

РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Издательство ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Методические указания
к выполнению курсового задания
по теоретической механике для студентов первого курса
строительных специальностей



Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

УДК 531.25
ББК В251.6Я73-5
Т524

Рекомендовано Редакционно-издательским советом университета.

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
В.Ф. Першин

Составители:
В.Н. Толмачев, Т.В. Рындина

Т524 Расчёт плоской фермы : методические указания / сост. : В.Н. Толмачёв, Т.В. Рындина. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 12 с. – 150 экз.

Приведены курсовые задания для расчёта плоской фермы, предусмотренные программой курса теоретической механики для студентов строительных специальностей. Рассмотрен пример выполнения задания на основе использования методов графостатики с соответствующими методическими указаниями.

Предназначается для студентов строительных специальностей очной формы обучения.

УДК 531.25

ББК В251.6Я73-5

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный
технический университет» (ТГТУ), 2009

Учебное издание

РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Методические указания

Составители:

ТОЛМАЧЁВ Владимир Николаевич
РЫНДИНА Татьяна Вениаминовна

Редактор З.Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М.А. Филатова

Подписано в печать 17.03.2009.

Формат 60 × 84/8. 1,39 усл. печ. л. Тираж 150 экз. Заказ № 101.

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

При изучении курса «Теоретическая механика» (раздел «Статика») студентами строительных специальностей выполняется курсовое задание, предусмотренное учебным планом, связанное с расчётом плоской фермы. Настоящие методические указания предназначены для усвоения методов расчёта плоской фермы как аналитическим, так и графическим способами. Все чертежи должны быть выполнены аккуратно с использованием выбранного масштаба.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дана плоская ферма, в узлах которой приложены силы $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$. Весом стержней фермы пренебречь. Схема и исходные данные для расчёта выбираются студентом в соответствии со своим вариантом на рис. 1 и в табл. 1.

Определить:

- 1) реакции опор фермы аналитическим способом;
- 2) реакции опор фермы графическим способом;
- 3) погрешность при расчёте графическим методом;
- 4) усилия в стержнях фермы методом вырезания узлов:
 - а) аналитически, составляя условие равновесия сходящейся системы сил для каждого узла фермы;
 - б) графически, используя условие равновесия в виде замкнутого силового многоугольника, построенного с учётом выбранного масштаба, для каждого узла фермы;
- 5) усилия в стержнях фермы путём построения диаграммы Кремоны;
- 6) усилия в заданных стержнях фермы методом Риттера.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Для определения опорных реакций следует использовать условие равновесия для плоской системы сил.

При определении опорных реакций графическим способом учесть условие равновесия в виде замкнутости силового и веревочного многоугольников. Построение веревочного многоугольника целесообразно начать из точки на основном чертеже, в которой направление искомой силы реакции неизвестно. Построение как силового, так и вычерчивание основного чертежа плоской фермы необходимо проводить с учётом выбранного масштаба.

При определении погрешности использования графического метода сравнить их результаты с результатами аналитических расчётов, проведёнными в пункте 1 постановки задачи.

Определение усилий в стержнях фермы провести после определения значений опорных реакций. При использовании графических методов исходный чертёж фермы и все остальные построения должны проводиться с учётом выбранного масштаба. Чрезвычайно важным является не только определение величины усилий, но и их направление, обуславливающее состояние стержней. Необходимо иметь в виду, что при проведении аналитических расчётов или графических построений определяются не усилия в стержнях фермы, а их реакции. Состояние стержней фермы (сжатие – растяжение) устанавливается с учётом аксиомы взаимодействия.

При вырезании соответствующего узла необходимо иметь в виду, что система сил, действующая в каждом узле фермы, является сходящейся (условие равновесия записывается в виде системы двух алгебраических уравнений или из условия замкнутости соответствующего силового многоугольника). Поэтому необходимо выбирать для рассмотрения каждый раз те узлы фермы, в которых имеются не более двух неизвестных реакций. При рассмотрении предпоследнего узла фермы реакция оказывается уже найденной, что позволяет оценить правильность решения задачи этим способом. В последнем узле все реакции уже известны, поэтому рассмотрение условия равновесия сил, приложенных в этом узле, может служить в качестве проверочного.

При построении диаграммы Кремоны необходимо обратить внимание на корректность использования принятой методологии. Для правильного обозначения внешних областей все силы, приложенные к ферме, необходимо показывать внешним образом по отношению к рассматриваемой конструкции. Построение диаграммы следует начинать с построения многоугольника, соответствующего силам, действующим на ферму. Далее достраивать диаграмму, рассматривая узлы, в которых имеются не более двух неизвестных реакций. Определение величины и направления усилий в стержнях фермы необходимо определять с учётом принятой методологии.

При определении погрешности использования графических методов сравнить их результаты с результатами аналитических расчётов, проведёнными в пункте 4а) постановки задачи.

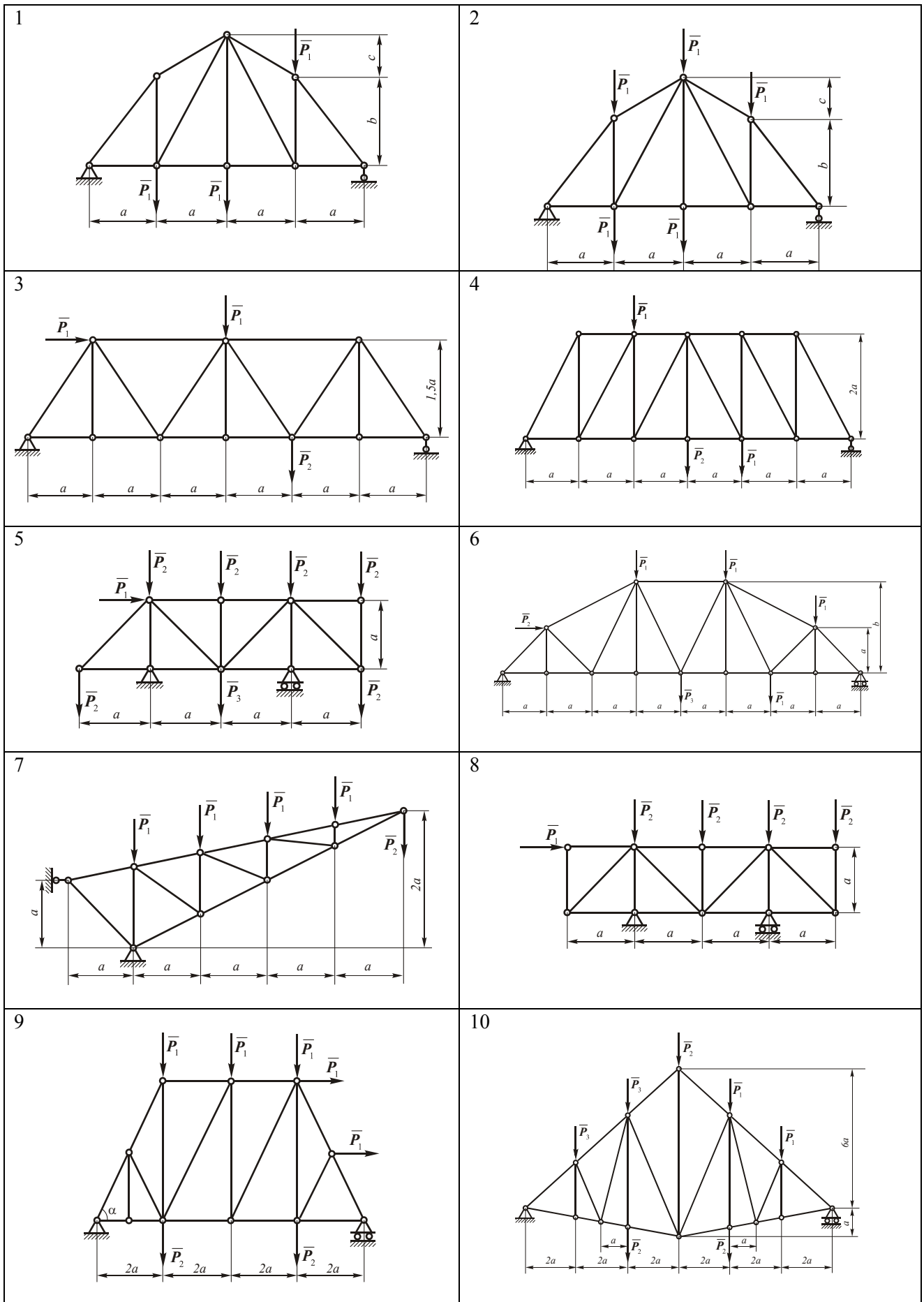


Рис. 1

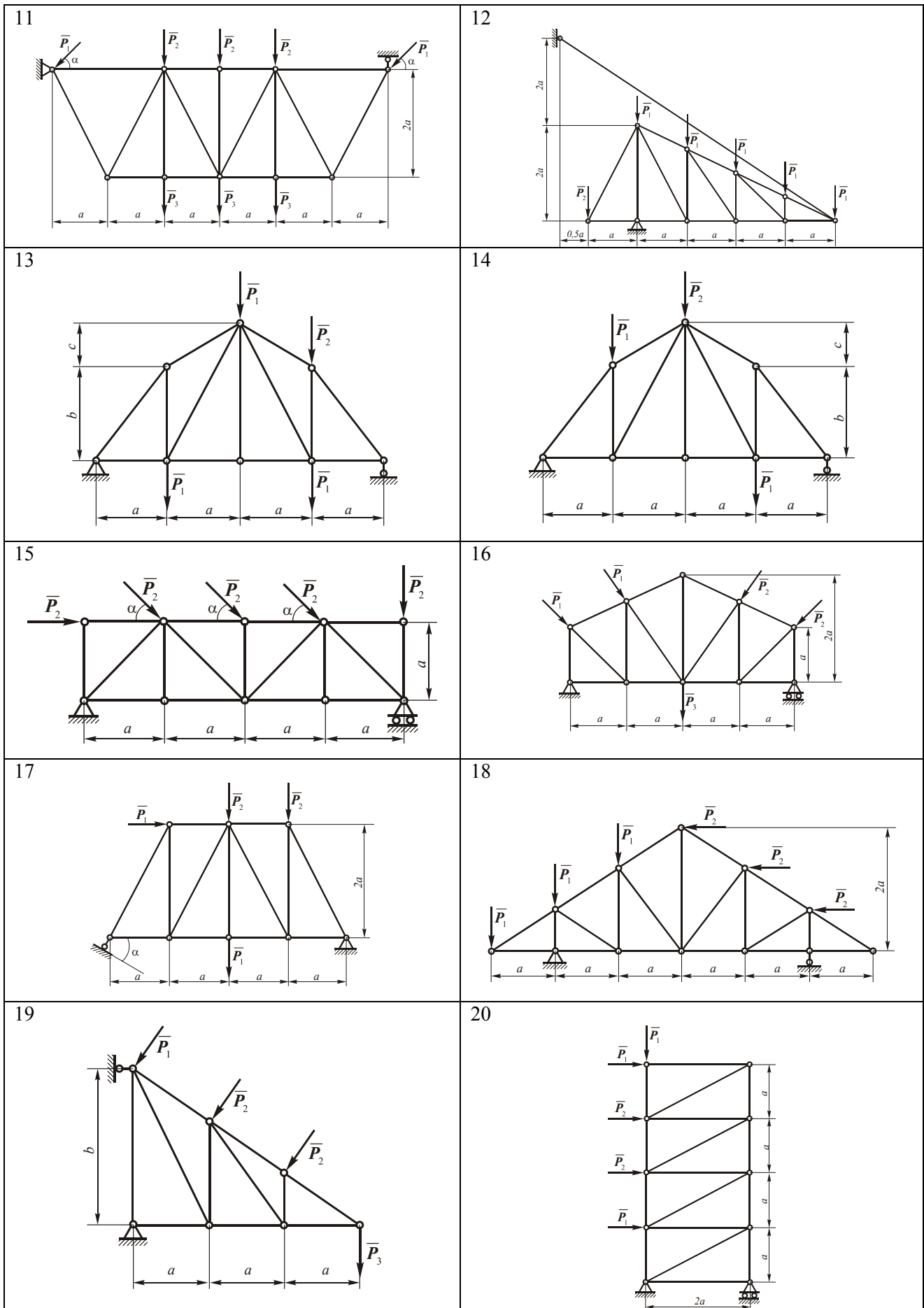


Рис. 1. Продолжение

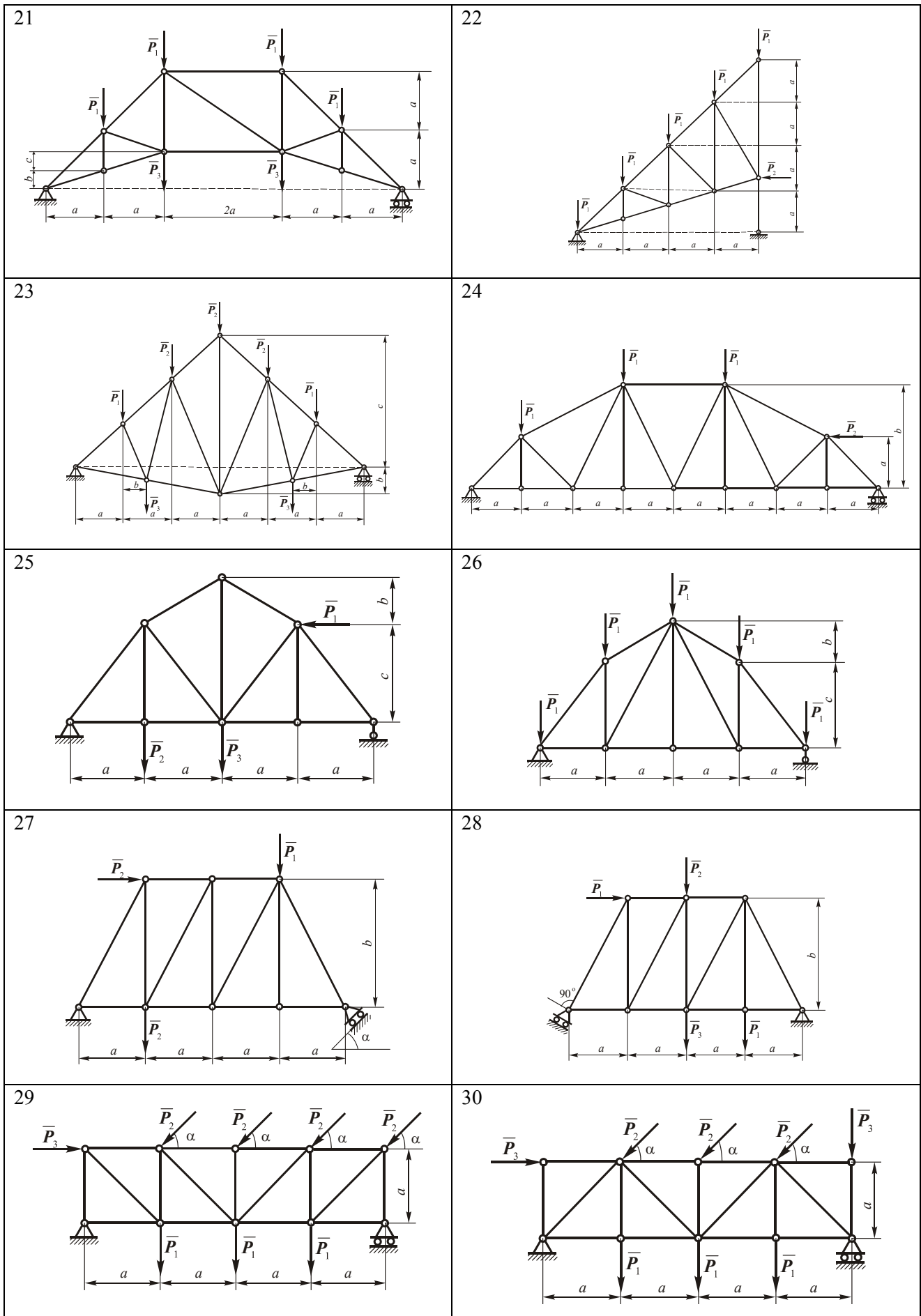


Рис. 3. Продолжение

Таблица 1

Номер варианта	P_1	P_2	P_3	a	b	c	α	Номер варианта	P_1	P_2	P_3	a	b	c	α
	кН			м			град		кН			м			град
1	4	–	–	2	3	1	–	16	3	4	–	3	–	–	–
2	6	–	–	3	4	1	–	17	4	3	–	6	–	–	60
3	4	3	–	4	–	–	–	18	6	4	–	6	–	–	–
4	8	7	–	3	–	–	–	19	6	5	–	2	10	–	–
5	4	5	3	4	–	–	–	20	6	4	8	3	–	–	–
6	2	4	3	4	6	–	–	21	4	–	–	4	2	1	–
7	3	4	–	2	–	–	–	22	3	4	3	3	–	–	–
8	4	3	–	5	–	–	–	23	1	2	–	4	2	6	–
9	3	6	–	4	–	–	60	24	1	3	3	3	6	–	–
10	2	4	3	4	–	–	–	25	2	3	–	4	3	1	–
11	3	2	4	2	–	–	45	26	4	–	5	4	3	1	–
12	4	3	–	2	–	–	–	27	6	2	–	2	6	–	60
13	5	3	–	3	5	2	–	28	8	6	–	4	6	–	–
14	2	4	–	2	4	1	–	29	4	3	3	3	–	–	45
15	–	4	–	2	–	–	45	30	6	4	2	6	–	–	30

Метод Риттера – это аналитический метод определения реакций в одних стержнях, независимо от реакций в других стержнях фермы. При разрезании фермы получаем произвольную плоскую систему сил (условие равновесия – три алгебраических уравнения статики). Поэтому разрез необходимо проводить по стержням, в которых не более трех неизвестных реакций. Для того чтобы определить реакцию нужного стержня, возможно проведение нескольких разрезов.

ПРИМЕР РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

В качестве примера рассмотрим ферму, изображенную на рис. 2 с действующими, как показано на рисунке, силами $P_1 = 10$ кН, $P_2 = 20$ кН, $P_3 = 20$ кН, $P_4 = 30$ кН.

РАСЧЕТ ФЕРМЫ

1. Определение реакции опор.

1.1. Определение реакции опор аналитическим способом.

Рассматриваемая конструкция является несвободным телом, на которое наложены связи в точках A и B . Освободимся от связей, заменяя их действие силами реакций. Опора A – неподвижный шарнир, направление реакции в которой заранее неизвестно. Выберем систему координат и разложим её на составляющие вдоль осей координат: \bar{X}_A и \bar{Y}_A в положительных направлениях. Опора B – невесомый, ненагруженный стержень 3 , направление реакции в которой заранее известно: вдоль стержня. Зададим направление реакции \bar{R}_B от точки B , как указано на рис. 3, что соответствует состоянию растянутого стержня.

Таким образом, получили свободное тело, на которое действует система активных сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ и пассивных сил (силы реакций) $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$, которая находится в равновесии и удовлетворяет трём уравнениям статики:

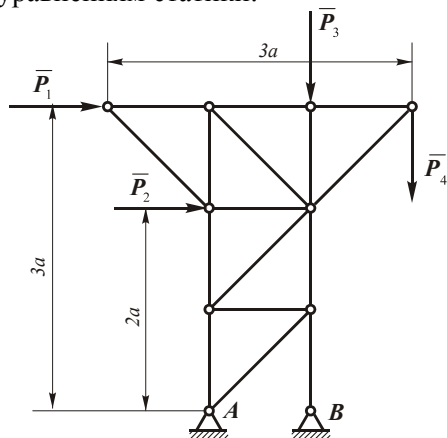


Рис. 2

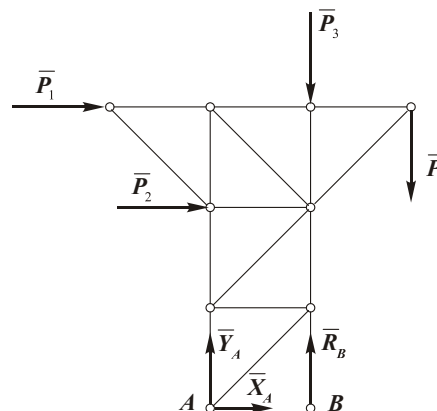


Рис. 3

$$\sum_k F_{kx} = 0; \quad P_1 + P_2 + X_A = 0, \quad (1)$$

$$\sum_k F_{ky} = 0; \quad -P_3 - P_4 + Y_A + R_B = 0, \quad (2)$$

$$\sum_k M_{k(A)} = 0; \quad -P_1 \cdot 3a - P_2 \cdot 2a - P_3 \cdot a - P_4 \cdot 2a + R_B a = 0. \quad (3)$$

Схема решений системы уравнений: из (1) определяем X_A , из (3) определяем R_B (значение a сокращается), из (2) определяем значение Y_A , т.е.

$$X_A = -P_1 - P_2 = -10 - 20 = -30 \text{ кН};$$

$$R_B = P_1 \cdot 3 + P_2 \cdot 2 + P_3 + P_4 \cdot 2 = 10 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 20 + 30 \cdot 2 = 150 \text{ кН};$$

$$Y_A = P_3 + P_4 - R_B = 20 + 30 - 150 = -100 \text{ кН};$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-30)^2 + (-100)^2} = 104,4 \text{ кН}.$$

Результат 1:

$X_A = -30 \text{ кН}$	$Y_A = -100 \text{ кН}$	$R_B = 150 \text{ кН}$
------------------------	-------------------------	------------------------

1.2. Определение реакций опор графическим методом.

Начинаем строить силовой многоугольник, составленный из сил, действующих на ферму, включая силы реакций. Так как силы реакций на данном этапе ещё неизвестны, то многоугольник оказывается недостроенным. Однако, линия действия одной из неизвестных сил \bar{R}_B (направленной вдоль стержня) известна, и её можно указать на силовом многоугольнике так, как показано на рис. 4, а.

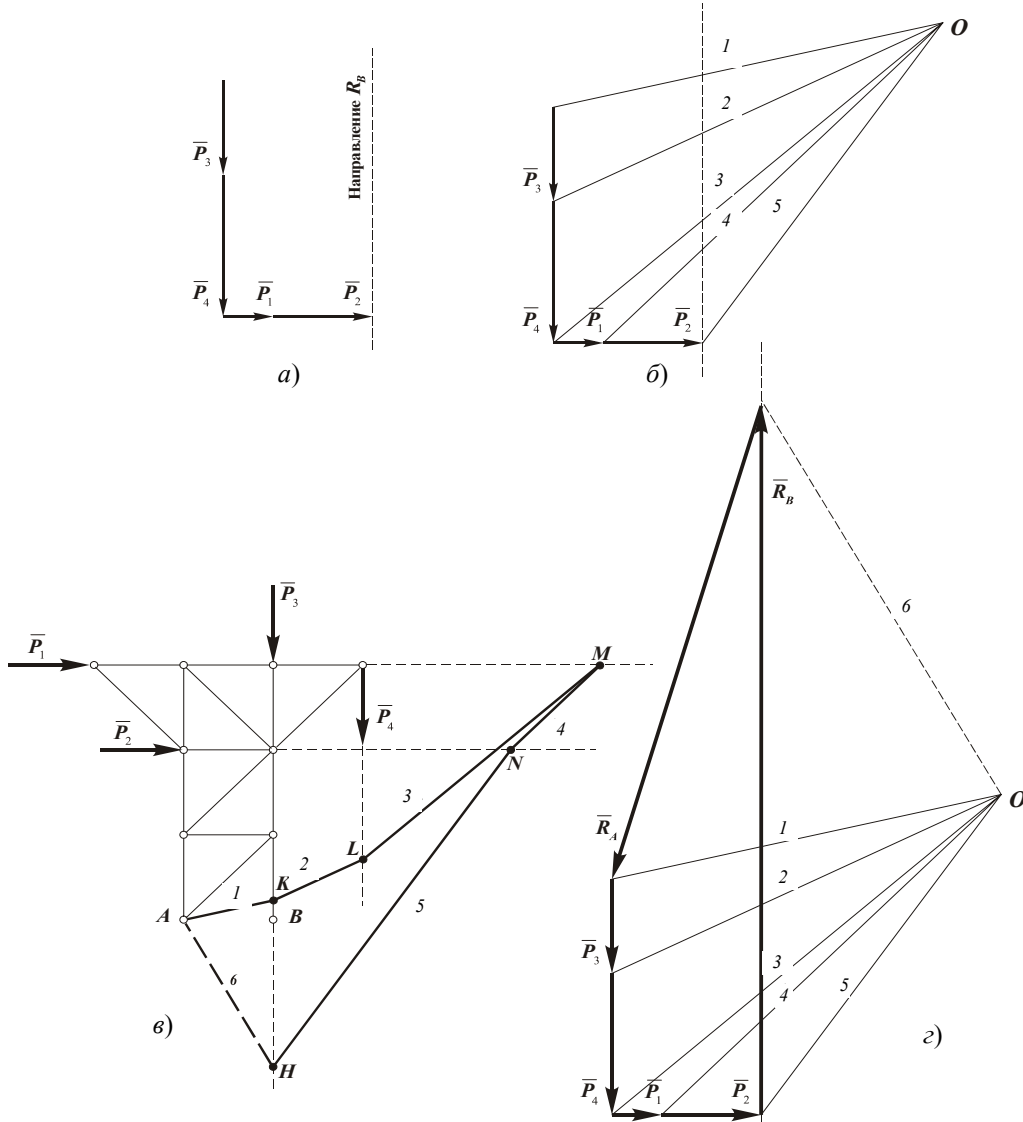


Рис. 4

Строим верёвочный многоугольник. Для этого на плане сил выбираем произвольную точку O (полюс) и проводим лучи $1, 2, 3, 4, 5$ в вершины силового многоугольника так, как показано на рис. 4, б.

Направления полученных лучей переносим на основной чертеж следующим образом. Из точки A , в которой направление силы неизвестно, проводим прямую, параллельную лучу 1 до пересечения с линией действия силы \bar{P}_3 и получаем точку K . Из точки K проводим прямую, параллельную лучу 2 до пересечения с линией действия силы \bar{P}_4 и получаем точку L . Из точки L проводим прямую, параллельную лучу 3 до пересечения с линией действия силы \bar{P}_1 и получаем точку M . Из точки M проводим прямую, параллельную лучу 4 до пересечения с линией действия силы \bar{P}_2 и получаем точку N . Из точки N проводим прямую, параллельную лучу 5 до пересечения с линией действия силы \bar{R}_B и получаем точку H . Полученный верёвочный многоугольник $AKLMNH$ тоже оказывается недостроенным. Однако в случае равновесия такой многоугольник должен быть замкнут. Замыкая его на точку A , получаем направление луча 6 (пунктир на рис. 4, в), который переносим на план сил и получаем точку пересечения с линией действия силы \bar{R}_B , а следовательно, величину и направление самой силы \bar{R}_B . В случае равновесия силовой многоугольник также должен быть замкнутым. Замыкая силовой многоугольник, получаем величину и направление другой неизвестной силы \bar{R}_A (см. рис. 4, з). Значения искомых сил реакций определяем измерением соответствующих векторов на плане сил с учётом выбранного масштаба. Их значения: $R_A^{rp} = 107$ кН, $R_B^{rp} = 153$ кН.

Результат 2:

$R_A^{rp} = 107$ кН	$R_B^{rp} = 153$ кН
---------------------	---------------------

1.3. Определение погрешности при расчёте графическим методом.

Для определения погрешности определения реакции R_A определим предварительно значения этой реакции аналитически, используя её составляющие X_A и Y_A : $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 104,4$ кН. Тогда погрешность определения реакции найдется как

$$\eta_A = \frac{R_A^{rp} - R_A}{R_A} 100\% = \frac{107 - 104,4}{104,4} 100\% = 2,5\%.$$

Определим погрешность определения реакции R_B :

$$\eta_B = \frac{R_B^{rp} - R_B}{R_B} 100\% = \frac{153 - 150}{150} 100\% = 2\%.$$

2. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов.

При использовании этого метода необходимо каждый раз вырезать соответствующий узел, заменив связи, которыми являются стержни фермы силами реакций. Так как стержни фермы по условию задачи являются невесомыми и ненагруженными, то силы реакций будут направлены вдоль этих стержней. Стержни и узлы пронумеруем так, как показано на рис. 6, а.

Определим силы реакций стержней фермы аналитически и графически и сравним полученные результаты.

2.1. Аналитический метод определения сил реакций стержней. Выбирается узел, в котором сходятся не более двух стержней силы реакции в которых неизвестны. Такими узлами в нашем примере являются узлы I , VI и IX . Выберем для определённости узел I . Предположим, что стержни условно растянуты (силы реакции направлены внутрь стержня). Это значит, что если сила реакции стержня будет отрицательной, то данный стержень находится в сжатом состоянии. Вырезанный узел представлен на рис. 5, а. Составим уравнения равновесия для узла I :

$$\begin{aligned} X_A + S_2 \cos \alpha &= 0; \\ Y_A + S_1 + S_2 \sin \alpha &= 0, \end{aligned}$$

где $\alpha = 45^\circ$. Откуда $S_1 = 70$ кН, а $S_2 = 42,43$ кН. Положительные знаки сил реакций указывают на то, что оба стержня растянуты.

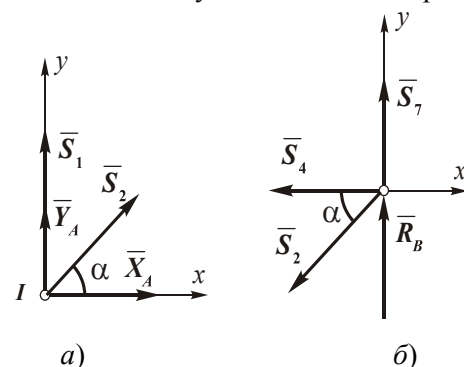


Рис. 7

В качестве следующего узла можно выбрать узел *III*. Следует обратить внимание на силу реакции в стержне 2. По отношению к узлу *I* она направлена в противоположную сторону, что соответствует аксиоме взаимодействия (см. рис. 5, б), а сила \bar{R}_B передаётся через стержень 3. Таким образом, уравнения статики для этого узла принимают вид:

$$\begin{aligned} -S_2 \cos \alpha - S_4 &= 0, \\ R_B - S_2 \sin \alpha + S_7 &= 0. \end{aligned}$$

Найденные силы реакции имеют следующие значения: $S_4 = -30$ кН, а $S_7 = -120$ кН. Отрицательные знаки сил реакций указывают на то, что стержни сжаты.

Аналогичным образом рассматриваются и остальные узлы, т.е. при рассмотрении:

узла *II* – $S_5 = 40$ кН, $S_6 = 42,43$ кН; узла *VI* – $S_9 = 0$ кН, $S_{14} = -10$ кН;

узла *IV* – $S_8 = -20$ кН, $S_{10} = 40$ кН; узла *VII* – $S_{11} = -56,57$ кН, $S_{15} = 30$ кН;

узла *V* – $S_{12} = -20$ кН, $S_{13} = -42,43$ кН; узла *VIII* – $S_{16} = 30$ кН.

Здесь необходимо отметить, значение силы реакции в стержне 12 уже найдено при рассмотрении узла *V*. Таким образом уравнение статики для определения этой реакции в этом случае является проверочным. Проверочными являются и уравнения статики, составленные для узла *IX*.

2.2. Полученные результаты оформим в виде табл. 2.

Таблица 2

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}
+70	+42,43	-150	-30	40	42,43	-120	-20	0	40	-56,57	-20
раст.	раст.	сжат.	сжат.	раст.	раст.	сжат.	сжат.	ненагр.	раст.	сжат.	сжат.
S_{13}	S_{14}	S_{15}	S_{16}								
-42,43	-10	30	30								
сжат.	сжат.	раст.	раст.								

2.3. Графический метод определения сил реакций в стержнях фермы. Силы реакций определяются из условия замкнутости силового многоугольника при равновесии для каждого из узлов фермы. При этом здесь нет необходимости задаваться состоянием того или иного стержня. Построение силового много угольника следует начать с известных сил (с использованием выбранного масштаба) и заканчивать построением неизвестных, учитывая, что их направление должно совпадать с направлением стержней фермы. Таким образом, для узла *I* замкнутый силовой многоугольник примет вид, показанный на рисунке 6, б.

Измеряя полученные отрезки на плане сил с учётом выбранного масштаба, определяются величины и направления неизвестных реакций, которые должны соответствовать значениям, приведённых в табл. 2. Состояние стержня определяется направлением найденной силы реакции. Например, сила реакции \bar{S}_1 направлена от узла *I* внутрь стержня, что соответствует состоянию растяжения.

Точно также строится силовой многоугольник и для узла *III* (рис. 6, в). При этом следует учесть аксиому взаимодействия. Если для узла *I* полученная сила реакции имеет направление, показанное на рисунке 6, б, то для узла *III* эта же сила реакция направлена в противоположную сторону, как это показано на рис. 6, в.

Аналогично строятся силовые многоугольники и для остальных узлов, показанные на рис. 6, г – к.

В предпоследнем *VIII* узле все силы, за исключением одной, оказываются известными, и неизвестная сила реакции определяется путём простого замыкания силового многоугольника (реакция S_{16}). Таким образом, предпоследний многоугольник можно рассматривать в качестве проверки: неизвестная сила реакции должна получиться параллельной соответствующему стержню фермы.

В последнем узле фермы все силы известны и он имеет вид, показанный на рис. 6, к.

При сравнении результатов решения задачи аналитическим и графическим методами их значения должны незначительно отличаться друг от друга.

3. Построение диаграммы Кремоны – это ещё один графический метод определения сил реакций в стержнях фермы. Его преимуществом перед графическим методом вырезания узлов является снижение числа построений, что даёт более высокую точность определения сил реакций.

Для построения диаграммы Кремоны следует показать все, действующие на ферму силы (включая силы реакции в опорных точках) внешним образом, как показано на рис. 7, а. Все области между линиями действия сил обозначим буквами *A, B, C, D, E, F*; внутренние области буквами – *M, N, O, P, Q, R, S*. Это позволяет действующие силы на ферму и силы реакции в стержнях фермы обо-

значать буквами смежных областей по часовой стрелке вокруг фермы (для внешних сил действующих на ферму) или вокруг узла (для сил реакций в стержнях фермы). Например, действующая сила \bar{P}_1 будет обозначаться на диаграмме как bc , где b – начало вектора, а c – конец вектора силы. Сила реакции в стержне 2 может быть обозначена как mf по отношению к узлу I , так и fm по отношению к узлу III . Поэтому направления стрелок на диаграмме не указываются.

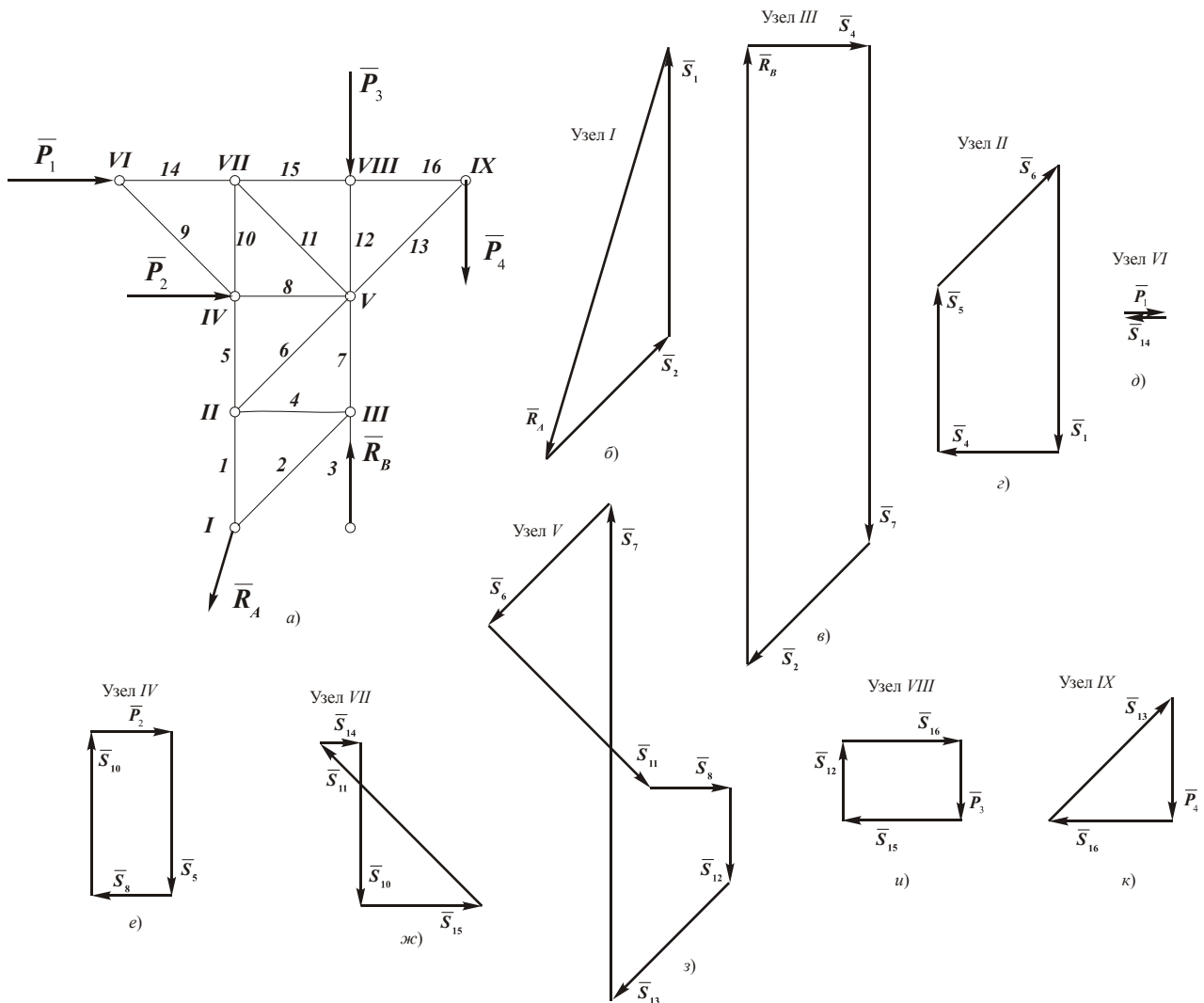


Рис. 6

Силовой многоугольник при подобном обозначении будет выглядеть так, как показано на рис. 7, б.

При дальнейшем построении диаграммы, как и в предыдущих случаях, каждый раз следует выбирать те узлы фермы, в которых сходятся не более двух стержней, в которых сила реакции неизвестна. После всех построений диаграмма Кремоны примет вид, показанный на рис. 7, в.

Теперь по диаграмме Кремоны можно определить силу реакции и состояние любого стержня фермы. Для определения силы реакции и состояния стержня необходимо выделить один из узлов, к которому принадлежит стержень и по часовой стрелке вокруг узла, установить его именование. С учётом его именования найти на диаграмме Кремоны направление силы реакции по отношению к рассматриваемому узлу и установить его состояние. Величина силы реакции устанавливается измерением этого отрезка с учётом выбранного масштаба. Например, стержень b по отношению к узлу II именуется как op . Ищем на диаграмме Кремоны точки o и p , устанавливаем направление вектора (от o к p). Вектор направлен от узла внутрь стержня, следовательно, по аксиоме взаимодействия стержень растянут. Измеряя длину отрезка op на диаграмме, определяем величину растяжения. Силы реакций остальных стержней фермы определяются аналогичным образом.

4. Метод Риттера – это аналитический метод, позволяющий определить усилия в некоторых стержнях фермы, не определяя их в большинстве остальных. Для определения нужного усилия по методу Риттера необходимо расечь ферму по стержням на части и рассмотреть равновесие одной из

них, как правило, наиболее простой. Действие отброшенной части необходимо заменить действием сил реакций. Так как для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо составить три уравнения статики, то сечение необходимо проводить так, чтобы при этом оказывалось не более трёх неизвестных реакций.

Определим, например, силу реакции в стержне *II* по методу Риттера. Очевидно, что никакое сечение фермы не приведёт к решению поставленной задачи, так как число неизвестных будет превышать три. Поэтому произведём сначала предварительное сечение *I-I* так, как показано на рис. 8, *a* и определим силу реакции в стержне 5. Для этого условимся предварительно, что стержни в рассматриваемом сечении условно растянуты (силы реакций $\bar{S}_5, \bar{S}_6, \bar{S}_7$ направлены внутрь стержней).

Составим уравнение моментов относительно точки Риттера для стержня 5 – точки *D*:

$$X_A \cdot 2a - Y_A \cdot a - S_5 \cdot a = 0,$$

откуда найдём $S_5 = 40$ кН.

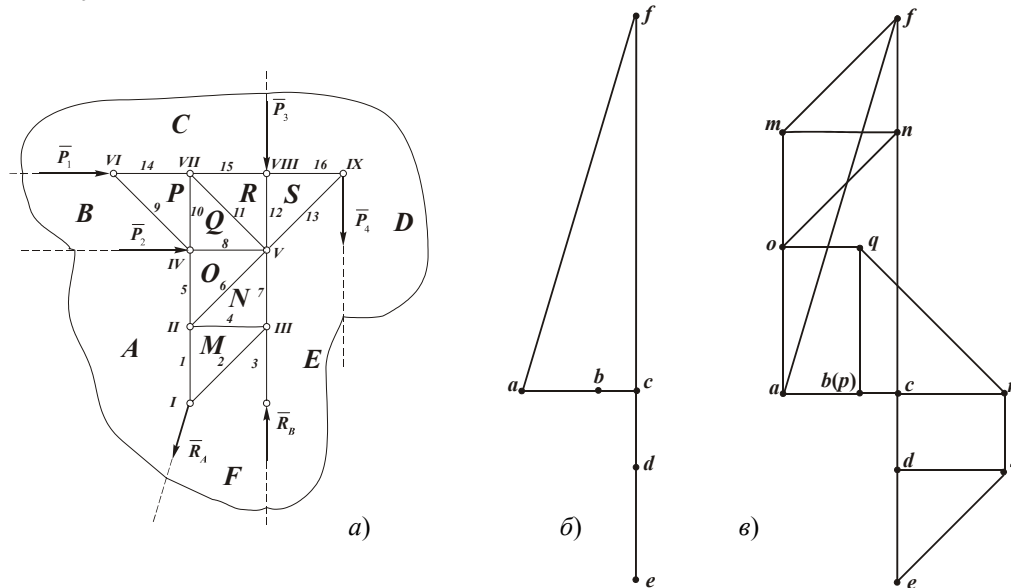


Рис. 7

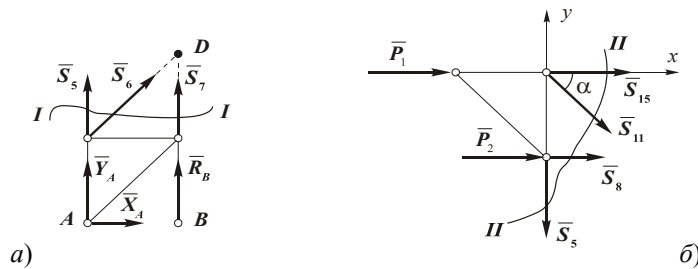


Рис. 8

Затем произведём основное сечение *II-II* (рис. 8, *б*), в которое войдёт нужный нам стержень *II* и составим уравнение проекций сил на ось *Y*:

$$-S_5 - S_{11} \sin \alpha = 0,$$

откуда найдём искомую силу реакции в стержне *II*: $S_{11} = -56,57$ кН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М. : Наука, 1985. – Т. 1.
2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / под ред. А.А. Яблонского. – М. : Высшая школа, 1985.
3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М. : Наука, 1995.
4. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высшая школа, 1971. – Ч. 1.