащих цифр, сколько их в исходном данном с наименьшим количеством значащих цифр. При возведении в степень (извлечении корня) приближенного числа результат должен иметь столько значащих цифр, сколько их в основании (подкоренном выражении). При логарифмировании в мантиссе сохраняется столько значащих цифр, сколько их в исходном числе. Если один из операндов точное число, то количество его цифр не влияет на округление результата операции. Если при вычислениях используются табличные данные, то все их цифры верные.

Приведём примеры округления результатов измерений.

Запись до округления	Запись после округления
123357 ± 678 А/м	123400 ± 700 А/м
123357 ± 678 В	$123,4 \pm 0,7$ кВ
$237,46 \pm 0,13$ мм	$237,5 \pm 0,1$ мм
$0,00283 \pm 0,00034$ кг	$(2,8 \pm 0,3) \cdot 10^3$

Квадратичное суммирование. Если при квадратичном суммировании одно из чисел меньше другого в 3 и более раз, то им можно пренебречь.

Пример 5.1. Вольтметром измерено 10 отсчётов напряжения U в электрической цепи. Вольтметр, класс точности которого $K = 2,5$, имеет максимальное значение шкалы, равное $A = 200$ В. Результаты измерений представлены в табл. 5.3. Необходимо обработать результаты измерений, обеспечив 98 % надёжность оценки напряжения.

5.3. Результаты измерения напряжения

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$U, \text{ В}$	145	140	145	105	130	150	150	155	175	160

Вычисляем инструментальную погрешность $\Delta a = \frac{KA}{100} = \frac{2,5 \cdot 200}{100} = 5$ В.

Для заданной доверительной вероятности $\alpha = 98$ % и количества отсчётов $N = 10$ определяем коэффициент доверия $t_{98; 10} = 2,8$ (см. табл. 5.1). Вычисляем среднее значение $\langle U \rangle = 146$ В. Вычисляем среднее квадра-

тическое отклонение отсчётов $S_U = \sqrt{\frac{\int (U_n - \langle U \rangle)^2}{N - 1}} = 18,6$ В.

Проверяем отсчёты на наличие промахов. Аномальным отсчётом является отсчёт № 4. Вычисляем нормированное отклонение U от сред-

него значения $z = \frac{|U_4 - \langle U \rangle|}{S_U} = \frac{|105 - 146|}{18,6} = 2,17$. Согласно табл. 5.2, ко-

личество опытов, при котором полученный отсчёт нельзя считать промахом, равно 17. Это число больше, чем $N = 10$. Следовательно, отсчёт № 4 является промахом и его нужно удалить из обрабатываемого ряда. Для нового ряда отсчётов напряжения вычисляем новое среднее значение и среднее квадратическое отклонение. Вычисляем слу-

чайную составляющую погрешности $S_{\langle U \rangle} = \frac{S_U}{\sqrt{N}} = \frac{12,7}{\sqrt{9}} = 4,23$ В, $\Delta_{\langle U \rangle} =$

$= t_{\alpha, N} S_{\langle U \rangle} = 2,9 \cdot 4,23 = 12,2$ В. Вычисляем полную погрешность: абсолютную $\Delta U = \sqrt{5^2 + 12,2^2} = 13 \oplus 10$ В и относительную $\delta U = \Delta U / \langle U \rangle = 10 / 150 = 6,6$ %. После округлений результат измерения напряжения записываем в виде: $U = 150 \pm 10$ В, $\alpha = 98$ %, $\delta = 7$ %.

Индивидуальные задания по этой теме приведены в прил. Б.

Пример 5.2. В трёх различных условиях измерено сопротивление одного и того же проводника. Результаты измерений представлены в виде: $R_1 = 11 \pm 2$ Ом, $R_2 = 12 \pm 2$ Ом, $R_3 = 10 \pm 3$ Ом. Необходимо объединить эти измерения.

Находим статистический вес (вклад) каждого измерения $w_1 = w_2 = 1 / \Delta R_1^2 = 1 / \Delta R_2^2 = 1 / 2^2 = 0,25$ 1/Ом²; $w_3 = 1 / \Delta R_3^2 = 1 / 3^2 = 0,11$ 1/Ом².

Находим новую оценку сопротивления $\langle R \rangle = \frac{\langle R_1 \rangle w_1 + \langle R_2 \rangle w_2 + \langle R_3 \rangle w_3}{w_1 + w_2 + w_3} = 11,2$ Ом. Находим новую оценку погрешности $\Delta R = \frac{1}{\sqrt{w_1 + w_2 + w_3}} = 1,28$ Ом. Результат совместной оценки сопротивления $R = 11 \pm 1$ Ом.

Пример 5.3. Прямыми измерениями найдены значения массы $m = 310 \pm 6$ г, радиуса $R = 104 \pm 5$ мм и линейной скорости $v = 30 \pm 1$ м/с равномерного вращения по окружности материальной точки. Необходимо оценить значение центробежной силы F , действующей на материальную точку.

Рассмотрим три способа расчёта погрешности косвенных измерений.

1. Алгоритм, использующий вычисление производных измеряемой величины по её аргументам.

Вычисляем среднее значение силы $\langle F \rangle = \frac{\langle m \rangle \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{0,31 \cdot 30}{0,104} = 2683$ Н \oplus 2,68 кН. Находим частные производные и вычисляем их

значения при средних значениях аргументов $\frac{\partial F}{\partial m} = \frac{\langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{30^2}{104} = 8,65 \text{ Н/м}$;

$$\frac{\partial F}{\partial R} = -\frac{\langle m \rangle \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle^2} = -\frac{310 \cdot 30^2}{104^2} = -25,8 \text{ Н/мм}; \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{2 \langle m \rangle \langle v \rangle}{\langle R \rangle} = \frac{2 \cdot 310 \cdot 30}{104} =$$

$= 179 \text{ Н·с/м}$. Вычисляем составляющие погрешности от каждого аргу-

мента $\Delta F_m = \left| \frac{\partial F}{\partial m} \right| \Delta m = 8,65 \cdot 6 = 51,9 \text{ Н}$; $\Delta F_R = \left| \frac{\partial F}{\partial R} \right| \Delta R = 25,8 \cdot 5 = 129 \text{ Н}$;

$\Delta F_v = \left| \frac{\partial F}{\partial v} \right| \Delta v = 179 \cdot 1 = 179 \text{ Н}$. Вычисляем полную погрешность: абсо-

лютную $\Delta F = \sqrt{51,9^2 + 129^2 + 179^2} = 227 \text{ Н} \oplus 0,2 \text{ кН}$ и относительную $\delta F = \Delta F / \langle F \rangle = 0,2 / 2,7 = 7 \%$. После округления записываем результат косвенных измерений $F = 2,7 \pm 0,2 \text{ кН}$, $\delta F = 7 \%$.

2. Алгоритм, использующий вычисление приращений измеряемой величины по её аргументам.

Вычисляем среднее значение силы $\langle F \rangle = \frac{\langle m \rangle \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{0,31 \cdot 30}{0,104} =$

$= 2683 \text{ Н} \oplus 2,68 \text{ кН}$. Вычисляем приращения функции по её аргумен-

там $\Delta F_m = |F(m + \Delta m, R, v) - F(m, R, v)| = \left| \frac{(0,31 + 0,006) \cdot 30^2}{0,104} - 2683 \right| = 51,6 \text{ Н}$;

$\Delta F_R = |F(m, R + \Delta R, v) - F(m, R, v)| = \left| \frac{0,31 \cdot 30^2}{0,104 + 0,005} - 2683 \right| = 123 \text{ Н}$; $\Delta F_v =$

$= |F(m, R, v + \Delta v) - F(m, R, v)| = \left| \frac{0,31 \cdot (30 + 1)^2}{0,104} - 2683 \right| = 182 \text{ Н}$. Вычисля-

ем полную погрешность: абсолютную $\Delta F = \sqrt{51,6^2 + 123^2 + 182^2} =$
 $= 226 \text{ Н} \oplus 0,2 \text{ кН}$ и относительную $\delta F = \Delta F / \langle F \rangle = 0,2 / 2,7 = 7 \%$. После округления записываем результат косвенных измерений $F = 2,7 \pm 0,2 \text{ кН}$, $\delta F = 7 \%$.

3. Алгоритм, использующий сложение абсолютных величин погрешностей.

Вычисляем среднее значение силы $\langle F \rangle = \frac{\langle m \rangle \langle v \rangle^2}{\langle R \rangle} = \frac{0,31 \cdot 30}{0,104} =$

$= 2683 \text{ Н} \oplus 2,68 \text{ кН}$. Вычисляем относительные погрешности аргументов

$\delta m = \Delta m / \langle m \rangle = 6 / 310 = 0,019 \oplus 2 \%$; $\delta R = \Delta R / \langle R \rangle = 5 / 104 = 0,048 \oplus 5 \%$;

$\delta v = \Delta v / \langle v \rangle = 1/30 = 0,033 \oplus 3 \%$. Вычисляем относительную погрешность функции, учитывая формулы связи абсолютной и относительной погрешности при косвенных измерениях (табл. 5.4).

Имеем: $\delta F = \delta m + \delta R + 2\delta v = 2 + 5 + 2 \cdot 3 = 13 \%$. Вычисляем абсолютную погрешность функции $\Delta F = \langle F \rangle \delta F = 2,68 \cdot 0,13 = 0,349$ Н. После округления записываем результат косвенных измерений $F = 2,7 \pm 0,3$ кН, $\delta F = 11 \%$.

5.4. Связь абсолютной и относительной погрешности при косвенных измерениях

Функциональная связь	Абсолютная погрешность	Относительная погрешность
$u = x + y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\delta u = (\Delta x + \Delta y)/(x + y)$
$u = x - y$	$\Delta u = \Delta x + \Delta y$	$\delta u = (\Delta x + \Delta y)/(x - y)$
$u = xy$	$\Delta u = y\Delta x + x\Delta y$	$\delta u = \delta x + \delta y$
$u = x/y$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = \delta x + \delta y$
$u = x^n$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = n\delta x$
$u = \sqrt[n]{x}$	$\Delta u = u\delta u$	$\delta u = \delta x/n$
$u = e^x$	$\Delta u = u\Delta x$	$\delta u = \Delta x$
$u = \ln(x)$	$\Delta u = \delta x$	$\delta u = \delta x/x$
$u = \sin(x)$	$\Delta u = \cos(x)\Delta x$	$\delta u = \text{ctg}(x)\Delta x$
$u = \cos(x)$	$\Delta u = \sin(x)\Delta x$	$\delta u = \text{tg}(x)\Delta x$
$u = \text{tg}(x)$	$\Delta u = \Delta x/\cos^2(x)$	$\delta u = 2\Delta x/\sin(2x)$
$u = \text{ctg}(x)$	$\Delta u = \Delta x/\sin^2(x)$	$\delta u = 2\Delta x/\sin(2x)$

5.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

В работе [8] приводится формула для расчёта необходимого числа измерений:

$$n = \frac{t_{\alpha} w^2}{k^2},$$

где k – заданный коэффициент, показывающий долю предельной ошибки от среднего арифметического значения величины x ; w – коэффициент вариации.

Значение k можно определить исходя из практических соображений. В частности, для испытания стойкости режущего инструмента целесообразно принимать среднее значение $k = 0,2$. При меньших значениях k существенно увеличивается объём испытаний. Значениями w также можно задаваться исходя из имеющегося опыта подобных испытаний.

6. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Обычно технологические процессы протекают в условиях непрерывно меняющейся обстановки: вынужденные простои машин, связанные с поломкой или техническим обслуживанием, неравномерность работы транспорта, изменение внешних условий (например, метеорологических) и т.д. Те или иные события могут произойти или нет. В связи с этим приходится анализировать случайные, вероятностные или стохастические связи, в которых каждому аргументу соответствует множество значений функции.

Наблюдения показывают, что, несмотря на случайный характер связи, рассеивание параметров имеет вполне определённую закономерность. Для таких статистических законов теория вероятности позволяет представить не исход одного какого-либо события, а средний результат случайных событий, и тем точнее, чем больше число анализируемых явлений.

Теория вероятности изучает случайные события, математическая статистика же занимается способами обработки и анализа эмпирических событий.

Основной задачей статистики является подбор теоретических кривых по имеющемуся эмпирическому закону распределения исследуемого параметра.

Эти две родственные науки составляют единую математическую теорию массовых случайных процессов, широко применяемую в научных исследованиях.

6.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. АКСИОМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Под *случайной величиной* понимают величину, принимающую в результате испытания значение, которое принципиально нельзя предсказать исходя из условий опыта. Изменение случайной величины от опыта к опыту связано со случайными факторами.

Различают *дискретные* и *непрерывные случайные величины*. Возможные значения дискретных случайных величин можно заранее перечислить. Значения непрерывной случайной величины не могут быть заранее перечислены, они непрерывно заполняют некоторый промежуток. Чтобы полностью охарактеризовать случайную величину, необходимо не только указать, какие значения она может принимать, но и как часто.

Пусть дискретная случайная величина X принимает в результате опыта значения x_1, x_2, \dots, x_n . Отношение числа опытов m , в результате которых случайная величина X приняла значение x_i , к общему числу произведённых опытов n называется *частотой появления события* $X = x_i$. Частота m/n является случайной величиной и меняется в зависимости от количества произведённых опытов. Но при большом числе опытов она имеет тенденцию стабилизироваться около некоторого значения p_i , называемого *вероятностью события* $X = x_i$: $p_i = P(X = x_i) \approx m/n$ [13, 14].

В математической статистике важное значение имеет понятие о *частоте события* $y(x)$, представляющее собой отношение случаев $n(x)$, при которых имело место событие, к общему числу событий n .

Суммой нескольких событий $(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$ называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Перечислим *аксиомы теории вероятностей*, которые были сформулированы А.Н. Колмогоровым:

1. Вероятность появления случайного события A является неотрицательным числом: $P(A) \geq 0$.

2. Вероятность достоверного события U равна единице: $P(U) = 1$, а вероятность невозможного события V – нулю.

3. Вероятность того, что наступит хотя бы одно из нескольких несовместных событий A_1, A_2, \dots, A_n равна сумме вероятностей этих событий (теорема сложения вероятностей):

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Произведением нескольких событий A_1, A_2, \dots, A_n называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Случайные события A_1, A_2, \dots, A_n называются *независимыми*, если вероятность любого из них не зависит от того, произойдёт или нет любое из остальных событий. Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$.

Событие A называется *зависимым от события* B , если вероятность события A меняется в зависимости от того, произошло событие B или нет. Вероятность события A , вычисленная при условии, что произошло другое событие B , называется *условной вероятностью события* A и обозначается $P(A/B)$.

6.2. ГЕНЕРАЛЬНАЯ И ВЫБОРОЧНАЯ СОВОКУПНОСТИ

Множество изменяющихся входных и выходных переменных и переменных состояния того или иного объекта образуют *генеральную совокупность*, т.е. совокупность всех возможных их значений в условиях данного эксперимента.

Для получения сведений о генеральной совокупности осуществляют отбор (измерение) ограниченного числа выборок из генеральной совокупности по тому или иному плану. Одна или несколько таких выборок образуют *статистический массив*. Обычно применяются *две основные схемы получения выборок*: наблюдается одновременно достаточно много объектов или один и тот же объект наблюдается много раз (в течение определённого промежутка времени) и при этом измеряется некоторое количество показателей – случайных величин или случайных функций. В соответствии с этим *выборка может быть единовременной или текущей* [1, 8, 11].

Для обеспечения достоверной оценки показателей по выборочным наблюдениям необходимо, чтобы все эксперименты были взаимно независимы. Требуемая репрезентативность (представительность) выборочных наблюдений имеет место только при постоянных, не изменяющихся условиях эксперимента, случайности места и времени взятия выборки и малости самой выборки по сравнению с генеральной совокупностью. Выборка называется *репрезентативной* (представительной), если она даёт достаточное представление об особенностях генеральной совокупности. Если о генеральной совокупности ничего не известно, единственной гарантией репрезентативности может служить случайный отбор.

Отмеченные условия удаётся создать при проведении лабораторных опытов или в хорошо отлаженных производственных условиях с управляемыми факторами. Выборки можно брать одновременно (например, на многих однотипных машинных агрегатах, работающих в одинаковых условиях) или последовательно через равные промежутки времени наудачу от того или иного агрегата. На такую процедуру накладывается лишь два ограничения: 1) общий промежуток осуществления замеров для анализа не должен быть слишком большим, чтобы не произошло изменений в самом процессе (чтобы не изменились параметры состояния объекта или системы) из-за износа инструмента и других причин; 2) число выборок (отобранный массив объектов) должно быть достаточно большим для получения достоверных статистических оценок.

6.2.1. Вычисление выборочных характеристик. **Числовые характеристики выборки**

В результате проведения n экспериментов со случайной величиной ξ получаем n выборочных значений $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Вся совокупность этих значений называется *выборкой*.

После оценки погрешностей измерений физической величины (см. пример 5.1) получаем выборку. Первичная обработка данных выборки состоит в отыскании максимального x_{\max} и минимального x_{\min} значений выборки (в Mathcad они вычисляются соответственно функциями $\max(\xi)$ и $\min(\xi)$), размаха варьирования $R = X_{\max} - X_{\min}$, а также в построении вариационного ряда – массива выборочных значений, записанных в порядке возрастания. Для выполнения этих вычислений в Mathcad предназначены соответственно функции $\max(A)$, $\min(A)$ и $\text{sort}(A)$ [15].

Промежутки $[x_{\min}, x_{\max}]$ разбивают на m интервалов группировки (чаще всего одинаковой длины, $m = 7 - 20$) и подсчитывают число n_j выборочных значений, которые попали в j -й интервал. Теперь каждый интервал группировки $\Delta_j = (a_j, b_j)$ представлен своими левой a_j и правой b_j границами и числом r_{ij} элементов выборки, принадлежащих ему.

Каждый интервал удобно представлять не двумя границами, а одним числом – срединным значением.

Если $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ – длины интервалов группировки, а $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ – их середины и $h_j = n_j/n$ – относительные частоты попадания наблюдений в j -й интервал группировки, то можно построить график ступенчатой функции: $f(x) = h_j / \delta_j, x \in \Delta_j, j = 1, 2, \dots, m$. Этот график называется *гистограммой*.

Следующие четыре функции вычисляют числовые характеристики выборки, содержащейся в массиве A размерности mn .

Функция $\text{mean}(A)$ вычисляет значение *выборочного среднего*

$$\text{mean}(A) = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij} .$$

Функция $\text{var}(A)$ вычисляет смещённую точечную оценку дисперсии, называемую *выборочной дисперсией*

$$\text{var}(A) = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (A_{ij} - \text{mean}(A))^2 .$$

Функция $\text{stdev}(A)$ определяет *среднеквадратичное отклонение*:

$$\text{stdev}(A) = \sqrt{\text{var}(A)} .$$

Для комплексных выборочных значений выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$\text{var}(A) = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} |A_{ij} - \text{mean}(A)|^2 .$$

Функция $\text{median}(A)$ вычисляет *медиану* – величину, меньше и больше которой в выборке содержится одинаковое количество элементов.

Функция $\text{cvar}(A, B)$ вычисляет значение *выборочной ковариации*

$$\text{c var}(A) = \frac{1}{mn} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} (A_{ij} - \text{mean}(A))(B_{ij} - \text{mean}(B)) .$$

Функция $\text{corr}(A, B)$ определяет *коэффициент корреляции*

$$\text{corr}(A, B) = \frac{\text{c var}(A, B)}{\sqrt{\text{var}(A)}\sqrt{\text{var}(B)}} .$$

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, с помощью описанных выше функций вычислены числовые характеристики этих выборочных данных.

$$vmin := \min(v) \quad vmin = 120.991$$

$$vmax := \max(v) \quad vmax = 180.482$$

$$razmax := vmax - vmin \quad razmax = 59.491$$

$$v = \text{sort}(v)$$

$$vmean := \text{mean}(v) \quad vmean = 149.849$$

$$vvar := \text{var}(v) \quad vvar = 97.782$$

$$vstdev := \text{stdev}(v) \quad vstdev = 9.888$$

К числовым характеристикам выборки относятся *показатели положения* (среднее значение выборки, выборочная медиана, минимальный и максимальный элементы выборки, а также верхняя и нижняя квартили), *разброса* (дисперсия выборки (выборочная дисперсия), стандартное отклонение, размах выборки, межквартильный размах, коэффициент эксцесса (выборочный эксцесс) и *асимметрии* (коэффициент асимметрии)).

Среднее значение выборки вычисляется по формуле $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

В Mathcad для вычисления выборочного среднего значения выборки, сохранённой в матрице A , предназначена функция $\text{mean}(A)$.

Выборочная медиана есть решение уравнения $F_n(x) = 0,5$, т.е. выборочная медиана – это выборочная квантиль уровня 0,5. Выборочная медиана разбивает выборку пополам: слева и справа от неё оказывается одинаковое число элементов выборки. Если число элементов выборки чётно, $n = 2k$, то выборочную медиану определяют по формуле $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. При нечётном объёме выборки в качестве значения медианы

принимают x_{k+1} . В Mathcad для вычисления выборочной медианы выборки, сохранённой в матрице A , предназначена функция $\text{median}(A)$.

К показателям положения относятся *минимальный и максимальный элементы выборки*, а также *верхняя и нижняя квартили* (они ограничивают зону, в которой сосредоточены 50 % элементов выборки).

Для вычисления минимального и максимального элементов выборки, размещённой в матрице A , в Mathcad предназначены соответственно функции $\text{min}(A)$ и $\text{max}(A)$.

Выборочной дисперсией называется величина $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Однако

в статистике чаще в качестве выборочной дисперсии используется величина

на $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. В Mathcad для определения дисперсии выборки, сохранённой в матрице A предназначена функция $\text{var}(A)$, а величину s^2 можно вычислить по формуле $s^2 = \frac{n}{n-1} \text{var}(A)$.

Стандартное отклонение рассчитывается по формуле $\sigma = \sqrt{s^2}$.

Межквартильный размах равен $x_{0,75} - x_{0,25}$, где $x_{0,75}$ – 75 %-я квартиль, решение уравнения $F_n(x_{0,75}) = 0,75$; $x_{0,25}$ – 25 %-я квартиль, решение уравнения $F_n(x_{0,25}) = 0,25$.

Выборочный эксцесс определяется по формуле $E = \mu^4 (s^2)^{-2} - 3$, где $\mu^4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$ – величина выборочного центрального момента 4-го порядка.

Коэффициент асимметрии $a = \mu^3 / \sigma^3$, где $\mu^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$ –

величина выборочного центрального момента 3-го порядка.

Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление характеристик выборочных данных.

$$n := 250$$

$$s2 := \frac{n}{n-1} \times \text{var}(v) \quad s2 = 98.174$$

$$\sigma := \sqrt{s2} \quad \sigma = 9.908$$

$$\mu3 := \frac{1}{n} \times \sum (v - \text{vmean})^3 \quad \mu4 := \frac{1}{n} \times \sum (v - \text{vmean})^4$$

$$E := \frac{\mu4}{s2^2} - 3 \quad E = 0.136 \quad \alpha := \frac{\mu3}{\sigma^3} \quad \alpha = -0.055$$

Для того чтобы вычислить величины μ^3 и μ^4 необходимо нажать на пиктограмму «Сумма векторов», после чего под знаком суммы \sum набрать с клавиатуры соответствующее выражение.

Пример 6.1. Вычислить эксцесс случайной величины ξ с заданным распределением. Ниже приведены вычисления эксцесса и графики соответствующих плотностей вероятностей для двух случайных величин,

первая имеет распределение Лапласа, плотность вероятностей которого $p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, а вторая распределена равномерно на отрезке $[-1, 1]$. Для сравнения вместе с графиками плотности вероятностей исследуемых случайных величин приведён график плотности вероятностей нормального распределения $N(0, 1)$.

$$p(x) := \frac{1}{2} \cdot \exp(-|x|)$$

$$p_2(x) := \frac{1}{2}$$

$$\mu_{21}(\xi) := 2 \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx$$

$$\mu_{22}(\eta) := \int_{-1}^1 x^2 \cdot p_2(x) dx$$

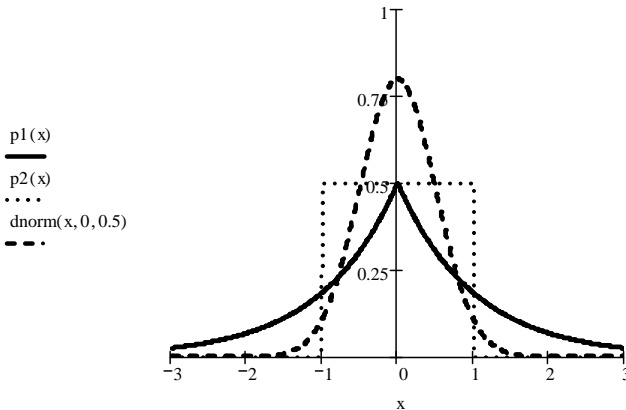
$$\mu_{41}(\xi) := 2 \cdot \int_0^{\infty} x^4 \cdot p(x) dx$$

$$\mu_{42}(\eta) := \int_{-1}^1 x^4 \cdot p_2(x) dx$$

$$\gamma_1(\xi) := \frac{\mu_{41}(\xi)}{\mu_{21}(\xi)^2} - 3 \quad \gamma_2(\eta) := \frac{\mu_{42}(\eta)}{\mu_{22}(\eta)^2} - 3$$

$$\gamma_1(\xi) \rightarrow 3 \quad \gamma_2(\eta) \rightarrow \frac{-6}{5}$$

$$p_1(x) := \frac{1}{2} \cdot (\exp(-|x|)) \quad p_2(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$



Из приведённых вычислений видно, что график плотности вероятностей распределения с отрицательным эксцессом имеет более «сглаженный» максимум, чем у плотности вероятностей нормального распределения, а плотность вероятностей с положительным эксцессом, наоборот, «острее», чем плотность вероятностей нормального распределения.

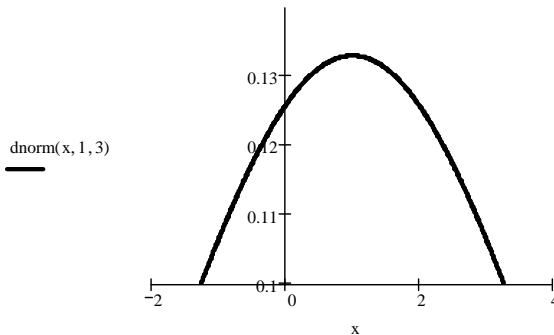
Пример 6.2. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение $N(1, 3)$. Найти коэффициент асимметрии.

$$a := 1 \quad \sigma := \sqrt{3}$$

$$\mu_3(a, \sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^3 \times \frac{1}{\sqrt{2 \times \pi \times \sigma}} \times \exp \left[\frac{-1}{2} \times \left(\frac{x - a}{\sigma} \right)^2 \right] dx \quad \mu_3(a, \sigma) \rightarrow 0$$

$$\mu_2(a, \sigma) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2 \times \pi \times \sigma}} \times \exp \left[\frac{-1}{2} \times \left(\frac{x - a}{\sigma} \right)^2 \right] dx \quad \mu_2(a, \sigma) \rightarrow 3$$

$$\beta(\xi) := \frac{\mu_3(a, \sigma)}{\mu_2(a, \sigma)^{\frac{3}{2}}} \quad \beta(\xi) \rightarrow 0$$



Из приведённых вычислений видно, что коэффициент асимметрии нормального распределения равен нулю.

6.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭМПИРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ИХ ТАБЛИЧНОЕ И ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Дискретную случайную величину можно полностью задать *вероятностным рядом*, указав вероятность p_i для каждого значения x_i :

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения*.

Для непрерывных случайных величин изучается вероятность того, что в результате опыта значение случайной величины попадёт в некоторую заранее намеченную совокупность чисел. Пусть вероятность события $X < x$, где x – произвольное действительное число, а X – случайная величина. Эта вероятность является функцией от x : $P(X < x) = F(x)$ и называется *функцией распределения* случайной величины [1, 8, 11].

В виде функции распределения можно задать распределение непрерывной или дискретной случайной величины (рис. 6.1, а, б). Функция распределения дискретной случайной величины всегда есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений (рис. 6.1, б). Сумма всех скачков равна 1.

Для непрерывной случайной величины часто употребляется производная функции распределения – *плотность распределения случайной величины* X . Плотность распределения является неотрицательной функцией (рис. 6.2). Площадь, ограниченная осью x , прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ и кривой плотности распределения, равна вероятности того, что случайная величина примет значения из интервала $x_1 \dots x_2$.

Функция распределения $F_n(x) = n_x / n$, получаемая по выборке, называется *эмпирической* или *выборочной функцией распределения*. Для каждой выборки эмпирическая функция распределения будет своей, но все эмпирические функции распределения одной и той же случайной величины будут иметь нечто общее, что является информацией о функции распределения этой случайной величины.

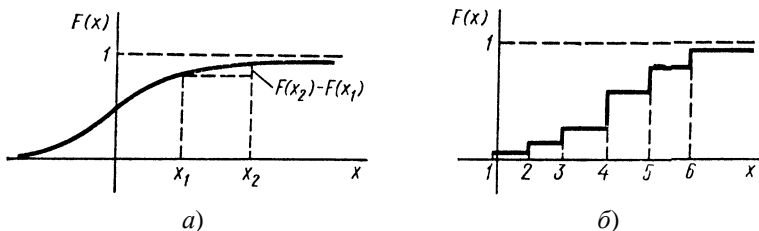


Рис. 6.1. Функция распределения непрерывной случайной величины (а) и дискретной случайной величины (б)

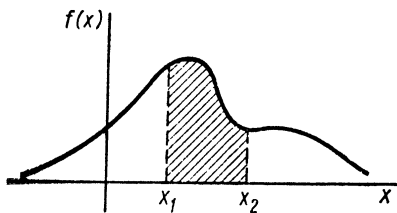


Рис. 6.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины

При обработке выборок больших объёмов используют метод «сгруппированных данных»: выборка объёма n преобразуется в статистический ряд. Для этого весь диапазон изменения случайной величины в выборке $x_{\min} \dots x_{\max}$ делится на k равных интервалов. Число интервалов можно выбирать по полуэмпирической формуле $k = 1 + 3,21 \lg n$ с округлением до ближайшего целого. Длина интервала k равна $h = (x_{\max} - x_{\min}) / k$. Статистический ряд записывается в виде табл. 6.1.

График, построенный по данным табл. 6.1 (рис. 6.3), называется *гистограммой эмпирического или выборочного распределения*. На рисунке 6.4 приведён график функции $F_n(x)$, построенный по сгруппированным данным.

6.1. Статистический ряд

Интервал	Длина интервала	Середина интервала $x_i^* = (x_{i-1} + x_i) / 2$	Число точек в интервале n_i	Относительная частота попадания случайной величины в i -й интервал $p_i^* = n_i / n$
1	(x_{\min}, x_1)	x_1^*	n_1	p_1^*
2	(x_1, x_2)	x_2^*	n_2	p_2^*
...
i	(x_{i-1}, x_i)	x_i^*	n_i	p_i^*
...
k	(x_{k-1}, x_{\max})	x_k^*	n_k	p_k^*
Σ			n	1

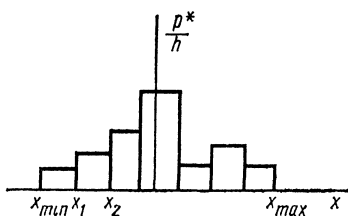


Рис. 6.3. Гистограмма распределения

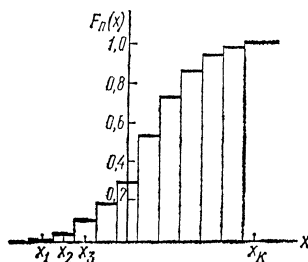


Рис. 6.4. График функции $F_n(x)$, построенный по сгруппированным данным

Величина интервала группировки существенно влияет на вид гистограммы. При малой их ширине в каждый интервал попадает незначительное число наблюдений или даже не попадает ни одного, в результате гистограмма становится сильно «изрезанной» и плохо передаёт основные особенности изучаемого распределения. При слишком больших интервалах группировки также скрадываются характерные черты группировки.

Иная форма графического представления группированных данных – полигон частот. *Полигон частот* представляет собой ломаную линию, соединяющую точки с абсциссами, равными серединам интервалов группировки, и ординатами, равными соответствующим частотам.

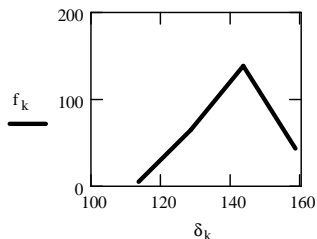
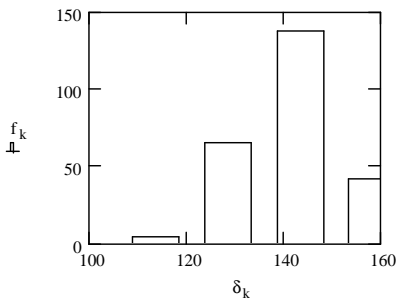
Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий гистограммы и полигоны частот.

$mx := 4$

$$\Delta := \frac{\text{razmax}}{mx} \quad \Delta = 14.873$$

$j := 0..mx \quad k := 0..mx - 1$

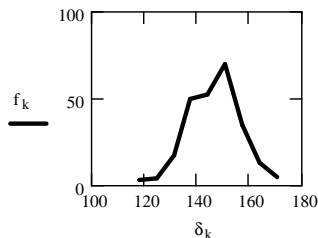
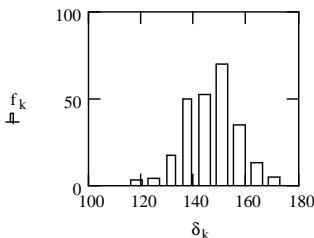
$$\delta_j := v_{\min} + \frac{\Delta}{2} \times (2 \times j - 1) \quad f := \text{hist}(\delta, v)$$



$my := 9 \quad \Delta := \frac{\text{razmax}}{my} \quad \Delta = 6.61$

$j := 0..my \quad k := 0..my - 1$

$$\delta_j := v_{\min} + \frac{\Delta}{2} \times (2 \times j - 1) \quad f := \text{hist}(\delta, v)$$



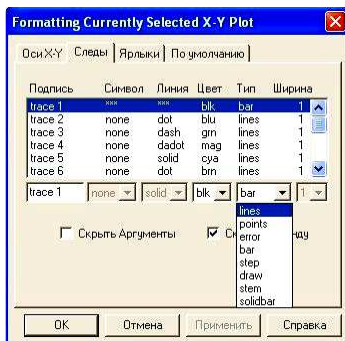


Рис. 6.5. Преобразование графического изображения гистограммы в полигон частот

Для того чтобы построить полигон частот необходимо скопировать гистограмму и выделить на ней ось ординат. Двойным щелчком по этой оси открывается диалоговое окно (рис. 6.5) на вкладке «Следы». Далее необходимо изменить свойства подписи «trace1», в частности указать тип «lines».

6.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО И ЭМПИРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

На практике случайную величину часто определяют при помощи *числовых характеристик* – чисел (вещественных), выражающих характерные особенности случайной величины, называемых *моментами случайной величины*.

Начальный момент k-го порядка определяется формулой [1, 8, 11, 15]:

– для дискретной случайной величины $m_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i, k = 1, 2, \dots;$

– для непрерывной случайной величины $m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$

При $k = 1$ начальный момент называется *математическим ожиданием (средним значением)* случайной величины. Математическое ожидание обозначают $M[X], m_x, m$ и для:

– дискретных случайных величин $m_1 = M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i;$

– непрерывных случайных величин $m_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$

Чаще, чем начальные моменты, применяются *центральные моменты*. Центральный момент k -го порядка определяется формулой:

- для дискретной случайной величины $\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i$;
- для непрерывной случайной величины $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx$.

Первый центральный момент всегда равен 0, $\mu_1 = 0$. Вторым центральным моментом называется *дисперсией*. *Дисперсией случайной величины* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: $D[X] = M[(X - m_x)^2]$.

Для дискретной случайной величины $D[X] = \mu_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i$; для

непрерывной $D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx$. Дисперсию ещё обозначают

так $D_x, \sigma_x^2, \sigma^2$.

Среднее квадратичное отклонение (или стандарт) связан с дисперсией: $\sigma_x = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\mu_2}$.

Коэффициент асимметрии (рис. 6.6): $\gamma_1 = \mu_3 / \sigma_x^3$, где $\mu_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$.

Коэффициент эксцесса (рис. 6.6): $\gamma_2 = (\mu_4 / \sigma_x^4) - 3$, где $\mu_4 = m_4 - 4m_1m_3 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$.

Если у случайной величины X существуют первый и второй моменты, то можно построить *нормированную случайную величину*: $X_0 = (X - m_x) / \sigma_x$. Для нормированной случайной величины $M[X_0] = 0$, $D[X_0] = 1$.

Вторая группа параметров характеризует отдельные значения функции распределения. К ним относятся *квантили*. *Квантилем x_p распределения случайной величины X с функцией распределения $F(x)$* называется решение уравнения $F(x_p) = p$. Наиболее важное значение имеет квантиль $x_{0,5}$ называемый *медианой распределения* (рис. 6.7). Ордината медианы рассекает площадь между кривой плотности вероятности и осью абсцисс пополам.

Размахом R или широтой распределения пользуются как мерой рассеивания в эмпирических распределениях при малом числе наблюдений (менее 10): $R = x_{\max} - x_{\min}$.

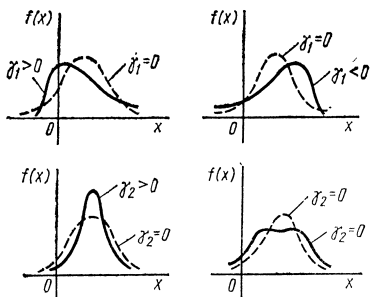


Рис. 6.6. Плотность распределений с ненулевыми коэффициентами асимметрии и эксцесса

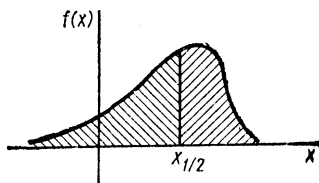


Рис. 6.7. Медиана распределения

В статистике чаще всего используют математическое ожидание (характеристику положения значений случайной величины на числовой оси) и дисперсию (или среднее квадратичное отклонение), определяющую характер разброса значений случайной величины.

Пример 6.3. Вычислить выборочное среднее, медиану, выборочную дисперсию, стандартное отклонение, выборочный эксцесс и коэффициент асимметрии. Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий требуемые вычисления.

$$\begin{aligned} \text{mean} &:= \text{mean}(\xi) \quad s_2 := \frac{n}{n-1} \cdot \text{var}(\xi) \quad \sigma := \sqrt{s_2} \quad \text{mean} = 149.849 \quad s_2 = 98.174 \\ \sigma &= 9.908 \quad \mu_3 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\xi_i - \text{mean})^3 \quad \mu_4 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (\xi_i - \text{mean})^4 \quad \text{median} := \\ &= \text{median}(\xi) \quad E := \frac{\mu_4}{s_2^2} - 3 \quad \alpha := \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \text{median} = 150.69 \quad E = 0.136 \quad \alpha = -0.055. \end{aligned}$$

Пример 6.4. При обработке партии деталей типа «вал» на токарном станке мод.16К20 был получен следующий разброс размеров. Определить характеристики эмпирического распределения.

142,116 142,219 142,322 142,425 142,528 142,631 142,734 142,837 142,218
 142,320 142,424 142,328 142,321 142,427 142,507 142,531 142,602 142,722
 142,709 142,836 142,909 142,319 142,599 142,117 142,900 142,400 142,632
 142,566 142,538 142,599 142,368 142,901 142,478 142,869 142,277 142,544
 142,449 142,369 142,357 142,158 142,279 142,189 142,318 142,934 142,555
 142,807 142,689 142,333 142,888 142,547 142,681 142,307 142,390 142,648
 142,929 142,142 142,241 142,297 142,444 142,682 142,804 142,399 142,666
 142,895 142,709 142,649 142,603 142,877 142,629 142,364 142,932 142,851
 142,387 142,461 142,309 142,687 142,803 142,688 142,348 142,686

1. Определяем число интервалов при объёме выборки $n \leq 100$ по формуле: $h = 1 + 3,322 \lg n = 1 + 3,322 \cdot \lg 80 = 7,322$.

Принимаем $h = 8$.

2. Находим размах или зону рассеяния результатов измерения, как разность между наибольшим и наименьшим значениями:

$$W = x_{\max} - x_{\min} = 142,934 - 142,116 = 0,818.$$

3. Определяем ширину интервала (цену разряда) d , как отношение размаха к числу интервалов: $d = W/h = 0,818/8 = 0,102$.

4. Построение гистограммы и полигона частот производим с помощью пакета Mathcad.

```

vmin := min(v)    vmin = 142.116
vmax := max(v)    vmax = 142.934    vsr := (vmax + 142.116) / 2    vsr = 142.525

razmax := vmax - 142.116    razmax = 0.818

v = sort(v)

vmean := mean(v)    vmean = 140.78    n := 80
vvar := var(v)    vvar = 247.788
vstdev := stdev(v)    vstdev = 15.741
n := 80

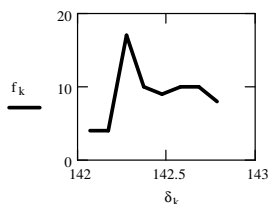
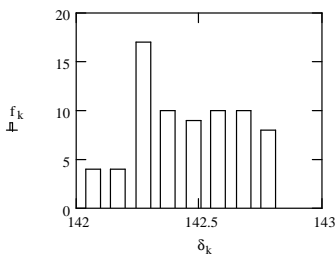
s2 := (n / (n - 1)) * var(v)    s2 = 250.925
σ := √s2    σ = 15.841

m := 8    Δ := (razmax / m)    j := 1..m    k := 1..m - 1

x_j := vmin + (Δ / 2) * (2 * j - 1)    f := hist(x, v)    Δ = 0.102
a_j := vmin + Δ * (j - 1)    b_j := a_j + Δ    F_k := ∑_{j=1}^k (b_j / n)

mx := 8
Δ := (razmax / mx)    Δ = 0.102
j := 0..mx    k := 0..mx - 1
δ_j := vmin + (Δ / 2) * (2 * j - 1)    f := hist(δ, v)

```



Индивидуальные задания по этой теме приведены в прил. В.

6.5. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функции Mathcad, предназначенные для работы с распределениями:

- бета-распределение: $\text{rbeta}(k, s_1, s_2)$;
- биномиальное распределение: $\text{rbinom}(k, n, p)$;
- распределение Коши: $\text{rcauchy}(k, l, s)$;
- χ^2 -распределение: $\text{rchisq}(k, d)$;
- экспоненциальное распределение: $\text{gexp}(k, r)$;
- распределение Фишера (F-распределение): $\text{rF}(k, m, n)$;
- гамма-распределение: $\text{rgamma}(k, s)$;
- геометрическое распределение: $\text{rgeom}(k, p)$;
- логнормальное распределение: $\text{rlnorm}(k, \mu, \sigma)$;
- логистическое распределение: $\text{rlogis}(k, l, s)$;
- отрицательное биномиальное распределение: $\text{rnbinom}(k, n, p)$;
- нормальное распределение: $\text{rnorm}(k, \mu, \sigma)$;
- распределение Пуассона: $\text{rpois}(k, \lambda)$;
- распределение Стьюдента: $\text{rt}(k, d)$;
- равномерное распределение: $\text{runif}(k, a, b)$;
- распределение Вейбулла: $\text{rweibull}(k, s)$.

6.5.1. Равномерное распределение

Равномерным распределением называется распределение, для которого плотность вероятности постоянна в определённых пределах и равна нулю вне этих пределов (рис. 6.8) [8]:

$$f_x = \begin{cases} c & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ (рис. 6.9) выражается площадью кривой распределения, лежащей левее точки x .

Для равномерного распределения случайной величины X : математическое ожидание $m_x = \frac{a+b}{2}$; медиана $x_{0,5} = \frac{a+b}{2}$; дисперсия $D_x = \frac{(b-a)^2}{12}$; коэффициент асимметрии $\gamma_1 = 0$; коэффициент эксцесса $\gamma_2 = -1,2$.

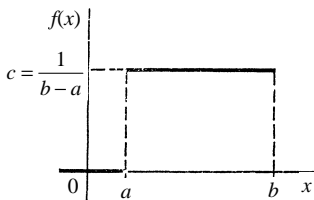


Рис. 6.8. Плотность вероятности равномерного распределения

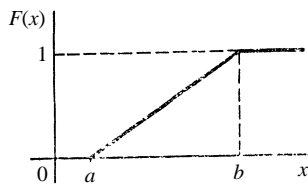
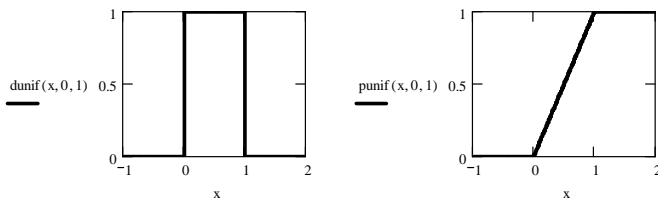


Рис. 6.9. График функции $F(x)$ равномерного распределения

Ниже приведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функции распределения случайной величины ξ , принимающей значения на отрезке $[0, 1]$ и имеющей равномерное распределение [15].



Данное распределение наблюдается в том случае, когда на исследуемую величину (например, размеры деталей) оказывает определяющее влияние доминирующий фактор, равномерно изменяющийся во времени (износ режущих инструментов или температура в процессе обработки). Закон двухпараметрический.

6.5.2. Нормальное распределение

Случайная величина является распределённой по *нормальному закону*,

если её плотность распределения имеет вид: $f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$.

Функция распределения $F(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$.

Нормальное распределение наиболее часто встречается на практике и теоретически наиболее полно разработано.

График плотности нормального распределения называется *нормальной кривой* или *кривой Гаусса* (рис. 6.10).

Нормальное распределение нормированной случайной величины называется *стандартным*. Его функция распределения имеет вид:

$$F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{рис. 6.11}).$$

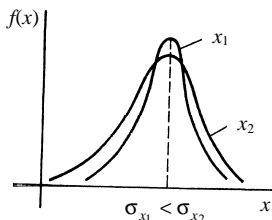


Рис. 6.10. Кривая Гаусса

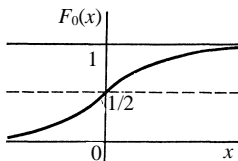


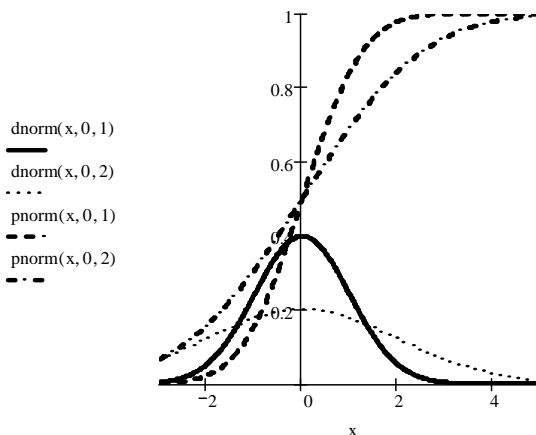
Рис. 6.11. График функции $F_0(x)$ стандартного нормального распределения

Функция $\Phi(x) = F_0(x) - 0,5$ называется *функцией Лапласа*:

$$\Phi(x) = F_0(x) - F_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Значения этой функции табулированы [15].

Ниже приведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функций распределения для $\xi \sim N(0, 1)$ и $\eta \sim N(1, 2)$.



Нормальному закону подчиняется, например, распределение диаметров и линейных размеров деталей при их механической обработке. Закон двухпараметрический [8].

6.5.3. Логарифмически нормальное распределение

Для описания несимметричных распределений, отличных от нормального используют приём логарифмирования аргумента нормальной функции, что позволяет приблизить распределение к нормальному. Распределение такого вида носит название *логарифмически нормального*.

Плотность логарифмически нормального распределения

$$f(\lg \tau) = \frac{1}{\sigma_{\lg \tau} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\lg \tau - M_{\lg \tau})^2}{2\sigma_{\lg \tau}^2} \right].$$

Все другие характеристики для распределения данного вида аналогичны таковым для нормального распределения, если в них заменить аргумент на логарифм аргумента. Чаще всего используются натуральные и десятичные логарифмы, но принципиально возможно использование логарифмов с любым другим основанием.

Этому закону подчиняются распределения некоторые показатели точности цилиндрических зубчатых колёс [8].

6.5.4. Показательное (экспоненциальное) распределение

Показательный закон распределения характеризуется постоянной интенсивностью проявления случайной величины во времени ($\lambda = \text{const}$) [8, 15]. Вероятность проявления случайной величины

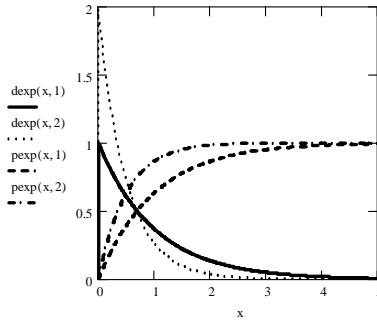
$$P(\tau) = e^{-\int_0^{\tau} \lambda(\tau) d\tau} = e^{-\lambda\tau}. \text{ Частота проявления случайной величины}$$

$$f(\tau) = \lambda(\tau)P(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}. \text{ Функция табулирована. Дисперсия } D(\tau) = T_{\text{cp}}^2.$$

В таком случае стандартное отклонение будет равно $\sigma(\tau) = T_{\text{cp}}$. Последняя зависимость часто используется как необходимое условие соответствия распределения экспериментальных данных показательному закону.

Показательный закон применяют для неизвестных распределений для небольших промежутков времени, поскольку для больших интервалов времени может возникнуть недопустимая погрешность неадекватности.

Ниже приведены графики плотности вероятностей и функций распределения случайных величин, имеющих показательное распределение с параметрами $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$, построенные в Mathcad.



6.5.5. Закон Вейбулла

В соответствии с этим законом функция плотности распределения имеет вид: $f(\tau) = ab\tau^{b-1} \exp(-a\tau^b)$, где a, b – параметры, характеризующие остроту и симметрию кривой плотности распределения соответственно. Интенсивность проявления случайной величины по времени характеризуется зависимостью, изображённой на рис. 6.12, а. Вероятность проявления случайной величины $P(\tau) = e^{(-a\tau)^b}$.

Кривая плотности распределения (рис. 6.12, б) при $b > 1$ имеет вид аналогичный для нормального распределения. В зависимости от конкретного значения b при условии $b > 1$, она может иметь левую или правую асимметрию, а при $b \approx 3,25$ близка к симметричной кривой.

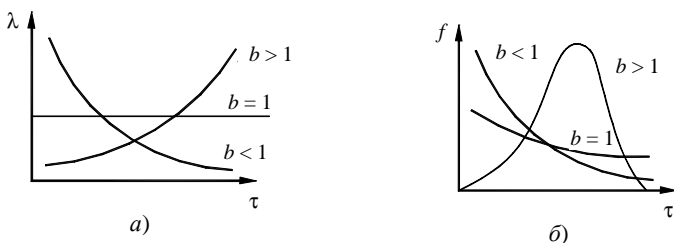


Рис. 6.12. Вид функций $\lambda(\tau)$ (а) и $f(\tau)$ (б) в зависимости от величины параметра b для закона Вейбулла

Закон Вейбулла наиболее подходит для описания распределения минимальных значений совокупностей случайных величин, а также используется при анализе надёжности, например, для вычисления среднего времени наработки на отказ какого-либо устройства [8, 15].

6.5.6. Треугольное распределение (распределение Симпсона)

Такому распределению могут подчиняться размеры деталей после обработки при недостаточной жёсткости системы СПИД. При этом изменение доминирующего фактора в первой половине цикла обработки имеет замедленный характер, а во второй – ускоренный [8].

6.5.7. Распределение типа А (распределение Грама – Шарлье)

Это распределение является обобщением нормального распределения и распределения Пуассона. Данное распределение близко к нормальному, но имеет асимметрию и эксцесс, отличные от нуля. Применение такого распределения рекомендуется, в частности, для оценки точности механической обработки, некоторых показателей точности цилиндрических зубчатых колёс после зубофрезерования и шевингования в производственных условиях [8].

6.5.8. Распределение Пирсона типа I

Может быть использовано в том случае, если за характеристику качества изделия принимается большее или меньшее из измеренных значений показателя качества в выборке. Например, этому закону подчиняется распределение погрешности шага зацепления цилиндрических зубчатых колёс после зубофрезерования в производственных условиях [8].

6.5.9. Распределение Максвелла

Закону Максвелла в машиностроении подчиняются распределения значений эксцентриситетов, несоосности и биения, разностенности (если её направление не задано), непараллельности и неперпендикулярности двух плоскостей или оси и плоскости, конусности. В частности, этот закон имеет место при распределении радиального и торцевого

биения (по венцу) заготовок цилиндрических зубчатых колёс после чистовой токарной обработки на многорезцовых станках с базой от центрального отверстия [8].

Этот закон однопараметрический и дифференциальная функция

распределения его имеет выражение: $\varphi(R) = \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$, где R – пере-

менная величина эксцентриситета или биения, причём $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; x и y – координаты точки конца R (рис. 6.13, а); σ – среднее квадратическое отклонение значений координат x и y , имеющих одинаковое распределение, поэтому $\sigma = \sigma_x = \sigma_y$.

Интегральный закон распределения эксцентриситета имеет выра-

$$F(R) = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^R R e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} dR = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}.$$

Графическое изображение дифференциального закона распределения эксцентриситета дано на рис. 6.13, б.

Связь между σ_R , \bar{R} и σ выражается следующими зависимостями:

$\bar{R} = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\sigma_R = \sigma \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}$, где \bar{R} – среднее значение (математическое ожидание) случайной величины R ; σ_R – среднее квадратическое отклонение R от \bar{R} .

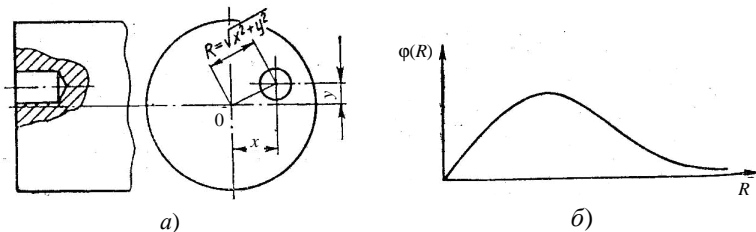


Рис. 6.13. Графическое изображение дифференциального закона распределения эксцентриситета:

а – эксцентриситет оси отверстия относительно оси валика;

б – график дифференциальной функции распределения эксцентриситета

6.5.10. Закон распределения модуля разности

Закону модуля разности могут подчиняться распределения таких случайных величин (без учёта их знака), как непараллельность осей цилиндрических поверхностей и фиксированной плоскости, плоскостей (оси) и плоскости; погрешность формы поверхности, рассматриваемая как разность между её максимальными и минимальными размерами, и др. [8].

Если две случайные величины x_1 и x_2 каждая в отдельности имеют нормальное распределение с параметрами \bar{X}_1 и \bar{X}_2 и $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_0^2$, то модуль разности этих величин $r = |x_1 - x_2|$ имеет распределение, которое носит название закона *распределения модуля разности* [8].

Плотность вероятности или дифференциальная функция распределения случайной величины r выражается следующим уравнением:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(r-\bar{X}_0)^2}{2\sigma_0^2}} + e^{-\frac{(r+\bar{X}_0)^2}{2\sigma_0^2}} \right], \quad (6.1)$$

где $\bar{X}_0 = |\bar{X}_1 - \bar{X}_2|$ и σ_0 являются параметрами распределения модуля разности r .

Интегральная функция распределения модуля разности r выражается следующим уравнением:

$$F(r) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \int_0^r \left[e^{-\frac{(r-\bar{X}_0)^2}{2\sigma_0^2}} + e^{-\frac{(r+\bar{X}_0)^2}{2\sigma_0^2}} \right] dr. \quad (6.2)$$

Произведя замену переменных в уравнениях (6.1) и (6.2): $\rho = \frac{r}{\sigma_0}$,

$\rho_0 = \frac{\bar{X}_0}{\sigma_0}$, $d\rho = \frac{1}{\sigma_0} dr$, получим следующие выражения:

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(\rho+\rho_0)^2}{2}} \right]; \quad (6.3)$$

$$F(\rho) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \int_0^\rho \left[e^{-\frac{(\rho-\rho_0)^2}{2}} + e^{-\frac{(\rho+\rho_0)^2}{2}} \right] d\rho. \quad (6.4)$$

Вид кривой распределения $\varphi(\rho)$ зависит от значения ρ_0 . При $\rho_0 = 0$ кривая резко ассиметрична, при $\rho_0 = 3$ она совпадает с кривой нормального распределения (рис. 6.14).

Если обозначить $\rho - \rho_0 = t_1$, а $\rho + \rho_0 = t_2$, то уравнение (6.4) можно заменить следующим уравнением:

$$F(\rho) = \Phi(t_1) + \Phi(t_2) = \Phi(\rho - \rho_0) + \Phi(\rho + \rho_0), \quad (6.5)$$

так как каждое слагаемое уравнения (6.4) является функцией Лапласа

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

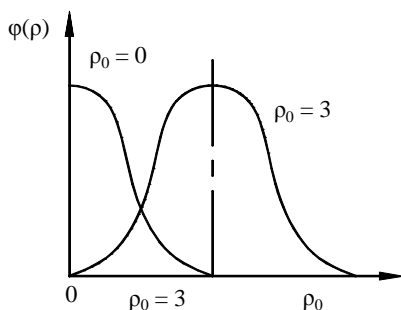


Рис. 6.14. Вид кривых распределения φ_ρ при $\rho_0 = 0$ и $\rho_0 = 3$

Между σ_r , \bar{r} и ρ_0 существует определённая зависимость, которая определяется через нормированное \bar{r} , обозначаемое λ_0 :

$$\lambda_0 = \frac{\bar{r}}{\sigma_r}. \quad (6.6)$$

Среднее значение (\bar{r}) и среднее квадратическое отклонение σ_r случайной величины r вычисляют по экспериментальным данным. По полученному значению λ_0 определяют ρ_0 при помощи таблицы в прил. 7, а по ρ_0 определяют σ_p по таблице прил. 8 [8].

Зная ρ_0 и σ_p , можно определить параметры распределения σ_0 и \bar{X}_0 по следующим формулам:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_r}{\sigma_p}; \quad (6.7)$$

$$\bar{X}_0 = \rho_0 \sigma_0. \quad (6.8)$$

Пользуясь формулой (6.5) и известными из опыта значениями \bar{r} и σ_r , можно вычислить вероятность того, что случайная величина r будет находиться в пределах заданных значений.

Пример 6.5. В большой выборке из партии втулок среднее значение овальности равно $\bar{r} = 0,06$ мм, а среднее квадратическое отклонение $\sigma_r = 0,04$ мм. Допускаемое значение овальности $r = 0,1$ мм. Требуется определить вероятный процент брака во всей партии, если распределение значений r_i подчиняется закону модуля разности. Определим по формуле (6.6) $\lambda_0 = 0,06/0,04 = 1,5$. Этому значению λ_0 по таблице прил. 7 [8] соответствует $\rho_0 = 1,12$ путём интерполяции имеем $\sigma_p = 0,829$.

По формуле (6.7) определяем $\sigma_0 = \frac{0,04}{0,829} = 0,485$.

Так в формуле (6.5) $\rho = \frac{r}{\sigma_0}$, а допускаемое $r = 0,1$, то

$$\rho = \frac{0,1}{0,485} = 2,05.$$

Подставляя значение ρ и ρ_0 в формулу (6.5), получим

$$F(\rho) = \Phi(2,05 - 1,12) + \Phi(2,05 + 1,12) = \Phi(0,93) + \Phi(3,17).$$

По таблице прил. 1 [8]: $\Phi(0,93) = 0,3238$ и $\Phi(3,17) = 0,4992$. Следовательно, $F(\rho) = 0,3238 + 0,4992 = 0,8230$. Это означает, что вероятный процент годных деталей в партии составит 82,3 %, а вероятный процент брака: $100 - 82,3 = 17,7$ %.

6.5.11. Биномиальное распределение (схема Бернулли)

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A (которое условно можно назвать «успехом» опыта) появляется с вероятностью p , то случайная величина X – число «успехов» при n опытах имеет биномиальное распределение [1, 8]. В этом случае событие $A = \{X = m\}$ распадается на ряд вариантов, в каждом из которых «успех» достигается в m опытах, а «неуспех», т.е. событие \bar{A} в $(n - m)$ опытах. По правилу умножения вероятностей $P(A) = p^m(1 - p)^{n - m}$ или, обозначая $q = 1 - p$, $P(A) = p^m q^{n - m}$.

Таким образом, дискретная случайная величина X имеет биномиальное распределение, если её возможные значения имеют величину $0, 1, \dots, m, \dots, n$, а соответствующие вероятности принимают значения $P_m = P\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n - m}$, где $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; $m = 0, 1, n$. Такое распределение зависит от двух параметров n и p .

$$\text{Математическое ожидание } m_x = np = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

$$\text{Дисперсия } D_x = npq = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i .$$

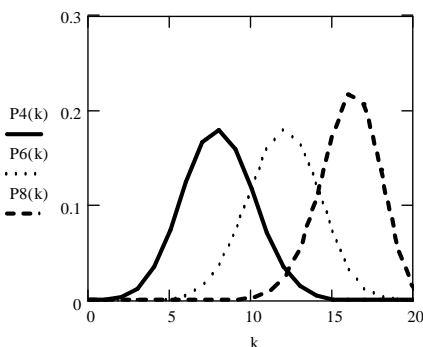
В Mathcad для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей биномиальное распределение, предназначены функции $\text{dbinom}(k, n, p)$ и $\text{rbinom}(k, n, p)$, значения которых – соответственно p_k и $F(k)$ [15].

Со схемой испытаний Бернулли можно связать ещё одну случайную величину: η – число испытаний до первого успеха. Эта величина принимает бесконечное множество значений от 0 до $+\infty$, и её распределение определяется формулой $p_k = P(\eta = k) = pq^k$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Пример 6.6. Построить биномиальное распределение для серии из 20 независимых испытаний с вероятностью успеха $p = 0,4$; $p = 0,6$; $p = 0,8$. Построить графики распределения и функций распределения. Для $p = 0,4$ найти значение k , для которого величина $P(\xi = k)$ максимальна. Вычислить вероятность попадания значений случайной величины в интервал (1...5).

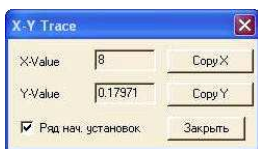
Фрагмент рабочего документа, содержащий вычисления для биномиального распределения, приведён ниже.

```
k := 0..20  P4(k) := dbinom(k, 20, 0.4)  F4(k) := pbinom(k, 20, 0.4)
P6(k) := dbinom(k, 20, 0.6)  F6(k) := pbinom(k, 20, 0.6)
P8(k) := dbinom(k, 20, 0.8)  F8(k) := pbinom(k, 20, 0.8)
```



$$\sum_{k=1}^{20} P4(k) = 1 \quad F4(5) - F4(1) = 0.125$$

Для того чтобы определить по графику распределения наиболее вероятное значение случайной величины, щёлкнем правой клавишей мыши, появится диалоговое окно «X-Y Trace», затем установим перекрестье маркера на точке максимума распределения и выведем в рабочий документ вероятность значения, указанного в окне «X-Value». Для исследуемой случайной величины наиболее вероятное значение равно 8, вероятность этого события равна 0,17971.



Варианты индивидуального задания по расчёту биномиального распределения в среде Mathcad приведены в прил. Г.

Порядок вычисления функции биномиального распределения в среде Excel следующий:

1. Вызываем команду БИНОМРАСП (рис. 6.15).

Функция БИНОМРАСП используется в задачах с фиксированным числом тестов или испытаний, когда результатом любого испытания может быть только успех или неудача, испытания независимы, и вероятность успеха постоянна на протяжении всего эксперимента.

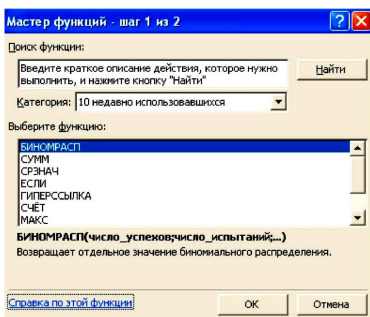


Рис. 6.15. Использование «Мастера функций» для вызова команды БИНОМРАСП

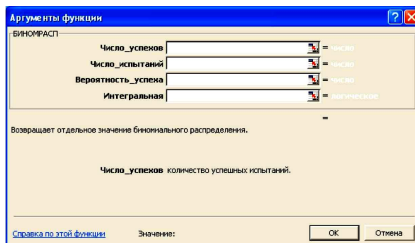


Рис. 6.16. Ввод аргументов функции биномиального распределения

2. После вызова самой статистической функции необходимо ввести её аргументы согласно следующего шаблона (рис. 6.16).

Число успехов – это количество успешных испытаний.

Число испытаний – это число независимых испытаний.

Вероятность успеха – это вероятность успеха каждого испытания.

Интегральная – это логическое значение, определяющее форму функции. Если аргумент *интегральная* имеет значение ИСТИНА, то функция БИНОМРАСП возвращает интегральную функцию распределения, т.е. вероятность того, что число успешных испытаний не менее значения аргумента – *число успехов*; если этот аргумент имеет значение ЛОЖЬ, то возвращается функция распределения, т.е. вероятность того, что число успешных испытаний в точности равно значению аргумента – *число успехов*.

Число успехов и *число испытаний* усекаются до целых.

Если *число успехов*, *число испытаний* или *вероятность успеха* не является числом, то функция БИНОМРАСП возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.

Если *число успехов* < 0 или *число успехов* > *число испытаний*, то функция БИНОМРАСП возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Если *вероятность успеха* < 0 или *вероятность успеха* > 1, то функция БИНОМРАСП возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Биномиальная функция распределения имеет следующий вид:

$$b(x, n, p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \text{ где } \binom{n}{x} \text{ – есть ЧИСЛОКОМБ}(n, x).$$

Интегральное биномиальное распределение имеет следующий вид:

$$B(x, n, p) = \sum_{y=0}^x b(y, n, p).$$

Пример 6.6. Введём исходные данные и получим результаты, которые представлены в табл. 6.2.

6.2. Исходные данные и результаты

	Данные	Описание
1	6	Количество успешных испытаний
2	10	Число независимых испытаний
3	0,5	Вероятность успеха в каждом испытании
4	=БИНОМРАСП (A2;A3;A4;ЛОЖЬ)	Вероятность того, что в точности 6 испытаний из 10 будут успешны (0,205078)

В первой строчке таблицы введено число, показывающее количество опытов, которые необходимо провести (рис. 6.17). Во второй строчке – соответствующие значения вероятностей. В графе «Параметры» эти значения введены как глобальные параметры для всех опытов. При этом N характеризует количество опытов, а значение p – вероятность этих опытов. В восьмой строке числа соответствуют возможным значениям случайной величины. Примерный вид графиков при построении многоугольника распределения и вычислении функции распределения показан на рис. 6.18.

Варианты индивидуального задания по расчёту биномиального распределения в среде Microsoft Excel приведены в прил. Г.

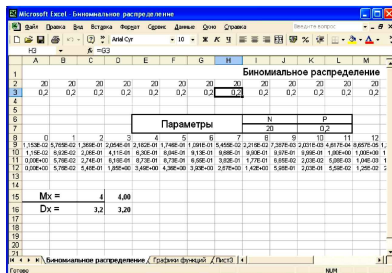


Рис. 6.17. Заполнение рабочего листа Excel

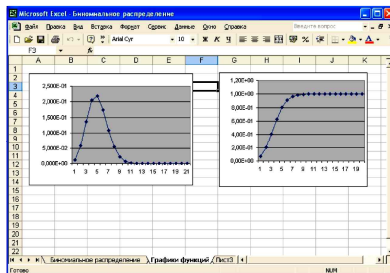


Рис. 6.18. Графическое отображение биномиального распределения

6.5.12. Распределение Пуассона

Случайная величина X имеет распределение Пуассона, если её возможные значения имеют величины $0, 1, m, \dots$ (бесконечное, но счётное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой $P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда число опытов n неограниченно увеличивается ($n \rightarrow \infty$) и одно-

временно параметр p (вероятность «успеха» в одном опыте) неограниченно уменьшается ($p \rightarrow 0$), но так, что их произведение np сохраняется в пределе постоянным и равным a . В Mathcad для вычисления плотности вероятности и функции распределения случайной величины, имеющей пуассоновское распределение, предназначены функции $\text{dpois}(k, \lambda)$ и $\text{rpois}(k, \lambda)$, значения которых соответственно p_k и $F(k)$ [15].

Пример 6.7. Построить пуассоновское распределение с параметром $\lambda = 0,2$; $\lambda = 0,4$. Как видно из рис. 6.19, наиболее вероятное значение случайной величины нулевое; вероятность того, что случайная величина при $\lambda = 0,2$ примет нулевое значение, равна 0,0819.

Порядок вычисления функции распределения Пуассона в среде Excel следующий:

1. Вызываем команду ПУАССОН (рис. 6.20).

Обычное применение распределения Пуассона состоит в предсказании количества событий, происходящих за определённое время, например, количество машин, появляющихся на площади за 1 мин.

2. После вызова самой статистической функции необходимо ввести её аргументы согласно следующего шаблона (рис. 6.21).

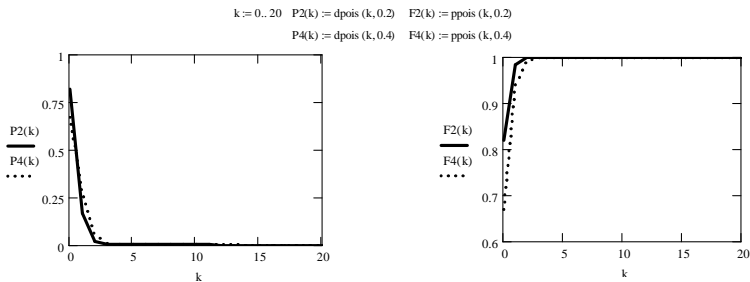


Рис. 6.19. Фрагмент рабочего документа Mathcad для вычисления распределения Пуассона

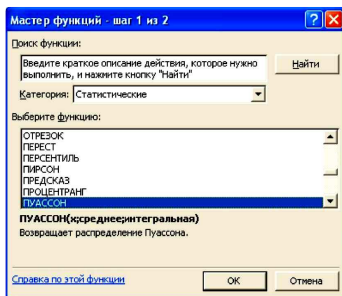


Рис. 6.20. Использование «Мастера функций» для вызова команды ПУАССОН

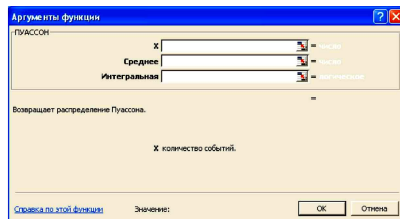


Рис. 6.21. Ввод аргументов функции распределения Пуассона

X -количество событий, *Среднее*-ожидаемое численное значение, *Интегральная*-логическое значение, определяющее форму возвращаемого распределения вероятностей. Если аргумент «интегральная» имеет значение ИСТИНА, то функция ПУАССОН возвращает интегральное распределение Пуассона, т.е. вероятность того, что число случайных событий будет от 0 до x включительно. Если этот аргумент имеет значение ЛОЖЬ, то возвращается функция плотности распределения Пуассона, т.е. вероятность того, что событий будет в точности x .

Если x не целое, то оно усекается. Если x или среднее не является числом, то функция ПУАССОН возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!. Если $x \leq 0$, то функция ПУАССОН возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!. Если среднее $x \leq 0$, то функция ПУАССОН возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Функция ПУАССОН вычисляется следующим образом. Если аргумент *интегральная* = ЛОЖЬ: $\text{ПУАССОН} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$. Если аргумент

интегральная = ИСТИНА: $\text{ПУАССОН} = \sum_{k=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.

Пример 6.8. Введём исходные данные и получим результаты, которые представлены в табл. 6.3.

6.3. Исходные данные и результаты

	Данные	Описание
1	2	Число событий
2	5	Ожидаемое среднее
3	=ПУАССОН (A2;A3;ИСТИНА)	Интегральное распределение Пуассона (0,124652)
4	=ПУАССОН (A2;A3;ЛОЖЬ)	Функция плотности распределения Пуассона (0,084224)

После ввода исходных данных (рис. 6.22), строится многоугольный распределения и функция распределения, графики которых могут иметь вид аналогичный приведенным на рис. 6.23.

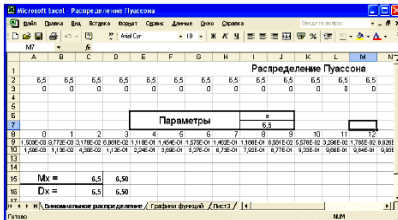


Рис. 6.22. Заполнение рабочего листа Excel

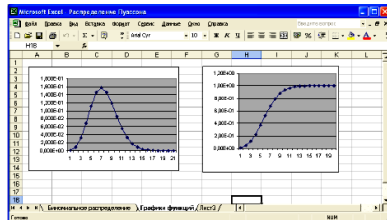


Рис. 6.23. Графическое отображение распределения Пуассона

Варианты индивидуального задания по расчёту распределения Пуассона в среде Mathcad и Microsoft Exel взять из прил. Г. При этом полагать, что $p = \lambda$, а X и $Среднее$ соответственно равны n и $n_{ц}$.

6.5.13. Геометрическое распределение

Случайная величина X имеет геометрическое распределение, если её возможные значения $0, 1, 2, \dots, m, \dots$, а вероятности этих значений $P_m = q^m p$, где $0 < p < 1$; $q = 1 - p$; $m = 0, 1, 2, \dots$.

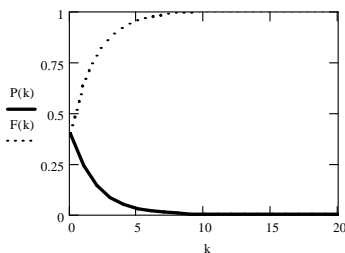
Вероятности P_m для последовательных значений m образуют геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q : $P_0 = P\{X = 0\} = p$; $P_1 = P\{X = 1\} = qp$; \dots , $P_m = P\{X = m\} = q^m p$.

Если производится ряд независимых опытов с целью получения какого-то результата («успеха») A , при каждой попытке (опыте) «успех» достигается с вероятностью p и случайная величина X есть число «безуспешных» попыток (до первой попытки, в которой появляется результат A), то в этом случае случайная величина X имеет геометрическое распределение.

В этом случае ряд распределения случайной величины X имеет вид:

0	1	2	3	...	m	...
p	qp	$q^2 p$	$q^3 p$		$q^m p$	

$k := 0..20$ $P(k) := \text{dgeom}(k, 0.4)$ $F(k) := \text{pgeom}(k, 0.4)$



Математическое ожидание случайной величины X , распределённой по геометрическому закону определяется по формуле $m_x = q / p$. Дисперсия случайной величины X , распределённой по геометрическому закону находится согласно формуле $\sigma_x = \sqrt{q} / p$.

Пример 6.9. Построить геометрическое распределение с такими же параметрами, что и биномиальное ($p = 0,4$). Фрагмент рабочего документа, содержащий вычисления для геометрического распределения, приведён ниже. Наиболее вероятное значение случайной величины нулевое, вероятность значения равна 0,4 [15].

Порядок вычисления функции геометрического распределения в среде Excel следующий:

1. Вызываем команду ОТРБИНОМРАСП (рис. 6.24).

Функция ОТРБИНОМРАСП возвращает отрицательное биномиальное распределение (или геометрическое распределение). ОТРБИНОМРАСП возвращает вероятность того, что случится число неудач неудачных испытаний, прежде чем будет достигнуто число успехов успешных испытаний, при том условии, что вероятность успешного испытания постоянна и равна значению аргумента *вероятность успеха*. Уравнение для отрицательного биномиального распределения имеет следующий вид: $nb(x, r, p) = \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x$, где x – число неудач; r – число успехов; p – вероятность успеха.

Эта функция подобна биномиальному распределению, за тем исключением, что количество успехов фиксированное, а количество испытаний – переменное. Как и в случае биномиального распределения, испытания считаются независимыми. Например, требуется найти 10 человек с блестящими способностями, при этом известно, что вероятность наличия таких способностей у кандидата составляет 0,3. Функция ОТРБИНОМРАСП вычислит вероятность того, что придётся провести собеседования с определённым количеством неподходящих кандидатов, прежде чем будут найдены все 10 подходящих. Функция распределения вычисляется согласно рекуррентному выражению $F(m+1) = F(m) + P(m+1)$; $F(0) = P(0)$.

2. После вызова самой статистической функции необходимо ввести её аргументы согласно следующего шаблона (рис. 6.25).

Число неудач – количество неудачных испытаний. *Число успехов* – пороговое значение числа успешных испытаний. *Вероятность успеха* – вероятность успеха. Число неудач и число успехов отсекаются до целых.

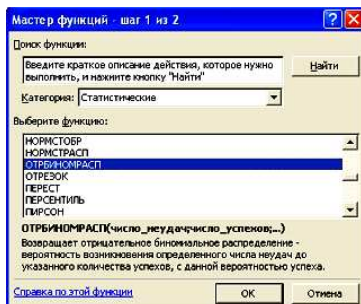


Рис. 6.24. Использование «Мастера функций» для вызова команды ОТРБИНОМРАСП

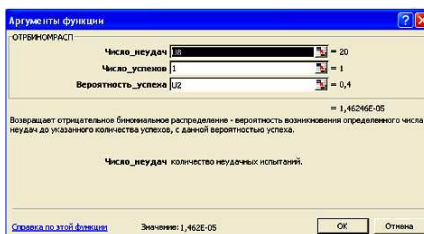


Рис. 6.25. Ввод аргументов функции геометрического распределения

Если какой-либо из аргументов не является числом, то функция ОТРБИНОМРАСП возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!. Если вероятность успеха < 0 или вероятность > 1 , то функция ОТРБИНОМРАСП возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!. Если (число неудач + число успехов – 1) < 0 , то функция ОТРБИНОМРАСП возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Пример 6.10. Введём исходные данные и получим результаты, которые представлены в табл. 6.4.

6.4. Исходные данные и результаты

	Данные	Описание
1	10	Число неудач
2	5	Пороговое значение числа успешных испытаний
3	0,25	Вероятность успеха
4	= ОТРБИНОМРАСП (A2;A3;A4)	Отрицательное биномиальное распределение для приведённых выше данных (0,055049)

В рабочий лист Excel вводим исходные данные (рис. 6.26), строится многоугольник распределения и функция распределения, графики которых могут иметь вид аналогичный приведённым на рис. 6.27.

Во второй строчке таблицы приведено значение вероятности достижения «успеха» при свершении события X . В графе «*Параметры*» это значение вероятности введено как глобальный параметр для всех опытов.

В восьмой строке таблицы приведены номера выполняемых опытов, в девятой – ряд распределения, а в десятой – значения функции распределения.

В строках 15 и 16 приведены результирующие значения математического ожидания и дисперсии, рассчитанные двумя способами (с помощью использования стандартных формул и в общем виде).

Примерный вид графиков при построении многоугольника распределения и вычисления функции распределения показан на рис. 6.27.

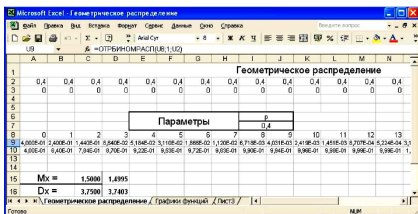


Рис. 6.26. Заполнение рабочего листа Excel

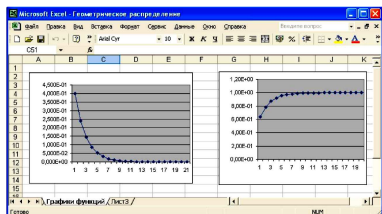


Рис. 6.27. Графическое отображение геометрического распределения

Варианты индивидуального задания по расчёту геометрического распределения в среде Mathcad и Microsoft Excel взять из прил. Г. При этом полагать, что число неудач и пороговое значение числа успешных испытаний соответственно равны n_n и n .

6.5.14. Гипергеометрическое распределение

Случайная величина X имеет гипергеометрическое распределение с параметрами a, b, n , если её возможные значения $0, 1, \dots, m, \dots, a$ имеют вероятности $P_m = P\{X = m\} = \frac{\binom{C_a^m C_b^{n-m}}{C_{a+b}^n}$, ($m = 0, \dots, a$). При $a \rightarrow \infty$

и $b \rightarrow \infty$, $\frac{a}{a+b} = p$ гипергеометрическое распределение приближается к биномиальному с параметрами n и p [1, 8, 15].

Гипергеометрическое распределение применяется на практике при решении задач, связанных с контролем продукции.

Математическое ожидание случайной величины X , распределённой по гипергеометрическому закону определяется по формуле $m_x = na/a + b$. *Дисперсия случайной величины X* , распределённой по гипергеометрическому закону находится по формуле

$$\sigma_x = \frac{ nab }{ (a+b)^2 } + n(n-1) \left[\frac{ a }{ a+b } \frac{ a-1 }{ a+b-1 } - \left(\frac{ a }{ a+b } \right)^2 \right].$$

Функция распределения вычисляется согласно рекуррентному выражению $F(m+1) = F(m) + P(m+1)$; $F(0) = P(0)$.

Порядок вычисления функции гипергеометрического распределения в среде Excel следующий:

1. Вызываем команду ГИПЕРГЕОМЕТ (рис. 6.28).

Функция ГИПЕРГЕОМЕТ возвращает вероятность заданного количества успехов в выборке, если заданы размер выборки, количество успехов в генеральной совокупности и размер генеральной совокупности. Функция ГИПЕРГЕОМЕТ используется для задач с конечной генеральной совокупностью, где каждое наблюдение – это успех или неудача, а каждое подмножество заданного размера выбирается с равной вероятностью.

Уравнение для гипергеометрического распределения имеет следующий вид:

$$P(X = x) = h(x, n, M, N) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}},$$

где x – число успехов в выборке; n – размер выборки; M – число успехов в совокупности; N – размер совокупности.

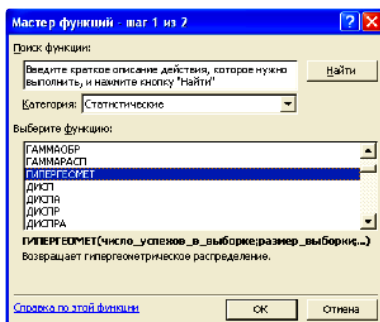


Рис. 6.28. Использование «Мастера функций» для вызова команды ГИПЕРГЕОМЕТ

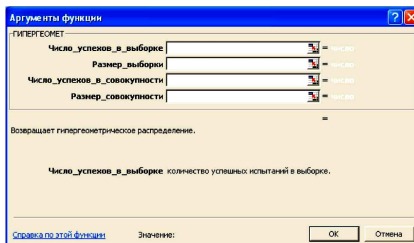


Рис. 6.29. Ввод аргументов функции гипергеометрического распределения

Функция ГИПЕРГЕОМЕТ используется для выборок без повторений из конечной генеральной совокупности.

2. После вызова самой статистической функции необходимо ввести её аргументы согласно следующего шаблона (рис. 6.29).

Число успехов в выборке – это количество успешных испытаний в выборке.

Размер выборки – это размер выборки. *Число успехов в совокупности* – это количество успешных испытаний в генеральной совокупности. *Размер совокупности* – это размер генеральной совокупности. Все аргументы усекаются до целых.

Если любой из аргументов не является числом, то функция ГИПЕРГЕОМЕТ возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.

Если *число успехов в выборке* < 0 или число успехов в выборке больше, чем меньшее из чисел *размер выборки* и *число успехов в совокупности*, то функция ГИПЕРГЕОМЕТ возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Если число успехов в выборке меньше, чем большее из чисел 0 и (*размер выборки* – *размер совокупности* + *число успехов в совокупности*), то функция ГИПЕРГЕОМЕТ возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Если *размер выборки* < 0 или *размер выборки* $>$ *размер совокупности*, то функция ГИПЕРГЕОМЕТ возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Если *число успехов в совокупности* < 0 или *число успехов в совокупности* $>$ *размер совокупности*, то функция ГИПЕРГЕОМЕТ возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Если *размер совокупности* < 0 , то функция ГИПЕРГЕОМЕТ возвращает значение ошибки #ЧИСЛО!.

Пример 6.11. В коробке 20 конфет. Восемь из них с карамелью, а остальные 12 с орешками. Если некто выбирает 4 конфеты наугад, то следующая функция вернёт вероятность того, что в точности одна конфета окажется с карамелью.

Введём исходные данные и получим результаты, которые представлены в табл. 6.5.

6.5. Исходные данные и результаты

	Данные	Описание
1	1	Число успехов в выборке
2	4	Размер выборки
3	8	Число успехов в совокупности
4	20	Размер совокупности
5	=ГИПЕРГЕОМЕТ (A2; A3; A4; A5)	Гипергеометрическое распределение для приведённых выше выборки и совокупности (0,363261)

В рабочий лист Excel вводим исходные данные (рис. 6.30), строится многоугольник распределения и функция распределения, графики которых могут иметь вид аналогичный приведённым на рис. 6.31.

Варианты индивидуального задания по расчёту гипергеометрического распределения приведены в прил. Д.

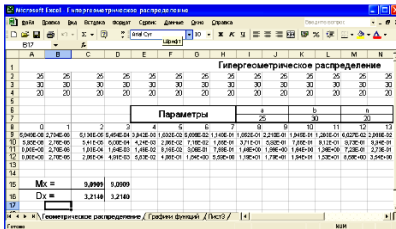


Рис. 6.30. Заполнение рабочего листа Excel

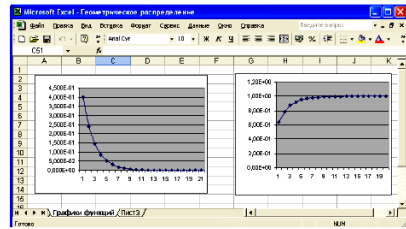


Рис. 6.31. Графическое отображение гипергеометрического распределения

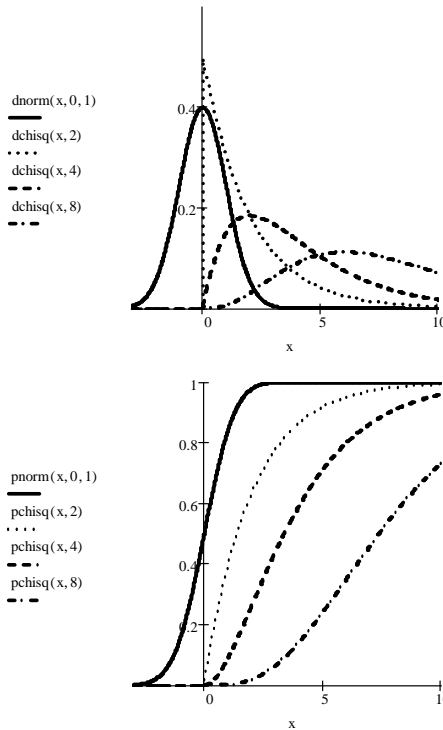
6.5.15. Распределение хи-квадрат (χ^2 -распределение)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет стандартное нормальное распределение $N(0,1)$. Составим случайную величину $\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$. Её распределение называется χ^2 -распределением с n степенями свободы. Для справочных целей приведём здесь выражение плотности распределения этой случайной величины:

$$p_n(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} z^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{z}{2}}, & z \geq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-z} dz$ – гамма-функция Эйлера [15].

Ниже приведены графики плотности вероятностей и функций распределения для χ^2 -распределения с двумя, четырьмя и восемью степенями свободы, построенные в Mathcad. Для сравнения приведены графики для $\xi \sim N(0, 1)$.



6.5.16. Распределение Стьюдента

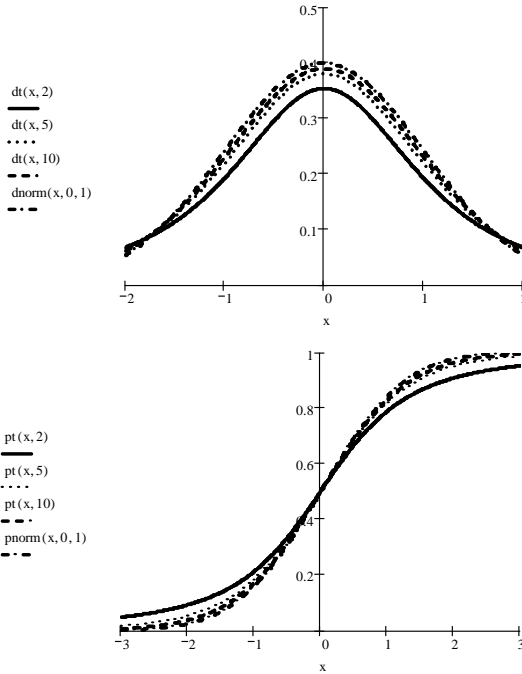
Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение, а случайная величина $\chi^2 n - \chi^2$ -распределение с n степенями свободы. Если ξ и $\chi^2 n$ независимы, то про случайную величину

$\tau_n = \frac{\xi}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$ говорят, что она имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы n . Доказано, что плотность вероятности этой случайной величины вычисляется по формуле

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in R.$$

При больших n распределение Стьюдента практически не отличается от $N(0, 1)$.

Ниже приведены графики плотности вероятностей и функций распределения для $n = 2; 5; 10$, построенные в Mathcad. Для сравнения приведены графики для $\xi \sim N(0,1)$ [15].



В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции Стьюдента с n степенями свободы вычисляются встроенными функциями соответственно $dt(x, n)$ и $pt(x, n)$.

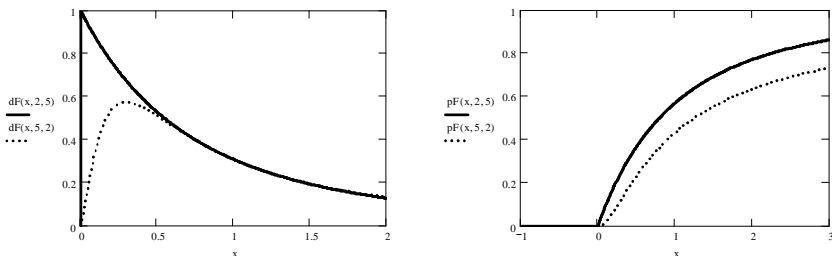
6.5.17. F -распределение Фишера

Пусть случайные величины χ^2_n и χ^2_m независимы и имеют распределение χ^2 с n и m степенями свободы соответственно. Тогда случайная величина $F_{n,m} = \frac{\chi^2_n/n}{\chi^2_m/m}$, имеет F -распределение с плотностью

вероятности $p_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \left(\frac{n}{m}\right)^{n/2} \frac{x^{\frac{n-2}{2}}}{\left(1 + \frac{nx}{m}\right)^{\frac{n+m}{2}}}, x > 0$. Ниже при-

ведены построенные в Mathcad графики плотности вероятностей и функций распределения для $n = 2,5$ и $m = 5,2$ [15].

В Mathcad значения в точке x плотности распределения и функции Фишера вычисляются встроенными функциями соответственно $dF(x, n, m)$ и $pF(x, n, m)$.



6.6. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА С ПОМОЩЬЮ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ТОЧНОСТИ И НАДЁЖНОСТИ ВЫБОРКИ ЗАМЕРОВ. УРОВЕНЬ ЗНАЧИМОСТИ

Для оценки отклонений в математической статистике пользуются *доверительными интервалами* и *доверительными вероятностями*. *Доверительный интервал* при данной доверительной вероятности определяет точность оценки. Величина доверительного интервала зависит от *доверительной вероятности*, с которой гарантируется нахождение измеряемого параметра внутри доверительного интервала [1, 9].

Вероятность того, что истинное значение характеристик генеральной совокупности находится в отмеченных пределах, равна [1]:

$$p(M_x - \varepsilon < M_x^0 < M_x + \varepsilon) \quad (6.9)$$

и называется *надёжностью* данной *оценки*.

Интервал $M_x + \varepsilon$ (ε – точность), который в общем случае может быть произвольным $[a_i, b_i]$, называется *доверительными границами*. Доверительную вероятность для удобства обозначают как $(1 - \alpha) = p(a_i < M_x < b_i)$. Тогда α есть вероятность ошибки, которая на кривой распределения изображается в виде двух половинок $\alpha/2$ (рис. 6.32).

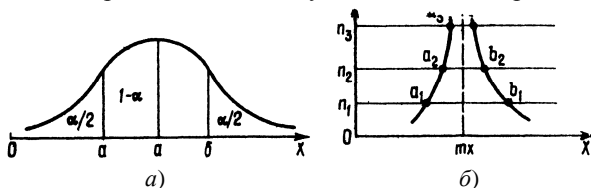


Рис. 6.32. Схемы к оценке надёжности (а) и доверительных интервалов для случайной величины (б)

Вероятность ошибки характеризует долю риска в оценке истинного значения оцениваемой величины и часто называется *уровнем значимости* p . Для удобства величину доверительного интервала устанавливают в долях среднеквадратического отклонения $\pm z\sigma_\varepsilon$. Тогда доверительную вероятность определяют как площадь, ограниченную кривой нормального распределения на интервале $\pm z\sigma_\varepsilon$. Используя формулу стандартного нормального распределения $z = \frac{x - M_x}{\sigma_x}$ при $M_x = 0$ и

$\sigma_x = 1$, *доверительную вероятность*, согласно выражению (6.9), записывают в таком виде $p\left(\bar{x} - z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leq M_x \leq \bar{x} + z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)$, где \bar{x} – оценка среднего значения генеральной совокупности.

Доверительный интервал для дисперсии $\left[\frac{n\sigma_x^2}{x_{\alpha/2}^2} \leq D_x \leq \frac{n\sigma_x^2}{x_{1-\alpha/2}^2}\right]$.

Его определяют в следующей последовательности: вычисляют параметр выборки $\bar{x} \approx M_x$; выбирают доверительную вероятность $1 - \alpha$; определяют соответствующее выбранному значению $1 - \alpha$ число z из таблицы табулированных значений стандартного нормального распределения; вычисляют доверительный интервал $a < M_x < b$. В зависимости от решаемых задач при исследованиях технологических и производственных процессов стремятся получить надёжность $1 - \alpha = 0,9; 0,95; 0,99$.

Надёжность эксперимента зависит и от объёма выборочной совокупности. Эта зависимость устанавливается на основании биномиального распределения (распределения Бернулли) и известна под названием *таблицы достаточно больших чисел*.

С увеличением количества замеров достоверность эксперимента возрастает, а доверительный интервал уменьшается. Таблица используется в том случае, когда о дисперсии исследуемой величины нельзя составить определённого мнения. Если же на основании априорных сведений или предварительных опытов σ_x известно, то по формуле случайной выборочной ошибки, равной половине длины доверительного интервала $\varepsilon_{0,5} = z\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ определяют необходимое число замеров, гарантирующее требуемую надёжность.

Пример 6.12. Построить 95 %-й коридор для функции распределения случайной величины по приведённой выборке.

$$\begin{aligned}
m &:= 250 \quad \Delta := \frac{R}{m} \quad j := 1..m \quad k := 1..m - 1 \\
x_j &:= x_{\min} + \frac{\Delta}{2} \cdot (2 \cdot j - 1) \quad f := \text{hist}(x, \xi) \quad \Delta = 0,238 \\
a_j &:= x_{\min} + \Delta \cdot (j - 1) \quad b_j := a_j + \Delta \quad F_k := \sum_{j=1}^k \frac{f_j}{n} \\
\alpha &:= 0,05 \\
p &:= 1 - \alpha \quad K(z) := \begin{cases} 0 & \text{if } z \leq 0 \\ \sum_{k=-3}^3 (-1)^k \cdot \exp(-2 \cdot k^2 \cdot z^2) & \text{if } z > 0 \end{cases} \\
z_\alpha &:= 1,358
\end{aligned}$$

Пример 6.13. Найти доверительные интервалы для математического ожидания и дисперсии выборки, заданной таблицей.

ORIGIN=1

$$\alpha := 0,1 \quad n := 10 \quad x\alpha := \text{qnorm}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \quad x\alpha = 1,645$$

$$XY := \begin{pmatrix} -0,439 & -0,679 & -0,473 & -0,951 & -1,686 & 0,044 & -0,121 & 0,556 & 2,192 & 0,809 \\ -3,580 & -2,573 & 2,566 & -0,035 & -2,667 & 3,385 & 4,4 & 4,825 & 7,506 & 3,189 \end{pmatrix}$$

$$X_{\text{mean}} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n XY_{1,i} \quad Y_{\text{mean}} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n XY_{2,i}$$

$$m := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (XY_{1,i} - X_{\text{mean}}) \cdot (XY_{2,i} - Y_{\text{mean}})$$

$$\sigma_{2x} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (XY_{1,i} - X_{\text{mean}})^2 \quad \sigma_{2y} := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (XY_{2,i} - Y_{\text{mean}})^2$$

$$k := \frac{m}{\sqrt{\sigma_{2x} \cdot \sigma_{2y}}} \quad k = 0,813$$

$$k_{\text{left}} := \tanh\left(\text{atanh}(k) - \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \quad k_{\text{left}} = 0,474$$

$$k_{\text{right}} := \tanh\left(\text{atanh}(k) + \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \quad k_{\text{right}} = 0,942$$

Доверительный интервал для коэффициента корреляции:
(0,474, 0,942)

$$k := \frac{\sum_{i=1}^n XY_{1,i} \cdot XY_{2,i} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n XY_{1,i} \cdot \sum_{i=1}^n XY_{2,i}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (XY_{1,i})^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n XY_{1,i}\right)^2\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^n (XY_{2,i})^2 - \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n XY_{2,i}\right)^2\right]}}$$

$$k = 0,813$$

$$k_{\text{min}} := \tanh\left(\text{atanh}(k) - \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \quad k_{\text{min}} = 0,474$$

$$k_{\max} := \tanh\left(\operatorname{atanh}(k) + \frac{x\alpha}{\sqrt{n-3}}\right) \quad k_{\max} = 0.942$$

Доверительный интервал для коэффициента корреляции:
(0.474, 0.942)

Пример 6.14. Вычислить доверительный интервал для дисперсии.

ORIGIN :=1 N :=15

i :=1..N x_i := i · 0.1 y_i :=READ("c:\tmp\data5.txt")

a0 :=intercept(x,y) a0 = 0.925

a1 :=slope(x,y) a1 = 2.107

y_r := a0 + a1 · x_i

Xmean :=mean(x) Xmean = 0.8

Ymean :=mean(y) Ymean = 2.611

$$s2 := \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{k=1}^N (y_k - y_{r_k})^2$$

Построение доверительного интервала для дисперсии

$$\chi_{\text{left}} := \operatorname{qchisq}\left(\frac{\alpha}{2}, N-2\right) \quad \chi_{\text{left}} = 5.892$$

$$\chi_{\text{right}} := \operatorname{qchisq}\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N-2\right) \quad \chi_{\text{right}} = 22.362$$

$$\sigma_{\text{left}} := \frac{(N-2) \cdot s2}{\chi_{\text{right}}} \quad \sigma_{\text{left}} = 0.005$$

$$\sigma_{\text{right}} := \frac{(N-2) \cdot s2}{\chi_{\text{left}}} \quad \sigma_{\text{right}} = 0.019$$

Доверительный интервал для дисперсии (0.005, 0.019)

Пример 6.15. Для предыдущего примера построить доверительный коридор и доверительную область.

Построение доверительного коридора i :=1..N

$$y_{\text{left}_i} := a0 + a1 \cdot x_i - t \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{X_{\text{mean}}^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{\text{mean}})^2}}$$

$$y_{\text{right}_i} := a0 + a1 \cdot x_i + t \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{X_{\text{mean}}^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{\text{mean}})^2}}$$

Построение доверительной области

f := qF(1 - α, 2, N - 2) i :=1..N

$$y_{\text{left}_i} := a0 + a1 \cdot x_i - 2 \cdot f \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - X_{\text{mean}})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{\text{mean}})^2}}$$

$$y_{\text{right}_i} := a0 + a1 \cdot x_i + 2 \cdot f \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - X_{\text{mean}})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{\text{mean}})^2}}$$

6.7. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Под *статистическими гипотезами* понимаются предположения относительно распределений генеральной совокупности той или иной случайной величины [1, 8, 11]. *Проверка гипотезы* заключается в сопоставлении некоторых статистических показателей, *критериев проверки* (*критериев значимости*), вычисляемых по выборке, со значениями этих показателей, определёнными в предположении, что проверяемая гипотеза верна. При проверке гипотез подвергается испытанию некоторая гипотеза H_0 в сравнении с *альтернативной гипотезой* \bar{H} , которая формулируется или подразумевается. Альтернативных гипотез может быть несколько.

Чтобы принять или отвергнуть гипотезу, ещё до получения выборки задаются уровнем значимости p . Наиболее употребительны уровни значимости 0,05; 0,02; 0,01; 0,10; 0,001. Уровню значимости соответствует доверительная вероятность $\alpha = 1 - p$. По этой вероятности, используя гипотезу о распределении оценки θ^* (критерия значимости), находят квантильные доверительные границы, как правило, симметричные $\theta_{p/2}$ и $\theta_{1-p/2}$. Числа $\theta_{p/2}$ и $\theta_{1-p/2}$ называются *критическими значениями гипотезы*; значения θ^* , меньшие, чем $\theta_{p/2}$ и большие $\theta_{1-p/2}$ образуют *критическую область гипотезы*, или *область непринятия гипотезы* (рис.6.33). Если найденное по выборке значение θ_0 попадает между $\theta_{p/2}$ и $\theta_{1-p/2}$, то гипотеза допускает такое значение в качестве случайного, и поэтому нет оснований её отвергать. Если же найденное значение θ_0 попадает в критическую область, то по данной гипотезе оно является практически невозможным. Но так как оно всё-таки появилось, то гипотеза отвергается.

При проверке гипотез можно совершать ошибки двух типов [9]. *Ошибка первого рода* состоит в том, что отвергается гипотеза, которая на самом деле верна. Вероятность такой ошибки не больше принятого уровня значимости. Например, при $p = 0,05$ можно совершить ошибку первого рода в пяти случаях из ста. *Ошибка второго рода* состоит в том, что гипотеза принимается, а на самом деле она неверна. Вероятность ошибки второго рода зависит от характера проверяемой гипотезы, от способов проверки и т.д. Эта вероятность тем меньше, чем выше уровень значимости, так как при этом увеличивается число отвергаемых гипотез. Если вероятность ошибки второго рода равна α , то $1 - \alpha$ называют *мощностью критерия*. На рисунке 6.34 приведены две кривые плотности вероятности случайной величины, соответствующие двум конкурирующим гипотезам $H(a)$ и $\bar{H}(b)$. Если из опыта получается значение $\theta > \theta_p$, то отвергается гипотеза H и принимается альтернативная гипотеза \bar{H} , и наоборот.

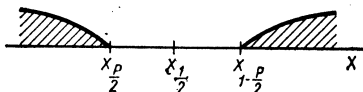


Рис. 6.33. Критическая область гипотезы

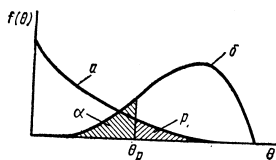


Рис. 6.34. Проверка статистических гипотез

Площадь под кривой плотности вероятности, соответствующей справедливости гипотезы H вправо от θ_p , равна уровню значимости p , т.е. вероятности ошибки первого рода. Площадь под кривой вероятности, соответствующей справедливости \bar{H} влево от u_p равна вероятности ошибки второго рода α , а вправо от u_p – мощности критерия.

Из постановки задачи, иногда, вытекает, что один из сравниваемых параметров не может быть больше другого. Такая информация даст возможность при проверке гипотезы применить односторонний критерий значимости, который имеет меньшую ошибку второго рода, чем соответствующий двусторонний.

Пример 6.16. Проверить гипотезу о величине математического ожидания нормально распределённой случайной величины $H_0: a = 1$ при альтернативной гипотезе $H_1: a \neq 1$.

```

ORIGIN=1
alpha := 0.1  N := 100  xi := rnorm(N, 1, 2)  sigma := 2

Xmean := mean(xi)  Xmean := 0.699
Xright := qnorm(1 - alpha/2, 0, 1)  Xleft := -Xright
Xright = 1.645  Xleft = -1.645
phi := (Xmean - 1) / sqrt(sigma^2 / N)  phi = -1.505

```

Гипотеза $H_0: M\xi = 1$ принимается.

6.8. СРАВНЕНИЕ ВЫБОРОЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ. ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ

Если эмпирическая кривая распределения большой выборки по внешнему виду приближается к какому-либо теоретическому закону распределения, то возникает вопрос, можно ли данную выборку рассматривать как выборку из генеральной совокупности, имеющей распределение именно по этому закону. Кроме того, если производится

две серии испытаний с фактором A и без него и в результате получают разные значения средних и дисперсий изучаемой переменной величины, то возникает вопрос, является ли это различие в средних и дисперсиях влиянием фактора A или оно носит случайный характер.

Решение перечисленных и им подобных задач в математической статистике производится путём постановки и проверки так называемой «нулевой гипотезы». Под «нулевой гипотезой» подразумевается допущение об отсутствии интересующего различия между выборками или их статистическими характеристиками.

Для проверки гипотез в математической статистике пользуются *критериями согласия*. Для того чтобы принять или забраковать гипотезу при помощи этих критериев, установлены их уровни значимости.

Уровень значимости называют также *доверительным уровнем вероятности*, который соответственно может быть принят равным $p = 0,05$; $0,02$ или $0,01$; иногда принимают $p = 0,001$. Эти уровни доверительной вероятности соответствуют классификации явлений на редкие ($p = 0,05$), очень редкие ($p = 0,01$) и чрезвычайно редкие ($p = 0,001$). Выбирая тот или иной уровень значимости критерия или уровень доверительной вероятности p , мы тем самым устанавливаем и область допустимых его значений, которая выражается вероятностью $\alpha = 1 - p$.

С уменьшением уровня значимости расширяется область допустимых значений критерия и вместе с тем теряется его чувствительность, так как повышается вероятность принять гипотезу даже в тех случаях, когда эта гипотеза неверна. Но вместе с тем выбор достаточно малого уровня значимости гарантирует от возможности неправильно забраковать верную гипотезу.

Чаще всего используется один из двух критериев согласия: *критерий Пирсона* (критерий χ^2) и *критерий Колмогорова*.

Для применения критерия χ^2 (хи-квадрат) весь диапазон изменения случайной величины в выборке объёма n ($n > 50 \dots 150$) разбивается на k интервалов. Обычно $k = 8 \dots 20$. Число элементов выборки, попавших в i -й интервал, обозначим через n_i . Если какое-либо из $n_i < 5$, то два или несколько соседних интервалов должны быть объединены в один. При этом соответственно уменьшается число степеней свободы.

Построенная гистограмма выборочного распределения может служить основанием для выбора типа закона распределения. Параметры этого закона могут быть определены из теоретических соображений или нахождением их оценок по выборке. На основании принятого закона распределения вычисляются вероятности p_i попадания случайной величины X в i -й интервал.

Вероятности p_i попадания значений случайной величины в i -й интервал для нормального закона распределения можно определить по

$$\text{формуле [9]: } p(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a - \bar{x}}{s}\right).$$

Критерий χ^2 вычисляется по следующей формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i},$$

где m – число сравниваемых частот; f_i – эмпирическая частота i -го интервала значений x ; f'_i – теоретическая частота i -го интервала значений x .

Для удобства вычисления χ^2 рекомендуется составить вспомогательную таблицу (табл. 6.6). Далее необходимо вычислять число степеней свободы k по формуле $k = m - p - 1$, где p – число параметров теоретического распределения.

6.6. Вспомогательная таблица для вычисления критерия χ^2

Интервалы x (от – до)	f_i	f'_i	$ f_i - f'_i $	$(f_i - f'_i)^2$	$\frac{(f_i - f'_i)^2}{f'_i}$
					$\Sigma = \chi^2$

Критерий λ даёт достаточно точные результаты даже при объёме выборок, состоящих из нескольких десятков членов и прост для вычислений.

Для вычисления величины λ необходимо предварительно определить $F_n(x)$ и теоретические $F(x)$ функции предполагаемого закона распределения для каждого наблюдаемого значения случайной величины x . Затем по максимальной разности этих функций определяется λ при помощи следующей формулы:

$$\lambda = |F(x) - F_n(x)|_{\max} \sqrt{n} = D\sqrt{n}. \quad (6.10)$$

Так как $F(x) = \frac{N'_x}{n}$ и $F_n(x) = \frac{N_x}{n}$, где N'_x и N_x – накопленные теоретические и эмпирические частоты, а n – объём выборки, то вместо формулы (6.10) можно пользоваться также следующей формулой

$$\lambda = \frac{|N'_x - N_x|_{\max}}{n} \sqrt{n}. \quad (6.11)$$

Накопленной частотой любого m -го значения x_i называется сумма частот всех предшествующих значений x_i , включая и частоту самого x_i ,

т.е. $N_{x_m} = \sum_{i=1}^m f_i$, где m – число значений x_i ; f_i – частота i -го значения x .

Для непрерывных случайных величин $p(D\sqrt{n} \leq \lambda) = K(\lambda)$, где

$$K(\lambda) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} (-1)^v e^{-2v\lambda^2}. \text{ Для больших } n \text{ и любом } \lambda > 0: p(\lambda) = 1 - K(\lambda).$$

Функция $K(\lambda)$ табулирована Н. В. Смирновым и при помощи таблицы значений $K(\lambda)$ составлена таблица значений $P(\lambda)$, которая приведена в прил. 12 [8].

По вычисленному значению λ по формуле (6.10) или (6.11) и прил. 12 [8] определяют $p(\lambda)$. Если вероятность $p(\lambda)$ окажется очень малой, практически, когда $p(\lambda) < 0,05$, то расхождение между $F(x)$ и $F_n(x)$ считается существенным, а не случайным и гипотеза о предполагаемом законе распределения величины x бракуется. Если же вероятность $p(\lambda)$ будет достаточно большой практически, когда $p(\lambda) > 0,05$, то гипотеза принимается.

Использование критерия λ предполагает непрерывность $F(x)$ и эмпирическая функция $F_n(x)$ построена по несгруппированным в интервалы значениям случайной величины x . Однако, когда интервалы группировки достаточно малы, критерий λ даёт, хотя и приближённую, но вполне приемлемую для практических целей оценку близости эмпирического распределения к теоретическому.

Для удобства вычисления критерия λ следует составить вспомогательную таблицу (табл. 6.7).

6.7. Данные для вычисления критерия λ

Интервалы x (от – до)	f	f/n	$F_n(x)$	$F(x)$	$ F_n(x) - F(x) $

$F_n(x)$ и $F(x)$ вычисляются в зависимости от закона распределения x .

6.9. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ В ТЕХНОЛОГИИ МАШИНОСТРОЕНИЯ

Пример 6.17. В партии деталей имеется брак, доля которого составляет 0,1. Производится последовательное извлечение 10 деталей. После каждого извлечения и обследования детали она вновь возвращается в партию, которая затем тщательно перемешивается, т.е. испытания носят независимый характер. Какова вероятность того, что при извлечении по такой схеме 10 деталей среди них появится одна бракованная?

Вероятность извлечения бракованной детали составляет $p = 0,1$, вероятность противоположного события – извлечение годной детали $q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9$. Число испытаний $n = 10$ и $k = 1$:

$$P = (10,1) = \frac{10!}{1!9!} \cdot 0,1 \cdot 0,9^9 = 0,387.$$

Полученный результат можно отнести и к тому случаю, когда извлекается подряд 10 деталей без возврата их обратно в партию, но объём партии достаточно велик. При достаточно большой партии, например 1000 шт., вероятность извлечения годной или негодной детали после каждого из 10 извлечений деталей изменится ничтожно мало. Поэтому при таких

условиях извлечение бракованной детали можно рассматривать как событие, не зависящее от результатов предшествующих испытаний.

Пример 6.18. На участке имеется несколько одинаковых станков, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. Какова вероятность того, что в середине смены при нормальном ходе производства из пяти таких станков будет работать только два, а три не работать? Здесь $p = 0,8$; $q = 0,2$; $n = 5$ и $k = 2$:

$$p = (5,2) = \frac{5!}{2!3!} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,051.$$

Пример 6.19. В партии деталей имеется 1 % брака. Какова вероятность того, что при взятии из партии выборки объёмом 50 шт. в ней будет находиться 0, 1, 2, 3, 4 дефектных деталей. Здесь $p = 0,01$; $n = 50$; $np = 50 \cdot 0,01 = 0,5$:

$$p = (50,0) = \frac{0,5^0}{0!} e^{-0,5} = 0,607; \quad p = (50,1) = \frac{0,5^1}{1!} e^{-0,5} = 0,303;$$

$$p = (50,2) = \frac{0,5^2}{2!} e^{-0,5} = 0,075; \quad p = (50,3) = \frac{0,5^3}{3!} e^{-0,5} = 0,012;$$

$$p = (50,4) = \frac{0,5^4}{4!} e^{-0,5} = 0,001.$$

Пример 6.20. Допустимый процент брака во всей партии составляет 1 %, т.е. 0,01. Объём выборки $n = 50$. Определить вероятность того, что в выборке окажется 1, 2, 3 и более дефектных деталей.

Определим сначала вероятности того, что в выборке окажется 0, 1, 2, 3 и т.д. дефектных деталей. Из предыдущего примера имеем: $p(50,0) = 0,607$; $p(50,1) = 0,303$; $p(50,2) = 0,075$; $p(50,3) = 0,012$; $p(50,4) = 0,001$. Отсюда $p(50,1 \text{ или более}) = 1 - 0,607 = 0,393$; $p(50,2 \text{ или более}) = 0,393 - 0,303 = 0,09$; $p(50,3 \text{ или более}) = 0,090 - 0,075 = 0,015$; $p(50,4 \text{ или более}) = 0,015 - 0,012 = 0,003$.

Следовательно, если в выборке обнаружится три или более дефектные детали, то в силу малой вероятности такого явления ($p = 0,015$) надо считать, что во всей в действительности доля брака более чем 0,01.

6.9.1. Погрешности механической обработки и законы их распределения

Источниками погрешностей механической обработки деталей является система СПИД.

Погрешности обработки делят на три вида: погрешности размера, погрешности формы и погрешности взаимного расположения поверхностей и осей детали. Кроме того, *все погрешности механической обработки по характеру их образования, имея ввиду общепринятую классификацию погрешностей вообще, также можно классифицировать на три основных вида: постоянные, функциональные и случайные.*

Постоянные погрешности обработки возникают вследствие неточности настройки режущего инструмента на размер, неточности изготовления станка, приспособления и мерного режущего инструмента [8]. В зависимости от вида обрабатываемой поверхности и изучаемого параметра точности обработки устанавливается доминирующая причина постоянных погрешностей. Например, при обработке наружных и внутренних поверхностей резцом или фрезой доминирующей причиной постоянных погрешностей обработки будет неточность установки режущего инструмента на размер; при обработке мерным инструментом (развёрткой, зенкером, протяжкой и т.п.) основной причиной постоянных погрешностей будет неточность изготовления режущего инструмента; при нарезании резьбы на токарно-винторезном станке основной причиной постоянной погрешности шага нарезаемой резьбы будет неточность шага ходового винта станка и т.д.

Для погрешностей формы и взаимного расположения поверхностей основными источниками постоянных погрешностей являются геометрические неточности станка.

Функциональные погрешности обработки возникают вследствие размерного износа режущего инструмента и его температурных деформаций от нагрева в процессе резания, а также от температурных деформаций станка и обрабатываемой детали. Все эти погрешности являются функцией времени работы станка и режущего инструмента. Температурные деформации станка носят временный характер: по истечении определённого времени работы его температура стабилизируется и деформация частей станка прекращается, а погрешность, возникающая по этой причине, превращается в постоянную.

При работе на настроенных станках или при работе мерным режущим инструментом размерный износ систематически изменяет размер каждой новой детали на удвоенную величину износа инструмента при выполнении диаметральных размеров или только на величину износа при выполнении размеров длин. Размерный износ u режущих инструментов протекает во времени τ по закону, выражаемому кривой 1, показанной на рис. 6.35. Если работа производится предварительно доведённым инструментом, размерный износ будет изменяться во времени по закону прямой (рис. 6.35, кривая 2). При этом период стойкости инструмента увеличится, так как доводка инструмента повышает его износостойкость в 1,5 и более раз.

Размерный износ режущего инструмента и интенсивность износа зависят от материала режущего инструмента и материала обрабатываемой детали, от режима резания и геометрии инструмента. Характеристикой интенсивности размерного износа является относительный (удельный)

износ $u_0 = \frac{1000u}{l}$, где $l = v\tau$ – путь резания, отнесённый к 1000 мм;

v – скорость резания в м/мин; τ – время работы режущего инструмента.

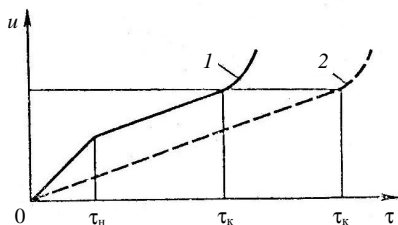


Рис. 6.35. Зависимость размерного износа u от времени работы реза:

1 – для недоведённого реза; 2 – для доведённого реза;

участки: 0 – τ_n – период приработки (начальный износ инструмента);

τ_n – τ_k – нормальный износ инструмента;

от τ_k до конца кривой – катастрофический износ

Если известен относительный износ режущего инструмента, погрешность обработки Δ_u , вызванная размерным износом его, может быть

определена для диаметральных размеров $\Delta_u = 2 \frac{u_0 l}{1000} = 2 \frac{u_0 v \tau}{1000}$, мкм

и для размеров длин $\Delta_u = \frac{u_0 v \tau}{1000}$, мкм.

Температурные деформации режущего инструмента Δl в зависимости от времени τ его работы протекают по закону, показанному на рис. 6.36. По такому же закону происходит и изменение размеров обрабатываемой детали в связи с температурными деформациями режущего инструмента. Например, при обработке резцом наружных цилиндрических поверхностей диаметр каждой обрабатываемой детали сначала будет прогрессивно уменьшаться, а затем после некоторого периода времени τ_c размер стабилизируется и функциональная погрешность после момента времени τ_c превратится в постоянную погрешность.

В настоящее время не имеется достаточно полных и точных данных по относительному износу различных режущих инструментов, а также данных для аналитических расчётов величины изменения размеров режущего инструмента в зависимости от условий работы. Поэтому этот вид погрешностей может быть определён только опытным путём для данных конкретных условий.

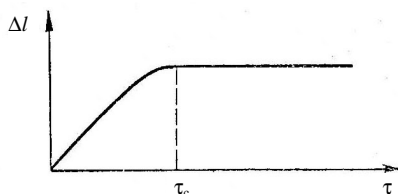


Рис. 6.36. Удлинение Δl в зависимости от времени τ работы реза

Если обработка производится с обильным охлаждением, то погрешности обработки, вызванные температурными деформациями режущего инструмента $\Delta_{т,и}$, имеют весьма малые значения и ими можно пренебречь.

При обработке деталей из штучных заготовок важное значение имеет время перерывов в работе режущего инструмента. Если время перерывов будет равно или больше времени работы инструмента, то за этот период инструмент полностью охладится и изменение его размеров от нагрева для каждой новой детали будет носить постоянный характер и больше влиять на форму детали (например, конусность), чем на размер.

В зависимости от длительности времени работы резца и времени перерывов, наличия или отсутствия доводки режущих граней инструмента суммарная величина функциональных погрешностей при одной настройке станка будет изменяться во времени по одному из следующих законов (рис. 6.37).

При обработке внутренних поверхностей кривые изменения функциональных погрешностей во времени будут аналогичны, но повернуты относительно оси абсцисс на 180° .

Случайные погрешности обработки возникают от многих причин, но главными из них являются упругие деформации системы СПИД и зазоры в отдельных узлах станка.

Колебания силы резания возникают главным образом из-за неравномерного припуска на обработку и неравномерной твёрдости материала обрабатываемых деталей. Наибольшее значение для образования случайных погрешностей обработки имеет составляющая силы резания P_y , которая для точения определяется по следующей формуле:

$$P_y = C_y HB^n t^x s^y.$$

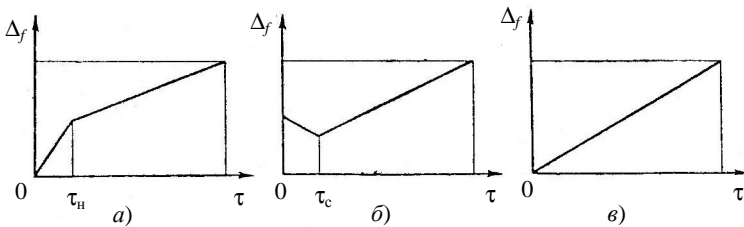


Рис. 6.37. Изменение суммарной величины функциональных погрешностей Δ_f во времени при различных условиях работы:

- a* – работа недоведённым режущим инструментом без охлаждения, время перерывов меньше времени работы инструмента и $\Delta_u > \Delta_{т,и}$ в момент времени τ_n или при работе с охлаждением недоведённым инструментом;
- б* – при $\Delta_u < \Delta_{т,и}$ или при работе доведённым резцом без охлаждения и время перерывов инструмента меньше времени его работы;
- в* – при работе доведённым инструментом с охлаждением или без него и если время перерывов равно или больше времени работы инструмента

Так как C_y , HB^n и t^x не являются постоянными величинами и для каждой новой детали могут иметь свои значения, то предел колебания силы P_y для данной партии деталей будет равен

$$\Delta P_y = P_{y_{\max}} - P_{y_{\min}} = C_{y_{\max}} HB_{\max}^n t_{\max}^x s^y - C_{y_{\min}} HB_{\min}^n t_{\min}^x s^y.$$

Величина отжатия режущего инструмента от обрабатываемой детали будет равна $y = P_y/j = P_y W$, где j – жёсткость системы СПИД; W – податливость системы СПИД.

Так как P_y колеблется в пределах $\Delta P_y = P_{y_{\max}} - P_{y_{\min}}$, то и размеры обрабатываемых деталей в данной партии будут колебаться в пределах $\Delta y = y_{\max} - y_{\min}$. Для обработки цилиндрических поверхностей $\Delta y = 2(y_{\max} - y_{\min})$. Для односторонней обработки деталей $\Delta y = \Delta P_y W$ и для обработки цилиндрических поверхностей $\Delta y = 2\Delta P_y W$.

Если известны пределы колебаний HB , t в данной партии заготовок и значение коэффициента C_y для остро заточенного инструмента в начале обработки (и после его притупления в конце обработки) партии деталей, а также податливость системы, то предел колебания случайных погрешностей Δy может быть вычислен аналитически. Однако учитывая приближенность эмпирической формулы для P_y , эти вычисления будут также носить приближённый характер.

Случайные погрешности, кроме перечисленных двух основных причин, возникают также в результате неравномерности процесса резания, образования и срыва наростов на лезвии режущего инструмента, из-за упругих деформаций детали под действием колеблющейся силы зажима, из-за температурных деформаций обрабатываемой детали под влиянием колеблющейся температуры нагрева детали, от несоответствия настроечных баз с конструкторскими, от внутренних напряжений в материале заготовок и ряде других причин. Все перечисленные причины обычно действуют одновременно и возникающие от них случайные погрешности суммируются, образуя результирующую величину случайных погрешностей для данной детали.

В силу изменчивости функциональных и случайных погрешностей суммарная погрешность обработки одной детали будет отличаться от суммарной погрешности другой детали. В результате этого возникает рассеивание погрешностей размеров и формы деталей в партии, обработанной с одной настройки станка. Это рассеивание может подчиняться различным законам распределения. Однако для погрешностей размеров часто находят применение закон нормального распределения.

Выбор закона нормального распределения для исследования погрешностей размера обосновывается теоремой Ляпунова. При этом должны соблюдаться следующие условия:

1) если наблюдаемая величина x является суммой частных величин x_i , вызванных действием значительного числа случайных и некоторого числа систематических факторов;

2) если влияние всех случайных факторов на суммарную величину одного порядка, т.е. среди них нет резко доминирующих;

3) если случайные факторы взаимно независимы и число их не изменяется во времени;

4) если число систематических факторов остаётся одинаковым и постоянным во времени.

Отступление от нормального закона распределения действительных размеров партии деталей может быть вызвано в основном тремя причинами: 1) наличием доминирующей случайной погрешности или доминирующей систематической погрешности, закономерно изменяющейся во времени; 2) наличием переменного рассеивания из-за неполадок в станке или резкого колебания механических свойств материала обрабатываемых заготовок; 3) одновременным действием первой и второй причин.

Использование закона нормального распределения позволяет производить объективную оценку точности технологического процесса или отдельных его операций.

В общем виде суммарную погрешность обработки Δ для данной настроечной партии деталей можно выразить следующим уравнением:

$$\Delta = \Delta_n + \frac{1}{K} \sqrt{\Delta_\phi^2 K_\phi^2 + \Delta_c^2}, \quad (6.12)$$

где Δ_n – сумма постоянных погрешностей; Δ_ϕ – сумма функциональных погрешностей; Δ_c – сумма случайных погрешностей; K и K_ϕ – коэффициенты относительного рассеивания.

Сопоставление суммарной погрешности обработки Δ с допуском на размер 2δ позволяет оценить точность обработки на данной операции.

Из уравнения (6.12) следует, что когда функциональные погрешности отсутствуют или имеют пренебрежимо малое значение, то поле рассеивания действительных размеров деталей определяется только случайными погрешностями, суммарная величина которых равна $\Delta_c = 6\sigma$, где σ – среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей от их среднего значения.

Если функциональные погрешности являются доминирующими, то под их влиянием суммарная погрешность обработки будет изменяться во времени. В этом случае суммарная погрешность обработки должна определяться для определённого времени с момента пуска станка. Для этого нужно уметь определять раздельно величины случайных и функциональных погрешностей. В связи с этим в технологии машиностроения различают два вида распределений: мгновенное и суммарное.

Под мгновенным распределением понимается распределение изучаемого признака в генеральной совокупности, которое имело бы место, если бы действие всех производственных факторов оставалось таким (или примерно таким), каким оно является в данный момент времени. Другими словами, функциональные погрешности оставались бы постоянными и равными по величине тому значению, какое они имеют в данный момент. Поэтому мгновенное распределение по существу является распределением только случайных погрешностей обработки.

Под суммарным распределением обычно понимается итоговое распределение изучаемого признака в партии деталей, изготовленных за период времени от наладки до подналадки станка.

Совокупность с мгновенным распределением называют *мгновенной совокупностью* [8].

Малую текущую выборку из продукции, обрабатываемой на настроенном станке, можно рассматривать как выборку из мгновенной совокупности, подчиняющейся определённому закону распределения. Если речь идёт о погрешностях размеров деталей, то можно считать, что мгновенная совокупность подчиняется закону нормального распределения.

При обработке мелких деталей на автоматах, когда машинное время обработки отдельных поверхностей измеряется в десятых или сотых долях минуты, большую выборку из текущей продукции станка также можно рассматривать как выборку из мгновенной совокупности, так как функциональные погрешности в этом случае будут ничтожно малы. По такой выборке можно установить закон распределения мгновенной совокупности или закон распределения только случайных погрешностей.

6.9.2. Теоретические диаграммы точности обработки

Изменение во времени суммарной погрешности обработки и её основных составляющих при обработке наружных цилиндрических поверхностей на настроенных станках токарной группы можно выразить при помощи четырёх типов теоретических точностных диаграмм упрощённого вида (рис. 6.38) [8]. Упрощения заключаются в том, что изменения функциональных погрешностей приняты по линейному закону, а рассеивание случайных погрешностей – постоянным во времени.

Линия 1, параллельная оси абсцисс, определяет постоянные погрешности, линии 2 и 4 определяют пределы рассеивания случайных погрешностей, а линия 3 характеризует изменение среднего значения суммарной погрешности обработки под влиянием функциональных погрешностей.

Для обработки отверстий диаграммы будут иметь аналогичный вид, но повернуты на 180° относительно оси абсцисс.

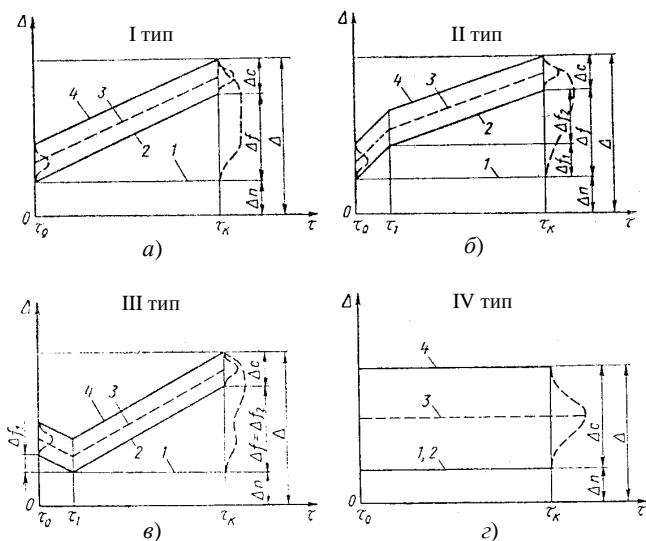


Рис. 6.38. Теоретические диаграммы точности обработки наружных цилиндрических поверхностей на настроенных станках:

a – работа с охлаждением доведённым резцом (отсутствует начальный износ его и удлинение от нагрева) или при работе без охлаждения доведённым резцом при условии, что время перерывов равно или больше времени работы резца; *б* – работа недоведённым резцом с охлаждением или без охлаждения (при этом удлинение его от нагрева в момент стабилизации температуры меньше размерного износа за этот же отрезок времени ($\tau_1 - \tau_0$)) или при работе без охлаждения недоведённым резцом (время перерывов равно или больше времени работы резца); *в* – работа без охлаждения доведённым или недоведённым резцом, удлинение которого от нагрева в момент стабилизации температуры больше размерного износа его за тот же период времени ($\tau_1 - \tau_0$); *г* – при отсутствии функциональных погрешностей (обработка очень мелких деталей с малым машинным временем доведённым инструментом с применением охлаждения или без него, если время перерывов равно или больше времени работы инструмента) и при обработке любых деталей на станках, оснащённых устройствами для автоматической подналадки резцов малыми импульсами; τ_0 – момент пуска станка; τ_1 – время наступления стабилизации температуры резца; τ_k – время окончания работы станка в связи с необходимостью его подналадки

Диаграммы I, II и III типа отражают характер изменения погрешностей обработки во времени с момента пуска станка. Если же станок уже предварительно проработал некоторое время ($\tau > \tau_1$), то для всех трёх случаев будет иметь место только один первый тип диаграммы.

В ряде случаев точностные диаграммы могут иметь отступления от рассмотренных четырёх типов.

6.9.3. Задачи статистического анализа точности механической обработки

Статистическое изучение точности обработки сводится к выявлению фактического поля рассеивания суммарной погрешности обработки в настроенной партии и сопоставлению его с полем допуска на размер.

Если поле рассеивания размеров в настроенной партии равно или меньше поля допуска на размер, то точность данной операции признаётся удовлетворительной или хорошей. В противном случае неизбежен брак. За время обработки могут произойти временные неполадки в технологической системе СПИД, которые вызовут существенные изменения в рассеивании размеров в отдельные периоды времени и повлияют на суммарное рассеивание в настроенной партии. Поэтому для анализа точности обработки важно знать не только величину поля рассеивания настроенной партии, но также и *степень устойчивости изучаемого процесса во времени.*

Под устойчивостью процесса во времени понимают его свойство без дополнительных регулировок сохранять требуемую точность за время обработки партии деталей с одной настройки станка.

Различают два вида устойчивости процессов во времени: технологическую и статистическую [8].

Процесс является технологически устойчивым, если за время обработки настроенной партии все размеры деталей находятся в пределах допуска. Процесс является статистически устойчивым, если за время обработки настроенной партии статистические характеристики рассеивания размеров деталей (дисперсия случайных погрешностей s^2 и средняя арифметическая суммарной погрешности обработки) сохраняют постоянство своих значений (диаграмма точности IV типа).

Процессы называют статистически устойчивыми по рассеиванию, если дисперсия $s^2 = \text{const}$, а среднее значение закономерно изменяется во времени (диаграмма точности I, II и III типа).

Для того чтобы процесс был точен и можно было бы систематически наблюдать за его точностью во времени, необходимо добиться таких условий течения процесса во времени, при которых он приближался бы к одной из четырёх типов теоретических диаграмм точности.

Основными задачами статистического анализа являются:

1) установление вида статистической устойчивости процесса, выявление причин неустойчивости процесса во времени и приведение его в устойчивое состояние;

2) определение точности процесса.

Статистический анализ устойчивости и точности процесса можно проводить тремя основными методами: методом больших выборок, методом малых выборок и методом точечных диаграмм [8].

6.9.3.1. Статистический анализ с помощью точечных диаграмм

Преимущества метода: 1) малые текущие выборки; 2) не вычисляются критерии для проверки гипотез однородности средних и дисперсий выборок, а также гипотезы случайности каждой выборки.

В течение смены через определённые промежутки времени со станка берутся текущие выборки объёмом $n = 5$. Действительные размеры деталей выборки измеряются шкальным измерительным инструментом с ценой деления шкалы $\Delta d = (1/6 - 1/10)2\delta$. Полученные размеры в виде точек наносятся на диаграмму (рис. 6.39).

Более наглядное представление об устойчивости процесса дают точечные диаграммы, на которых нанесены не действительные размеры деталей выборки, а их средние значения и размахи. Таких диаграмм строится две: одна для наблюдений за средними выборки \bar{x} , а другая для наблюдений за размахами выборок R (рис. 6.40).

Различают две формы статистического анализа с помощью точечных диаграмм: пассивную и активную.

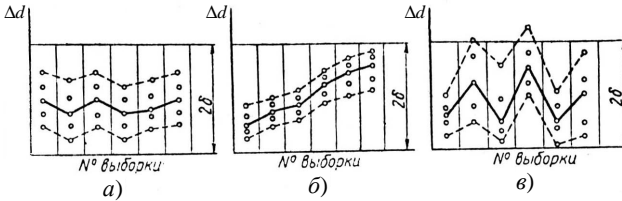


Рис. 6.39. Точечные диаграммы для индивидуальных значений выборок:
а – процесс устойчивый по рассеиванию и по центру рассеивания;
б – процесс устойчивый только по рассеиванию (имеется систематическая погрешность, величина которой доминирующая); *в* – неустойчивый процесс (существенные неполадки в системе СПИД)

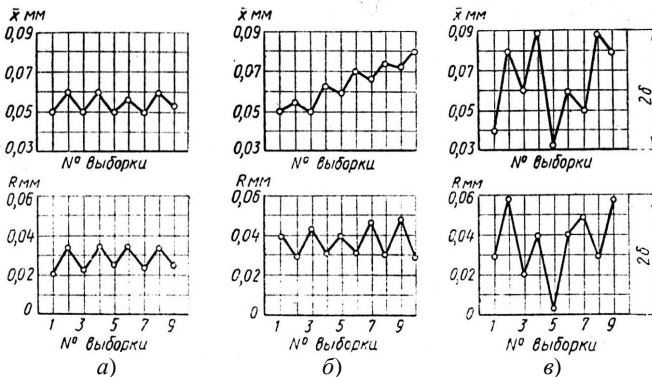


Рис. 6.40. Точечные диаграммы для средних \bar{x} и размахов R выборок:
а – устойчивый процесс; *б* – устойчивый только по рассеиванию процесс;
в – неустойчивый процесс

Крайние точки каждой выборки на диаграммах характеризуют величину размаха, а третья точка снизу является медианой выборки. Медиана используется вместо среднего арифметического размера выборки, а размах – вместо среднего квадратического отклонения.

При пассивной форме анализа наблюдения за ходом процесса ведутся в течение смены без какого-либо вмешательства в процесс. Берутся выборки, заполняются точечные диаграммы и отмечаются все действия наладчика и рабочего, а также поведение самого станка. Затем производится тщательный анализ результатов наблюдений, выявляются основные причины неустойчивости процесса, разрабатываются мероприятия по устранению замеченных неполадок, производится их устранение и после этого статистический анализ повторяется вновь до тех пор, пока процесс не будет приведён в устойчивое состояние.

Активная форма статистического анализа заключается в том, что при обнаружении каких-либо неполадок в процессе станок немедленно останавливается, выявляются причины неполадок, производится их устранение и затем станок вновь пускается в работу для дальнейших наблюдений над ним. Когда процесс тем или иным способом будет приведён в устойчивое состояние, берут окончательно не менее 16 выборок объёмом в 5 шт. каждая или одну большую выборку $n \geq 100$ шт., производят определение статистических характеристик рассеивания и вычисление показателей точности процесса по одной из рассмотренных выше методик.

После того как процесс будет приведён в устойчивое состояние, необходимо организовать систематическое наблюдение за его устойчивостью и своевременно принимать меры для устранения причин, вызывающих нарушение устойчивости процесса. Для этой цели служит статистическое регулирование технологического процесса.

6.9.3.2. Статистические методы регулирования технологических процессов

Основной задачей статистического метода регулирования технологических процессов является наблюдение за их устойчивостью с целью предупреждения возможных нарушений и устранения причин этих нарушений путём соответствующего регулирования процесса. Вместе с этим происходит одновременно и предупреждение появления брака.

Рассмотрим две разновидности статистических методов регулирования технологических процессов. В обоих методах для наблюдений за процессом используются точечные диаграммы.

В методе средних и размахов наблюдение за ходом технологического процесса производится с помощью средних арифметических и размахов малых выборок, отбираемых из текущей продукции станка [8]. Предварительно строятся две диаграммы, как на рис. 6.40. На диаграмме для средних наносятся две горизонтальные линии V_m и H_m (рис. 6.41), соответствующие верхнему и нижнему предельным отклонениям размера детали по чертежу от его номинального значения.

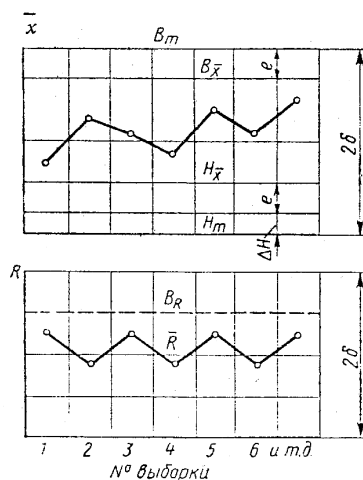


Рис. 6.41. Схема контрольной карты для статистического регулирования процессов по методу средних и размахов

Интервал между этими линиями, называемыми линиями верхнего и нижнего технического предела, будет равен 2δ , т.е. допуску на контролируемый размер. Далее на эту же диаграмму наносятся ещё две параллельные линии, которые называются линиями верхних и нижних контрольных пределов $B_{\bar{x}}$ и $H_{\bar{x}}$.

Интервалы между контрольными линиями определяют границы допустимых случайных колебаний значений средних выборок. На диаграмме размахов также наносится одна горизонтальная линия, называемая линией верхнего контрольного предела для размахов B_R . Эта линия определяет границу допустимых случайных значений размахов выборок.

После подготовки диаграмм приступают к наблюдениям за процессом обработки деталей на данном станке. Через определённые промежутки времени, зависящие от производительности станка и степени устойчивости процесса, берут из текущей продукции станка малую выборку, обычно объёмом в 5 шт. и измеряют каждую деталь выборки шкальным измерительным инструментом с ценой деления $\Delta d = (1/6 - 1/10)2\delta$, вычисляют среднее арифметическое \bar{x} и размах R выборки, которые и наносят в виде точек на диаграммы.

Если при наблюдениях за процессом, точки на диаграммах средних размахов не выходят за пределы контрольных линий, то процесс находится в устойчивом состоянии и, следовательно, имеются все основания считать детали, изготовленные до момента взятия выборки, годными. Выход за контрольные пределы \bar{x} выборки свидетельствует о неполадках в настройке инструмента на размер, а выход за контроль-

ный предел R – о неполадках в самом станке или в установочно-зажимном приспособлении. Причиной этого может быть также увеличение твёрдости обрабатываемого материала или увеличение припуска на обработку. После устранения неполадок станок пускается в работу, а все детали, изготовленные до этой выборки, подвергаются контролю предельными калибрами.

Если в результате статистического анализа процесса установлено, что он является стабильным по рассеиванию и по положению центра рассеивания, то при расчёте ординат контрольных линий используют среднее квадратическое отклонение суммарного распределения σ . Если же процесс является стабильным только по рассеиванию и технологически устойчивым во времени, при расчётах ординат используют среднее квадратическое отклонение мгновенного распределения σ_m .

Значения величин на диаграммах (рис. 6.41 и 6.42) для процессов всех типов точности определяются следующим образом:

- для наружной обработки $B_{\bar{x}} = B_m - e$, $H_{\bar{x}} = H_m + \Delta H + e$;
- для внутренней обработки $B_{\bar{x}} = B_m - \Delta H - e$, $H_{\bar{x}} = H_m + e$,

$e = 3\sigma_m - \frac{3\sigma_m}{\sqrt{n}} = 3\sigma_m \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, где σ_m – среднее квадратичное отклонение

мгновенного распределения, определяемое по результатам статистического анализа; n – объём выборки;

– значения погрешности настройки Δ_n определяются по результатам статанализа или принимаются равными 0,1·2 δ ;

– $\bar{X}_{\bar{x}} = \bar{X}_0$, $S_{\bar{x}} = \sigma_m / \sqrt{n}$;

– среднее арифметическое размахов $\bar{R} = d_n \sigma_m$;

– среднее квадратическое отклонение размахов $\sigma_R = T_n \sigma_m$, где d_n и T_n – коэффициенты, зависящие от объёма выборки n ; σ_m – мера рассеивания мгновенного распределения;

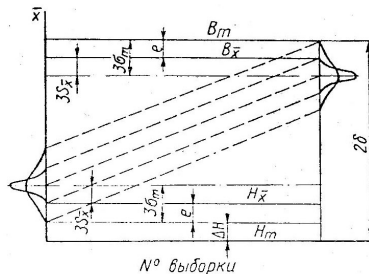


Рис. 6.42. График расчёта ординат $B_{\bar{x}}$ и $H_{\bar{x}}$ для процессов, устойчивых только по рассеиванию

Значения T_n приведены ниже:

n	5	6	7	8	9	10
T_n	0,864	0,848	0,833	0,820	0,808	0,797

$$- B_R = d_n \sigma_M + 3T_n \sigma_M = (d_n + 3T_n) \sigma_M; \quad H_R = (d_n - 3T_n) \sigma_M.$$

Если объём выборок $n \leq 7$, то принимают $H_R = 0$.

В *методе медиан и крайних значений* на точечную диаграмму, называемую контрольной картой, наносится шесть горизонтальных линий, которые устанавливают пределы колебаний действительных размеров, медиан и крайних значений выборки (рис. 6.43), B_K и H_K – линии верхнего и нижнего контрольного предела для крайних значений.

Если в процессе контроля медиана или одно из крайних значений выходят за пределы контрольных линий, то это является сигналом о нарушении устойчивости процесса, о появлении систематической причины, вызывающей появление брака.

Расчёт ординат контрольных линий производится по формулам:

$$\begin{cases} B_K = B_m - e_K = B_m - K_K \sigma_M; & B_M = B_m - e_M = B_m - K_M \sigma_M; \\ H_K = H_m + e_K = H_m + K_K \sigma_M; & H_M = H_m + e_M = H_m + K_M \sigma_M, \end{cases}$$

где K_K и K_M – коэффициенты, зависящие от объёма n выборки.

При этом для обработки наружных поверхностей необходимо к H_m прибавлять $\Delta_n = 0,1 \cdot 2\delta$, а для обработки внутренних поверхностей из B_m вычитать $0,1 \cdot 2\delta$.

Значения коэффициентов приведены ниже:

n	3	5	7	9
K_K	0,68	0,5	0,38	0,3
K_M	1,00	1,45	1,38	1,82

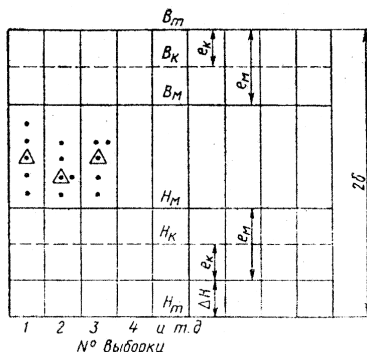


Рис. 6.43. Схема контрольной карты для статистического регулирования процессов по методу медиан и крайних значений

Преимущества метода: 1) отпадает необходимость в каких-либо вычислениях в процессе наблюдений, так как в качестве характеристик рассеивания значений наблюдаемой величины используются медиана и крайние значения малых выборок, которые заменяют средние x и размах R ; 2) строится только одна диаграмма, на которую в виде точек наносятся действительные отклонения размеров от их номиналов; 3) медиана выборки легко определяется по точечной диаграмме – как третья точка снизу или сверху (количество деталей в выборке принимают равным нечётному числу, обычно $n = 5$).

6.9.4. Статистические методы настройки станков

При внедрении статистического регулирования технологических процессов важное значение имеет рациональная настройка станков. Существует *три метода настройки станков* [8]: а) по пробным деталям; б) по эталону; в) по методу взаимозаменяемых настроек.

Метод настройки по пробным деталям заключается в том, что положение режущего инструмента и упоров, а также корректировка этого положения производится по результатам измерения пробных деталей, обработанных на настраиваемом станке.

Метод настройки по эталону заключается в том, что режущий инструмент и упоры устанавливаются в нерабочем состоянии станка по заранее изготовленному эталону, представляющему собой прототип детали, обработанной на данной операции.

Метод взаимозаменяемых настроек состоит в том, что как и в предыдущем случае, режущий инструмент и упоры устанавливаются в нерабочем состоянии станка, но для закрепления режущего инструмента создаются специальной конструкции державки и многорезцовые блоки, которые позволяют регулировать положение режущего инструмента относительно постоянной базы и настраивать его на необходимый размер вне станка.

6.9.4.1. Настройка станков по пробным деталям

При настройке станков по пробным деталям определяют *настроечный размер*. Настроечным называется размер, который необходимо получить при обработке пробных деталей на настраиваемом станке. В качестве полученного настроечного размера необходимо принимать среднее арифметическое значение размеров $n = 4 - 9$ пробных деталей. Число n зависит от требуемой точности настройки станка, но не должно быть большим с целью исключения влияния функциональных погрешностей обработки на средний арифметический размер.

Среднее арифметическое значение размеров из n пробных деталей характеризует фактический центр «мгновенного рассеивания» в начальный период работы станка. Для рациональной настройки необходимо, чтобы фактический центр «мгновенного рассеивания» лежал в пределах допустимых значений настроечного размера. Поэтому уста-

навливают допуск на настройку $\Delta_n = 2\delta_n$. Допуск на настройку зависит от предельных значений погрешности настройки, которая, в свою очередь, зависит от погрешности измерения пробных деталей $\Delta_{изм}$, от погрешности регулирования положения режущего инструмента относительно обрабатываемой детали $\Delta_{рег}$ и от погрешности самого метода расчёта величины настроечного размера по пробным деталям $\Delta_{расч}$.

Погрешность измерения зависит от точности измерительного инструмента.

Погрешности регулирования режущего инструмента зависят от способа перемещения его при настройке (винтом с отсчётом величины перемещения лимбом или индикатором, или миниметром). В таблице 6.8 приведены погрешности регулирования положения режущего инструмента по лимбу в зависимости от цены деления лимба.

6.8. Погрешности установки инструмента по лимбу

Цена деления лимба, мкм	Погрешность установки инструмента, мкм	Погрешность в диаметре, мкм
0,01	5 – 10	10 – 20
0,05	15 – 30	30 – 50
0,1 – 0,5	30 – 70	–

При использовании индикаторов $\Delta_{рег} = \pm (10...30)$ мкм, при использовании миниметров $\Delta_{рег} = \pm (5...10)$ мкм.

Погрешность метода расчёта величины настроечного размера $\Delta_{расч}$ зависит от точности станка и числа пробных деталей n : $\Delta_{расч} = \pm \sigma / \sqrt{n}$.

Суммарная величина погрешности настройки её будет равна $\Delta_n = \pm K \sqrt{\Delta_{изм}^2 + \Delta_{рег}^2 + \Delta_{расч}^2}$, где $K = 1,2$ – коэффициент относительно рассеивания, характеризующий отличие законов распределения $\Delta_{изм}$, $\Delta_{рег}$ и $\Delta_{расч}$ от нормального.

При настройке необходимо выбирать измерительный инструмент такой точности, чтобы общая погрешность настройки $2\delta_n$ составляла незначительную часть допуска 2δ на размер обрабатываемой детали, например, не более 10 % от 2δ , т.е. необходимо, чтобы $2\delta_n \leq 0,1 \cdot 2\delta$.

В зависимости от типа точности процесса настроечный размер D_n для диаметральных размеров определяется по следующим формулам:

– для процессов I, II и IV типа соответственно для наружных и внутренних цилиндрических поверхностей

$$\begin{cases} D_n = D_{нм} + 3\delta_m + \delta_n; \\ D_n = D_{нб} - 3\delta_m - \delta_n; \end{cases} \quad (6.13)$$

– для процессов III типа соответственно для наружных и внутренних цилиндрических поверхностей

$$\begin{cases} D_n = D_{нм} + 3\sigma_m + \Delta f_1 + \sigma_n; \\ D_n = D_{нб} - 3\sigma_m - \Delta f_1 - \sigma_n; \end{cases} \quad (6.14)$$

– для линейных размеров формулы будут аналогичными и зависеть от того, являются ли размеры охватываемыми или охватывающими.

Полученные по формулам (6.13) и (6.14) настроечные размеры необходимо рассматривать как номинальные размеры. Допуск $2\delta_n$ следует располагать симметрично в плюс и минус, т.е. настроечный размер с его предельным отклонением будет равен $D_n \pm \delta_n$.

После предварительной настройки режущего инструмента на размер, близкий к настроечному, необходимо обработать n пробных деталей и вычислить средний арифметический размер \bar{D} из n пробных деталей. Если средний размер пробных деталей будет лежать внутри пределов $D_n \pm \delta_n$, т.е. $D_n - \delta_n \leq \bar{D} \leq D_n + \delta_n$, то настройка считается правильной.

Для поднастройки инструмента в связи с его размерным износом независимо от типа точности процесса следует вычислять D_n по формуле (6.13).

Для процессов IV типа точности допуск на настройку можно определять по формуле $2\delta_n = 2\delta - 6\sigma_m$.

Вероятность α приближённого равенства $\bar{D} \approx D_n$ при точности $\varepsilon = \pm\delta_n$ равна $p(D_n - \delta_n \leq \bar{D} \leq D_n + \delta_n) = \alpha$. Для определения вероятности α можно воспользоваться распределением t Стьюдента $t_\alpha = \frac{\delta_n \sqrt{n}}{s}$, числом степеней свободы $k = n - 1$ и таблицами прил. 2 и 5.

Преимущества настройки по пробным деталям: 1) высокая точность; 2) с увеличением числа пробных деталей точность настройки увеличивается.

Недостатки настройки по пробным деталям: 1) высокая трудоёмкость, особенно при обработке на автоматах и полуавтоматах; 2) метод мало пригоден для станков с программным управлением и для станков, встроенных в автоматические линии; 3) часть пробных деталей идёт в брак.

Область применения метода: для станков, обрабатывающих мелкие, несложной конфигурации детали, например, для настройки фасонно-отрезных автоматов, одношпиндельных токарно-револьверных автоматов и револьверных станков, обрабатывающих простые по конфигурации детали из пруткового материала.

6.9.4.2. Настройка станков по эталонам

Для станков токарной группы эталоном является образец детали, изготовленной из закалённой стали с размерами, несколько отличными от заданных на рабочем чертеже этой детали.

Для станков фрезерной группы в установочно-зажимных приспособлениях предусматриваются специальные настроечные элементы, по которым с помощью щупов устанавливаются фрезы на необходимый размер обработки.

Расчёт размеров эталона можно производить аналитическим методом, хотя более точным является статистический метод.

Сущность статистического метода заключается в следующем. Эталон изготавливается с предварительными размерами, которые устанавливаются равными среднему размеру обрабатываемой поверхности по чертежу. Если это эталон для многорезцово́й обработки на станках токарной группы, то предварительный размер диаметра каждой ступени эталона

D'_3 должен быть равен $D'_3 = \frac{D_{нб} + D_{нм}}{2}$. По изготовленному с предвари-

тельными размерами эталону настраивается станок и обрабатывается n деталей. Детали измеряются универсальным измерительным инструментом и для каждой ступени обрабатываемого вала вычисляется среднее арифметическое значение размера $\bar{D} = \sum D_i / n$ и среднее квадратическое отклонение s . По значениям s определяется настроечный размер D_n , затем вычисляется величина поправки к эталону $\Delta_{попр} = \bar{D} - D_n$. Окончательные размеры эталона равны $D_3 = D'_3 - \Delta_{попр}$. Число деталей n ,

обрабатываемых по предварительному эталону, зависит от желаемой точности определения настроечного размера D_n . В общем случае настроечный размер будет определяться соответственно для наружной и внутренней обработки по формулам (для точностных диаграмм I, II и IV типов): $D_n = D_{нм} + 3s$; $D_n = D_{нб} - 3s$. Для процессов, точность которых характеризуется диаграммой III типа, настроечный размер будет равен соответственно для наружной и внутренней обработки: $D_n = D_{нм} + 3s + \Delta f_1$; $D_n = D_{нб} - 3s - \Delta f_1$.

Величину погрешности Δf_1 определяют статистическим методом, если число деталей, обработанных по эталону с предварительными размерами, будет не менее $n = 40/t_m$, где t_m – машинное время обработки (для ступенчатых валиков принимается во внимание t_m наименьшей длины ступени) и время наступления стабилизации температуры режущего инструмента будет не более 30 мин. Разбив партию деталей в $n = 30 \dots 50$ шт. на группы по 5 или менее штук в порядке их изготовления, строят диаграмму изменения групповых средних от времени t или номеров групп. По диаграммам определяют точку перегиба и соответ-

ствующие ей значения групповой средней \bar{x}_i . Тогда $\Delta f_1 = \bar{x}_i - \bar{x}_0$, где \bar{x}_0 – среднее значение размера в первой группе деталей. Для определения \bar{D} следует принять во внимание только первые 5 – 10 шт. деталей, чтобы исключить влияние функциональных погрешностей.

Если построение диаграммы изменения групповых средних во времени производить параллельно с обработкой деталей непосредственно у станка, то число предварительно обработанных деталей может быть сокращено, так как точка перегиба может появиться ранее, чем через 30 мин машинного времени обработки измеряемой поверхности.

Если процесс обработки деталей характеризуется точностными диаграммами I, II и IV типов, можно ограничиться обработкой лишь 10 деталей. Для сокращения трудоёмкости расчётов можно вычисление s производить по размаху $s \approx R/d_n$, где для $n = 10$: $d_n = 3,078$. Для более точных вычислений величину s определяют по среднему размаху $s \approx \bar{R}/d_n$.

Для получения более близких к действительности значений s и \bar{D} необходимо выбирать детали для обработки по предварительному эталону по возможности в случайном порядке, т.е. из разных мест ящика или контейнера с заготовками, доставленными к станку.

Настройка режущих инструментов непосредственно по эталону не обеспечивает высокой точности (обычно не выше 4-го класса точности), но для предварительной обработки под шлифование на многорезцовых полуавтоматах и для фрезерных операций такая точность вполне достаточна.

Преимущества метода: 1) более надёжные результаты по точности (особенно для деталей сложной конфигурации); 2) отсутствие пробных деталей; 3) не требует высокой квалификации наладчиков. Особенно целесообразен этот метод при многоинструментной обработке.

Основными причинами сравнительно низкой точности настройки по эталону являются погрешности установки и закрепления реза. Точность настройки значительно повышается, если установку режущего инструмента производить по эталону и шупу (рис. 6.44). В этом случае размеры эталона должны быть уменьшены для односторонней обработки на величину, равную толщине шупа, а для двусторонней обработки на двойную толщину шупа.

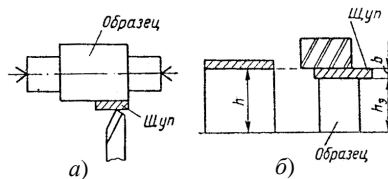


Рис. 6.44. Настройка с помощью эталона и шупа:
а – при токарной обработке; б – при фрезеровании

Пример 6.21. Определить размер эталона для обработки ступенчатого вала по $D = 60_{-0,2}$ мм на многорезцовом полуавтомате.

Предварительный размер эталона $D'_3 = \frac{60 + 59,8}{2} = 59,9$ мм. После обработки партии деталей установлено, что процесс относится к I типу точности: $\bar{D} = 60,1$ мм; $s = 12$ мкм.

$$D_n = 59,8 + 3 \cdot 0,012 = 59,84 \text{ мм}; \Delta_{\text{погр}} = 60,1 - 59,84 = 0,26.$$

Окончательный размер эталона равен $D_3 = 59,9 - 0,26 = 59,64$ мм.

Допуск на изготовление эталона следует принимать равным $(0,1 - 0,15) \cdot 2\delta_3$, т.е. $2\delta_3 = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02$ мм. Следовательно, окончательно размер D_3 будет равен $D_3 = 59,64 \pm 0,01$ мм.

6.9.4.3. Взаимозаменяемые настройки

Взаимозаменяемые настройки применяются в массовом и крупносерийном производствах. Такой способ настройки позволяет любой новый инструмент или блок новых инструментов устанавливать вместо изношенных без последующей проверки и корректировки их положения [8].

Если размер A сделать постоянным для данной настройки станка, то размер обрабатываемой детали R будет зависеть только от размера B , который можно отрегулировать при помощи винта I и сохранять при каждой смене резца (рис. 6.45). Задача взаимозаменяемой настройки заключается в точном определении необходимого размера B , который должен сохраняться постоянным для всех новых настроек и поднастроек станка. Для предварительного определения размера B необходимо решить уравнение размерной цепи

$$R = A - B, \quad (6.15)$$

где $R = \frac{D_{н.б} + D_{н.м}}{4}$ – номинальный размер радиуса обрабатываемой детали; A – номинальный размер, определяющий положение базы державки инструмента от оси шпинделя станка.

Размер A должен быть замерен непосредственно на станке с точностью не менее чем $\pm 0,05 \cdot 2\delta$, где 2δ – допуск на размер обрабатываемой детали. Другими словами, необходимо установить на размер A допуск $2\delta_A$ и предельные отклонения $\Delta_{н.А}$ равными $2\delta_A = 0,1 \cdot 2\delta$; $\Delta_{н.А} = \pm 0,05 \cdot 2\delta$.

Допуск $2\delta_R$ на размер R следует принять равным $0,25 \cdot 2\delta$ и для наружных цилиндрических поверхностей располагать его несимметрично в минус, т.е. полагать предельные отклонения равными $BO_R = 0$; $HO_R = -0,25 \cdot 2\delta$.

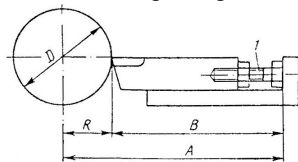


Рис. 6.45. Схема взаимозаменяемой настройки

По известным значениям размеров A и R из уравнения (6.15) определится номинальный размер B :

$$B = A - R. \quad (6.16)$$

Так как R является замыкающим звеном размерной цепи (6.15), то $1/2$ допуска его будет равна $\delta_R = \sqrt{\delta_A^2 + \delta_B^2}$, откуда

$$\delta_B = \sqrt{\delta_R^2 - \delta_A^2} = \sqrt{(0,25\delta)^2 - (0,1\delta)^2} = 0,23\delta.$$

Для определения допускаемых предельных отклонений размера B , т.е. $\Delta_{n.B}$, необходимо вычислить координату середины поля допуска размера B , т.е. Δ_{OB} по известным значениям Δ_{OA} и Δ_{OR} по уравнению

$$\Delta_{OB} = \Delta_{OA} - \Delta_{OR}. \text{ Так как } \Delta_{OA} = 0 \text{ и } \Delta_{OR} = \frac{0 - 0,50\delta}{2} = -0,25\delta, \text{ то}$$

$$\Delta_{OB} = 0 - (-0,25\delta) = 0,25\delta.$$

Следовательно,

$$\Delta_{n.B} = \Delta_{OB} \pm \delta_B \quad \text{или} \quad \begin{cases} BO_B = 0,48\delta; \\ HO_B = 0,02\delta. \end{cases} \quad (6.17)$$

Обозначим фактический размер B через B_ϕ , тогда размер должен лежать в пределах: $B + 0,02\delta \leq B_\phi \leq B + 0,48\delta$.

По предварительному размеру $B_{+0,02\delta}^{+0,48\delta}$ устанавливают резец в державку и закрепляют так, чтобы колебание размера B_ϕ не выходило за пределы установленного допуска. Так как допуск на размер B зависит от допуска на размер обрабатываемой детали 2δ , то проверку размера B_ϕ следует производить при помощи индикаторного приспособления соответствующей точности.

После установки инструмента на размер $B_{+0,02\delta}^{+0,48\delta}$ производят обработку пробной партии деталей в $N_{шт.}$. Партия в $N_{шт.}$ разбивается на m групп по $n = 5$ шт. деталей в группе в порядке их изготовления. На основе данных измерения деталей групп с точностью $(1/10 - 1/15)2\delta$ вычисляются средние значения размеров \bar{D}_i и размахи R_i для каждой группы.

Если обрабатывается многоступенчатый валок одновременно блоком резцов, то такие измерения и вычисления должны производиться для каждой ступени вала отдельно. Затем для каждой ступени вычисляется сред-

ний размах по формуле $\bar{R} = \frac{1}{m} \sum_1^m R_i$ и среднее квадратическое отклоне-

ние $\bar{s} = \bar{R} / d_n$. По полученным значениям групповых средних \bar{D}_i строится точечная диаграмма и по её виду определяется тип точности данного процесса и в зависимости от этого определяется настроенный размер.

Если процесс относится к I, II и IV типу точности, то настроечный размер D_n для диаметральных размеров определяется по формулам (6.13), а для процессов III типа – по формулам (6.14). При этом δ_n принимается равным $\delta_n \leq 0,2\delta$.

По среднему значению для первой группы деталей \bar{D}_1 и настроечному размеру D_n определяется величина поправки к предварительному фактическому размеру B_ϕ по формуле

$$\Delta_{\text{попр}} = \frac{\bar{D}_1 - D_n}{2}. \quad (6.18)$$

Окончательный размер B будет равен

$$B = B_\phi - \Delta_{\text{попр}}. \quad (6.19)$$

На величину $\Delta_{\text{попр}}$ корректируется положение инструмента в державке и окончательный размер B заносится в карту наладки станка.

Пример 6.22. Определить размер B для взаимозаменяемой настройки при обработке ступени валика $D = 60_{-0,2}$ мм на многорезцовом токарном полуавтомате. Фактический размер $A_\phi = 160,01$ мм; $2\delta_A = 0,02$ мм; $A_{n.a} = \pm 0,01$ мм; номинальный размер $A = 160$ мм.

Номинальный размер B по формуле (6.16) равен

$$B = 160 - \frac{60 + 59,8}{4} = 130,05 \text{ мм.}$$

Предельные отклонения размера B по формуле (6.17):

$$BO_B = 0,48\delta = 0,48 \cdot 0,1 = 0,048 \text{ мм; } HO = 0,02\delta = 0,02 \cdot 0,1 = 0,002 \text{ мм.}$$

Фактический размер $B_\phi = 130,06$ мм.

После пробной обработки партии деталей и построения точечной диаграммы установлено, что процесс относится ко II типу точности и $\bar{D}_1 = 59,95$ мм; $s = 10$ мкм. Настроечный размер по формуле (6.13):

$$D_n = D_{\text{нм}} + 3\delta + \delta_n = 59,8 + 3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,1 = 59,8 + 0,03 + 0,02 = 59,85.$$

Величина поправки к размеру B_ϕ по формуле (6.18):

$$\Delta_{\text{попр}} = \frac{59,95 - 59,85}{2} = 0,05 \text{ мм.}$$

Окончательный размер B по формуле (6.19) равен

$$B = 130,06 - 0,05 = 130,01$$

или с допуском

$$B = 130,01_{+0,002}^{+0,048}.$$

В карте наладки станка необходимо указать $B = 130,01_{+0,012}^{+0,058}$.

7. МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

7.1. МАШИНЫ И ПРИБОРЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Различают машины: разрывные и универсальные [8].

Машины разрывные предназначены для статических испытаний на растяжение (например, типа Р-05, цифра указывает на предельную статическую нагрузку в тонна-силах.) или на растяжение и сжатие (например, типа Р-5).

Универсальные машины для статических испытаний (УММ-200 и др.) предназначены для механических испытаний на растяжение, сжатие, изгиб, загиб до параллельной стороны, ползучесть, релаксацию. Имеются также машины для статических и циклических испытаний растяжением-сжатием или изгибом (МУП-100 и др.). Допустимая погрешность показаний силоизмерителя обычно находится в пределах $\pm 1\%$ от измеряемой нагрузки.

Прессы гидравлические (например, типа ПММ-125, цифра указывает наибольшую нагрузку при сжатии в тонна-силах) используются для статических испытаний различных образцов, конструкций из металла и других материалов на сжатие, продольный и поперечный изгиб. Средняя относительная погрешность показаний для всех прессов составляет $\pm 1\%$ от действительной нагрузки.

Для технических и специальных исследований используются машины для статических испытаний винтовых пружин на сжатие и растяжение, плоских пружин на изгиб, а также для их разбраковки (типа МИП-10-1 и др.), машина для испытаний проволоки на скручивание (типа К-5), машина для испытаний листового металла на выдавливание (типа МТЛ-10Т) и др.

7.1.1. Способы измерения деформаций

Измерение деформаций называют *тензометрированием*. На основе тензометрирования строят датчики различных величин и ряд соответствующих приборов.

Относительную деформацию $\varepsilon = \Delta L / L_0 = (L - L_0) / L_0$, где L_0 – расстояние между двумя точками на измеряемом недеформированном участке; L – длина участка после деформации (приложения силы); $\varepsilon > 0$ – при растяжении; $\varepsilon < 0$ – при сжатии. Величину ε измеряют для определения нагрузок (напряжений) в соответствии с законом Гука: $\sigma = \varepsilon E$, где E – модуль упругости материала. Путём воздействия на упругий элемент можно измерять: силу, давление, крутящий момент, перемещение, ускорение и т.д.

Способы измерения деформаций подразделяются на: электрические, механические и визуальные [8].

К *электрическим приборам измерения деформаций* относятся тензорезисторы. Они применяются для измерения статических и переменных нагрузок, кроме измерений нагрузок для изделий, изготовленных из резины.

Принцип измерения *тензорезисторами* основан на том, что закреплённый на деформируемой поверхности тензорезистор воспринимает деформации объекта и изменяет при этом своё электрическое сопротивление. Тензорезистор – пассивный преобразователь, поэтому на него необходимо подавать постоянное или переменное напряжение. Чувствительный элемент представляет собой решётку из тонкого электрического проводника. Предпочтительными являются *фольговые тензорезисторы* (толщина фольги 3 – 5 мкм) (рис. 7.1) для коротких решёток, а также при сложных формах решётки (розетки, цепочки) и высоких температурах *проволочные* (диаметр проволоки 15 – 25 мкм).

Границы применения тензорезисторов [8]:

- 1) максимальная деформируемость $(\pm 2 - \pm 4) \cdot 10^{-2}$ м/м;
- 2) количество циклов нагружения при максимальной амплитуде переменной деформации: $5 \cdot 10^{-4}$ мм/мм – $\geq 10^9$; $1 \cdot 10^{-3}$ мм/мм – $\geq 10^7$; $3 \cdot 10^{-3}$ мм/мм – $\geq 10^5$;
- 3) динамика 0 – 50 кГц (ударные волны > 500 кГц);
- 4) ускорение ≤ 160 м/с²;
- 5) температура 4,0 – 1200 К;
- 6) давление окружающей среды до 10^9 Па.

Погрешности при анализе напряжений при температурах $t = 0 - 40$ °С составляют 1 – 5 %. Погрешности измерительных преобразователей с тензорезисторами 0,2 – 0,5 %.

Известны также *индуктивные тензометры*. Входными величинами индуктивного тензометра являются линейное перемещение и угол отклонения, а выходная величина – изменение индуктивности или переменного напряжения. Диапазон измерения – 80 % длины катушки. Погрешность измерения 1 – 3 %. Частотный диапазон 0 – 10^4 Гц. *Преимущества*: высокая чувствительность, простота, отсутствие износа, большие перемещения. *Недостатки*: чувствительность к внешним магнитным полям.

В индуктивных тензометрах сердечник (рис. 7.2) связан с подвижной опорой, а катушки составляют часть корпуса тензометра [8].

Ёмкостные тензометры используют при температурах до 700 – 750 °С.

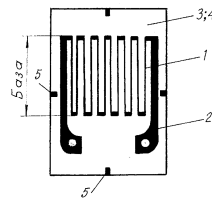


Рис. 7.1. Конструктивная схема фольгового тензорезистора:
 1 – решётка;
 2 – выводы; 3, 4 – основа решётки и покрытие;
 5 – разметка осей

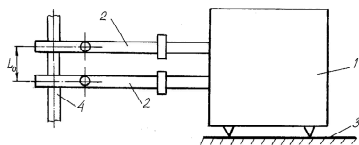


Рис. 7.2. Схема применения индуктивного тензомера:

1 – корпус тензомера; 2 – держатели с опорными элементами; 3 – стол испытательной машины; 4 – объект для измерения деформаций

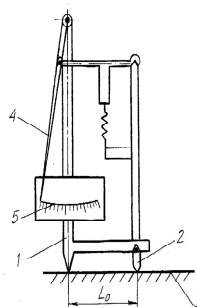


Рис. 7.3. Схема механического рычажного тензомера:

1 – корпус с неподвижной призмой (опорой); 2 – подвижная призма-опора; 3 – объект измерения; 4 – указатель; 5 – отсчетная шкала

Механические тензометры с рычажной передачей применяют для легкодоступных мест, если деформация статическая. Закрепляют такие тензометры при помощи прижимов (рис. 7.3). Перед измерением деформаций тензомер закрепляется на объекте измерения 3. Рычажная система увеличивает изменения базы L_0 до 12 000 раз.

Основным недостатком тензометрических методов является то, что они позволяют только приближённо определить топографию напряжений, так как плотность размещения тензометров ограничена, особенно при сложной конфигурации испытуемой детали или при неясном распределении напряжений. *Визуальные методы* (метод хрупких покрытий и поляризационно-оптический метод) некоторым образом устраняют указанный недостаток тензометрических методов. В основном они применимы в тех случаях, когда необходимо предварительно выявить критические места с тем, чтобы провести дополнительные исследования методами, позволяющими получить количественные выводы.

При реализации *метода хрупких покрытий* на испытуемый объект наносят хрупкое покрытие (плавкие смолы, смесь хрупких лаков, отлитых в виде стержней) [8]. Деформация объекта под действием механической нагрузки сопровождается образованием мелких трещин в покрытии. Трещины проявляются только при растяжении и, если растяжение превысит некоторое предельное значение, называемое также чувствительностью хрупкого покрытия к трещинообразованию ϵ_R . Трещины всегда направлены перпендикулярно к направлению главной деформации ϵ_1 (или к направлению главного напряжения σ_1). Для наблюдения деформаций сжатия хрупкое покрытие наносят на предварительно напряжённый объект с последующей его разгрузкой. *Метод хрупких покрытий применим только к статическим нагрузкам, а при*

динамических нагрузках – только к одноразовой ударной нагрузке. Покрытие может быть использовано только для одного испытания, а в случае серийного испытания – и для ступенчато возрастающих нагрузок. Перед каждым следующим испытанием необходимо удалить старую плёнку и нанести новую. При ступенчатом нагружении детали определяют последние появившиеся трещины. Соединяя их линиями, получают траектории первого главного напряжения.

Поляризационно-оптический метод (метод фотоупругости) позволяет получить непрерывную картину распределения напряжения на поверхности испытываемой детали [8]. Поэтому он особенно пригоден для нахождения слабых мест, концентраций напряжений или сложных эпюр напряжения в деталях со сложной конфигурацией, а также для обнаружения бороздок или трещин и для наблюдения за процессами роста трещин или разрыва. Метод пригоден для исследования статических и периодических динамических процессов. Наряду с хорошей видимостью распределения напряжений на больших поверхностях имеется также возможность проведения исследований на натуральных элементах конструкций, что часто обеспечивает особые преимущества. Испытуемый объект должен быть доступным наблюдателю, и его поверхность располагаться перпендикулярно приборам наблюдения и освещения. Так как фотоупругость смол, начиная с 30 °С, очень сильно меняется, то применение этого метода в основном ограничивается комнатной температурой.

Метод фотоупругости требует от наблюдателя знания основ теории фотоупругости и соответствующего опыта. Поэтому часто отказываются от количественной оценки результатов испытания и вместо этого ограничиваются обнаружением критических мест, которые затем исследуются при помощи тензорезисторов. Это рекомендуется также, если требуется регистрация или накопление измеренных значений.

7.1.2. Методы и приборы оценки твёрдости и микротвёрдости

Твёрдостью называют сопротивление материала местной пластической деформации, возникающей при внедрении в него более твёрдого тела.

При динамическом определении твёрдости на испытуемый образец или изделие воздействует падающий свободно или принудительно индентор (закалённый стальной шарик, алмазная пирамида или конус). Существует два способа динамического определения твёрдости с помощью падающего тела: 1) подсчёт твёрдости по размерам отпечатка (методы, использующие падение груза или удар (с помощью молотка Польди или Бринелля)); 2) измерение высоты отдачи индентора (прибор Шора). Прибор Шора предназначен в основном для определения твёрдости материала массивных деталей, а также мелких деталей из металлов и других материалов [8].

Для предварительной оценки твёрдости поверхностных слоёв заготовок деталей машин, а также после их термической обработки применяется *метод царапания испытываемой поверхности* набором эталонных образцов различной твёрдости или жёстким (алмазным) наконечником в виде конуса, пирамиды, полусферы, иглы, лезвия и т.п.

Измерение твёрдости по Бринеллю рекомендуется для чёрных и цветных металлов с твёрдостью 8 – 450 единиц [8]. Твёрдость по Бринеллю (число твёрдости) (*HB*) выражается отношением нагрузки к площади поверхности сферического отпечатка, имеющего форму шарового сегмента диаметром d . Выбор нагрузки должен быть таким, чтобы $0,2D < d < 0,6D$.

Измерение твёрдости по Виккерсу рекомендуется для чёрных и цветных металлов и сплавов (в том числе в тонких поверхностных слоях и покрытиях), имеющих сложную форму. Твёрдость по Виккерсу (*HV*) определяется вдавливанием в образец четырёхгранной алмазной пирамиды с углом между противоположными гранями, равным 136° , и выражается числом твёрдости, полученным делением нагрузки на площадь поверхности пирамидального отпечатка (вычисляется по длине диагоналей отпечатка). Для упрощения определения числа твёрдости по Виккерсу пользуются таблицами, приведёнными в ГОСТ 2999–75.

Измерение твёрдости металлов по методу Виккерса производится с помощью приборов ТПП-2 и ТП-7Р-1, а по методу Бринелля – ТПШ-4 и ТШ-2М.

Определение твёрдости по Роквеллу распространяется на чёрные и цветные металлы и сплавы. Метод отличается от рассмотренных выше тремя особенностями: совмещением операций вдавливания наконечника и измерения размеров отпечатка; применением в качестве наконечника наряду с шариком алмазного конуса; число твёрдости по Роквеллу выражается в условных единицах, соответствующих разности глубин проникновения наконечника под действием основной и предварительной нагрузок.

За единицу твёрдости по Роквеллу принята величина, соответствующая осевому перемещению наконечника на 0,002 мм.

Метод Роквелла получил широкое применение, так как он позволяет определять твёрдость быстро и просто, практически без повреждения испытываемого изделия (образца).

Для измерения твёрдости по Роквеллу применяются универсальные приборы типа ТК (ТК-2, ТК-14-250), полуавтоматические приборы ТКД, ТКМ, приборы для определения поверхностной твёрдости ТКС-1М, ТКС-2, ТКС-14-250, переносные приборы ТКП-1, ТКП-2.

Имеются также универсальные приборы, позволяющие определять твёрдость металлов как по методу Роквелла, так и по методу Бринелля: типа ТК-2М, НР250. Универсальные приборы фирмы «Донау» (Швейцария) обеспечивают возможность измерения твёрдости по методам Бринелля, Виккерса (разными инденторами) и Роквелла (по разным шкалам).

Измерение микротвёрдости вдавливанием алмазной пирамиды применяют для тонких поверхностных слоёв, а также отдельных структурных составляющих и фаз сплавов. Для этого применяют приборы ПМТ-3 и ПМТ-5.

Модернизированный прибор ПМТ-6 позволяет проводить определение твёрдости методами царапания и вдавливания в широком диапазоне нагрузок: от 0,03 до 2 Н.

7.1.3. Методы и приборы измерения шероховатости поверхностей

Измерение параметров шероховатости *оптическими приборами* производится бесконтактными методами, среди которых наибольшее распространение получили методы светового сечения, теневого сечения, микроинтерференционные, с применением растров [8].

По принципу светового сечения (ПСС) работают двойной микроскоп МИС-11 и прибор ПСС-2, *по принципу теневого сечения* (ПТС) – ПТС-1. Эти приборы позволяют измерять неровности поверхности высотой 0,8...63 мкм при погрешности показаний от 24 – 7,5 %. Оба прибора позволяют определять параметры шероховатости, а также фотографировать микронеровности в лабораторных условиях.

Микроинтерференционный метод реализуется с помощью приборов МИИ-4, МИИ-5, МИИ-15, МИИ-9, МИИ-10, предназначенных для лабораторных измерений параметров шероховатости и фотографирования микронеровностей чистых поверхностей с $R_z = 0,03...1$ мкм.

Растровый измерительный микроскоп ОРМ-1 предназначен для измерения высоты неровностей (от 0,4 до 40 мкм) наружных поверхностей деталей со следами обработки, имеющими определённое преимущественное направление.

При оценке шероховатости поверхностей сложной формы и в случае трудного доступа к исследуемой поверхности применяют *метод слепков*, заключающийся в снятии копий (как правило, «негативных») с поверхностей для последующего измерения по ним высоты неровностей. Неровности на слепках можно измерять с помощью приборов: МИС-11, ПСС-2, электромеханических профилографов-профилометров. Материалы для изготовления слепков – легкоплавкие сплавы; воск; целлулоид; гипс; масляная гуттаперча; парафин; киноплёнка, растворенная в ацетоне, и др.

Щуповые электромеханические приборы, предназначенные для измерений параметров шероховатости поверхности, называют *профилометрами*, а такие же приборы для записи неровностей поверхности – *профилографами*. Профилографы позволяют не только записывать профиль поверхности, но и измерять параметры шероховатости. Поэтому их называют профилографами-профилометрами.

7.1.4. Методы определения остаточных напряжений

Механические методы определения остаточных напряжений получили наибольшее практическое применение благодаря своей простоте.

К механическим методам можно отнести методы замера прогибов, замера деформаций (для стержней), метод Давиденкова (для тонкостенных цилиндров), метод Закса (для цилиндрических деталей). Эти методы определения остаточных напряжений применимы для деталей простой геометрической формы [8].

Для деталей сложной конфигурации остаточные напряжения в поверхностном слое определяют по *методу освобождения*. В некоторой точке детали сложной конфигурации наклеивают два проволочных тензорезистора в двух взаимно перпендикулярных направлениях и записывают их показания, а затем вырезают вместе с тензорезисторами пластинку толщиной h (не внося дополнительных остаточных напряжений) и снова снимают показания тензорезисторов. Разность показаний позволит вычислить деформации ϵ_1 и ϵ_2 в направлениях 1 и 2, возникшие в результате вырезки пластинки (рис. 7.4). По значениям ϵ_1 и ϵ_2 можно вычислить остаточные напряжения, действовавшие вдоль направлений 1 и 2 до вырезки пластинки: σ_1 и σ_2 . Чем тоньше пластинка, тем точнее определение σ_1 и σ_2 .

Для определения величины и направления главных напряжений требуется измерить деформации в трёх направлениях. Для этого на исследуемую поверхность наклеиваются розетки проволочных тензорезисторов (рис. 7.4) в трёх направлениях 1, 2 и 3, составляющих друг с другом углы в 45° или 60° .

При известных величинах и направлениях главных напряжений можно определить нормальные и касательные напряжения в произвольных площадках, используя известные из теории напряжённого состояния зависимости.

Известны также следующие методы определения остаточных напряжений [8]:

– *рентгеновский метод* (для материалов некристаллической структуры (стекло, пластмасса) рентгеновский метод не применим);

– *поляризационно-оптический метод* основан на явлении поляризации света и свойстве большинства прозрачных изотропных материалов приобретать под действием нагрузки способность двойного лучепреломления. Одним из путей совершенствования поляризационно-оптического способа исследования напряжённого состояния тел является использование *метода голографической интерферометрии*;

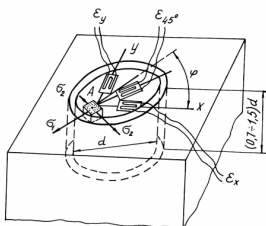


Рис. 7.4. Схема для определения главных остаточных напряжений методом освобождения

– метод оптически чувствительных (фотоупругих) покрытий (ОЧП);

– акустические методы (изменение скорости поляризованных звуковых волн, распространяющихся в твёрдом теле в зависимости от уровня напряжений, действующих в нём);

– электромагнитный (магнитоупругий) метод (изменение магнитной проницаемости ферромагнитных тел при их нагружении).

7.1.5. Методы и приборы исследования наклёпа

Наклёп – это упрочнение материала в результате деформации. *Наклёп характеризуется* глубиной залегания, степенью и градиентом.

Глубину проникновения наклёпа определяют путём измерения микротвёрдости на косых срезах образцов (рис. 7.5). Срезы выполняют в специальном приспособлении, обеспечивающем получение угла $\alpha = 1 \dots 3^\circ$ на плоско-шлифовальном станке при обильном охлаждении и минимальных подачах, исключающих внесение дополнительного наклёпа на косой срез. Затем изготавливаются шлифы срезов. Для обеспечения чёткой границы между исследуемой поверхностью и косым срезом (из точки *A*) образец заливают сплавом Вуда или эпоксидной смолой в приспособлении для полирования. Измерения микротвёрдости проводят по трём линиям. Микротвёрдость на некотором расстоянии x_0 определяется как среднее арифметическое из трёх замеров. Глубина, на которой расположены точки измерения микротвёрдости, определяются по соотношению $h = x \sin \alpha$. Толщина наклёпного слоя

$h_n = x_0 \sin \alpha$. Степень наклёпа $U_n = \frac{H_{\max} - H}{H} \cdot 100\%$. Градиент наклёпа

$$U_{\text{гр}} = \frac{H_{\max} - H}{h_n} \cdot 100\% .$$

По данным измерений строят график (рис. 7.6), после обработки которого получают значения x ; h_n ; U_n ; $U_{\text{гр}}$. На основе этих показателей можно сделать выводы об эксплуатационных возможностях поверхности.

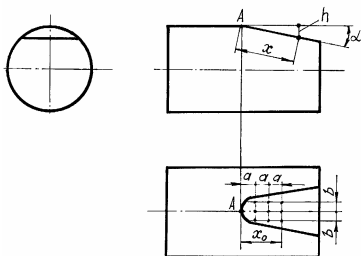


Рис. 7.5. Чертёж цилиндрического образца с косым срезом и схема измерения твёрдости поверхности

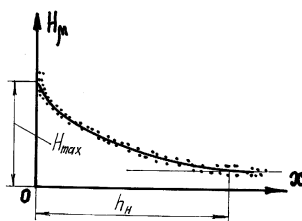


Рис. 7.6. График изменения микротвёрдости по поверхности косого среза

7.2. ИЗМЕРЕНИЕ ЧАСТОТЫ ВРАЩЕНИЯ, ПОГРЕШНОСТЕЙ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

7.2.1. Измерение частоты вращения

Механические тахометры делятся на стационарные и портативные [8]. Стационарные тахометры представляют собой приборы с индикацией в непосредственной близости от объекта измерения. Они соединяются с ним либо непосредственно, либо при помощи гибкого вала, ременной или цепной передачи. Поэтому измеренная величина может быть передана только на близкое расстояние.

В отношении физического принципа, положенного в основу измерения, имеются *два типа механических тахометров*: тахометр на вихревых токах и центробежный тахометр.

Тахометр на вихревых токах применяются преимущественно в тех случаях, когда показания должны начинаться с нуля, соответствовать определённому направлению вращения и охватывать широкий диапазон измерения. Погрешности составляют около $\pm 1\%$ и в простейших приборах достигают $\pm 3\%$ от конечного значения. Тахометры на вихревых токах выпускаются серийно и рассчитаны на скорости до 5000 об/мин.

Центробежные тахометры показывают частоту вращения (показание не зависит от направления вращения) от некоторого минимального и до максимального значения, соотношение которых может находиться в пределах от 1:3 до 1:10. Погрешности измерения менее 1%; в специальных исполнениях составляют 0,3%. Так как центробежный тахометр представляет собой колебательную систему, он должен быть снабжён демпфирующим устройством, в особенности при использовании его для измерения низких частот вращения. Максимальная частота вращения серийно выпускаемых центробежных тахометров составляет 10 000 об/мин.

Значительно удобнее как по возможности использования для измерения различных физических эффектов, так и по возможности дальнейшей обработки измерительных сигналов являются *электрические тахометры* (тахогенераторы). *Общим для всех электрических тахометров является возможность дистанционной передачи результатов измерений и их контроля и протоколирования совместно с результатами измерения других параметров.* Возможно преобразование выходного сигнала в цифровой код, допускающий дальнейшую обработку в вычислительных машинах.

Можно применить и *стробоскопический способ измерения частоты вращения.* Это мобильный, лишённый обратной реакции на объект способ измерения.

7.2.2. Измерение погрешностей вращательного движения механических передач

Применительно к зубчатым передачам существуют *три комплексные нормы точности*: норма кинематической точности, норма плавности работы и норма контакта профилей взаимодействующих деталей.

Норма плавности работы передачи определяет требования к параметрам, которые влияют на кинематическую точность и проявляются многократно за один оборот ведомого звена. Требования плавности работы особенно важны, если передача является силовой, так как многократно проявляющиеся за один оборот погрешности являются источником ударов, приводящих к появлению шума и вибраций и, как следствие, к снижению КПД.

Нормы контакта относятся к элементам передач, которые определяют величину поверхностей касания взаимодействующих профилей элементов зацепления.

Кинематическая погрешность любой передачи характеризуется разностью между действительным и номинальным (расчётным) углами поворота её ведомого вала, соответствующими одинаковым углам поворота ведущего вала. Она может выражаться в угловых единицах, а также в единицах длины дуги делительной окружности ведомого колеса.

Плавность работы передачи определяется погрешностями, которые многократно (циклически) проявляются за оборот выходного вала и составляют часть кинематической погрешности.

Исследования обычно проводятся на испытательных стендах, обеспечивающих условия работы передачи, близкие к эксплуатационным.

На основе исследований кинематической точности цепей формообразующих движений станка можно получить величины амплитуд гармонических составляющих кинематической погрешности станка и сравнить их с соответствующими амплитудами гармонических составляющих суммарной погрешности обработки, представленной отклонениями реального профиля обработанной поверхности от номинального.

Для получения функции кинематической погрешности вращающегося шпинделя станка, например, токарного, можно также использовать преобразователь угловых перемещений ВЕ-178А (рис. 7.7). Этот преобразователь можно вмонтировать в корпус измерительного центра.

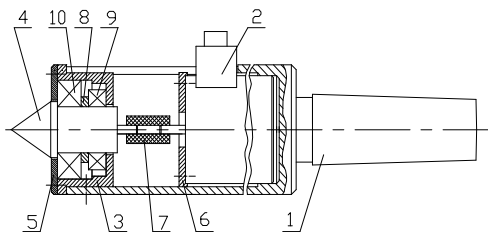


Рис. 7.7. Конструктивное исполнение измерительного центра

Измерительный центр содержит корпус с коническим хвостовиком 1, преобразователь угловых перемещений 2 типа ВЕ-178А, упорную втулку 3, в которой размещён центр 4, крышку 5, установочное кольцо 6, упругую муфту 7, дистанционное кольцо 8, подшипники 9 и 10.

При измерении кинематических погрешностей цепи главного рабочего движения станка измерительный центр устанавливается в пиноль задней бабки и используется как обычный вращающийся центр. Преобразователь угловых перемещений 2 соединяется с измерительным комплексом. Обрабатываемая деталь (образец) устанавливается в центрах и производится её обработка, в ходе которой ведётся регистрация последовательности импульсов, генерируемых измерительным центром. Зарегистрированные последовательности импульсов для каждого условия обработки образца, сохраняются в виде отдельных файлов, которые затем по специальным программам подвергаются математической обработке и представляются в виде графика кинематической погрешности станка за один или несколько оборотов его шпинделя и графика амплитудно-частотного спектра. Результаты обработки экспериментальных данных экспортируются в среду Microsoft Excel.

7.2.3. Измерение механических колебаний

Под механическим колебанием (вибрацией) понимают изменение времени механического движения (перемещений) в заданных пределах. Сюда относятся изменяющиеся во времени движения – прямолинейное, круговое и др., изменяющиеся во времени силы (нормальные силы, изгибающие моменты, вращающие моменты, давления жидкости, газа), а также зависящие от них механические напряжения. В колебательном процессе различают: *детерминированные процессы*, подчиняющиеся определённому закону, которые повторяются или могут повторяться во времени; *стохастические процессы* (беспорядочные процессы, которые не описываются математической функцией и определяются случайной последовательностью разных причин) [8]. *Цель измерения механических колебаний* сводится к получению по возможности наиболее полной информации о колебательном процессе. При детерминированных процессах эта задача решается путём определения амплитуды, частоты или положения по фазе. При стохастических процессах можно лишь путём «сортировки» мгновенных значений по различным критериям ограничиться статистическими оценками. В простейшем случае это сводится к измерению уровня колебаний.

Механические параметры колебаний, а именно виброперемещение, виброскорость и виброускорение, могут быть измерены при помощи преобразователей относительного или абсолютного перемещения.

Преобразователь относительных перемещений измеряет параметр колебаний по отношению к любой внешней неподвижной (опорной) точке. Он может быть различным образом соединён с объектом измерения.

Для измерения относительных виброперемещений в основном используют индуктивные преобразователи перемещения с сердечниками, (для измерения перемещений 0,1 – 300 мм) или со щупом (для измерения перемещений в пределах 1 – 50 мм), жёстко соединёнными с объектом измерения.

Особое значение для измерения параметров механических колебаний (вибраций) имеют также *бесконтактные измерительные преобразователи*. Они не требуют какого-либо механического соединения с объектом измерения и потому работают почти полностью без обратного воздействия. *Достоинством этих преобразователей* является то, что они позволяют измерять вибрации объектов, которые одновременно перемещаются в разных измерениях, например радиальные колебания вращающихся валов. Сам объект измерения должен быть, насколько это возможно, выполнен из магнитного материала или иметь на измерительной поверхности покрытие из такого материала. Объекты измерения из немагнитного материала, обладающего высокой электрической проводимостью, могут быть использованы для бесконтактного измерения, однако такому способу измерения присущ недостаток, заключающийся в меньшей чувствительности и в повышенной температурной зависимости.

Реже, наряду с описанными индуктивными системами для относительных измерений колебаний применяют также *измерительные потенциометры и емкостные преобразователи*. При помощи емкостных преобразователей можно бесконтактно измерять зазоры как между металлическими, так и неметаллическими объектами.

Для измерения виброскорости используются *электрические преобразователи с электродинамической измерительной системой*. Верхняя предельная частота преобразователей виброскорости составляет около 1000 Гц. Измеряемые виброскорости находятся в пределах 0,1 – 100 мм/с. С помощью электронных дифференцирующих и интегрирующих приборов преобразователи абсолютной виброскорости можно использовать для измерения виброперемещений и виброускорений.

Измерительные преобразователи ускорения (акселерометры) представляют собой в принципе преобразователи абсолютных перемещений. По виду электрической части системы их разделяют на резистивные (работают на ускорения примерно до 10^4 и с частотами примерно до 10 кГц) и индуктивные (максимальные ускорения, воспринимаемые индуктивными преобразователями ускорения, составляют $2500 \text{ м}^2/\text{с}$ при частоте в 2000 Гц), а также пьезоэлектрические. Последние пригодны для колебаний высокой частоты и ударных ускорений.

7.3. ИЗМЕРЕНИЕ СИЛ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

7.3.1. Измерение сил

Деформацию чаще всего измеряют описанными выше электрическими, оптическими или механическими методами.

В зависимости от выбранного метода и диапазона измерения деформируемый чувствительный элемент (воспринимающий деформацию) выполняют так, что деформация воспроизводится в виде растяжения или сжатия. Упругий элемент совместно с приданными ему элементами, выполняющими функции преобразования (механическими, электрическими или др.), защитным корпусом и т.д. образует преобразователь силы (динамометр).

Среди динамометров наибольшее значение, в том числе в качестве датчиков веса, имеют электрические динамометры, а именно *тензорезисторные динамометры*. Диапазон измерения этих динамометров от 5 Н до более чем 10 МН. В зависимости от затрат, уровня техники и производственных возможностей погрешность может быть снижена до величины, 0,03 % и даже 0,01 % [8].

В простейшем виде упругий чувствительный элемент динамометра представляет собой стержень, нагруженный вдоль оси. Чувствительные элементы этого типа используют для измерений в диапазоне 10 кН – 5 МН.

Для измерения сил в меньшем диапазоне (примерно до 5 Н) и увеличения показания применяют чувствительные элементы, в которых используются не продольные деформации, а деформации изгиба или сдвига. В последнем случае применяют консольные торсионные чувствительные элементы в виде плоского стержня с острыми рёбрами. Хорошие результаты измерений показывают многостержневые чувствительные элементы, работающие на срез.

Пьезоэлектрические динамометры применяют для измерения динамических и квазистатических сил. Чувствительными элементами в них являются пластинки из пьезокварца. При нагружении на их поверхностях образуется пропорциональный нагрузке электрический заряд. Усилитель с большим входным сопротивлением, подключенный к чувствительному элементу, преобразует заряд в соответствующее электрическое напряжение. Так как электрический заряд возникает в момент приложения сил, то пьезокристаллические динамометры особенно удобны для измерения очень быстро изменяющихся и ударных нагрузок, к тому же при повышенных температурах.

В *струнных динамометрах* ферромагнитная струна расположена вдоль оси упругого полого цилиндра между двумя связанными с ними плоскостями, на которых расположены точки крепления концов струны. При приложении к цилиндру нагрузки, направленной вдоль его оси, изменяется расстояние между двумя упомянутыми выше плоскостями, а вместе с этим меняется и частота колебаний натянутой струны. Частота является мерой нагрузки и может быть измерена известными способами.

Механические динамометры в основном используют в следующих двух областях:

а) в контрольно-испытательной аппаратуре: в частности, для проверки испытательных машин и защитных устройств на прессах (здесь они всё больше заменяются тензорезисторными динамометрами);

б) в промышленных установках для выявления нагрузочной способности рабочих машин и т.п.

Они применимы только для измерения статических сил.

Гидравлические динамометры можно использовать для измерений со средней точностью в тяжёлых условиях эксплуатации. Такие измерительные устройства допускают подключение самопишущих приборов.

7.3.2. Измерение крутящих моментов

Тензорезисторные преобразователи (датчики) крутящего момента находят широкое использование для измерения крутящего момента. Диапазон измерений серийно выпускаемых тензорезисторных преобразователей крутящего момента составляет от 0 – 0,1 Н·м до 0 – 50 кН·м, а в случае необходимости и более [8].

Преобразователи (датчики) крутящего момента с бесконтактной передачей сигналов наиболее эффективны для непрерывного контроля, так как они работают практически без износа и без обслуживания.

Индуктивные преобразователи (датчики) крутящего момента принципиально могут быть применены в тех же областях, что и тензорезисторные преобразователи. Однако они отличаются повышенной чувствительностью: диапазон измерений находится в пределах от 0 – 0,1 Н·см до 0 – 100 кН·м.

Струнные преобразователи (датчики) крутящего момента выпускают серийно для установки на валах диаметром 50 – 750 мм. В зависимости от производственных условий это примерно соответствует диапазонам измерения крутящих моментов от 0 – 100 Н·м до 0 – 5 МН·м. Максимальная частота вращения составляет 1500 об/мин для валов малого диаметра и снижается максимум до 150 об/мин для валов большого диаметра. Класс точности самого измерительного устройства 0,5 – 1 %.

Пьезоэлектрические преобразователи (датчики) крутящего момента используют пьезоэлектрический эффект в кварцевых пластинках. Применение его в основном такое же, как в пьезоэлектрических динамометрах.

Измерять крутящий момент можно *механическими методами*, например маятниковыми весами, или электрическими методами, например, с помощью тензорезисторов.

Испытательные стенды, обычно называемые балансирными машинами, служат для определения мощности и характеристики мощности силовых машин всех типов и используются при экспериментальных и конструктивных разработках, а также в серийном производстве. В их

состав входят устройства для измерения крутящего момента, определения частоты вращения и других параметров. В зависимости от конструктивного исполнения и оснащения они снабжены устройствами для регулирования и управления, позволяющими получить характеристики в функции различных критериев. Таким образом, обеспечивается возможность быстрого суждения о поведении и процессе работы силовых машин, испытываемых на этих стендах.

7.4. СПОСОБЫ ИЗМЕРЕНИЯ ИЗНОСА РЕЖУЩИХ ИНСТРУМЕНТОВ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Около 85...90 % изделий машиностроения выходят из строя в результате изнашивания и только 10...15 % по другим причинам.

Различают изнашивание механическое (абразивное, эрозивное, гидроабразивное, газоабразивное, усталостное и др.), коррозионно-механическое (окислительное, фреттинг-коррозия), изнашивание при «заедании» сопряжённых пар.

Применительно к инструментам различают следующие виды изнашивания: абразивное, адгезионное (схватывание и последующее вырывание частиц и блоков), диффузионное (при $t = 800...850$ °С) – деформационное растворение инструмента материала в обрабатываемом материале, окислительное (твёрдых сплавов) – образуются окислы Co_3O_4 и CoO , которые имеют низкую твёрдость и нарушают монолитность твёрдого сплава [8].

Измерение износа по потере массы или объёма детали используется, как правило, при исследовании образцов и непригодно для большинства деталей машин.

Оценка износа по изменению выходных параметров сопряжения даёт лишь косвенное представление об износе вследствие того, что выходные параметры сопряжения зависят от большого числа факторов, которые не представляется возможным оценить полностью.

Известен *способ определения износа по содержанию продуктов изнашивания в смазочном масле*. Способ основан на взятии пробы отработавшего масла, где накопились продукты изнашивания, представляющие собой металлические частицы, окислы металлов и продукты химического взаимодействия металлов с активными компонентами смазочных материалов. Этот способ позволяет избежать необходимости разборки машин и их узлов. Он применяется в лабораторных и эксплуатационных условиях для измерения интегрального износа узлов различных машин, например технологического оборудования, транспортных машин, двигателей внутреннего сгорания, зубчатых передач и т.п. Точность метода определяется чувствительностью приборов к содержанию в масле металлических примесей ($10^{-6}...10^{-8}$ г в 1 см^3 масла) [8].

Анализ проб масла производится следующими методами:

– *химическим* (определяется содержание железа и других продуктов изнашивания в золе сожжённой масляной пробы);

– *спектральным* (определяют содержание металлических примесей в масле посредством спектрального анализа состава пламени при сжигании его пробы);

– *радиометрическим* (измерение радиоактивности продуктов изнашивания, содержащихся в смазочном масле, накапливающихся в масляном фильтре). Радиоактивность материала деталей создаётся введением радиоактивных изотопов в металл при плавке или с помощью покрытия деталей слоем из радиоактивных веществ;

– *активационным анализом* (содержание продуктов изнашивания в масле определяется по их радиоактивности посредством анализа спектров гамма-излучения пробы после облучения её нейтронами).

В методе *микрометрических измерений* размеры детали до и после изнашивания измеряются при помощи микрометра, индикатора или других приборов, точность которых обычно находится в пределах 1...10 мкм. При небольших размерах детали и возможности её демонтажа измерения износа можно производить с помощью инструментального или универсального микроскопов, оптиметра, проектора, измерительной машины и других приборов. Для деталей больших размеров, измерение износа которых необходимо проводить без разборки машины, часто разрабатывают специальные приспособления с применением универсальных измерительных приборов.

Недостатками метода микрометрирования являются: невозможность осуществления измерения износа в процессе работы машины; необходимость, как правило, частичной разборки узла или его демонтажа; громоздкость приспособлений для непосредственных измерений; невозможность при отсутствии измерительной базы оценки износа, а в ряде случаев и формы изношенной поверхности.

Разновидностью микрометрического метода измерения износа является *профилографирование*. При этом могут использоваться два варианта этого метода. Первый из них применяется, когда на детали или образце имеются изношенный и неизношенный участки. При снятии профилограммы этих двух участков по высоте «уступа» можно оценить износ, а также изменение шероховатости поверхности. Когда изнашиваются лишь выступы микронеровностей, применяют *способ наложения профилограмм*, снятых с одного и того же участка, до и после изнашивания. Для точного совмещения профилограмм на поверхности наносят контрольную риску. При этом можно судить не только о средней величине износа, но и о росте площади опорной поверхности. Точность измерения зависит от условий касания и погрешности повторной

установки измерительного наконечника относительно исследуемой поверхности, а также погрешности совмещения профилограмм.

Метод искусственных баз заключается в том, что на поверхность детали наносят углубление строго определённой формы (в виде конуса, пирамиды и т.п.) и по уменьшению размеров углубления (отпечатка) судят об её износе. Метод искусственных баз может быть использован для измерения износа только тех деталей, на поверхности которых допускается нанесение углублений. Находят применение различные варианты рассматриваемого метода: *метод отпечатков, метод вырезанных лунок и метод слепков.*

При *методе отпечатков* для образования углубления на исследуемой поверхности используют алмазную четырёхгранную пирамиду с квадратным основанием и углом при вершине между противоположными гранями в 136° (такая пирамида применяется в приборах для определения твёрдости по методу Виккерса и микротвёрдости). После вдавливания пирамиды под нагрузкой измеряется диагональ отпечатка. После изнашивания размер отпечатка d_0 уменьшается до d_1 , и по разности $d_0 - d_1$ оценивают износ $U = h_0 - h_1$. Длину диагонали измеряют при помощи оптического измерительного устройства. Метод имеет ряд *недостатков*: при вдавливании пирамиды вокруг отпечатка происходит выпучивание материала, в результате чего искажается форма отпечатка; после снятия нагрузки происходит некоторое восстановление углубления, оно изменяет свою начальную форму. Если выпуклости можно удалить полированием, то упругого восстановления отпечатка устранить нельзя, что обуславливает погрешность измерения износа. Этот метод неудобен также и тем, что размеры отпечатка малы и для нанесения его требуются большие усилия.

Метод вырезанных лунок заключается в том, что на исследуемой поверхности вращающимся резцом вырезается лунка, по уменьшению размеров которой при изнашивании определяют местный износ. Метод лунок имеет ряд существенных *преимуществ* перед методом отпечатков: 1) лунка образуется резанием, а не вдавливанием, поэтому явления вспучивания и упругого восстановления сведены к минимуму; 2) соотношения между длиной лунки и её глубиной таковы, что уменьшение длины лунки легко определить даже при незначительном износе; 3) усилия, необходимые для вырезания лунки, невелики, что позволяет создавать малогабаритные приборы для измерения износа плоских, цилиндрических, наружных и внутренних, а также фасонных поверхностей деталей в производственных и лабораторных условиях.

Если измерить износ непосредственно на детали трудно, используют *метод негативных отпечатков (слепков)*. С поверхности детали в том месте, где нанесено углубление (обычно отпечаток или специаль-

ная риска), снимают слепок из самотвердеющей массы или оттиск на пластичном металле или пластмассе. Высоту отпечатка измеряют обычными способами и сравнивают с размером, снятым при вторичном отгиске изношенной поверхности.

Основой способа *поверхностной активации* является измерение снижения радиоактивности при изнашивании поверхности детали, в которой на заданном участке создан радиоактивный слой глубиной 0,05...0,4 мм путём облучения участка поверхности или вставки в неё заряжённых частиц (дейтронов, протонов, альфа-частиц). Этот способ пригоден для определения износа поверхностей деталей при стендовых и эксплуатационных испытаниях без разборки и остановки машин. Он позволяет оценивать малые износы, сокращать продолжительность испытаний, исследовать динамику процесса изнашивания, организовывать автоматизированный и дистанционный контроль качества изделий.

7.4.1. Особенности измерения износа режущих инструментов

Режущие инструменты изнашиваются более интенсивно по сравнению с изнашиванием большинства деталей машин в процессе их эксплуатации. Независимо от геометрии износа, мерой износа инструмента является *линейный и массовый износ* [16]. При чистовой обработке в качестве критерия затупления выбирают линейный износ. Об изношенности задней поверхности судят по максимальной ширине площадки износа δ . Для исследования физической природы износа инструментов используют массовый износ – масса изношенной части инструмента, которая пропорциональна работе сил трения, затраченной на превращение инструментального материала в продукты изнашивания.

Измерение фаски износа производят при помощи индикаторных устройств или на микроскопе. Износ по передней поверхности (лунку износа) измеряют с помощью микроскопа, индикаторными щупами, а также профилографированием передней поверхности на профилометрах-профилографах.

7.5. ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ТЕПЛОТЫ

Чаще всего применяются *механические контактные термометры*. *Преимущества механических контактных термометров*: 1) высокая прочность; 2) высокая точность; 3) низкие затраты на обслуживание; 4) низкая стоимость.

Механические контактные термометры имеют один существенный недостаток: их сигналы не могут быть переданы на значительные расстояния и объединены с другими сигналами в информацию, пригодную для дальнейшей переработки. Поэтому в промышленной практике температуру измеряют в основном термометрами, действие которых

основано на изменении электрических свойств различных веществ с изменением температуры.

Они широко применяются для проведения лабораторных и экспериментальных работ. Показание термометра считывают, как правило, прямо на месте измерения. Имеются варианты исполнения, в которых измерительный сигнал может быть передан на некоторое ограниченное расстояние. Их изготавливают в виде температурных реле (выключателей) или передатчиков температуры (выходные сигналы могут быть пневматическими, гидравлическими или электрическими) или даже в виде механических регуляторов температуры прямого действия (без подвода какой-либо вспомогательной энергии).

Дилатометрические термометры часто используют там, где требуются большие усилия в исполнительном механизме, например в регуляторах температуры прямого действия, поскольку для компенсации температурного расширения стержня его упругим сжатием согласно закону Гука требуется весьма большое усилие [8].

В *биметаллических термометрах* для индикации температуры используют различное температурное расширение двух разнородных материалов. *Преимущества*: 1) малые размеры по сравнению с дилатометрическими термометрами; 2) простота и дешевизна конструкции; 3) широкий диапазон измеряемых температур ($-50 + 600$ °С); 4) высокая точность (погрешность измерения от ± 1 до ± 3 %). *Недостатком* является то, что при температурах до 600 °С их можно применять лишь кратковременно.

Существуют также *термоэлектрические термометры (термопары)*. Все материалы для термопар делят на две группы: пары благородных металлов и пары неблагородных металлов.

В отличие от термоэлектрических термометров (термопар), с помощью которых можно измерять только разность температур по отношению к некоторому известному уровню, *термометры сопротивления* позволяют измерять и абсолютные значения температуры.

Диапазон измерения *стеклянных жидкостных термометров* зависит от свойств термометрической жидкости.

В *газовом термометре* могут быть использованы любые газы, близкие к идеальному (гелий, азот, аргон). На измерение оказывают искажающее влияние многие факторы, для исключения которых необходим ряд корректировочных мероприятий. Для технических целей газовый термометр слишком сложен. Наименьшая температура, которую можно измерить газовым термометром, немного выше критической точки использованного газа (азота -147 °С, гелия -268 °С). Верхний предел измерения ограничивается прочностью чувствительного элемента и плотностью (непроницаемостью для газа) при высоких температурах. Обычно можно измерять температуры в диапазоне $-125 + 500$ °С.

Пароконденсационные термометры работают по тому же принципу, что газовые и жидкостные. Различие заключается в том, что чувствительный элемент здесь заполнен частично жидкостью, частично её парами. Здесь используется свойство каждой жидкости иметь своё характеристическое давление пара, зависящее только от температуры, а не от объёма. Это давление называется давлением насыщенного пара.

Измерительные приборы, которые могут по электромагнитному излучению определять температуру излучающего тела, называют *пирометрами излучения* (радиационными термометрами), или просто пирометрами. Приёмник волн теплового излучения наряду с оптикой является важнейшей составной частью пирометра. Различают следующие приёмники:

- *чёрные и серые приёмники* (термопары или болометры (термометры сопротивления или терморезисторы), закреплённые на зачёрнённых пластинках из золота или платины). Их чувствительность в основном не зависит от длины волны и проявляется как в ультрафиолетовой, так и в крайней инфракрасной области спектра. Поэтому они особенно пригодны для измерения низких температур, поскольку в этом случае тепловая энергия излучается на длинных волнах;

- *селективные чувствительные элементы (сенсоры)* (фотоэлектрические приёмники излучения; фотоэлементы, фоторезисторы, фотодиоды, фототранзисторы).

Задачей калориметрии является экспериментальное определение влияния различных параметров на превращения тепловой энергии (на тепловой эффект). Устройства, в которых протекают исследуемые процессы, называют *калориметрами*. Измерение количества тепла сводится к определению разности температур (косвенный метод измерения).

При экспериментальном исследовании тепловых явлений при резании металлов часто пользуются *методом естественной термопары*. Следует иметь в виду, что термоЭДС естественной термопары сильно искажается в связи с наличием паразитных термопар, возникающих в других местах стыка исследуемой пары с другими деталями механизма и вследствие этого необходима надёжная изоляция. При изменении температур методом естественной термопары измеряется некоторая средняя температура, которая не даёт представления об истинных температурах в различных точках.

Схемы осуществления различных методов измерения температуры резцов и других инструментов приведены ниже.

На рисунке 7.8 представлена схема измерения температуры резания методом двух резцов. Измерение температуры резания методом искусственной термопары проводится в соответствии со схемой, представленной на рис. 7.9.

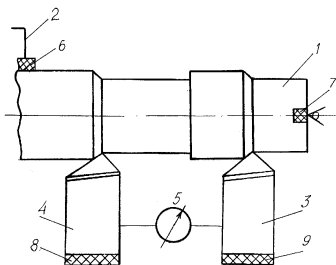


Рис. 7.8. Схема измерения температуры резания методом двух резцов:

1 – обрабатываемая заготовка;
 2 – патрон станка; 3, 4 – резцы из разнородных инструментальных материалов; 5 – регистрирующий прибор (гальванометр);
 6, 7, 8, 9 – изолирующие прокладки

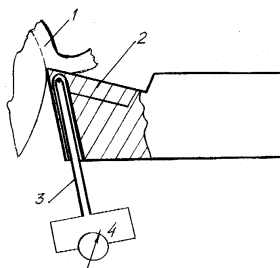


Рис. 7.9. Схема измерения температуры резания методом искусственной термопары:

1 – срезаемый слой;
 2 – режущий инструмент (резец);
 3 – искусственная термопара;
 4 – регистрирующий прибор (гальванометр)

7.6. ПРОВЕРКА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Метрологическая поверка средств измерения осуществляется в соответствии со следующими правилами:

- поверка осуществляется с использованием образцового (эталонного) прибора, класс точности которого в четыре-пять раз выше класса точности поверяемого прибора;
- поверку проводят по всем оцифрованным отметкам испытуемого прибора при прямом и обратном ходе измерения;
- для каждого измерения определяют приведённую погрешность и вариацию;
- из полученных значений вариаций и приведённых погрешностей при прямом и обратном ходе находят максимальное из всех значений и сравнивают его с классом точности прибора, подвергнутого поверке. Если полученное значение меньше класса точности, то прибор пригоден к эксплуатации.

Системой метрологического надзора называют комплекс положений, требований и правил технического, экономического и правового характера, касающихся организации метрологического надзора, метрологической ревизии, метрологической экспертизы.

Задачи, решаемые системой метрологического надзора:

- обеспечение единства и достоверности средств измерения;
- обеспечение постоянной готовности средств измерения;
- помощь совершенствованию измерительной техники;
- повышение эффективности технических и научных работ.

Система метрологического надзора включает в себя метрологические службы субъектов федерации, отраслевые и ведомственные метрологические службы и службы главного метролога на предприятиях. В целом по стране руководящими и нормативными органами являются Комитет метрологического надзора и Госстандарт. Комитету подчинены НИИ Госстандарта.

8. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

8.1. МЕТОДЫ ГРАФИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Независимо от характера эксперимента основной задачей является выбор и преобразование системы координат так, чтобы полный набор данных давал по возможности прямую линию. Если полученные данные не образуют прямой на *линейной графической бумаге*, то можно попытаться построить *график в логарифмических координатах* (или наносить логарифмы значений X и Y на линейную графическую бумагу) [17]. В логарифмических координатах график простой функции $Y=kX^a$ имеет вид прямой. Переходя к логарифмам, получаем $\log Y = \log k + a \log X$. Экспериментальные данные наиболее часто наносятся на *логарифмическую координатную сетку*.

Имеется также третий тип графической бумаги – *полулогарифмическая*, когда одна шкала является логарифмической, а другая – линейной. В этом случае получается прямая, если данные подчиняются закону $Y = k10^{ax}$. После преобразования этой функции имеем $\log Y = \log k + ax$. Чтобы получилась прямая, шкала по оси Y должна быть логарифмической, а по оси X – линейной. В случае прямой облегчается применение экстраполяции для проверки соответствия данных и упрощается вычисление различных статистических показателей (например, среднее квадратичное отклонение).

Встречается *бумага специального вида* (например, с тремя осями координат, гиперболическая), однако фактически в её применении нет необходимости, так как гиперболическую функцию $Y = X/(a + bX)$ можно представить в виде прямой, построив в линейных координатах зависимость X/Y от X или $1/Y$ от $1/X$.

Один из общих принципов, который необходимо соблюдать при построении графиков, состоит в том, что *минимальное деление шкалы графической бумаги должно соответствовать примерно вероятной ошибке измеряемой величины*. Если же вероятная ошибка равна, например, десяти малым делениям, то может быть настолько большой разброс данных, что не удастся уловить основной характер кривой или установить закономерность её изменения. С другой стороны, когда вероятная ошибка равна одной десятой наименьшего деления, все случайные отклонения сгладятся и будет невозможно получить какой-либо показатель точности.

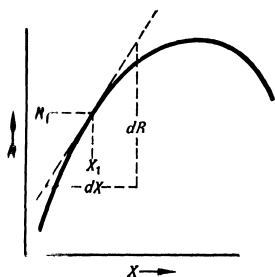


Рис. 8.1. К определению ошибки результата

Во многих случаях в инженерной практике показания приборов обрабатываются с помощью функциональных соотношений, представленных в виде графиков, шкал, диаграмм, номограмм или таблиц. При использовании таких графических или табличных функций применяют *метод конечных размерностей*. Например, пусть используется прибор, отсчёт X которого, согласно оценке, имеет неопределённость ω_x и для получения результата R необходимо воспользоваться графиком зависимости R от X . Производную dR/dX можно получить графическим путём, проведя касательную в точке (R_1, X_1) и измерив тангенс угла наклона (рис. 8.1).

При выявлении закона распределения необходимо осуществлять проверку близости экспериментального распределения к теоретическому.

Для выявления закона распределения заполняется таблица экспериментальных данных (табл. 8.1).

В столбце 1 записываются значения членов вариационного ряда исследуемой величины, в столбце 2 – частоты n_i , являющиеся наблюдаемыми числами появления исследуемой величины. В столбце 3 даются накопленные частоты H_i , являющиеся суммами частот из столбца 2, начиная с первого числа и кончая частотой соответствующего числа ряда. В столбце 4 записываются накопленные частоты, в столбце 5 – величины $1 - H_i/\sum n_i$.

При графическом отображении экспериментальных данных необходимо данные столбцов 1 и 5 нанести на кальку с соответствующей координатной сеткой. Далее проводится линейная интерполяция путём проведения прямой линии через нанесённые ранее на кальке отметки с таким расчётом, чтобы отклонения отметок от прямой имели бы наименьшие значения и располагались по обе стороны.

Наибольшее отклонение D снимается с кальки, где находится путём сопоставления между собой отклонений экспериментальных отметок от интерполяционной прямой. При определении D необходимо учитывать неравномерность шкалы $1 - H_i/\sum n_i$, благодаря которой линейные отрезки отклонений на различных участках координатной сетки имеют разный масштаб.

8.1. Таблица экспериментальных данных

x_i	n_i	H_i	$H_i/\sum n_i$	$1 - H_i/\sum n_i$
1	2	3	4	5

Затем рассчитывается критерий согласия Колмогорова по формуле $D\sqrt{k}$, где k – общее количество экспериментальных точек. Если $D\sqrt{k} \leq 1$, то считается установленным, что экспериментальное распределение согласуется с законом распределения, с которым оно сравнивалось. Если $D\sqrt{k} > 1$, то следует продолжать сравнение с другим видом теоретического закона.

Невозможность проведения прямой линии через экспериментальные отметки свидетельствует о несоответствии экспериментальных данных проверяемому закону. В этом случае следует перейти к проверке экспериментального распределения на следующий вид закона распределения.

8.2. МЕТОДЫ ПОДБОРА ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

На основе экспериментальных данных подбираются алгебраические выражения функций $y = f(x)$, которые называются *эмпирическими формулами*.

Процесс подбора эмпирической формулы состоит из двух этапов: 1) выяснение общего вида формулы по характеру зависимости экспериментальных данных; 2) определение численных значений параметров формулы.

Линеаризацию экспериментальной зависимости можно осуществить с помощью *метода выравнивания*. Выравниванием называется преобразование эмпирической формулы $y = f(x, a, b)$ к виду $Y = a_1X + b_1$, путём подходящей замены переменных, при этом находят параметры a_1 и b_1 преобразованной формулы, а затем по ним пересчитывают параметры a и b .

Допустим, что в прямоугольной системе координат построена некоторая экспериментальная линейная функция. Коэффициенты a и b уравнения прямой получают следующим образом. Определение коэффициента a ясно из рис. 8.2. Для расчёта b необходимо точки y_i и x_i принимать на крайних участках прямой. Для определения параметров прямой применяют также другой графический метод [18]. В уравнение $y = a + bx$ подставляют координаты двух крайних точек, взятых с графика, при этом получают систему двух уравнений, из которых вычисляют коэффициенты a и b . После установления параметров A и B получают эмпирическую формулу типа $y = a + bx$.

Точность линеаризованной функции повышают *методом парных точек*. Для этого нумеруются попарно точки: 1–5,

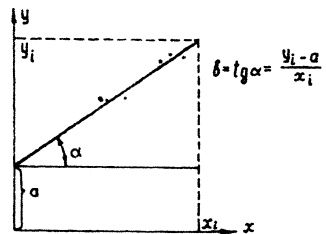


Рис. 8.2. Графическое определение параметров « a » и « b »

2–6, 3–7, 4–8 и вычисляются для каждой пары коэффициентов a и b . Средние значения a и b определяют наилучшее положение прямой. Этот метод применим при условии, что отрезки 1–5, 2–6, 3–7, 4–8 примерно одинаковы.

Для определения численных значений коэффициентов, входящих в эмпирическую формулу, используется *метод средних*, который заключается в том, что используя метод выравнивания и получив линейную зависимость $Y = A + BX$, составляют условные уравнения, число которых равно числу значений x_i и y_i . Условные уравнения разбивают на две приблизительно равные группы в порядке возрастания переменной x_i или y_i , и уравнения, входящие в каждую из этих групп, складывают и получают два уравнения, из которых определяются a и b . Выражая X и Y через первоначальные переменные, получим искомую зависимость между x и y .

Экспериментальные зависимости часто аппроксимируются полиномами вида $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n$ [18, 19]. Значения коэффициентов полинома можно определить по методу средних. Для этого определяют число членов полинома, обычно принимают не более 3–4. В принятое выражение последовательно подставляют координаты x и y ряда экспериментальных точек и получают систему уравнений. Каждое уравнение приравнивают соответствующему отклонению:

$$A_0 + A_1x_1 + A_2x_1^2 + \dots + A_nx_1^n - Y_1 = \varepsilon_1 ;$$

$$A_0 + A_1x_2 + A_2x_2^2 + \dots + A_nx_2^n - Y_2 = \varepsilon_2 , \dots ;$$

$$A_0 + A_1x_m + A_2x_m^2 + \dots + A_nx_m^n - Y_m = \varepsilon_m .$$

Пример 8.1. Подобрать тип аналитической зависимости и определить значения параметров, входящих в эту формулу. Экспериментальные данные приведены в таблице:

	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,5	0,6	0,7	0,9	1,2	1,4	2	3
Y	10,465	7,961	6,318	4,333	2,815	2,234	1,268	0,712

С помощью приложения Microsoft Excel по приведённым экспериментальным данным строим график (рис. 8.3).

Из анализа кривой делаем вывод о возможности применения степенной зависимости $y = ax^\alpha$.

Проведём линеаризацию, используя формулы преобразования

$$y = kx + b; \quad X = \ln x; \quad Y = \ln y; \quad b = \ln \alpha; \quad k = \alpha .$$

Составим 8 уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 10,465 = k \ln 0,5 + b; \\ \ln 7,961 = k \ln 0,6 + b; \\ \ln 6,318 = k \ln 0,7 + b; \\ \ln 4,333 = k \ln 0,9 + b; \\ \ln 2,815 = k \ln 1,2 + b; \\ \ln 2,234 = k \ln 1,4 + b; \\ \ln 1,268 = k \ln 2 + b; \\ \ln 0,712 = k \ln 3 + b \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \ln 29,077 = k \ln 2,7 + b; \\ \ln 7,029 = k \ln 7,6 + b; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3,37 = 0,99k + b; \\ 1,95 = 2,03k + b. \end{array} \right.$$

Решив данную систему уравнений в Mathcad:

Given

$$0.99 \cdot k + b - 3.37 = 0$$

$$2.03 \cdot k + b - 1.95 = 0$$

$$\text{Find}(k, b) \rightarrow \left(\begin{array}{l} -1.3653846153846153846 \\ 4.7217307692307692308 \end{array} \right), \text{ имеем } k = -1.36, b = 4.72.$$

Сопоставим измеренные значения с рассчитанными по формуле $y = 4,72x^{-1,36}$ (рис. 8.4).

Таким образом, полученная формула достаточно точно описывает экспериментальные данные.

После выполнения вычислений и получения эмпирической формулы необходимо осуществить проверку правильности вычислений. При этом используются *два способа проверки*.

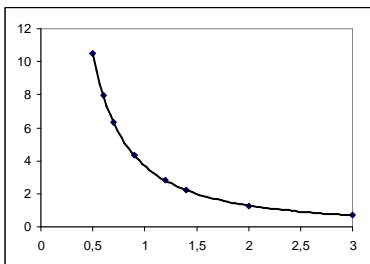


Рис. 8.3. Экспериментальная зависимость

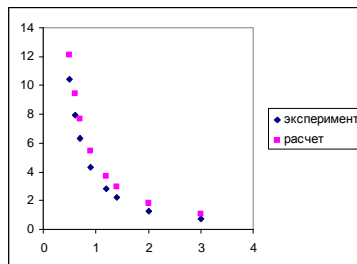


Рис. 8.4. Сопоставление экспериментальной зависимости с расчётной, полученной по формуле $y = 4,72x^{-1,36}$

По первому способу для проверки правильности вычислений используется выражение $\Sigma(x + y)^2 = \Sigma x^2 + 2\Sigma xy + \Sigma y^2$. Это условие должно выполняться не только для сумм, но и в каждой строчке расчётной табл. 8.2.

8.2. Расчётная таблица для вычисления коэффициентов

№ опыта	x	y	x^2	xy	y^2	$x + y$	$(x + y)^2$
Σ							
Среднее значение	\bar{x}	\bar{y}					

По второму способу используется условие $\bar{y} = \alpha + \beta\bar{x}$. Подставляя в это соотношение средние значения y и x из последней строки таблицы и один из коэффициентов, определяется другой коэффициент и сравнивается с расчётным. Эта проверка полная и точная, так как она проверяет не только вычисление сумм, но и вычисление коэффициентов.

На практике используются обе проверки, чтобы в случае ошибки в таблице, не считать напрасно коэффициенты. После вычислений коэффициентов наносят исходные данные и полученное уравнение на график.

Определив вид эмпирической формулы и её параметры, вычисляют среднее квадратичное отклонение, которое характеризует точность найденной эмпирической формулы и сравнивают его с погрешностями

эксперимента $\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - y'_i)^2}{N-1}}$, где y_i – экспериментальные значения; y' – расчётные значения.

Подбор эмпирических формул можно осуществить также с помощью табличного процессора Microsoft Excel. Для этого необходимо построить точечный график по экспериментальным данным. Щелчком левой клавиши выделить все точки и нажать правую клавишу мыши и выбрать команду «Добавить линию тренда». При этом в рабочем пространстве листа появится диалоговое окно «Линия тренда» (рис. 8.5, а). В этом диалоговом окне возможно выбрать вид функции, с помощью которой предполагается осуществить аппроксимацию экспериментальных данных. Затем, выбрав вкладку «Параметры», в открывшемся окне ставим флажки на «показывать уравнение на диаграмме» и «поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2)» (рис. 8.5, б). Нажав «ОК», получим в пространстве рабочего листа построенный график с аппроксимационной формулой и степенью точности аппроксимации. Если по каким-либо причинам необходимо изменить вид аппроксимационной зависимости, то это можно сделать двойным щелчком левой клавишей мыши по этой зависимости, при этом откроется окно «Формат линии тренда», где можно изменить параметры аппроксимации.

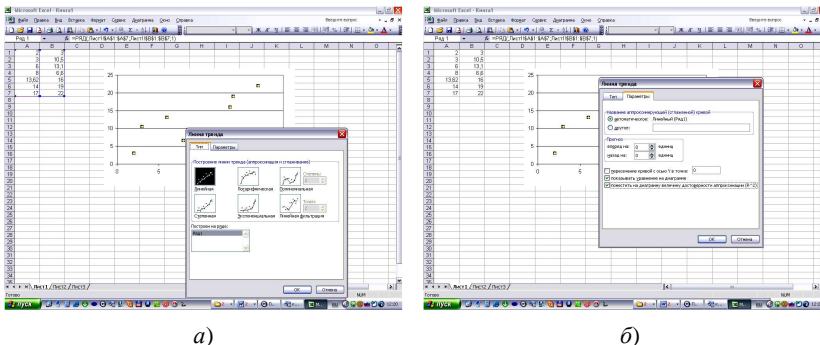


Рис. 8.5. Использование табличного процессора Microsoft Excel для аппроксимации экспериментальных данных

При графическом методе обработки экспериментальных данных в системе декартовых или логарифмических координат необходимо определить, как наилучшим образом провести кривую или прямую по ряду экспериментальных точек. В этом случае обработку результатов опытов производят по методу наименьших квадратов [19].

Если бы экспериментальные точки лежали строго на прямой линии, то для каждой из них было бы справедливо уравнение прямой линии. В действительности расположение экспериментальных точек характеризуется некоторыми отклонениями от проведённой через точки аппроксимационной прямой (рис. 8.6).

Сущность метода наименьших квадратов состоит в том, чтобы, зная положение точек на плоскости так провести линию, чтобы сумма квадратов отклонений ординат этих точек от проведённой прямой была минимальной $u = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - a - \beta x_i)^2 = \min$. Для этого необходимо вычислить частные производные функции по коэффициентам, приравнять их нулю и продифференцировать выражения:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^N (y_i - a - \beta x_i) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N (y_i - a - \beta x_i) x_i = 0.$$

Преобразовав полученную систему уравнений и решив эту систему через определитель, имеем:

$$\alpha = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}; \quad \beta = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}.$$

Вычисление коэффициентов удобно проводить в табличной форме.

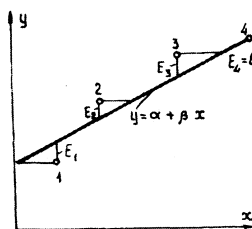


Рис. 8.6. Расположение экспериментальных и расчётных точек

Пример 8.2. Провести обработку результатов экспериментальных исследований и представить их в виде аналитических зависимостей обработанных по методу наименьших квадратов. Исходные данные принимаем по примеру 8.1.

Расчётные таблицы для вычисления коэффициентов

	эксперимент		расчёт		$\lg a$	b	$\lg v$	$\lg^2 x_i$	$\lg v$	сумма $\lg v \cdot \lg x_i$
0,5	10,465			12,11554047	0,69	-0,89448616	1,02	-0,602059991	-0,30103	-0,30705
0,6	7,961			9,454886028			2,07	-0,443697499	-0,22185	
0,7	6,318			7,666703437			0,80	-0,30980392	-0,1549	
0,9	4,333	29,077	2,7	5,447185759			0,64	-0,091514981	-0,04576	
1,2	2,815			3,683456149			0,45	0,158362492	0,079181	
1,4	2,234			2,98681188			0,35	0,292256071	0,146128	
2	1,268			1,838828408			0,10	0,602059991	0,30103	
3	0,712	7,029	7,6	1,059392983			-0,15	0,954242509	0,477121	
							5,29	0,559844673	0,279922	

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2	$x_i + y_i$	$(x_i + y_i)^2$	y_i^2	$(y_i - y_i^2)^2$
0,5	10,465	0,25	5,23	109,52	10,97	120,23	0,957916696	90,38
0,6	7,961	0,36	4,78	63,38	8,56	73,29	0,887445387	50,04
0,7	6,318	0,49	4,42	39,92	7,02	49,25	0,827862744	30,14
0,9	4,333	0,81	3,90	18,77	5,23	27,38	0,730724167	12,98
1,2	2,815	1,44	3,38	7,92	4,02	16,12	0,619528691	4,82
1,4	2,234	1,96	3,13	4,99	3,63	13,21	0,559946048	2,80
2	1,268	4,00	2,54	1,61	3,27	10,68	0,422083304	0,72
3	0,712	9,00	2,14	0,51	3,71	13,78	0,265362083	0,20
Сумма значений								
10,30	36,11	18,31	29,51	246,62	35,44	203,71		192,08
Среднее значение								
1,29	4,51							

Основная погрешность $\delta = 5,238258$.

Варианты индивидуальных заданий по подбору эмпирических формул и обработке результатов эксперимента по методу наименьших квадратов приведены в прил. Е.

При подборе эмпирических формул требуется решение систем алгебраических уравнений. Далее рассмотрим порядок решения таких систем с применением пакета Mathcad.

Наиболее просто осуществляется *решение линейных систем по формулам Крамера* [15]. Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение линейной системы, относительно трёх неизвестных

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 30; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10; \\ -x_2 - x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 & x_1 \\ 0 & 1 \dots 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & x_n \end{pmatrix}.$$

Последний $(n + 1)$ -й столбец этой матрицы содержит решение системы.

В Mathcad прямой и обратный ходы метода Гаусса выполняет функция $\text{rref}(A)$.

Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение методом Гаусса системы трёх линейных уравнений относительно трёх неизвестных.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ORIGIN:= 1

$$Ar := \text{augment}(A, b) \quad Ar = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Ag := \text{rref}(Ar) \quad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x := \text{submatrix}(Ag, 1, 3, 4, 4) \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A \times x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Для того чтобы сформировать расширенную матрицу систем используют функцию $\text{augment}(A, b)$, которая формирует матрицу, добавляя к столбцам матрицы системы A справа столбец правых частей b (в приведённом документе расширенной матрице системы присвоено имя Ar). Функция $\text{rref}(Ar)$ выполняет элементарные операции со строками расширенной матрицы системы Ar – приводит её к ступенчатому виду с единичной матрицей в первых столбцах, т.е. выполняя прямой и обратный ходы гауссова исключения, Ag – имя результата (ступенчатой формы матрицы Ar). Функция $\text{submatrix}(Ag, 1, 3, 4, 4)$, выделяя последний столбец матрицы Ag , формирует столбец решения системы. Проверка (вычисление $Ax - b$) позволяет убедиться в правильности решения.

Точные методы решения линейных систем применяют для решения линейных систем относительно небольшой размерности (до 10^3). Для решения систем большей размерности ($10^3 - 10^6$) используют *итерационные методы*.

Наиболее простейший итерационный метод решения линейной системы – *метод простых итераций*, состоящий в том, что система

уравнений $Cx = d$ преобразуется к виду $x = b + Ax$ и её решение вычисляется как предел последовательности $x^{(k)} = b + Ax^{(k-1)}$, $k=1, 2, \dots$.

Если для векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ введена норма $\|x\|$, то согласованной с ней нормой матриц называют величину $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Для сходимости метода простых итераций $x^{(k)} = b + Ax^{(k-1)}$ достаточно, чтобы выполнялось условие $\|A\| < 1$ по какой-либо норме матрицы, согласованной с нормой векторов.

В качестве условия окончания итерационного процесса можно взять условие $\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{x^{(k)}} \leq \varepsilon$, где ε – заданная погрешность приближённого решения $x \approx x^{(k)}$.

Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий решение методом простых итераций линейной системы

$$\begin{cases} 100x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 200; \\ 6x_1 + 200x_2 - 10x_3 = 600; \\ x_1 + 2x_2 - 100x_3 = 500. \end{cases}$$

Преобразованная система имеет вид: $\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3; \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3; \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 - 0,02x_2. \end{cases}$

$$b := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{norm1}(A) = 0.08 \quad \text{norm2}(A) = 0.07098$$

$$\text{norme}(A) = 0.089 \quad \text{normi}(A) = 0.08$$

$$x^{(0)} := b \quad k := 1..10 \quad x^{(k)} := (b + A \cdot x^{(k-1)})$$

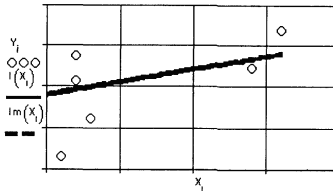
$$x = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1.92 \\ \hline 1 & 3 & 3.19 \\ \hline 2 & 5 & 4.92 \\ \hline \end{array} \quad \varepsilon := \frac{|x^{(10)} - x^{(9)}|}{x^{(9)}} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 2.799 \times 10^{-14} \\ 1.674 \times 10^{-14} \\ 1.086 \times 10^{-14} \end{pmatrix}$$

Пример 8.3. Для изучения зависимости октанового числа бензина от чистоты катализатора (%) провели 11 измерений, приведённых ниже [15].

Октановое число	98,8	98,9	99,0	99,1	99,2	99,3	99,4	99,5	99,6	99,7	99,8
Чистота катализатора	87,1	86,6	86,4	87,3	86,1	86,8	87,2	88,4	87,2	86,4	88,6

Найти коэффициенты a , b линейной зависимости $y = ax + b$ октанового числа от чистоты катализатора. Вычислить значение октанового числа для чистоты катализатора 87 %. Y_j – экспериментальные точки; $I(X_i)$ – линейная функция, вычисленная с помощью `lsolve`; $Im(X_j)$ – линейная функция, вычисленная с помощью `intersept` and `slope`.

$$X = \begin{bmatrix} 0.871 \\ 0.861 \\ 0.864 \\ 0.873 \\ 0.861 \\ 0.868 \\ 0.872 \\ 0.884 \\ 0.872 \\ 0.864 \\ 0.886 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0.988 \\ 0.989 \\ 0.990 \\ 0.991 \\ 0.992 \\ 0.993 \\ 0.994 \\ 0.995 \\ 0.996 \\ 0.997 \\ 0.998 \end{bmatrix} \quad A^{(1)} := X \quad A^{(2)} := Y$$



$$I(0.870) = 0.993 \quad Im(0.870) = 0.993$$

$$a = 0.204 \quad b = 0.815$$

$$\text{slope}(X, Y) = 0.204 \quad \text{intersept}(X, Y) = 0.815$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \text{lsolve}(A^T A, A^T Y) \quad I(x) = a x + b$$

$$Im(x) = \text{intersept}(X, Y) + \text{slope}(X, Y) x \quad i = 1 \quad 11$$

8.3. АППРОКСИМАЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

Аппроксимация – поиск функции, которая с заданной степенью точности описывает исходные данные.

Интерполяция – определение наиболее правдоподобных промежуточных значений в интервале между известными значениями (подбор гладкой кривой, проходящей через заданные точки или максимально близко к ним).

Экстраполяция – определение наиболее правдоподобных последующих значений на основании анализа предыдущих значений (предсказание дальнейшего поведения неизвестной функции).

Применяются следующие функции MathCAD [15]:

- `regress(VX, VY, k)` – возвращает вектор данных, используемый для поиска интерполирующего полинома порядка k . Полином должен описывать данные, состоящие из упорядоченных значений аргумента (VX) и соответствующих значений неизвестной функции (VY), т.е. график полинома должен проходить через все точки, заданные координатами (VX, VY), или максимально близко к этим точкам.

- `interp(VS, VX, VY, x)` – возвращает интерполированное значение неизвестной функции при значении аргумента x . VS – вектор значений, который вернула функция `regress`. VX, VY – те же данные, что и для `regress`. Функции `interp` и `regress` используются в паре.

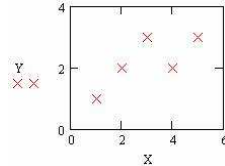
- `predict(V, m, n)` – возвращает вектор из n предсказанных значений на основании анализа m предыдущих значений из вектора V .

Предполагается, что значения функции в векторе V были получены при значениях аргумента, взятых последовательно, с одинаковым шагом. Используется алгоритм линейной предикции. Наиболее целесообразно использовать predict для предсказания значений по данным, в которых отмечены колебания.

Для интерполяции система Mathcad использует подход, основанный на применении *метода наименьших квадратов*.

Примеры интерполяции и экстраполяции:

1. Пусть заданы координаты пяти точек (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 2), (5; 3), представляющих результаты измерения значений некоторой неизвестной функции при различных значениях x . Необходимо подобрать интерполирующую функцию (гладкую кривую), проходящую через заданные точки.



2. Дана функция $y(i) = e^{-i/10} \sin(i)$. Известны значения данной функции при $i = 0, 1, \dots, 10$. Основываясь на десяти последних значениях, необходимо предсказать последующие десять значений.

Решения показаны на рис. 8.7.

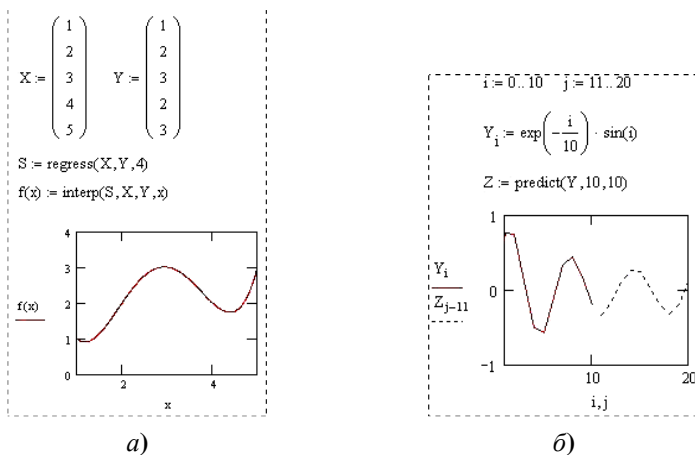


Рис. 8.7. Решения в MathCAD первой (а) и второй (б) задач

8.4. ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Регрессией называют зависимость $y(x)$ условного математического ожидания величины $\eta(x)$ от переменной x , т.е. $y(x) = M(\eta/x)$.

Задача регрессионного анализа состоит в восстановлении функциональной зависимости $y(x)$ по результатам измерений (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Аппроксимируем неизвестную зависимость $y(x)$ заданной функцией $f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$. Это означает, что результаты измерений можно представить в виде $y_i = f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_k) + \xi_i$, где a_0, a_1, \dots, a_k – неизвестные

параметры регрессии, а ξ_i – случайные величины, характеризующие погрешности эксперимента. Обычно предполагается, что ξ_i – независимые нормально распределённые случайные величины с $M\xi_i = 0$ и одинаковыми дисперсиями $D\xi_i = \sigma^2$.

Параметры a_0, a_1, \dots, a_k следует выбирать таким образом, чтобы отклонение значений предположенной функции от результатов эксперимента было минимальным. Часто в качестве меры отклонения выбирают величину $\Phi(a_0, a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n (f(a_0, a_1, \dots, a_k) - y_i)^2$, и, следовательно,

но, параметры a_0, a_1, \dots, a_k определяют методом наименьших квадратов.

Рассмотрим простейший случай линейной регрессии [8]. Пусть выдвинута гипотеза о том, что функция $f(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$ имеет вид $f(x, a_0, a_1) = a_0 + a_1x$. Найдём оценку параметров a_0 и a_1 методом наименьших квадратов. Для этого минимизируем функцию

$$\Phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1x_i - y_i)^2. \quad \text{Тогда} \quad a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2};$$

$$a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

В Mathcad для вычисления параметров a_0 и a_1 предназначены соответственно функции `intersept(x,y)` и `slope(x,y)` [15].

Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление коэффициентов линейной регрессии a_0 и a_1 и соответствующие графики для представленных ниже экспериментальных данных.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
y	1,156	1,332	1,553	1,705	1,831	2,204	2,388	2,656
x	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
y	3,019	3,081	3,299	3,486	3,692	3,867	3,896	

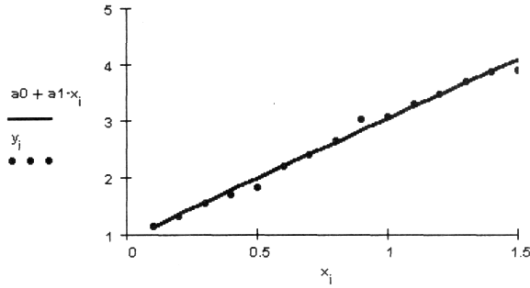
Границы доверительных интервалов в каждой точке x_0 образуют *доверительную полосу* или *доверительный коридор*. Эта полоса не является доверительной областью для всей линии регрессии. Она определяет только концы доверительных интервалов для y при каждом значении x . С помощью коридора регрессии нельзя, например, построить одновременно два доверительных интервала в различных точках x_0 и x_1 .

```

ORIGIN := 1    N := 15
i := 1..N    xi := i·0.1    yi := READ("c:\tmp\data5.txt")

a0 := intercept(x,y)    a0 = 0.925
a1 := slope(x,y)    a1 = 2.107

```

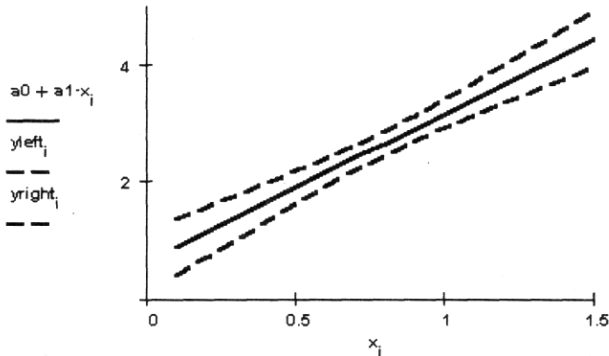


Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий построение коридора регрессии.

Построение доверительного коридора $i := 1..N$

$$y_{left_i} := a0 + a1 \cdot x_i - t \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - X_{mean})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{mean})^2}}$$

$$y_{right_i} := (a0 + a1 \cdot x_i) + t \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{(x_i - X_{mean})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{mean})^2}}$$



Доверительная область для всей линии регрессии определяется с помощью следующих уравнений соответственно нижней и верхней границ полосы:

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x - 2f_{\alpha} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}};$$

$$y = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x + 2f_{\alpha} s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}},$$

где f_{α} – корень уравнения $F_{2, n-2}(f_{\alpha}) = 1 - \alpha$; $F_{2, n-2}(x)$ – функция распределения Фишера с 2 и $n - 2$ степенями свободы.

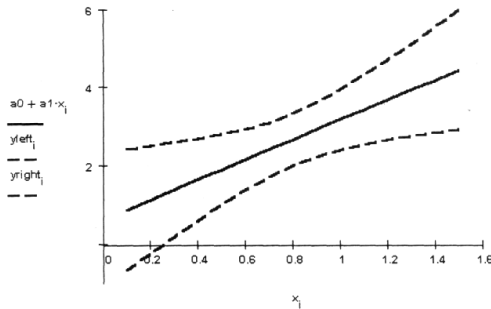
Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad, содержащий вычисление доверительной области регрессии для выборки, анализируемой во всех предыдущих примерах.

Построение доверительной области

$$f := \text{qF}(1 - \alpha, 2, N - 2) \quad i := 1..N$$

$$y_{\text{left}_i} := a_0 + a_1 \cdot x_i - 2 \cdot f \cdot \sqrt{s^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x_i - X_{\text{mean}})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{\text{mean}})^2} \right)}$$

$$y_{\text{right}_i} := (a_0 + a_1 \cdot x_i) + 2 \cdot f \cdot \sqrt{s^2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{(x_i - X_{\text{mean}})^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - X_{\text{mean}})^2} \right)}$$



Ниже приведены примеры рабочих листов Mathcad, позволяющие определить коэффициенты и доверительные интервалы для коэффициентов линейной регрессии.

Пример 8.4. Вычислить коэффициенты линейной регрессии.

ORIGIN :=1 N :=15

i :=1..N x_i := i · 0.1 y_i :=READ(“c:\tmp\data5.txt”)

a0 :=intercept(x,y) a0 = 0.925

a1 :=slope(x,y) a1 = 2.107

Пример 8.5. Вычислить доверительные интервалы для коэффициентов линейной регрессии.

ORIGIN :=1 N :=15

i :=1..N x_i := i · 0.1 y_i :=READ(“c:\tmp\data5.txt”)

a0 :=intercept(x,y) a0 = 0.925

a1 :=slope(x,y) a1 = 2.107

y_i := a0 + a1 · x_i

Xmean :=mean(x) Xmean = 0.8

Ymean :=mean(y) Ymean = 2.611

$$s2 := \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{k=1}^N (y_k - y_{r_k})^2$$

Построение доверительного интервала для a₀

$$\alpha :=1 \quad t := qt\left(1 - \frac{\alpha}{2}, N - 2\right) \quad t = 1.771$$

$$a0left := a0 - t \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{Xmean^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2}} \quad a0left = 0.836$$

$$a0right := a0 + t \cdot \sqrt{s2} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{Xmean^2}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2}} \quad a0right = 1.014$$

Доверительный интервал для a₀ (0.836, 1.014)

Построение доверительного интервала для a₁

$$a1left := a1 - \frac{t \cdot \sqrt{s2}}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2} \quad a1left = 2.009$$

$$a1right := a1 + \frac{t \cdot \sqrt{s2}}{\sum_{k=1}^N (x_k - Xmean)^2} \quad a1right = 2.205$$

Доверительный интервал для a₁ (2.009, 2.205)

9. ПОНЯТИЕ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА

В любом эксперименте средние значения наблюдаемых величин меняются в связи с изменением основных факторов (качественных и количественных), определяющих условия опыта, а также и случайных факторов. Исследование влияния тех или иных факторов на изменчивость средних является *задачей дисперсионного анализа*.

Чтобы решить, значимо ли влияние данного фактора, необходимо оценить значимость соответствующей выборочной дисперсии в сравнении с дисперсией воспроизводимости, обусловленной случайными факторами. Проверка значимости оценок дисперсий проводится по критерию Фишера. Если рассчитанное значение критерия Фишера окажется меньше табличного, то влияние рассматриваемого фактора нет оснований считать значимым. В противном случае рассматриваемый фактор влияет на изменчивость средних. В дальнейшем будем полагать, что выполняются следующие допущения: 1) случайные ошибки наблюдений имеют нормальное распределение; 2) факторы влияют только на изменение средних значений, а дисперсия наблюдений остается постоянной; эксперименты равноточны.

Требование нормального распределения определяет выбор основных факторов при исследовании процесса методом дисперсионного анализа. Если нужно получить нормальное распределение выходной величины, к случайным желательным относить только те факторы, влияние которых на выходную величину очень мало. Исключение можно делать лишь для тех факторов, которые сами по себе дают нормальное распределение результатов.

Факторы, рассматриваемые в дисперсионном анализе, бывают двух родов: со случайными уровнями и с фиксированными. В первом случае предполагается, что выбор уровней производится из бесконечной совокупности возможных уровней и сопровождается рандомизацией. При этом результаты эксперимента имеют большее значение, поскольку выводы по эксперименту можно распространить на всю генеральную совокупность. Если все уровни выбираются случайным образом, то математическая модель эксперимента называется *моделью со случайными уровнями факторов (случайная модель)*. Когда все уровни фиксированы, модель называется *моделью с фиксированными уровнями факторов*. Когда часть факторов рассматривается на фиксированных уровнях, а уровни остальных выбираются случайным образом, модель называется *моделью смешанного типа*.

В зависимости от числа источников дисперсии различают *однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ*.

9.1. ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Пример 9.1. Исследовать влияние технологии обработки заготовки на шероховатость поверхности готовой детали. Технологию будем называть фактором, а каждую конкретную технологию $T_i (i = 1, 2, \dots, m)$ – уровнем этого фактора, m – полное число применяемых технологий. Обозначим x_{ij} – шероховатость поверхности детали, полученную в j -ом эксперименте при использовании i -й технологии, $T_i (j = 1, 2, \dots, n_i)$, n_i – число часов, в течение которых производились наблюдения за применением технологии T_i . Сведём все данные в таблицу:

	1	2	3	...	
T_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1n_1}
T_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2n_2}
...
T_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mn_m}

Рассмотрим математическую модель, в которой предполагается, что каждая случайная величина x_{ij} может быть представлена в виде $x_{ij} = a_i + \varepsilon_{ij}$, где a_i – шероховатость, характерная для технологии T_i , а ε_{ij} – независимые случайные величины, которые описывают суммарный вклад всех случайных факторов, влияющих на итоговую шероховатость. Чаще всего полагают, что все $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$, т.е. имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и с одинаковой дисперсией σ^2 .

Необходимо выяснить, влияет ли выбор технологии обработки заготовки на шероховатость поверхности или нет. На математическом языке это означает, что по результатам эксперимента необходимо проверить справедливость статистической гипотезы H_0 о том, что все технологии T_i одинаково эффективны, $H_0: a_1 = a_2 = \dots = a_m$.

Анализ результатов будет основан на сопоставлении двух оценок неизвестной дисперсии σ^2 [15].

Одна из этих оценок не зависит от того, верна ли гипотеза H_0 . Для другой оценки это предположение существенно, т.е. эта оценка будет близка к значению σ^2 только тогда, когда гипотеза H_0 верна. Если обе оценки близки, то гипотезу H_0 следует принять. Если же оценки существенно отличаются, то гипотезу H_0 следует отвергнуть.

Построим эти оценки. Сначала для каждой строки вычислим средние $\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, а затем величину $s_1^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$.

При сделанных предположениях о случайных величинах ε_{ij} величина s_1^2/σ^2 имеет χ^2 -распределение с nm степенями свободы независимо от того, верна ли гипотеза H_0 . Следовательно, первая оценка для σ^2 получена.

Для получения второй оценки сначала найдём величину $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$, где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$; $s_2^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$.

При выполнении гипотезы H_0 величины s_1^2 и s_2^2 независимы, а величина s_2^2 / σ^2 имеет χ^2 -распределение с $n - 1$ степенями свободы. Теперь сравним оценки s_1^2 и s_2^2 . Если гипотеза H_0 верна, то величина

$$F_n = \frac{\frac{s_2^2}{n-1}}{\frac{s_1^2}{n-m}} = \frac{s_2^2(n-m)}{s_1^2(n-1)}$$

имеет распределение Фишера с $n - 1$ и m степенями свободы.

Распределение Фишера характеризуется двумя параметрами: числом степеней свободы числителя и числом степеней свободы знаменателя. Зададимся достаточно малым уровнем значимости α и решим уравнение $F_{n-1, n-m}(x) = 1 - \alpha$. Сравним корень этого уравнения x_α с вычисленным выше значением F_n . При $F_n > x_\alpha$ гипотеза H_0 отвергается, в противном случае – принимается.

Выясним на уровне значимости $\alpha = 0,05$ зависит ли шероховатость поверхности готовой детали от технологии обработки заготовки, по результатам, приведённым в таблице, представленной ниже.

Номер технологии	Часы						n_i
	1	2	3	4	5	6	
1	140	141	140	141	142	145	6
2	150	149	150	147			4
3	147	147	145	150	150		5
4	144	147	142	146			4

Фрагмент документа Mathcad, содержащий соответствующие вычисления, приведён ниже.

ORIGIN:= 1

$x_{1,1} := 140$ $x_{1,2} := 141$ $x_{1,3} := 140$ $x_{1,4} := 141$ $x_{1,5} := 142$ $x_{1,6} := 145$ $n_1 := 6$

$x_{2,1} := 150$ $x_{2,2} := 149$ $x_{2,3} := 150$ $x_{2,4} := 147$ $n_2 := 4$

$x_{3,1} := 147$ $x_{3,2} := 147$ $x_{3,3} := 145$ $x_{3,4} := 150$ $x_{3,5} := 150$ $n_3 := 5$

$x_{4,1} := 144$ $x_{4,2} := 147$ $x_{4,3} := 142$ $x_{4,4} := 146$ $n_4 := 4$

$m := 4$ $N := \sum_{i=1}^m n_i$ $N = 19$ $i := 1..m$

$$X_i := \frac{1}{n_i} \cdot \sum_{j=1}^{n_i} n_{i,j} \quad s1 := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} (X_i - x_{i,j})^2$$

$$XN := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{i,j} \quad s2 := \sum_{i=1}^m n_i \cdot (XN - X_i)^2$$

$$s1 := 57.05 \quad s2 := 173.582 \quad FN := \frac{s2 \cdot (N - m)}{s1 \cdot (N - 1)} \quad FN := 2.536$$

$$\alpha := 0.05 \quad x\alpha := qF(1 - \alpha, N - 1, N - m) \quad x\alpha = 2.353$$

$$r2 := \frac{s2}{s1} \quad r2 = 3.043$$

Для того чтобы найти решение уравнения $F_{n-1, n-m}(x) = 1 - \alpha$ используют функцию $qF(p, d_1, d_2)$ с параметрами $p = 1 - \alpha$, $d_1 = n - 1$, $d_2 = n - m$, значением которой является искомый корень уравнения [15].

В результате вычислений получено $F_n = 2,536$ и $x_\alpha = 2,353$, т.е. $F_n > x_\alpha$, то гипотеза H_0 отвергается. Следует, что выбор технологии влияет на шероховатость. Следующая задача – оценить степень этого влияния.

Для оценки степени влияния фактора используют *выборочный коэффициент детерминации* r^2 , который вычисляется по формуле

$$r^2 = s_2^2 / s^2, \quad \text{где} \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 - \text{оценка полной выборочной}$$

дисперсии.

Коэффициент детерминации r^2 показывает, какую часть в общей дисперсии величин x_{ij} составляет часть, обусловленная зависимостью от фактора T .

В рассмотренном выше примере $r^2 = 0,753$, т.е. 75,3 % общей вариации шероховатости обусловлены технологией.

Полученные результаты позволяют оценить параметры исходной модели.

Если гипотеза H_0 принимается, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$, то оценкой параметра $\bar{\alpha}$ (математического ожидания) является величина \bar{x} , а оценкой дисперсии σ^2 – величина $s_1^2 / n - m$.

Если гипотеза H_0 отвергается, то оценкой α_i является \bar{x} , а оценкой дисперсии σ^2 для всех уровней – величина $s_1^2 / n - m$. Эффект влияния i -го уровня можно вычислять по формуле $\bar{x}_i - \bar{x}$.

Ниже приведены вычисления коэффициента детерминации и оценок параметров распределений каждого уровня для рассмотренного выше примера о влиянии технологии обработки заготовки на шероховатость поверхности готового изделия.

$$r2 := \frac{s2}{s1+s2} \quad r2 := 0.756 \quad a_i := x_i \quad a = \begin{bmatrix} 141.5 \\ 149 \\ 147.8 \\ 144.75 \end{bmatrix}$$

$$\sigma2 := \frac{s1}{N-m} \quad \sigma := \sqrt{\sigma2} \quad \sigma := 1.95$$

Из приведённых вычислений следует, например, что шероховатость поверхности при второй технологии обработки представляет собой случайную величину, имеющую нормальное распределение $N(149, 1.95)$.

На рис. 9.1 приведены графики плотности вероятностей шероховатости для всех четырёх технологий обработки.

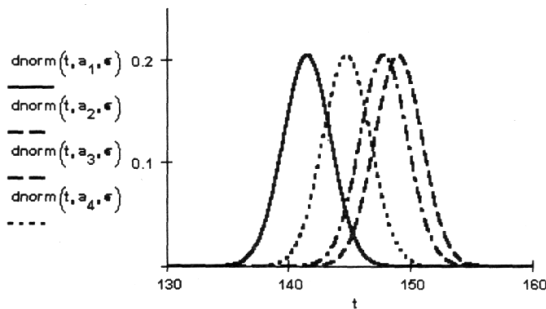


Рис. 9.1. Графики плотности вероятностей шероховатости

9.2. ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотренную в п. 9.1 методику однофакторного анализа, можно применить к двум факторам.

Пусть случайная величина ξ зависит от двух признаков (факторов): A и B . Обозначим $A_i, i = 1, 2, \dots, m_A; B_j, j = 1, 2, \dots, m_B$ – уровни факторов A и B соответственно. Результаты измерения случайной величины ξ представлены в таблице:

	1	2	3	...	m_B
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1mB}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2mB}
...
m_A	x_{mA1}	x_{mA2}	x_{mA3}	...	$x_{mA mB}$

Для простоты остановимся на случае, когда в каждой клетке таблицы, т.е. при каждом сочетании уровней факторов, приведён результат только одного наблюдения (измерения). Тогда общее число наблюдений $n = m_A m_B$.

Обозначим через a_i математическое ожидание ξ при уровне A , $i = 1, 2, \dots, m_B$; через b_j – математическое ожидание ξ при уровне B , $j = 1, 2, \dots, m_B$. Если при изменении фактора A сохраняется равенство $a_1 = a_2 = \dots = a_{m_A}$, то величина ξ не зависит от фактора A ; в противном случае, ξ зависит от фактора A . Аналогично определяется зависимость от фактора B .

Следует проверить следующие гипотезы: H_A : $a_1 = a_2 = \dots = a_{m_A}$ и H_B : $b_1 = b_2 = \dots = b_{m_B}$. При решении задачи будем предполагать, что выполняются следующие условия:

- наблюдения при различных сочетаниях уровней факторов независимы;
- при всех сочетаниях уровней факторов случайная величина ξ нормально распределена с одной и той же дисперсией σ^2 .

Изменчивость наблюдаемых факторов при переходе от одной клетки таблицы к другой может быть обусловлена изменением уровней факторов и случайными неконтролируемыми факторами. *Изменчивость*, вызванная случайными неконтролируемыми факторами, называется *остаточной*.

Вычислим общую среднюю результатов измерений по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} x_{ij} .$$

Эту величину можно представить в другой форме, используя групповые средние $x_{i.}$ и $x_{.j}$: $\bar{x}_{i.} = \frac{1}{m_B} \sum_{j=1}^{m_B} x_{ij}$; $\bar{x}_{.j} = \frac{1}{m_A} \sum_{i=1}^{m_A} x_{ij}$.

Точка в индексе величины $x_{i.}$ означает, что суммирование ведётся по i -ой строке, а точка в индексе величины $x_{.j}$ – что суммирование ведётся по j -му столбцу. В этих обозначениях среднее результатов измерений

$$\bar{x} = \frac{m_B}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \bar{x}_{i.}; \quad \bar{x} = \frac{m_A}{n} \sum_{j=1}^{m_B} \bar{x}_{.j} \quad [8, 15].$$

Средняя изменчивость, вызванная фактором A , вычисляется по формуле $\hat{\sigma}_A^2 = \frac{m_B}{n} \sum_{i=1}^{m_A} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2$. Аналогично для изменчивости, вызванной

$$\text{фактором } B: \hat{\sigma}_B^2 = \frac{m_A}{n} \sum_{j=1}^{m_B} (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 .$$

Для общей характеристики изменчивости, обусловленной случайными факторами, вычисляем $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x})^2$.

Общую изменчивость величины ξ характеризуют величиной

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m_A} \sum_{j=1}^{m_B} (\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2; \quad \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_0^2 .$$

По соотношениям между $\hat{\sigma}_A^2, \hat{\sigma}_B^2, \hat{\sigma}_0^2$ можно судить о степени влияния факторов на случайную величину ξ . Проверка гипотезы H_A основывается на сравнении величин $\hat{\sigma}_A^2$ и $\hat{\sigma}_0^2$. Если гипотеза H_A верна, то величина $F_A = \hat{\sigma}_A^2 / \hat{\sigma}_0^2$ имеет распределение Фишера со степенями свободы $k = m_A - 1$ и $l = (m_A - 1)(m_B - 1)$.

Зададимся уровнем значимости α и найдём *правостороннюю критическую точку* x_α – решение уравнения $F_{k, l}(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Если значение F_A , вычисленное по результатам измерений, удовлетворяет неравенству $F_A < x_\alpha$, то гипотеза H_A принимается. В противном случае гипотеза H_A отвергается, и можно заключить, что изменение фактора A влияет на изменение величины ξ . Мерой этого влияния является коэффициент детерминации $r_A^2 = \hat{\sigma}_A^2 / \hat{\sigma}_0^2$, который показывает, какая доля общей изменчивости величины ξ обусловлена изменением фактора A .

Аналогично проверяется гипотеза H_B , которая основывается на сравнении величин $\hat{\sigma}_B^2$ и $\hat{\sigma}_0^2$. Если гипотеза H_B верна, то величина $F_B = \hat{\sigma}_B^2 / \hat{\sigma}_0^2$ имеет распределение Фишера со степенями свободы $k = m_B - 1$ и $l = (m_A - 1)(m_B - 1)$. При уровне значимости α *правосторонняя критическая точка* x_α – решение уравнения $F_{k, l}(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Если значение F_B , вычисленное по результатам измерений, удовлетворяет неравенству $F_B < x_\alpha$, то гипотеза H_B принимается. В противном случае, гипотеза H_B отвергается, и можно заключить, что изменение фактора B влияет на изменение величины ξ . Мерой этого влияния является коэффициент детерминации $r_B^2 = \hat{\sigma}_B^2 / \hat{\sigma}_0^2$, который показывает, какая доля общей изменчивости величины ξ обусловлена изменением фактора B .

В рамках двухфакторного дисперсионного анализа можно получить более конкретное представление о случайной величине ξ . Её модель на i -ом уровне фактора A и на j -ом уровне фактора B имеет вид $\xi_{ij} = a + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m_A, j = 1, 2, \dots, m_B$, где a – генеральное среднее случайной величины ξ ; α_i – слагаемое, которое описывает эффект влияния фактора A на случайную величину ξ на i -ом уровне фактора A ; β_j – слагаемое, которое описывает эффект влияния фактора B на случайную величину ξ на j -ом уровне фактора B ; ε_{ij} – слагаемое, которое описывает эффект влияния случайных факторов.

Величины ε_{ij} – независимые случайные величины, имеющие одинаковое нормальное распределение $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma)$, $i = 1, 2, \dots, m_A, j = 1, 2, \dots, m_B$.

Если гипотезы H_A и H_B не отвергаются, то в рассмотренной модели параметры $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m_A} = 0$ и $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{m_B} = 0$.

Величина \bar{x} представляет собой оценку параметра a , а величина

$$\frac{s_0^2}{(m_A - 1)(m_B - 1)}$$
 несмещённую оценку параметра σ^2 .

Если гипотезы H_A и H_B отвергаются, то:

- оценка параметра a равна \bar{x} ;
- оценка параметра α_i равна $x_i - \bar{x}$;
- оценка параметра β_j равна $x_j - \bar{x}$;
- несмещённая оценка параметра σ^2 равна $\frac{s_0^2}{(m_A - 1)(m_B - 1)}$.

Пример 9.2. Провести двухфакторный дисперсионный анализ нижеиследующей таблицы:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10,9	11,1	9,9	11,51
A_2	13,3	15,2	14,8	14,9
A_3	17,3	18,0	19,6	19,3

Фрагмент рабочего документа Mathcad приведён ниже [15].

ORIGIN:= 1

mA:=3 mB:=4 α :=0.05 n:=mA·mB

$$x := \begin{pmatrix} 10.9 & 11.1 & 9.9 & 11.51 \\ 13.3 & 15.2 & 14.8 & 14.9 \\ 17.3 & 18.0 & 19.6 & 19.3 \end{pmatrix} \quad i := 1..mA \quad j := 1..mB$$

$$XS := \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{mA} \sum_{j=1}^{mB} x_{i,j} \quad XS := 14.651$$

$$XA_i := \frac{1}{mB} \cdot \sum_{j=1}^{mB} x_{i,j} \quad XA^T = (10.852 \quad 14.55 \quad 18.55)$$

$$XB_j := \frac{1}{mA} \cdot \sum_{i=1}^{mA} x_{i,j} \quad XB^T = (13.833 \quad 14.767 \quad 14.767 \quad 15.237)$$

$$\sigma_A := \frac{mB}{n} \cdot \sum_{i=1}^{mA} (XA_i - XS)^2 \quad \sigma_A = 9.88$$

$$\sigma_B := \frac{m_A}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m_B} (X_{B_j} - X_S)^2 \quad \sigma_B = 0.26$$

$$\sigma_0 := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m_B} \sum_{i=1}^{m_A} (x_{i,j} - X_{A_i} - X_{B_j} + X_S)^2 \quad \sigma_0 = 0.332$$

$$\sigma := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{m_B} \sum_{i=1}^{m_A} (x_{i,j} - X_S)^2 \quad \sigma = 10.472$$

$$F_A := \frac{\sigma_A}{\sigma_0} \quad F_A = 29.73 \quad qF[1 - \alpha, m_A - 1, (m_A - 1) \cdot (m_B - 1)] = 5.143$$

Гипотеза H_A о том, что величина x не зависит от фактора A отвергается

$$r_A := \frac{\sigma_A}{\sigma} \quad r_A = 0.943 \quad F_B = 0.781 \quad qF[1 - \alpha, m_B - 1, (m_A - 1) \cdot (m_B - 1)] = 4.757.$$

Гипотеза H_B о том, что величина x не зависит от фактора B принимается

$$r_B := \frac{\sigma_B}{\sigma} \quad r_B = 0.025 \quad a := X_S \quad a = 14.651 \quad \sigma_2 := \frac{\sigma_0 \cdot n}{(m_A - 1) \cdot (m_B - 1)} \quad \sigma_2 = 0.665.$$

Коэффициент детерминации для фактора A равен $r_A = 0,943$. Это означает, что более 94 % изменчивости исследуемой случайной величины обусловлено изменением этого фактора. На долю фактора B приходится только 2,5 % изменчивости, поскольку $r_B = 0,025$.

Независимость ξ от фактора B позволяет построить уточнённую модель исследуемой случайной величины в виде $\xi_{ij} = x_i + \varepsilon_{ij}$, $i = j = 1, 2, 3$, где ξ_{ij} – независимые случайные величины, распределённые нормально с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0,665$.

С учётом вышеизложенного матрица, описывающая влияние факторов на изучаемое явление, имеет следующий вид:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10,852	10,852	10,852	10,852
A_2	14,55	14,55	14,55	14,55
A_3	18,55	18,55	18,55	18,55

Остальная часть элементов исходной матрицы обусловлена случайными факторами. Так, например, на уровнях A_2 и B_3 случайная величина ξ_{23} имеет нормальное распределение $N(14,55, \sqrt{0,66}) = N(14,55, 0,81)$.

9.3. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

План эксперимента, содержащий все возможные комбинации всех факторов на определённом числе уровней равное число раз, называется *полным факторным планом*. Если число факторов известно, можно

сразу найти число опытов, необходимых для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов: $N = p^k$, где p – число уровней фактора; k – число факторов.

Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный план эксперимента типа 2^k . Геометрической интерпретацией полного факторного плана 2^k является квадрат, центр которого – основной уровень фактора, а стороны параллельны осям координат и равны удвоенному интервалу его изменения.

Матрица планирования эксперимента типа 2^k представлена в табл. 9.1. Столбцы в матрице называются вектор-столбцами, а строки – вектор-строками.

9.1. Матрица планирования двухфакторного эксперимента

Номер опыта	x_1	x_2	y
1	+1	-1	y_1
2	-1	-1	y_2
3	+1	+1	y_3
4	-1	+1	y_4

В случае двух факторов все возможные комбинации их уровней можно найти прямым перебором, но с ростом числа факторов возникает необходимость в знании некоторых приёмов построения матриц. Обычно используются *три основных приёма, основанных на переходе от матриц меньшей размерности к матрицам большей размерности* [8]:

– для нового фактора исходный план записывается с учётом нижнего и верхнего уровней этого фактора (при переходе от плана 2^2 к 2^3 построение матрицы показано в табл. 9.2);

9.2. Матрица планирования трёхфакторного эксперимента

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	–	–	+	y_1
2	+	–	+	y_2
3	–	+	+	y_3
4	+	+	+	y_4
5	–	–	–	y_5
6	+	–	–	y_6
7	–	+	–	y_7
8	+	+	–	y_8

– используется чередование знаков (в первом столбце матрицы знаки меняются поочередно, во втором они чередуются через 2, в третьем – через 4, в четвёртом – через 8 и т.д. (соответственно возрастанию степени числа 2), табл. 9.2 также является примером реализации этого приёма;

– используется правило перемножения столбцов матрицы (при построчном перемножении элементов двух столбцов матрицы произведение единиц с одноимёнными знаками даёт +1, а с разноимёнными –1; для рассматриваемого случая получим вектор-столбец произведений x_1x_2 в исходном плане, при повторении исходного плана у столбца произведений знаки поменяем на обратные). Этот приём можно перенести на построение матриц любой размерности, однако он сложнее, чем первые два.

Два свойства плана 2^k следуют непосредственно из построения его матрицы: 1) симметричность относительно центра эксперимента: алгебраическая сумма элементов каждого вектор-столбца матрицы

(уровней каждого фактора) равна нулю: $\sum_{i=1}^N x_{ij} = 0$, где x_{ij} – уровень j -го

фактора в i -ом опыте; N – число опытов; $j = 1, 2, \dots, k$; 2) условие нормировки: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу

опытов: $\sum_{i=1}^N x_{ij}^2 = N$. Это следствие того, что уровни факторов в матрице задаются +1 и –1.

Равенство нулю скалярных произведений всех вектор-столбцов называется *свойством ортогональности матрицы планирования*:

$$\sum_{i=1}^N x_{ij}x_{ji} = 0; \quad u \neq j; \quad u, j = 0; \quad j = 0, 1, \dots, k.$$

Это свойство способствует резкому уменьшению трудностей, связанных с расчётом коэффициентов уравнения регрессии. Свойство плана, при котором точность предсказания значений функции отклика зависит только от расстояния от центра плана, называется *ротатбельностью*.

Полный факторный план эксперимента позволяет количественно оценивать эффекты взаимодействия факторов. Для этого надо, пользуясь правилом перемножения столбцов матрицы плана, получить столбец произведений уровней двух факторов, с которым можно обращаться также, как с вектор-столбцом уровней любого фактора. При добавлении столбцов, отражающих эффекты взаимодействия факторов, все рассмотренные выше свойства плана сохраняются.

Матрица полного факторного плана 2^2 , учитывающего эффект взаимодействия факторов, представлена в табл. 9.3.

9.3. Матрица планирования полного факторного плана 2^2

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	–1	+1	–1	y_2
3	+1	–1	–1	+1	y_3
4	+1	+1	–1	–1	y_4

Теперь модель выглядит следующим образом:
 $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$, а коэффициент b_{12} вычисляется обычным путём: $b_{12} = \frac{(+1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (-1)y_4}{4}$.

Вектор-столбцы x_1 и x_2 определяют условия эксперимента, а x_0 и x_1x_2 служат только для расчёта коэффициентов b_0 и b_{12} .

Эффект взаимодействия двух факторов называется *эффектом первого порядка*, трёх факторов – *второго порядка* и т.д. Часто применяются термины: парные эффекты взаимодействия факторов (x_1x_2 , x_2x_3 , ...), тройные ($x_1x_2x_3$, $x_2x_3x_4$, ...) и т.д.

Максимальный порядок эффекта взаимодействия факторов при полном факторном плане на единицу меньше числа факторов, а сумма числа всех возможных эффектов, включая b_0 , линейные эффекты и взаимодействия всех порядков, равна числу опытов.

Чтобы найти число возможных взаимодействий некоторого порядка, можно воспользоваться обычной формулой числа сочетаний [8]:

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!},$$

где k – число факторов; m – число элементов взаимодействия. Тогда для плана 2^4 число парных взаимодействий $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$.

Пример 9.3. Требуется установить влияние заднего угла α , переднего угла γ , главного угла в плане ϕ , вспомогательного угла в плане ϕ_1 , радиуса при вершине r на стойкость T токарного резца.

Выбираются основные уровни факторов: $\alpha = 6^\circ - 10^\circ$; $\gamma = 2^\circ - 9^\circ$; $\phi = 39^\circ - 45^\circ$; $\phi_1 = 20^\circ - 25^\circ$; $r = 0,2 - 0,8$. Основной уровень i -го фактора и интервал варьирования на уровне рассчитываются по формулам: $x_{0i} = (x_{i\max} + x_{i\min})/2$; $\varepsilon_i = (x_{i\max} - x_{i\min})/2$ (табл. 9.4).

9.4. Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	Кодовое значение	Интервал варьирования	Уровни факторов		
			Верхний +1	Основной 0	Нижний -1
γ	X_1	$3,5^\circ$	-2°	$-5,5^\circ$	-9°
α	X_2	2°	10°	8°	6°
ϕ_1	X_3	$2,5^\circ$	25°	$22,5^\circ$	20°
ϕ	X_4	3°	45°	42°	39°
r	X_5	$0,3$	$0,8$	$0,5$	$0,2$

На 1-ом этапе исследования в качестве плана эксперимента принимаем $\frac{1}{4}$ реплику (2^{5-2}) от полного факторного эксперимента 2^5 . Реплика задана генерирующим соотношением $X_4 = X_1X_2$; $X_5 = X_1X_2X_3$. Матрица планирования и результатов опытов (табл. 9.5) проведения представлена в табл. 9.6.

9.5. Исходные данные

Значения стойкости резцов, полученные в результате эксперимента, T (мин)							
29,5	30,1	28,8	27,0	30,0	28,5	29,0	31,2
Значение параметра оптимизации y_u в u -ом опыте							
24,1		23,6		23,9		24,0	

9.6. Матрица планирования эксперимента

N	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$Y(T)$, мин
1	+	+	+	+	+	+	29,5
2	+	-	+	+	-	-	30,1
3	+	+	-	+	-	-	28,8
4	+	-	-	-	+	-	27,0
5	+	+	+	-	+	-	30,0
6	+	-	+	-	-	+	28,5
7	+	+	-	+	-	-	29,0
8	+	-	-	+	+	+	31,2

Для описания используем линейную модель вида:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5; \quad b_0 = x_5x_0; \quad b_1 = x_5x_1.$$

$$\text{Значение коэффициента } b_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij} y_i}{N}.$$

$$b_0 = \frac{29,5 + 30,1 + 28,8 + 27,0 + 30,0 + 28,5 + 29,0 + 31,2}{8} = 29,263;$$

$$b_1 = \frac{29,5 - 30,1 + 28,8 - 27,0 + 30,0 - 28,5 + 29,0 - 31,2}{8} = 0,063;$$

$$b_2 = \frac{29,5 + 30,1 - 28,8 - 27,0 + 30,0 + 28,5 - 29,0 - 31,2}{8} = 0,263;$$

$$b_3 = \frac{29,5 + 30,1 + 28,8 - 27,0 - 30,0 - 28,5 + 29,0 + 31,2}{8} = 7,888;$$

$$b_4 = \frac{29,5 - 30,1 - 28,8 + 27,0 + 30,0 - 28,5 - 29,0 + 31,2}{8} = 0,163;$$

$$b_5 = \frac{29,5 - 30,1 - 28,8 - 27,0 - 30,0 + 28,5 - 29,0 + 31,2}{8} = -6,963;$$

$$y = 29,263 + 0,063x_1 + 0,263x_2 + 7,888x_3 + 0,163x_4 - 6,963x_5.$$

Дисперсию S_y^2 параметра оптимизации вычисляем по результатам четырёх опытов в центре плана, т.е. при $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Расчёт дисперсии S_y^2 приведён в табл. 9.7.

9.7. Таблица расчёта дисперсии S_y^2

N	y_i	\bar{y}	$(y - \bar{y})$	$(y - \bar{y})^2$	S_y^2
1	24,1	23,9	0,2	0,04	$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_0 - 1} = 0,0467$
2	23,6		-0,3	0,09	
3	23,9		0	0,0	
4	24,0		0,1	0,01	
Σ	95,6			0,14	

n_0 – число опытов в центре плана; y_i – значение параметра оптимизации в i -ом опыте в центре плана.

$$S_{bi}^2 = S_y^2 / N = 0,0467/8 = 0,0058.$$

Доверительный интервал $\Delta b_i = \pm i S_{bi}$, $|b_i| \geq \Delta b$ – условие выполняется для всех b_i .

$$y = 29,263 + 0,063x_1 + 0,263x_2 + 7,888x_3 + 0,163x_4 - 6,963x_5. \quad (9.1)$$

Для проверки гипотезы адекватности модели, представленной уравнением (9.1), находим дисперсию адекватности

$$S_{ay}^2 = \left[\sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y})^2 \right] / f,$$

где \hat{y} – значение параметра оптимизации в i -ом опыте, вычисленное по уравнению регрессии; $f = N - (k - 1)$ – число степеней свободы; k – число факторов.

Расчёт дисперсии S_y^2 приведён в табл. 9.8.

9.8. Таблица расчёта дисперсии S_y^2

N	y_i	\hat{y}_i	$(y - \hat{y}_i)$	$(y - \hat{y}_i)^2$	S_y^2
1	29,5	30,7	-1,2	1,44	$S_{ay}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{f} = 844,61/2 = 422,305$
2	30,1	44,2	-14,1	198,81	
3	28,8	43,8	-15	225	
4	27,0	28,2	-1,2	1,44	
5	30,0	28,8	1,2	1,44	
6	28,5	14,5	14	196	
7	29,0	43,8	-14,8	219,04	
8	31,2	30,0	1,2	1,44	
Σ				844,61	

Проверка гипотезы адекватности проводится по F -критерию Фишера. Для этого найдём $F_p = S_{ay}^2 / S_y^2 = 422,305 / 0,0467 = 9042,9$.

Если $F_p < F_T$ – модель адекватна. В нашем случае $9042,9 > 9,55$, условие не выполняется и модель неадекватна.

Варианты индивидуальных заданий по планированию полного факторного эксперимента приведены в прил. Ж.

9.4. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

С увеличением числа факторов резко возрастает количество опытов полного факторного плана, а также число степеней свободы $f = N - q$ (N – число опытов; q – число неизвестных коэффициентов регрессии). Для сокращения числа экспериментов используется *метод дробных реплик* [8].

Метод заключается в том, что для нахождения математического описания процесса используется определённая часть полного факторного плана (1/2, 1/4 и т.д.), называемая *дробным факторным планом (дробной репликой полного факторного плана)*. Расчёт коэффициентов регрессии, проверка их значимости и адекватности математической модели в данном случае производится так же, как и при полном факторном плане.

Избыточная степень свободы используется для минимизации числа опытов. Для этого вектор-столбцу взаимодействия, которым можно пренебречь, присваивается имя нового фактора $x_1x_2 = x_3$. Тогда план полного двухфакторного эксперимента используется для проведения дробного трёхфакторного эксперимента. При этом в два раза сокращается число опытов по сравнению с полным трёхфакторным экспериментом. Можно также провести замену $x_1x_2 = x_3$. При объединении подобных планов имеем полный трёхфакторный эксперимент. Каждый из этих двух планов называется *дробной репликой* от полного факторного эксперимента.

Например, приняв для фактора x_4 вектор-столбец $x_1x_2x_3$ получим план 2^3 (табл. 9.9). Этот план содержит половину опытов полного факторного плана, т.е. является полурепликой плана 2^4 .

9.9. Матрица планирования полного факторного плана 2^3

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	$x_4 = x_1x_2x_3$
1	+1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1	-1
3	-1	+1	+1	-1
4	-1	-1	+1	+1
5	+1	+1	-1	-1
6	+1	-1	-1	+1
7	-1	+1	-1	+1
8	-1	-1	-1	-1

Дробные реплики записываются следующим образом: $N = 2^{k-\ell}$, k – общее число факторов, ℓ – число взаимодействий.

9.5. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА С ЦЕЛЬЮ ОПИСАНИЯ ИССЛЕДУЕМОГО ОБЪЕКТА

Перед проведением опытов, исходя из априорной информации о процессе, возможностей аппаратуры и целей эксперимента, устанавливаются граничные уровни каждого фактора (z_{1j} и z_{2j}), координаты центра плана (или основного уровня факторов) и интервал варьирования уровней факторов. Основной уровень j -го фактора и интервал варьирования его уровня рассчитывают по формулам [8]: $z_{0j} = \frac{z_{2j} + z_{1j}}{2}$; $J_j = \Delta_j = \frac{z_{2j} - z_{1j}}{2}$.

Кодирование переменных производят по формуле $x_{ij} = \frac{2z_{ij} - z_{1j} - z_{2j}}{z_{1j} - z_{2j}}$.

Все сведения, необходимые для постановки эксперимента по статистическому плану, заносят в таблицу (табл. 9.10).

9.10. Сведения к постановке эксперимента

Характеристики факторов	z_1	z_2	z_3	...	z_k
Основной уровень	z_{01}	z_{02}	z_{03}	...	z_{0k}
Интервал варьирования	Δ_1	Δ_2	Δ_3	...	Δ_k
Верхний уровень (+1)	z_{21}	z_{22}	z_{23}	...	z_{2k}
Нижний уровень (-1)	z_{11}	z_{12}	z_{13}	...	z_{1k}

Затем составляют план эксперимента, в который вносят также результаты n ($n = 2...5$) параллельных опытов (табл. 9.11).

9.11. Результаты эксперимента

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	...	x_k	Параллельные опыты			
						y_1	y_2	...	y_n
1	+1	+1	+1	...	+1	y_{11}	y_{12}	...	y_{1n}
2	+1	-1	+1	...	+1	y_{21}	y_{22}	...	y_{2n}
...
m	-1	-1	-1	...	-1	y_{m1}	y_{m2}	...	y_{mn}

Обычно оказывается достаточным проведение двух параллельных опытов, так как для проверки адекватности уравнения регрессии используют среднюю дисперсию воспроизводимости.

При проведении исследований возможны три варианта дублирования опытов: 1) равномерное дублирование опытов, когда во всех строках матрицы плана число параллельных опытов одинаково; 2) неравномерное дублирование, при котором число параллельных опытов в разных строках матрицы плана не одинаково; 3) дублирование опытов отсутствует.

Математическая обработка результатов наблюдений зависит от характера дублирования опытов. С учётом вида дублирования опытов она производится по следующей схеме [8]: 1) для каждой строки матри-

цы плана вычисляют среднее арифметическое значение параметра оптимизации и его дисперсию; 2) проверяют однородность дисперсий результатов опытов (при равномерном дублировании опытов для этого используют критерий Кохрена, при неравномерном дублировании – критерий Бартлета, при отсутствии дублирования опытов первые два этапа отсутствуют); 3) если дисперсии результатов опытов однородны, вычисляют дисперсию воспроизводимости эксперимента; 4) вычисляют коэффициенты уравнения регрессии, их дисперсии и оценивают их значимость; 5) проверяют гипотезу об адекватности модели.

Если линейная модель адекватна, переходят к поиску уровней факторов, обеспечивающих экстремальное значение (минимум или максимум в зависимости от постановки задачи) функции отклика, т.е. переходят к решению задачи оптимизации.

10. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

После выявления факторов и выбора выходных величин формируется *факторное пространство исследуемой системы*: устанавливаются область определения и некоторые наиболее вероятные (средние) значения уровня варьирования факторов и подлежащих изменению параметров объекта, выходных величин и критериев эффективности.

Область определения факторов ограничивается возможными крайними их значениями ($x_{\min} - x_{\max}$), а *уровни варьирования* получают путём разбиения интервала на некоторое число равных подынтервалов (обычно от 2 до 6...12) в зависимости от размера интервала и целей исследования. *Ограничения уровней факторов* обусловлены их физической природой, технико-экономическими соображениями, применяемыми оборудованием и приборами, а также имеющейся информацией по ранее выполненным исследованиям.

Основной уровень (нулевая точка) представляет собой центр изучаемой области изменения данного фактора. Если задачей эксперимента является оптимизация некоторого параметра, то нулевую точку располагают как можно ближе к положению, обеспечивающему оптимум параметра. Если задача эксперимента – получение модели данного процесса, то за нулевую точку принимается середина интервала изменения данного фактора.

Уровни фактора, как правило, выбирают симметричными относительно нулевой точки. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки данных масштабы по осям выбирают так, чтобы верхний уровень фактора соответствовал +1, нижний –1, а основной – нулю.

Точность фиксирования уровней фактора определяется стабильностью их в ходе опыта и точностью приборов: высокая, если измерение проводится с погрешностью не более 1 %, средняя – не более 5 % и низкая – более 10 %.

На выбор интервалов варьирования уровня фактора накладываются ограничения «сверху» и «снизу». Интервал варьирования не может быть меньше той ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора, иначе его верхний и нижний уровни окажутся неразличимыми. С другой стороны, интервал не может включать такие уровни фактора, при которых его верхний и нижний уровни оказываются за пределами области определения. Если интервал составляет не более 10 % от области определения фактора, его считают узким, не более 30 % – средним и в остальных случаях – широким.

При решении задачи оптимизации для первой серии опытов стремятся выбрать такую подобласть изменения уровня фактора, которая давала бы возможность наискорейшего движения к оптимуму. В задачах интерполяции (описания процесса) интервал варьирования уровней факторов охватывает всю область экспериментирования.

Факторное пространство может иметь при этом любую конфигурацию [1]. В случае однофакторного эксперимента факторное пространство является отрезком прямой на числовой оси фактора x_i . Для двухфакторного эксперимента оно имеет вид прямоугольника, а для трёхфакторного – прямоугольного параллелепипеда и т.д. В общем случае факторное пространство представляет собой K -мерный параллелепипед.

После переноса координат системы факторов x_i в центр эксперимента, факторы переводятся из натуральных переменных, имеющих обычную физическую размерность, в безразмерные, т.е. в кодированные

$$x'_i = \frac{x_i - x_{0i}}{\Delta x_i}, \text{ где } \Delta x_i = 0,5(x_{\max} - x_{\min}) - \text{полудиапазон изменений } i\text{-го}$$

фактора.

Кодирование приводит к тому, что все факторы могут измениться в диапазоне $-1 \leq x_i \leq +1$, что превращает K -мерный параллелепипед в K -мерный куб (гиперкуб), а эллипсоид рассеяния выходных показателей – в сферу.

При планировании экспериментов для построения моделей в ограниченной области определения факторов и параметров объекта факторы чаще всего варьируют на двух (+1 и -1) или на трёх (+1; 0; +1) уровнях через равные интервалы. При необходимости может применяться многоуровневое варьирование переменных.

10.1. ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Производственная функция нескольких переменных описывает зависимость объёма выпускаемой продукции от затрачиваемых или используемых ресурсов, т.е. в записи $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ выпуск y единиц продукции определяется объёмами x_1, x_2, \dots, x_n затрачиваемых ресурсов [15].

Если производственная функция описывает технологию действующего предприятия, то в качестве ресурсов могут быть затраты рабочего времени, сырья, комплектующих изделий, энергии, основного капитала.

Рассмотрим производственную функцию двух переменных $Q = f(K, L)$, описывающую зависимость выпуска продукции Q от вложенного капитала K и затраченного труда L .

Линия уровня производственной функции, т.е. линия, в каждой точке которой объём выпуска при разных значениях K и L один и тот же, называется *изоквантой* или *кривой безразличия* производства. Уравнение изокванты имеет вид $f(K, L) = \text{const}$.

Уравнение касательной к изокванте $f(K, L) = Q_0$ в точке (K_0, L_0) , $f(K_0, L_0) = Q_0$: $(K - K_0) \frac{\partial}{\partial K} f(K_0, L_0) + (L - L_0) \frac{\partial}{\partial L} f(K_0, L_0) = 0$.

Изокванты не пересекаются; большему объёму производства отвечают изокванты, более удалённые от начала координат; касательные к изоквантам имеют отрицательный угловой коэффициент.

При исследовании свойств производственной функции используют *предельные величины*.

Предельным продуктом капитала называется предел отношения приращения количества произведённой продукции к вызвавшему это приращение приросту вложенного капитала

$$Q'_K = \lim_{\Delta K \rightarrow 0} \frac{f(K + \Delta K, L) - f(K, L)}{\Delta K} = \frac{\partial}{\partial K} f(K, L).$$

Аналогично *предельным продуктом труда* называется предел отношения приращения количества произведённой продукции к вызвавшему это приращение приросту вложенного труда:

$$Q'_L = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{f(K, L + \Delta L) - f(K, L)}{\Delta L} = \frac{\partial}{\partial L} f(K, L).$$

При одновременном изменении вложенного труда и капитала приращение выпуска можно приближенно вычислять по формуле

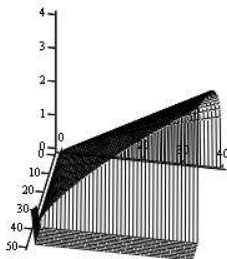
$$\Delta Q \approx Q'_K \Delta K + Q'_L \Delta L.$$

Величина $R = \Delta K / \Delta L$ вычисленная в точках изокванты, называется *коэффициентом заменяемости ресурсов*. Он показывает, насколько единиц нужно увеличить вложение капитала при уменьшении на единицу вложенного труда с тем, чтобы выпуск не изменился. Геометрический смысл коэффициента заменяемости ресурсов – угловой коэффициент касательной к изокванте.

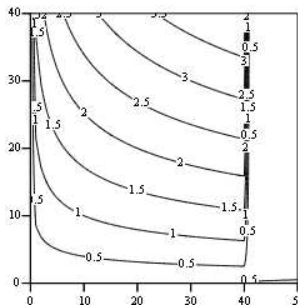
Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad с графиком производственной функции $Q = K^{1/4} L^{3/4}$ и её изоквантами.

$$Q(K, L) := K^{\frac{1}{4}} \times L^{\frac{3}{4}}$$

$$i := 0..40 \quad j := 0..40 \quad k_1 := i \times 0.1 \quad l_1 := j \times 0.1 \quad y_{i,j} := Q(k_1, l_1)$$



у



у

10.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Задачи оптимизации можно решать двумя способами графическим и аналитическим.

При графическом способе решения строят двухмерные сечения одной поверхности отклика, которые совмещают с двухмерными сечениями другой поверхности отклика [20]. Анализируя совмещённые двухмерные сечения, находят условные экстремумы. Для получения двухмерных сечений в уравнения регрессии подставляют значения (предположительно близкие к оптимальным) всех факторов, кроме любых двух. При заданном значении функции отклика получают зависимость между двумя факторами, которую на плоскости можно представить в виде кривой. Задавая различные значения параметра оптимизации, можно построить семейство кривых равного отклика. Этим способом можно получить наглядное представление о влиянии каждой пары факторов на параметр оптимизации.

Графический метод достаточно прост и отличается большой наглядностью, однако он удобен только при малом числе факторов. При числе факторов $k > 3$ графический метод оказывается очень громоздким.

Широко применяется симплексный метод оптимизации [20].

Для поиска оптимума очень часто используют шаговый метод, который предусматривает выполнение двух этапов: а) изучение некоторой области поверхности отклика с целью определения направления движения к оптимуму; б) движение к оптимуму по установленному направлению.

Например, методом крутого восхождения необходимо найти максимум величины y , которая зависит от двух факторов x_1 и x_2 . Функция отклика $y = f(x_1, x_2)$ представляет собой уравнение поверхности, которую можно представить линиями равного отклика на факторной плоскости x_1x_2 (рис. 10.1).

Вблизи максимального значения величины y такая поверхность имеет вид холма, вершина которого представляет собой точку, соответствующую оптимальным условиям протекания процесса. Для поиска оптимума проводят полный факторный эксперимент 2^2 (опыты 1, 2, 3, 4), определяют коэффициенты линейного уравнения регрессии и находят направление градиента. Затем производят крутое восхождение (опыты 5, 6, 7, 8). Приняв точку с наибольшим значением y (опыт 7) за центр плана, вновь проводят полный факторный эксперимент 2^2 (опыты 9, 10, 11, 12) и определяют новое направление градиента. После этого, двигаясь по градиенту (опыты 13, 14, 15, 16) находят максимум (опыт 15).

Симплексом называют простейшую выпуклую геометрическую, образованную множеством $k + 1$ независимых точек в пространстве. Точки, образующие симплекс, называют его *вершинами*.

Особенностью симплекс-планирования является совмещение процесса изучения поверхности отклика и процесса движения по поверхности отклика. Это достигается тем, что условия проведения каждого очередного опыта устанавливаются на основе оценки предшествующих опытов, поставленных в вершинах симплекса. Все опыты ставят в вершинах симплексов и движение в факторном пространстве производится после каждого опыта.

Например, необходимо найти максимум величины y , зависящей от переменных x_1 и x_2 . В исходном симплексе 1, 2, 3 (рис. 10.2) получены значения $y_3 > y_2 > y_1$. Вершина 1 с наименьшим значением функции отклика отброшена и заменена вершиной 4. В вершинах 2, 3, 4 получены значения $y_4 > y_3 > y_2$. Вершину 2 отбросили и построили новый симплекс 3, 4, 5 и т.д. Общее число опытов, необходимых для достижения области оптимума определяется тем, что вначале необходимо поставить $k + 1$ опыт, а затем каждый шаг движения сопровождается проведением только одного дополнительного опыта.

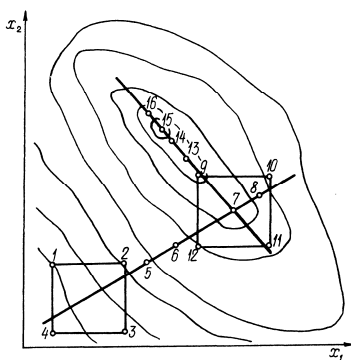


Рис. 10.1. Схема движения к оптимуму при крутом восхождении

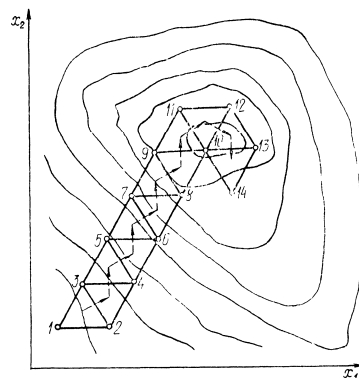


Рис. 10.2. Схема движения к области оптимума при симплексном методе

10.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

В общем случае задача линейного программирования формулируется следующим образом. Найти величины x_1, x_2, \dots, x_n , доставляющие минимум линейной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ и удовлетворяющие условиям, которые могут быть только равенствами и неравенствами вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i;$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k;$$

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n \geq b_p, i \neq k \neq p.$$

Среди ограничений часто встречаются условия неотрицательности всех или части переменных: $x_j \geq 0$.

Хотя условия неотрицательности являются частным случаем ограничений общего вида, их принято выделять в особую группу.

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *целевой функцией*.

Пример 10.1. Найти минимум целевой функции $f(x, y) = 2x + 3y$ при ограничениях [15]:

$$\begin{cases} x + y \leq 5, x + 2y \geq 4, 2x + y \geq 5; \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Для того чтобы ввести и разрешить относительно y ограничение $x + y \leq 5$, введём левую часть неравенства, знак символического равенства (<Ctrl>+<=>) и правую часть неравенства; пометим выделяющей рамкой переменную y , щёлкнем в меню «Символьная математика» по строке «Расширить» – результат вычислений будет выведен в рабочем документе справа от уравнения; введём имя функции (в рассматриваемом примере – $y1(x)$) и присвоим ей полученное выражение. Таким образом, определено уравнение одной из прямых, ограничивающих область допустимых значений. Аналогично введём остальные ограничения. Введём уравнение $ax + by = C$ линии уровня целевой функции. Действуем так же, как и при вводе ограничений, но, перед тем как решать уравнение относительно y , присвоим какое-нибудь значение константе C . Построим графики – прямые, ограничивающие область допустимых значений, и линии уровня целевой функции. Изменяя значение константы C , например $C = 2, 3, 4, \dots, 10$, наблюдаем за движением прямой, определяющей линии уровня целевой функции, и сформулируем вывод о разрешимости задачи. В приведённом фрагменте минимум целевой функции достигается в точке пересечения прямых $x + y = 5, x + 2y = 4$. Найдём координаты точки, используя функцию «Сделать вывод».

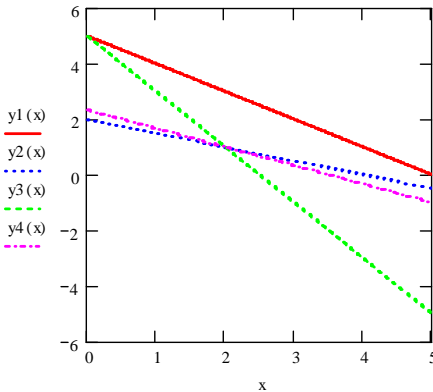
Фрагмент рабочего документа Mathcad с решением задачи приведён ниже.

$$x + y = 5 \quad y1(x) := -x + 5$$

$$x + 2y = 4 \quad y2(x) := \frac{-1}{2} \cdot x + 2$$

$$2x + y = 5 \quad y3(x) := -2 \cdot x + 5$$

$$2x + 3y = c \cdot \frac{-2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot c \quad c := 7 \quad y4(x) := \frac{-2}{3} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot c$$



Задача имеет единственное решение. Минимум целевой функции достигается в точке пересечения прямых $x + 2y = 4$, $2x + y = 5$.

Given

$$x + 2y = 4$$

$$2x + y = 5 \quad \text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) := 2 \cdot x + 3 \cdot y \quad \text{fmin} := f(2, 1) \quad \text{fmin} = 7$$

Минимальное значение функции целевой функции равно 7, оно достигается в точке $x = 2$, $y = 1$.

11. ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА И ЕЁ ОСОБЕННОСТИ

11.1. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА НОВЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Цель методов – сделать процесс генерирования идей интенсивнее и повысить концентрацию «оригинальных» идей в общем их потоке.

Существуют два вида методов: рациональные и иррациональные [21].

Методы, основанные на использовании оптимальной логики анализа технического объекта, закономерностей его развития, называются *рациональными*. К ним относятся: морфологический анализ, функционально-физический метод конструирования и алгоритм решения изобретательских задач (АРИЗ).

Морфологический анализ – это метод нахождения всех вариантов решения проблемы [22, 23]. Он чаще применяется, когда требуется исследовать область возможных решений.

Например, необходимо проанализировать возможные конструкции автомобиля. *Алгоритм поиска возможных решений следующий:*

1) *определяем параметры, от которых зависит решение проблемы.* В нашем случае это будут основные функциональные узлы автомобиля: А – двигатель, Б – движитель, В – кузов (кабина), ..., К – система амортизации;

2) *после составления списка функциональных узлов выписываем возможные варианты их исполнения:* двигатели: А1 – электрический, А2 – химический, А3 – реактивный, А4 – ядерный; движители: Б1 – колёсный, Б2 – моноколесо (кабина внутри колеса), Б3 – гусеничный, Б4 – шагающий; кабины: В1 – герметичная, В2 – негерметичная; система амортизации: К1 – специальные амортизаторы, К2 – без амортизации;

3) *на основе списков строится морфологический ящик в виде таблицы или морфологической матрицы.*

Матрица:

А1 А2 А3 А4

Б1 Б2 Б3 Б4

В1 В2

К1 К2

Исходя из этой матрицы автомобиль может быть выполнен по варианту: А1–Б3–В1–К1. Общее же число вариантов автомобиля будет равно произведению чисел элементов в каждой строке матрицы;

4) *производится оценка и выбор наилучшего варианта.*

За критерий качества принимают такой наиболее важный количественный показатель или параметр, с помощью которого из двух или нескольких допустимых вариантов технического решения выбирают наилучший. Допустимыми называют такие варианты решений, которые удовлетворяют основным требованиям.

Выбрать из морфологической таблицы наиболее приемлемые или эффективные комбинации технических решений нелегко из-за большого числа комбинаций. Поэтому сначала оценивают число возможных вариантов технических решений, которые можно получить (синтезировать) на основе морфологической таблицы: $N = n_1 n_2, \dots, n_m$, где n – число альтернативных вариантов в столбце; m – число столбцов.

Наиболее эффективные технические решения из множества всех возможных вариантов можно выбрать путём последовательного

крашения этого множества за счёт исключения наименее эффективных и наименее перспективных технических решений.

Другой путь уменьшения числа N заключается в *сокращении числа столбцов в морфологической таблице*. При этом среди всех столбцов (функциональных элементов) выделяют главные или основные, которые решающим образом влияют на эффективность и качество изделия, а также второстепенные и малозначащие функциональные узлы, которые можно исключать.

Сокращение множества возможных вариантов технических решений можно проводить путём *исключения наихудших комбинаций элементов*. При выполнении этой процедуры образуют различные альтернативные комбинации из нескольких элементов и исключают из них наихудшие. К наихудшим относятся нереализуемые или несовместимые комбинации, трудно реализуемые и наиболее дорогие по затратам комбинации, а также комбинации, в наименьшей мере устраняющие недостатки прототипа или улучшающие критерий качества и т.п.

Опишем эту процедуру, используя абстрактный пример (абстрактную морфологическую табл. 11.1).

11.1. Абстрактная морфологическая таблица

Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5
A_1^1	A_2^1	A_3^1	A_4^1	A_5^1
A_1^2	A_2^2	A_3^2		A_5^2
A_1^3	A_2^3	A_3^3		
A_1^4		A_3^4		
		A_3^5		

В исходной морфологической таблице выбираем два столбца, имеющие наименьшее число альтернативных вариантов, и образуем из их элементов все возможные парные комбинации (табл. 11.2). Пусть в нашем абстрактном примере обе комбинации – допустимые и равноценные, потому ни одну из них не относим к наихудшим и не исключаем.

11.2. Комбинация из двух элементов

		A_5^2
A_4^1	$A_4^1 A_5^1$	$A_4^1 A_5^2$

Выбираем из исходной таблицы следующий столбец с наименьшим числом альтернатив – столбец Φ_2 . С помощью вариантов этого столбца и допустимых комбинаций образуем все возможные комбинации из трёх элементов. Сравнительный анализ этих комбинаций позволил три из них отнести к наихудшим и исключить.

11.3. Сокращение комбинаций из трёх элементов

	A_2^1	A_2^2	A_2^3
A_4^1	$A_2^1 A_4^1 A_5^1$	$A_2^2 A_4^1 A_5^1$	$A_2^3 A_4^3 A_5^1$
$A_4^1 A_5^2$	$A_2^1 A_4^1 A_5^2$	$A_2^2 A_4^1 A_5^2$	$A_2^3 A_4^1 A_5^2$

Выбираем следующий столбец с наименьшим числом альтернатив – столбец Φ_1 , и с помощью оставшихся допустимых комбинаций из табл. 11.3 образуем все возможные комбинации из четырёх элементов (табл. 11.4). Поскольку комбинации легко образуются мысленно, то их не обязательно выписывать в клетках таблицы. В табл. 11.4 на основе сравнительного анализа отмечены клетки с наилучшими комбинациями.

По аналогии образуем таблицы вариантов до последнего столбца, имеющего наибольшее число альтернатив. В последней таблице (после исключения наилучших) остаётся множество допустимых вариантов технических решений. Если допустимых вариантов окажется довольно много, то проводят сокращение по дополнительным наиболее важным показателям (надёжность, расход энергии или дефицитных материалов, трудоёмкость и т.д.).

11.4. Сокращение комбинаций из четырёх элементов

	A_1^1	A_1^2	A_1^3	A_1^4
$A_2^1 A_4^1 A_5^2$		+		
$A_2^2 A_4^1 A_5^2$			+	+
$A_2^3 A_4^1 A_5^1$	+	+		

Множество допустимых вариантов технических решений, полученное после сокращения возможных технических решений путём исключения наилучших комбинаций элементов, упорядочивают по критерию качества от лучших к худшим. При равных или близких значениях критерия качества в упорядочиваемых вариантах учитывают степень устранения недостатков в прототипе. После упорядочивания выбирают 3 – 5 наиболее эффективных вариантов технических решений для дальнейшей проработки.

Преимущество морфологического анализа заключается в возможности выявления большого числа вариантов решения проблемы и их систематизации. *Недостаток* состоит в трудоёмкости анализа полученных вариантов.

Методические рекомендации к индивидуальному заданию по теме 11.1. В качестве индивидуального задания для студентов по этой теме рекомендуется рассмотреть устройство средств транспорта, радиоэлектроники, бытовой и компьютерной техники (согласно выполненному заданию по теме 2.1).

Функционально-физический метод конструирования базируется на трёх принципах [24, 25]: 1) анализ функций технических систем и её элементов; 2) наличие систематизированного фонда физических эффектов; 3) алгоритмоподобное описание процесса поиска конструируемых устройств.

Иррациональные методы опираются в основном на активизацию творческих способностей человека, его интуицию, фантазию, способность к аналогиям. К числу таких методов относятся: мозговой штурм, метод фокальных объектов – метод контрольных вопросов и синектика.

Преимущество иррациональных методов состоит в их простоте, доступности и универсальности. *Недостатком* является непригодность их для решения трудных задач.

Правила мозгового штурма следующие [26]. Участники штурма делятся на две группы: «генераторов» (предлагают идеи, строго придерживаясь правила запрета критики) и «экспертов» (обсуждают и анализируют выдвинутые «генераторами» идеи). Хорошие результаты удаётся получить «штурмая» не изобретения, а организационные проблемы и несложные технические задачи.

Метод фокальных объектов состоит в том, что признаки нескольких случайно выбранных объектов переносят на совершенствуемый объект.

Метод контрольных вопросов [2, 21, 27, 28] заключается в ответе на списки вопросов, сгруппированных по определённым назначению. Потребность в ответах на списки различных вопросов возникает, как правило, тогда, когда все традиционные методы уже испробованы и не дали результатов. Поэтому применение списков иногда относят к методам ликвидации тупиковых ситуаций.

Синектика подразумевает использование различного рода аналогий при поиске нового технического решения [22, 29].

Основные принципы использования аналогии:

1. Выяснить основные принципы и конструктивные особенности исследуемого объекта.

2. Выявить ведущую область техники по функции, которую выполняет этот объект.

3. Воспроизвести основной принцип и конструктивные особенности, используя опыт ведущих областей, на имеющихся элементах, материалах и технологиях. При этом что-то нужно будет придумать новое, учитывая недостатки прототипа. Таким образом, появится новое конкурентоспособное изделие.

Применяются четыре вида аналогий:

1) *прямая аналогия*, когда рассматривается как аналогичная задача решается в других областях техники, либо в природе;

2) *личностная аналогия или эмпатия*, когда человек отождествляет себя с техническим объектом и представляет себе, чтобы он сделал сам, если бы оказался на месте этого объекта;

3) *фантастическая аналогия*;

4) *символическая аналогия*, когда техническим объектам даются символические характеристики. Например, храповой механизм – надёжная прерывистость, атом – энергичная незначительность.

Часто для поиска новых решений используется *инверсия или обратная аналогия*, что означает – выполнить что-нибудь наоборот (перевернуть вверх «ногами», вывернуть наизнанку, поменять местами и т.д.).

Рассмотрим различные *виды инверсии*.

1. *Функциональная инверсия* (сделать функцию или действие обратным: Нагревание – охлаждение, притягивание – отталкивание, строить – ломать и т.д.).

Пример 11.1. В печи-гриле вращается приготавливаемая пища, например, курица. Разработан гриль, где приготавливаемая пища неподвижна, а вокруг неё вращаются горячие потоки воздуха.

2. *Структурная инверсия* (в понятие структуры входит состав системы и её внутреннее устройство: много–мало элементов, однородные–разнородные элементы, сплошная–дискретная структура, монолитная–дисперсная–пустая, статичная–динамичная структура, линейная–нелинейная, иерархическая–одноуровневая и т.п.).

Пример 11.2. Электронная радиоаппаратура ранее имела платы со многими элементами (транзисторы, резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, соединительные провода и т.п.), которые в дальнейшем были заменены микросхемами, а затем и на процессоры. Процессор заменил многие элементы.

3. *Инверсия формы* (выпуклая–вогнутая, толстая–тонкая, плоская–объёмная, шероховатая–гладкая, наружная–внутренняя поверхность, сплошная–разрывная и т.п.).

Пример 11.3. Известно, что для лучшего обтекания водой или воздухом телу придают соответствующую форму, а поверхность выполняется максимально гладкой.

4. *Параметрическая инверсия* (противоположные параметры: проводник–диэлектрик, длинный–короткий, тёмный–светлый, твёрдый–мягкий).

Пример 11.4. Предложили трудно деформируемые и легко окисляющиеся металлы и сплавы ковать в вакууме, и при этом обрабатывающий инструмент и заготовку не нагревать, а охлаждать от 0 °С до порога хладноломкости.

5. *Инверсные связи* (есть связь–нет связи, положительная–отрицательная связь).

Пример 11.5. Телефонная связь: когда идёт разговор, то обеспечивается связь, в остальное время этой связи постоянно нет.

6. *Инверсия пространства* (изменение положения в пространстве на 90° и 180°).

7. *Инверсия времени* (быстро–медленно, непрерывно во времени–квантовано, прошлое–настоящее–будущее).

Пример 11.6. При резке труб нож сминает края. Предложено резку труб осуществлять на большой скорости.

Синектический поиск решения проводится в четыре этапа:

1) *формулировка и уточнение проблемы «как она дана» (ПКД).*

Особенность этого этапа заключается в том, что никто, кроме ведущего заседания не посвящён в конкретные условия задачи;

2) *формулировка проблемы «как её понимают» (ПКП).*

Рассматривается возможность превратить незнакомую и непривычную проблему в ряд обычных задач;

3) *генерирование идей;*

4) *перенос выявленных идей к ПКД или ПКП*, при этом важным элементом является критическая оценка идей экспертами.

11.2. ВЕПОЛНЫЙ АНАЛИЗ

Прежде чем решать какую-либо техническую задачу необходимо выявить техническое противоречие (ТП) и сформулировать идеальный конечный результат (ИКР) [30, 31].

Противоречивые свойства системы разделяются:

1) *в пространстве:* место M_1 обладает свойством А. Место M_2 – свойством не-А.

Например, чтобы банк приносил больше прибыли, деньги должны работать как можно больше часов в сутки, желательно – непрерывно. Этому требованию противоречит законодательно установленное ограничение на часы банковской работы. Выход: отделения банка в разных часовых поясах;

2) *во времени:* во времени τ_1 – свойство А, во времени τ_2 – не-А;

3) *в структуре:* одна часть элемента обладает свойством А; другая – не-А;

4) *в отношениях:* по отношению к эталону \mathcal{E}_1 предмет обладает свойством А. К эталону \mathcal{E}_2 – свойством не-А.

Вспомним басню Михалкова о продаже не дойной коровы: «А сколько корова даёт молока? Не выдоишь за день – устанет рука»;

5) *в воздействиях:* при воздействии B_1 – предмет обладает свойством А; при воздействии B_2 – не-А.

Решая любую задачу, развивая любую систему, необходимо одновременно «просматривать» подсистемы и надсистемы. Изобретён новый тип колёс (изменения в подсистеме), как это отразится на системе «автомобиль»? А на надсистеме «дороги»?

В АРИЗ используются 4 механизма устранения технических противоречий [30]:

1) переход от данной в модели задачи технической системы к идеальной системе путём формулирования идеального конечного результата;

- 2) переход от ТП к физическому противоречию (ФП);
- 3) использование вепольных преобразований;
- 4) применение системы операторов для преодоления ТП и ФП (списки типовых приёмов, таблицы использования типовых приёмов, таблицы и указатель к применению физических эффектов).

Рассмотрим далее основные принципы вепольного анализа.

Пусть V_1 – вещество, которое надо менять, обрабатывать, перемещать, обнаруживать, контролировать; V_2 – вещество–«инструмент», осуществляющий необходимое действие; П – поле, которое обеспечивает воздействие V_2 на V_1 (или их взаимодействие). Наличие трёх этих составляющих необходимо и достаточно для получения требуемого в задаче результата. Такая система называется *веполем*.

Для построения и преобразования веполей необходимо пользоваться следующими правилами:

– *правило достройки веполя*. Невепольные системы (один элемент–вещество или поле) и непольные вепольные системы (два элемента – поле и вещество, два вещества) необходимо для повышения эффективности и управляемости достраивать до полного веполя (два вещества и поле). Данное правило включает также указания на преодоления противоречия: поле должно действовать на вещество V_1 и поле не должно (не умеет) действовать на это вещество. Вводя вещество V_2 и действуя через него на V_1 , мы тем самым преодолеваем противоречие;

– *правило разрушения веполя*. Самым эффективным решением оказывается введение третьего вещества, являющегося видоизменением одного из двух имеющихся. Нужно, чтобы третье вещество было и чтобы его не было; тогда оно не сломается, не удорожит систему, не нарушит её работу. Правило, указывая на необходимость использования видоизменённых веществ, подсказывает, как преодолеть противоречие «третье вещество есть и третьего вещества нет»;

– *правило построения вепольных цепей*. Часто приходится решать задачи, в которых противоречие возникает из-за того, что нужно сохранить имеющийся веполь и в то же время ввести новое взаимодействие.

Суть решения состоит в том, что V_2 (инструмент) разворачивается в веполь, присоединённый к имеющемуся веполю. Иногда V_3 в свою очередь разворачивается в веполь, продолжающий цепь.

Анализ больших массивов патентной информации позволил составить 40 наиболее сильных приёмов, дающих эффективные решения. Приведём лишь некоторые из них [30, 31]:

1. *Принцип дробления*: а) разделить объект на независимые части; б) выполнить объект разборным; в) увеличить степень дробления объекта.

2. *Принцип «матрешки»*: а) один объект размещён внутри другого, который, в свою очередь, находится внутри третьего и т.д.; б) один объект проходит сквозь полости в другом объекте.

3. *Принцип антивеса*: а) компенсировать вес объекта соединением с другим, обладающим подъемной силой; б) компенсировать вес объекта взаимодействием со средой (за счёт аэро- и гидродинамических сил).

4. *Принцип проскока*: вести процесс или отдельные его этапы (например, вредные или опасные) на большой скорости.

5. *Принцип самообслуживания*: а) объект должен сам себя обслуживать, выполняя вспомогательные и ремонтные операции; б) использовать отходы (энергии, вещества).

6. *Принцип дешёвой недолговечности взамен долговечности*: заменить дорогой объект набором дешёвых объектов, поступившись при этом некоторыми качествами (например, долговечностью).

7. *Принцип использования пневмо- и гидроконструкций*: вместо твёрдых частей объекта использовать газообразные и жидкие: надувные и гидронаполняемые, воздушную подушку, гидростатические и гидрореактивные.

8. *Принцип отброса и регенерации частей*: а) выполнившая своё назначение или ставшая ненужной часть объекта должна быть отброшена (растворена, испарена и т.д.) или видоизменена непосредственно в ходе работы; б) расходимые части объекта должны быть восстановлены непосредственно в ходе работы.

Идеальностью системы будем называть отношение всех полезных результатов работы системы ко всем «факторам расплаты» (система занимает место, загрязняет воздух, требует ремонта, и т.д.).

Каким образом можно добиться полной идеальности системы – идеального конечного результата (ИКР)? ИКР формулируют по простой схеме: один из элементов конфликтующей пары сам устраняет вредное воздействие, сохраняя способность осуществлять основное действие. В результате остаются ИКР и варианты, близкие к ИКР. Дальнейший отсев вариантов происходит при формулировании физического противоречия.

Один из важнейших вопросов – правильная постановка задач. Полезно при постановке задачи всячески уходить от специальной терминологии, которая автоматически загоняет человека в привычное русло. В ТРИЗ для этого придуман термин «х-элемент», а в обыденной жизни удобно употреблять слово «штуковина». Вообще, рекомендуется при решении задачи пользоваться по возможности простыми выражениями, не применяя специальные термины и не задумываясь раньше времени о том, насколько придуманное реально осуществимо. Иначе психологические барьеры на пути к нетривиальному решению не будут преодолены.

Ещё один хороший способ преодоления шаблонов мышления – *оператор «Размер. Время. Стоимость» – РВС*. Каждый из соответствующих параметров последовательно устремляется к нулю или к бесконечности, и мы пытаемся ответить на вопросы: Как мы могли бы решить задачу, если бы могли себе позволить систему очень высокой стоимости? Очень низкой? (опора на практически бесплатные ресурсы) Работаящей очень долго? и т.д.

11.3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ

АРИЗ основан на диалектическом подходе к процессу изобретательства, на использовании не только объективных закономерностей развития техники, но и информации из различных областей знаний.

АРИЗ является ядром теории решения изобретательских задач (ТРИЗ).

Главные (узловые) понятия АРИЗ – это понятия «противоречие», «идеальный конечный результат» и «принцип разрешения противоречия».

Автор первых модификаций АРИЗ (вплоть до АРИЗ-71) – Генрих Саулович Альтшуллер. Начиная с середины 1970-х гг. модификации АРИЗ являлись уже результатом коллективного творчества под руководством Г.С. Альтшуллера.

Среди всех модификаций наиболее важными вехами в развитии АРИЗ являются АРИЗ-61, АРИЗ-71, АРИЗ-77 и АРИЗ-85В. Именно эти модификации стали узловыми историческими модификациями АРИЗ и оказали наибольшее влияние на развитие ТРИЗ-движения в целом.

АРИЗ-85В благодаря многочисленным публикациям и учебным семинарам получил широкое распространение.

АРИЗ-85В состоит из нескольких частей [30].

В первой части проводится анализ задачи. Основная цель первой части АРИЗ – переход от расплывчатой изобретательской ситуации к чётко построенной и предельно простой схеме (модели) задачи.

При этом записываются условия мини-задачи (без специальных терминов) по следующей форме: техническая система для (указать назначение) включает (перечислить основные части системы); техническое противоречие-1: (указать); техническое противоречие-2: (указать). Необходимо при минимальных изменениях в системе (указать результат, который должен быть получен). Затем выделяется конфликтующая пара (изделие и инструмент), усиливается конфликт между ними и проверяется возможность применения системы стандартов к решению модели задачи. Если задача не решена, перейти ко второй части АРИЗ. Если задача решена, можно перейти к седьмой части АРИЗ, хотя и в этом случае рекомендуется продолжить анализ со второй части.

Анализ задачи по первой части АРИЗ и построение модели существенно проясняют задачу и во многих случаях позволяют увидеть стандартные черты в нестандартных задачах. Это открывает возможность более эффективного использования стандартов, чем при применении их в исходной формулировке задачи.

Цель второй части АРИЗ – учёт имеющихся ресурсов, которые можно использовать при решении задачи: ресурсов пространства, времени, вещества и полей.

В результате применения третьей части АРИЗ должен формулироваться образ идеального решения (ИКР). Определяется также и физическое противоречие (ФП), мешающее достижению ИКР.

Три первые части АРИЗ существенно перестраивают исходную задачу. Итог этой перестройки – формулировка ИКР-2, при которой получаем новую задачу – физическую. В дальнейшем надо решать именно эту задачу. Необходимо проверить возможность применения системы стандартов к решению физической задачи, сформулированной в виде ИКР-2. Если задача не решена, перейти к четвёртой части АРИЗ. Если задача решена, можно перейти к седьмой части АРИЗ, хотя и в этом случае рекомендуется продолжить анализ по четвёртой части.

Четвёртая часть АРИЗ включает планомерные операции по увеличению ресурсов. Используя метод ММЧ (моделирование «маленькими человечками»), строится схема конфликта и осуществляется переход к технической схеме. Метод ММЧ позволяет отчётливее увидеть идеальное действие («что надо сделать») без физики («как это сделать»). Благодаря этому снимается психологическая инерция, фокусируется работа воображения. Во многих случаях четвёртая часть АРИЗ приводит к решению задачи. В таких случаях можно переходить к седьмой части.

Цель пятой части АРИЗ – использование опыта, сконцентрированного в информационном фонде ТРИЗ. К моменту ввода в пятую часть АРИЗ задача существенно проясняется – становится возможным её прямое решение с помощью информационного фонда.

В шестой части проводится изменение или замена задачи.

Главная цель седьмой части АРИЗ – проверка качества полученного ответа. Физическое противоречие должно быть устранено почти идеально, «без ничего».

В восьмой части осуществляется поиск возможного применения полученного ответа.

Каждая решённая по АРИЗ задача должна повышать творческий потенциал человека. Но для этого необходимо тщательно проанализировать ход решения. В этом смысл *девятой (завершающей) части АРИЗ.*

АРИЗ-96 – это переходная от человеческой к человеко-машинной модификация.

Решение задач по АРИЗ-96 состоит из четырёх этапов (анализ изобретательской ситуации, построение модели задачи, анализ модели задачи, синтез технического решения), позволяющих усовершенствовать старый (создать новый) технический или технологический объект в соответствии с целями его функционирования (при одновременном устранении нежелательных эффектов, выявленных в изобретательской ситуации).

Ближайшее развитие АРИЗ будет происходить в направлении увеличения, с одной стороны, количества, а с другой стороны, систематизации информации и переводу этой информации в ТРИЗ-фонд (классификаторы, указатели и банки). Классификаторы, указатели и банки (ре-

сурсов, принципов, эффектов и приёмов) приобретут вид компьютерных баз данных. Это объективная тенденция развития самого АРИЗ.

В дальнейшем все тонкости АРИЗ будут скрыты от глаз решателей подобно тому, как тонкости работы компьютерных программ (например, текстового редактора) скрыты от пользователя. Это так называемый дружественный интерфейс. Использование компьютерного варианта АРИЗ позволит объединить в единый процесс изобретательство, проектирование и технологическую подготовку производства новых изделий, что будет способствовать более полному раскрытию творческих возможностей человека в управлении производством и развитии техники.

Интеллектуальные компьютерные системы для изобретательства и проектирования технических объектов приведут к изменению функций прикладных научно-исследовательских институтов и опытно-конструкторских бюро, которые в основном будут заняты пополнением и потреблением компьютерных баз знаний интеллектуальных систем на соответствующих уровнях.

Распространение интеллектуальных компьютерных систем АРИЗ будет иметь большие научно-технические и социальные последствия. Использование интеллектуальных, в том числе экспертных, систем приведёт, во-первых, к росту профессиональной изобретательской культуры, поскольку знания квалифицированных изобретателей будут доступны широкому кругу специалистов, а во-вторых, – к сокращению сроков подготовки специалистов для тех сфер деятельности, где компетентность определяется накоплением опытных знаний: инженерное дело, проектирование, рационализация и изобретательство, физика и т.п.

11.4. ОТКРЫТИЕ И ИЗОБРЕТЕНИЕ, ПОЛЕЗНАЯ МОДЕЛЬ И ПРОМЫШЛЕННЫЙ ОБРАЗЕЦ, ТОВАРНЫЙ ЗНАК

Открытием признаётся установление неизвестных ранее объективно существующих закономерностей, свойств и явлений материального мира, вносящих коренные изменения в уровень познания.

В качестве изобретения охраняется техническое решение в любой области, относящееся к продукту (в частности, устройству, веществу, штамму микроорганизма, культуре клеток растений или животных) или способу (процессу осуществления действий над материальным объектом с помощью материальных средств). Изобретению предоставляется правовая охрана, если оно является новым, имеет изобретательский уровень и промышленно применимо [31].

Охрана изобретений осуществляется в соответствии с Патентным законом Российской Федерации от 23 сентября 1992 г. № 3517-1 [32].

Не считаются изобретениями, в частности: 1) открытия, а также научные теории и математические методы; 2) решения, касающиеся только внешнего вида изделий и направленные на удовлетворение эс-

тетических потребностей; 3) правила и методы игр, интеллектуальной или хозяйственной деятельности; 4) программы для электронных вычислительных машин; 5) решения, заключающиеся только в представлении информации. Не признаются патентоспособными в смысле положений настоящего Закона: 1) сорта растений, породы животных; 2) топологии интегральных микросхем; 3) решения, противоречащие общественным интересам, принципам гуманности и морали.

В качестве полезной модели охраняется техническое решение, относящееся к устройству [32].

Полезная модель признаётся соответствующей условиям патентоспособности, если она является новой и промышленно применимой.

В качестве полезных моделей правовая охрана не предоставляется: 1) решениям, касающимся только внешнего вида изделий и направленным на удовлетворение эстетических потребностей; 2) топологиям интегральных микросхем; 3) решениям, противоречащим общественным интересам, принципам гуманности и морали.

В качестве промышленного образца охраняется художественно-конструкторское решение изделия промышленного или кустарно-ремесленного производства, определяющее его внешний вид [32].

Промышленному образцу предоставляется правовая охрана, если он является новым и оригинальным.

К существенным признакам промышленного образца относятся признаки, определяющие эстетические и (или) эргономические особенности внешнего вида изделия, в частности форма, конфигурация, орнамент и сочетание цветов.

Не признаются патентоспособными промышленными образцами решения, обусловленные исключительно технической функцией изделия, а также: 1) объекты архитектуры (кроме малых архитектурных форм), промышленных, гидротехнических и других стационарных сооружений; 2) объекты неустойчивой формы из жидких, газообразных, сыпучих или им подобных веществ; 3) изделия, противоречащих общественным интересам, принципам гуманности и морали.

Отношения, касающиеся использования *товарных знаков* на территории Российской Федерации, регулируются Законом Российской Федерации от 23 сентября 1992 г. № 3520-1 «О товарных знаках, знаках обслуживания и наименованиях мест происхождения товаров» [32]. Настоящим Законом регулируются отношения, возникающие в связи с правовой охраной и использованием товарных знаков, знаков обслуживания и наименований мест происхождения товаров.

Товарный знак и знак обслуживания – обозначения, служащие для индивидуализации товаров, выполняемых работ или оказываемых услуг. *В качестве товарных знаков* могут быть зарегистрированы словесные, изобразительные, объёмные и другие обозначения или их комбинации.

11.5. ЗАЯВКА НА ПРЕДПОЛАГАЕМОЕ ИЗОБРЕТЕНИЕ (СТРУКТУРА И ОФОРМЛЕНИЕ)

Пока нет единого мирового стандарта на *составление описания изобретения*. В нашей стране рекомендуется *следующая последовательность*:

- название изобретения;
- область техники, к которой относится изобретение;
- преимущественная область использования;
- характеристики аналогов;
- характеристика прототипа;
- недостатки прототипа;
- цель, достигаемая изобретением;
- сущность изобретения, его отличие от прототипа;
- примеры конкретного выполнения;
- предполагаемый полезный эффект;
- формула изобретения.

При составлении заявки особое внимание следует уделять формуле изобретения, так как именно она определяет новизну изобретения и его сущность.

Начиная составлять формулу изобретения следует помнить, что название изобретения должно дословно совпадать с начальными словами формулы изобретения. Например, название изобретения: «Способ термической обработки деталей из высокопрочных коррозионно-стойких сталей», формула изобретения должна начинаться так же [30].

Вся формула изобретения состоит из трёх частей, как правило, образующих одно предложение.

Часть первая называется доотличительной, т.е. предшествующей слову «отличающийся» в формуле изобретения. В ней излагается то, что было известно до описываемого изобретения, т.е. фиксируются главные черты прототипа (известного технического решения, наиболее близкого к найденному новому решению).

Часть вторая, неукоснительно начинающаяся словами «отличающееся тем, что с целью...», формулирует цель, достигаемую применением изобретения.

В третьей части формулы кратко описывается то, что отличает описываемое изобретение от прототипа, т.е. с помощью какого технического новшества достигается сформулированная во второй части цель.

Пример 11.7. Термоэлектрический микрохолодильник, содержащий холодильную камеру с примыкающей к её стенкам термобатареей, наложенный на камеру слой изоляции и наружный кожух с расположенным в его нижней части радиатором, примыкающим к слою изоляции, отличающийся тем, что с целью повышения холодопроизводи-

тельности и экономичности микрохолодильника наружный кожух установлен с зазором по отношению к слою изоляции и покрыт снаружи гофрированной оболочкой, а для осуществления фиксации наружного кожуха относительно радиатора и слоя изоляции служит фланец и пружинящие тяги с кольцевой накладкой, опирающийся на слой изоляции.

Приведённая в примере формула изобретения однозвенная. Бывают и многозвенные формулы, в которых отдельными пунктами оговариваются различные конструктивные исполнения того или иного узла.

При составлении формулы изобретения рекомендуется отличительные признаки изобретения характеризовать наиболее общими понятиями, в противном случае, при указании конкретного понятия (исполнения) автор не имеет право претендовать на всеобъемлющую новизну. Например, если указан материал «нержавеющая сталь», то это сразу ограничивает новизну, так как другой автор может предложить в качестве конструкционного материала использовать какой-либо сплав. В этом случае целесообразней указать, что устройство или узел выполнен из материала, содержащего определённое количество углерода.

Методические рекомендации к индивидуальному заданию по теме 11.5. В качестве индивидуального задания для студентов по этой теме рекомендуется составить заявку на предполагаемое изобретение, техническое решение которого было получено в результате морфологического анализа. Кроме этого, в качестве индивидуального задания по теме 11.5 могут быть использованы задания, взятые из работы [33] и приведённые в прил. И.

Заявка на выдачу патента должна включать следующие документы (в трёх экземплярах); заявление о выдаче авторского свидетельства или патента; описание изобретения с формулой изобретения; чертежи, схемы, акт испытаний и другие материалы, иллюстрирующие предполагаемое изобретение, если они необходимы для более полного раскрытия сущности и значительности изобретения; справку о творческом участии каждого из соавторов в создании изобретения; аннотацию; заключение о новизне технического решения (включая сведения о проведённых патентных исследованиях), с указанием возможных областей его применения в народном хозяйстве и ожидаемого технико-экономического или иного эффекта.

Материалами, иллюстрирующими изобретение, могут быть чертежи, схемы, рисунки, фотографии, графики, акты испытаний. Каждый из этих материалов должен удовлетворять определённым требованиям.

Заключение о новизне должно быть подготовлено компетентными в соответствующих областях техники специалистами и содержать полную и объективную характеристику заявляемого изобретения. Оно должно быть основано на исследовании патентной документации и другой технической информации.

В случае необходимости (например, для подтверждения эффективности изобретения) к материалам заявки прилагается *акт испыта-*

ний заявленного изобретения, заверенный и подписанный в установленном в данной организации порядке.

В акте экспертизы приводятся сведения о возможности открытой публикации сведений об изобретении.

Следует также сказать о присвоении изобретению класса согласно Международной патентной классификации МПК-8 [32]. Собственно классификационные рубрики представлены в виде томов. Расширенный уровень состоит из 8 томов, каждый из которых соответствует разделу МПК: раздел А «Удовлетворение жизненных потребностей человека»; раздел В «Различные технологические процессы; транспортирование»; раздел С «Химия; металлургия»; раздел D «Текстиль; бумага»; раздел E «Строительство; горное дело»; раздел F «Механика; освещение; отопление; двигатели и насосы; оружие и боеприпасы; взрывные работы»; раздел G «Физика»; раздел H «Электричество».

Заявки на выдачу патента подаются в Федеральную службу по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам (Роспатент).

В Роспатенте по заявкам на выдачу патента проводятся: а) проверка соблюдения требований, предъявляемых к заявке (предварительная экспертиза); б) проверка соблюдения требований, предъявляемых к изобретению (государственная научно-техническая экспертиза изобретений).

По принятой к рассмотрению заявке заявителю выдаётся справка, значение которой состоит в том, что она удостоверяет принятие заявки и обязывает Роспатент вынести решение по её существу; помимо этого, справка, как правило, удостоверяет дату приоритета изобретения.

Государственная научно-техническая экспертиза изобретений проводится в срок, не превышающий 6 месяцев со дня поступления заявки в Роспатент. При этом у заявителя могут быть запрошены дополнительные материалы, уточняющие сущность изобретения, если без таких материалов дальнейшее рассмотрение невозможно. Для направления этих материалов заявителю предоставляется месячный срок.

По результатам рассмотрения заявки государственная научно-техническая экспертиза изобретений принимает решение о выдаче охранного документа, либо об отказе в его выдаче. В решении о выдаче охранного документа приводятся формула изобретений и дата приоритета; в решении об отказе – мотивы отказа.

При несогласии заявителя с решением об отказе в выдаче патента, либо с установленной в решении о выдаче патента формулой изобретения, заявитель имеет право в двухмесячный срок со дня поступления решения или затребованных копий противопоставленных материалов подать возражение.

При принятии решения о выдаче патента Роспатент издаёт описание изобретения с приведением в нём формулы изобретения и выдаёт охранный документ.

11.6. ПРОВЕДЕНИЕ ПАТЕНТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Патентные исследования проводятся в соответствии с действующим ГОСТ Р 15.011–96. «Патентные исследования. Содержание и порядок проведения», согласно которому под патентными исследованиями понимаются исследования технического уровня и тенденций развития объектов техники, их патентоспособности и патентной чистоты на основе патентной и другой научно-технической информации. Иными словами, прежде чем оформить заявку на изобретение, автор должен выяснить, проведя обзор научно-технической литературы, патентов и т.д., не предложил ли кто-нибудь до него подобное решение.

При выполнении научно-исследовательских работ патентные исследования проводятся исполнителями работ при научно-методическом руководстве патентного подразделения научно-исследовательской организации.

Работы по патентным исследованиям проводят в такой последовательности: разрабатывают регламент поиска; ведут поиск и отбирают патентную и другую научно-техническую документацию; систематизируют и проводят анализ отобранной документации; обобщают результаты и составляют отчёт.

Регламент поиска предусматривает: определение предмета поиска (объект в целом, его составные части или элементы); определение стран (фирм) поиска информации; определение видов информационных источников; классификацию предметов поиска; определение необходимой ретроспективности (глубины) поиска по странам и источникам информации; установление местонахождения основных источников информации; определение методов поиска.

Методы поиска документации определяются патентным подразделением организации.

Выявленные в процессе поиска документы вносят в справку о поиске, содержание которой представляет собой исходный материал для проведения *анализа*. По результатам анализа отобранных документов составляют *отчёт о патентных исследованиях*, который является одновременно рабочим и отчётным документом о проведённых исследованиях, входит в состав документации по НИР, ОКР и ПКР.

Проведение организациями и предприятиями патентных исследований в значительной мере упрощает и облегчает выявление изобретений в разработках. В частности, раздел второй отчёта о патентных исследованиях, составляемый на всех этапах исследований и характеризующий технический уровень, содержит информацию, необходимую для обоснования изобретательского уровня технического решения, заявляемого в качестве изобретения.

Вывод о том, обладает ли разработанное техническое решение преимуществами перед известными, вытекает из сопоставления качественных показателей разработки с характеристиками лучших отечест-

венных и зарубежных промышленно освоенных образцов техники и базового объекта в отчёте о патентных исследованиях.

При практическом выявлении изобретений в разработке следует убедиться в наличии преимуществ, обеспечиваемых разработанным техническим решением, по сравнению с достигнутым уровнем и только после этого оформлять заявку на предполагаемое изобретение.

Проведённые патентные исследования должны:

1) отражать изученную заявителем патентную документацию (отечественные и зарубежные авторские свидетельства, патенты и т.п.), научно-техническую литературу, имеющую прямое отношение к заявленному объекту;

2) определять выбранный заявителем прототип изобретения;

3) отражать результаты сопоставления прототипа и заявленного объекта по его существенным признакам и создаваемому положительному эффекту;

4) характеризовать сущность изобретения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии излагаются основы проведения теоретических и экспериментальных исследований в области технологии машиностроения и металлообработки, методика обработки экспериментальных данных, в том числе, с применением физико-математического пакета Mathcad 2001 Professional и офисного приложения Microsoft Excel, рассматриваются некоторые вопросы теории решения изобретательских задач.

Значительное внимание в пособии уделяется применению средств вычислительной техники и таких программных продуктов, как Mathcad 2001 Professional и Microsoft Excel для обработки результатов эксперимента. Опыт преподавательской деятельности авторов данного пособия показывает, что эти программные продукты легко осваиваются студентами. Простой, интуитивно понятный интерфейс, а также достаточно широкие возможности этих программ дают возможность грамотно, на высоком методическом уровне обработать результаты эксперимента и наглядно их представить в научных публикациях.

В пособии приводятся сведения о приборах и средствах измерения и контроля различных физических величин и параметров. Следует отметить, что на сегодняшний день разработано более совершенное оборудование, например, цифровые, подключаемые к компьютеру, измерительные устройства. Однако, как полагает авторский коллектив, приведённое в пособии описание измерительных устройств наглядно иллюстрирует принципы измерения различных параметров. Кроме того, эти устройства более доступны для исследователя, чем дорогостоящее электронное оборудование.

Авторы пособия не претендуют на полноту изложения всех вопросов исследовательской работы в таких наукоёмких областях как технология машиностроения и металлообработка, но вместе с тем полагают, что представленный материал будет полезен студентам, занимающимся научно-исследовательской работой, а также магистрантам и аспирантам для создания исследовательских установок и обработки экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко, П.М. Основы научных исследований / П.М. Василенко, Л.В. Погорельый. – Киев : Вища школа, 1985. – 266 с.
2. Джонс, Дж. Инженерное и художественное конструирование / Дж. Джонс. – М. : Мир, 1976. – 215 с.
3. Основы информатики : учебное пособие / А.Н. Морозевич, Н.Н. Говядинова, Б.А. Железко и др. ; под общ. ред. А.Н. Морозевича. – Минск : Новое знание, 2001. – 214 с.
4. Локальные вычислительные сети / пер. с англ. В.П. Нестерова ; под ред. П.В. Нестерова. – М. : Машиностроение, 1990. – 524 с.
5. Попов, В.Б. Основы компьютерных технологий / В.Б. Попов. – М. : Финансы и статистика, 2002. – 704 с.
6. Якубайтис, Э.А. Информационные сети и системы / Э.А. Якубайтис. – М. : Финансы и статистика, 1996. – 368 с.
7. Бусленко, Н.Б. Моделирование сложных систем / Н.Б. Бусленко. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
8. Кане, М.М. Основы научных исследований в технологии машиностроения : учеб. пособие для вузов / М.М. Кане. – Минск : Выш. школа, 1987. – 231 с.
9. Луизова, Л.А. От постановки задачи до принятия решения : учеб. пособие / Л.А. Луизова. – Петрозаводск, 2002. – 84 с.
10. Спиридонов, А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов / А.А. Спиридонов. – М. : Машиностроение, 1981. – 184 с.
11. Основы научных исследований : учебник для техн. вузов / В.И. Крутов, И.М. Грушко, В.В. Попов и др. ; под ред. В. И. Крутова, В.В. Попова. – М. : Высш. шк., 1989. – 400 с.
12. Плановский, А.Н. Процессы и аппараты химической и нефтехимической технологии / А.Н. Плановский, П.И. Николаев. – М. : Химия, 1987. – 496 с.
13. Зайдель, А.М. Ошибки измерений физических величин / А.М. Зайдель. – Л. : Наука, 1974. – 108 с.
14. Савчук, В.П. Обработка результатов измерений. Физическая лаборатория : учеб. пособие для студентов вузов / В.П. Савчук. – Одесса : ОНПУ, 2002. – Ч. I. – 54 с.
15. Плис, А.И. Mathcad: математический практикум для экономистов и инженеров : учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – Финансы и статистика, 1999. – 656 с.
16. Грановский, Г.И. Резание металлов : учебник для машиностр. и приборостр. спец. вузов / Г.И. Грановский, В.Г. Грановский. – М. : Высш. шк., 1985. – 304 с.
17. Шенк, Х. Теория инженерного эксперимента / Х. Шенк. – М. : Мир, 1972. – 381 с.

18. Львовский, Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул / Е.Н. Львовский. – М. : Высш. школа, 1982. – 224 с.
19. Румшинский, Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента / Л.З. Румшинский. – М. : Наука, 1971. – 192 с.
20. Спиридонов, А.А. Планирование эксперимента при исследовании и оптимизации технологических процессов : учеб. пособие / А.А. Спиридонов, Н.Г. Васильев. – Свердловск : Издание УПИ им. С. М. Кирова, 1975. – 140 с.
21. Жуков, Р.Ф. Современные методы научно-технического творчества / Р.Ф. Жуков, В.М. Петров. – Л., 1980. – 88 с.
22. Буш, Г.О. Основы эвристики для изобретателей / Г.О. Буш. – Рига : Знание, 1977. – Ч. I. – 122 с.
23. Одрин, В.М. Морфологический анализ систем / В.М. Одрин, С.С. Картавов. – Киев : Наукова думка, 1977. – 96 с.
24. Попов, А. Функционально-физический метод конструирования / А. Попов // Изобретатель и рационализатор. – № 4. – 1985. – С. 28 – 30.
25. Половинкин, А.И. Функционально-физический метод поискового конструирования / А.И. Половинкин, Н.И. Вершинина, Т.М. Зверева. – Иваново, 1983. – 56 с.
26. Попов, А. Мозговой штурм / А. Попов // Изобретатель и рационализатор. – № 6. – 1984. – С. 24 – 26.
27. Попов, А. Метод контрольных вопросов / А. Попов // Изобретатель и рационализатор. – № 8. – 1984. – С. 26–27.
28. Попов, А. Метод контрольных вопросов / А. Попов // Изобретатель и рационализатор. – № 10. – 1984. – С. 30–31.
29. Попов, А. Синектика / А. Попов // Изобретатель и рационализатор. – № 12. – 1984. – С. 32–33.
30. Альтшуллер, Г.С. Творчество как точная наука / Г.С. Альтшуллер. – М. : Сов. радио, 1979. – 175 с.
31. Петрович, Н.Т. Путь к изобретению / Н.Т. Петрович, В.М. Цуриков. – М. : Мол. гвардия, 1986. – 222 с.
32. Роспатент-Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – URL : http://www1.fips.ru/wps/wcm/connect/content_ru/ru.
33. Марченко, С.В. Теория решения изобретательских задач. : метод. пособие к практ. работам для студентов 3 курса специальности Т.03.02 «Технология и оборудование высокоэффективных процессов обработки материалов» и Т.03.01 по курсу «Принципы инженерного творчества» / С.В. Марченко. – Полоцк : Полоцкий гос. ун-т, 1998. – Ч. I. – 86 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО РАБОТЕ В СРЕДЕ MATHCAD PROFESSIONAL 2001

После запуска пакета на экране монитора появляется окно (рис. А1).



Рис. А1. Окно Mathcad

Верхняя строка окна – стандартная строка Windows. В ней слева приведено имя приложения Mathcad Professional 2001, затем имя файла, в котором сохраняются результаты работы (на рис. А1 это надпись: [Untitled:1]), а справа – три стандартные функциональные кнопки для работы с окнами Windows. Всё, что расположено ниже, относится к работе в среде пакета.

Вторая строка экрана – строка меню.

Меню имеет набор стандартных для windows-приложений пунктов: «Файл», «Правка», «Вид», «Формат», «Окна», «Помощь» и специфические для Mathcad пункты: «Вставка», «Математика», «Символьная математика».

Щелчок по пункту меню открывает ниспадающее меню со списком доступных в данном пункте меню операций.

Следующие три строки окна содержат панели инструментов, часть из которых – стандартные для windows-приложений операции работы с файлами и текстом (рис. А2), а другая часть – специфические функции Mathcad, например, кнопка с надписью открывает список встроенных функций.

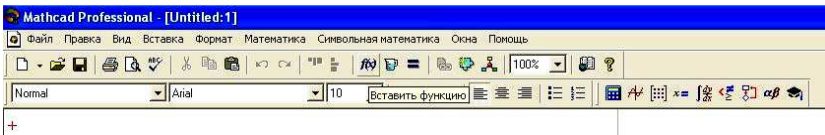


















Рис. А2. Панель с кнопками управления файлами и форматирования текста

Существует панель инструментов для выполнения математических операций (рис. А2, 9 пиктограмм, расположенных в третьей строке справа), которую в дальнейшем будем называть *панелью математических инструментов* или *панелью математических операций*.

Основные кнопки панелей инструментов Mathcad следующие:

 – вставить функцию;  – вставить единицы измерения;  – вычислить;  – вставить гипертекстовую ссылку;  – вставить компонент;  – запуск MathConnex;  – запуск Ресурс – Центра;  – показать арифметическую панель инструментов;  – показать панель инструментов для работы с графиками;  – показать панель инструментов для работы с матрицами и векторами;  – показать панель инструментов математических данных;  – показать панель инструментов математического анализа;  – показать панель инструментов Булево;  – показать панель инструментов программирования;  – показать панель инструментов символов греческого алфавита;  – показать панель инструментов символических ключевых слов.

Математические операции в Mathcad разделены на группы и каждая кнопка панели математических инструментов открывает доступ к определённой группе операций. Щелчок по кнопке этой панели открывает другую, дополнительную, панель, на которой расположены кнопки математических операций соответствующей группы.

Под строками панелей инструментов находится окно рабочего документа Mathcad – пространство, в котором располагаются все введённые команды и выражения, куда Mathcad выводит результаты вычислений, графики и где размещаются текстовые комментарии. Содержимое этого окна можно редактировать, форматировать, сохранять в файлах на диске, печатать и др. Окно снабжено двумя полосами вертикальной и горизонтальной прокрутки.

Нижняя строка окна – строка состояния (рис. А3). В ней записаны рекомендации к дальнейшим действиям, описано текущее состояние среды и указан номер отображённой на экране страницы рабочего документа.



Рис. А3. Строка состояния окна Mathcad

В приведённом примере в строке состояния указано, что видна первая страница рабочего документа (Page 1), что система находится в состоянии автоматических вычислений (AUTO), и программа рекомендует пользователю обратиться за помощью к справке, нажав на клавиатуре клавишу <F1> (Press P1 for help).

Большинство вычислений в Mathcad можно выполнить тремя способами:

- выбором операции в меню;
- с помощью кнопочных панелей инструментов;
- обращением к соответствующим функциям.

Почти все операции, закреплённые за пунктами меню, дублируются соответствующими кнопками панелей инструментов. Для обращения к встроенной функции можно вставить функцию в рабочий документ, выбрав нужное имя из списка функций, можно ввести имя функции с клавиатуры или, для наиболее часто используемых функций, вставить имя функции щелчком по кнопке в панели инструментов.

Далее рассмотрим специфические для данного приложения меню.

В меню «Вставка» (рис. А4) пункт «Графики» открывает доступ к операциям построения различных типов графиков, которые собраны в дополнительное меню графиков.

Порядок действий при построении всех графиков одинаков. После щелчка мышью по строке меню в рабочем документе открывается поле построения графика с помеченными для ввода позициями, которые нужно заполнить для определения графика. Затем для построения графика щёлкнуть по строке «Вычислить» в меню «Математика», либо нажать на клавиатуре клавишу <F9> или щёлкнуть в панели по пиктограмме «Вычислить». При автоматическом режиме вычислений график будет построен после щелчка мышью вне поля графика. На графике возможно изменение толщины и цвета линии, вида осей координат, координатных сеток, текстовых комментариев и др. Для того чтобы изменить вид изображения, нужно щёлкнуть дважды по полю графика и установить требуемые параметры в окнах настройки. Научиться форматировать графики лучше всего экспериментально: постройте график, затем щёлкните дважды по полю графика, определите параметр в окне настройки, щёлкните по кнопке «Применить».

Щелчок по пункту меню «Матрица» (рис. А4) открывает в рабочем документе окно определения размерности матрицы (число строк и столбцов). После того как размерность матрицы определена, в рабочем документе открывается окно ввода матрицы.

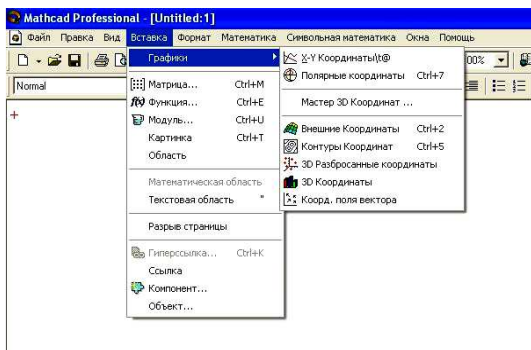


Рис. А4. Меню «Вставка»

Щелчок по пункту меню «Функция» (рис. А4) открывает окно диалога встроенных функций Mathcad. Для того чтобы вставить функцию в рабочий документ, нужно выбрать в окне с помощью стрелок прокрутки нужную функцию из списка функций, щёлкнуть по кнопке «INSERT» и ввести в помеченных позициях аргументы (аргумент) функции.

Щелчок по пункту меню «Модуль» (рис. А4) открывает окно списка определённых в Mathcad единиц измерения. В открывшемся окне «Измерение» – выбрать стрелками прокрутки соответствующую размерность, а в окне «Модуль» – нужную единицу измерения (рис. А5). После щелчка по кнопке «INSERT» соответствующее наименование будет вставлено в рабочий документ, а окно выбора единицы останется открытым; после щелчка по кнопке «OK» будет вставлено наименование единицы измерения и окно закроется.

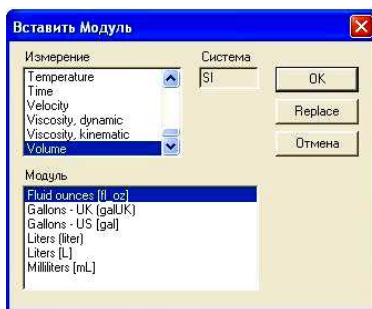


Рис. А5. Окно выбора единиц измерения

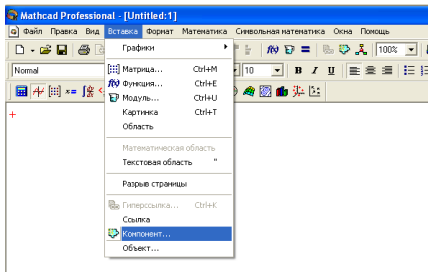
Пункт «Картинка» (рис. А4) задаёт операцию вставки рисунка.

Пункт «Текстовая область» (рис. А4) используется для определения поля текстовых комментариев; щелчком по строке «Математическая область» (рис.А4) в текстовый комментарий вставляется поле ввода математических символов; щелчком по строке «Разрыв страницы» в рабочий документ вставляется признак конца страницы.

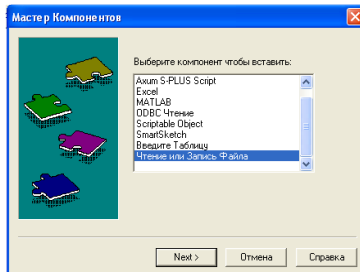
Операции «Гиперссылка», «Ссылка», «Компонент» и «Объект» предназначены для создания достаточно сложных конструкций: «Гиперссылка» содержит набор операций для создания гипертекстовых ссылок; «Ссылка» – операция создания перекрёстных ссылок для документов Mathcad; «Компонент» и «Объект» – операции внедрения компонент и объектов из других приложений.

Для импорта данных из других приложений необходимо выполнить следующие шаги (рис. А6).

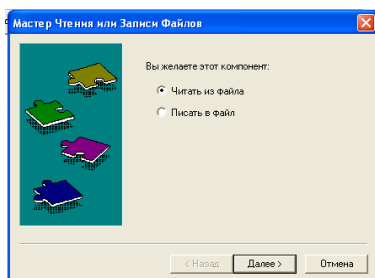
Все операции меню «Формат» (рис. А7) предназначены для определения стиля и формы отображения выражений, данных, результатов вычислений и графиков в рабочем документе – определения цветов фона и надписей, размера и типа шрифта, выравнивания текстов в рабочем документе, разделения рабочего документа на области и др.



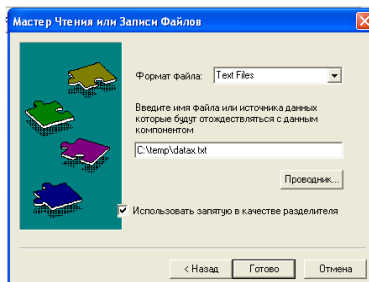
шаг 1



шаг 2



шаг 3



шаг 4

Рис. А6. Импорт файла данных из других приложений

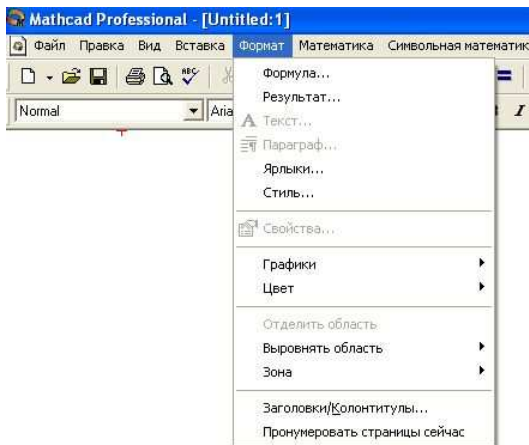
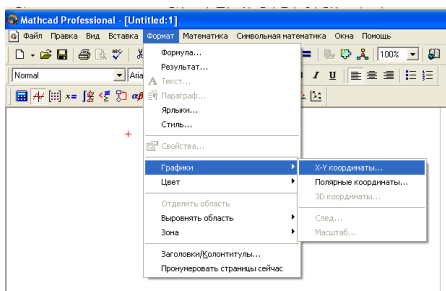
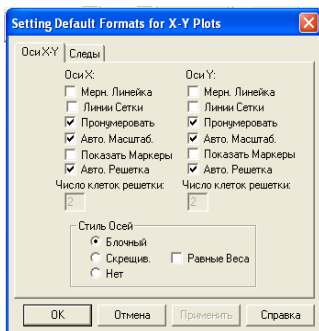


Рис. А7. Меню «Формат»

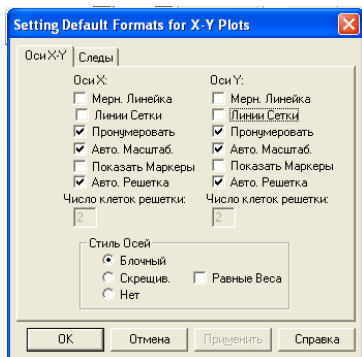
Рассмотрим только пункт «График», который содержит операции форматирования графиков. Для настройки параметров декартова графика необходимо выполнить следующие действия (рис. А8).



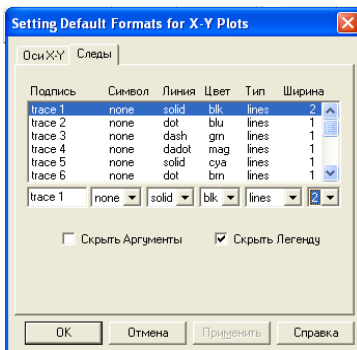
шаг 1



шаг 2



шаг 3



шаг 4

Рис. А8. Настройка параметров декартова графика

Меню «Математика» (рис. А9) содержит операции управления вычислениями. После щелчка по «Вычислить» вычисляются выражения, расположенные выше и левее курсора. После щелчка по «Рабочий лист вычислений» выполняются все вычисления и перерисовываются все графики, определённые в рабочем документе. Если строка «Автоматические вычисления» помечена флажком, то любое выражение вычисляется немедленно после окончания ввода, а график строится после щелчка вне поля графиков. Если же пометка отсутствует, то вычисления и построения производятся только после соответствующей команды (щелчок по «Вычислить», например). Если строка «Оптимизация» также помечена флажком, то включен режим оптимизации вычислений. В этом режиме сначала упрощаются все выражения, помещённые справа от знака присвоения «:=», и только затем выражение обрабатывается числовым процессором. В противном случае числовой процессор обрабатывает выражение в исходном виде.

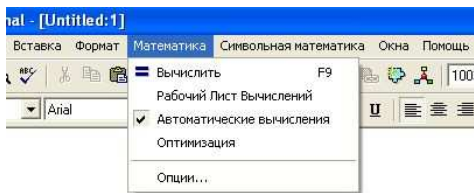


Рис. А9. Меню «Математика»

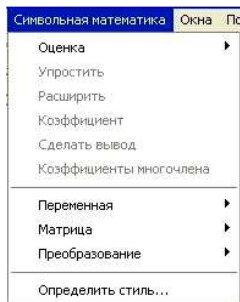


Рис. А10. Меню «Символьные вычисления»

Щелчок по строке «Опции» (рис. А9) позволяет настроить режим вычислений: установить допустимую погрешность вычислений, номер первого элемента массива, число значащих цифр при записи данных и файл и т.д.

Меню «Символьная математика» (рис. А10) содержит операции символьной математики. Пункт «Оценка» содержит три операции: «Символически», «Плавающая точка», «Комплексная».

После щелчка по одной из этих трёх строк вычисляется значение выделенного в рабочем документе выражения, причём вычисления производятся соответственно символьно, численно с плавающей запятой или с использованием арифметики комплексных чисел. Щелчком по строке «Упростить» символьному процессору передаётся выражение, выделенное в рабочем документе, а преобразованное выражение отображается в рабочем документе ниже или справа от исходного выражения (см. опцию «Определить стиль»). Аналогично, после щелчка по «Расширить» в выделенном выражении раскрываются скобки.

Если выражение является многочленом относительно выделенного фрагмента, то после щелчка по строке «Коэффициенты многочлена» в рабочий документ выводится вектор-столбец коэффициентов многочлена, записанных в порядке возрастания степеней выделенного выражения (например, выделено a).

$$a + 2 \times a \times b + b^2 - (3 \times a^2 \times b) + a^2 \quad \begin{pmatrix} b^2 \\ 1 + 2 \times b \\ -3 \times b + 1 \end{pmatrix}$$

Каждая из следующих трёх строк (рис. А10) «Переменная», «Матрица», «Преобразование» объединяет группу символьных операций: символьные вычисления относительно выделенной переменной, символьные вычисления с выделенной матрицей и интегральные преобразования соответственно.

В пункте «*Переменная*» объединены операции математического анализа: решение уравнений («*Решишь*»); замена переменной («*Замена*»); дифференцирование («*Дифференцировать*»); интегрирование («*Интегрировать*»); разложение по формуле Тейлора («*Раскрыть ряд*»); разложение дроби на простейшие дроби («*Преобразовать в простейшую дробь*»).

Если в рабочем документе в некотором выражении выделена переменная, то после щелчка по соответствующей строке меню и в рабочем документе отображается результат выполнения операции относительно выделенной переменной,

В пункте «*Матрица*» объединены символьные вычисления с матрицами. Операции этой группы выполняются, только если в рабочем документе выделена матрица. Тогда после щелчка по строке меню в рабочем документе отображается результат выполнения соответствующей операции.

В пункте «*Преобразование*» объединены символьные вычисления прямых и обратных интегральных преобразований.

Вводить и редактировать формулы в Mathcad следует так, как они были бы написаны на листе бумаги. Математические выражения и действия воспринимаются процессором сверху вниз и слева направо.

Однако существуют некоторые особенности формульного редактора, знакомство с которыми облегчит работу.

Перечислим *основные элементы интерфейса, характерные именно для редактора Mathcad*:

+ *курсор ввода* (крестик красного цвета), который отмечает место в документе, куда можно вводить формулу или текст;

—| *линии ввода* – горизонтальная и вертикальная линии синего цвета, выделяющие в формуле определённую часть (выделяющая рамка);

□ ■ *местозаполнители оператора и символа*. Появляются внутри незавершённых формул в местах, которые должны быть заполнены оператором (чёрная прямоугольная рамка) или символом (чёрный прямоугольник).

Выделяющая рамка перемещается в пределах формулы щелчком мышью в нужном месте или с помощью клавиши пробела, который расширяет выделяющую рамку влево. Пробел используется и для перемещения внутри формул.

Для сокращения записи условимся обозначать клавиши, которые нужно нажимать на клавиатуре, угловыми скобками: например, запись <x> означает, что необходимо нажать на клавиатуре клавишу с буквой x; если нужно нажать на клавиатуре одновременно две клавиши, записываем <...>+<...>: следовательно, запись <Shift>+<x> означает, что нужно нажать на клавиатуре клавишу <Shift> и, не отпуская её, клавишу с буквой x.

Вычисления в Mathcad выполняются автоматически (после соответствующей настройки в меню «Математика/Автоматические вычисления»), результат записывается в конце строки определённых операций вычислений.

Пример А1. Вычислить значения арифметических выражений $25 + \frac{12}{3}$ и $25 + \frac{12}{4}$.

Щёлкните мышью по любому месту в рабочем документе – в поле появится крестик, обозначающий позицию, с которой начинается ввод. Введите с клавиатуры символы в следующей последовательности: $25 + 12/13$. Введите с клавиатуры знак равенства, нажав клавишу $\langle \Rightarrow \rangle$. Mathcad вычисляет значение выражения и выводит справа от знака равенства результат.

Щёлкните мышью справа внизу возле цифры 3 и нажмите клавишу $\langle \text{Backspace} \rangle$. Теперь значение выражения не определено, место ввода помечено чёрной меткой и ограничено угловой рамкой. Введите с клавиатуры цифру 4 и щёлкните мышью вне выделяющей рамки.

Теперь удалим выражение с экрана. Щёлкните мышью по любому месту в выражении, нажимайте клавишу $\langle \text{Пробел} \rangle$ до тех пор, пока всё выражение не будет выделено угловой синей рамкой. Нажмите клавишу $\langle \text{Backspace} \rangle$ (поле ввода окрасится в чёрный цвет) и, нажав клавишу $\langle \text{Del} \rangle$, удалите выделенное. Выражение исчезнет с экрана.

Пример А2. Вычислить значение выражения $\frac{at^2}{2}$ при $t = 5$, $a = 9.8$.

Щёлкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры символы $a =$. Введите с клавиатуры символы 9.8 и щёлкните по свободному месту вне поля ввода. Аналогично введите значение t . Щёлкните мышью по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры $a*t^2\langle \text{Пробел} \rangle/2\langle \text{Пробел} \rangle\langle \text{Пробел} \rangle =$ и щёлкните по свободному месту вне поля ввода.


Если при вводе выражения была допущена ошибка, выделите неправильный символ угловой рамкой (щёлкните мышью справа внизу возле символа), удалите выделенный символ (нажмите клавишу $\langle \text{Backspace} \rangle$) и введите в помеченной позиции исправление.

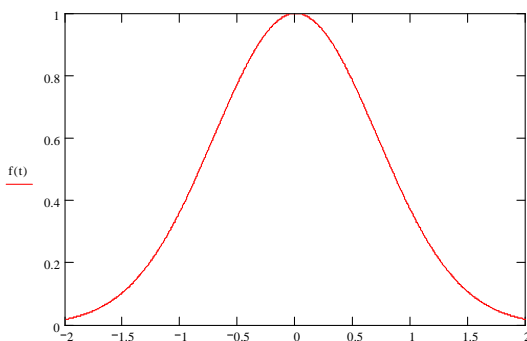
Mathcad читает и выполняет введённые выражения слева направо и сверху вниз, поэтому нужно, чтобы выражение для вычисления располагалось правее или ниже определённых для него значений переменных.

Пример А3. Определить функцию $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, вычислить её значение при $x=1.2$ и построить таблицу значений функции для $x \in [0, 10]$ с шагом 1.

Щёлкните по свободному месту в рабочем документе, введите с клавиатуры $x=1.2$. Затем щёлкните по рабочему документу вне поля ввода и введите $x+1\langle \text{Пробел} \rangle/x^2\langle \text{Пробел} \rangle+1\langle \text{Пробел} \rangle =$. Сразу после ввода знака равенства немедленно выводится вычисленное значение функции при $x=1.2$. Отредактируйте строку $x=1.2$, записав $x=0.1:10$. В результате под именем функции появится таблица значений функции.

Пример А4. Построить график функции $f(t) = e^{-t^2}$.

Щёлкните по свободному месту в рабочем документе и введите с клавиатуры $f(t)$: $\exp(-t^2)$ и щёлкните мышью вне поля ввода. Щёлкните по свободному месту в рабочем документе, затем пиктограмме  в панели «Диаграмма» и в открывшейся панели щёлкните по кнопке «Координаты X–Y». Курсор установлен в помеченной позиции возле оси абсцисс. Введите с клавиатуры имя аргумента t , затем щёлкните по помеченной позиции возле оси ординат, введите с клавиатуры $f(t)$ и щёлкните вне прямоугольной рамки. График получился невыразительным. Нужно определить промежуток изменения аргумента равным $[-2, 2]$. Для этого щёлкните по полю графика, затем по числу, задающему наименьшее значение аргумента (число в левом нижнем углу ограниченного рамкой поля графиков), нажмите на клавишу `<Backspace>` и введите с клавиатуры -2 . Аналогично измените вторую границу – вместо числа в правом нижнем углу поля графика введите 2 . Щёлкните мышью вне поля графика.



Последовательность построения графика функции двух переменных в Mathcad следующая:

- построить таблицу значений функции.

Для этого надо ввести с клавиатуры имя функции двух переменных $f(x,y)$, знак равенства и выражение для её вычисления;

- присвоить переменной N значение, равное количеству узлов квадратной сетки в плоскости переменных x, y ;
- определить диапазон изменения целых индексов i и j узлов сетки x_i, y_j соответственно.

Для этого ввести $i:=0..N$ и $j:=0..N$ (последовательное нажатие на клавиши `<i><=><0><;><N>` и `<j><=><0><;><N>`);

- щёлкнуть в панели по кнопке, ввести в помеченной позиции имя z и щёлкнуть по рабочему документу вне поля графиков;
- дважды щёлкнуть по полю графиков и установить в окнах параметры изображения.

При работе с панелями настройки параметров изображения можно посмотреть результат, полученный при изменении параметра изображения, не закрывая панели. Для этого после изменения параметра щёлкните по кнопке «Применить».

Линией уровня функции двух переменных x и y называется геометрическое место точек в плоскости xOy , в которых функция принимает одно и то же значение. Линии уровня функции $z = f(x, y)$ определяются уравнением $f(x, y) = C$, где $C = \text{const}$.

Рассматривая линии уровня функции двух переменных, можно исследовать характер изменения функции, найти координаты точек экстремума. На рисунке А11 приведены графики функции двух переменных и линии уровня функций, графики которых изображены выше.

Линии уровня можно построить, щёлкнув на соответствующей пиктограмме в панели графиков, либо изменением параметров настройки графиков.

Например, исследуем функцию $z = \sin \frac{xy}{5} \cdot \exp(-x^2 - y^2)$ в области $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$. Ниже приведён фрагмент рабочего документа Mathcad.

$$f(x,y) := \sin\left(\frac{x \times y}{5}\right) \times \exp(-x^2 - y^2)$$

$$N := 50 \quad i := 0..N \quad j := 0..N$$

$$x_i := -1 + \frac{1}{25} \times i \quad y_i := -1 + \frac{1}{25} \times i \quad z_{i,j} := f(x_i, y_i)$$

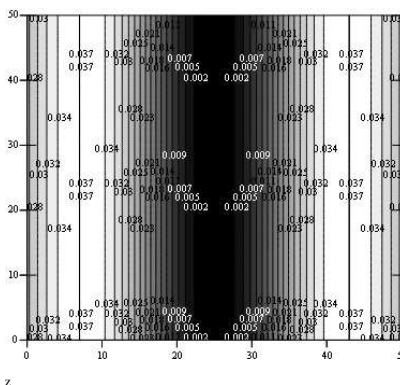
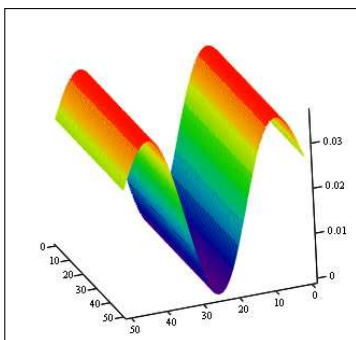



Рис. А11. Линии уровня функций двух переменных

Из графика видно, что функция имеет локальные минимумы и локальные максимумы.

Пример А5. Решить уравнение $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} = 0$.

Символьное решение этого уравнения в Mathcad занимает одну строчку.

$$\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2} \text{ solve, } x \rightarrow \frac{5}{2}.$$

Для получения решения откройте «Символьную панель инструментов», нажав на пиктограмму  и в открывшейся панели щёлкните по кнопке «solve». В рабочем листе появится запись $\blacksquare \text{ solve, } \blacksquare \rightarrow$. Слева от «solve» запишите уравнение, справа от запятой укажите переменную x , относительно которой будет производиться решение уравнения. Затем щёлкните по свободному полю документа. Решение отобразится сразу же после щелчка при условии что в меню «Математика» флажком отмечена опция «Автоматические вычисления».

Пример А6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x(z+1)^2 - 2z(x+z) = 0; \\ (1+x^2) \cdot \sqrt[4]{y-2} - 2x^2 = 0; \\ \sqrt{y-2}(z-2) + z = 0. \end{cases}$$

Фрагмент рабочего документа Mathcad с соответствующими вычислениями приведён ниже.

Given

$$x \times (z+1)^2 - 2 \times z \times (x+z) = 0$$

$$(1+x^2) \times \sqrt[4]{y-2} - 2 \times x^2 = 0$$

$$\sqrt{y-2} \times (z-2) + z = 0$$

$$\text{Find}(x, y, z) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдены два решения системы: $x = 0, y = 2, z = 0$ и $x = 1, y = 3, z = 1$.

При решении практических задач статистического анализа данных чаще всего приходится иметь дело с большими объёмами исходной информации. Такие данные представляют собой заранее введённые в файл аппаратными средствами экспериментальные данные, подготовленные специальными приложениями и сохранённые в файле таблицы чисел.

Используя в качестве средства сбора и обработки экспериментальных данных персональный компьютер, исследователь имеет возможность записывать результаты измерений непосредственно на жёсткий диск компьютера, либо на переносной носитель информации, а также осуществлять её считывание.

Mathcad предоставляет пользователю специальные функции ввода данных из файла на диске и вывода данных в файл.

Предположим, что на *диске с* в файле с именем *data.txt* сохранены результаты измерений некоторой величины, подготовленных текстовым процессором и сохранённых в указанном файле. Ниже представлен фрагмент рабочего документа Mathcad, в котором этот файл прочитан:

:= 

C:\data.txt

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	33.822	33.803	33.954	33.621	33.559	33.509	33.371	33.505	33.607	33.306
1	33.727	33.586	33.555	33.294	33.228	33.478	33.344	33.78	33.36	33.464
2	33.349	33.734	33.765	33.601	33.459	33.734	33.541	33.542	33.624	33.371
x = 3	33.525	33.323	33.573	33.594	33.476	33.444	33.38	33.29	33.512	33.656
4	33.614	33.329	33.509	33.609	33.943	33.666	33.401	33.571	33.419	33.498
5	33.368	33.646	33.299	33.33	33.563	33.517	33.507	33.281	33.474	33.567
6	33.611	33.312	33.422	33.402	33.652	33.444	33.521	33.462	33.432	33.371
7	33.51	33.467	33.567	33.767	33.552	33.471	33.389	33.27	33.29	33.61

**ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ
«ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ»**

Прибором измерено 10 отсчётов физической величины. Класс точности прибора $K = 2,5$, максимальное значение шкалы $A = 200$ В. Результаты измерений представлены в табл. Б1. Необходимо обработать результаты измерений, обеспечив 98 % надёжность оценки напряжения.

Б1. Результаты измерения физической величины

Вариант	№ измерения									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	56	156	145	199	126	100	126	146	180	190
2	120	65	166	155	156	154	156	185	152	152
3	166	175	172	174	182	185	152	192	194	152
4	135	156	156	152	154	182	174	123	159	154
5	123	145	123	125	200	125	156	155	182	182
6	166	184	182	174	177	182	192	192	189	185
7	188	152	153	145	192	198	199	182	156	182
8	200	199	182	199	189	110	182	182	171	166
9	158	166	182	182	156	192	182	152	162	172
10	166	169	182	192	194	192	195	189	199	182
11	144	111	105	106	108	105	152	150	140	142
12	111	105	105	159	105	156	185	150	105	104
13	156	158	150	150	145	145	148	174	152	156
14	100	101	110	100	110	150	120	102	111	122
15	102	102	200	120	155	156	100	100	155	150
16	150	150	120	156	155	156	155	100	155	154
17	120	120	122	122	156	150	120	116	119	115
18	110	150	120	152	124	152	100	155	154	145
19	123	124	122	144	145	156	145	145	122	102
20	45	65	21	55	55	24	24	26	25	33
21	55	66	41	44	44	120	42	56	54	22
22	66	74	69	65	56	49	70	66	56	65
23	180	181	126	174	182	182	200	158	156	200
24	45	66	55	66	66	68	65	65	54	66
25	80	82	80	81	81	82	81	82	82	84
26	45	45	42	40	44	44	43	45	45	40
27	60	59	58	58	61	65	59	65	65	55
28	77	78	75	75	76	80	79	78	79	77
29	199	189	189	179	178	189	185	187	188	187
30	55	60	59	57	57	55	60	61	58	58

**ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
ПО ТЕМЕ «ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК.
ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЫБОРКИ»**

При обработке партии деталей типа «вал» на токарном станке модели 16К20 был получен следующий разброс размеров. Определить характеристики эмпирического распределения.

Вариант 1

45,455 45,664 45,415 45,472 45,581 45,283 45,239 45,631 45,520 45,629
45,308 45,337 45,439 45,423 45,635 45,373 45,390 45,589 45,584 45,405
45,537 45,396 45,520 45,796 45,788 45,272 45,113 45,294 45,521 45,362
45,691 45,246 45,445 45,630 45,487 45,446 45,717 45,333 45,363 45,667
45,680 45,223 45,451 45,856 45,421 45,495 45,308 45,604 45,783 45,320
45,760 45,353 45,444 45,402 45,601 45,504 45,402 45,548 45,573 45,266
45,172 45,384 45,701 45,749 45,443 45,452 45,614 45,359 45,511 45,607
45,465 45,182 45,487 45,258 45,614 45,829 45,570 45,464 45,624 45,596

Вариант 2

1,701 1,757 1,493 1,551 1,331 1,166 1,384 1,538 1,612 1,427 1,532 1,229
1,371 1,284 1,732 1,461 1,437 1,369 1,256 1,413 1,285 1,419 1,264 1,346
1,406 1,498 1,807 1,579 1,440 1,457 1,512 1,637 1,293 1,531 1,698 1,526
1,248 1,492 1,715 1,432 1,939 1,375 1,532 1,684 1,356 1,510 1,593 1,411
1,484 1,469 1,570 1,455 1,599 1,434 1,251 1,812 1,936 1,252 1,823 1,759
1,496 1,600 1,758 1,460 1,390 1,542 1,631 1,553 1,690 1,694 1,652 1,476
1,358 1,673 1,606 1,425 1,555 1,453 1,481 1,380

Вариант 3

29,680 29,578 29,286 29,367 29,231 29,463 29,696 29,740 29,708 29,292
29,404 29,730 29,430 29,398 29,486 29,383 29,481 29,648 29,449 29,425
29,593 29,378 29,583 29,556 29,523 29,379 29,485 29,532 29,477 29,620
29,467 29,593 29,479 29,490 29,357 29,483 29,691 29,404 29,501 29,675
29,307 29,407 29,553 29,513 29,631 29,317 29,617 29,512 29,500 29,224
29,438 29,549 29,251 29,279 29,480 29,211 29,357 29,652 29,507 29,394
29,512 29,247 29,285 29,274 29,461 29,649 29,395 29,749 29,274 29,762
29,428 29,740 29,389 29,597 29,517 29,490 29,527 29,741 29,412 29,633

Вариант 4

37,499 37,451 37,521 37,446 37,613 37,638 37,506 37,491 37,334 37,537
37,495 37,476 37,657 37,421 37,738 37,484 37,367 37,416 37,286 37,501
37,614 37,327 37,509 37,609 37,943 37,665 37,401 37,571 37,419 37,498
37,368 37,646 37,299 37,330 37,563 37,517 37,507 37,281 37,474 37,567
37,478 37,553 37,430 37,444 37,333 37,593 37,578 37,484 37,443 37,425
37,586 37,348 37,432 37,478 37,614 37,353 37,560 37,416 37,785 37,506
37,611 37,312 37,422 37,402 37,652 37,444 37,521 37,462 37,432 37,371
37,510 37,467 37,567 37,767 37,552 37,471 37,389 37,270 37,290 37,610

Вариант 5

7,387 7,450 7,499 7,585 7,670 7,780 7,572 7,803 7,704 7,495 7,418 7,591
7,569 7,396 7,479 7,726 7,498 7,347 7,656 7,553 7,527 7,501 7,520 7,322
7,560 7,269 7,525 7,428 7,495 7,364 7,580 7,364 7,672 7,406 7,337 7,584
7,550 7,565 7,666 7,452 7,303 7,252 7,308 7,242 7,658 7,536 7,547 7,571
7,405 7,325 7,405 7,811 7,351 7,872 7,338 7,277 7,566 7,559 7,545 7,549
7,611 7,387 7,810 7,315 7,572 7,341 7,410 7,691 7,677 7,431 7,410 7,413
7,703 7,305 7,454 7,678 7,329 7,542 7,534 7,724

Вариант 6

53,822 53,803 53,954 53,621 53,559 53,509 53,371 53,505 53,607 53,306
53,727 53,586 53,555 53,294 53,228 53,478 53,344 53,780 53,360 53,464
53,349 53,734 53,765 53,601 53,459 53,734 53,541 53,542 53,624 53,371
53,525 53,323 53,573 53,594 53,476 53,444 53,380 53,290 53,512 53,656
53,572 53,626 53,383 53,416 53,584 53,359 53,276 53,623 53,389 53,481
53,531 53,335 53,471 53,510 53,563 53,368 53,402 53,698 53,554 53,504
53,409 53,726 53,608 53,167 53,215 53,487 53,440 53,685 53,433 53,474
53,692 53,440 53,577 53,691 53,529 53,652 53,113 53,284 53,627 53,628

Вариант 7

43,697 43,524 43,560 43,333 43,175 43,605 43,402 43,492 43,587 43,489
43,696 43,582 43,917 43,573 43,336 43,186 43,421 43,447 43,394 43,806
43,639 43,505 43,215 43,412 43,747 43,718 43,429 43,327 43,507 43,602
43,517 43,659 43,743 43,354 43,335 43,509 43,738 43,768 43,402 43,673
43,610 43,566 43,283 43,597 43,590 43,282 43,328 43,491 43,510 43,570
43,740 43,638 43,616 43,341 43,774 43,775 43,531 43,334 43,342 43,600
43,433 43,585 43,575 43,504 43,438 43,491 43,369 43,383 43,647 43,537
43,538 43,334 43,497 43,415 43,214 43,484 43,990 43,439 43,344 43,685

Вариант 8

44,405 44,446 44,672 44,558 44,394 44,644 44,581 44,469 44,899 44,359
44,398 44,802 44,440 44,473 44,512 44,518 44,597 44,516 44,512 44,498
44,517 44,419 44,520 44,578 44,321 44,598 44,760 44,435 44,618 44,611
44,389 44,533 44,496 44,283 44,526 44,553 44,593 44,840 44,466 44,584
44,639 44,355 44,614 44,737 44,340 44,640 44,225 44,737 44,652 44,559
44,630 44,596 44,494 44,423 44,669 44,324 44,988 44,543 44,392 44,943
44,604 44,441 44,495 44,494 44,663 44,650 44,491 44,513 44,682 44,590
44,551 44,779 44,966 44,253 44,597 44,730 44,783 44,534 44,496 44,577

Вариант 9

23,822 23,803 23,954 23,621 23,559 23,509 23,371 23,505 23,607 23,306
23,727 23,586 23,555 23,294 23,228 23,478 23,344 23,780 23,360 23,464
23,349 23,734 23,765 23,601 23,459 23,734 23,541 23,542 23,624 23,371
23,525 23,323 23,573 23,594 23,476 23,444 23,380 23,290 23,512 23,656
23,572 23,626 23,383 23,416 23,584 23,359 23,276 23,623 23,389 23,481
23,531 23,335 23,471 23,510 23,563 23,368 23,402 23,698 23,554 23,504
23,409 23,726 23,608 23,167 23,215 23,487 23,440 23,685 23,433 23,474
23,692 23,440 23,577 23,691 23,529 23,652 23,113 23,284 23,627 23,628

Вариант 10

29,680 29,578 29,286 29,367 29,231 29,463 29,696 29,449 29,740 29,708
29,292 29,404 29,730 29,430 29,398 29,486 29,383 29,481 29,648 29,425
29,593 29,378 29,583 29,556 29,523 29,379 29,485 29,532 29,477 29,620
29,467 29,593 29,479 29,490 29,357 29,483 29,691 29,404 29,501 29,675
29,307 29,407 29,553 29,513 29,631 29,317 29,617 29,512 29,500 29,224
29,438 29,549 29,251 29,279 29,480 29,211 29,357 29,652 29,507 29,394
29,512 29,247 29,285 29,274 29,461 29,649 29,395 29,749 29,274 29,762
29,428 29,740 29,389 29,597 29,517 29,490 29,527 29,741 29,412 29,633

Вариант 11

32,680 32,578 32,286 32,367 32,231 32,463 32,696 32,740 32,708 32,292
32,404 32,730 32,430 32,398 32,486 32,383 32,481 32,648 32,449 32,425
32,593 32,378 32,583 32,242 32,523 32,379 32,485 32,532 32,477 32,620
32,467 32,593 32,479 32,024 32,357 32,483 32,691 32,404 32,501 32,675
32,307 32,407 32,553 32,513 32,631 32,317 32,617 32,512 32,500 32,224
32,438 32,549 32,251 32,279 32,480 32,211 32,357 32,132 32,507 32,394
32,512 32,247 32,285 32,274 32,461 32,649 32,395 32,749 32,274 32,762
32,428 32,740 32,389 32,597 32,517 32,490 32,527 32,741 32,896 32,633

Вариант 12

45,387 45,450 45,113 45,585 45,670 45,780 45,572 45,803 45,704 45,495
45,418 45,591 45,569 45,396 45,479 45,726 45,498 45,347 45,656 45,553
45,527 45,501 45,520 45,322 45,560 45,269 45,525 45,428 45,495 45,364
45,580 45,577 45,206 45,406 45,337 45,584 45,550 45,298 45,666 45,452
45,303 45,252 45,308 45,242 45,658 45,536 45,547 45,571 45,405 45,325
45,405 45,811 45,351 45,391 45,338 45,277 45,566 45,559 45,545 45,549
45,611 45,670 45,810 45,315 45,572 45,341 45,410 45,484 45,677 45,431
45,410 45,763 45,703 45,305 45,454 45,678 45,329 45,542 45,534 45,856

Вариант 13

142,197 142,558 142,516 142,632 142,373 142,437 142,319 142,275 142,445
142,271 142,469 142,214 142,563 142,761 142,385 142,359 142,192 142,518
142,563 142,532 142,300 142,307 142,544 142,936 142,525 142,397 142,712
142,313 142,797 142,116 142,567 142,688 142,766 142,781 142,454 142,636
142,475 142,755 142,356 142,391 142,305 142,793 142,570 142,237 142,478
142,715 142,605 142,289 142,595 142,544 142,398 142,661 142,583 142,373
142,534 142,553 142,556 142,499 142,566 142,513 142,398 142,291 142,461
142,479 142,701 142,596 142,471 142,377 142,456 142,619 142,207 142,288
142,396 142,490 142,575 142,670 142,578 142,677 142,756 142,747

Вариант 14

1,166 1,450 1,499 1,585 1,670 1,780 1,572 1,803 1,704 1,495 1,418 1,591
1,569 1,396 1,479 1,726 1,498 1,347 1,656 1,553 1,527 1,501 1,520 1,741
1,560 1,269 1,525 1,428 1,495 1,364 1,580 1,364 1,672 1,406 1,337 1,584
1,262 1,565 1,666 1,452 1,303 1,252 1,308 1,242 1,658 1,536 1,547 1,571
1,453 1,325 1,405 1,811 1,351 1,358 1,338 1,277 1,566 1,559 1,545 1,549
1,611 1,836 1,810 1,549 1,572 1,341 1,410 1,691 1,645 1,431 1,410 1,413
1,703 1,305 1,454 1,678 1,932 1,542 1,534 1,724

Вариант 15

105,174 105,828 105,284 105,657 105,184 105,488 105,585 105,567 105,784
105,570 105,871 105,625 105,592 105,262 105,420 105,797 105,602 105,609
105,675 105,267 105,669 105,516 105,403 105,603 105,351 105,645 105,387
105,336 105,296 105,377 105,717 105,749 105,455 105,714 105,550 105,779
105,383 105,568 105,314 105,523 105,758 105,572 105,776 105,460 105,992
105,340 105,574 105,731 105,243 105,575 105,471 105,376 105,685 105,403
105,254 105,761 105,438 105,441 105,468 105,488 105,670 105,379 105,384
105,521 105,273 105,524 105,466 105,566 105,112 105,140 105,361 105,506
105,603 105,357 105,207 105,649 105,406 105,473 105,468 105,649

Вариант 16

54,405 54,446 54,672 54,558 54,394 54,644 54,581 54,469 54,899 54,359
54,398 54,802 54,440 54,473 54,512 54,518 54,597 54,359 54,512 54,498
54,517 54,160 54,520 54,578 54,321 54,598 54,760 54,435 54,618 54,611
54,389 54,533 54,496 54,283 54,526 54,553 54,593 54,840 54,466 54,584
54,639 54,355 54,614 54,737 54,340 54,259 54,225 54,737 54,658 54,559
54,630 54,757 54,494 54,458 54,669 54,324 54,988 54,543 54,392 54,943
54,604 54,441 54,495 54,494 54,663 54,857 54,491 54,513 54,682 54,957
54,551 54,779 54,966 54,253 54,597 54,730 54,783 54,534 54,496 54,577

Вариант 17

73,822 73,803 73,954 73,621 73,559 73,509 73,371 73,505 73,607 73,306
73,727 73,126 73,555 73,294 73,228 73,478 73,344 73,780 73,360 73,464
73,349 73,734 73,765 73,601 73,459 73,734 73,541 73,542 73,624 73,371
73,525 73,323 73,573 73,594 73,476 73,444 73,219 73,290 73,512 73,656
73,572 73,195 73,383 73,416 73,584 73,359 73,276 73,623 73,389 73,481
73,531 73,500 73,471 73,510 73,563 73,368 73,593 73,698 73,313 73,504
73,409 73,726 73,608 73,167 73,406 73,487 73,440 73,685 73,687 73,474
73,692 73,440 73,780 73,691 73,529 73,652 73,113 73,874 73,627 73,628

Вариант 18

42,116 42,219 42,322 42,425 42,528 42,631 42,734 42,837 42,218 42,320
42,424 42,328 42,321 42,427 42,507 42,531 42,602 42,722 42,709 42,836
42,909 42,319 42,599 42,117 42,900 42,400 42,632 42,566 42,538 42,599
42,368 42,901 42,478 42,869 42,277 42,544 42,449 42,369 42,357 42,158
42,279 42,189 42,318 42,934 42,555 42,807 42,689 42,333 42,888 42,547
42,681 42,307 42,390 42,648 42,929 42,142 42,241 42,297 42,444 42,682
42,804 42,399 42,666 42,895 42,709 42,649 42,603 42,877 42,629 42,364
42,932 42,851 42,387 42,461 42,309 42,687 42,803 42,688 42,348 42,686

Вариант 19

3,822 3,803 3,954 3,621 3,559 3,509 3,371 3,505 3,607 3,306 3,727 3,586
3,555 3,294 3,228 3,478 3,344 3,780 3,360 3,464 3,349 3,734 3,765 3,601
3,459 3,734 3,541 3,542 3,624 3,371 3,525 3,323 3,573 3,594 3,476 3,444
3,380 3,290 3,512 3,656 3,572 3,626 3,383 3,416 3,584 3,359 3,276 3,623
3,389 3,481 3,531 3,335 3,471 3,510 3,563 3,368 3,402 3,698 3,554 3,504
3,409 3,726 3,608 3,167 3,215 3,487 3,440 3,685 3,433 3,474 3,692 3,440
3,577 3,691 3,529 3,652 3,113 3,284 3,627 3,628

Вариант 20

17,397 17,450 17,499 17,585 17,670 17,780 17,572 17,803 17,704 17,495
17,418 17,591 17,569 17,396 17,479 17,726 17,498 17,347 17,656 17,553
17,547 17,501 17,520 17,322 17,560 17,269 17,525 17,428 17,495 17,364
17,580 17,364 17,672 17,425 17,337 17,584 17,550 17,595 17,666 17,452
17,303 17,252 17,308 17,242 17,658 17,536 17,557 17,971 17,405 17,325
17,405 17,801 17,351 17,872 17,338 17,277 17,566 17,557 17,545 17,549
17,611 17,387 17,810 17,355 17,572 17,341 17,410 17,691 17,677 17,431
17,410 17,913 17,703 17,305 17,454 17,679 17,329 17,542 17,534 17,724

Вариант 21

77,317 77,410 77,499 77,535 77,640 77,780 77,582 77,803 77,708 77,490
77,438 77,531 77,549 77,396 77,499 77,726 77,498 77,347 77,653 77,503
77,529 77,501 77,520 77,392 77,560 77,269 77,525 77,428 77,405 77,374
77,880 77,364 77,672 77,406 77,387 77,594 77,550 77,565 77,606 77,252
77,333 77,252 77,308 77,272 77,678 77,536 77,547 77,570 77,405 77,335
77,435 77,810 77,351 77,882 77,338 77,277 77,566 77,559 77,845 77,589
77,621 77,387 77,800 77,315 77,592 77,341 77,410 77,691 77,687 77,436
77,490 77,413 77,703 77,305 77,454 77,678 77,329 77,542 77,504 77,723

Вариант 22

25,405 25,664 25,415 25,479 25,581 25,253 25,239 25,631 25,520 25,699
25,309 25,337 25,439 25,423 25,635 25,373 25,320 25,589 25,584 25,405
25,597 25,396 25,527 25,796 25,888 25,272 25,113 25,694 25,561 25,362
25,691 25,246 25,445 25,630 25,487 25,446 25,717 25,333 25,363 25,777
25,680 25,222 25,451 25,856 25,491 25,490 25,308 25,684 25,783 25,329
25,769 25,353 25,444 25,402 25,601 25,564 25,402 25,548 25,573 25,286
25,132 25,384 25,701 25,749 25,843 25,452 25,614 25,359 25,581 25,607
25,485 25,182 25,487 25,288 25,684 25,629 25,579 25,484 25,654 25,599

Вариант 23

140,997 140,558 140,516 140,632 140,373 140,437 140,319 140,215 140,499
140,271 140,469 140,214 140,563 140,761 140,385 140,359 140,192 140,518
140,563 140,532 140,300 140,307 140,504 140,936 140,525 140,397 140,712
140,493 140,707 140,116 140,567 140,688 140,766 140,781 140,454 140,636
140,475 140,755 140,356 140,391 140,305 140,793 140,570 140,237 140,478
140,340 140,574 140,731 140,243 140,575 140,471 140,376 140,685 140,403
140,254 140,761 140,439 140,441 140,468 140,488 140,690 140,379 140,384
140,521 140,273 140,524 140,466 140,566 140,112 140,140 140,361 140,506
140,603 140,357 140,207 140,649 140,406 140,473 140,468 140,649

Вариант 24

75,555 75,664 75,495 75,172 75,281 75,273 75,299 75,601 75,620 75,669
75,398 75,337 75,439 75,423 75,635 75,373 75,390 75,589 75,584 75,405
75,737 75,396 75,520 75,796 75,988 75,372 75,193 75,994 75,521 75,362
75,191 75,246 75,445 75,630 75,487 75,446 75,717 75,333 75,263 75,767
75,690 75,223 75,491 75,856 75,421 75,495 75,308 75,604 75,783 75,820
75,769 75,353 75,444 75,402 75,601 75,504 75,402 75,548 75,573 75,266
75,172 75,384 75,701 75,749 75,403 75,452 75,608 75,359 75,510 75,669
75,465 75,182 75,407 75,258 75,614 75,829 75,570 75,404 75,624 75,596

Вариант 25

13,822 13,803 13,954 13,621 13,559 13,509 13,371 13,505 13,607 13,306
13,727 13,586 13,555 13,294 13,228 13,478 13,344 13,780 13,360 13,464
13,349 13,734 13,765 13,601 13,459 13,734 13,541 13,542 13,624 13,371
13,525 13,323 13,573 13,594 13,476 13,444 13,380 13,290 13,512 13,656
13,303 13,252 13,308 13,242 13,658 13,536 13,547 13,571 13,453 13,325
13,405 13,811 13,351 13,358 13,338 13,277 13,566 13,559 13,545 13,549
13,611 13,836 13,810 13,549 13,572 13,341 13,410 13,691 13,645 13,431
13,410 13,413 13,703 13,305 13,454 13,678 13,932 13,542 13,534 13,724

Вариант 26

12,116 12,219 12,322 12,425 12,528 12,631 12,734 12,837 12,218 12,320
12,424 12,328 12,321 12,427 12,507 12,531 12,602 12,722 12,709 12,836
12,909 12,319 12,599 12,117 12,900 12,400 12,632 12,566 12,538 12,599
12,368 12,901 12,478 12,869 12,277 12,544 12,449 12,369 12,357 12,158
12,279 12,189 12,318 12,934 12,555 12,807 12,689 12,333 12,888 12,547
12,681 12,307 12,390 12,648 12,929 12,142 12,241 12,297 12,444 12,682
12,804 12,399 12,666 12,895 12,709 12,649 12,603 12,877 12,629 12,364
12,932 12,851 12,387 12,461 12,309 12,687 12,803 12,688 12,348 12,686

Вариант 27

17,489 17,451 17,521 17,446 17,613 17,638 17,506 17,491 17,334 17,537
17,495 17,476 17,657 17,421 17,738 17,484 17,367 17,416 17,286 17,501
17,614 17,329 17,509 17,609 17,943 17,666 17,401 17,571 17,419 17,498
17,368 17,646 17,299 17,330 17,563 17,517 17,507 17,281 17,474 17,567
17,478 17,553 17,430 17,444 17,333 17,593 17,578 17,484 17,443 17,425
17,586 17,348 17,432 17,478 17,694 17,353 17,560 17,416 17,785 17,506
17,611 17,312 17,422 17,402 17,652 17,444 17,521 17,462 17,432 17,371
17,510 17,467 17,567 17,767 17,552 17,471 17,389 17,270 17,290 17,610

Вариант 28

33,349 33,734 33,765 33,601 33,459 33,734 33,541 33,542 33,624 33,371
33,525 33,323 33,573 33,594 33,476 33,444 33,380 33,290 33,512 33,656
33,572 33,626 33,383 33,416 33,584 33,359 33,276 33,623 33,389 33,481
33,822 33,803 33,954 33,621 33,559 33,509 33,371 33,505 33,607 33,306
33,727 33,586 33,555 33,294 33,228 33,478 33,344 33,780 33,360 33,464
33,531 33,335 33,471 33,510 33,563 33,368 33,402 33,698 33,554 33,504
33,409 33,726 33,608 33,167 33,215 33,487 33,440 33,685 33,433 33,474
33,692 33,440 33,577 33,691 33,529 33,652 33,113 33,284 33,627 33,628

Вариант 29

19,405 19,811 19,351 19,358 19,338 19,277 19,566 19,999 19,545 19,549
19,611 19,836 19,810 19,549 19,572 19,341 19,410 19,691 19,645 19,431
19,410 19,813 19,703 19,305 19,454 19,678 19,932 19,542 19,534 19,724
19,166 19,450 19,499 19,585 19,670 19,780 19,572 19,803 19,704 19,495
19,527 19,501 19,520 19,741 19,560 19,269 19,525 19,428 19,495 19,364
19,580 19,364 19,672 19,406 19,837 19,584 19,262 19,565 19,666 19,452
19,903 19,252 19,308 19,242 19,658 19,536 19,547 19,571 19,953 19,325
19,418 19,591 19,569 19,396 19,479 19,726 19,498 19,347 19,656 19,553

Вариант 30

10,493 10,707 10,116 10,567 10,688 10,766 10,781 10,454 10,636 10,475
10,755 10,356 10,391 10,305 10,793 10,570 10,237 10,478 10,340 10,574
10,731 10,243 10,575 10,471 10,376 10,685 10,403 10,603 10,357 10,207
10,649 10,406 10,473 10,468 10,649 10,997 10,558 10,516 10,632 10,373
10,437 10,319 10,215 10,499 10,271 10,469 10,214 10,563 10,761 10,385
10,359 10,192 10,518 10,563 10,532 10,300 10,307 10,504 10,936 10,525
10,397 10,712 10,254 10,761 10,439 10,441 10,468 10,488 10,690 10,379
10,384 10,521 10,273 10,524 10,466 10,566 10,112 10,140 10,361 10,506

**ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО РАСЧЁТУ
БИНОМИНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В СРЕДЕ MATHCAD И MICROSOFT EXEL**

Построить биномиальное распределение в среде Mathcad для серии из 20 независимых испытаний с вероятностью успеха p . Вероятность p представлена в табл. Г1. Построить графики распределения и функций распределения. Для p найти значение k , для которого величина $p(\xi = k)$ максимальна. Построить биномиальное распределение в среде Microsoft Excel для n успешных испытаний n_n независимых испытаний при вероятности успеха p . Исходные данные по вариантам приведены в табл. Г2.

Г1. Вероятность успеха p

№ варианта	вероятность p	№ варианта	вероятность p
1	0,6	16	0,61
2	0,85	17	0,36
3	0,14	18	0,22
4	0,4	19	0,56
5	0,6	20	0,62
6	0,42	21	0,21
7	0,9	22	0,33
8	0,66	23	0,46
9	0,89	24	0,45
10	0,63	25	0,26
11	0,68	26	0,9
12	0,1	27	0,1
13	0,67	28	0,2
14	0,36	29	0,65
15	0,22	30	0,7

Г2. Исходные данные

№ варианта	n	$n_{\text{н}}$	<i>интегральная</i>	№ варианта	n	$n_{\text{н}}$	<i>интегральная</i>
1	16	26	0,23	16	17	42	0,44
2	5	10	0,63	17	2	5	0,78
3	2	5	0,66	18	6	51	0,69
4	6	165	0,4	19	64	156	0,55
5	10	16	0,6	20	4	645	0,432
6	14	15	0,69	21	3	33	0,358
7	4	10	0,66	22	5	10	0,11
8	12	22	0,9	23	23	230	0,22
9	10	20	0,1	24	27	44	0,65
10	11	15	0,7	25	6	41	0,65
11	12	18	0,16	26	8	10	0,41
12	16	50	0,36	27	9	21	0,14
13	20	22	0,23	28	10	156	0,18
14	12	44	0,05	29	4	11	0,9
15	5	55	0,56	30	4	55	0,1

**ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО РАСЧЁТУ
ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
В СРЕДЕ MICROSOFT EXEL**

Построить гипергеометрическое распределение в среде Microsoft Excel. Исходные данные по вариантам приведены в табл. Д1.

Д1. Исходные данные

№ варианта	Число успехов в выборке	Размер выборки	Число успехов в совокупности	Размер совокупности	№ варианта	Число успехов в выборке	Размер выборки	Число успехов в совокупности	Размер совокупности
1	5	50	14	58	16	4	24	15	33
2	14	26	30	66	17	17	25	29	49
3	2	6	10	30	18	4	14	35	55
4	1	5	10	15	19	3	5	15	25
5	3	25	5	35	20	2	12	21	41
6	3	41	25	70	21	1	10	22	33
7	2	22	41	74	22	1	5	8	10
8	4	14	40	50	23	5	6	16	25
9	5	18	10	40	24	8	18	55	82
10	8	19	4	45	25	9	11	55	100
11	9	23	17	90	26	4	9	18	29
12	5	55	18	105	27	2	82	100	152
13	3	20	58	150	28	2	6	82	105
14	2	12	21	120	29	3	35	45	55
15	9	19	81	95	30	1	5	15	85

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ПОДБОРУ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ И ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Сравнить результат подбора эмпирической формулы построением линии тренда в среде Microsoft Excel на одной координатной сетке. Исходные данные по вариантам приведены в табл. Е1.

Е1. Исходные данные

Вариант 1	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,5	0,6	0,7	0,9	1,2	1,4	2	3
Y	10,465	7,961	6,318	4,333	2,815	2,234	1,268	0,712
Вариант 2	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	3,7	4,2	5	6	7	7,5	10
Y	5,8	4,192	3,967	3,7	3,467	3,3	3,233	3
Вариант 3	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,5	1,5	2	4	7	10	13	17
Y	4,921	8,216	9,079	11,159	12,838	13,908	14,695	15,500
Вариант 4	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,7	0,9	1,2	1,3	1,5	1,6	1,7	1,8
Y	2,727	4,180	6,817	7,810	9,962	11,117	12,323	13,581
Вариант 5	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2,3	4	6,3	7,9	9,2	12,8	13,456	17,567
Y	2,986	6,254	9,010	10,246	11,006	12,437	12,628	13,538
Вариант 6	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,1	0,5	0,8	1	1,3	1,4	1,7	1,8
Y	1,774	1,098	0,766	0,602	0,420	0,373	0,260	0,231
Вариант 7	1	2	3	4	5	6	7	8
X	3,6	4	5,2	7,6	9	10,5	14	15
Y	19,944	18,750	16,269	13,658	12,778	12,095	11,071	10,867
Вариант 8	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-3	-2	-1	0,5	3	7	10	12
Y	0,933	1,140	1,392	1,879	3,098	6,894	12,561	18,739
Вариант 9	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,7	1,1	1,7	2	3	4	5	7
Y	10,363	6,303	3,905	3,266	2,091	1,523	1,192	0,823

Вариант 10	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,3	0,5	0,7	1,2	1,8	2,4	2,9	3,4
Y	-9,846	-3,971	-0,102	6,097	10,760	14,068	16,244	18,073
Вариант 11	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1	2	3,5	4,7	6	7,4	10	12
Y	45,200	25,200	16,629	13,711	11,867	10,605	9,200	8,533
Вариант 12	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	3	4	5,2	6,3	7,4	8,5	9,6
Y	3,644	4,919	6,640	9,518	13,239	18,415	25,614	35,629
Вариант 13	1	2	3	4	5	6	7	8
X	5	6	7,8	9	12	13,7	15	17,3
Y	2,876	2,809	2,735	2,702	2,650	2,631	2,619	2,603
Вариант 14	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0,3	0,5	0,8	1	1,5	1,9	2,3	4
Y	3,000	2,600	2,375	2,300	2,200	2,158	2,130	2,075
Вариант 15	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2,7	4,3	4,8	6	7,4	8,9	12	13,5
Y	6,490	7,188	7,353	7,688	8,002	8,279	8,727	8,904
Вариант 16	1	2	3	4	5	6	7	8
X	2	3,7	4,2	5	6	7	7,5	10
Y	5,800	4,192	3,967	3,700	3,467	3,300	3,233	3,000
Вариант 17	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-7	-5	-1	0,5	3	7	10	12
Y	4,028	3,297	2,210	1,902	1,482	0,993	0,736	0,602
Вариант 18	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	27,370	11,698	8,812	7,648	7,025	6,638	6,374	6,184
Вариант 19	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-0,5	0	0,3	0,7	1,4	1,9	2,4	3
Y	2,726	3,5	4,066	4,967	7,048	9,05	11,62	15,686
Вариант 20	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,5	4
Y	0	3,834	4,141	4,427	4,696	4,950	5,534	7

Вариант 21	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	1,5	2
Y	19,2	10,8	4,8	1,2	0,3	0	2,7	4,8
Вариант 22	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-3	-2,8	-2,5	-2	-1,8	-1	-0,8	0
Y	7,2	6,272	5	3,2	2,592	0,8	0,512	0
Вариант 23	1	2	3	4	5	6	7	8
X	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Y	0	2,4	2,94	3-39	3,79	4,16	4,49	4,8
Вариант 24	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,2
Y	0,012	0,02	0,041	0,1	0,316	1,6	25,6	1000
Вариант 25	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-2	-1,5	-1	-0,8	-0,5	0	0,3	0,5
Y	12,4	7	3,1	1,984	0,775	0	0,279	0,775
Вариант 26	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
Y	-16	-6,75	-2	-0,25	0	0,25	2	6,75
Вариант 27	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	1	2
Y	0,33	0,48	0,75	1,33	3	12	3	0,75
Вариант 28	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0	0,5	1
Y	54	31,25	16	6,75	-2	0	-0,25	-2
Вариант 29	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5
Вариант 30	1	2	3	4	5	6	7	8
X	-10	-8	-6	-4	-2	-1	1	2
Y	2,36	2,11	1,7	0,86	1,64	-6,64	13,36	8,36

**ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
ПО ПЛАНИРОВАНИЮ ПОЛНОГО
ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Требуется установить влияние заднего угла α , переднего угла γ , главного угла в плане φ , вспомогательного угла в плане φ_1 , радиуса при вершине r на стойкость T токарного резца. Основные уровни факторов: $\alpha = 6^\circ - 10^\circ$, $\gamma = 2^\circ - 9^\circ$, $\varphi = 39^\circ - 45^\circ$, $\varphi_1 = 20^\circ - 25^\circ$, $r = 0,2 - 0,8$. Исходные данные по вариантам приведены в табл. Ж1.

Ж1. Исходные данные

№ варианта	Значение стойкости резцов, полученные в результате эксперимента, T (мин)								Значение параметра оптимизации U_n в n -ом опыте			
1	29,5	30,1	28,8	27,0	30,0	28,5	29,0	31,2	24,1	23,6	23,9	24,0
2	30,5	31,02	30,0	29,9	32,1	29,8	32,6	30,1	25,0	23,9	23,8	29,0
3	35,1	35,4	35,6	35,7	35,0	35,46	35,74	35,8	26,1	26,0	26,58	26,5
4	27,1	28,0	29,0	27,89	27,9	27,8	28,5	30,1	27,9	28,6	29,1	29,3
5	32,1	32,0	32,9	32,5	32,4	33,0	32,7	32,5	26,6	26,5	26,8	26,9
6	27,6	27,8	27,9	28,0	28,1	27,5	27,2	27,3	24,5	26,6	25,1	26,8
7	28,9	29,2	29,1	28,7	28,4	29,0	30,1	31,0	25,6	25,7	25,1	25,3
8	35,6	35,7	35,0	35,4	35,2	35,9	35,2	35,4	30,3	30,4	30,5	30,7
9	33,3	33,5	33,6	33,8	33,7	33,1	33,2	33,8	23,3	23,5	23,6	23,4
10	34,5	34,4	34,3	34,6	33,8	33,0	33,9	33,1	28,3	28,8	28,1	28,5
11	35,3	35,6	35,9	35,4	35,6	35,4	35,4	35,8	30,3	30,1	30,5	30,6
12	25,3	25,6	25,6	25,4	25,7	25,9	25,0	26,0	26,0	26,1	26,8	25,8
13	40,5	40,4	40,1	40,0	40,6	40,9	40,8	40,5	39,1	38,89	38,4	38,1
14	37,1	37,5	37,6	37,6	37,1	37,0	37,2	37,4	29,9	30,1	30,0	29,8
15	37,2	38,0	38,1	38,6	38,1	37,9	37,6	39,0	30,5	30,4	30,6	30,7
16	28,4	28,3	28,1	28,6	28,7	28,9	28,8	28,5	27,3	27,6	27,5	27,4
17	32,2	32,6	32,4	32,7	32,6	32,9	33,0	32,5	30,3	31,0	30,5	30,1
18	25,3	26,0	25,8	25,6	25,9	26,1	26,2	25,7	27,0	26,9	26,8	30,0
19	33,6	36,4	36,1	35,0	34,9	33,8	35,1	36,3	30,3	30,5	30,1	28,0
20	25,0	24,8	24,9	25,1	25,2	25,8	25,6	27,0	28,1	28,0	30,1	33,0
21	38,0	38,1	38,6	38,2	38,3	39,0	41,0	37,0	33,0	36,0	34,0	34,6
22	22,0	22,6	22,4	22,9	22,4	23,0	22,9	22,4	25,0	24,9	25,1	25,8
23	37,0	37,5	37,3	36,8	36,9	37,4	37,3	37,7	28,0	29,6	28,5	25,6
24	24,0	24,4	24,6	24,1	24,6	24,8	24,9	24,6	20,1	20,6	22,0	23,0
25	26,6	26,5	26,4	26,6	26,8	26,9	26,1	26,3	25,0	25,1	24,7	24,6
26	28,8	28,6	28,9	28,4	28,9	28,4	28,5	28,2	27,6	27,0	26,6	26,9
27	29,9	29,1	29,0	29,3	29,3	29,4	29,6	29,2	29,0	28,4	28,6	29,1
28	34,6	34,8	34,5	34,6	34,1	34,3	34,2	34,6	33,0	32,7	33,1	33,5
29	44,1	44,5	44,6	44,0	44,2	44,3	44,4	45,0	39,8	40,0	40,3	40,5
30	26,6	26,3	26,2	26,4	25,9	26,4	26,8	26,7	25,0	25,6	26,0	26,9

**ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ
«ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ»**

№ варианта	Содержание задачи
1	<p>Вентиляционные трубы есть во всех жилых и производственных зданиях. Через них выходит наружу отработанный воздух. Однако зимой они обмерзают, на внутренней поверхности образуется наледь от конденсирующейся влаги отходящего воздуха, которая может перекрыть всё сечение трубы. Придумано множество механических устройств удаляющих наледь, но все они ненадёжны. Они сами обмерзают, требуют обслуживания. Нужны новые идеи</p>
2	<p>При монтаже панельных домов приходится соединять трубы, заранее заложенных в отдельных элементах. Проще всего соединять пайкой, но из-за неточностей монтажа зазоры между соединяемыми трубами могут достигать нескольких сантиметров, а для пайки нужны малые капиллярные зазоры, чтобы в них удерживался припой. Как быть?</p>
3	<p>Одно из слабых мест в автомобиле – аккумулятор. Если он немного «подсел», то автомобиль не завести в первый момент: аккумулятор должен отдать большую энергию, чтобы повернуть тяжёлый мотор, при этом его напряжение падает настолько, что он не в состоянии дать искру для зажигания. Как быть?</p>
4	<p>Энергетические установки окутаны хитросплетением труб и трубочек, каждая из которых периодически проверяется на герметичность. Для этого в трубу подают гелий и к каждому сварному шву и соединению прикрепляют датчик специального газоанализатора. Метод продолжительный во времени и малоэффективный. Приходится наугад размещать датчики во всех местах в поисках утечки гелия. Кроме того гелий – дорогой газ, хранится в громоздких баллонах, их нужно перемещать и т.д. Хорошо бы было использовать воздух, но как определить место его выхода, ведь кругом тоже воздух</p>
5	<p>Необходимо изготовить для лаборатории керамический сосуд, в стенках которого имеются каналы сложной формы. Для этого ещё при формировании в изделие вкладывают проволоку нужного диаметра, которую после обжига вытягивают. Но вот понадобилось получить в стенках тонкие капиллярные каналы диаметром 0,01 мм. При удалении такой тонкой проволоки, она рвется. Как быть?</p>
6	<p>При изготовлении пластмассовых деталей литьём из термопластов остаётся много отходов, т.е. пластмассы, заполнявших центральный литник и литниковые каналы. Это ресурс который можно использовать. Как?</p>
7	<p>Из под кожуха шлифовального станка, установленного в помещении, выбивается тончайшая пыль. Частицы так малы, что часами висят в воздухе, дышать ими очень вредно. Ни один фильтр не удерживает эту пыль. Нужно очистить воздух от пыли. Как это сделать?</p>
8	<p>В трубе течёт вода. Но имеются отверстия, сквозь которые бьют струи воды. Нужно устранить течь, но по производственным причинам нельзя отключать магистраль. Заплату приваривают под давлением воды. Сварка идёт нормально, пока не доходит до самого последнего участка сварного шва. Когда происходит попытка его заварить, струя воды «выдувает» расплавленный металл и устранить течь не получается. Как быть?</p>

№ варианта	Содержание задачи
9	Турбореактивные двигатели плохо переносят перевозку железнодорожным транспортом. Толчки на рельсовых стыках могут привести к непоправимому повреждению подшипников качения, на которые опирается ротор. Чтобы этого избежать, ротор необходимо всё время вращать, хотя бы с небольшой угловой скоростью. Как быть?
10	При перевозке сжиженных газов в сосудах Дьюара из-за плескания при толчках повышается вскипание этих газов. Известны способы устранения плескания. Например, в русских деревнях на поверхности воды в вёдра клали фанерные кружки, и вёдра несли на коромыслах без опасения выплеснуть воду. Но у сосуда очень узкое горлышко. Было предложено насыпать на поверхность жидкого газа пенопластовые шарики. Однако это привело к увеличению испарения: шарики при толчках окунались, выскакивали вверх, вынося жидкость. Как быть?
11	На производстве для зачистки деталей используют вращающийся фанерный круг, к которому маленькими гвоздями прибит кусок абразивной бумаги. Всякий раз, когда бумага износится, необходимо останавливать станок, вытаскивать гвозди, забивать новые. Как ускорить работу?
12	При изготовлении стальных труб очень важно отрезать от слитка заготовку точно заданного веса – тогда все трубы будут иметь одинаковую длину. А слитки имеют разные размеры и форму. Как быть?
13	Зажигание топлива в цилиндре двигателя внутреннего сгорания зависит от того, насколько оно хорошо распылено, смешано с воздухом, и от эффективности ионизации и нагрева смеси просакиваемой при зажигании электрической искрой. Как можно улучшить зажигание за счёт имеющихся ресурсов?
14	Для экономного полива воду нужно очень мелко распылить. Но вылетающие из распылителя мельчайшие капельки слипаются друг с другом, образуя капли побольше, что нежелательно. Как быть?
15	Мелкие детали из керамики или цветных металлов при шлифовке приклеивают к столу шлифовального станка при помощи специальной смеси канифоли и парафина. Это дорого и трудоёмко. Чем заменить приклейку?
16	При ремонте высоковольтных линий передач, иногда возникают неопределённые ситуации, вызывающие тяжёлые последствия. Скажем, ремонтник при включении тока (после устранения неисправностей) забыл одеть резиновые перчатки. Или другой рабочий не видя работающего включил ток и т.д. Необходимо предложить эффективный способ защиты от напряжения электрического тока, такой, чтобы даже при желании рабочий не мог притронуться к проводу под током
17	Существуют вибрационные машины с дисбалансными вибраторами, на валу электродвигателя посажен дисбаланс (маховик со смещённым к краю центром тяжести). Чем больше добавочный груз, и чем дальше его центр тяжести от оси вращения, тем больше момент инерции несбалансированной массы маховика, и тем выше эффективность работы вибратора, но тем труднее раскрутить маховик. Приходится ставить электродвигатель, мощность которого превышает во много раз требуемую для работы. Конструкция маховика: полый цилиндр с расположенным внутри дисбалансным грузом. Как обеспечить высокоэффективную работу вибратора при минимальной мощности электродвигателя?

№ варианта	Содержание задачи
18	Одно из наиболее опасных и катастрофичных разрушений нефтепроводов – быстрое развитие гигантской трещины вдоль трубы. Длина трещины может достигать десятков километров, а её скорость распространения сотен метров в секунду. Причины возникновения и развития таких трещин пока плохо известны
19	При бурении глубоких скважин надо знать состояние зубьев инструмента, вгрызающихся в породу (не сломался ли зуб). Не зная этого приходится работать в слепую, время от времени заменяя на всякий случай инструмент на новый, очень трудоёмкая операция. Нужна идея простого способа контроля состояния инструмента
20	У двигателей внутреннего сгорания цилиндр изнашивается неравномерно. Поршень движется обратно – поступательно и превращает цилиндр в эллиптическую бочку. Ремонт дорог и требует много времени. Найти способ уменьшения неодинакового износа цилиндра
21	Изготовлен прибор, которому предстоит работать в жидкой кислой среде. Для предохранения прибора от воздействия кислоты на металлическую поверхность прибора нанесено полимерное покрытие. Как проверить, нет ли в этом покрытии сквозных микроотверстий. Известен способ, по которому проверяемая поверхность покрывается люминофорной или люминесцентной взвесью. После промывки взвесь остаётся в трещинах, если они есть. Но этот способ в данном случае не подходит, так как он обнаруживает любые трещины, в том числе и несквозные, а нужно обнаружить только сквозные. Нужен способ, который позволял сразу определять приборы с непригодным покрытием
22	Необходимо у керамического сосуда сделать у самого края горловины несколько отверстий. Пробовали просверлить их, но материал оказался очень хрупким. И из 3-х сосудов 2 раскололось. Нельзя рисковать последним, но отверстия нужно сделать, как быть?
23	Во время работы экскаватора на его ковш налипают грунт. Ёмкость ковша используется неэффективно. Как сделать, чтобы грунт не налипал?
24	При измельчении мяса выжимается сок, на нож наматывается плёнка. Если ослабить давление ножа на мясо, то сок не выжимается, но и мясо не перемалывается. Как быть?
25	Процесс сверх точной шлифовальной обработки включает две фазы: снятие припуска и выглаживание детали до получения однородности и высокой точности поверхности. Для первой фазы необходим мягкий брусок с относительно крупным зерном, а для второй – твёрдый брусок с мелким зерном. Совместить эти требования в одном бруске, найти оптимальную структуру не удаётся. А замена брусков в процессе обработки недопустима – теряется точность обработки. Как быть?
26	При строительстве нефте- и газопроводов нужно быстро определить качество сварных швов. Старый способ рентгенографического контроля требует сутки на звено труб длиной 36 м, а за сутки успевают сварить сотни километров. Новая компактная высокопроизводительная ультразвуковая установка удобна в обращении. Нужно прижать к шву щуп с шариком на конце и провести по всей длине, как шариковой ручкой по бумаге, но безошибочные показания будут в том случае, если шарик ни разу не оторвётся от поверхности шва, т.е., между шариком и швом не будет прослойки воздуха. Поверхность шва очень неровная. В зарубежных установках для этого шов поливают водой, несколько литров на один шов. В наших условиях это не подходит, установка станет громоздкой из-за бака с водой, да и вода зимой замерзает. Как быть?

№ варианта	Содержание задачи
27	В крупу иногда попадают личинки и яйца вредителей, естественно их нужно обезвредить до расфасовки крупы. Лучшее средство нагрев до 65 градусов, но выше крупу нагревать нельзя. Обеспечить же точную температуру при высокой производительности никак не удавалось: тонкий слой на противне не прогревался или подгорал снизу, а тонкий слой слишком снижал производительность установки. Пробовали применять и другие способы нагрева больших объёмов крупы, в том числе и продувку горячим воздухом слоя крупы через сито. Всё равно крупа портилась из-за местного перегрева. Нужен надёжный и производительный способ
28	Воздушная линия электропередачи проходит через местность, в которой иногда сильно повышается температура. При этом от теплового нагрева провода удлиняются и опасно провисают. Известны различного рода натяжные компенсаторы, но они усложняют строительство и эксплуатацию ЛЭП. Предложено сделать опоры ЛЭП выше на 5 – 7 метров, однако это резко повысило стоимость сооружения линии. Как быть?
29	Судовые краны отличаются от наземных тем, что они не имеют твёрдой опоры и при выносе тяжёлого груза за борт, могут опрокинуться вместе с судном. Поэтому нужна какая-то хитрая система. Когда стрела крана поворачивается и тяжёлый груз всё дальше отходит от центра судна, в это же время должна быть возвратная масса противовеса на противоположном борту. При обратном движении груза противовес должен уменьшаться, т.е. противовес не должен быть постоянным, он должен то увеличиваться, то уменьшаться. Как быть?
30	Выхлопные трубы тяжёлых автомобилей имеют большой диаметр, поэтому их надо закрывать колпаком во время стоянки для предотвращения попадания в них загрязнений и посторонних предметов. Съёмные крышки быстро теряются и неудобны в обращении, откидывающиеся под действием выхлопных газов не эффективны, так как шарниры или пружины крепления забиваются копотью и грязью и перестают работать. Нужна крышка, работающая с абсолютной надёжностью

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОРГАНИЗАЦИИ И ОСУЩЕСТВЛЕНИИ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ	4
2. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ И ТВОРЧЕСТВА	5
2.1. Законы развития техники	6
2.2. Общенаучные методы	7
2.3. Системный анализ как метод научных исследований	9
3. ПОИСК, НАКОПЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ	11
4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	15
4.1. Задачи и методы теоретического исследования	15
4.2. Моделирование в научном и техническом творчестве	16
4.2.1. Последовательность решения исследовательских задач математическими методами	17
4.3. Методики построения расчётных моделей систем	18
4.3.1. Детерминированные механические системы первого и второго порядков	18
4.3.2. Многомассовые динамические системы	20
4.4. Предварительный контроль математической модели	21
4.5. Аналитические методы в научных исследованиях	22
4.5.1. Передаточная функция и частотная характеристика системы	22
4.5.2. Понятие функционала и вариационного исчисления	24
5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ	26
5.1. Классификация, типы и задачи эксперимента	26
5.2. Основные вопросы методологии экспериментальных исследований	28
5.3. Разработка план-программы эксперимента	29
5.4. Теория подобия. Виды подобия. Числа подобия	30
5.5. Измерения, их виды и классы	34
5.6. Ошибки и погрешности измерений, их виды, природа возникновения, основные принципы и методы устранения	36
5.6.1. Методика обработки прямых и косвенных измерений	39
5.7. Определение минимального количества измерений	47
6. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ	48
6.1. Случайные величины. Аксиомы теории вероятностей	48
6.2. Генеральная и выборочная совокупности	49
6.2.1. Вычисление выборочных характеристик. Числовые характеристики выборки	50
6.3. Распределение случайной величины, теоретическое и эмпирическое распределения, их табличное и графическое представление	55

6.4. Характеристики теоретического и эмпирического распределения случайной величины	59
6.5. Законы распределения случайной величины	63
6.5.1. Равномерное распределение	63
6.5.2. Нормальное распределение	64
6.5.3. Логарифмически нормальное распределение	65
6.5.4. Показательное (экспоненциальное) распределение	66
6.5.5. Закон Вейбулла	66
6.5.6. Треугольное распределение (распределение Симпсона) ...	67
6.5.7. Распределение типа А (распределение Грама – Шарлье)	67
6.5.8. Распределение Пирсона типа I	67
6.5.9. Распределение Максвелла	67
6.5.10. Закон распределения модуля разности	68
6.5.11. Биномиальное распределение (схема Бернулли)	71
6.5.12. Распределение Пуассона	74
6.5.13. Геометрическое распределение	77
6.5.14. Гипергеометрическое распределение	80
6.5.15. Распределение хи-квадрат (χ^2 -распределение)	82
6.5.16. Распределение Стьюдента	83
6.5.17. F-распределение Фишера	84
6.6. Интервальная оценка с помощью доверительной вероятности точности и надёжности выборки замеров. Уровень значимости	85
6.7. Проверка статистических гипотез	89
6.8. Сравнение выборочного распределения и распределения генеральной совокупности. Применение критериев согласия	90
6.9. Применение статистических методов обработки экспериментальных данных в технологии машиностроения	93
6.9.1. Погрешности механической обработки и законы их распределения	94
6.9.2. Теоретические диаграммы точности обработки	100
6.9.3. Задачи статистического анализа точности механической обработки	102
6.9.4. Статистические методы настройки станков	108
7. МЕТРОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ	116
7.1. Машины и приборы для определения механических свойств материалов при статическом нагружении	116
7.1.1. Способы измерения деформаций	116
7.1.2. Методы и приборы оценки твёрдости и микротвёрдости ...	119
7.1.3. Методы и приборы измерения шероховатости поверхностей	121
7.1.4. Методы определения остаточных напряжений	122
7.1.5. Методы и приборы исследования наклёпа	123
7.2. Измерение частоты вращения, погрешностей вращательного движения и механических колебаний	124

7.2.1. Измерение частоты вращения	124
7.2.2. Измерение погрешностей вращательного движения механических передач	125
7.2.3. Измерение механических колебаний	126
7.3. Измерение сил и их производных	128
7.3.1. Измерение сил	128
7.3.2. Измерение крутящих моментов	129
7.4. Способы измерения износа режущих инструментов и поверхностей деталей машин	130
7.4.1. Особенности измерения износа режущих инструментов	133
7.5. Измерение температуры и теплоты	133
7.6. Проверка средств измерений	136
8. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕН- ТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ	137
8.1. Методы графического изображения результатов эксперимента ...	137
8.2. Методы подбора эмпирических формул	139
8.3. Аппроксимация, интерполяция и экстраполяция	148
8.4. Линейная регрессия	149
9. ПОНЯТИЕ ДИСПЕРСИОННОГО АНАЛИЗА	154
9.1. Однофакторный дисперсионный анализ	155
9.2. Двухфакторный дисперсионный анализ	158
9.3. Полный факторный эксперимент	162
9.4. Дробный факторный эксперимент	168
9.5. Планирование эксперимента с целью описания исследуемого объекта	169
10. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ	170
10.1. Производственные функции	171
10.2. Оптимизация технологических процессов с использованием планирования эксперимента	173
10.3. Геометрическое решение задачи оптимизации	175
11. ИЗОБРЕТАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА И ЕЁ ОСОБЕННОСТИ	176
11.1. Современные методы поиска новых технических решений	176
11.2. Вепольный анализ	182
11.3. Алгоритм решения изобретательских задач	185
11.4. Открытие и изобретение, полезная модель и промышленный образец, товарный знак	187
11.5. Заявка на предполагаемое изобретение (структура и оформление)	189
11.6. Проведение патентных исследований	192
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	194
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	195
ПРИЛОЖЕНИЯ	197