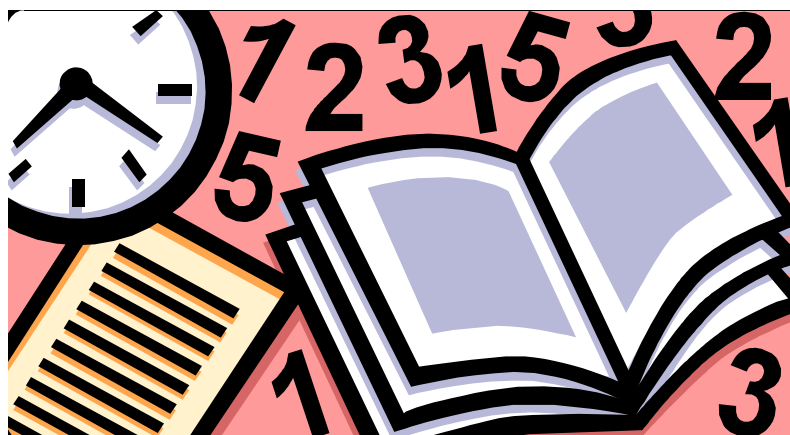


Ю.Т. СЕЛИВАНОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть II



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 539.3/6(075)
ББК Ж121я73-2
С291

Р е ц е н з е н т ы:

Кандидат технических наук, профессор
А.Г. Ткачев

Генеральный директор ООО "Тамбов-Эксперт-Наладка"
В.С. Сластунов

Селиванов, Ю.Т.

С291 Сопротивление материалов : учеб. пособие / Ю.Т. Селиванов. – 2-е изд., стер. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – Ч. II. – 80 с. – 50 экз. – ISBN 978-5-8265-0812-1.

Отражены положения основных разделов первой части курса "Сопротивление материалов", имеющиеся в государственных образовательных стандартах. Содержатся основные теоретические предпосылки для получения расчетных формул.

Приведены примеры решения задач по наиболее сложным для восприятия студентами темам.

Предназначено для студентов дневного и заочного отделений специальностей 240801, 260601, 150400.

УДК 539.3/6(075)
ББК Ж121я73-2

ISBN 978-5-8265-0812-1

© ГОУ ВПО "Тамбовский государственный
технический университет" (ТГТУ), 2009

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

Ю.Т. СЕЛИВАНОВ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть II

Утверждено Ученым советом ТГТУ
в качестве учебного пособия
для студентов дневного и заочного отделений
специальностей 240801, 260601, 150400

Издание второе, стереотипное



Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

Учебное издание

СЕЛИВАНОВ Юрий Тимофеевич

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Часть II

Учебное пособие

Издание второе, стереотипное

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 05.05.2009
Формат 60 × 84/16. 4,7 усл. печ. л. Тираж 50 экз. Заказ № 192

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

1.1. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

К сложному сопротивлению относятся виды деформаций бруса, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает более одного внутреннего силового фактора. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при этом в сечениях возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Этот вид деформации рассматривают как простой потому, что в подавляющем большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость ведутся без учета влияния поперечных сил, т.е. по одному силовому фактору – изгибающему моменту.

Наиболее часто встречаются с сочетанием изгиба в одной или двух плоскостях и кручения брусьев. При решении подобных задач строятся эпюры M_x , M_y , M_z на всех участках бруса. После чего находится опасное сечение путем определения расчетного момента в нескольких сечениях по формуле

$$M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}. \quad (1.1)$$

После этого определяется положение опасной точки сечения. При этом нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W_i},$$

где $i = x$ или y .

Касательное напряжение определяется по формуле

$$\tau = \frac{M_z}{W_z}.$$

Рассмотрим случай, когда по граням параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения. При этом две боковые грани свободны от напряжений, т.е. создается плоское напряженное состояние (рис. 1.1).

При этом главные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau^2} \right);$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau^2} \right).$$

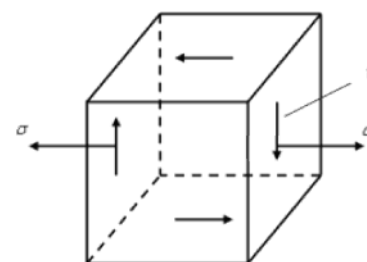


Рис. 1.1

Так как напряжение σ_2 , действующее по боковым граням параллелепипеда, равно нулю, указанные зависимости примут вид:

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

Главные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Расчет брусьев на прочность при изгибе с кручением производят по третьей и четвертой гипотезам прочности.

Третья гипотеза прочности:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma]. \quad (1.3)$$

Подставив в (1.3) зависимости из системы (1.2), получим:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.4)$$

Для расчета опасной точки по третьей теории прочности значения σ и τ подставляются в формулу (1.4).

Четвертая гипотеза прочности (энергетическая):

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]. \quad (1.5)$$

Подставив в (1.5) значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ из системы (1.2) и совершив несложные арифметические преобразования, получим:

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (1.6)$$

1.2. ПОРЯДОК ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ДЛЯ ЛОМАНОГО (ПРОСТРАНСТВЕННОГО) БРУСА

Проставляем оси координат на каждом из участков, начиная обход от защемленного конца. При переходе на следующий участок, систему $x y z$ следует повернуть относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежат эти два участка, направляя ось z вдоль оси бруса.

Правило знаков: в пространственных системах правило знаков такое же, что и для плоских систем, если смотреть на ось z так, чтобы она была направлена вправо, а начало координат считать расположенным в крайней левой точке участка.

Эпюра M_x строится в плоскости yoz . Эпюра M_y в плоскости xoz (рис. 1.2), причем положительные значения силовых факторов откладываются по положительному направлению соответствующей оси координат (y или x).

Крутящий момент M_z действует в плоскости xoy . Для крутящих моментов M_z используется произвольное правило знаков, которому следует придерживаться до конца решения задачи. Эпюра M_z строится в плоскости xoy или yoz .

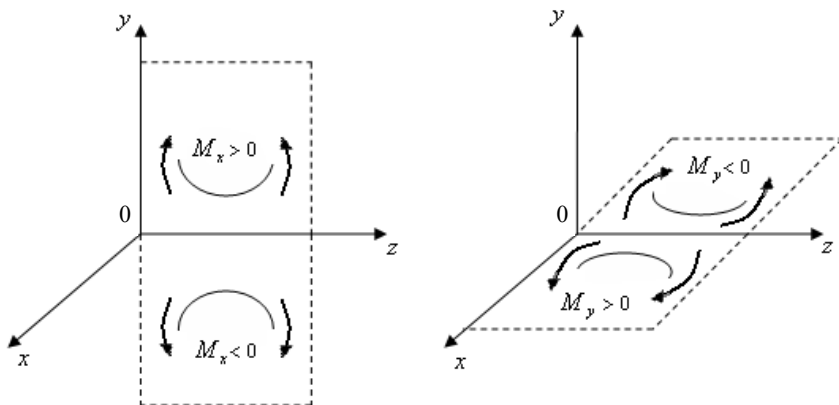
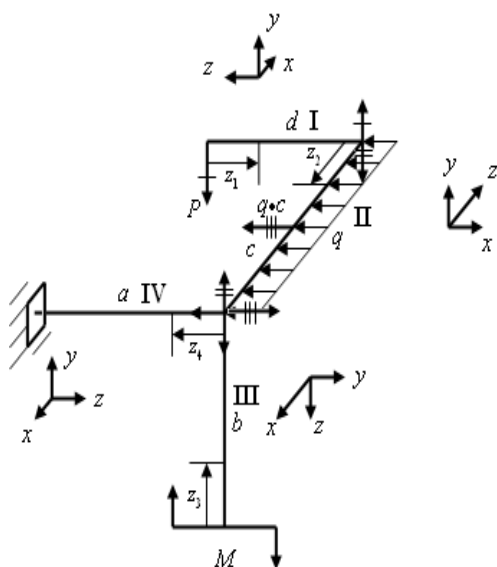


Рис. 1.2



Пример (рис. 1.3).

Дано:

$$P = 230 \text{ кг};$$

$$q = 230 \text{ кг/м};$$

$$M = 250 \text{ кг·м};$$

$$a = b = c = 0,7 \text{ м};$$

$$d = 0,6 \text{ м};$$

$$h / b = 1,4;$$

$$[\sigma] = 900 \text{ кг/см}^2.$$

Рис. 1.3

Построение эпюр изгибающих и крутящего моментов (рис. 1.4).

I. $M_x = -Pz_1, 0 \leq z_1 \leq d;$

$$M_y = 0; M_z = 0; M_x(0) = 0;$$

$$M_x(0,6) = -150 \text{ кг·м}.$$

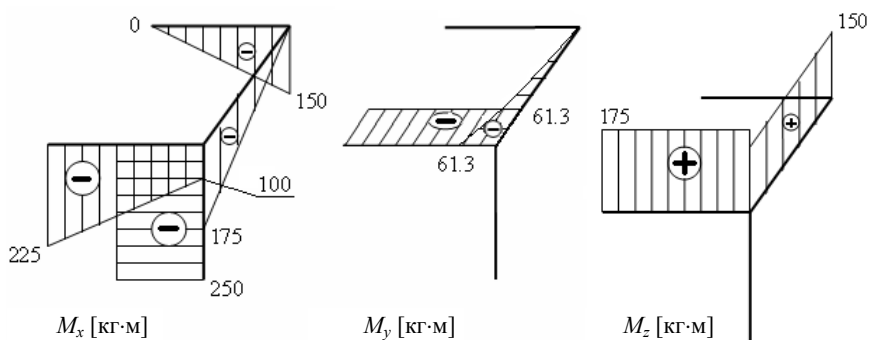


Рис. 1.4

II. $M_x = -Pz_2, 0 \leq z_2 \leq c;$

$$M_y = -\frac{qz_2^2}{2};$$

$$M_z = Pd;$$

$$M_x(0) = 0;$$

$$M_x(0,7) = -175 \text{ кг·м};$$

$$M_y(0) = 0;$$

$$M_y(0,7) = -61,3 \text{ кг·м};$$

$$M_y(0,35) = -15,6 \text{ кг·м};$$

$$M_z = 150 \text{ кг·м}.$$

III. $M_x = -M = -250 \text{ кг}\cdot\text{м}, 0 \leq z_3 \leq b;$

$$M_y = 0;$$

$$M_z = 0.$$

IV. $M_x = Pd - M - Pz_4;$

$$M_y = -qc \frac{c}{2};$$

$$M_z = Pc;$$

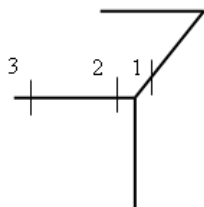
$$M_x(0) = -100 \text{ кг}\cdot\text{м};$$

$$M_x(0,7) = -275 \text{ кг}\cdot\text{м};$$

$$M_y = 61,3 \text{ кг}\cdot\text{м};$$

$$M_z = 175 \text{ кг}\cdot\text{м}.$$

Определим опасные сечения по величине расчетного момента (рис. 1.5):



$$M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2}.$$

Расчетные моменты

Сечение	M_x	M_y	M_z	M_p
1	175	61,3	150	226
2	100	61,3	175	191
3	275	61,3	175	319

В данной задаче значение расчетного момента в третьем сечении превосходит значения M_p в других сечениях, следовательно, наиболее опасным будем считать третье сечение.

Так как величина изгибающего момента M_x в третьем сечении больше по абсолютной величине, чем величина момента M_y в этом сечении, то силовую плоскость момента M_x совмещаем с плоскостью наибольшей жесткости сечения (рис. 1.6).

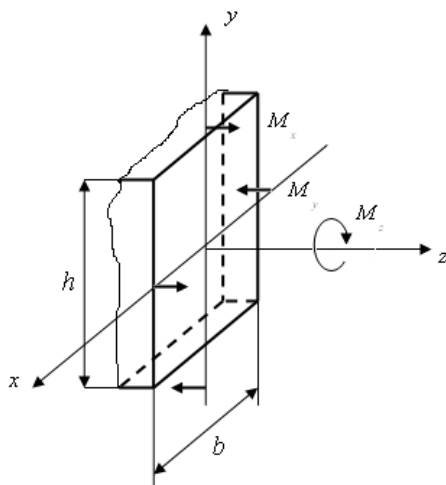


Рис. 1.6

Построим эпюры напряжений в опасном сечении (рис. 1.7).

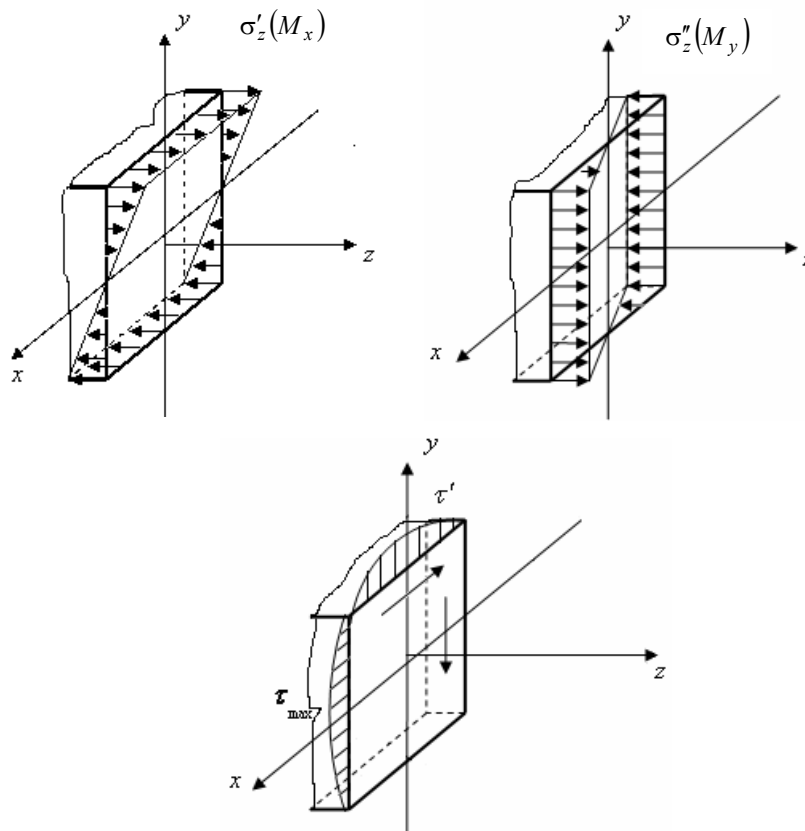


Рис. 1.7

Покажем эпюры напряжений в плоскости. Цифрами 1, 2, 3 обозначим опасные точки (рис. 1.8). Определим максимальные напряжения.

$$\sigma'_z = \frac{M_x}{W_x} = -\frac{27500}{0,326b^3} = -\frac{84\,356}{b^3} \text{ кг/см}^2;$$

$$W_x = \frac{bh}{6} = \frac{b^3 \cdot 1,4^2}{6} = 0,326b^3 \text{ см}^3;$$

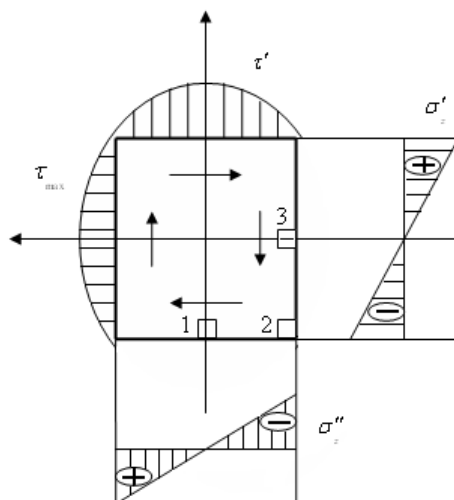


Рис. 1.8

$$W_y = \frac{b^2 h}{6} = \frac{b^3 \cdot 1,4}{6} = 0,233b^3 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_z'' = \frac{M_y}{W_y} = -\frac{6130}{0,233b^3} = -\frac{26\,309}{b^3} \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_z} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} = \frac{14\,500}{0,288 \cdot 1,4b^3} = \frac{54\,825}{b^3} \text{ кг/см}^2;$$

$$\tau' = \gamma \tau_{\max} = 0,865 \cdot \frac{54\,825}{b^3} = \frac{47\,432}{b^3} \text{ кг/см}^2.$$

Покажем напряженное состояние в точках, учитывая действие моментов M_x , M_y , M_z (рис. 1.9).

По четвертой теории прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(1)} = \sqrt{(\sigma_z')^2 + 3(\tau')^2} = \frac{11,8 \cdot 10^4}{b^3} \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(2)} = |\sigma_z'| + |\sigma_z''| = \frac{11,1 \cdot 10^4}{b^3} \text{ кг/см}^2;$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(3)} = \sqrt{(\sigma_z'')^2 + 3(\tau_{\max})^2} = \frac{9,86 \cdot 10^4}{b^3} \text{ кг/см}^2.$$

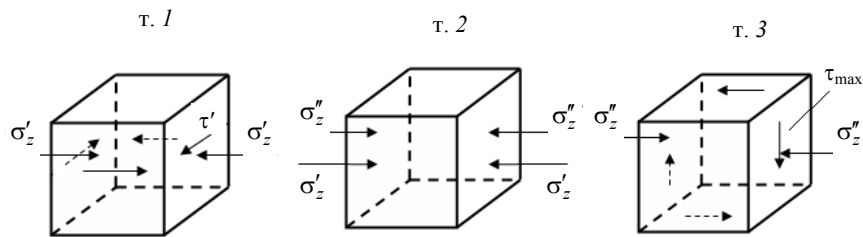


Рис. 1.9

Наиболее опасной является точка 1, так как в ней значение $\sigma_{\text{ЭКВ}}$ максимально.

Условие прочности:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{(1)} \leq [\sigma];$$

$$\frac{11,8 \cdot 10^4}{b^3} \leq 900;$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{11,8 \cdot 10^4}{900}} = 5,1 \text{ см};$$

$$h = 1,4b = 7,14 \text{ см}.$$

1.3. КОСОЙ ИЗГИБ

Определение: Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции сечения.

Случай косоугольного изгиба, когда в поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент, называется чистым косым изгибом.

Если в сечении наряду с изгибающим моментом действует поперечная сила, то этот вид изгиба называется поперечным косым изгибом.

Пусть имеется брус прямоугольного поперечного сечения с жестко заделанным левым концом. К нему на свободном конце приложена сила P , причем линия действия силы отклонена от вертикальной оси y на угол α (рис. 1.10).

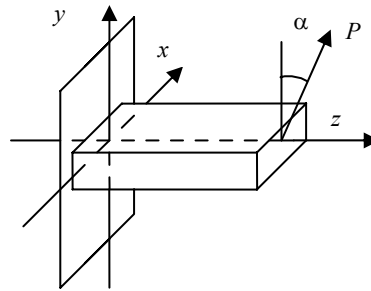


Рис. 1.10

Расчетная схема для данного бруса имеет следующий вид (рис. 1.11):

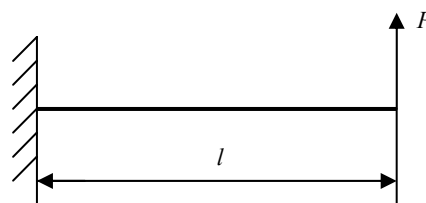


Рис. 1.11

Величина изгибающего момента для случая прямого изгиба имеет вид:

$$M = Pz, \quad 0 \leq z \leq l. \quad (1.7)$$

Однако в случае косоугольного изгиба изгибающий момент необходимо разложить на два изгибающих момента M_x и M_y . При этом полный изгибающий момент будет равен $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, и он будет действовать в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей рассматриваемого сечения.

Таким образом, косоугольный изгиб можно рассматривать как сочетание двух прямых изгибов, вызываемых изгибающими моментами, действующими относительно двух главных центральных осей инерции поперечного сечения x и y . Рассмотрим поперечное сечение бруса (рис. 1.12).

Проекции силы P на соответствующие оси будут иметь следующие значения:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= P \sin \alpha, \\ P_y &= P \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

На основании принципа независимости действия сил, полное нормальное напряжение в поперечном сечении равно сумме напряжений от раздельного действия моментов M_x и M_y . Следовательно, напряжение в любой точке поперечного сечения можно определить по формуле

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x. \quad (1.9)$$

В этой формуле значения x и y – это текущие координаты выбранной точки поперечного сечения в системе координат xOy . Причем в данную формулу подставлены абсолютные значения моментов M_x и M_y . В нашем случае:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= P_y z, \\ M_y &= P_x z. \end{aligned} \right\}$$

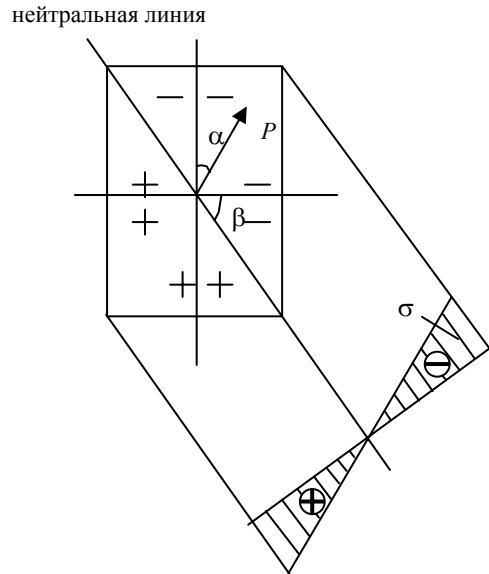


Рис. 1.12

Подставим в полученную систему значения из системы (1.8):

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Pz \cos \alpha; \\ M_y &= Pz \sin \alpha, \end{aligned} \right\}$$

или с учетом уравнения (1.7) получим:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha; \\ M_y &= M \sin \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Вместо значений M_x и M_y в уравнение (1.9) подставим соответствующие выражения из системы

$$\sigma = \pm M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right). \quad (1.10)$$

В данной формуле α – угол между вертикальной осью y и плоскостью действия полного момента.

При косом изгибе расчет на прочность обычно производится по нормальным напряжениям, возникающим в поперечном сечении бруса, т.е. как при одноосном напряженном состоянии. Поэтому теории прочности при таком расчете не используются.

При косом изгибе нормальные напряжения в центре тяжести поперечного сечения равны 0. Чтобы в этом убедиться достаточно подставить в формулу (1.9) координаты центра тяжести $x=0$ и $y=0$. Следовательно, при косом изгибе нейтральная ось, так же, как и при прямом изгибе, проходит через центр тяжести поперечного сечения (рис. 1.12).

Известно, что на нейтральной оси нормальные напряжения равны 0, поэтому для ее нахождения приравняем нулю формулу (1.10). Однако величина $M \neq 0$, поэтому для нейтральной оси можно записать:

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x = 0.$$

При известных значениях α , I_x и I_y это прямая, проходящая через начало координат:

$$y = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y} x.$$

Тангенс угла наклона β нейтральной оси к оси x равен $-y/x$, т.е.:

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y}. \quad (1.11)$$

Эта формула служит для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.

Нейтральная ось всегда отклоняется от оси x на угол β в ту же сторону, в которую плоскость действия изгибающего момента отклоняется от оси y на угол α .

Нормальные напряжения в точках поперечного сечения при косом изгибе прямо пропорциональны расстоянию от рассматриваемой точки до нейтральной оси, следовательно, наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Для построения эпюры нормальных напряжений проводится прямая, перпендикулярная нейтральной оси и на ней откладываются значения нормальных напряжений.

Точки поперечного сечения, в которых при изгибе возникают наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения, являются опасными точками сечения. Для определения их положения необходимо по формуле (1.11) определить величину угла β , провести нейтральную ось, а затем параллельно ей провести линии, касающиеся контура сечения. Эти точки, наиболее удаленные от нейтральной оси, являются опасными точками сечения.

Для нахождения экстремальных значений напряжений в рассматриваемых точках необходимо подставить координаты этих точек в выбранной системе координат в формулу (1.9). Причем перед первым членом суммы проставляется знак (+), когда момент M_x вызывает растяжение в точках с положительными координатами y , а перед вторым членом, когда момент M_y вызывает растяжение в точках с положительными координатами x .

Таким образом, определение положения нейтральной оси необходимо для отыскания опасных точек сечения и последующего расчета на прочность.

При некоторых типах сечений опасные точки легко установить, не определяя положения нейтральной оси. Такого рода сечения характерны тем, что если их вписать в прямоугольник, со сторонами, параллельными главным центральным осям инерции сечения, то угловые точки прямоугольника будут являться и точками сечения (рис. 1.13). В противном случае необходимо предварительно определять положение нейтральной оси.

В ряде сечений косой изгиб невозможен. Это относится к сечениям, в которых $I_x = I_y$. Например, круг.

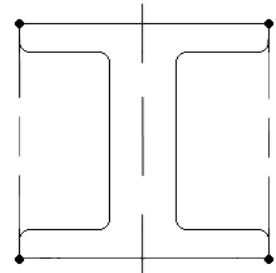


Рис. 1.13

1.4. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ БРУСЬЕВ

Определение: Внецентренным растяжением или сжатием называют такой вид деформации, когда в поперечном сечении бруса одновременно действуют продольная сила (растягивающая или сжимающая) и изгибающий момент.

Пусть сила P приложена в точке сечения A , причем эта точка удалена от соответствующих осей на расстояния x_p , y_p . Это координаты точки приложения силы, проставленные с учетом знака в избранной системе координат (рис. 1.14).

Так как данная сила приложена не в центре тяжести сечения, то она создает изгибающий момент M и продольную силу N . Составляющие этого момента относительно главных центральных осей инерции сечения x и y обозначим через M_x и M_y . Величины этих моментов можно определить как произведение силы на плечо, т.е.:

$$M_x = Py_p \quad (1.12)$$

$$M_y = Px_p \quad (1.13)$$

Нормальное напряжение в произвольной точке сечения с координатами x и y можно определить как сумму напряжений от продольной силы N и изгибающих моментов M_x и M_y :

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{P}{F} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x.$$

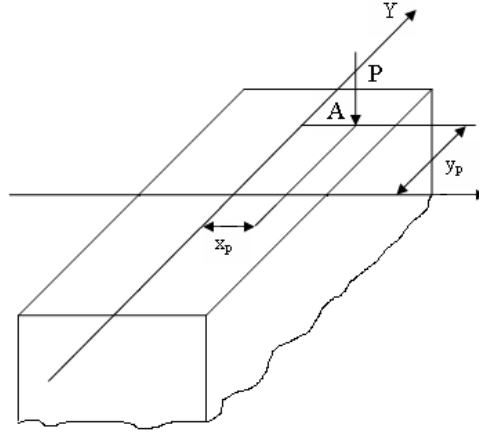


Рис. 1.14

Подставим в это выражение значения из (1.12) и (1.13).

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P y_p}{I_x} y + \frac{P x_p}{I_y} x. \quad (1.14)$$

В данной формуле координаты x_p и y_p точки приложения силы называются эксцентриситетами этой силы относительно главных центральных осей инерции x и y , соответственно. Точку A называют центром давления или полюсом.

В формулу (1.14) сила P проставляется с соответствующим знаком: растягивающая со знаком (+), сжимающая со знаком (-). Координаты x , x_p , y , y_p проставляются со своими знаками.

Формула для определения нормальных напряжений в любой точке поперечного сечения может быть представлена в другом виде:

$$\sigma = P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_p y}{I_x} + \frac{x_p x}{I_y} \right) = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right), \quad (1.15)$$

где $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$.

Величины i_x , i_y – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей инерции x и y , соответственно.

Для определения положения нейтральной оси (нулевой линии) разделяющей положительные и отрицательные нормальные напряжения, приравняем нулю уравнение (1.15):

$$\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right) = 0.$$

Очевидно, что левая часть этого произведения $\frac{P}{F} \neq 0$. Следовательно,

$$1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} = 0. \quad (1.16)$$

Данное выражение является уравнением прямой, так как координаты x и y входят в него в первой степени, и представляет собой уравнение нейтральной оси.

Для определения положения нейтральной оси найдем координату y_n точки пересечения ее с осью y . Абсцисса этой точки $x = 0$ и согласно выражению (1.16)

$$1 + \frac{y_p}{i_x^2} y_n = 0,$$

откуда $y_n = -\frac{i_x^2}{y_p}$.

Покажем точку с координатами $(0; y_n)$ на рис. 1.15 и обозначим ее через B .

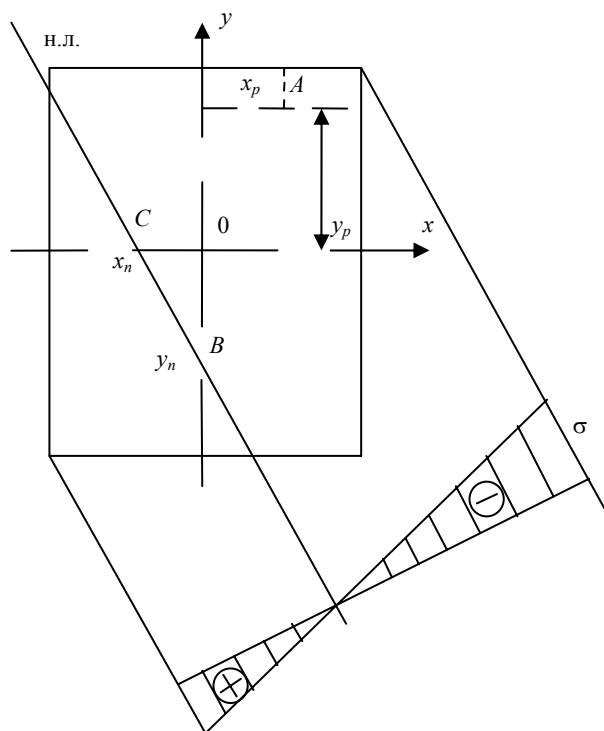


Рис. 1.15

Абсцисса точки пересечения нейтральной оси с осью $x = x_n$, а ордината этой точки $y = 0$. Подставим значения $x = x_n$, $y = 0$ в выражение (1.16):

$$1 + \frac{x_p}{i_y^2} x_n = 0,$$

откуда

$$x_n = -\frac{i_y^2}{x_p}.$$

Обозначим эту точку на рисунке через C . Через две точки B и C можно провести только одну прямую.

Свойства нулевой линии:

1. Положение нулевой линии не зависит от величины и знака силы P .
2. Нулевая линия и полюс лежат по разные стороны от начала координат.
3. Чем дальше от начала координат расположен полюс (т.е., чем больше по абсолютной величине координаты x_p и y_p), тем ближе к центру тяжести сечения проходит нейтральная ось и наоборот.
4. Если полюс расположен на одной из главных центральных осей инерции сечения, то нулевая линия перпендикулярна этой оси.

При внецентренном растяжении и сжатии нормальные напряжения в каждой точке поперечного сечения, как и при изгибе, прямо пропорциональны расстоянию от этой точки до нейтральной оси, следовательно, наибольшие напряжения возникают в точках поперечного сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси. Для построения эпюры нормальных напряжений необходимо провести нулевую линию, параллельно ей провести линии, касающиеся контура сечения. Эти точки являются наиболее опасными точками сечения. Для определения величин напряжений в них подставляют их координаты в формулу (1.15) и рассчитывают максимальные значения напряжений.

В каждом сечении можно определить область, в пределах которой приложение сил одного знака не приводит к появлению напряжений другого знака.

Определение: Ядром сечения называется его некоторая центральная область, обладающая тем свойством, что сжимающая сила, приложенная в любой ее точке, вызывает во всех точках поперечного сечения бруса сжимающие напряжения, т.е. напряжения одного знака.

Если сила приложена за пределами ядра сечения, то в поперечном сечении возникают положительные и отрицательные напряжения.

Если сила приложена на границе ядра сечения, то нулевая линия касается контура сечения в точке или по линии и нормальное напряжение в месте касания равно нулю.

Порядок построения ядра сечения:

1. Определяется положение центра тяжести сечения и главных центральных осей инерции сечения x и y , а также значения главных моментов инерции сечения I_x и I_y и значения квадратов радиусов инерции i_x^2, i_y^2 .

2. Если сечение имеет вид многоугольника, то вершины его углов последовательно рассматриваются как полюсы, и для каждого такого полюса определяются положение нейтральной линии. Контур, ограниченный этими линиями, образует ядро сечения (рис. 1.16).

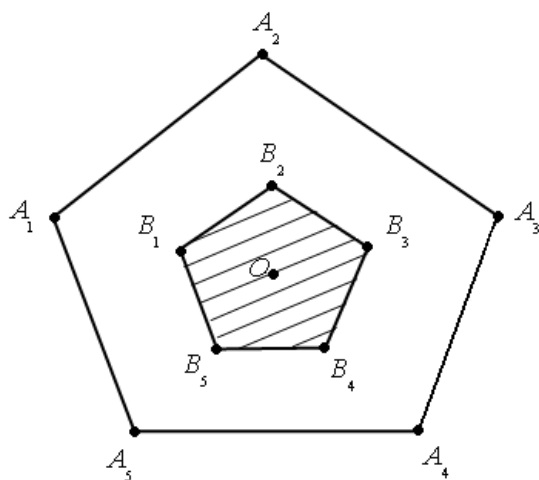


Рис. 1.16

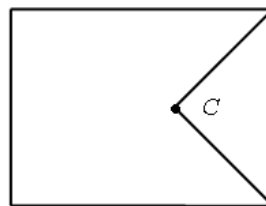


Рис. 1.17

3. Если многоугольное сечение имеет внутренние углы, например, угол при вершине C , то эти углы при обходе вершин не рассматриваются как полюсы (рис. 1.17).

Вопросы для самопроверки

К параграфу 1.1

1. Какие виды деформации бруса относятся к сложному сопротивлению?
2. Какие напряжения возникают в поперечном сечении бруса при изгибе с кручением?
3. Как находится величина расчетного момента в различных сечениях бруса?
4. Как находится расчетное напряжение по различным теориям прочности?
5. Как формулируются правила знаков для построения эпюр изгибающих и крутящего моментов?
6. В каких плоскостях строятся эпюры изгибающих и крутящего моментов?

К параграфу 1.2

7. Какой изгиб называется косым?
8. Что называется чистым косым изгибом и поперечным косым изгибом?
9. По какой формуле определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при косом изгибе?
10. Как определяется положение нейтральной оси при косом изгибе?
11. Что такое опасные точки сечения и как определяется их положение?
12. В каких типах сечений можно установить опасные точки, не определяя положения нейтральной оси?

К параграфу 1.3

13. Что такое внецентренное растяжение (сжатие)?
14. К каким равнодействующим приводятся внутренние силы при внецентренном нагружении?
15. Напишите формулу для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии)?
16. Что такое нулевая линия и как записывается ее уравнение?
17. Что называется ядром сечения?
18. Перечислите свойства нулевой линии?

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

2.1. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ РАБОТЫ ВНЕШНИХ СИЛ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Приложение нагрузки к любому сооружению вызывает его деформацию. При этом части сооружения выходят из состояния покоя и приобретают некоторые скорости и ускорения. Если нагрузка вырастает медленно, то ускорения невелики и можно пренебречь силами инерции, возникающими при переходе системы в деформированное состояние. Такое плавное приложение нагрузки называется статическим.

Работа внешних сил при статическом действии на упругое сооружение равна половине произведения величины внешней сил на вызванное ей перемещение:

$$A = P \Delta / 2, \quad (2.1)$$

где P – обобщенная сила; Δ – соответствующее ей обобщенное перемещение.

Произведение обобщенной силы на обобщенное перемещение имеет размерность работы. Например, растяжение-сжатие: обобщенная сила – N , перемещение – $\Delta = \Delta l$; кручение: обобщенная сила – $M_{кр.}$, перемещение – $\Delta = \varphi$ – угол закручивания; изгиб: обобщенная сила – изгибающий момент, перемещение – $\Delta = \alpha$ – угол поворота сечения.

При статическом действии на сооружение группы внешних сил работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Например, при действии на балку сосредоточенных сил P_1 и P_2 и сосредоточенных моментов M_1 и M_2 (рис. 2.1) работа внешних сил будет иметь вид:

$$A = P_1 \Delta_1 / 2 + P_2 \Delta_2 / 2 + M_1 \alpha_1 / 2 - M_2 \alpha_2 / 2.$$

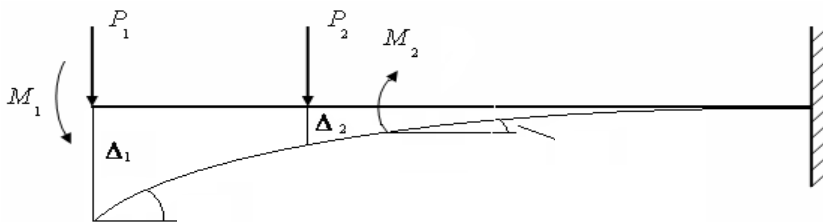


Рис. 2.1

Знак (–) перед последним членом суммы принят потому, что направление угла поворота α_2 поперечного сечения балки, в котором применен изгибающий момент M_2 противоположно направлению этого момента.

Выделим из прямолинейного стержня двумя сечениями, перпендикулярными его оси, бесконечно малый элемент dz . К нему в общем случае приложены продольная сила N , поперечная сила Q , изгибающий момент M и крутящий момент $M_{кр.}$.

Усилия N , M , Q , $M_{кр.}$ являются внутренними по отношению к целому стержню, однако для выделенного элемента они – внешние (рис. 2.2).

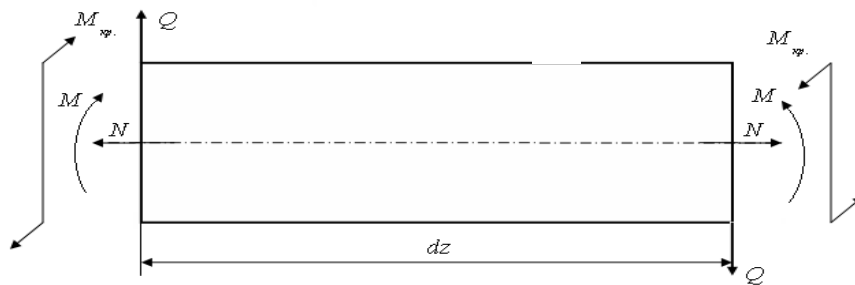


Рис. 2.2

Следовательно, работу можно получить как сумму работ, совершенных статически возрастающими усилиями N , M , Q , $M_{кр.}$ на соответствующих деформациях всех элементов dz .

Рассмотрим отдельно влияние каждого из этих усилий на элемент dz .

1. Элемент dz , находящийся под воздействием продольных сил N , изображен на схеме (рис. 2.3).

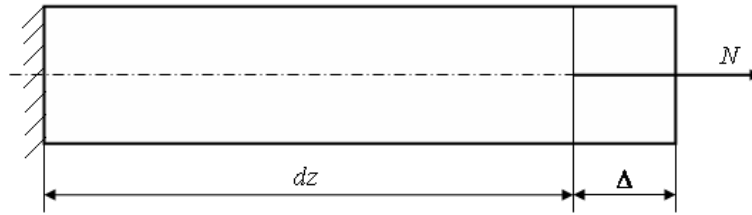


Рис. 2.3

Если левое сечение считать неподвижным, то правое под воздействием продольной силы N переместится на величину Δ вправо, где

$$\Delta = \frac{Ndz}{EF}.$$

На этом перемещении статически возрастающая сила N совершит работу

$$dA_N = \frac{N\Delta}{2} = \frac{N^2 dz}{2EF}. \quad (2.2)$$

II. Элемент dz находится под действием изгибающего момента M_x (рис. 2.4).

Если левое сечение не закреплено, то в результате деформации произойдет прогиб балки. При этом нейтральное волокно не деформируется. Если угол поворота сечения равен $d\alpha$, а радиус кривизны нейтрального волокна равен ρ , то

$$dz = \rho d\alpha. \quad (2.3)$$

Однако, в соответствии с зависимостью (2.1) имеем

$$dA_{M_x} = \frac{M_x}{2} d\alpha. \quad (2.4)$$

В случае определения напряжений при чистом изгибе имеем

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}. \quad (2.5)$$

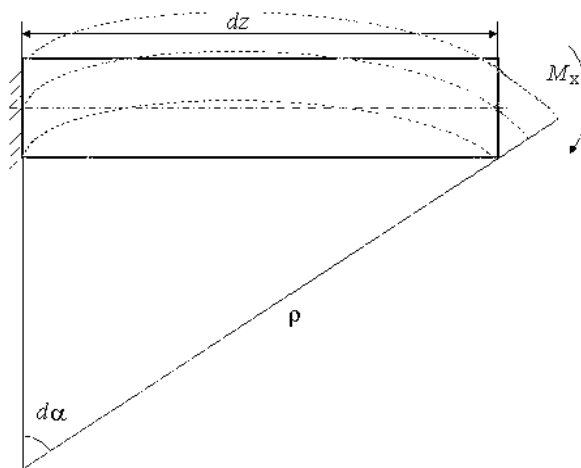


Рис. 2.4

Однако из формулы (2.3) после подстановки в нее зависимости (2.4) получим

$$d\alpha = \frac{dz}{\rho} = \frac{M_x dz}{EI_x}.$$

Подставим в это выражение формулу (2.4), получим

$$dA_{M_x} = \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}. \quad (2.6)$$

Аналогично, для случая действия изгибающего момента M_y , получим

$$dA_{M_y} = \frac{M_y^2 dz}{2EI_y}.$$

III. Элемент dz находится под действием поперечных сил (рис. 2.5).

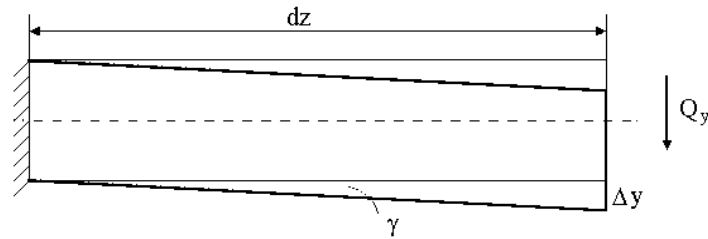


Рис. 2.5

К правому сечению приложено перерезывающее усилие Q_y . Пусть касательные напряжения распределены по сечению равномерно. Тогда перемещение, вызванное действием перерезывающей силы Q_y , представляет собой сдвиг торцевых сечений элемента dz относительно друг друга.

$$\Delta y = dz\gamma.$$

Однако на основании закона Гука при сдвиге

$$\gamma = \frac{\tau}{G}.$$

Следовательно,

$$\Delta y = \frac{\tau}{G} dz,$$

а так как

$$\tau = \frac{Q_y}{F},$$

то

$$\Delta y = \frac{Q_y dz}{GF}.$$

Тогда работа от силы Q_y на перемещении Δy будет иметь вид

$$dA_{Q_y} = \frac{Q_y^2 dz}{2GF}.$$

Вследствие неравномерности распределения касательных напряжений по площади сечения вводится дополнительный поправочный коэффициент η_y :

$$dA_{Q_y} = \eta_y \frac{Q_y^2 dz}{2GF}. \quad (2.7)$$

Для перерезывающей силы Q_x аналогично:

$$dA_{Q_x} = \eta_x \frac{Q_x^2 dz}{2GF}.$$

IV. Элемент dz находится под действием крутящего момента (рис. 2.6).

V.

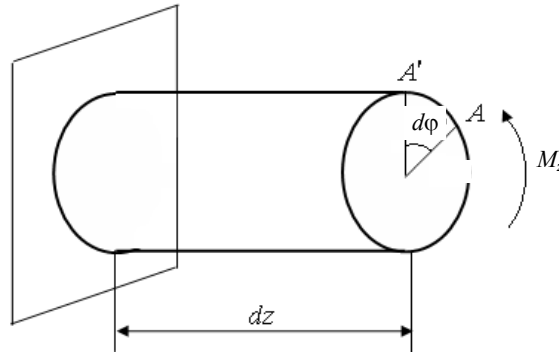


Рис. 2.6

Под действием этого момента точка A переместится в положение A' , повернувшись на угол $d\varphi$. Тогда угол поворота можно определить по формуле

$$d\varphi = \frac{M_z dz}{GI_p}.$$

$$dA_{M_z} = \frac{1}{2} M_z d\varphi = \frac{M_z^2 dz}{2GI_p}. \quad (2.8)$$

При одновременном действии на элемент dz указанных выше силовых факторов полная работа внешних сил равна сумме работ:

$$dA = dA_N + dA_{M_y} + dA_{M_x} + dA_{Q_y} + dA_{Q_x} + dA_{M_z}. \quad (2.9)$$

Данная формула выражает работу внешних сил на вызванных ими перемещениях через внутренние усилия в поперечных сечениях стержней конструкции. На основании закона сохранения энергии работа внешних сил переходит в потенциальную энергию деформации:

$$A = U.$$

Интегрируя выражение (2.9) в пределах длины каждого участка и производя суммирование по всем участкам системы, получаем следующую формулу для вычисления работы и потенциальной энергии деформации:

$$A = U = \int_{\ell} \frac{N^2 dz}{2EF} + \int_{\ell} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_{\ell} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + \eta_x \int_{\ell} \frac{Q_x^2 dz}{2GF} + \int_{\ell} \frac{M_z^2 dz}{2GI_p}. \quad (2.10)$$

Эта формула аналогична соответствующим формулам для случая центрального растяжения-сжатия и изгиба стержней. Она применима не только для прямых стержней, но и для стержней малой кривизны.

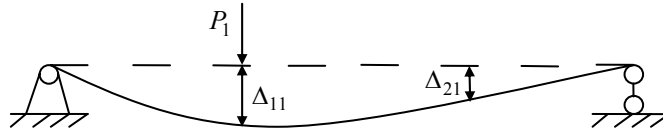
2.2. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Для определенности перемещения системы в результате ее деформации условимся обозначать через Δ_{ij} , где i – указывает направление перемещения и соответствует точке возникновения деформации. Символ j соответствует причине, вызвавшей данную деформацию.

Любое перемещение может представлять собой либо линейное смещение, либо угол поворота в зависимости от того, является ли усилие j сосредоточенной силой или изгибающим моментом. Таким образом, под силой j понимается любая нагрузка, действующая на сооружение.

Рассмотрим два состояния системы, находящейся в равновесии. В каждом из них на систему действует статическая нагрузка (рис. 2.7), например, сила P_1 или P_2 .

I.



II.

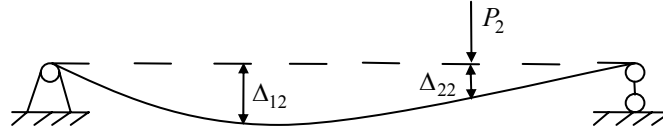


Рис. 2.7:

Δ_{11} – перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_1 ;
 Δ_{12} – перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_2 ;
 Δ_{21} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_1 ;
 Δ_{22} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_2

Работу силы P_1 на вызванном ею перемещении обозначим через A_{11} , а работу силы P_2 на вызванном ею перемещении обозначим через A_{22} .

Рассмотрим случай статического нагружения системы силами P_1 и P_2 в следующей последовательности: сначала прикладывается сила P_1 , в результате ее приложения деформация системы соответствует первому состоянию, затем на систему действует сила P_2 , в результате ее воздействия система получает дополнительные деформации и внутренние усилия, соответствующие деформациям и усилиям во втором состоянии (рис. 2.8). В процессе приложения силы P_2 сила P_1 , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба Δ_{12} и, следовательно, совершает дополнительную работу A_{12} .

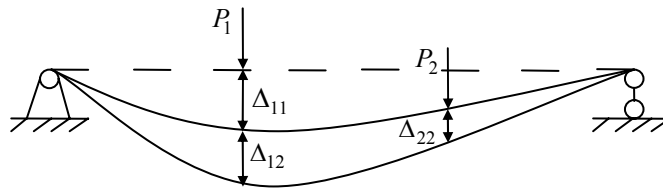


Рис. 2.8

Выражения для работ A_{11} и A_{22} :

$$A_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}.$$

$$A_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2}.$$

Таким образом, полная работа при последовательном нагружении системы силами P_1 и P_2 выражается следующей зависимостью:

$$A = A_{11} + A_{22} + A_{12} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_1 \Delta_{12}. \quad (2.11)$$

Символ $\frac{1}{2}$ при третьем слагаемом правой части формулы отсутствует потому, что сила P_1 совершает работу на перемещении Δ_{12} , оставаясь постоянной.

Рассмотрим четвертое состояние системы (рис. 2.9), при котором вначале прикладывается сила P_2 , в результате чего получается второе состояние системы, затем P_1 , и получается первое состояние системы и дополнительное перемещение Δ_{21} .

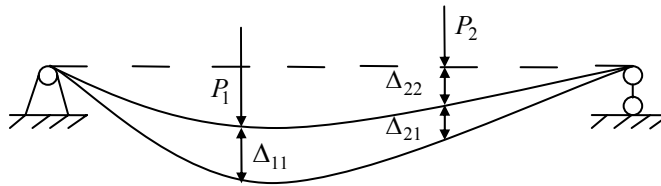


Рис. 2.9

Таким образом, полная работа в четвертом случае определяется зависимостью

$$A = A_{11} + A_{22} + A_{21} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_2 \Delta_{21}. \quad (2.12)$$

Согласно принципу независимости действия сил работы в третьем и четвертом случае равны. Приравняв правые части выражений (2.11) и (2.12), получим:

$$A_{12} = A_{21}, \quad (2.13)$$

или

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (2.14)$$

Выражения (2.13) и (2.14) являются математическими выражениями теоремы о взаимности работ.

Теорема о взаимности работ: Работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванная силами второго состояния равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

2.3. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим два состояния системы (рис. 2.10). В первом состоянии к системе приложена сила $P_1 = 1$, а во втором состоянии $-P_2 = 1$. Перемещения, вызванные единичными силами или моментами, будем обозначать через δ в отличие от перемещений, вызванных неединичными силами и обозначаемых через Δ .

На основании теоремы о взаимности работ для рассмотренных состояний

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

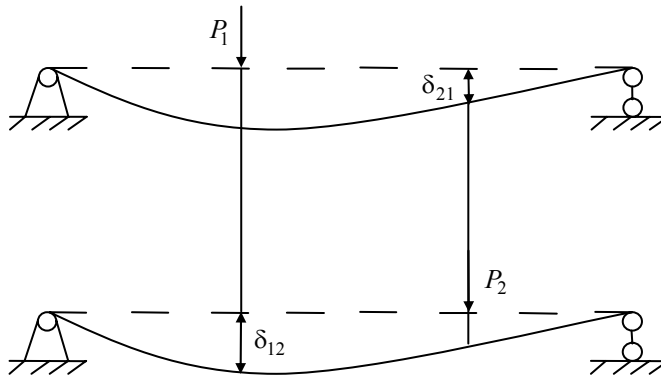


Рис. 2.10

а так как $P_1 = P_2 = 1$, то

$$\delta_{12} = \delta_{21},$$

или в общем случае при действии любых единичных сил:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (2.15)$$

Теорема о взаимности перемещений: Для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному первой единичной силой.

2.4. ИНТЕГРАЛ МОРА

Рассмотрим два состояния системы для случая плоской задачи. В первом состоянии на нее действует любое число, каких угодно сил и моментов (рис. 2.11).

I.

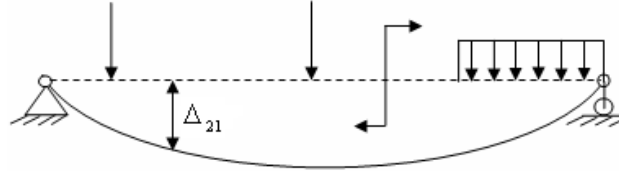


Рис. 2.11

Во втором состоянии к системе приложена одна сосредоточенная сила $P_2 = 1$ (рис. 2.12).

II.



Рис. 2.12

Работа силы P_2 на перемещении Δ_{21} выражается следующим уравнением:

$$A_{21} = P_2 \Delta_{21} = \Delta_{21}.$$

Из формулы (2.12)

$$A_{21} = A - A_{11} - A_{22}, \quad (2.16)$$

где A – работа, совершенная силами первого и второго состояния.

Для плоской системы имеем:

$$A = \int_0^{\ell} \frac{(N_1 + N_2)^2}{2EF} dz + \int_0^{\ell} \frac{(M_{x1} + M_{x2})^2}{2EI_x} dz + \eta_y \int_0^{\ell} \frac{(Q_{y1} + Q_{y2})^2}{2GF} dz.$$

Тогда

$$A_{11} = \int_0^{\ell} \frac{N_1^2}{2EF} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{x1}^2}{2EI_x} dz + \eta_y \int_0^{\ell} \frac{Q_{y1}^2}{2GF} dz;$$

$$A_{22} = \int_0^{\ell} \frac{N_2^2}{2EF} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{x2}^2}{2EI_x} dz + \eta_y \int_0^{\ell} \frac{Q_{y2}^2}{2GF} dz.$$

Подставим три последних выражения в уравнение (2.16) и, после соответствующих преобразований, получим:

$$A_{21} = \int_0^{\ell} \frac{N_1 N_2}{EF} dz + \int_0^{\ell} \frac{M_{x1} M_{x2}}{EI_x} dz + \eta_y \int_0^{\ell} \frac{Q_{y1} Q_{y2}}{GF} dz.$$

Обозначим внутренние усилия, вызванные действием единичной силы $P_2 = 1$, через \overline{N}_2 , \overline{M}_{x2} и \overline{Q}_{y2} . Тогда это выражение примет вид:

$$A_{21} = \Delta_{21} = \int_{\ell} \frac{N_1 \overline{N_2} dz}{EF} + \int_{\ell} \frac{M_{x1} \overline{M_{x2}} dz}{EI_x} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_{y1} \overline{Q_{y2}} dz}{GF}. \quad (2.17)$$

Таким образом, перемещение от любой нагрузки с помощью формулы (2.17) можно выразить через внутренние усилия, возникающие в данной системе от этой нагрузки и возникающие в ней же от единичной силы.

Если определяется прогиб, то единичная сила – безразмерная сосредоточенная сила, приложенная в месте определения прогиба.

Если определяется угол поворота сечения, то в качестве единичной силы используется безразмерный единичный момент, приложенный в рассматриваемой точке.

Определение: Состояние системы, вызванное действием единичной силы, называется единичным или фиктивным состоянием.

Определение: Состояние системы, вызванное действием внешней нагрузки, называется действительным или грузовым состоянием.

Выражение (2.17) носит название интеграла или формулы Мора.

Определение перемещений с помощью формулы Мора производится в следующей последовательности:

1. Находятся выражения внутренних усилий N , Q_y , M_x от заданной нагрузки, как функции координаты z произвольного сечения.
2. По направлению искомого перемещения прикладывается соответствующая ему единичная сила (при определении угла поворота сечения – единичный момент).
3. Определяются выражения для $\overline{M_x}$, $\overline{Q_y}$, \overline{N} от воздействия единичной силы, как функции координаты z произвольного сечения.
4. Найденные выражения для M_x , Q_y , N , а также $\overline{M_x}$, $\overline{Q_y}$, \overline{N} подставляют в выражение (2.17) и интегрированием по участкам определяется искомое перемещение.

Если Δ положительно, то перемещение совпадает по направлению с направлением единичной силы. Если отрицательно, то перемещение противоположно этому направлению.

Практически в большинстве случаев плоской задачи используется лишь один член формулы перемещений. Например, если рассматривается сооружение, преимущественно работающее на изгиб (балки, плоские рамы), то в формуле перемещений можно оставить лишь интеграл, зависящий от изгибающих моментов. При расчете сооружений, элементы которых работают на растяжение-сжатие, можно не учитывать деформации изгиба и сдвига. При этом в формуле перемещений остается лишь член, содержащий продольные силы.

В случае пространственной задачи интеграл Мора содержит не три слагаемых, а шесть – по числу внутренних усилий в поперечном сечении элементов.

$$\Delta = \int_{\ell} \frac{M_x \overline{M_x} dz}{EI_x} + \int_{\ell} \frac{M_y \overline{M_y} dz}{EI_y} + \int_{\ell} \frac{M_z \overline{M_z} dz}{EI_p} + \int_{\ell} \frac{N \overline{N} dz}{EF} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_x \overline{Q_x} dz}{GF} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_y \overline{Q_y} dz}{GF}. \quad (2.18)$$

В большинстве случаев пространственной задачи используют или три первых члена формулы, когда элементы системы работают в основном на изгиб и кручение, или только четвертый член – при расчетах пространственных ферм.

2.5. ПРАВИЛО ВЕРЕЦАГИНА

Определение перемещений в системах, состоящих из прямолинейных элементов, можно значительно упростить путем применения специального приема вычисления интеграла вида $\int M_x \overline{M_x} dz$.

Так как в подынтегральное выражение входят $\overline{M_x}$ и M_x , т.е. эпюры, построенные для единичного и действительного состояния, этот прием называется способом перемножения эпюр.

Пусть одна из эпюр, например $\overline{M_x}$, прямолинейная, а вторая – криволинейная (рис. 2.13).

Точка C – центр тяжести криволинейной эпюры. Площадь криволинейной эпюры равна Ω . Согласно нижнему рисунку:

$$\overline{M_x} = (a + z) \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставим выражение $\overline{M_x}$ в интегральную зависимость и, согласно верхнему рисунку, из которого $M_x dz = d\Omega$, получим:

$$\int_0^l \overline{M_x} M_x dz = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (a+z) M_x dz = \operatorname{tg} \alpha \int_0^l (a+z) d\Omega.$$

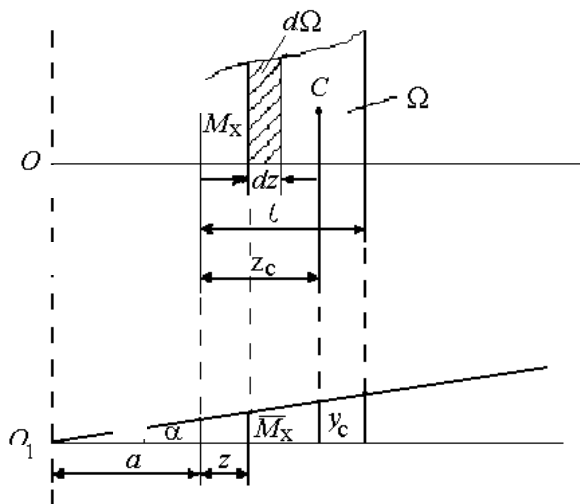


Рис. 2.13

Интеграл $\int_0^l (a+z) d\Omega$ – статический момент площади Ω эпюры M_x относительно оси OO_1 . Этот момент можно выразить иначе:

$$\int_0^l (a+z) d\Omega = (a+z_c) \Omega,$$

где z_c – абсцисса центра тяжести площади Ω эпюры M_x – точки C .

Тогда

$$\int_0^l \overline{M_x} M_x dz = \operatorname{tg} \alpha (z_c + a) \Omega,$$

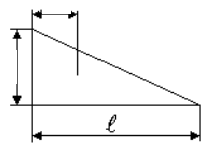
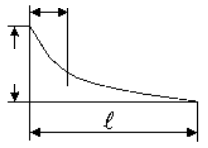
а так как $\operatorname{tg} \alpha (z_c + a) = y_c$, то

$$\int_0^l \overline{M_x} M_x dz = y_c \Omega. \quad (2.19)$$

Таким образом, результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату y_c другой, взятую под центром тяжести первой эпюры (способ Верещагина).

Таблица площадей и координат центров тяжести элементарных сечений

Сечение	Площадь	Координата центра тяжести z_c
	$h\ell$	$\ell / 2$

	$h\ell / 2$	$\ell / 3$
	$h\ell / 3$	$\ell / 4$

Однако наиболее часто используют другие более простые формулы перемножения эюр.

1. Обе эюры прямолинейны (рис. 2.14).

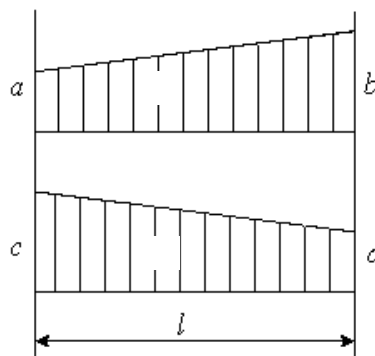


Рис. 2.14

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

2. Прямолинейная и криволинейная эюры (рис. 2.15).

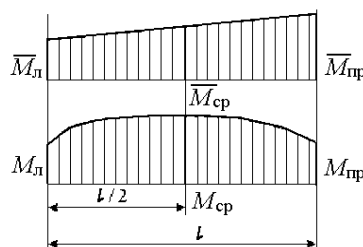


Рис. 2.15

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (M_{\text{л}} \overline{M_{\text{л}}} + M_{\text{пр}} \overline{M_{\text{пр}}} + 4M_{\text{ср}} \overline{M_{\text{ср}}}).$$

При расчете перемещений по последним двум формулам, значения с эюр должны браться с учетом знака.

Вопросы для самопроверки

К параграфу 2.1

1. Как выражается работа внешних сил при их статическом приложении?
2. Как выражается работа и потенциальная энергия деформации внешних статически приложенных сил через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержневой системы?

К параграфу 2.2

3. Как формулируется теорема о взаимности работ?

К параграфу 2.3

4. Как формулируется теорема о взаимности перемещений?
5. Какое практическое применение имеет теорема о взаимности перемещений?

К параграфу 2.4

6. Запишите формулу Мора для определения перемещений пространственного бруса.
7. Что называется действительным (грузовым) и единичным (фиктивным) состоянием?
8. Каков порядок определения линейных и угловых перемещений с помощью формулы Мора?

К параграфу 2.5

9. Каков порядок вычисления интеграла Мора графическим способом (метод Верещагина)?
10. Как с помощью метода Верещагина определить перемещение одной из точек пространственного бруса?

3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

3.1. СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Определение: Статически неопределимыми называют системы, в которых внутренние усилия невозможно определить из уравнений статики, а необходимо составить дополнительные уравнения – уравнения деформаций.

В дальнейшем мы будем рассматривать плоские задачи расчета статически неопределимых систем. Плоской называется такая система, у которой центры тяжести всех поперечных сечений стержней расположены в одной плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого сечения. Причем, все нагрузки действуют в той же плоскости.

Определение: Геометрически неизменяемой называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями ее элементов.

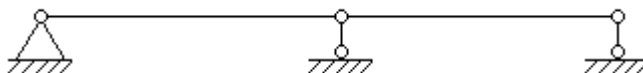
Статически определимая система не имеет ни одной лишней связи. Удаление из нее хотя бы одной связи превращает ее в геометрически изменяемую систему, т.е. в механизм.

Расчет статически неопределимой системы начинается с определения степени статической неопределимости. Степень статической неопределимости равна числу "лишних" связей, удаление которых превращает систему в статически определимую и оставляет ее геометрически неизменяемой. Степень статической неопределимости для балок и рам определяется по различным зависимостям. Для балок

$$n = c - m - 2,$$

где n – степень статической неопределимости; c – число опорных звеньев; m – число одиночных шарниров.

Например (рис. 3.1).

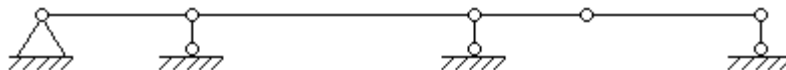


$$n = 3 - 2 = 1.$$

Рис. 3.1

Удаление правой или средней опоры приводит к тому, что конструкция становится статически определимой и геометрически неизменяемой.

Удаление правой опоры (рис. 3.2) невозможно, так как это приведет к тому, что конструкция станет геометрически изменяемой. Удаление одной из средних опор – возможно.



$$n = 4 - 1 - 2 = 1.$$

Рис. 3.2

Определение: Систему, состоящую из ряда элементов, жестко связанных между собой и образующих замкнутую цепь называют замкнутым контуром.

Любой замкнутый контур трижды статически неопределим, так как при его разрезании возникают: продольная сила, поперечная сила, изгибающий момент (только для плоских систем), рис. 3.3.

Если силы лежат не в плоскости замкнутого контура, то при разрезании возникает шесть внутренних усилий.

Если замкнутый контур снабжен шарниром (рис. 3.4), то в разрезе, проведенном по шарниру, действуют только два внутренних усилия N и Q_y .

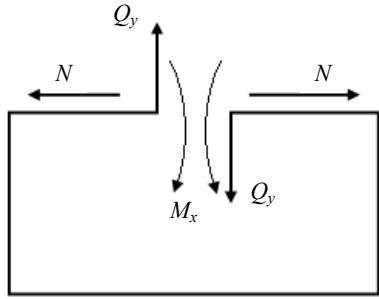


Рис. 3.3

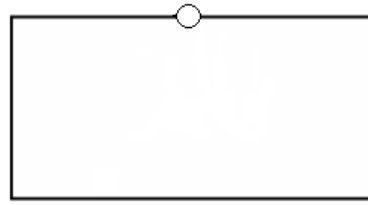


Рис. 3.4

Степень статической неопределенности для плоских рам

$$n = c + 3k - m - 3,$$

где k – число замкнутых контуров.

Определение: Связи, удаление которых превращает систему в геометрически изменяемую, называются абсолютно необходимыми.

Определение: Связи, удаление которых не превращает статически неопределимую систему в геометрически изменяемую, называются условно необходимыми.

Удаление вертикального стерженька (рис. 3.5, а) приведет к тому, что оставшиеся три реакции не препятствуют повороту рамы вокруг точки А, в которой пересекаются их оси. Правильный вариант удаления – рис. 3.5, б).

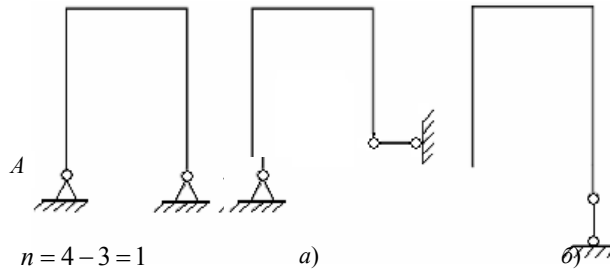


Рис. 3.5

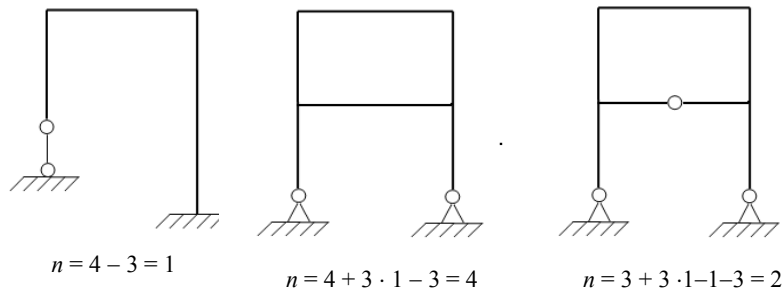


Рис. 3.6

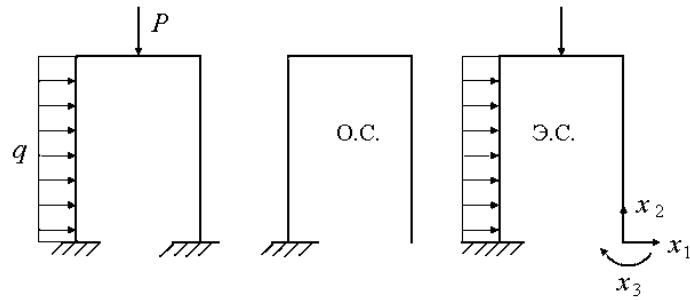
Рассмотрим примеры определения степени статической неопределенности для плоских рам (рис. 3.6).

3.2. МЕТОД СИЛ. ОСНОВНАЯ И ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СИСТЕМЫ

Для определения усилий в статически неопределимой системе необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения деформаций. Для этого необходимо превратить заданную статически неопределимую задачу в статически определимую удалением лишних связей. Полученная таким образом система называется основной системой (рис. 3.7).

Удаление каких-либо связей не изменяет внутренних усилий в системе и ее деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, являющиеся реакциями отброшенных связей. Потому, если к основной системе, кроме заданной нагрузки, приложить реакции устраненных связей, то ее деформации и внутренние усилия будут такими же, как в заданной системе, т.е. обе системы будут эквивалентными.

В заданной системе в направлениях имеющихся связей перемещений быть не может, поэтому в эквивалентной системе перемещения по направлению отброшенных связей должны быть равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равны нулю.



$$n = 6 - 3 = 3.$$

Рис. 3.7

3.3. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Условие равенства нулю перемещений по направлению любой из отброшенных связей на основании принципа независимости действия сил можно выразить следующим образом:

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in-2} + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0. \quad (3.1)$$

Первый индекс при Δ – направление перемещения и одновременно номер отброшенной связи. Второй индекс – причина, вызвавшая перемещение. Обозначим через x_k – реакцию связи k и выразим перемещение Δ_{ik} через единичное с помощью равенства

$$\Delta_{ik} = x_k \delta_{ik}.$$

После подстановки в уравнение (3.1), получим следующую зависимость:

$$\Delta_i = x_1 \delta_{i1} + x_2 \delta_{i2} + \dots + x_{n-1} \delta_{in-1} + x_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0.$$

Условие эквивалентности сводится к удовлетворению системы n -линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + \dots + x_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + \dots + x_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ x_1 \delta_{n1} + x_2 \delta_{n2} + \dots + x_n \delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) – дополнительные уравнения деформаций.

Первое уравнение выражает равенство нулю перемещения в основной системе по направлению первой отброшенной связи. Второе уравнение – по направлению второй и т.д. Уравнения (3.2) называются каноническими уравнениями метода сил. Число уравнений равно числу отброшенных связей, т.е. степени статической неопределимости системы.

Единичные перемещения δ_{ii} , т.е. имеющие два одинаковых символа, называются главными, а имеющие два разных символа δ_{ik} , называются побочными.

В соответствии с теоремой о взаимности перемещений

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Данная зависимость позволяет уменьшить объем вычислений при определении коэффициентов канонических уравнений.

Для определения коэффициентов δ следует построить единичные эпюры \overline{M} изгибающих моментов в основной системе, т.е. от действия каждого неизвестного $\overline{x} = 1$, обозначив каждую эпюру номером неизвестного. Отдельно строится грузовая эпюра M_p . Единичное перемещение δ_{ik} вычисляется умножением единичной эпюры \overline{M}_i на эпюру \overline{M}_k , а грузовое перемещение Δ_{ip} – умножением единичной эпюры \overline{M}_i на грузовую M_p . При перемножении эпюр необходимо учитывать знаки перемножаемых величин. После вычисления единичных и грузовых перемещений решают систему канонических уравнений и определяют значения неизвестных x_i .

Построение окончательной суммарной эпюры M для заданной статически неопределимой системы проводят следующим образом: к основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия x_i и заданную нагрузку, а затем от их суммарного воздействия строят окончательную эпюру изгибающих моментов.

Для проверки правильности решения определяют перемещения в направлении неизвестных x_i , а так как это реакции опор, то они должны быть равны нулю. Для этого перемножают окончательную итоговую эпюру M на единичные последовательно и проверяют правильность решения.

3.4. ИССЛЕДОВАНИЕ СИММЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Определение: Симметричной называется такая система, у которой ее правая часть может рассматриваться как зеркальное отражение левой части, относительно плоскости симметрии, включая и жесткость стержней.

Использование симметрии позволяет упростить расчет системы за счет снижения числа неизвестных силовых факторов x_1 , x_2 и т.д. Нагружение симметричной системы может быть симметричным и кососимметричным.

Определение: Симметричная нагрузка возникает, когда все внешние силы, приложенные к одной части рамы, являются зеркальным отображением силовых факторов, приложенных к другой части рамы (рис. 3.8).

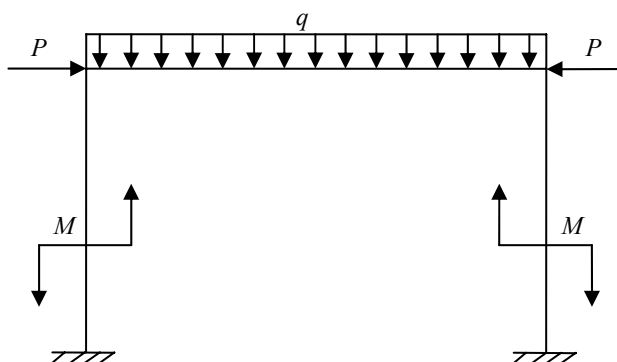


Рис. 3.8

Определение: Кососимметричная нагрузка (рис. 3.9), когда внешние силовые факторы, приложенные к одной части рамы, являются зеркальным отображением силовых факторов, приложенных к другой части рамы, но противоположны по знаку.

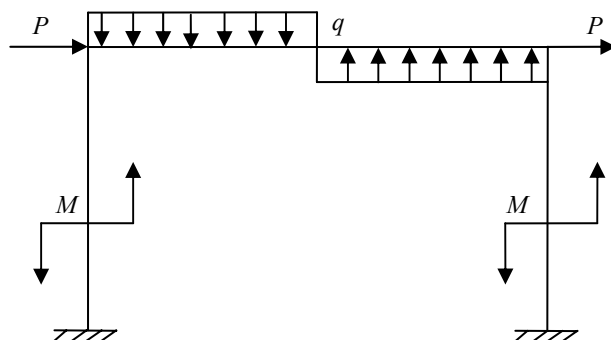


Рис. 3.9

Для симметричных рам рациональная система возникает при разрезании ее по оси симметрии, при этом возникают три неизвестных силовых фактора: изгибающий момент x_1 , продольная сила x_2 и поперечная сила x_3 (рис. 3.10).

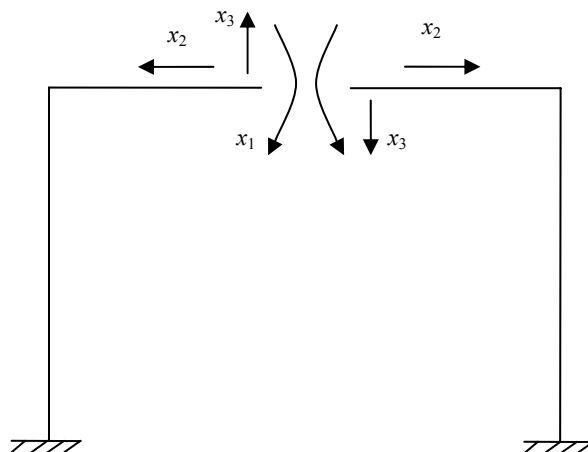


Рис. 3.10

Таким образом, необходимо составить и решить систему канонических уравнений с тремя неизвестными.

$$\left. \begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + x_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + x_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; \\ x_1 \delta_{31} + x_2 \delta_{32} + x_3 \delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Однако внутренние силовые факторы также можно разбить на симметричные и кососимметричные. К симметричным относятся: изгибающий момент x_1 и продольная сила x_2 ; к кососимметричным относится поперечная сила x_3 .

При симметричном нагружении обращаются в ноль кососимметричные силовые факторы, а при кососимметричном нагружении – симметричные силовые факторы.

Таким образом, для симметричной системы с симметричным нагружением вместо трех остаются два канонических уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + x_3 \delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + x_3 \delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

При кососимметричном нагружении вместо трех остается одно уравнение.

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0. \quad (3.4)$$

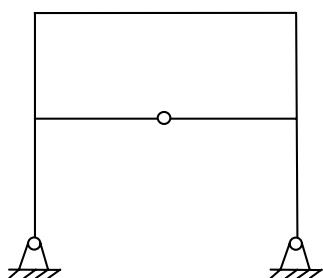


Рис. 3.11

Наличие шарнира на оси симметрии системы (рис. 3.11) приводит к тому, что изгибающий момент x_1 при разрезании симметричной системы обращается в ноль.

Для симметричной рамы с замкнутым контуром рациональным является разрезание по оси симметрии верхней или нижней горизонтальной балки в зависимости от того, где располагается шарнир, а также является ли нагрузка рамы симметричной или кососимметричной.

При построении всех эпюр они строятся для одной половины рамы, а для второй половины они являются либо симметричными, либо кососимметричными, в зависимости от типа внешней нагрузки.

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

1. Путем отбрасывания лишних связей заданная статически неопределимая система превращается в статически определимую.

2. По направлению искомого перемещения к полученной статически определимой системе прикладывается единичная сила (при определении линейного перемещения – сосредоточенная сила, при определении угла поворота – единичный момент).

3. От приложенного единичного силового фактора строится единичная эпюра изгибающих моментов \bar{M} в статически определимой системе.

4. Путем умножения единичной эпюры \bar{M} на суммарную окончательную эпюру изгибающих моментов M_p определяется искомого перемещение.

Вопросы для самопроверки

К параграфу 3.1

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Что называется степенью статической неопределимости системы?
3. Как определяется степень статической неопределимости для балок и рам?
4. Какие связи называются абсолютно необходимыми и условно необходимыми?
5. Чему равна степень статической неопределимости замкнутого контура?

К параграфу 3.2

6. Что такое основная система?
7. Что такое эквивалентная система?

К параграфу 3.3

8. Запишите систему канонических уравнений метода сил?
9. Чему равно число уравнений системы?
10. Какие перемещения называются главными, а какие побочными?
11. Что выражает каждое из канонических уравнений?

К параграфу 3.4

12. Какие статически неопределимые системы называются симметричными?
13. Приведите примеры симметричного и кососимметричного нагружения симметричной системы.
14. Какую основную систему целесообразно выбирать при расчете симметричных конструкций?
15. Какие неизвестные называются симметричными, а какие – кососимметричными и какие из них обращаются в ноль при симметричном и кососимметричном нагружении?

К параграфу 3.5

16. Каков порядок расчета перемещений в статически неопределимой системе?

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Известно, что равновесие может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным, например, шарик, находящийся на дне вогнутой сферы находится в состоянии устойчивого равновесия. На вершине выпуклой сферы – в состоянии неустойчивого равновесия. На горизонтальной плоскости – в состоянии безразличного равновесия.

Форма равновесия упругой системы, нагруженной внешними силами, является устойчивой, если будучи выведенной из состояния равновесия небольшой дополнительной силой, система, после прекращения действия этой силы, возвращается в исходное состояние. Прямолинейная форма равновесия упругого стержня, заделанного нижним концом и нагруженного сверху центрально приложенной сжимающей силой при некотором значении этой силы, может оказаться неустойчивой и стержень резко искривится. Устойчивость формы равновесия упругой системы зависит от ее размеров (размеры сечения, длина), материала, значений и направления сжимающих сил.

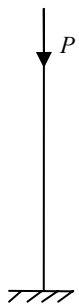


Рис. 4.1

Введем понятие о критической силе: значение силы, при котором первоначальная форма равновесия упругого тела становится неустойчивой, называется критической силой (рис. 4.1).

1. $P < P_{кр}$ – стержень сохраняет свою устойчивую прямолинейную форму. При приложении силы перпендикулярно оси стержня происходит изгиб в пределах упругой деформации. После удаления этой силы стержень восстанавливает свою прямолинейную форму.

2. $P = P_{кр}$ – безразличное состояние равновесия. Можно свободно изогнуть стержень.

3. $P > P_{кр}$ – стержень не может сохранять свою первоначальную форму.

Понятие устойчивости не следует смешивать с понятием прочности, например, сжатый стержень при действии на него нагрузки несколько больше критической, изогнется, но при этом его деформации могут быть упругими и после снятия нагрузки он восстановит свою первоначальную форму, следовательно, потеря устойчивости не связана с потерей прочности.

4.2. ВЫВОД ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения с шарнирно закрепленными концами, нагруженный на верхнем конце центрально приложенной сжимающей силой (рис. 4.2).

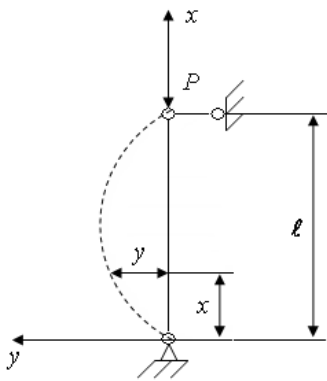


Рис. 4.2

Для определения критической силы отклоним стержень в положение, показанное пунктиром, и установим, при каком наименьшем значении силы P стержень может оставаться в этом положении.

Приближенное дифференциальное уравнение упругой линии имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}. \quad (4.1)$$

Формула справедлива, если начало координат расположено у нижнего конца стержня, а ось x направлена вверх. Изгибающий момент в сечении, расположенном на расстоянии x от нижней заделки:

$$M = -Py.$$

После подстановки в уравнение (4.1) имеем:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{-Py}{EI},$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + k^2 y = 0, \quad (4.2)$$

где $k^2 = \frac{P}{EI}$.

Решение дифференциального уравнения (4.2) имеет следующий вид:

$$y = A \cos kx + B \sin kx. \quad (4.3)$$

Причем постоянные интегрирования A и B можно определить из граничных условий.

1. При $x=0$ прогиб $y=0$:

$$\begin{aligned} 0 &= A \cos 0 + B \sin 0; \\ A \cdot 1 &= 0; \\ A &= 0. \end{aligned}$$

2. При $x=l$ прогиб $y=0$:

$$B \sin kl = 0.$$

Это условие выполняется при $B=0$ или $\sin kl=0$. При подстановке $B=0$ и, учитывая, что $A=0$, получим выражение (4.3) в виде $y=0$, что не соответствует условию задачи, так как на схеме $y \neq 0$.

Таким образом, необходимо принять $\sin kl=0$ или с учетом выражения (4.2):

$$\sin \ell \sqrt{\frac{P}{EI}} = 0,$$

откуда

$$\ell \sqrt{\frac{P}{EI}} = \pi n,$$

где n – может быть равно $0, 1, \dots$.

В нашем случае $n \neq 0$, так как в противном случае $P=0$, что не соответствует условию задачи.

Наименьшее значение $P = P_{кр}$ можно получить при $n=1$, тогда

$$\ell \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}} = \pi,$$

или

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}. \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) – формула Эйлера. Она применима только для заданного вида закрепления, для других случаев закрепления она имеет следующий вид:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\nu \ell)^2}, \quad (4.5)$$

где ν – коэффициент приведения длины, учитывающий условия крепления концов стойки.

Случай шарнирного закрепления концов стойки принято называть основным.

Величина $\nu \ell$ – приведенная длина, которая может быть истолкована как некоторая условная длина шарнирно опертого стержня, имеющего такую же критическую силу, как и заданный стержень.

Значение $P_{кр}$ прямо пропорционально жесткости поперечного сечения EI при изгибе и обратно пропорционально квадрату длины стержня. При потере устойчивости искривление стержня происходит в плоскости, перпендикулярной главной центральной оси поперечного сечения, относительно которой момент инерции наименьший, поэтому $P_{кр}$ вычисляют по значению главного центрального момента инерции I_{\min} .

По значению $P_{кр}$ можно определить вызванное ей критическое напряжение, т.е. напряжение, при котором форма равновесия упругого стержня становится неустойчивой:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\nu \ell)^2 F}.$$

Заменим в этом выражении I_{\min} на $F i_{\min}^2$, а также введем обозначение

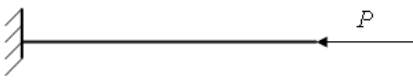
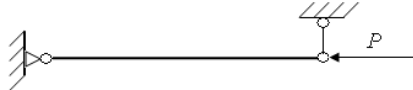
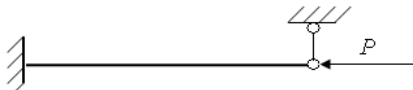
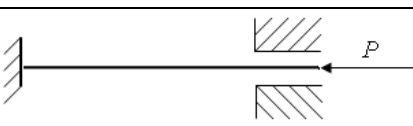
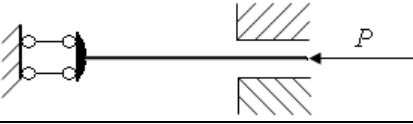
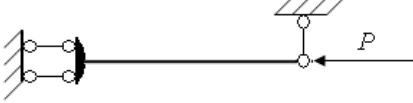
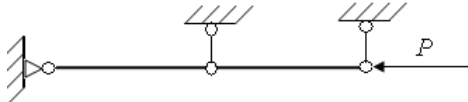
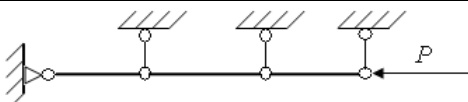
$$\lambda = \frac{\nu \ell}{i_{\min}}. \quad (4.6)$$

Получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (4.7)$$

Величина λ называется гибкостью стержня. Так как потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости, то в выражение (4.6) входит минимальный радиус инерции поперечного сечения i_{\min} .

4.3. ЗАВИСИМОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИВЕДЕНИЯ ДЛИНЫ ОТ УСЛОВИЙ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ

	Условия закрепления концов	ν
1.		2
2.		1
3.		0,7
4.		0,5
5.		1
6.		2
7.		0,5
8.		1/3

4.4. ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА И ПОЛНЫЙ ГРАФИК КРИТИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Формулы для определения критических напряжений (4.1) – (4.7) справедливы только тогда, когда напряжение $\sigma_{кр}$ в материале, вызванное критической силой, не превышает предела пропорциональности, т.е. если выполняется неравенство

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{проп} \quad (4.8)$$

Это связано с тем, что в основу вывода формул положено дифференциальное уравнение упругой линии, которое можно использовать лишь в пределах применимости закона Гука. Подставим в неравенство (4.8) выражение (4.7):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{проп};$$

$$\lambda_{пред} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{проп}}} \quad (4.9)$$

При этом правая часть неравенства (4.9) – наименьшее значение гибкости стержня, при котором формула Эйлера еще применима. Это значение гибкости называется предельным значением или предельной гибкостью.

Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня – его модуля упругости и предела пропорциональности.

Условие применимости формулы Эйлера с учетом выражения (4.9) имеет вид

$$\lambda \geq \lambda_{пред},$$

т.е. формула Эйлера применима для определения критической силы сжатого стержня при условии, что его гибкость больше или равна предельной.

Приведем значение $\lambda_{пред}$, для некоторых материалов: сталь 5 – $\lambda_{пред} = 85$; сталь 3 – $\lambda_{пред} = 110$; чугун – $\lambda_{пред} = 80$; дерево (условное) – $\lambda_{пред} = 110$.

Учитывая вышесказанное, все стержни делятся на три группы: длинные – $\lambda \geq \lambda_{пред}$, средней длины – $40 \leq \lambda \leq \lambda_{пред}$, короткие – $\lambda \leq 40$.

Для стержней средней длины критические напряжения определяются по эмпирическим формулам, предложенным профессором Ясинским:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (4.10)$$

где a и b определяемые экспериментально коэффициенты, зависящие от свойств материала.

Сталь 5	$a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа
Сталь 3	$a = 464$ МПа, $b = 3,62$ МПа
Чугун	$a = 776$ МПа, $b = 12$ МПа, $c = 0,053$ МПа
Дерево (условное)	$a = 29,3$ МПа, $b = 0,194$ МПа.

Для чугуна в формулу (4.10) добавляется еще одно слагаемое:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2.$$

При малой гибкости $\lambda \leq 40$ величина $\sigma_{кр}$ считается примерно постоянной и равной пределу текучести.

График, изображающий зависимость $\sigma_{кр}$ от гибкости стержня для Ст3 имеет следующий вид (рис. 4.3):

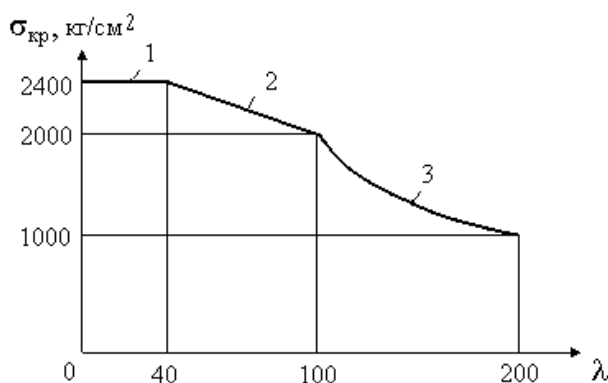


Рис. 4.3:

1 – постоянная величина, равная пределу текучести;
2 – прямая Ясинского; 3 – кривая Эйлера

Таким образом, критическими напряжениями называются напряжения, превышение которых приводит к появлению значительных необратимых деформаций (пластичные материалы) или к разрушению (хрупкие материалы). Для коротких стержней при превышении критической силы возникают только деформации сжатия, для длинных стержней – изгиба, а у стержней средней длины появляются одновременно деформации изгиба и сжатия.

Ослабление сечения стержня заклепками и болтами, а также врубками в деревянных конструкциях происходит не по всей длине, а лишь на отдельных небольших участках. Сопротивление же стержня выпучиванию зависит от жесткости стержня на всем его протяжении, поэтому местные ослабления практически не влияют на величину критической силы.

4.5. ПРАКТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Для сжатых стержней должны одновременно выполняться два условия:

- условие прочности

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma];$$

- условие устойчивости

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y],$$

где $[\sigma_y]$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость.

Выразим допускаемое напряжение $[\sigma_y]$ через $[\sigma]$, принимаемое при расчетах на прочность:

$$[\sigma_y] = \varphi[\sigma], \quad (4.11)$$

где φ – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения для сжатых стержней (коэффициент продольного изгиба).

Величина φ изменяется в пределах $0 \dots 1$, зависит от вида материала и гибкости стержня и приводится в специальных таблицах.

Условие устойчивости с учетом выражения (4.11) принимает следующий вид:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]. \quad (4.12)$$

При заданных размерах сечения проверка на устойчивость сводится к определению минимального радиуса инерции i_{\min} , гибкости λ , коэффициента φ и допускаемого напряжения на устойчивость $[\sigma_y]$. Затем определяется допускаемая нагрузка на стержень

$$P_{\text{доп}} = F\varphi[\sigma],$$

или коэффициент запаса устойчивости

$$n = \frac{P_{\text{кр}}}{P},$$

где $P_{\text{кр}}$ – определяется либо по формуле Эйлера, либо по формуле Ясинского из выражения

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F.$$

Если требуется подобрать размеры поперечного сечения, то задача решается методом последовательных приближений, так как в условие входят две неизвестных величины.

4.6. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТОВ НА УСТОЙЧИВОСТЬ С ПОДБОРОМ РАЗМЕРОВ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. Определяются геометрические характеристики поперечного сечения стойки в зависимости от величины одного из характерных размеров (в общем виде) I_{\min} , i_{\min} , F . Из выражения для площади получают зависимость для характерного размера сечения, а также выражение для гибкости в зависимости от характерного размера сечения.

2. Определяется площадь поперечного сечения (в явном виде), приняв в первом приближении $\varphi = 0,5$ (выражают значение площади из формулы (4.12)).

3. Определяется величина характерного параметра сечения.

4. Вычисляют реальное значение гибкости для данного размера сечения.

5. Для рассчитанного значения гибкости и типа материала по таблицам определяется величина φ .

6. Определяют величины напряжений, действующих в сечении и допускаемых на устойчивость, и сравнивают их.

7. Если перегрузка или недогрузка сечения стойки превышает допускаемые пределы (более 5%), то переходят к следующему приближению по φ .

8. После того, как перегрузка или недогрузка сечения стойки стала меньше допустимых пределов, находят величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Вопросы для самопроверки

К параграфу 4.1

1. Приведите пример устойчивого, неустойчивого и безразличного состояний равновесия.
2. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
3. От каких факторов зависит устойчивость формы равновесия упругой системы?
4. Чем отличается понятие устойчивости от понятия прочности?

К параграфу 4.2

5. Что называется критической силой и критическим напряжением?
6. Какое дифференциальное уравнение из теории изгиба лежит в основе вывода формулы Эйлера?
7. Какой вид имеет формула Эйлера, определяющая значение критической силы для основного и других случаев закрепления концов стержня?
8. Что называется гибкостью стержня?
9. Как влияют жесткость поперечного сечения и длина стержня на величину критической силы?
10. Какой момент инерции обычно входит в формулу Эйлера?
11. Что представляет собой коэффициент приведения длины, и чему он равен при различных условиях закрепления концов сжатых стержня?

К параграфу 4.3

12. Как влияет характер закрепления концов стержня на величину критической силы?

К параграфу 4.4

13. Что называется предельной гибкостью стержня?
14. Как устанавливается предел применимости формулы Эйлера?
15. Какой вид имеет формула Ясинского для определения критических напряжений и для стержней какой длины она применима?
16. Какой вид имеет полный график критических напряжений для СтЗ?
17. Как влияет ослабление сечения стержня на жесткость конструкции?

К параграфу 4.5

18. Что представляет собой коэффициент продольного изгиба?
19. По какой зависимости определяется коэффициент запаса прочности?

К параграфу 4.6

20. Как подбирается сечение стержня при расчете на устойчивость?
21. Какое максимальное значение перегрузки или недогрузки сечения стойки допускается при расчете на устойчивость?

5. ТОНКОСТЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Определение: Тонкостенной осесимметричной называется оболочка, имеющая форму тела вращения, толщина стенки которой весьма мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхности.

Определение: Срединной называется поверхность, равноудаленная от наружной и внутренней поверхности оболочки.

На рис. 5.1 показана срединная поверхность осесимметричной оболочки. Выделим из нее двумя меридиональными плоскостями mn_1n_2 и mn_3n_2 с углом $d\varphi$ между ними и двумя плоскостями, перпендикулярными оси симметрии оболочки, элемент $ABCD$.

Радиусы кривизны O_2A и O_2B срединной поверхности элемента в меридиональной плоскости обозначим через R_S , а радиусы кривизны O_1B и O_1C – в плоскости, перпендикулярной меридиану, обозначим через R_t (рис. 5.2).

Расчеты тонкостенных ассиметричных оболочек выполняют при проектировании различных резервуаров, поэтому нагрузки, действующие на внутреннюю поверхность оболочки, перпендикулярны этой поверхности и симметричны относительно оси симметрии оболочки. При расчете можно пренебречь изгибом поверхности оболочки и считать, что напряжения по толщине стенки оболочки распределены равномерно. Такой расчет называется расчетом по безмоментной теории.

Рассмотрим силовые факторы, действующие на выделенный элемент.

По боковым граням AB и CD , совпадающим с меридиональными плоскостями, действуют окружные напряжения σ_t , по боковым граням BC и AD действуют меридиональные напряжения σ_s (рис. 5.3). Кроме них на элемент оболочки действует нагрузка в виде внутреннего давления P , перпендикулярного поверхности $ABCD$.

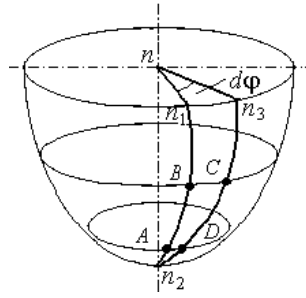


Рис. 5.1

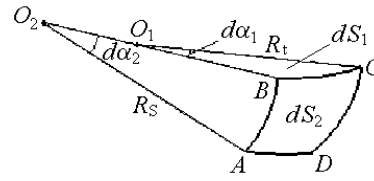


Рис. 5.2

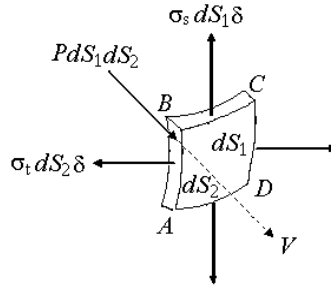


Рис. 5.3

Посмотрим на грани AB и BC сверху (рис. 5.4).

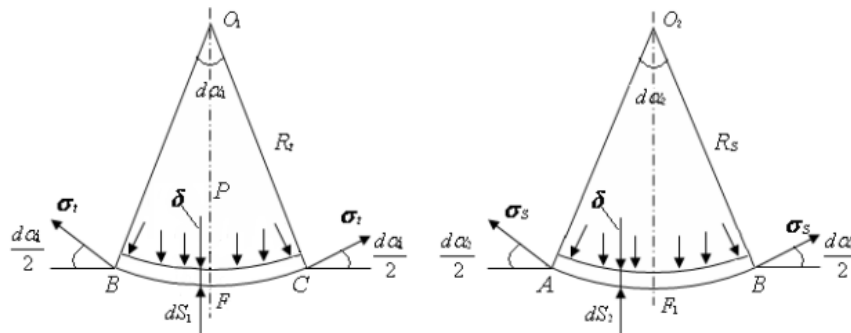


Рис. 5.4

Составим уравнение равновесия бесконечно малого элемента в виде суммы проекций приложенных сил на ось V , совпадающую с нормалью к поверхности $ABCD$:

$$PdS_1dS_2 - 2(\sigma_t dS_2 \delta) \sin \frac{d\alpha_1}{2} - 2(\sigma_s dS_1 \delta) \sin \frac{d\alpha_2}{2} = 0, \quad (5.1)$$

где δ – толщина стенки оболочки.

В этом уравнении $\sigma_t dS_2 \delta$ – сила, действующая на каждую из боковых поверхностей AB и CD выделенного элемента; $\sigma_s dS_1 \delta$ – сила, действующая на каждую из боковых граней BC и AD . Удвоенное произведение этих величин на \sin соответствующего угла $d\alpha_1/2$ и $d\alpha_2/2$ равно проекции этих сил на ось V .

Ввиду малости углов $d\alpha_1/2$ и $d\alpha_2/2$, их \sin можно считать равными значениям углов.

$$\sin \frac{d\alpha_1}{2} \approx \frac{d\alpha_2}{2} = \frac{dS_1}{2R_t} \quad (\text{из треугольника } O_1FC).$$

Аналогично:

$$\sin \frac{d\alpha_2}{2} \approx \frac{d\alpha_1}{2} = \frac{dS_2}{2R_s} \quad (\text{из треугольника } O_2F_1B).$$

Подставим значения \sin в выражение (5.1) и, сократив на величину dS_1dS_2 , получим итоговое уравнение:

$$\frac{\sigma_s}{R_s} + \frac{\sigma_t}{R_t} = \frac{P}{\delta}. \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) называется уравнением Лапласа. Уравнение Лапласа используется для определения напряжений в стенке оболочки. Однако определить из одного уравнения две неизвестные σ_t и σ_S невозможно. Поэтому составляется дополнительное уравнение равновесия части оболочки, отсеченной конической поверхностью, перпендикулярной меридиану.

Исключением является сферическая оболочка, находящаяся под действием газового давления. Для сферы $R_t = R_S = \frac{D}{2}$, где D – диаметр сферы. Для случая газового давления $\sigma_t = \sigma_S$, вследствие центральной симметрии оболочки и действующей на нее нагрузки. При этом уравнение (5.2) приводится к виду

$$\sigma_t = \sigma_S = \frac{PD}{4\delta}.$$

Для оболочки, имеющей форму цилиндра или конуса из уравнения Лапласа можно определить σ_t , даже если σ_S неизвестно, так как для этих оболочек $R_S = \infty$, т.е. меридиан оболочки представляет собой прямую линию, следовательно $\frac{\sigma_S}{R_S} = 0$, и из уравнения (5.2) получается

$$\sigma_t = \frac{PR_t}{\delta}.$$

В случае газового давления величина P постоянна во всех точках внутренней поверхности оболочки. Если оболочка заполнена жидкостью, то значение P по высоте переменное.

Если оболочка недостаточно тонкая, имеет резкие переломы в очертании, а также жесткие закрепления, то в точках сопряжения элементов расчет напряжений по безмоментной теории дает скачки величин радиальных и угловых перемещений, что противоречит условию неразрывности конструкции. Безмоментная теория справедлива для участков сосуда, находящихся на некотором удалении от точек сопряжения. В узких зонах элементов сосуда, примыкающих к точкам сопряжения, а также в кольцевой опоре возникает моментное напряженное состояние, которое носит название краевого эффекта. Исследование напряженно-деформированного состояния в зонах краевого эффекта необходимо выполнять методами моментной теории оболочек, которая в курсе сопромата не рассматривается.

Пр и м е р (рис. 5.5):

$$\begin{aligned} \delta &= h = 1 \text{ см}; \\ \alpha &= 45^\circ; \\ P &= 0,1 \text{ МПа}; \\ \gamma &= 10^{-3} \text{ кг/см}^3. \end{aligned}$$

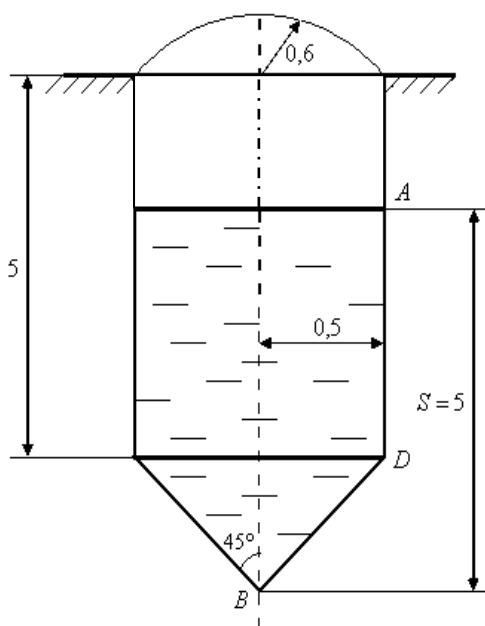


Рис. 5.5

Используем формулу Лапласа в виде

$$\frac{\sigma_t}{R_1} + \frac{\sigma_S}{R_2} = \frac{q}{h}.$$

Первый этап: рассмотрим условие равновесия для нижней конической части оболочки (рис. 5.6).

Для конического элемента главный радиус кривизны $R_2 = \infty$.

Первая точка: $x_0 = 0$ (точка B) $\sigma_t = 0$, $\sigma_S = 0$.

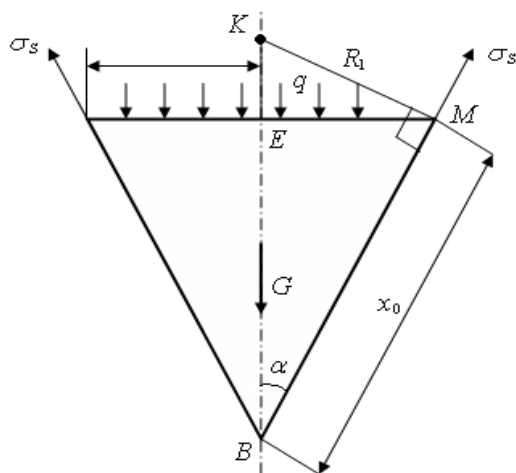


Рис. 5.6

Вторая точка: $x_0 = 0,4$ м (точка M):

$$BE = \frac{x_0}{\sin 45^\circ} = \frac{0,4}{\sin 45^\circ} = 0,283 \text{ м.}$$

Высота столба жидкости над рассматриваемой частью конуса:

$$v_{\text{верх}} = 5 - BE = 5 - 0,283 = 4,717 \text{ м.}$$

Определим величину давления в рассматриваемом сечении:

$$q = P + v_{\text{верх}} \gamma = 0,1 \text{ МПа} + 4,717 \text{ м} \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3 = 10^5 + 4,717 \cdot 10^4 = 147\,170 \text{ Н/м}^2.$$

Рассмотрим условие равновесия для отсеченной конической части:

$$\delta \sigma_s 2\pi R_l \cos \alpha - G - q\pi R_l^2 = 0.$$

Объем конической части оболочки:

$$V_{\text{нижн}} = \frac{1}{3} \pi x R_l^2 \quad (x = BE).$$

$$G = V_{\text{нижн}} \gamma.$$

$$\sigma_s 2\pi R_l \delta \cos \alpha - \frac{1}{3} \gamma \pi R_l^2 x - q\pi R_l^2 = 0.$$

$$\sigma_s 2\pi 0,01 \cdot 0,283 \cos 45^\circ - 10^4 \frac{1}{3} \pi 0,283^3 - 147\,170 \pi 0,283^2 = 0.$$

$$\sigma_s = 2,9 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 2,9 \text{ МПа.}$$

Определим величину напряжения σ_t . Из $\triangle EMK$:

$$R_1 = R_l / \cos 45^\circ = 0,283 / 0,707 = 0,4 \text{ м.}$$

$$\frac{\sigma_t}{R_1} + \frac{\sigma_s}{R_2} = \frac{q}{h}.$$

$$\frac{\sigma_t}{0,4} = \frac{147\,170}{0,01} = 5,9 \text{ МПа.}$$

Третья точка: $x_0 = BD = \frac{0,5}{\sin 45^\circ} = 0,707$ м.

$$v_{\text{верх}} = 5 - 0,5 = 4,5 \text{ м,}$$

где $v_{\text{верх}}$ – высота столба жидкости.

$$\text{Давление } q = P + v_{\text{верх}} \gamma = 10^5 + 4,5 \cdot 10^4 = 145\,000 \text{ Н/м}^2.$$

$$\sigma_S 2\pi R_t \delta \cos \alpha - \gamma \frac{1}{3} \pi R_t^2 x - q \pi R_t^2 = 0.$$

$$\sigma_S 2\pi 0,5 \cdot 0,01 \cos 45^\circ - 10^4 \frac{1}{3} \pi 0,5^3 - 145\,000 \pi 0,5^2 = 0.$$

$$\sigma_S = 5,2 \text{ МПа.}$$

$$R_1 = R_t / \cos 45^\circ = 0,5 / 0,707 = 0,71 \text{ м.}$$

$$\frac{\sigma_t}{R_1} + \frac{\sigma_S}{R_2} = \frac{q}{h}.$$

$$\frac{\sigma_t}{0,71} = \frac{145\,000}{0,01}.$$

$$\sigma_t = 10,3 \text{ МПа.}$$

Второй этап. Цилиндрическая оболочка (рис. 5.7).

Для цилиндрической части $R_2 = \infty$; $R_1 = R_t$.

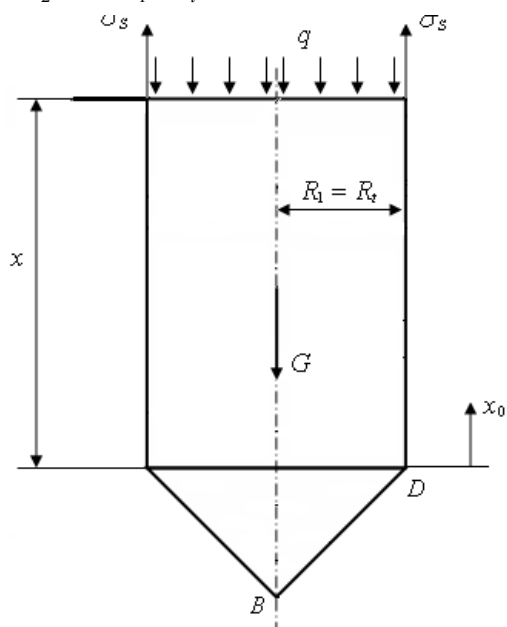


Рис. 5.7

Первая точка: $x_0 = 0$ (точка D).

Высота столба жидкости $v_{\text{верх}} = 5 - 0,5 = 4,5 \text{ м.}$

Давление $q = P + v_{\text{верх}} \gamma = 10^5 + 4,5 \cdot 10^4 = 145\,000 \text{ Н/м}^2.$

Уравнение равновесия для цилиндрической части

$$\sigma_S 2\pi R_t \delta - G - q \pi R_t^2 = 0,$$

где G – это вес отсеченной части жидкости. Для сечения, соответствующего точке D , величина G соответствует весу жидкости ниже сечения, т.е. внутри конуса.

$$\sigma_S 2\pi 0,5 \cdot 0,01 - 10^4 \pi \frac{1}{3} 0,5^3 - 145\,000 \pi 0,5^2 = 0. \quad \sigma_S = 3,7 \text{ МПа.}$$

$$\frac{\sigma_t}{R_1} + \frac{\sigma_S}{R_2} = \frac{q}{h}.$$

$$\frac{\sigma_t}{0,5} = \frac{145\,000}{0,01} \quad \sigma_t = 7,3 \text{ МПа.}$$

Вторая точка: $x_0 = 4,5$ м (точка A на рис. 5.5).

Высота столба жидкости $v_{\text{верх}} = 0$.

Давление $q = P = 0,1 \text{ МПа} = 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Вес жидкости складывается из веса в конусе и веса в цилиндрической части:

$$G = G_{\text{кон}} + G_{\text{цил}} = \gamma \frac{1}{3} \pi R_t^2 x + \gamma \pi R_t^2 x_0 = 10^4 \frac{1}{3} \pi 0,5^2 0,5 + 10^4 \pi 0,5^2 4,5 = 36\,652 \text{ Н.}$$

Уравнение равновесия для цилиндрической части:

$$\sigma_s 2\pi R_t \delta - G - q\pi R_t^2 = 0.$$

$$\sigma_s 2\pi 0,5 \cdot 0,01 - 36\,652 - 10^5 \pi 0,5^2 = 0.$$

$$\sigma_s = 3,7 \text{ МПа.}$$

$$\frac{\sigma_t}{R_1} + \frac{\sigma_s}{R_2} = \frac{q}{h}.$$

$$\frac{\sigma_t}{0,5} = \frac{10^5}{0,01} \quad \sigma_t = 5 \text{ МПа.}$$

Третья точка: $x_0 = 5$ м (близко к опоре {непосредственно касается опоры}).

Высота столба жидкости $v_{\text{верх}} = 0$.

Давление $q = P = 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Вес жидкости в отсеченной части тот же, что и для предыдущей точки, так как ее уровень соответствует уровню предыдущей точки:

$$G = 36\,652 \text{ Н;}$$

$$\sigma_s 2\pi R_t \delta - 36\,652 - 10^5 \pi 0,5^2 = 0,$$

откуда $\sigma_s = 3,7 \text{ МПа}$.

$$\frac{\sigma_t}{R_1} = \frac{q}{h};$$

$$\frac{\sigma_t}{0,5} = \frac{10^5}{0,01}; \quad \sigma_t = 5 \text{ Па.}$$

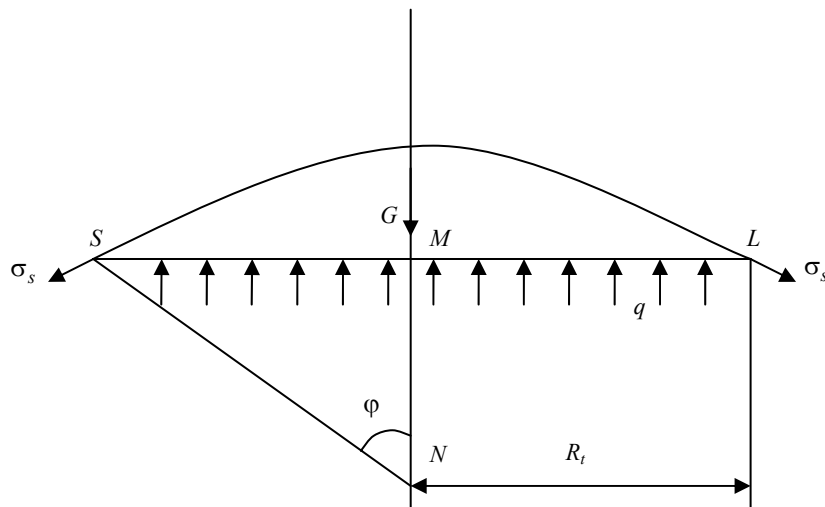


Рис. 5.8

Третий этап. Сферическая часть рассматриваемого элемента расположена выше кольцевой опоры, следовательно, для составления уравнения равновесия будем рассматривать верхнюю отсеченную часть (рис. 5.8).

Для сферического элемента $R_1 = R_2$ и равно радиусу, образующему этот элемент, т.е. $R_1 = R_2 = 0,6$ м.

Первая точка (L) соответствует точке сопряжения цилиндрической и сферической частей:

$$R_l = 0,5 \text{ м.}$$

Давление $q = P = 10^5$ Н/м².

Из треугольника NMS имеем:

$$SM = R_l = 0,5 \text{ м;}$$

$$NS = R_1 = 0,6 \text{ м.}$$

$$\text{Тогда } \sin \varphi = \frac{SM}{NS} = \frac{0,5}{0,6} = 0,833 .$$

$$\varphi \approx 56^\circ 44' .$$

Так как у нас в отсеченной части сферы отсутствует жидкость, то ее вес $G = 0$.

Уравнение равновесия

$$\sigma_s 2\pi R_l \delta \sin \varphi - q\pi R_l^2 = 0 .$$

$$\sigma_s 2\pi 0,5 \cdot 0,01 \cdot 0,833 - 10^5 \pi 0,5^2 = 0 .$$

$$\sigma_s \approx 3 \text{ МПа.}$$

$$\frac{\sigma_t}{R_1} + \frac{\sigma_s}{R_2} = \frac{q}{h} .$$

$$\frac{\sigma_t}{0,6} + \frac{3 \cdot 10^6}{0,6} = \frac{10^5}{0,01} ,$$

откуда $\sigma_t \approx 3$ МПа.

Вторая точка: $\varphi = 25^\circ$:

$$R_l = NS \sin \varphi = 0,6 \cdot 0,423 = 0,254 \text{ м (из } \Delta NMS \text{).}$$

Давление $q = P = 10^5$ Н/м².

$$\sigma_s 2\pi R_l \delta \sin \varphi - q\pi R_l^2 = 0 .$$

$$\sigma_s 2\pi 0,254 \cdot 0,423 \cdot 0,01 - 10^5 \pi 0,254^2 = 0 .$$

$$\sigma_s \approx 3 \text{ МПа.}$$

Уравнение Лапласа будет иметь тот же вид, что и для предыдущей точки.

$$\frac{\sigma_t}{0,6} + \frac{3 \cdot 10^6}{0,6} = \frac{10^5}{0,01} , \quad \sigma_t \approx 3 \text{ МПа.}$$

Третья точка (купольная точка).

При значении $\varphi = 0$ необходимо получить зависимость для расчета напряжения σ_s :

$$\sigma_s 2\pi R_l \delta \sin \varphi - q\pi R_l^2 = 0 .$$

$$\sigma_s = \frac{q\pi R_l^2}{2\pi R_l \delta \sin \varphi} .$$

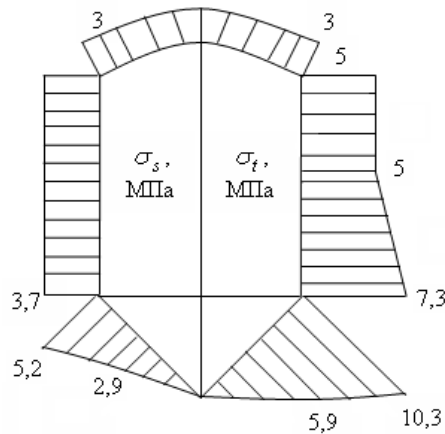


Рис. 5.9

Однако, в нашем случае $q = P$ и из ΔNMS $R_1 = R_1 \sin \varphi$.

$$\sigma_s = \frac{PR_1 \sin \varphi}{2\delta \sin \varphi} = \frac{PR_1}{2\delta} = \frac{10^5 \cdot 0,6}{2 \cdot 0,01} = 3 \text{ МПа.}$$

$$\frac{\sigma_t}{0,6} + \frac{3 \cdot 10^6}{0,6} = \frac{10^5}{0,01} \cdot \sigma_t = 3 \text{ МПа.}$$

Окончательная эпюра напряжений показана на рис. 5.9.

Вопросы для самопроверки

К параграфу 5.1

1. Дайте определение тонкостенной осесимметричной оболочки.
2. Что называется срединной поверхностью осесимметричной оболочки?
3. Какое допущение используется при расчете оболочек по безмоментной теории?
4. Какой вид имеет формула Лапласа?
5. В чем заключаются особенности расчета конической и цилиндрической оболочек вращения?
6. Что представляет собой дополнительное уравнение для определения окружных и меридиональных напряжений в стенке осесимметричной оболочки?
7. Для каких участков сосуда расчет по безмоментной теории неприменим?

6. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА

Под динамической нагрузкой понимают два вида напряжений: 1) напряжения в движущихся деталях; 2) напряжения при ударе.

Расчет на действие динамической нагрузки производят при проектировании частей конструкций, находящихся под действием ударной и вибрационной нагрузки, создаваемой станками, двигателями, молотами и другими механизмами. Эти нагрузки вызывают колебания сооружений. Многие части машин также находятся под действием динамической нагрузки.

Цель динамического расчета: обеспечение необходимой прочности конструкции и недопущение значительных деформаций.

При динамической нагрузке любой элемент конструкции в каждый момент времени можно рассматривать как находящийся в состоянии равновесия под действием внешних сил, усилий, представляющих собой действие соседних элементов и сил инерции. Это положение носит название принципа Даламбера.

Задача рассмотрения этих видов нагружения сводится к получению зависимостей, связывающих их со статической нагрузкой. Рассмотрим некоторые варианты нагружения.

6.1. РАВНОУСКОРЕННЫЙ ПОДЪЕМ ГРУЗА

Рассмотрим вариант подъема груза с помощью троса длиной x (рис. 6.1).

На данной схеме: x – длина троса; F – площадь поперечного сечения троса; γ – удельный вес материала троса; a – ускорение при подъеме (груз поднимается равноускоренно).

Рассмотрим действие динамической силы:

$$P_d = Q + \gamma Fx + ma = Q + \gamma Fx + \frac{Q + \gamma Fx}{g} a = (Q + \gamma Fx) \left(1 + \frac{a}{g} \right). \quad (6.1)$$

Статическое напряжение (при равномерном подъеме груза) определяется зависимостью

$$\sigma_{ст} = \frac{Q + \gamma Fx}{F}.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_d = \frac{P_d}{F} = \frac{(Q + \gamma Fx)}{F} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{ст} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_{ст} \kappa_d, \quad (6.2)$$

где κ_d – динамический коэффициент (не может быть меньше 1).

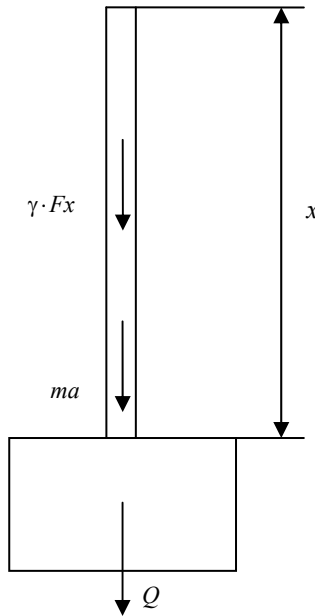


Рис. 6.1

Таким образом, эффект динамического воздействия больше статического, а так как допускаемые напряжения не связаны с характером динамически сил, то

$$\sigma_d = \kappa_d \sigma_{ст} \leq [\sigma].$$

6.2. РАСЧЕТ ОБОДА МАХОВИКА

Обод с радиусом R (средний радиус) и площадью поперечного сечения обода F вращается с угловой скоростью ω . Влиянием спиц пренебрегаем (рис. 6.2).

Выделим бесконечно малый элемент обода длиной dS (рис. 6.3). При движении сила инерции направлена от центра. Масса выделенного элемента может быть найдена по формуле

$$dm = \frac{V\gamma}{g}, \quad (6.3)$$

где V – объем элемента; γ – удельный вес материала обода.

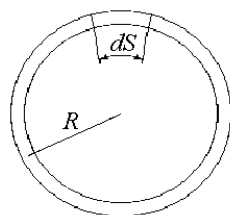


Рис. 6.2

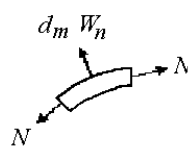


Рис. 6.3

Однако

$$V = FdS .$$

После подстановки в формулу (6.3) получим:

$$dm = \frac{FdS\gamma}{g} . \quad (6.4)$$

Как известно из курса теоретической механики нормальное ускорение может быть найдено по формуле

$$W_n = \omega^2 R . \quad (6.5)$$

Запишем условие равновесия для половины обода маховика (рис. 6.4).

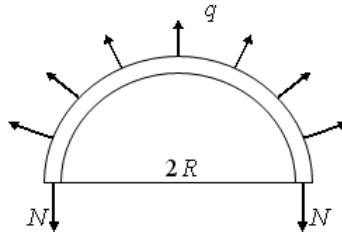


Рис. 6.4

Интенсивность действия распределенной нагрузки может быть найдена по формуле

$$q = \frac{W_n dm}{dS} . \quad (6.6)$$

Подставим в выражение (6.6) выражения (6.4) и (6.5):

$$q = \frac{\omega^2 RF\gamma}{g} .$$

Усилия N противодействуют распределенной нагрузке, следовательно:

$$2N = 2qR ,$$

откуда

$$N = qR = \frac{\omega^2 R^2 F\gamma}{g} .$$

Динамическое напряжение может быть определено по формуле

$$\sigma_d = \frac{N}{F} = \frac{\omega^2 R^2 \gamma}{g} . \quad (6.7)$$

6.3. НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ УДАРЕ

Если груз, двигаясь с некоторой скоростью, приходит в соприкосновение с неподвижной системой, то это явление называется ударом. При этом предполагается, что удар неупругий, т.е. груз после соприкосновения с системой движется совместно с ней. В тот момент, когда скорость перемещения груза становится равной 0, деформации конструкции и напряжения в ней достигают своих наибольших значений.

Целью расчета на удар является определение наибольших деформаций и напряжений. В основе приближенной теории удара, рассматриваемой в курсе сопротивления материалов, лежит гипотеза о том, что эпюра перемещений системы от воздействия груза P при ударе подобна эпюре перемещений, возникающих от этого же груза, но действующего статически.

Рассмотрим падение груза P с высоты h на двухопорную балку. Эпюра наибольших динамических прогибов изображена на рис. 6.5.

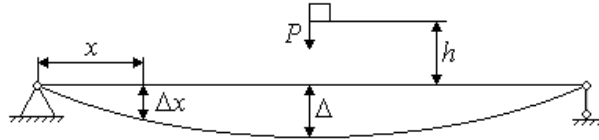


Рис. 6.5

Эпюра от действия статической нагрузки изображена на рис. 6.6.

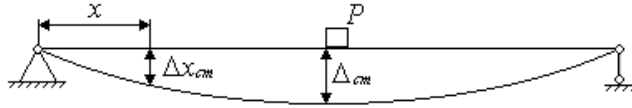


Рис. 6.6

Из рисунков видно, что эпюра перемещений системы от груза P при ударе в любой момент времени подобна эпюре перемещений, возникающих от действия того же груза при статическом воздействии. Тогда прогиб балки на расстоянии x от левого края определяется зависимостью

$$\frac{\Delta x}{\Delta x_{ст}} = \frac{\Delta}{\Delta_{ст}} = \kappa_d, \quad (6.8)$$

где κ_d – динамический коэффициент; Δ – наибольшая деформация по направлению груза P .

Работа, совершаемая грузом при падении с высоты h , определяется зависимостью

$$A = P(h + \Delta).$$

В момент, когда деформации системы достигают максимального значения, скорости движения груза и системы, а следовательно, и их кинетическая энергия равны 0. Потенциальная энергия упругой системы равна

$$U = P(h + \Delta). \quad (6.9)$$

Динамическое усилие можно получить путем перемножения статического действия силы P на коэффициент κ_d :

$$S = P\kappa_d.$$

Тогда потенциальная энергия деформированной системы определяется зависимостью

$$U = \frac{1}{2} S\Delta = \frac{1}{2} P\kappa_d\Delta. \quad (6.10)$$

Приравняем правые части выражений (6.9) и (6.10):

$$P(h + \Delta) = \frac{1}{2} P\kappa_d\Delta,$$

или

$$2(h + \Delta) = \kappa_d\Delta. \quad (6.11)$$

Согласно формуле (6.8) $\kappa_d = \frac{\Delta}{\Delta_{ст}}$. После подстановки в (6.11) получаем:

$$\begin{aligned} 2\Delta_{ст}(h + \Delta) &= \Delta^2, \\ \Delta^2 - 2\Delta_{ст}\Delta - 2\Delta_{ст}h &= 0; \end{aligned}$$

тогда

$$\Delta = \Delta_{ст} + \sqrt{\Delta_{ст}^2 + 2\Delta_{ст}h}.$$

Разделим левую и правую части полученной зависимости на $\Delta_{ст}$, тогда

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{ст}}. \quad (6.12)$$

Напряжения при ударе связаны со статическими напряжениями величиной

$$\kappa_d = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}},$$

откуда

$$\sigma_d = \kappa_d \sigma_{ст}. \quad (6.13)$$

Таким образом, динамические напряжения всегда больше статических на величину $\kappa_d > 1$.

Для определения наибольших напряжений и перемещений при ударе, напряжения и перемещения, найденные при расчете системы от силы P , действующей статически, следует умножить на динамический коэффициент или рассчитать систему на действие статической силы, равной $P\kappa_d$.

6.4. УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ

Упругие колебания возможны при приложении к системе некоторой силы и ее мгновенном удалении – это свободные или собственные колебания. Вынужденные – колебания системы, происходящие при действии на нее переменных внешних сил.

Рассмотрим балку с грузом P (рис. 6.7).

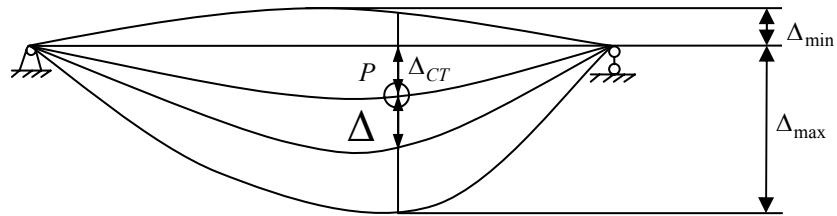


Рис. 6.7

Прогиб балки от силы $P + P_i$:

$$P + P_i = \Delta + \Delta_{СТ} = (P + P_i)\delta.$$

Прогиб балки от положения равновесия:

$$\Delta = P_i\delta, \quad (6.14)$$

где P_i – сила инерции груза в рассматриваемый момент времени; δ – прогиб балки под грузом от действия силы $P = 1$.

Сила инерции равна произведению массы на ускорение и направлена в сторону, противоположную ускорению:

$$P_i = -ma = -\frac{Pd^2\Delta}{gdt^2}.$$

Подставим вместо P_i величину $\frac{\Delta}{\delta}$ (из формулы (6.14)):

$$\frac{Pd^2\Delta}{gdt^2} + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (6.15)$$

Эта зависимость является дифференциальным уравнением свободных колебаний системы с одной степенью свободы.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Delta = A \cos(\omega t + B), \quad (6.16)$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}}$, A и B – постоянные интегрирования. Величина ω представляет собой число свободных колебаний, совершенных системой за 2π секунд и называется частотой свободных колебаний.

Промежуток времени T , за который система совершает одно свободное колебание, называется периодом свободных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{P\delta}{g}}$$

Наибольший прогиб A от положения статического равновесия называется амплитудой колебаний.

Если отложить по оси абсцисс время t , а по оси ординат прогиб Δ , то график колебаний будет иметь вид, представленный на рис. 6.8.

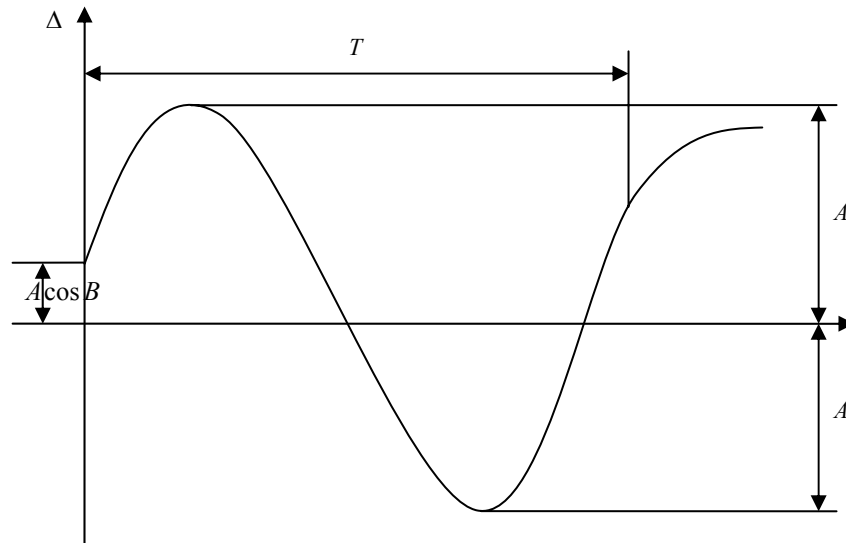


Рис. 6.8

При совпадении частоты возмущающей силы с частотой собственных колебаний возникает явление резонанса. При этом возрастает амплитуда колебаний и напряжения в системе, что может привести к разрушению, поэтому при расчете конструкций, находящихся под действием возмущающих сил, основной задачей является обеспечение различия частоты собственных колебаний и частоты возмущающей нагрузки.

6.5. НАПРЯЖЕНИЯ, ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ ВО ВРЕМЕНИ

Напряжения, переменные во времени, возникают в элементах конструкции под действием нагрузок переменных по величине или направлению, а также нагрузок, перемещающихся относительно рассматриваемого элемента.

Определение: Процесс постепенного накопления повреждений материала при действии повторно-переменных напряжений, приводящий к образованию трещин и разрушению, называется усталостью материала.

Опыты позволили установить, что разрушение материала происходит при напряжениях, значительно меньше предельных, получаемых при однократном нагружении. Причиной является наличие неоднородности структуры (зерна, микротрещины), в окрестности которых материал обладает пониженной прочностью. При однократном нагружении происходит перераспределение напряжений, и материал не разрушается. При многократном нагружении в окрестности точек с пониженной прочностью возникают микротрещины. У концов этих трещин возникает высокая концентрация напряжений, что приводит к их развитию, причем усталостное разрушение происходит всегда внезапно, независимо от того, является ли материал хрупким или пластичным. Проверка прочности от действия таких напряжений называется расчетом на выносливость или усталостную прочность.

Основные факторы, влияющие на величину предела выносливости:

1. Снижение предела выносливости за счет концентраторов напряжений (выточки, отверстия, шпоночные канавки, прессовые посадки и т.д.).
2. Влияние состояния поверхности детали (риски и повреждения, а также коррозия поверхности).
3. Влияние абсолютных размеров детали.

Предел выносливости детали можно повысить путем поверхностной термической обработки или термохимической обработки (цементация, азотирование), обкаткой поверхности роликами или обдувкой стальной или чугунной дробью.

6.6. ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ И ВЯЗКОСТЬ

На практике необходимо разграничить два вопроса: возникновение пластических деформаций и начало разрушения. Все, что до сих пор говорилось, относится в основном к первой задаче. Второй вопрос, включающий в себя термин "разрушение" не обладает четкостью и является более сложным и менее определенным понятием.

Если мы говорим о разрушении конструкции, то это потеря ее функциональных свойств, т.е. переход в такое состояние, когда она по тем или иным причинам перестает удовлетворять своему назначению. Это может

быть: необратимое изменение формы, износ или выработка посадочных поверхностей, излом или разрыв ответственного узла.

С другой стороны, образование видимой невооруженным глазом трещины не всегда рассматривается как разрушение. Таким образом, понятие разрушения конструкции тесно смыкается с понятием надежности, и в курсе сопромата вопросы разрушения так широко не рассматриваются. У нас разрушение рассматривается как свойство материала, но и эта проблема достаточно сложная, так как в различных условиях разрушение материала может проявляться в различных формах.

Не совсем ясно, если мы говорим о разрушении детали или образца, то правомерно ли говорить о разрушении материала. Если считать, что за разрушение несет ответственность напряженное состояние в точке, то под разрушением материала следует понимать образование первых микротрещин в окрестности рассматриваемой точки. Однако нередко изначально в каждом материале имеется множество "затаившихся" микротрещин. Они приходят в движение только под действием высоких напряжений, причем не напряжений в точке, а тотальных – охватывающих значительные объемы на пути развития трещин. Поэтому понятие механизма разрушения является сложным и неоднозначным.

6.7. МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ ГРИФФИТСА

Модель разрушения Гриффитса построена на энергетической оценке развития трещин.

Пусть в краевой области плоского растянутого образца существует сквозная поперечная трещина, причем ее глубина c гораздо меньше поперечных размеров образца (рис. 6.9). Напряжения в объеме образца распределены равномерно, за исключением области, примыкающей к трещине.

У края трещины возникает местный пик напряжений, а сверху и снизу они уменьшены (заштрихованная область). Дадим приращение Δc длине трещины c . Это приведет к увеличению заштрихованной области, и освободится часть упругой энергии образца, а учитывая, что она пропорциональна величине σ^2/E , то уменьшение энергии вследствие удлинения трещины будет равно

$$U = A \frac{\sigma^2}{E} ct \Delta c,$$

где A – коэффициент, зависящий от формы трещины и ее расположения.

Для образования свободной поверхности необходимо произвести работу. Пусть γ – работа, пошедшая на образование единицы свободной поверхности материала. Если длина трещины увеличилась на Δc , то свободная поверхность увеличилась на $2t\Delta c$. Цифра 2 появилась за счет того, что трещина имеет две поверхности.

Работа, пошедшая на удлинение трещины, равна

$$A = \gamma 2t \Delta c.$$

Если освобождаемая свободная энергия больше работы, затраченной на образование трещины, то условие развития трещины

$$A \frac{\sigma^2}{E} ct \Delta c > \gamma 2t \Delta c, \quad (6.17)$$

откуда

$$c > \frac{\gamma 2E}{A\sigma^2}. \quad (6.18)$$

Данное выражение показывает, что для каждого материала и определенного уровня напряжений имеется критический размер трещины. Если размер трещины меньше критического, разрушения не происходит. Это объясняет, что, несмотря на наличие микротрещин, материал обладает свойством прочности.

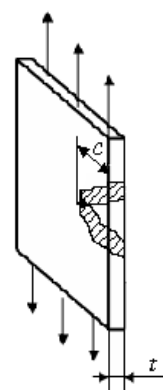


Рис. 6.9

Вопросы для самопроверки

К параграфу 6.1

1. Какие нагрузки называются статическими, и какие – динамическими?
2. В чем заключается принцип Даламбера?
3. Какова величина динамического коэффициента при равноускоренном подъеме груза?

К параграфу 6.2

4. Как выглядит формула для расчета динамических напряжений при расчете обода маховика?

К параграфу 6.3

5. Какое явление называется ударом?
6. Какая гипотеза лежит в основе приближенной теории удара, рассматриваемой в курсе сопротивления материалов?

7. Как связаны наибольшие напряжения и перемещения при ударе с напряжениями и перемещениями, найденными при расчете системы от той же силы, действующей статически?

8. Что называется динамическим коэффициентом при ударе?

К параграфу 6.4

9. Какие колебания называются свободными или собственными?

10. Какие колебания называются вынужденными?

11. Запишите дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы.

12. Что называется частотой и периодом свободных колебаний системы, и по каким формулам они определяются?

13. Что называется амплитудой колебаний?

14. Что представляет собой явление резонанса?

К параграфу 6.5

15. Какое явление называется усталостью металла?

16. Каковы основные факторы, влияющие на величину предела выносливости?

17. Как можно повысить предел выносливости детали?

К параграфу 6.6

18. В чем сложность и неоднозначность понятия механизма разрушения материала?

К параграфу 6.7

19. Чем определяется величина критического размера трещины?

20. На чем базируется модель разрушения Гриффитса?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

"Сопротивление материалов" является первой инженерной дисциплиной в учебном плане высшего технического учебного заведения по любой специальности. Изучая сопротивление материалов, студенты знакомятся с примерами расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Приобретенные при этом знания в значительной степени облегчают усвоение последующих специальных дисциплин. В сопротивлении материалов опыт и теория тесно увязаны между собой, наука эта является одновременно теоретической и опытной.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов, поэтому приступать к изучению дисциплины можно только после изучения указанного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
2. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 623 с.
3. Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М. : Высшая школа, 1983. – 303 с.
4. Миролубов, И.Н. Пособие по решению задач по сопротивлению материалов : учебное пособие для технических вузов / И.Н. Миролубов и др. – М. : Высшая школа, 1985. – 399 с.
5. Бояршинов, С.В. Основы строительной механики машин / С.В. Бояршинов. – М. : Машиностроение, 1973. – 456 с.
6. Селиванов, Ю.Т. Сопротивление материалов. Ч. I. / Ю.Т. Селиванов. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2007. – 75 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ ..	3
1.1. Сложное сопротивление	3
1.2. Порядок построения эпюр для ломаного (пространственного) бруса	5
1.3. Косой изгиб	11
1.4. Внецентренное растяжение и сжатие брусьев	16
Вопросы для самопроверки	20
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ...	21
2.1. Общее выражение для работы внешних сил и потенциальной энергии	21
2.2. Теорема о взаимности работ	27
2.3. Теорема о взаимности перемещений	29
2.4. Интеграл Мора	30
2.5. Правило Верещагина	33
Вопросы для самопроверки	36
3. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ	37
3.1. Статическая неопределимость	37
3.2. Метод сил. Основная и эквивалентная системы	39
3.3. Канонические уравнения метода сил	40
3.4. Исследование симметрии при решении статически неопределимых систем	41
3.5. Определение перемещений в статически неопределимых системах	44
Вопросы для самопроверки	44
4. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ	45
4.1. Общие положения	45
4.2. Вывод формулы Эйлера для определения критической силы	46
4.3. Зависимость значений коэффициента приведения длины от условий закрепления концов стержня	49
4.4. Пределы применимости формулы Эйлера и полный график критических напряжений	50
4.5. Практическая формула для расчета на устойчивость	52
4.6. Порядок выполнения расчетов на устойчивость с подбором размеров поперечного сечения	53
Вопросы для самопроверки	53
5. ТОНКОСТЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ	55
Вопросы для самопроверки	65
6. ДИНАМИЧЕСКАЯ НАГРУЗКА	66
6.1. Равноускоренный подъем груза	66
6.2. Расчет обода маховика	67
6.3. Напряжения при ударе	69
6.4. Упругие колебания	71
6.5. Напряжения, циклически изменяющиеся во времени	73
6.6. Хрупкое разрушение и вязкость	74
6.7. Модель разрушения Гриффитса	75
Вопросы для самопроверки	76
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	77
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	77