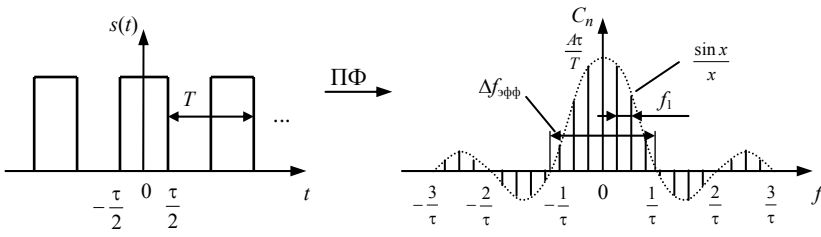


А.А. ДАХНОВИЧ

РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ  
ЦЕПИ И СИГНАЛЫ



• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

УДК 621.37(075)  
ББК 841-01я73  
Д214

Р е ц е н з е н т ы:

Заведующий кафедрой ЭПУиСС Московского технического  
университета связи и информатики, кандидат технических наук  
*М.Ф. Колканов*

Доцент кафедры КРЭМС Тамбовского государственного  
технического университета, кандидат технических наук  
*Н.Г. Чернышов*

Д214 **Дахнович, А.А.**  
Радиотехнические цепи и сигналы : учебное пособие /  
А.А. Дахнович. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. –  
176 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0833-6.

Даны теоретические основы спектрального и корреляционного анализа сигналов, рассмотрены вопросы классификации и математического описания сигналов, как детерминированных, так и случайных, изложены методы анализа прохождения сигналов через линейные, нелинейные и параметрические цепи. Рассмотрены принципы модуляции и демодуляции радиотехнических сигналов, а также вопросы выделения полезного сигнала на фоне шума. Теоретические положения иллюстрируются примерами и задачами.

Предназначено для студентов высших учебных заведений радиотехнических специальностей.

УДК 621.37(075)  
ББК 841-01я73

ISBN 978-5-8265-0833-6 © ГОУ ВПО "Тамбовский государственный  
технический университет" (ТГТУ), 2009  
Министерство образования и науки Российской Федерации

**ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"**

**А.А. ДАХНОВИЧ**

**РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ  
ЦЕПИ И СИГНАЛЫ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию  
в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и  
автоматизации в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлениям 210303 "Радиотехника" и  
210200 "Проектирование и технология электронных средств"*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2009

Учебное издание

ДАХНОВИЧ Андрей Андреевич

**РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ  
ЦЕПИ И СИГНАЛЫ**

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 25.02.2009

Формат 60 × 84/16. 10,23 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 87

Издательско-полиграфический центр ТГТУ  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

Изобретение радио (А.С. Попов, 1895) дало начало *радиотехнике* – научно-технической области знаний, занимающейся изучением принципов генерации, излучения и приёма электромагнитных колебаний и волн высокой частоты, а также вопросами их практического использования для передачи и преобразования информации.

Возникшая вначале как самостоятельное направление науки, *радиотехника* глубоко проникла в смежные области, прежде всего в электронику и вычислительную технику, и в настоящее время круг её применений необычайно широк: радиосвязь, телевидение, радиолокация, радионавигация, телеуправление, радиоастрономия, беспроводные компьютерные и телефонные сети, в частности, сотовая связь. К нынешним применениям *радиотехники* следует также отнести радиотехнические методы в геофизике, биологии и медицине – словом, сейчас без *радиотехники* невозможно себе представить существование человечества.

На повестке дня стоит создание единого информационного пространства с произвольным беспроводным доступом – пространства, объединяющего в себе все источники и виды передаваемой информации, будь то мультимедиа, речь, компьютерные или какие-либо другие данные. По всеобщему мнению, в качестве основы при создании такого пространства будет выступать *радиоканал*.

Основные элементы *радиоканала* – передатчик, приёмник и физическая среда, в которой происходит распространение радиоволн. Сигнал, поступающий от источника информации, в передатчике преобразуется в электрические колебания, как правило, низкочастотные. Такие колебания не могут быть использованы для возбуждения электромагнитной волны непосредственно ввиду крайне низкой эффективности передающих и приёмных антенн на этих частотах, а также из-за невозможности обеспечения электромагнитной совместимости различных приёмников и источников информации. Поэтому в *радиотехнике* исходный информационный электрический сигнал используют для управления параметрами достаточно мощного несущего колебания со своей, отличной от других систем, частотой, лежащей в радиодиапазоне. Такой процесс называют модуляцией несущего колебания. Далее модулированный сигнал излучается передающей антенной, возбуждая электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении приёмника. В приёмнике происходит обратный процесс, т.е. электромагнитная волна вызывает электрические колебания в схеме приёмника. Эти колебания, будучи весьма слабыми, усиливаются схемой приёмника, а затем подвергаются демодуляции, в результате чего происходит восстановление исходного информационного сигнала, переданного по *радиоканалу*.

Даже из такого чрезвычайно упрощённого описания работы *радиоканала* становится ясно, что передача сообщений по каналу сопровождается многочисленными преобразованиями сигналов. Разнообразные технические устройства, осуществляющие эти преобразования, в общем случае называют *радиотехническими цепями*.

В реальных радиотехнических устройствах и системах передача сигналов подвергается воздействию помех, или шумов, искажающих полезные сигналы. Выделение полезных сигналов на фоне шумов является одной из важнейших задач *радиотехники*.

Современный специалист, работающий в области радиоэлектроники, должен владеть методами анализа и синтеза сигналов и радиотехнических цепей, используемых для всевозможных преобразований сигналов, в том числе и для обеспечения помехоустойчивой передачи информации. Научкой накоплен большой опыт решения различных задач *радиотехники*. Цель настоящего пособия – помочь студентам в освоении этого опыта. Изучение дисциплины "Радиотехнические цепи и сигналы" должно заложить у студентов прочную теоретическую базу для дальнейшего успешного усвоения материала специальных дисциплин, таких как "Радиотехнические системы", "Радиоприёмные и радиопередающие устройства", "Беспроводные линии связи и сети" и т.п.

# 1. РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ

Сигналом называют процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений.

В радиоэлектронике выделяют два аспекта рассмотрения сигналов: информационный и энергетический.

Первый связан с количеством и качеством информации в том сообщении, которое несёт в себе передаваемый или запоминаемый сигнал.

**#1. Пример.** Сигнал цветного телевидения.

Этот сигнал имеет сложную информационную структуру, так как в передаваемом им сообщении о каждом кадре должна содержаться информация:

- а) о распределении яркости по экрану;
- б) о распределении цвета по экрану;
- в) о строчной, кадровой и цветовой синхронизации.

**#2. Пример.** Сигнал звуковой охранной сигнализации.

В информационном отношении этот сигнал неизмеримо проще телевизионного. Действительно, чаще всего это однотональное звуковое колебание с частотой, близкой к 1 кГц. (Чуть более сложен сигнал прерывистой звуковой сигнализации или сигнал двухтональной сигнализации).

Второй аспект, энергетический, связан с количеством и видом энергии в передаваемом сообщении и её распределением в пространстве.

**#3. Пример.** Сигнал, излучаемый антенной радиолокатора.

Это короткий мощный электромагнитный импульс высокой частоты, излучаемый в узком секторе диаграммы направленности антенны.

В радиоэлектронике энергетическим аспектом сигналов обычно интересуются лишь в той мере, в которой это необходимо для уверенного выделения полезной информации, содержащейся в передаваемом сигнале, на фоне случайных помех (шумов). Однако, существуют области, в которых энергетический аспект играет первостепенную роль. Это, прежде всего, относится к устройствам промышленной электроники, например, таким как установки для прецизионной обработки электронным, ионным и лазерным лучом.

Для инженеров-проектировщиков РЭС энергетический аспект играет важную роль, так как он определяет очень многое в процессе конструирования: выбор компоновки блоков, метода и средств теплоотвода и экранировки, выбор защитного покрытия и т.п.

## 1.1. КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

**Понятие математической модели сигнала.** Для того чтобы сделать сигналы объектами теоретического изучения и расчётов, следует указать способ их математического описания, или, как говорят в науке, создать математическую модель исследуемого сигнала.

Чаще всего в качестве математической модели используют функциональную зависимость, аргументом которой является время. Например, сигнал однотональной сигнализации на выходе устройства охранной сигнализации может быть представлен моделью

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где  $U_m$  – амплитуда напряжения на выходе;  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота;  $\varphi$  – начальная фаза.

Математическая модель является абстракцией, позволяющей математически описать те свойства сигнала, которые представляются как определяющие, наиболее важные, и игнорировать большое число второстепенных признаков.

Следует помнить, что один и тот же сигнал может быть представлен различными математическими моделями, даже если эти модели имеют одинаковый уровень абстракции.

Функции, описывающие сигналы, могут принимать как вещественные, так и комплексные значения. Соответственно говорят о вещественных и комплексных сигналах.

**Одномерные и многомерные сигналы.** Рассмотрим напряжение на зажимах какой-либо цепи. Такой сигнал, описываемый одной функцией времени  $u(t)$ , принято называть одномерным.

Множество одномерных сигналов образует многомерный сигнал. Например, система напряжений на зажимах многополюсника образует многомерный или векторный сигнал:

$$\vec{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)\},$$

целое число  $N$  называют размерностью сигнала.

**Детерминированные и случайные сигналы.** Если математическая модель позволяет точно предсказать мгновенные значения в любой момент времени, то сигнал называется детерминированным.

Строго говоря, чисто детерминированных сигналов не существует, так как всегда есть множество неучтённых факторов, вызывающих хаотическое изменение исследуемой физической величины. Однако, если эти факторы вызывают лишь незначительный разброс значений физической величины вблизи предсказанного моделию, то такой сигнал считают детерминированным.

Сигнал, точное предсказание значений которого в любой момент времени невозможно, называют случайным.

**#4. Пример.** Нормальный (Гауссовский) шум, имеющий место в каналах аналоговой радиосвязи.

Это чисто случайный процесс  $x(t)$ , мгновенное значение которого описывается нормальным законом распределения вероятности с нулевым математическим ожиданием:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Здесь  $p(x)$  – плотность вероятности;  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение;  $\sigma^2$  – дисперсия, численно равная средней мощности шума.

Очень часто реальный радиотехнический сигнал может быть представлен в виде суммы двух составляющих – детерминированной и случайной:

$$s(t) + n(t).$$

В качестве последней часто используют гауссовский шум. Если дисперсия шума гораздо меньше средней мощности детерминированной составляющей, то шумовой составляющей можно пренебречь и считать сигнал чисто детерминированным.

Среди детерминированных сигналов выделяют класс периодических сигналов. Это сигналы, для которых справедливо равенство

$$s(t) = s(t + T).$$

**Непрерывные и импульсные сигналы.** Если сигнал описывается непрерывной функцией времени  $s(t)$ , то его называют непрерывным.

Очень важный для радиотехники класс сигналов представляют собой импульсы, которые существуют лишь в пределах конечного отрезка времени. Самым замечательным для импульсных сигналов является то, что они позволяют получить колебания значительной интенсивности во время действия импульса при весьма умеренной средней мощности передатчика.

Различают видеоимпульсы (рис. 1.1, а) и радиоимпульсы (рис. 1.1, б).

Отношение  $\frac{T}{\tau}$  называют скважностью импульсов.

**Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы.** Чаще всего, физический процесс, порождающий сигнал, развивается во времени таким образом, что значения сигнала можно измерять в любой момент времени. Такой сигнал называют аналоговым. Его реализация во времени даёт некоторую функцию  $s(t)$ , определённую в любой момент времени  $t$ .

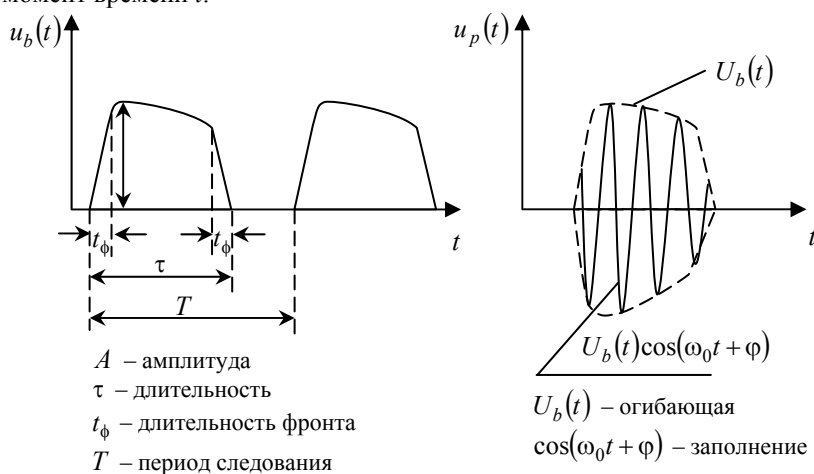


Рис. 1.1

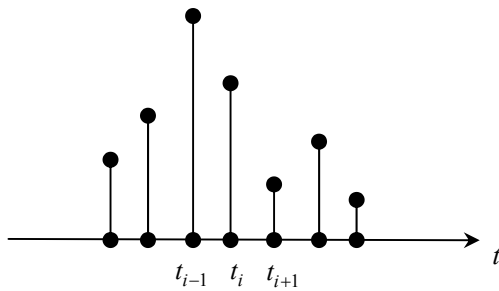


Рис. 1.2

В отличие от аналогового, дискретный сигнал задаётся последовательностью его значений  $s(t_i)$  в дискретные моменты времени (рис. 1.2).

Как правило, шаг дискретизации  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  для такого сигнала постоянен.

Одно из преимуществ дискретных сигналов по сравнению с аналоговыми – отсутствие необходимости воспроизводить сигнал непрерывно во все моменты времени. Это даёт возможность передавать несколько дискретных сигналов по одному и тому же каналу связи за счёт их разделения по времени (временное мультиплексирование сигналов).

При переходе от исходного аналогового сигнала к его дискретному представлению очень важную роль играет правильный выбор шага дискретизации  $\Delta t$ . При слишком малом  $\Delta t$  возрастают, причём неоправданно, объём и сложность обрабатывающей аппаратуры, тогда как при слишком большом  $\Delta t$  возрастает вероятность искажения или потери информации при восстановлении аналогового сигнала по его дискретному изображению.

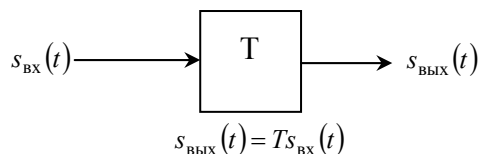
Существует теорема (теорема Котельникова), которая позволяет для заданного аналогового сигнала найти  $(\Delta t)_{\max}$  такое, что выбор  $\Delta t \leq (\Delta t)_{\max}$  гарантирует пренебрежимо малые потери информации при дискретизации и последующем восстановлении рассматриваемого аналогового сигнала.

Особой разновидностью дискретных сигналов являются цифровые сигналы, в которых отсчётные значения  $s(t_i)$  представлены в форме чисел. Обычно используется двоичное представление чисел с ограниченным числом разрядов, как правило, не слишком большим. Например, при 8-разрядном кодировании (1-й разряд – знаковый) имеется возможность передавать  $\pm 128$  градаций исходного аналогового сигнала, что даёт точность лучше одного процента.

## 1.2. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ В РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СИГНАЛОВ

Радиоэлектронное устройство независимо от своего назначения и уровня сложности представляет собой систему, т.е. упорядоченную совокупность физических объектов, между которыми существуют определённые взаимодействия.

В структуре системы можно выделить вход, на который подаётся исходный сигнал, и выход, откуда снимается преобразованный сигнал. Если интересуются лишь связью между сигналами на входе и выходе и не описывают внутренние процессы в системе, то говорят, что система представляет собой "чёрный ящик". Закон связи между входным и выходным сигналом задают системным оператором  $T$ , результатом воздействия которого на вход  $s_{\text{вх}}(t)$  служит  $s_{\text{вых}}(t)$ :



Система считается заданной, если задана математическая модель оператора  $T$ , а также указаны области допустимых входных и выходных сигналов.



## 1.2.1. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

Все возможные системы можно разделить на стационарные и нестационарные.

Система стационарна, если её входная реакция не зависит от того, в какой момент времени поступает входной сигнал. Математически это означает, что из равенства  $s_{\text{ВЫХ}}(t) = Ts_{\text{ВХ}}(t)$  следует, что

$$s_{\text{ВЫХ}}(t \pm t_0) = Ts_{\text{ВХ}}(t \pm t_0)$$

при любом значении  $t$ .

Стационарные системы называют также системами с постоянными во времени внутренними параметрами.

Если же свойства системы не инвариантны относительно выбора начала отсчёта времени, то такую систему называют нестационарной (системой с переменными во времени параметрами или параметрической системой).

Все возможные системы можно также разделить на линейные и нелинейные.

Линейная система – это система, оператор  $T$  которой линеен:

$$\begin{cases} T(s_{\text{ВХ1}}(t) + s_{\text{ВХ2}}(t)) = Ts_{\text{ВХ1}}(t) + Ts_{\text{ВХ2}}(t), \\ T(\alpha s_{\text{ВХ}}(t)) = \alpha Ts_{\text{ВХ}}(t). \end{cases}$$

Иными словами, реакция линейной системы на сумму входных воздействий равна сумме реакций системы на каждое входное воздействие, взятое в отдельности, т.е. к линейной системе применим принцип суперпозиции.

Если принцип суперпозиции для рассматриваемой системы не выполняется, то система называется нелинейной.

**#5. Пример.**

$$T = \left[ \frac{d}{dt} + \alpha \right], \quad \text{т.е. } u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + \alpha u_{\text{ВХ}}(t).$$

Легко убедиться, что это – линейная стационарная система.

**#6. Пример.**

$$T = \left[ \frac{d}{dt} + \alpha t \right], \quad \text{т.е. } u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt} + \alpha t u_{\text{ВХ}}(t).$$

Эта система также линейная, но не стационарная.

**#7. Пример.**

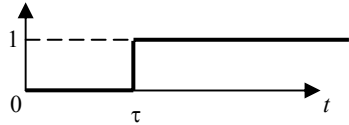
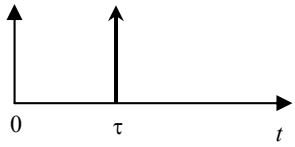
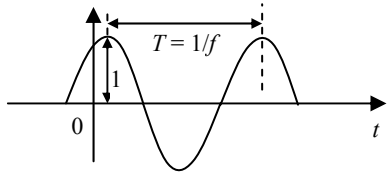
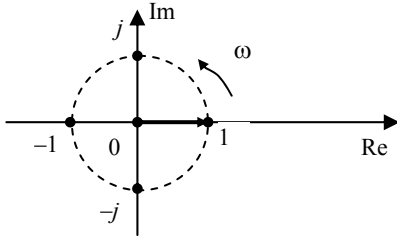
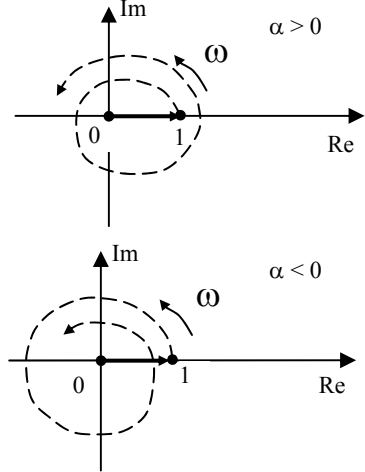
$$T = [ ]^2, \quad \text{т.е. } u_{\text{ВЫХ}}(t) = u_{\text{ВЫХ}}^2(t).$$

Легко проверить, что это – нелинейная стационарная система.

Справедливость принципа суперпозиции для линейных систем открывает прямой путь к систематическому решению задач о прохождении сложных сигналов через такие системы. Для этого следует исследуемый сигнал представить в виде суммы однотипных элементарных сигналов. Если удастся тем или иным способом найти реакцию на выходе, возникающую под воздействием элементарного сигнала на входе, то окончательным этапом решения задачи явится суммирование таких реакций.

Элементарные сигналы, используемые в радиоэлектронике для этой цели представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Название сигнала	Математическая модель	Геометрический образ сигнала
1. Функция включения, или функция Хевисайда	$\sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1/2, & t = \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases}$	
2. Дельта-функция Дирака	<p>причём</p> $\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ \infty, & t = \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1$	
3. Вещественный гармонический сигнал	$\cos(\omega t + \varphi)$ <p>или</p> $\sin(\omega t + \varphi)$ <p><math>\varphi</math> – начальная фаза  <math>\omega = 2\pi f</math> – частота</p>	
4. Комплекс-ный гармонический сигнал	$e^{j\omega t}$	
5. Обобщённый гармонический сигнал	$e^{pt},$ <p>где <math>p = \alpha + j\omega</math> – комплексная частота</p>	

Рассмотрим представление произвольного сигнала  $s(t)$  в виде суперпозиции вышеуказанных элементарных сигналов.

### 1.2.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ВКЛЮЧЕНИЯ $\sigma(t - \tau)$

Представление произвольного сигнала с помощью функций включения  $\sigma(t - \tau)$  иллюстрируется

рис. 1.3.

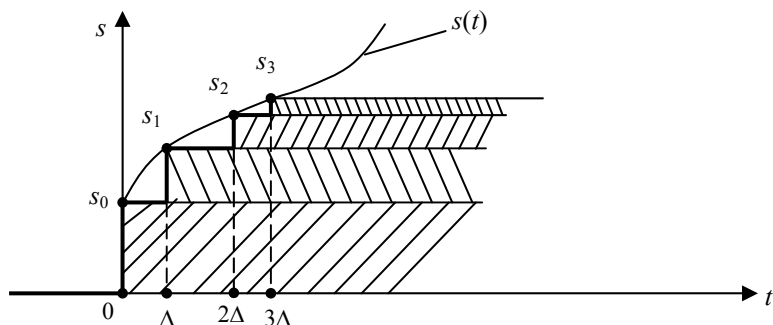


Рис. 1.3

Такая ступенчатая аппроксимация приводит нас к приближённому представлению  $s(t)$  в виде суммы:

$$\begin{aligned} s(t) &\approx s_0\sigma(t) + (s_1 - s_0)\sigma(t - \Delta) + (s_2 - s_1)\sigma(t - 2\Delta) + \dots = \\ &= s_0\sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1})\sigma(t - k\Delta). \end{aligned}$$

Если теперь устремить  $\Delta$  к нулю, то дискретную переменную  $k\Delta$  можно заменить на непрерывную  $\tau$ . При этом малые приращения  $(s_k - s_{k-1})$  превращаются в дифференциалы  $ds = \frac{ds}{d\tau}d\tau$ , а вместо суммы мы приходим к интегралу:

$$s(t) = s(0)\sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds}{d\tau}\sigma(t - \tau)d\tau. \quad (1.1)$$

### 1.2.3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ $\delta$ -ФУНКЦИЙ $\delta(t - \tau)$ .

Представление произвольного сигнала с помощью  $\delta$ -функций  $\delta(t - \tau)$  иллюстрируется рис. 1.4.

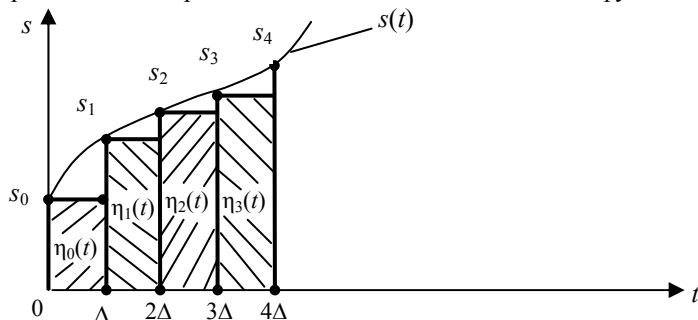


Рис. 1.4

Элементарный импульс на  $k$ -м отсчёте равен

$$\eta_k(t) = s_k [\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)].$$

Тогда сигнал  $s(t)$  может быть приближённо представлен в виде суммы:

$$s(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k \frac{\sigma(t - t_k) - \sigma(t - t_k - \Delta)}{\Delta} \Delta.$$

Переходя к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , будем иметь, во-первых, интеграл вместо суммы, во-вторых, вместо дискретных значений  $t_k$  непрерывную переменную интегрирования  $\tau$ , а в-третьих,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sigma(t - \tau) - \sigma(t - \tau - \Delta)}{\Delta} = \delta(t - \tau).$$

Тогда окончательно

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Итак, если непрерывную функцию умножить на  $\delta$ -функцию и произведение проинтегрировать по времени, то результат будет равен значению непрерывной функции в той точке, где сосредоточен  $\delta$ -импульс. Это замечательное свойство  $\delta$ -функции. Заметим, что попутно мы получили ещё один результат:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t),$$

т.е.  $\delta$ -функция есть результат дифференцирования ступенчатой функции Хевисайда.

## 1.2.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ (СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА)

### 1.2.4.1. Спектральный анализ периодических сигналов

**Ряд Фурье.** Рассмотрим вещественный периодический сигнал  $s(t)$  с периодом  $T$ .

Введём понятие энергии сигнала на заданном отрезке времени  $[t_1, t_2]$  следующим образом:

$$E_s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt.$$

В частности, энергия периодического сигнала за период  $T$  есть интеграл

$$E_{s,T} = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt.$$

В спектральном анализе показано, что периодический сигнал с ограниченной энергией за период  $T$  может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1.3)$$

с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt; \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt, \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

где  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  называется основной гармоникой.

Колебания с номерами  $n = 2, 3, \dots$  называют высшими гармониками, а  $\frac{a_0}{2}$  – постоянной составляющей сигнала.

Проведя тригонометрические преобразования, можно из выражения (1.3) получить другую форму ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \quad (1.5)$$

где  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  – амплитуда  $n$ -й гармоники;  $\varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}$  – фаза  $n$ -й гармоники.

В соответствии с (1.5) исходный сигнал  $s$ , представленный во временной области функцией  $s(t)$ , может быть эквивалентным образом представлен в частотной области в виде его спектральной диаграммы (амплитудной и фазовой) рис 1.5.

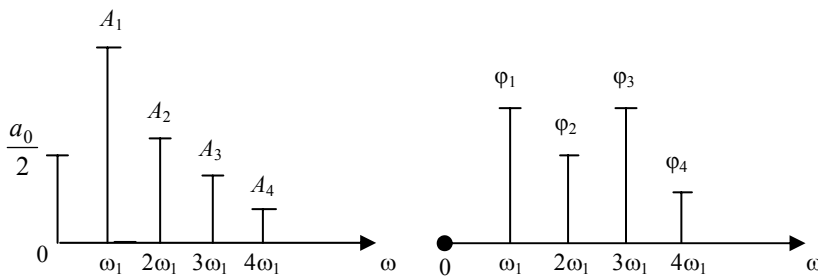
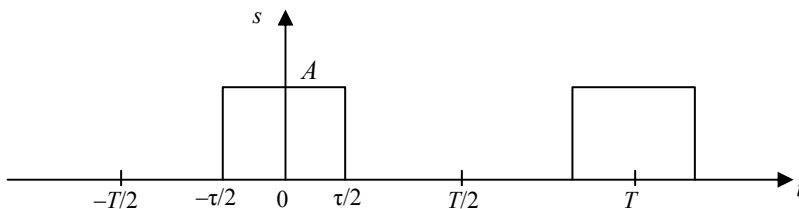


Рис. 1.5

Особо интересуются амплитудной диаграммой, которая позволяет судить о процентном содержании тех или иных гармоник в спектре периодического сигнала.

**#8. Пример.**  $s(t)$  – периодическая последовательность прямоугольных видеоимпульсов с амплитудой  $A$  и длительностью  $\tau$ .



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A dt = A \frac{\tau}{T} = \frac{A}{q},$$

где  $q = \frac{T}{\tau}$  – скважность импульсов;

$$b_n = 0. \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2A}{n\pi} \sin \frac{n\omega_1 \tau}{2} = 2A \frac{\tau}{T} \frac{\sin \left( n\pi \frac{\tau}{T} \right)}{n\pi \frac{\tau}{T}}.$$

Окончательно

$$s(t) = A \frac{\tau}{T} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \left( n\pi \frac{\tau}{T} \right)}{n\pi \frac{\tau}{T}} \cos(n\omega_1 t) \right]. \quad (1.6)$$

Амплитудный спектр этого сигнала имеет характер функции  $\frac{\sin x}{x}$  (рис. 1.6).

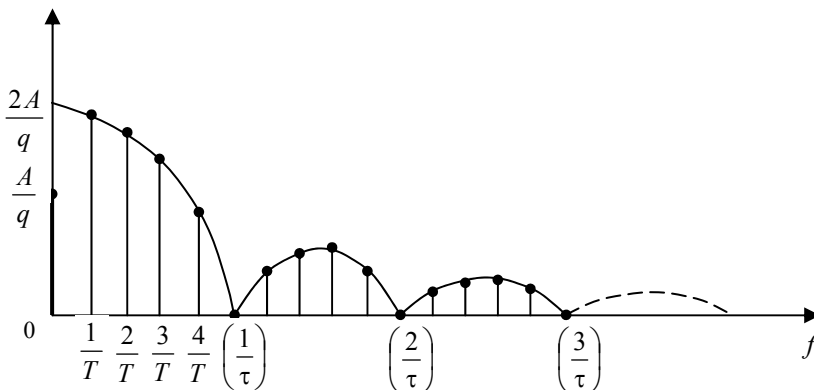


Рис. 1.6

Следует отметить, что 90 % энергии импульса  $s(t)$  переносится гармониками от 0 до  $\frac{1}{\tau}$  (граница первого лепестка функции  $\frac{\sin x}{x}$ ). Если к этим гармоникам добавить гармоники от  $\frac{1}{\tau}$  до  $\frac{2}{\tau}$  (второй лепесток), то в сумме эти гармоники переносят уже 95 % энергии импульса.

Это очень интересный результат, который подводит нас к предметному разговору об отношении сигнал/шум в устройствах радиоэлектроники.

**Проблема различения полезного сигнала на фоне шумов. Отношение сигнал/шум.** В реальных условиях передача и обработка радиотехнических сигналов всегда сопровождается шумом – паразитным случайным сигналом различной природы. Если энергия шума превышает энергию полезного сигнала, то выделение полезной информации становится непростой задачей. Поэтому при разработке и реализации любой РЭС принимаются все меры, чтобы обеспечить превышение сигнала над уровнем шума. Результат предпринятых мер характеризуется отношением сигнал/шум на выходе РЭС, под которым понимают отношение мощностей  $P_c$  и  $P_{ш}$ .

Очень часто отношение сигнал/шум измеряют в децибелах:

$$C/Ш \text{ [дБ]} = 10 \lg(P_c / P_{ш}).$$

Например,  $C/Ш = 20$  дБ означает, что  $P_c / P_{ш} = 100$ . Ясно, что при таком отношении сигнал/шум полезная информация почти не "засорена" шумами. Именно такое значение 20 дБ принято для обеспечения качественного приёма сигналов радиовещания.

В других случаях довольствуются меньшими значениями  $C/Ш$ . Например,  $C/Ш = 10$  дБ более чем достаточно для работы радиолокатора, так как при этом энергия принятого импульса в 10 раз превышает шумы и даёт отчётливую отметку на экране радиолокатора.

Какие же меры принимают при разработке и реализации РЭС для повышения  $C/Ш$  на выходе системы? Одна из них – грамотный выбор полосы пропускания РЭС.

Вернёмся к примеру #8. Если выбрать в качестве рабочей полосы частот от нуля до  $\frac{1}{\tau}$ , то 90 % энергии входного импульса пройдёт на выход. Потеря 10 % – это высокочастотные составляющие спектра. Их отсутствие на выходе скажется на форме выходного импульса:



т.е. фронты импульса окажутся немного "завалены".

При этой полосе на выход пройдут и шумы, занимающие спектр от нуля до  $\frac{1}{\tau}$ . В итоге будем иметь на выходе некоторое отношение сигнал/шум  $= \frac{P_c}{P_{ш}}$ .

Попробуем теперь увеличить вдвое полосу рабочих частот системы. При этом на выход пройдёт уже 95 % энергии входного сигнала, и форма выходного импульса улучшится (фронты станут круче). Однако шум на выходе теперь станет вдвое больше (рассматривается случай "белого" шума, имеющего равномерный спектр от нуля до бесконечно высоких частот). В итоге, в отношении  $\frac{P_c}{P_{ш}}$  числитель увеличится на 5 %, тогда как знаменатель увеличится вдвое. В результате, отношение сигнал/шум сильно ухудшится, что явно невыгодно. По видимому, полоса пропускания от нуля до  $\frac{1}{\tau}$  близка к оптимальной.

**Комплексная форма ряда Фурье периодического сигнала.** Вместо элементарных сигналов  $\sin(n\omega_1 t)$  и  $\cos(n\omega_1 t)$  для спектрального разложения произвольного периодического сигнала с ограниченной энергией за период  $T$  можно использовать комплексные гармонические сигналы  $e^{jn\omega_1 t}$ . Тогда

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (1.7)$$

где

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (1.8)$$

Напомним, что  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  – основная гармоника.

Выражение (1.7) представляет собой ряд Фурье в комплексной форме. Коэффициенты  $C_n$  в этом ряде также комплексные.

*Замечание:* Спектр сигнала в соответствии с (1.7) содержит и отрицательные частоты, причём  $C_{-n} = C_n^*$ . Это понятие чисто математическое, а не физическое. Можно объединить в ряде (1.7) слагаемые с положительными и отрицательными частотами в пары:

$$\begin{aligned} C_n e^{jn\omega_1 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_1 t} &= |C_n| e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + |C_n| e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = \\ &= 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n), \end{aligned}$$

и мы приходим к тому, что было в вещественном ряде Фурье (1.5).

Для примера разложим в комплексный ряд Фурье прямоугольный импульс из примера #8:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = A \frac{\tau}{T};$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{A}{n\pi} \frac{e^{jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}}}{2j} = A \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}}$$

и

$$s(t) = A \frac{\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)}{n\pi \frac{\tau}{T}} e^{jn\omega_1 t} . \quad (1.9)$$

Из этого выражения получим амплитудный спектр (рис. 1.7).

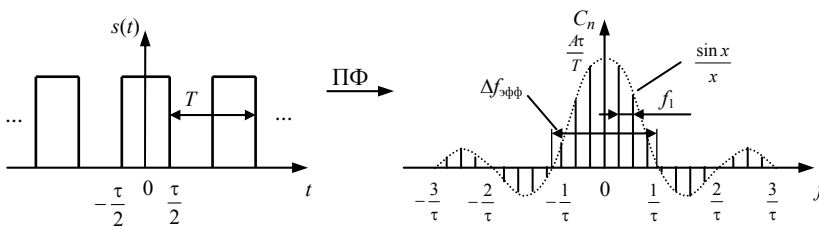


Рис. 1.7

Сравнивая рис. 1.7 и рис. 1.6, видим, что в спектре появились отрицательные частоты, зато амплитуды стали вдвое меньше.

#### 1.2.4.2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

**Преобразование Фурье.** Непериодический сигнал можно рассматривать как предельный случай периодического сигнала при  $T$  стремящемся к бесконечности. При таком предельном переходе вместо суммы типа (1.3) или (1.7) будет уже фигурировать интеграл, а вместо дискретных частот  $n\omega_1$  в спектре – непрерывный спектр частот  $\omega$ . При этом требование, накладываемое на энергию сигнала, остаётся тем же: эта энергия должна быть конечной, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt < +\infty .$$

Для такого сигнала имеет место представление в виде интеграла Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega , \quad (1.10)$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt , \quad (1.11)$$

$S(\omega)$  – называется спектральной плотностью сигнала.

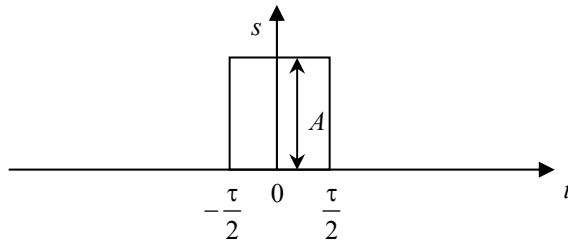
Сравним теперь преобразование Фурье (1.10), (1.11) для непериодического сигнала с комплексным представлением Фурье (1.7), (1.8) для периодического сигнала.



Во-первых, периодический сигнал имеет дискретный спектр (1.7), тогда как непериодический сигнал имеет непрерывный спектр (1.10).

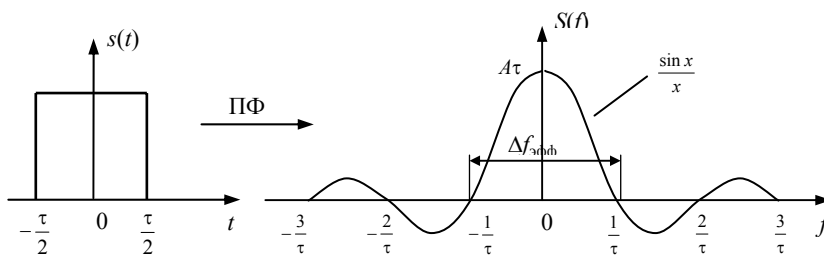
Во-вторых, коэффициент  $C_n$  в спектре периодического сигнала – это амплитуда гармоники спектра. Для непериодического же сигнала  $S(\omega)$  не есть амплитуда составляющей частоты  $\omega$ ; она имеет иной физический смысл:  $S(\omega)d\omega$  – это амплитуда эквивалентного колебания, порождённого частотами спектра сигнала, лежащими в интервале  $(\omega, \omega + d\omega)$ .

**#9. Пример.**  $s(t)$  – одиночный прямоугольный видеоимпульс с амплитудой  $A$  и длительностью  $\tau$ .



$$S(\omega) = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos(\omega t - j \sin \omega t) dt = 2A \int_0^{\tau/2} \cos \omega t dt = A\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

Спектр этого импульса представлен на рис. 1.8.



**Рис. 1.8**

Сравнивая рис. 1.8 и рис. 1.7, отметим, что амплитуды  $C_n$  составляющих спектра периодической последовательности импульсов измеряются в вольтах (рассматривается случай импульсов напряжения), тогда как спектральная плотность  $S(\omega)$  одиночного импульса имеет размерность вольт • секунда.

Анализ рисунков 1.7, 1.8 приводит к ещё одному важному наблюдению: спектр прямоугольного видеоимпульса имеет вид кривой  $\frac{\sin x}{x}$ , у которой максимум главного лепестка равен 1, минимум первых боковых лепестков  $-0,21$ , вторых боковых  $+0,13$ , третьих  $-0,09$  и т.д. Распределение энергии импульса по спектру имеет вид функции  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ , анализ которой говорит о том, что главный лепесток несёт 90 % энергии сигнала. По-

этому часто говорят, что прямоугольный видеоимпульс имеет эффективную полосу частот от  $-\frac{1}{\tau}$  до  $+\frac{1}{\tau}$ .

Например, видеоимпульс длительностью  $\tau = 1$  мкс имеет эффективную полосу частот ( $-1$  МГц,  $+1$  МГц). Эта оценка не сильно меняется для видеоимпульсов другой формы, если только эта форма не очень отличается от прямоугольной. Вообще, в радиотехнике широко пользуются приближённым соотношением для видеоимпульсов

$$\tau_{\text{имп}} f_{\text{верх}} \approx 1,$$

понимая под  $f_{\text{верх}}$  верхнюю граничную частоту (эффективную!) спектра, занимаемого импульсом.

#### ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

1. *Линейность.* Если имеется два сигнала  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ , причём  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$ , а  $s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$ , то взвешенная сумма этих сигналов преобразуется по Фурье следующим образом:

$$as_1(t) + bs_2(t) \leftrightarrow aS_1(\omega) + bS_2(\omega),$$

где  $a, b$  – произвольные числовые коэффициенты.

2. *Свойства вещественной и мнимой части спектральной плотности.* Если  $s(t)$  – вещественный сигнал, причём  $s(t) \leftrightarrow S(\omega) = A + jB$ , то  $A$  есть чётная функция, а  $B$  – нечётная функция частоты.

3. *Спектральная плотность сигнала, смещённого во времени.* Пусть  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ . Тогда смещённый во времени сигнал  $s(t - t_0)$  преобразуется по Фурье следующим образом:

$$s(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

4. *Спектральная плотность производной.* Пусть  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ . Тогда производная от этого сигнала, т.е.  $\frac{ds}{dt}$  преобразуется по Фурье так:

$$\frac{ds}{dt} \leftrightarrow j\omega S(\omega).$$

Таким образом, множитель  $j\omega$  служит оператором дифференцирования в частотной области.

5. *Спектральная плотность первообразной.* Пусть  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ . Тогда первообразная этого сигнала, т.е.  $\int s(t)dt$  преобразуется по Фурье так:

$$\int s(t)dt \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} S(\omega),$$

т.е. множитель  $\frac{1}{j\omega}$  служит оператором интегрирования в частотной области.

6. *Формула Рэлея для энергии сигнала.* Пусть  $s(t)$  – вещественный сигнал, а  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ . Тогда энергия сигнала может быть вычислена так:

$$E_S = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega,$$

т.е. интегрирование во временной области может быть заменено на интегрирование в частотной области.

Аналогичное утверждение справедливо и для периодических сигналов. Пусть вещественный периодический сигнал  $s(t)$  представлен рядом Фурье

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n).$$

Тогда энергия сигнала  $S(t)$  за период

$$E_S = \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = T \left( A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} \right),$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая сигнала;  $A_n$  – амплитуда  $n$ -й гармоники. Именно такая энергия выделяется в резисторе 1 Ом, если на его зажимах действует напряжение  $s(t)$ .

Из последнего выражения легко получить соотношения для средней мощности и действующего (эффективного) значения сигнала:

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2};$$

$$U_{эфф} = \sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,эфф}^2},$$

где  $A_{n,эфф}^2 = \frac{A_n^2}{2}$ .

Эти соотношения позволяют количественно оценить вклад каждой составляющей спектра сигнала в общую энергию сигнала.

7. *Спектральная плотность радиосигнала.* Рассмотрим радиоимпульс

$$s_p(t) = s_b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $s_b(t)$  – видеоимпульс, играющий роль огибающей.

И пусть  $s_b(t) \leftrightarrow S_b(\omega)$ . Тогда радиоимпульс  $s_p(t)$  преобразуется по Фурье следующим образом:

$$s_p(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S_b(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S_b(\omega + \omega_0).$$

Соответствующие спектры сигналов  $s_p(t)$  и  $s_b(t)$  представлены на рис. 1.9.

Видно, что переход от видеоимпульса к радиоимпульсу означает перенос спектра видеоимпульса в области высоких частот – вместо одного максимума на частоте  $\omega = 0$  наблюдается два максимума при  $\omega = \pm\omega_0$ , причём абсолютные значения этих максимумов сокращаются вдвое.

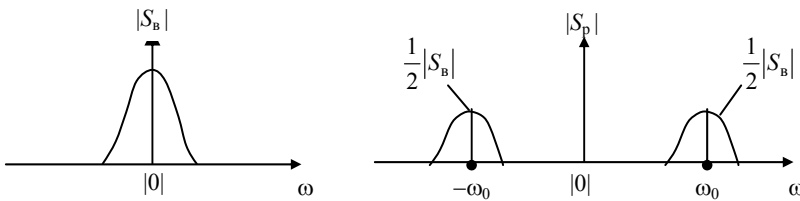


Рис. 1.9

### 1.2.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЁННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

**Преобразование Лапласа.** Переход от комплексных гармонических сигналов вида  $e^{j\omega t}$  к обобщённым гармоническим сигналам вида  $e^{pt}$ , где  $p = \alpha + j\omega$  есть комплексная частота, позволяет получать спектральное представление сигналов, для которых преобразование Фурье не может быть применено. Это сигналы, энергия которых не ограничена, например  $\sigma(t)$ .

Рассмотрим сигнал  $s(t)$ , такой что  $s(t) = 0$  при  $t < 0$ , и имеющий при  $t \geq 0$  степень роста не более чем экспоненциальную, т.е.

$$|s(t)| \leq A \exp(at),$$

где  $A, a$  – положительные числа.

Для таких сигналов может быть осуществлено преобразование Лапласа

$$S(p) = \int_0^{\infty} s(t) e^{-pt} dt. \quad (1.12)$$

Сигнал  $s(t)$  называется оригиналом,  $S(p)$  – его изображением по Лапласу.

Можно показать, что изображение  $S(p)$  существует для всех комплексных чисел  $p$ , у которых  $R_e(p) > a$ . Число  $a$  называют абсциссой абсолютной сходимости.

Переменная  $p$  в (1.12) может быть отождествлена с комплексной частотой  $p = \alpha + j\omega$ .

В частном случае, когда  $\alpha = 0$ , выражение (1.12) переходит в преобразование Фурье. Таким образом, преобразование Фурье – это частный случай преобразования Лапласа. Или преобразование Лапласа – это обобщение преобразования Фурье на случай комплексных частот.

Как в преобразовании Фурье можно восстановить сигнал по его изображению, так и в преобразовании Лапласа

$$s(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S(p) e^{pt} dp, \quad (1.13)$$

где интегрирование производится вдоль вертикальной оси, лежащей на комплексной плоскости правее абсциссы абсолютной сходимости (рис. 1.10).

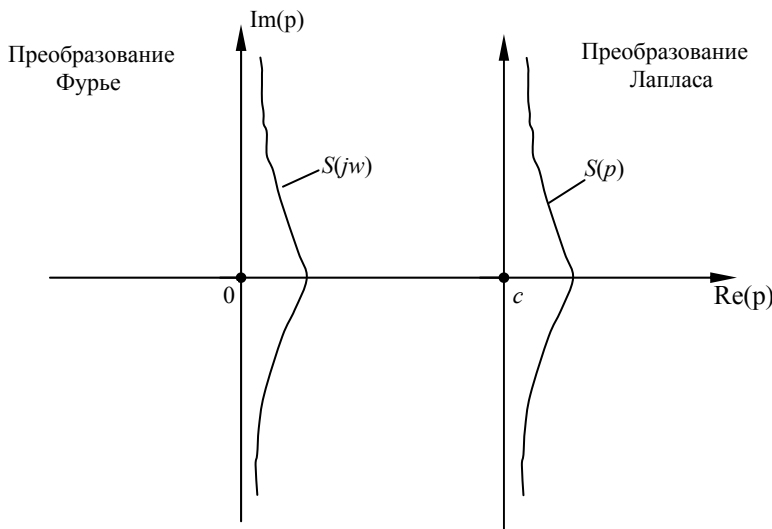


Рис. 1.10

Видно, что преобразование Фурье – это частный случай преобразования Лапласа. Оно годится для функций, абсцисса абсолютной сходимости которых  $a < 0$ .

Ясно, что если для некоторого сигнала  $s(t)$  существует изображение Фурье  $S(\omega)$ , то для него существует и изображение Лапласа  $S(p)$ . Обратное же не всегда верно, т.е. сигнал может не иметь изображения Фурье  $S(\omega)$ .

**Основные свойства преобразования Лапласа**

1. *Линейность.* Если

$$s_1(t) \leftrightarrow S_1(p) \text{ и } s_2(t) \leftrightarrow S_2(p),$$

то

$$as_1(t) + bs_2(t) \leftrightarrow aS_1(p) + bS_2(p).$$

2. *Изображение сигнала, смещённого во времени.* Если

$$s(t) \leftrightarrow S(p),$$

то

$$s(t - t_0) \leftrightarrow e^{-pt_0} S(p).$$

3. *Изображение производной.* Если

$$s(t) \leftrightarrow S(p),$$

то

$$\frac{ds}{dt} \leftrightarrow pS(p) - s(0).$$

4. *Изображение производной n-го порядка.* Если

$$s(t) \rightarrow S(p),$$

то

$$\frac{d^n s}{dt^n} \leftrightarrow p^n S(p) - p^{n-1} s(0) - p^{n-2} s'(0) - \dots - p s^{n-2}(0) - s^{n-1}(0).$$

**Изображения по Лапласу некоторых сигналов**

**#10. Пример.** Изображение обобщённого экспоненциального импульса. Пусть

$$s(t) = \exp(p_0 t) \sigma(t),$$

где  $p_0 = \alpha_0 + j\omega_0$  – фиксированное комплексное число.

Наличие  $\sigma$ -функции обуславливает равенство  $s(t) = 0$  при  $t < 0$ .

Воспользовавшись формулой (1.12), имеем

$$S(p) = \int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t} dt = - \left. \frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0} \right|_{t=0}^{t=\infty}.$$

Если  $\text{Re}(p) > \alpha_0$ , то числитель обратится в нуль при подстановке верхнего предела. В результате получим

$$e^{p_0 t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p - p_0}.$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Вещественный экспоненциальный видеоимпульс

$$e^{-\alpha t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p + \alpha}.$$

б) Комплексный экспоненциальный сигнал

$$e^{j\omega_0 t} \sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p - j\omega_0}.$$

в) Функция включения Хевисайда

$$\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}.$$

**#11. Пример.** Изображение  $\delta$ -функции. Пусть

$$s(t) = \delta(t - t_0).$$

Тогда

$$S(p) = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}.$$

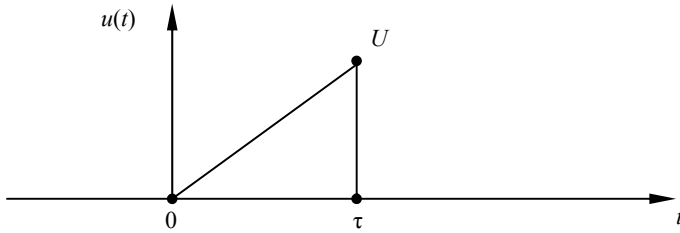
Итак,

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-pt_0}.$$

В частности, при  $t_0 = 0$  получим  $\delta(t) \leftrightarrow 1$ .

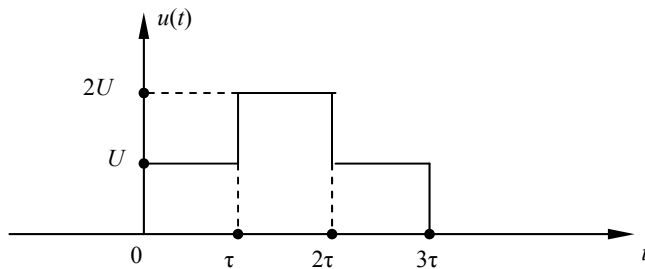
### 1.3. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Импульс напряжения имеет треугольную форму



Составьте математическую модель этого импульса, используя комбинацию функций включения  $\sigma$ .

#2. То же для импульса



#3. Используя формулу (1.1) найдите динамическое представление видеоимпульса

$$u(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t),$$

$\alpha$  = вещественное положительное число.

#4. Найдите энергию сигнала, создавшего на нагрузке  $R = 1$  кОм импульс напряжения

$$u(t) = 10e^{-\frac{t}{1\text{c}}} \sigma(t), \text{ В.}$$

#5. То же самое для импульса из #1 с параметрами:  $U = 100$  В,  $\tau = 10$  мс.

#6. Найдите среднюю мощность сигнала, представляющего собой периодическую последовательность сигналов из #5 с частотой следования 20 Гц.

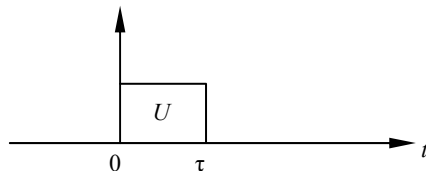
#7. Найдите спектр последовательности косинусоидальных импульсов вида  $U_m \cos \omega_1 t$ , ограниченных на уровне  $U_0$ .

#8. В #7 исследуйте зависимость амплитуд гармоник с частотами  $0, \omega_1, 2\omega_1$  от угла отсечки.

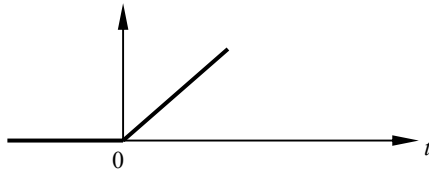
#9. Найдите спектральную плотность экспоненциального видеоимпульса вида  $u(t) = Ue^{-\alpha t} \sigma(t)$ , где  $\alpha$  – вещественное положительное число.

#10. Найдите спектральную плотность  $\delta$ -импульса  $u(t) = U\delta(t)$ .

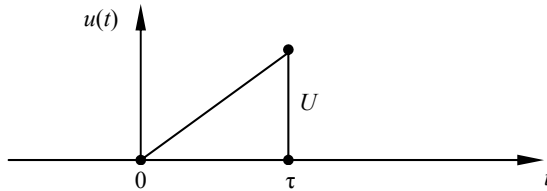
#11. Найдите изображение по Лапласу прямоугольного видеоимпульса



#12. Найдите изображение по Лапласу линейно-нарастающего напряжения  $u(t) = \alpha t$



#13. Найдите изображение по Лапласу треугольного импульса



## 2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

В этом разделе мы ограничимся рассмотрением только линейных стационарных систем, т.е. систем, оператор которых, во-первых, линеен, а во-вторых, инвариантен относительно выбора начала отсчёта времени.

### 2.1. РЕАКЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СИГНАЛЫ

#### 2.1.1. ВОЗДЕЙСТВИЕ НА СИСТЕМУ СТУПЕНЧАТОГО СИГНАЛА $\sigma(t)$ . ПЕРЕХОДНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИСТЕМЫ

Пусть на входе системы, описываемой оператором  $T$ , действует сигнал  $\sigma(t)$ . По определению, переходной характеристикой системы называется функция  $g(t)$ , являющаяся откликом системы на входной сигнал  $\sigma(t)$ :

$$g(t) = T\sigma(t).$$

Так как система стационарна, то переходная характеристика инвариантна относительно временного сдвига, т.е.

$$g(t - t_0) = T\sigma(t - t_0).$$

*Замечание:* каков бы ни был конкретный вид переходной характеристики физически реализуемой системы, всегда должно выполняться условие:

$$g(t) = 0 \text{ при } t < 0,$$

так как выходной сигнал не может возникнуть до момента появления входного сигнала.

#### 2.1.2. ВОЗДЕЙСТВИЕ НА СИСТЕМУ ИМПУЛЬСНОГО СИГНАЛА $\delta(t)$ . ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИСТЕМЫ

Пусть на входе системы действует сигнал  $\delta(t)$ . По определению, импульсной характеристикой системы называется функция  $h(t)$ , являющаяся откликом системы на входной сигнал  $\delta(t)$ :

$$h(t) = T\delta(t).$$

Так как система стационарна, то

$$h(t - t_0) = T\delta(t - t_0),$$

т.е. импульсная характеристика инвариантна относительно временного сдвига.

Так же, как и в случае переходной характеристики, условие физической реализуемости системы накладывает ограничение на её импульсную характеристику:

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

### 2.1.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ НА СИСТЕМУ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА $e^{j\omega t}$ . ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СИСТЕМЫ

Замечательным свойством линейной стационарной системы является то, что при воздействии входного гармонического сигнала  $\dot{U}_{\text{вх}} e^{j\omega t}$  сигнал на выходе системы также гармонический –  $\dot{U}_{\text{вых}} e^{j\omega t}$ . Здесь  $\dot{U}_{\text{вх}}$  и  $\dot{U}_{\text{вых}}$  – комплексные амплитуды сигналов.

Отношение  $\dot{K} = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}}$  называется комплексным коэффициентом передачи системы. Этот коэффициент в общем случае зависит от частоты  $\omega$ .

Функция  $\dot{K}(\omega)$  или  $\dot{K}(j\omega)$  называется частотной характеристикой системы. Чаще всего её представляют в показательной форме:

$$\dot{K}(j\omega) = |\dot{K}(j\omega)| e^{j\varphi_k(\omega)}.$$

Функцию  $|\dot{K}(j\omega)|$  называют амплитудно-частотной характеристикой – АЧХ. Функцию  $\varphi_k(\omega)$  называют фазо-частотной характеристикой – ФЧХ.

Для физически реализуемой системы должно выполняться условие

$$\dot{K}(j\omega) = \dot{K}^*(-j\omega).$$

Это означает, что АЧХ является чётной функцией, а ФЧХ – нечётной функцией частоты.

### 2.1.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ НА СИСТЕМУ ОБОБЩЁННОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА $e^{pt}$ . ОПЕРАТОРНАЯ ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ СИСТЕМЫ

Воздействие на линейную стационарную систему сигнала  $U_{\text{вх}}(p)e^{pt}$  приводит к появлению на выходе подобного же сигнала  $U_{\text{вых}}(p)e^{pt}$ .

Отношение  $K(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}$  называется операторным коэффициентом передачи системы. Функция  $K(p)$ , заданная на комплексной плоскости, называется операторной передаточной функцией системы.

Теоретический анализ показывает, что между вышеназванными характеристиками одной и той же системы имеется строгая математическая взаимосвязь.

Связь между переходной и импульсной характеристиками задаётся выражениями:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt}, \quad g(t) = \int_0^t h(\xi) d\xi. \quad (2.1)$$

Связь между импульсной и частотной характеристиками задаётся выражениями:

$$\dot{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.2)$$

Что касается частотной и операторной характеристик, то первая есть частный случай второй при  $p = j\omega$ , т.е.



$$\dot{K}(j\omega) = K(p) \Big|_{p=j\omega} \cdot \quad (2.3)$$

В качестве примера докажем первое соотношение из (2.1). По определению, имеем  $h(t) = T\delta(t)$ . Но  $\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$ , тогда  $h(t) = T \frac{d\sigma(t)}{dt}$ .

Поскольку линейные стационарные операторы можно менять местами, то

$$h(t) = \frac{d}{dt}(T\sigma(t)) = \frac{d}{dt}g(t),$$

что и требовалось доказать!

## 2.2. МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ПЕРЕХОДНОЙ, ИМПУЛЬСНОЙ, ЧАСТОТНОЙ И ОПЕРАТОРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

### 2.2.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Он заключается в том, что на вход исследуемой системы подаётся тестовый сигнал, а на выходе подключается прибор, регистрирующий форму выходного сигнала, например, осциллограф. Подав на вход сигнал  $s_{\text{вх}}(t) = \sigma(t)$ , на выходе, очевидно, будем наблюдать переходную характеристику  $g(t)$ .

При подаче на вход системы короткого импульса единичной площади на выходе можно будет наблюдать импульсную характеристику  $h(t)$ .

Наконец, подавая на вход системы синусоидальный сигнал единичной амплитуды  $s(t) = \sin \omega t$ , на выходе будем наблюдать

$$s_{\text{вых}}(t) = |K(\omega)| \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Сравнивая амплитуды и фазы входного и выходного колебаний, можно найти комплексный коэффициент передачи системы  $\dot{K}(\omega)$  на частоте  $\omega$ . Изменяя частоту входного сигнала, можно таким образом определить частотную характеристику  $\dot{K}(j\omega)$ . Следует отметить, что в настоящее время существуют измерители частотных характеристик, которые позволяют непосредственно наблюдать на экране амплитудно-частотную характеристику исследуемой системы.

### 2.2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СВЯЗЫВАЮЩЕГО $s_{\text{вых}}(t)$ И $s_{\text{вх}}(t)$

В радиоэлектронике подавляющее большинство линейных стационарных систем устроено так, что связь  $s_{\text{вых}}$  с  $s_{\text{вх}}$  описывается дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n s_{\text{вых}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{ds_{\text{вых}}}{dt} + a_0 s_{\text{вых}} = \\ = b_m \frac{d^m s_{\text{вх}}}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{ds_{\text{вх}}}{dt} + b_0 s_{\text{вх}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $a_i, b_i$  – постоянные вещественные числа.

Если входной сигнал  $s_{\text{вх}}$  задан, то правая часть этого уравнения является известной функцией, которую можно обозначить  $f(t)$ .

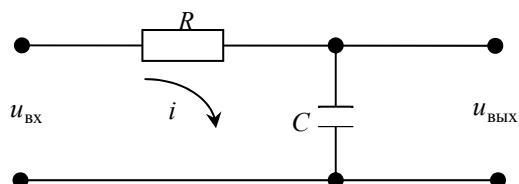
Тогда анализ поведения системы сводится к хорошо изученной в математике проблеме решения линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$a_n \frac{d^n s_{\text{ВЫХ}}}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds_{\text{ВЫХ}}}{dt} + a_0 s_{\text{ВЫХ}} = f(t). \quad (2.5)$$

Порядок  $n$  этого уравнения принято называть порядком системы.

Если взять  $s_{\text{ВХ}}(t) = \sigma(t)$ , то решение уравнения (2.5) даст переходную характеристику системы. Рассмотрим эту возможность на примере.

**#1. Пример.** Дана RC-цепь



В этой схеме  $u_{\text{ВЫХ}} = u_{\text{ВХ}} - iR$ , но  $i = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt}$ , следовательно,

$$u_{\text{ВЫХ}} = u_{\text{ВХ}} - RC \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt}.$$

Окончательно, дифференциальное уравнение цепи

$$RC \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = u_{\text{ВХ}}.$$

Взяв в качестве  $u_{\text{ВХ}}$  функцию  $\sigma(t)$ , получим уравнение для определения переходной характеристики  $g(t)$

$$RC \frac{dg}{dt} + g = \sigma(t).$$

Решением этого уравнения будет

$$g = g_{\text{общ}} + g_{\text{част}},$$

где  $g_{\text{общ}}$  – общее решение однородного уравнения;  $g_{\text{част}}$  – частное решение неоднородного уравнения.

Для нахождения  $g_{\text{общ}}$  составим характеристическое уравнение

$$RCk + 1 = 0,$$

корнем которого является  $k = -\frac{1}{RC}$ .

В итоге  $g_{\text{общ}} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ . Тогда  $g = Ae^{-\frac{t}{RC}} + g_{\text{част}}$ .

Частное решение неоднородного уравнения легко находится, если устремить  $t$  к  $\infty$ . Тогда  $g_{\text{част}} = 1$ , и, следовательно,

$$g(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} + 1$$

Постоянная  $A$  находится из начального условия  $g(0) = 0$ . Отсюда  $A = -1$ . Окончательно,

$$g(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{RC}} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

или

$$g(t) = \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \sigma(t).$$

Дифференцируя переходную характеристику  $g(t)$ , можно найти импульсную характеристику цепи. В нашем примере получим

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \sigma(t).$$

Дифференциальное уравнение (2.4) позволяет легко найти частотную характеристику системы  $\dot{K}(j\omega)$ . Для этого подставим в правую часть уравнения (2.4)  $s_{\text{вх}}(t) = e^{j\omega t}$ , а в левую часть —  $s_{\text{вых}}(t) = \dot{K}(j\omega)e^{j\omega t}$ .

После сокращения на общий множитель  $e^{j\omega t}$  получим

$$a_n(j\omega)^n \dot{K}(j\omega) + \dots + a_1(j\omega) \dot{K}(j\omega) + a_0 \dot{K}(j\omega) = b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0,$$

откуда

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1(j\omega) + a_0}. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом можно получить выражение для операторной передаточной функции

$$K(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (2.7)$$

*Замечание:* Частотную характеристику (2.6) можно рассматривать как частный случай операторной передаточной характеристики при  $p = j\omega$ .

Итак, дифференциальное уравнение системы (2.4) позволяет записать её передаточную функцию  $K(p)$  в виде отношения двух полиномов.

Корни знаменателя  $p_1 \dots p_n$  называются полюсами передаточной функции  $K(p)$ . Корни числителя  $z_1 \dots z_m$  называют нулями передаточной функции.

Вынося общий множитель  $K_0$ , возникающий при делении в (2.7), можно получить так называемое нуль-полюсное представление передаточной функции

$$K(p) = K_0 \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (2.8)$$

Вещественность коэффициентов дифференциального уравнения (2.4) обуславливает следующее свойство нулей и полюсов: эти числа либо вещественные, либо образуют комплексно-сопряжённые пары.

*Замечание:* Полюсы передаточной функции  $p_1 \dots p_n$  являются корнями характеристического уравнения системы и им соответствуют члены вида  $A_i e^{p_i t}$  в выходном сигнале  $s_{\text{вых}}(t)$ . Поэтому для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все полюсы системы  $p_i$  располагались строго в левой полуплоскости комплексной переменной  $p$ .

**#2. Пример.** Рассмотрим цепь из примера #1. Её дифференциальное уравнение

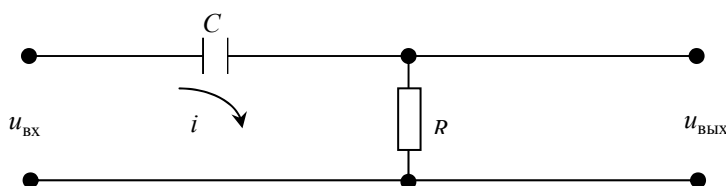
$$RC \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = u_{\text{ВХ}}.$$

Отсюда передаточная функция цепи равна

$$K(p) = \frac{1}{RCp + 1}.$$

Эта функция имеет один вещественный отрицательный полюс  $p_1 = -\frac{1}{RC}$ , поэтому система является устойчивой.

**#3. Пример.** Дана RC-цепь



$$u_{\text{ВЫХ}} = Ri = RC \frac{d(u_{\text{ВХ}} - u_{\text{ВЫХ}})}{dt},$$

отсюда дифференциальное уравнение цепи

$$RC \frac{du_{\text{ВЫХ}}}{dt} + u_{\text{ВЫХ}} = RC \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt}.$$

Тогда передаточная функция цепи

$$K(p) = \frac{RCp}{RCp + 1}.$$

Частотная характеристика цепи, очевидно, будет иметь вид

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

### 2.2.3. Определение характеристик радиотехнической цепи с помощью математического аппарата теории цепей

Методы теории цепей позволяют найти  $\dot{K}(j\omega)$  и  $K(p)$ , не прибегая к составлению дифференциального уравнения цепи. Если заменить  $u_{\text{ВХ}}, u_{\text{ВЫХ}}$  на  $\dot{U}_{\text{ВХ}}, \dot{U}_{\text{ВЫХ}}$  – комплексные амплитуды, а для радиоэлементов  $R, L, C$  ввести в рассмотрение импедансы  $Z_R = R, Z_L = j\omega L, Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ , то цепь на переменном гармоническом сигнале  $e^{j\omega t}$  может быть рассчитана, как на постоянном токе.

**#4. Пример.** Найти частотную характеристику цепи примера #3:

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \dot{I} R, \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_{\text{ВХ}}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \dot{U}_{\text{ВХ}} \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}.$$

Решение.

$$\dot{U}_{\text{ВЫХ}} = \dot{U}_{\text{ВХ}} \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}, \quad \dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Аналогичным образом поступают для нахождения операторной передаточной функции цепи. Для этого токи и напряжения заменяют на их изображения  $U(p), I(p)$ , а для радиоэлементов  $R, L, C$  вводят их импедансы

$$Z_R = R, \quad Z_L = pL, \quad Z_C = \frac{1}{pC}.$$

**#5. Пример.** Найти передаточную функцию цепи примера #3.

Решение.

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = I(p)R, \quad I(p) = \frac{U_{\text{ВХ}}(p)}{R + \frac{1}{pC}} = U_{\text{ВХ}}(p) \frac{pC}{1 + pRC},$$

$$U_{\text{ВЫХ}}(p) = U_{\text{ВХ}}(p) \frac{pRC}{1 + pRC}, \quad K(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{pRC}{1 + pRC}.$$

### 2.3. НАХОЖДЕНИЕ СИГНАЛА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕЁ ВХОДНОГО СИГНАЛА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

#### 2.3.1. НАХОЖДЕНИЕ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ $g(t)$

Представим входной сигнал  $s_{\text{ВХ}}(t)$  с помощью  $\sigma$ -функций по формуле (1.1):

$$s_{\text{ВХ}}(t) = s_{\text{ВХ}}(0)\sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds_{\text{ВХ}}}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau.$$

Тогда для системы с оператором  $T$  выходной сигнал будет равен

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = Ts_{\text{ВХ}}(t) = T \left[ s_{\text{ВХ}}(0)\sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds_{\text{ВХ}}}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau \right].$$

Используя свойства линейного стационарного оператора, можем записать

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = s_{\text{ВХ}}(0)T\sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds_{\text{ВХ}}}{d\tau} T\sigma(t - \tau) d\tau,$$

отсюда

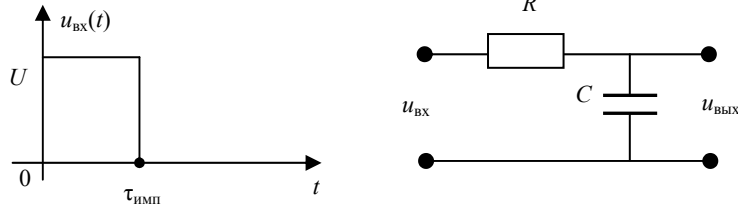
$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = s_{\text{ВХ}}(0)g(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds_{\text{ВХ}}}{d\tau} g(t - \tau) d\tau.$$

Так как для физически реализуемой системы переходная характеристика  $g(t) = 0$  при  $t < 0$ , можно заменить верхний предел интегрирования на текущее время  $t$ :

$$s_{\text{ВЫХ}}(t) = s_{\text{ВХ}}(0)g(t) + \int_0^t \frac{ds_{\text{ВХ}}}{d\tau} g(t-\tau) d\tau. \quad (2.9)$$

Эта формула получила название интеграла Дюамеля.

**#6. Пример.** Найти реакцию интегрирующей RC-цепи на прямоугольный видеоимпульс



*Решение.*

1. Представим входной сигнал с помощью  $\sigma$ -функций Хевисайда

$$u_{\text{ВХ}}(t) = U\sigma(t) - U\sigma(t - \tau_{\text{ИМП}}).$$

2.  $u_{\text{ВЫХ}}(t) = Ug(t) - Ug(t - \tau_{\text{ИМП}}) = U[g(t) - g(t - \tau_{\text{ИМП}})]$ .

3. Воспользуемся переходной характеристикой этой цепи, найденной в примере #1:

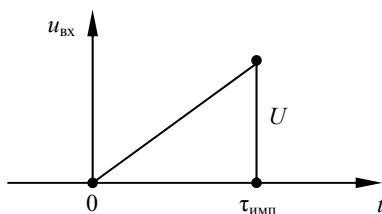
$$g(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \sigma(t).$$

4. Подставив  $g(t)$  в предыдущее выражение, получим

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = U \left[ \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \sigma(t) - \left(1 - e^{-\frac{t - \tau_{\text{ИМП}}}{RC}}\right) \sigma(t - \tau_{\text{ИМП}}) \right] =$$

$$= \begin{cases} U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) & \text{при } 0 \leq t < \tau_{\text{ИМП}}, \\ U \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{ИМП}}}{RC}}\right) e^{-\frac{t - \tau_{\text{ИМП}}}{RC}} & \text{при } t \geq \tau_{\text{ИМП}}. \end{cases}$$

**#7. Пример.** Найти реакцию той же RC-цепи на входной треугольный импульс.



*Решение.*

1. Представим входной сигнал с помощью  $\sigma$ -функций

$$u_{\text{ВХ}}(t) = \int_0^{\infty} \frac{du_{\text{ВХ}}}{d\tau} \sigma(t-\tau) d\tau - U\sigma(t - \tau_{\text{ИМП}}).$$

2.  $u_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_0^t \frac{du_{\text{ВХ}}(\tau)}{d\tau} g(t-\tau) d\tau - Ug(t - \tau_{\text{ИМП}})$ .

3. Воспользуемся полученным ранее выражением для переходной характеристики этой цепи

$$g(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \sigma(t).$$

Тогда

$$u_{\text{вых}}(t) = \int_0^t \frac{du_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right) \sigma(t-\tau) d\tau - U \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_{\text{имп}}}{RC}}\right) \sigma(t-\tau_{\text{имп}}).$$

4. Рассмотрим последнее выражение для двух случаев:

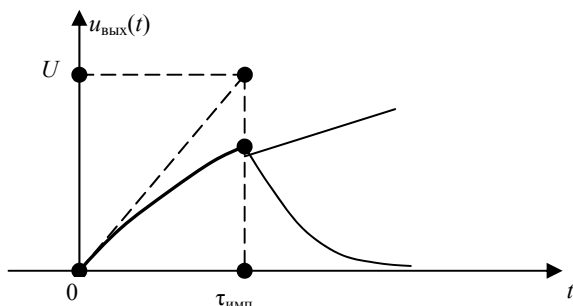
а)  $0 < t < \tau_{\text{имп}}$ . В этом случае  $\sigma(t-\tau_{\text{имп}}) = 0$ , поэтому

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \int_0^t \frac{U}{\tau_{\text{имп}}} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right) d\tau = \frac{U}{\tau_{\text{имп}}} \left[ \tau - RC e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \right]_0^t = \\ &= \frac{U}{\tau_{\text{имп}}} \left[ t - RC \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \right]. \end{aligned}$$

б)  $t \geq \tau_{\text{имп}}$ . В этом случае  $\frac{du_{\text{вх}}(\tau)}{d\tau} = 0$  за пределами интегрирования  $(0, \tau_{\text{имп}})$ , поэтому в качестве верхнего предела интегрирования вместо  $t$  достаточно взять  $\tau_{\text{имп}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \int_0^{\tau_{\text{имп}}} \frac{U}{\tau_{\text{имп}}} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}}\right) d\tau - U \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_{\text{имп}}}{RC}}\right) = \\ &= \frac{U}{\tau_{\text{имп}}} \left[ \tau - RC e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \right]_0^{\tau_{\text{имп}}} - U \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_{\text{имп}}}{RC}}\right) = \\ &= \frac{U}{\tau_{\text{имп}}} \left[ \tau_{\text{имп}} - RC e^{-\frac{t-\tau_{\text{имп}}}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{имп}}}{RC}}\right) \right] - U \left(1 - e^{-\frac{t-\tau_{\text{имп}}}{RC}}\right) = \\ &= U \left[ 1 - \frac{RC}{\tau_{\text{имп}}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{имп}}}{RC}}\right) \right] e^{-\frac{t-\tau_{\text{имп}}}{RC}}. \end{aligned}$$

Форма выходного импульса



$$u_{\text{вых}}(\tau_{\text{имп}}) = U \left[ 1 - \frac{RC}{\tau_{\text{имп}}} \left(1 - e^{-\frac{\tau_{\text{имп}}}{RC}}\right) \right]$$

### 2.3.2. НАХОЖДЕНИЕ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ $h(t)$

Представим входной сигнал  $s_{\text{вх}}(t)$  с помощью  $\delta$ -функций по формуле (1.2)

$$s_{\text{вх}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} s_{\text{вых}}(t) &= Ts_{\text{вх}}(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) T \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая, что для физически реализуемой системы  $h(t) = 0$  при  $t < 0$ , получим окончательно

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t s_{\text{вх}}(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (2.10)$$

Эта формула, так же как и (2.9), называется интегралом Дюамеля.

**#8. Пример.** Решить задачу из примера #6 с помощью импульсной характеристики.

*Решение.*

1. Воспользуемся импульсной характеристикой нашей RC-цепи, найденной в примере #1:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \sigma(t).$$

2. 
$$u_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(\tau) \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-\tau}{RC}} \sigma(t - \tau) d\tau.$$

3. Поскольку  $u_{\text{вх}}(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ , то нижний предел интегрирования можно заменить на 0:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t u_{\text{вх}}(\tau) e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau.$$

Рассмотрим это выражение для двух случаев:

- а)  $0 \leq t < \tau_{\text{имп}}$ . В этом случае

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = U e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{\tau}{RC}} \Big|_0^t = U \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right).$$

б)  $t \geq \tau_{\text{имп}}$ . В этом случае  $u_{\text{вх}}(\tau) = 0$  за пределами интегрирования  $(0, \tau_{\text{имп}})$ , поэтому в качестве верхнего предела интегрирования вместо  $t$  достаточно взять  $\tau_{\text{имп}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{RC} \int_0^{\tau_{\text{имп}}} U e^{-\frac{t-\tau}{RC}} d\tau = U e^{-\frac{t}{RC}} e^{\frac{\tau}{RC}} \Big|_0^{\tau_{\text{имп}}} = \\ &= U e^{-\frac{t}{RC}} \left( e^{\frac{\tau_{\text{имп}}}{RC}} - 1 \right) = U \left( 1 - e^{-\frac{\tau_{\text{имп}}}{RC}} \right) e^{-\frac{t-\tau_{\text{имп}}}{RC}}. \end{aligned}$$



Итак, 
$$u_{\text{вых}}(t) = \begin{cases} U \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) & \text{при } 0 \leq t < \tau_{\text{ИМП}}, \\ U \left( 1 - e^{-\frac{\tau_{\text{ИМП}}}{RC}} \right) e^{-\frac{t-\tau_{\text{ИМП}}}{RC}} & \text{при } t \geq \tau_{\text{ИМП}}. \end{cases}$$

Мы получили, естественно, тот же результат, что и в примере #6, где мы использовали переходную характеристику цепи.

### 2.3.3. НАХОЖДЕНИЕ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ $\dot{K}(j\omega)$

Представим входной сигнал  $s_{\text{вх}}(t)$  по формуле обратного преобразования Фурье:

$$s_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где  $S_{\text{вх}}(\omega)$  – спектральная плотность входного сигнала.

Каждая составляющая спектра входного сигнала проходит на выход системы с коэффициентом  $\dot{K}(j\omega)$ . Суммируя эти элементарные реакции на выходе системы, получим

$$s_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) S_{\text{вх}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.11)$$

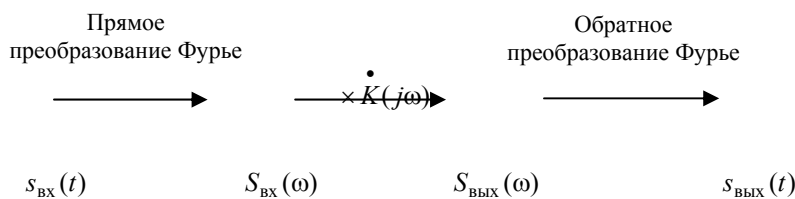
Видим, что в этом выражении произведение  $\dot{K}(j\omega) S_{\text{вх}}(\omega)$  есть спектральная плотность выходного сигнала.

Итак,

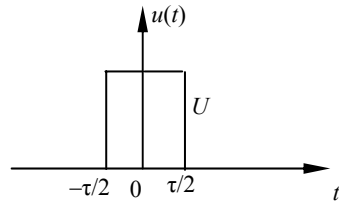
$$S_{\text{вых}}(\omega) = \dot{K}(j\omega) S_{\text{вх}}(\omega). \quad (2.12)$$

Соотношения (2.11), (2.12) составляют основу спектрального метода анализа прохождения сигналов через линейные стационарные цепи.

Согласно этому методу, нахождение выходного сигнала сводится к нижеследующей цепочке вычислений:



**#9. Пример.** Найти форму сигнала на выходе идеального фильтра нижних частот (ФНЧ) с граничной частотой  $F_B$  при подаче на его вход прямоугольного видеоимпульса



*Решение.*

1. Частотная характеристика идеального ФНЧ имеет вид

$$K(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < -2\pi F_B; \\ 1 & \text{при } -2\pi F_B \leq \omega \leq 2\pi F_B; \\ 0 & \text{при } \omega > 2\pi F_B. \end{cases}$$

2. Спектральная плотность входного импульса была нами найдена ранее:

$$S_{\text{вх}}(\omega) = U\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}.$$

$$3. \quad S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = K(j\omega)S_{\text{ВХ}}(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega < -2\pi F_{\text{В}}; \\ U\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} & \text{при } -2\pi F_{\text{В}} \leq \omega \leq 2\pi F_{\text{В}}; \\ 0 & \text{при } \omega > 2\pi F_{\text{В}}. \end{cases}$$

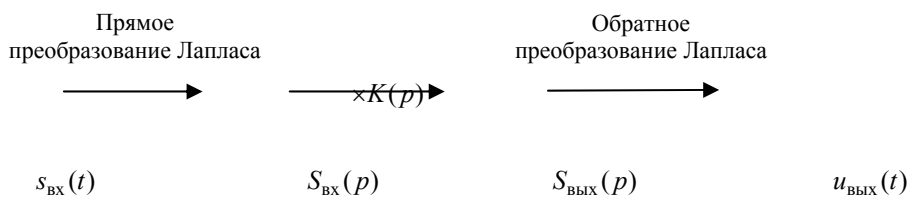
$$4. \quad u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi F_{\text{В}}}^{2\pi F_{\text{В}}} U\tau \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} e^{j\omega t} d\omega.$$

### 2.3.4. НАХОЖДЕНИЕ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

#### С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ $K(p)$

Операторный метод анализа прохождения сигналов через линейные стационарные цепи является обобщением спектрального метода.

Согласно этому методу, нахождение выходного сигнала сводится к следующей цепочке вычислений:



Здесь

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{ВЫХ}}(p) &= K(p)S_{\text{ВХ}}(p), \\ u_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S_{\text{ВЫХ}}(p) e^{pt} dp. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

**#10. Пример.** Найти импульсную характеристику  $RC$ -цепи из примера #1.

*Решение.* Импульсная характеристика – это реакция цепи на  $s_{\text{вх}}(t) = \delta(t)$ . Применим операторный метод для нахождения этой реакции.

1. Изображение по Лапласу от  $\delta$ -импульса известно:

$$S_{\text{вх}}(p) = 1.$$

2. Операторная передаточная функция исследуемой цепи была найдена в примере #2:

$$K(p) = \frac{1}{RCp + 1}$$

3. 
$$S_{\text{вых}}(p) = K(p)S_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{RCp + 1} = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}.$$

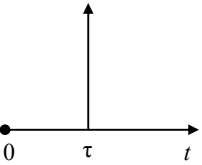
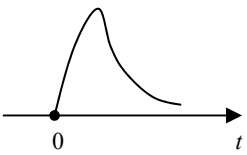
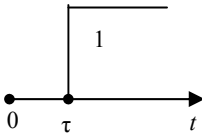
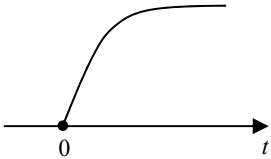
4. Известен оригинал от  $\frac{1}{p - p_0}$ :

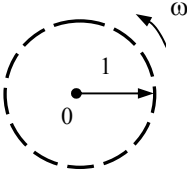
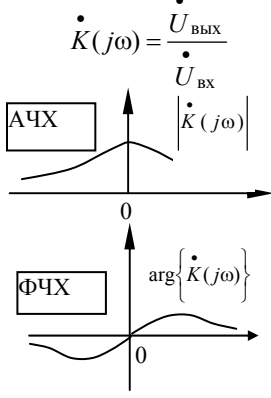
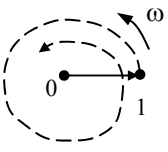
$$\frac{1}{p - p_0} \rightarrow e^{p_0 t} \sigma(t).$$

Тогда

$$s_{\text{вых}}(t) = h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \sigma(t).$$

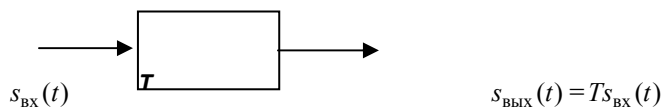
Таблица 2.1

Элементарные (базисные) функции	Представление входного сигнала	Характеристика цепи	Представление выходного сигнала
$\delta(t - \tau)$ 	$s_{\text{ВХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$	$h(t) = T\delta(t)$ 	$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^t s_{\text{ВХ}}(\tau) h(t - \tau) d\tau$
$\sigma(t - \tau)$ 	$s_{\text{ВХ}}(t) = s_{\text{ВХ}}(0) \sigma(t) + \int_0^{\infty} \frac{ds_{\text{ВХ}}}{d\tau} \sigma(t - \tau) d\tau$	$g(t) = T\sigma(t)$ 	$s_{\text{ВЫХ}}(t) = s_{\text{ВХ}}(0) g(t) + \int_0^t \frac{ds_{\text{ВХ}}}{d\tau} g(t - \tau) d\tau$

Элементарные (базисные) функции	Представление входного сигнала	Характеристика цепи	Представление выходного сигнала
<p><math>e^{j\omega t}</math></p> 	<p><math display="block">s_{\text{ВХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{ВХ}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega</math></p> <p>где</p> $S_{\text{ВХ}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{ВХ}}(t) e^{-j\omega t} dt$	<p><math display="block">\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{U}_{\text{ВХ}}}</math></p> 	$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) \times S_{\text{ВХ}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$ $S_{\text{ВЫХ}}(\omega) = \dot{K}(j\omega) S_{\text{ВХ}}(\omega)$
<p><math>e^{pt}</math> где <math>p = \alpha + j\omega</math></p> 	<p><math display="block">s_{\text{ВХ}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} S_{\text{ВХ}}(p) e^{pt} dp</math></p> <p>где</p> $S_{\text{ВХ}}(p) = \int_0^{\infty} s_{\text{ВХ}}(t) e^{-pt} dt$	<p><math display="block">K(p) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(p)}{U_{\text{ВХ}}(p)}</math></p> <p>функция, заданная на комплексной плоскости</p>	$s_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} K(p) \times S_{\text{ВХ}}(p) e^{pt} dp,$ $S_{\text{ВЫХ}}(p) = K(p) S_{\text{ВХ}}(p)$

2.3.5. СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ  
СТАЦИОНАРНУЮ ЦЕПЬ

Модель



Связь между различными характеристиками цепи:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt};$$

$$g(t) = \int_0^t h(\xi) d\xi;$$

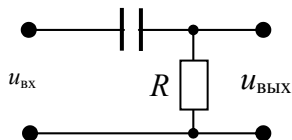
$$\dot{K}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega;$$

$$\dot{K}(j\omega) = K(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

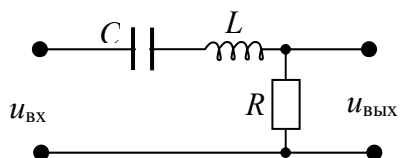
## 2.4. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Найдите переходную характеристику цепи



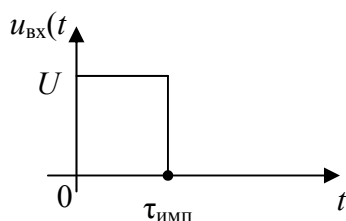
#2. Найдите импульсную характеристику цепи #1.

#3. Составьте дифференциальное уравнение, связывающее  $u_{\text{ВХ}}$  и  $u_{\text{ВЫХ}}$ , для цепи



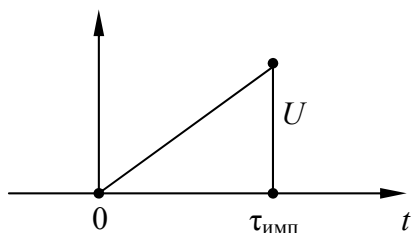
#4. Найдите частотную характеристику  $\dot{K}(j\omega)$  и операторную передаточную функцию  $K(p)$  цепи #3.

#5. С помощью переходной характеристики цепи #1 найдите её реакцию на импульс



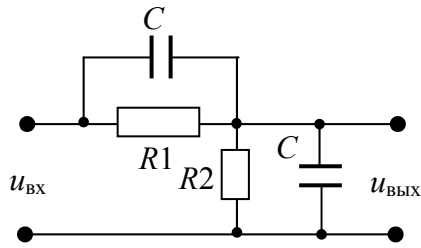
#6. Решите задачу #5, но теперь с помощью импульсной характеристики цепи.

#7. Найдите реакцию той же цепи на треугольный импульс



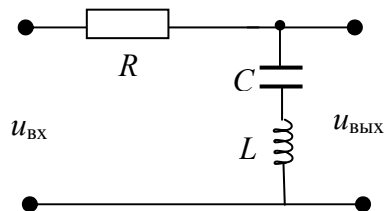


#8. Методами теории цепей найдите частотную характеристику  $\dot{K}(j\omega)$  цепи



#9. Исследуйте  $\dot{K}(j\omega)$  цепи #8 для случая  $R_1C_1 = R_2C_2$ .

#10. Найдите частотную характеристику цепи



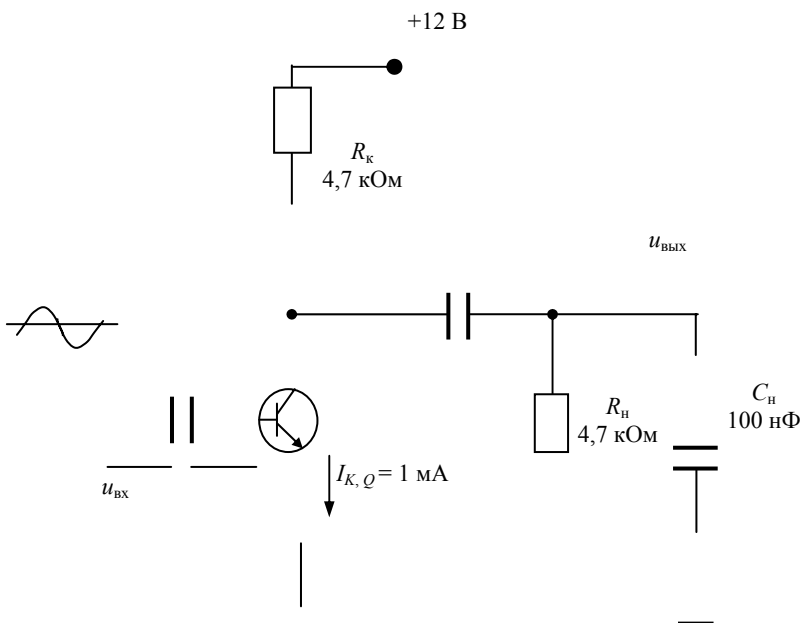
#11. Найдите спектральную плотность сигнала на выходе цепи #1 при воздействии на её вход экспоненциального видеоимпульса

$$u_{\text{ВХ}}(t) = Ue^{-\alpha t} \sigma(t),$$

где  $\alpha$  – вещественное положительное число.

#12. В задаче #11 найдите форму выходного сигнала  $s_{\text{ВЫХ}}(t)$ .

#13. Найдите частотную характеристику  $\dot{K}(j\omega)$  схемы



### 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

На ранних стадиях развития радиотехники вопрос о выборе наилучшей формы сигналов не был очень острым. Технический уровень того времени был ещё слишком низким, чтобы генерировать и, тем более, обрабатывать сигналы сложной формы. Поэтому ограничивались простейшими сигналами, с тем чтобы облегчить практическую реализацию аппаратуры для их кодирования, модуляции и демодуляции.

В настоящее время ситуация в корне изменилась. В современных РЭС форма сигналов выбирается не из соображений удобства и простоты их генерирования и обработки, а с точки зрения оптимального решения тех задач, для которых была спроектирована данная РЭС. Для того чтобы лучше понять суть сказанного, рассмотрим пример.

**#1. Пример.** Обратимся к упрощённой идее работы радиолокатора, измеряющего дальность до цели. Эта дальность определяется путём сравнения во времени излучённого импульса  $u(t)$  и импульса, отражённого от цели  $u(t - \tau)$ , представляющего собой задержанную на время  $\tau$  копию первого. Измерение дальности до цели сводится к измерению задержки  $\tau$ . Казалось бы, что точность измерения можно повысить путём укорочения зондирующих импульсов, однако такое решение "в лоб" приводит к весьма невыгодной энергетике (покажите это в качестве упражнения). Гораздо более эффективным решением является такой выбор формы импульса, чтобы при большой длительности (а значит и энергии) импульса даже его незначительный сдвиг по времени был бы легко уловим.

Рассмотренный пример даёт качественное представление о том, какие сигналы можно считать "хорошими" для данного применения. Следует сказать, что во многих областях радиоэлектроники возникает задача сравнения сигнала с его копией, задержанной во времени. Решение этой задачи как раз и составляет содержание корреляционного анализа сигналов.

#### 3.1. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СИГНАЛА

Для количественной оценки различия сигнала  $u(t)$  и его смещённой во времени копии  $u(t - \tau)$  вводят автокорреляционную функцию (АКФ) сигнала  $u(t)$ :

$$B_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t - \tau) dt. \quad (3.1)$$

*Замечание:* Выражение (3.1) имеет смысл только для сигналов с ограниченной энергией, для которых, как мы видели ранее, существует преобразование Фурье.

Для АКФ доказан ряд свойств:

а) при  $\tau = 0$  АКФ даёт энергию сигнала

$$B_u(0) = E_u;$$

б) АКФ есть чётная функция  $\tau$

$$B_u(\tau) = B_u(-\tau);$$

в) при любом  $\tau$  модуль АКФ не превосходит энергию сигнала

$$|B_u(\tau)| \leq B_u(0) = E_u;$$

г) существует тесная связь между АКФ и энергетическим спектром сигнала (под энергетическим спектром сигнала  $u(t)$  понимают функцию  $W_u(\omega) = |U(\omega)|^2$ ):

$$B_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.2)$$

Ясно, что имеет место и обратное соотношение

$$W_u(\omega) = |U(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.3)$$

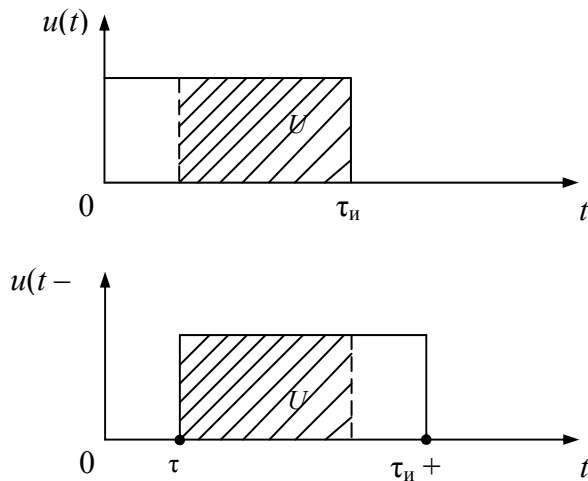
*Замечание:* Сравнение формулы (3.2) с Фурье-представлением сигнала

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

приводит к выводу, что АКФ нечувствительна к фазовым соотношениям в спектре сигнала, тогда как форма сигнала во времени к ним очень чувствительна. Иными словами, АКФ является более грубым инструментом анализа структуры сигнала, но зато и более устойчивым к изменчивости формы сигнала, возникающей из-за фазовых искажений. Как раз такой особенностью отличается слуховой аппарат человека, который прекрасно различает разные частотные составляющие принимаемых звуковых сообщений, но остаётся нечувствительным к фазе этих составляющих.

**#2. Пример.** Найти АКФ прямоугольного видеоимпульса с амплитудой  $U$  и длительностью  $\tau_n$ .

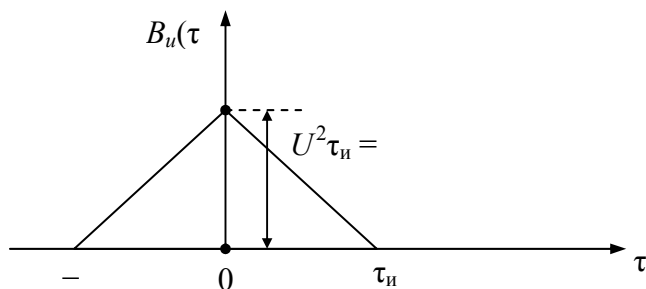
*Решение.* Представим  $u(t)$  и его смещённую копию:



Интеграл (3.1) легко вычисляется графически по площади перекрытия изображённых импульсов. В результате

$$B_u(\tau) = \begin{cases} U^2 \tau_n \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_n}\right) & \text{при } |\tau| \leq \tau_n, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_n. \end{cases}$$

График этой функции – треугольник, представленный на рисунке:



В радиоэлектронике часто вводят удобный для анализа сигналов числовой параметр – интервал корреляции  $\tau_k$ , под которым понимают полуширину основания АКФ. В данном примере  $\tau_k = \tau_{и}$ .

### 3.2. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ НЕОГРАНИЧЕННО ПРОТЯЖЁННОГО СИГНАЛА

Такой сигнал имеет в общем случае неограниченную энергию и интеграл (3.1) может разойтись. В этом случае подход к изучению корреляционных свойств сигналов несколько видоизменяют:

$$B_u(\tau) = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} u(t)u(t-\tau) dt, \quad (3.3)$$

где  $T_n$  – некоторый достаточно большой интервал наблюдения.

При таком подходе  $B_u(0)$  имеет физический смысл средней мощности сигнала.

В случае периодических сигналов в формуле (3.3) в качестве  $T_n$  берут  $T$  – период исследуемого сигнала.

### 3.3. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА

В радиоэлектронике передача дискретных сигналов обычно осуществляется последовательным квазитроичным кодом. При этом текущее время разбивается на элементарные промежутки, называемыми позициями. Эти промежутки отсчитываются одинаковым образом как на передающей, так и на приёмной стороне линии связи. Синхронизация осуществляется путём периодической передачи специальных сигналов синхронизации. На каждой позиции сигнал может принимать три значения: 0, +1 и –1.

Нуль означает отсутствие информации (в дальнейшем будем называть эту ситуацию отсутствием сигнала); 1 – означает, что в данный момент передаётся логическая 1; –1 – означает, что в данный момент передаётся логический 0.

Обычно передача сообщений по линии выглядит так: в отсутствие сообщений в линии наблюдаются одни нули, затем появляется первый сигнал, который занимает  $M_1$  позиций и представляет собой некоторую комбинацию 1 и –1, далее идёт пауза, состоящая из одних нулей, затем появляется второй сигнал, занимающий  $M_2$  позиций, и т.д.

Обычно передаются сигналы с фиксированной разрядностью  $M$ . Пример трёхпозиционного сигнала  $\{1, -1, 1\}$  приведён на рис 3.1.

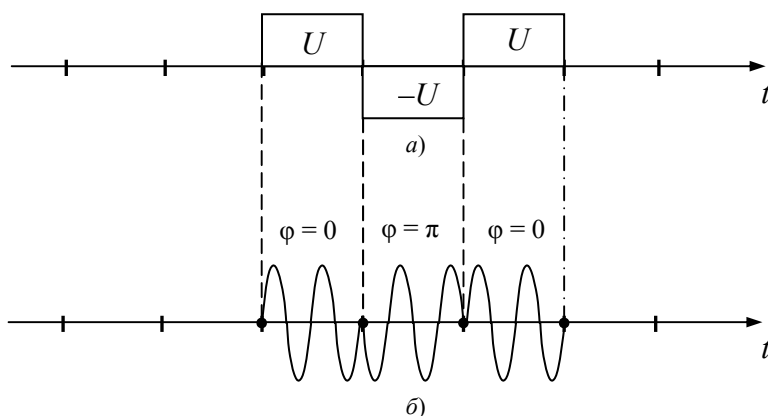


Рис. 3.1

В случае а) символу +1 соответствует положительное напряжение  $U$ , символу  $-1$  отвечает отрицательное напряжение  $-U$ . Такое амплитудное кодирование вполне годится для проводной линии связи, что имеет место, например, в телефонной сети.

В случае б) символу +1 соответствует отрезок высокочастотного гармонического колебания с нулевой начальной фазой, тогда как  $-1$  соответствует начальная фаза  $\pi$ . Такое фазовое кодирование подходит для беспроводных линий связи, где в качестве носителя информации используется высокочастотное колебание, называемое несущим.

Отвлекаясь от физической природы кодирования дискретного сигнала, оба случая, представленные на рис. 3.1, могут быть записаны так:

$$\dots 0 0 0 1 -1 1 0 0 \dots$$

Для исследования корреляционных свойств дискретного сигнала исходный сигнал подвергается сдвигу на целое число позиций  $n$ , а затем вычисляется дискретная АКФ по формуле

$$B_u(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i u_{i-n}. \quad (3.4)$$

Эта функция целочисленного аргумента  $n$  обладает свойствами обычной АКФ. Так, легко видеть, что дискретная АКФ чётна:

$$B_u(n) = B_u(-n).$$

При нулевом сдвиге она определяет энергию сигнала:

$$B_u(0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_i^2 = E_u.$$

**#3. Пример.** Найти АКФ трёхпозиционного сигнала  $u = \{1, -1, 1\}$ .

*Решение.* Выпишем исходный сигнал вместе с копиями, сдвинутыми на 1, 2 и 3 позиции:

...	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	...
...	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	...
...	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	...
...	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	...

Видно, что уже при  $n = 3$  сигнал и его копия перестают накладываться. Вычисляя суммы (3.4), получим

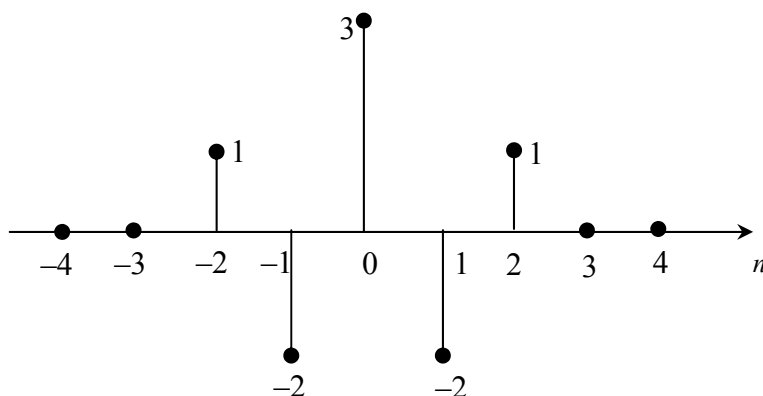
$$B_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$B_u(1) = -1 - 1 = -2;$$

$$B_u(2) = 1;$$

$$B_u(n \geq 3) = 0.$$

Соответствующая дискретная АКФ имеет вид



**#4. Пример.** Найти АКФ сигнала  $\{1,1,1\}$ .

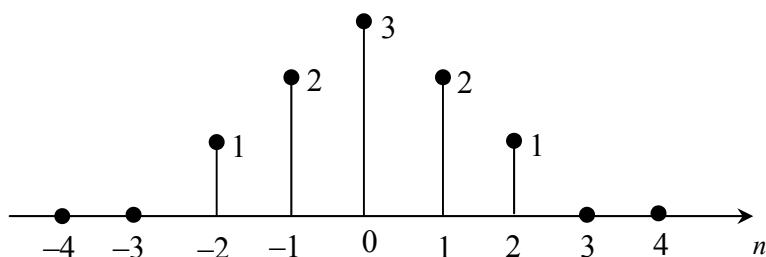
Поступая аналогичным образом, найдём АКФ:

$$B_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$B_u(1) = 1 + 1 = 2;$$

$$B_u(2) = 1;$$

$$B_u(n \geq 3) = 0.$$



**#5. Пример.** Найти АКФ сигнала  $\{1,1,-1\}$ .

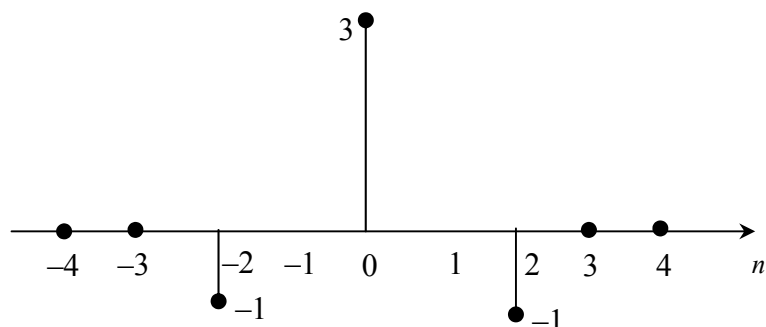
Для этого сигнала АКФ имеет вид:

$$B_u(0) = 1 + 1 + 1 = 3;$$

$$B_u(1) = 0;$$

$$B_u(2) = -1;$$

$$B_u(n \geq 3) = 0.$$



Сравнивая АКФ рассмотренных трёх сигналов, видим, что сигнал  $\{1,1,-1\}$  является лучшим с точки зрения минимума уровней боковых лепестков АКФ.

В 1950 – 1960-е годы были разработаны целые классы сигналов с совершенными корреляционными свойствами. Среди них большой известностью пользуются сигналы (коды) Баркера, которые обладают замечательным свойством: независимо от числа позиций  $M$  значение АКФ при всех  $n \neq 0$  не превышает единицы. В то же время энергия этих сигналов, т.е.  $B_u(0)$ , численно равна  $M$ .

Сигналы Баркера удаётся реализовать лишь при  $M = 2, 3, 4, 5, 7, 11$  и  $13$ .

Например, для  $M = 5$  сигнал Баркера имеет вид  $\{1,1,1,-1,1\}$ , а для  $M = 7$  сигнал Баркера –  $\{1,1,1,-1,-1,1,-1\}$ .

### 3.4. ВЗАИМОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ДВУХ СИГНАЛОВ

В ряде случаев часто необходимо оценить степень связи между двумя различными аналоговыми сигналами  $u(t)$  и  $v(t)$ . Для этого используют взаимокорреляционную функцию (ВКФ)

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t-\tau) dt. \quad (3.5)$$

При  $\tau = 0$  ВКФ равна так называемой взаимной энергии двух сигналов

$$E_{uv} = B_{uv}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt.$$

В отличие от АКФ, ВКФ не является чётной функцией  $\tau$ , т.е.

$$B_{uv}(\tau) \neq B_{uv}(-\tau).$$

Кроме того, ВКФ вовсе не обязана достигать максимума при  $\tau = 0$ . Этот максимум может быть и сдвинут. Можно показать, что ВКФ связана с взаимной спектральной плотностью двух сигналов:

$$B_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)V^*(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.6)$$

Для дискретных сигналов также вводится ВКФ:

$$B_{uv}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j v_{j-n}. \quad (3.7)$$

**#6. Пример.** Найти ВКФ сигналов  $u = \{1, 1, -1\}$  и  $v = \{1, -1, 1\}$ .

*Решение.* Выпишем сигнал  $u$  вместе с несколькими сдвинутыми копиями сигнала  $v$ :

	...	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	...
$n = 0$	...	0	0	0	1	-1	1	0	0	0	...
$n = 1$	...	0	0	0	0	1	-1	1	0	0	...
$n = 2$	...	0	0	0	0	0	1	-1	1	0	...
$n = -1$	...	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	...
$n = -2$	...	0	1	-1	1	0	0	0	0	0	...

Вычисляя по формуле (3.7) суммы, получим:

$$B_{uv}(0) = 1 - 1 - 1 = -1;$$

$$B_{uv}(1) = 1 + 1 = 2;$$

$$B_{uv}(2) = -1;$$

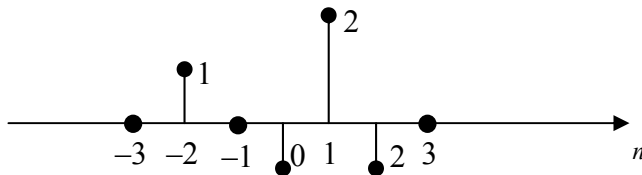
$$B_{uv}(n \geq 3) = 0;$$

$$B_{uv}(-1) = -1 + 1 = 0;$$

$$B_{uv}(-2) = 1;$$

$$B_{uv}(n \leq -3) = 0.$$

Соответствующая ВКФ



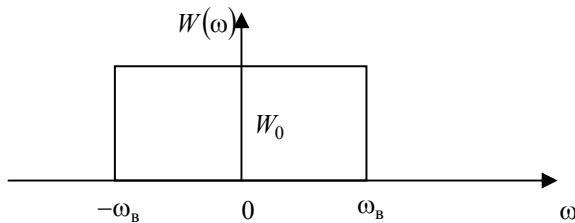
Видно, что максимум ВКФ достигается при сдвиге сигнала  $v$  на одну позицию.

### 3.5. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Найдите формулу, описывающую энергетический спектр прямоугольного видеоимпульса амплитуды  $U$  и длительности  $\tau_{\text{имп}}$ . Какая доля энергии этого импульса заключена в полосе частот  $\left(-\frac{1}{\tau_{\text{имп}}}, \frac{1}{\tau_{\text{имп}}}\right)$ ?

#2. Найдите формулу, описывающую энергетический спектр экспоненциального видеоимпульса  $u(t) = Ue^{-\alpha t} \sigma(t)$ .

#3. Найдите АКФ сигнала с энергетическим спектром следующего вида



Оцените величину интервала корреляции для этого сигнала.

#4. Найдите АКФ дискретного сигнала  $u = \{1, 1, -1, -1, 1\}$ .

#5. Найдите АКФ пятипозиционного сигнала Баркера  $u = \{1, 1, 1, -1, 1\}$ .

Сравните полученный результат с предыдущим.

#6. Для пятипозиционного сигнала Баркера из #5 представьте его форму для:

а) амплитудного кодирования;

б) фазового кодирования.

#7. Найдите ВКФ для сигналов  $u = \{1, 1, 1, -1, 1\}$  и  $v = \{1, 1, -1, -1, 1\}$ .



## 4. ФИЛЬТРЫ

Фильтры – это устройства, предназначенные для выделения или, наоборот, подавления определённых частей частотного спектра сигналов. Область частот, в которой входной сигнал проходит на выход фильтра с малым ослаблением, называется полосой пропускания. Область частот, в которой фильтр существенно ослабляет сигнал, называется полосой заграждения или подавления.

В радиоэлектронике обычно применяют четыре типа фильтров.

1. Фильтры нижних частот (ФНЧ), которые имеют полосу пропускания от  $\omega = 0$  до некоторой граничной частоты  $\omega_{\text{в}}$ .
2. Фильтры верхних частот (ФВЧ), которые имеют полосу пропускания от некоторой граничной частоты  $\omega_{\text{н}}$  до  $\infty$ .
3. Полосовые фильтры (ПВ) с полосой пропускания от  $\omega_{\text{н}}$  до  $\omega_{\text{в}}$ .
4. Режекторные (заграждающие) фильтры (РФ), которые, наоборот, подавляют сигнал в полосе от  $\omega_{\text{н}}$  до  $\omega_{\text{в}}$ .

В теории фильтров граничные частоты принято называть частотами среза и обозначать как  $\omega_{\text{с}}$ . Обычно под  $\omega_{\text{с}}$  понимают частоту, на которой коэффициент передачи фильтра уменьшается на 3 дБ, т.е. в  $\sqrt{2}$  раз, по сравнению с  $K_0$  – коэффициентом передачи в полосе пропускания.  $K_0$  обычно измеряют в децибелах:

$$K_0, \text{ дБ} = 20 \lg K_0.$$

В частотной области фильтры характеризуются следующими параметрами:

- коэффициент передачи в полосе пропускания  $K_0$ , дБ;
- частота среза  $f_{\text{с}}$ , Гц;
- ослабление за пределами полосы пропускания, дБ (обычно задаётся для расстройки на октаву (2 раза) или на декаду (10 раз) относительно  $f_{\text{с}}$ );
- неравномерность АЧХ в полосе пропускания  $\Delta K_0$ , дБ;
- крутизна спада АЧХ за пределами полосы пропускания, дБ/декаду или дБ/октаву;
- форма ФЧХ в полосе пропускания.

Во временной области фильтры также характеризуются несколькими параметрами, конкретный смысл которых зависит от типа рассматриваемого фильтра. Так для ФНЧ вводят в рассмотрение следующие параметры:

- время нарастания от 0 до 90 % переходной характеристики, с;
- величина выброса на переходной характеристике, %;
- время установления, сек (обычно задаётся до момента, когда остаточные колебания на переходной характеристике затухают до 1 %);

### 4.1. ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ ЧАСТОТ

Простейший ФНЧ представлен на рис. 4.1.

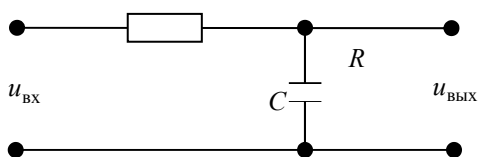


Рис. 4.1

Его операторная передаточная функция имеет вид

$$K(p) = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + \frac{p}{\omega_{\text{с}}}},$$

где  $\omega_{\text{с}} = \frac{1}{RC}$  – частота среза.

В теории фильтров все частоты нормируют к частоте среза:

$$P = \frac{p}{\omega_{\text{с}}}.$$

Тогда нормированная передаточная функция ФНЧ рис. 4.1 примет вид

$$K(P) = \frac{1}{1+P}.$$

Этой функции соответствует нормированная частотная характеристика

$$K(j\omega) = \frac{1}{1+j\Omega}, \quad \text{где } \Omega = \frac{\omega}{\omega_c}.$$

Эта характеристика представлена на рис. 4.2 в логарифмическом масштабе (диаграмма Бode).

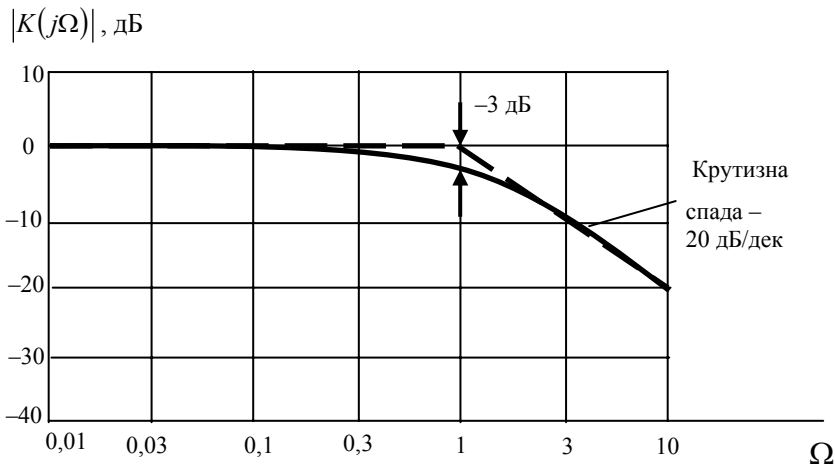


Рис. 4.2

Для увеличения крутизны спада можно включить  $n$  таких фильтров последовательно. Передаточная функция такого фильтра имеет вид

$$K(P) = \frac{1}{(1+\alpha P)^n}.$$

Коэффициент  $\alpha$  учитывает тот факт, что для получения заданной частоты среза всего фильтра, каждое звено должно быть настроено на частоту среза в  $\alpha$  раз большую

$$\alpha = \sqrt[n]{\sqrt{2}-1}.$$

Такой фильтр называют фильтром с критическим затуханием. Он имеет крутизну спада  $20n$  дБ/дек. При его практической реализации необходимо ставить буферы (разделяющие усилители с высоким входным и малым выходным сопротивлениями), иначе каждое последующее звено будет сильно нагружать предыдущее, нарушая его нормальную работу.

Соединив достаточное число секций, можно получить крутой наклон АЧХ за пределами полосы пропускания, однако, излом характеристики на границе, т.е. на частоте среза, никогда не будет резким. Поэтому фильтры с критическим затуханием на практике почти не применяются. Чаще всего они используются в качестве эталона для сравнения с другими фильтрами. Мы рассмотрим несколько типов фильтров, имеющих существенно лучшую форму АЧХ вблизи частоты среза.

Передаточная функция ФНЧ в общем виде может быть записана как

$$K(P) = \frac{K_0}{1+c_1P+c_2P^2+\dots+c_nP^n}, \quad (4.1)$$

где  $c_1, \dots, c_n$  – положительные вещественные коэффициенты.

Порядок фильтра  $n$  обуславливает окончательный наклон АЧХ  $-20n$  дБ/дек. Однако в полосе пропускания и вблизи частоты среза поведение фильтра существенно зависит от коэффициентов  $c_1, \dots, c_n$ . В настоящее время разработано несколько различных типов фильтров, оптимальных с точки зрения различных критериев:

1. Фильтр Баттерворта – это фильтр с максимально плоской характеристикой в полосе пропускания.
2. Фильтр Чебышева – это фильтр с наибольшей крутизной спада АЧХ вблизи  $\omega_c$ .
3. Фильтр Бесселя – это фильтр с наилучшей формой ФЧХ в полосе пропускания, а значит, с наименьшими искажениями формы сигналов в этой полосе частот.

В качестве примера, на рис. 4.3, *a* приведены АЧХ различных фильтров четвёртого порядка. Для сравнения этих же фильтров во временной области на рис. 4.3, *б* приведены их переходные характеристики.

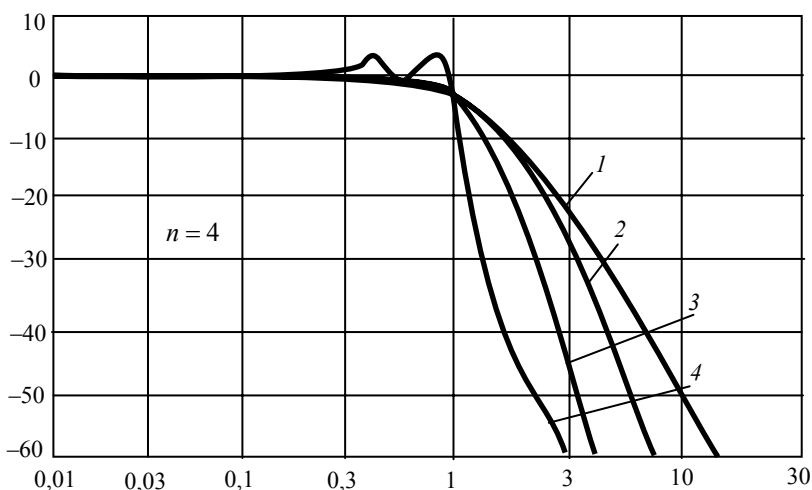
Математически все эти фильтры отличаются разным набором коэффициентов  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , которые берутся из тщательно разработанных таблиц для каждого порядка  $n$  и каждого типа фильтра.

Для реализации фильтра нижних частот его характеристику (4.1) раскладывают на множители:

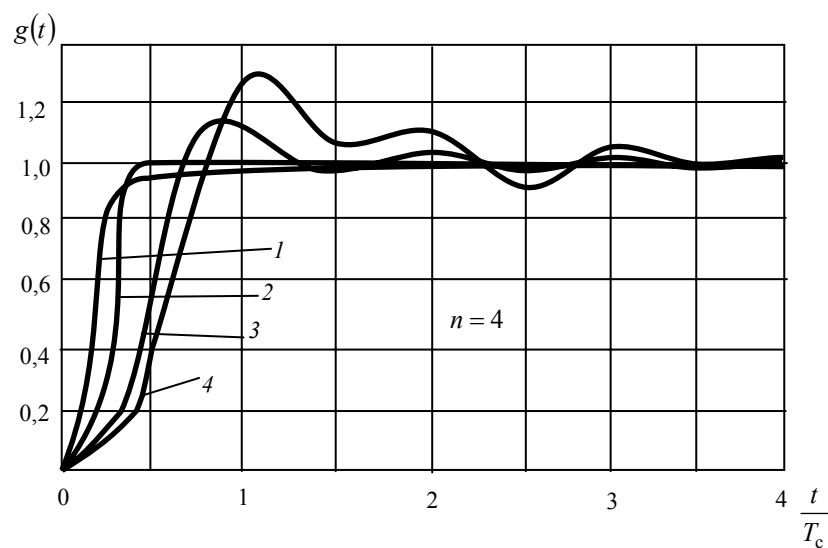
$$K(P) = \frac{K_0}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)(1 + a_2 P + b_2 P^2) \dots}, \quad (4.2)$$

где  $a_i, b_i$  – положительные вещественные коэффициенты. Для нечётных порядков фильтра коэффициент  $b_1$  равен нулю.

$|K(j\Omega)|$ , дБ



*a)*



*б)*

**Рис. 4.3:**

1 – фильтр с критическим затуханием; 2 – фильтр Бесселя;  
3 – фильтр Баттерворта; 4 – фильтр Чебышева с неравномерностью 3 дБ;  
 $T_c = 2\pi / \omega_c$

Существуют таблицы, содержащие  $a_i, b_i$  всех вышеназванных типов ФНЧ до 10 – 20-го порядка и выше. Представление  $K(P)$  в виде (4.2) позволяет реализовать любой тип фильтра путём каскадного соединения звеньев 2-го и 1-го порядка, предусмотрев при этом буферы (развязывающие усилители) между звеньями. Такие фильтры получили название активных фильтров, так как буферы строятся на базе активных элементов (чаще всего на базе операционных усилителей). Основу активного фильтра на ОУ составляет звено 2-го порядка.

Существует много схемных решений для такого звена. Одно из них, получившее название фильтра Саллена и Кея, приведено на рис. 4.4.

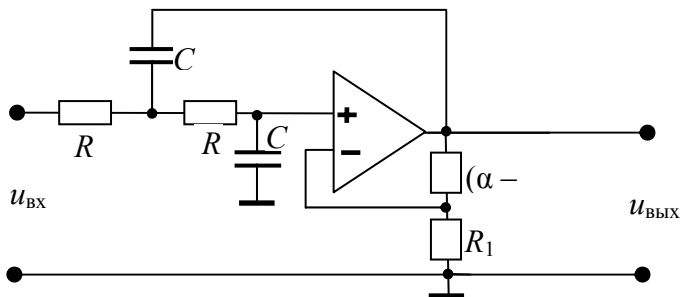


Рис. 4.4

Передаточная функция этой схемы описывается следующим выражением:

$$K(P) = \frac{\alpha}{1 + \underbrace{\omega_c RC(3 - \alpha)}_a P + \underbrace{(\omega_c RC)^2}_{b} P^2} \quad (4.3)$$

Самым замечательным является то, что, изменяя всего один параметр  $\alpha$ , можно настроить схему на любой из вышеречисленных типов фильтра. Все необходимые данные для такой настройки приведены в табл. 4.1.

*Замечание:* При  $\alpha = 3$  схема работает в режиме генератора с частотой  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$ .

Для реализации выбранного типа фильтра нужно:

- 1) осуществить указанное в таблице значение  $\alpha$ ;
- 2) обеспечить необходимую постоянную времени фильтра  $RC = \frac{\sqrt{b}}{2\pi f_c}$ .

Таблица 4.1

Тип фильтра	$a$	$b$	$\alpha$	Нормировочный коэффициент частоты, $f_n = \frac{1}{\sqrt{b}}$
С критическим затуханием	1,287	0,414	1	1,56
Бесселя	1,362	0,618	1,268	1,27
Баттерворта	1,414	1,000	1,586	1
Чебышева 0,5 дБ	1,361	1,383	1,842	0,85
Чебышева 2 дБ	1,181	1,778	2,114	0,74

Для облегчения расчётов в последнем столбце табл. 4.1. приведены значения нормировочного коэффи-

циента частоты  $f_n = \frac{1}{\sqrt{b}}$ . С учётом этого коэффициента выбор  $RC$  производится с помощью выражения

$$RC = \frac{1}{2\pi f_H f_c}$$

# **Пример.** Требуется реализовать фильтр Бесселя с частотой среза  $f_c = 1$  кГц.

*Решение.*

1) В соответствии с табл. 4.1 необходимое значение  $\alpha$  равно 1,268. Для его обеспечения можем взять  $R_1 = 10$  кОм, тогда  $(\alpha - 1)R_1 = 2,68$  кОм  $\approx 2,7$  кОм.

2) Необходимое значение  $RC$  составляет

$$RC = \frac{1}{2\pi f_H f_c} = \frac{1}{2\pi \cdot 1,27 \cdot 1000 \text{ Гц}} = 0,125 \cdot 10^{-3} \text{ с} = 125 \text{ мкс.}$$

Выберем  $C = 10$  нФ, тогда

$$R = \frac{125 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{10^{-8} \text{ Ф}} = 12,5 \cdot 10^3 \text{ Ом} = 12,5 \text{ кОм.}$$

Ещё одна схема ФНЧ второго порядка приведена на рис. 4.5.

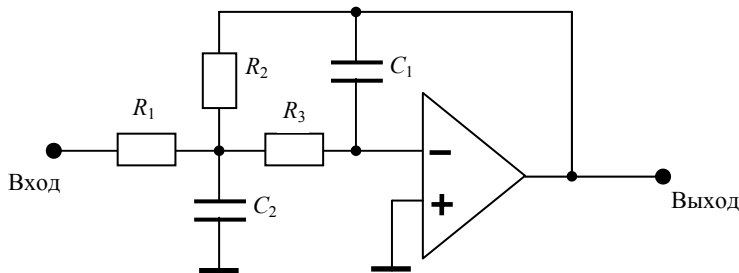


Рис. 4.5

Передаточная функция этой схемы

$$K(P) = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{\underbrace{1 + \omega_c C_1 \left( R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right)}_a \underbrace{P + \omega_c^2 C_1 C_2 R_2 R_3 P^2}_b} \quad (4.4)$$

Для реализации ФНЧ более высокого порядка ( $n \geq 3$ ) используют каскадное соединение секций 1-го и 2-го порядков. Существуют подробные таблицы, в которых для каждого типа фильтра при заданном  $n$  указаны параметры  $a_i$ ,  $b_i$  и  $f_i / f_c$  каждой секции ( $f_i$  – частота среза  $i$ -й секции). Параметры фильтров 4-го порядка приведены в табл. 4.2.

**Таблица 4.2**

Тип фильтра	Секция	$a_i$	$b_i$	$f_i / f_c$
С критическим затуханием	1-я	0,870	0,189	1,48
	2-я	0,870	0,189	1,48
Бесселя	1-я	1,340	0,489	0,978
	2-я	0,774	0,389	1,797
Баттерворта	1-я	1,848	1,000	0,719
	2-я	0,765	1,000	1,390
Чебышева 0,5 дБ	1-я	2,628	3,434	0,538
	2-я	0,365	1,151	1,419
Чебышева 2 дБ	1-я	2,403	4,986	0,550
	2-я	0,237	1,190	1,413

Рассмотрим, как используется эта таблица для реализации фильтра с заданными параметрами.

**# Пример.** Требуется реализовать фильтр Бесселя 4-го порядка с частотой среза  $f_c = 1$  кГц.

*Решение.* Параметры 1-й и 2-й секций фильтра находим из табл. 4.2:

- 1-я секция  $a_1 = 1,340$ ;  $b_1 = 0,489$ ;  $f_1 / f_c = 0,978$  ;
- 2-я секция  $a_2 = 0,774$ ;  $b_2 = 0,389$ ;  $f_2 / f_c = 1,797$  .

Для реализации каждой секции используем схему рис. 4.4. Передаточная характеристика этой схемы описывается выражением (4.3), в соответствии с которым

$$a_i = \omega_c RC(3 - \alpha), \quad b_i = (\omega_c RC)^2.$$

Отсюда

$$RC = \frac{\sqrt{b_i}}{2\pi f_c}, \quad \alpha = 3 - \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}.$$

Для первой секции будем иметь

$$R_1 C_1 = \frac{\sqrt{b_1}}{2\pi f_c} = \frac{\sqrt{0,489}}{2\pi \cdot 10^3} = 111 \text{ мкс},$$

$$\alpha_1 = 3 - \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} = 3 - \frac{1,340}{\sqrt{0,489}} = 1,09.$$

Для второй секции получим

$$R_2 C_2 = \frac{\sqrt{b_2}}{2\pi f_c} = \frac{\sqrt{0,389}}{2\pi \cdot 10^3} = 100 \text{ мкс},$$

$$\alpha_2 = 3 - \frac{a_2}{\sqrt{b_2}} = 3 - \frac{0,774}{\sqrt{0,389}} = 1,73.$$

Выберем  $C_1 = C_2 = 10 \text{ нФ}$ , тогда

$$R_1 = \frac{111 \cdot 10^{-6}}{10^{-8}} = 11,1 \text{ кОм} \approx 11 \text{ кОм}, \quad R_2 = \frac{100 \cdot 10^{-6}}{10^{-8}} = 10 \text{ кОм}.$$

Соответствующая схема фильтра представлена на рис. 4.6.

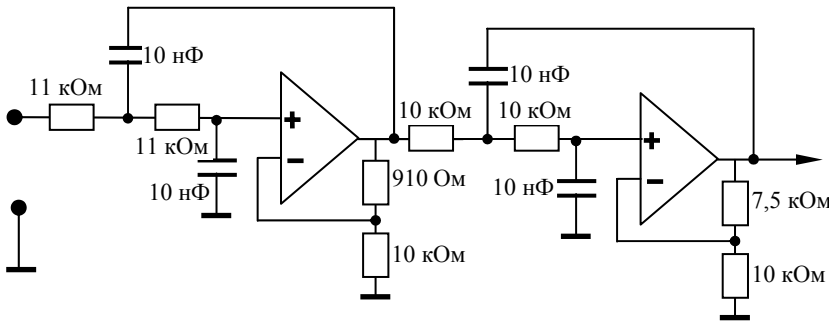


Рис. 4.6

Коэффициент передачи этой схемы на НЧ, очевидно, равен

$$K_0 = 1,09 \cdot 1,73 = 1,89.$$

*Замечание:* Хотя в целом схема рис. 4.6 является фильтром Бесселя, каждая из его секций фильтром Бесселя не является: 1-я секция близка к фильтру с критическим затуханием ( $\alpha_1 = 1,09$ ), а 2-я – к фильтру Чебышева 0,5 дБ ( $\alpha_2 = 1,73$ ) (см. табл. 4.1).

## 4.2. ФИЛЬТРЫ ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

Фильтры верхних частот (ФВЧ) получают из ФНЧ путём зеркального отображения передаточной функции исходного ФНЧ относительно частоты среза. Для этого в выражении для  $K(P)$  исходного ФНЧ заменяют  $P$  на  $1/P$  с сохранением тех же коэффициентов. При этом тип фильтра (Бесселя, Баттерворта и т.д.) сохраняется.

Например, если взять за основу ФНЧ Баттерворта 2-го порядка, передаточная функция которого

$$K(P) = \frac{K_0}{1 + 1,414P + P^2},$$

и заменить в этой функции  $P$  на  $1/P$ , то получим ФВЧ Баттерворта 2-го порядка с передаточной функцией

$$K(P) = \frac{K_0}{1 + 1,414 \frac{1}{P} + \left(\frac{1}{P}\right)^2} = \frac{K_0 P^2}{P^2 + 1,414P + 1}.$$

Физически, чтобы перейти от ФНЧ к ФВЧ, меняют местами  $R$  и  $C$  в электрической схеме исходного ФНЧ, а при выборе постоянной времени  $RC$  вместо  $f_n$  используют  $1/f_n$ .

**# Пример.** Требуется реализовать ФВЧ Бесселя 2-го порядка с  $f_c = 1$  кГц.

*Решение.* Выберем в качестве исходного ФНЧ схему рис. 4.4.

Поменяв местами  $R$  и  $C$  приходим к схеме рис. 4.7.

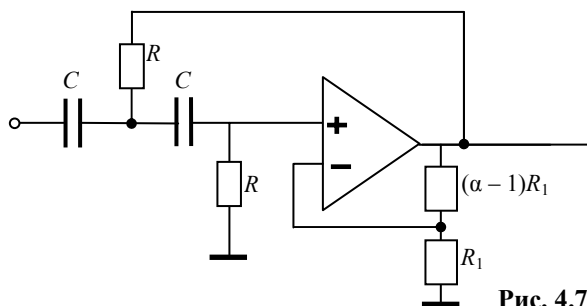


Рис. 4.7



Из таблицы 4.1 находим для фильтра Бесселя:

$$a = 1,362; b = 0,618; \alpha = 1,268; f_n = 1,27.$$

Для обеспечения  $\alpha = 1,268$  можем взять  $R_1 = 10$  кОм и  $(\alpha - 1)R_1 \approx 2,7$  кОм.

Необходимое значение  $RC$  составляет

$$RC = \frac{f_n}{2\pi f_c} = \frac{1,27}{2\pi \cdot 10^3} = 202 \text{ мкс.}$$

Выберем  $C = 10$  нФ, тогда  $R = \frac{202 \cdot 10^{-6} \text{ с}}{10^{-8} \text{ Ф}} = 20,2 \text{ кОм} \approx 20 \text{ кОм}.$

#### 4.3. ПОЛОСОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Так же как и в случае ФВЧ, полосовой фильтр (ПФ) может быть получен из некоторого исходного ФНЧ путём замены переменной в  $K(P)$ :

$$P \rightarrow \frac{1}{\Delta\Omega} \left( P + \frac{1}{P} \right). \quad (4.5)$$

Здесь  $\Delta\Omega$  – нормированная ширина полосы пропускания фильтра, которая может выбираться произвольно.

В результате такого преобразования из исходного ФНЧ  $n$ -го порядка получается ПФ  $2n$ -го порядка с центральной (резонансной) частотой  $\Omega = 1$  и полосой пропускания  $\Delta\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min}$ . Крутизна спада АЧХ этого ПФ будет равна  $20n$  дБ/дек по обе стороны от центральной частоты. Конкретная форма АЧХ полученного ПФ вблизи центральной частоты определяется типом исходного ФНЧ.

Рассмотрим, как это делается, на примере простейшего ПФ. Для ФНЧ 1-го порядка, который, как известно, имеет передаточную функцию

$$K(P) = \frac{K_0}{1 + P},$$

осуществив замену (4.5), приходим к ПФ 2-го порядка с передаточной функцией

$$K(P) = \frac{K_0}{1 + \frac{1}{\Delta\Omega} \left( P + \frac{1}{P} \right)} = \frac{K_0 \Delta\Omega P}{1 + \Delta\Omega P + P^2}. \quad (4.6)$$

Основными параметрами ПФ являются коэффициент передачи на центральной частоте  $K_{\text{рез}}$  и добротность  $Q = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Delta\omega}$ , где  $\Delta\omega$  – ширина полосы пропускания.

Нормированная центральная частота ПФ (4.6)  $\Omega_{\text{рез}} = 1$ . Подставив в (4.6) значение  $P = j\Omega_{\text{рез}} = j$ , получим

$$K_{\text{рез}} = \frac{K_0 \Delta\Omega j}{1 + \Delta\Omega j + j^2} = K_0.$$

Добротность ПФ (4.6)

$$Q = \frac{\omega_{\text{рез}}}{\Delta\omega} = \frac{\Omega_{\text{рез}}}{\Delta\Omega} = \frac{1}{\Delta\Omega}.$$

Существует немало схемных реализаций ПФ 2-го порядка. Схема на базе ОУ с положительной обратной связью приведена на рис. 4.8.

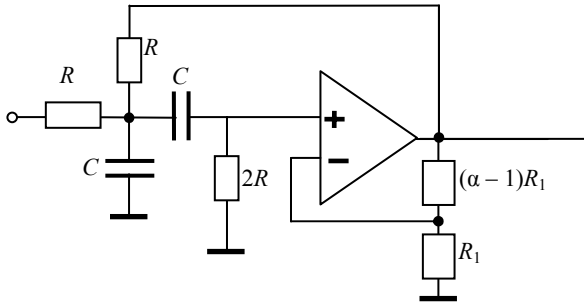


Рис. 4.8

Анализ показывает, что в этой схеме

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi RC};$$

$$K_{\text{рез}} = \frac{\alpha}{3 - \alpha};$$

$$Q = \frac{1}{3 - \alpha}.$$

При  $\alpha = 3$  схема работает как генератор с частотой  $f_{\text{рез}}$ .

Недостатком схемы рис. 4.8 является то, что в ней  $K_{\text{рез}}$  и  $Q$  взаимосвязаны и не могут выбираться независимо друг от друга. Другая схема ПФ, свободная от указанного недостатка, приведена на рис. 4.9.

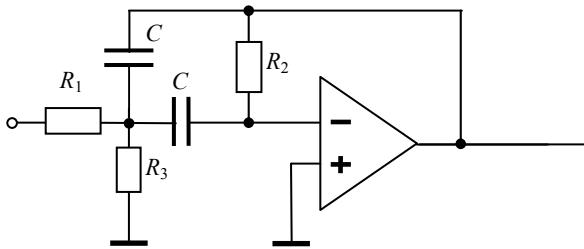


Рис. 4.9

В этой схеме

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3}};$$

$$K_{\text{рез}} = -\frac{R_2}{2R_1};$$

$$Q = \pi R_2 C f_{\text{рез}};$$

$$\Delta f = \frac{f_{\text{рез}}}{Q} = \frac{1}{\pi R_2 C}.$$

Замечательно то, что ни  $K_{\text{рез}}$ , ни  $\Delta f$  не зависят от  $R_3$ , поэтому можно изменять частоту настройки  $f_{\text{рез}}$ , варьируя  $R_3$ , тогда как  $K_{\text{рез}}$  и  $\Delta f$  остаются неизменными. Схема работает и без  $R_3$ , т.е. при  $R_3 = \infty$ . В этом случае

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi c\sqrt{R_1 R_2}}; \quad K_{\text{рез}} = -\frac{R_2}{2R_1}; \quad Q = \sqrt{\frac{|K_{\text{рез}}|}{2}}.$$

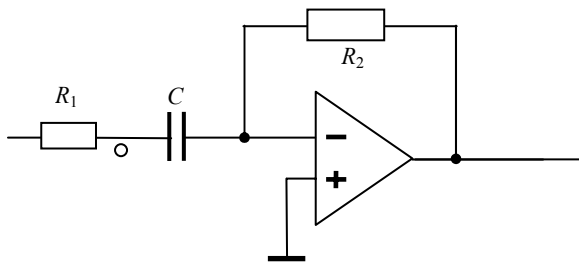
Для реализации ПФ более высоких порядков используют два подхода:

- 1) если требуется широкая полоса пропускания  $\Delta\Omega$ , то включают последовательно ФНЧ и ФВЧ;
- 2) если требуется получить узкополосный ПФ ( $\Delta\Omega \ll 1$ ), то лучше применить последовательное включение ПФ 2-го порядка с небольшим сдвигом резонансных частот.

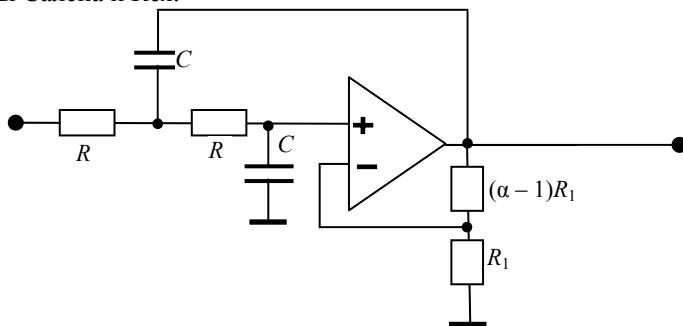
Такой способ называют "расстройкой контуров".

#### 4.4. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Проведите анализ схемы и дайте её АЧХ и ФЧХ.



#2. Реализуйте ФНЧ Чебышева 2-го порядка с неравномерностью 2 дБ и частотой среза 100 Гц на базе схемы Салена и Кея.



#3. Перестройте ФНЧ из #2 так, чтобы получить ФВЧ с теми же параметрами ( $\Delta K \leq 2$  дБ,  $f_c = 100$  Гц).

#4. Реализуйте ФНЧ Чебышева 4-го порядка с  $\Delta K < 2$  дБ и  $f_c = 100$  Гц.

#5. Оцените ослабление ФНЧ из #4 на частоте 1 кГц.

#6. Реализуйте ФВЧ Чебышева 4-го порядка с  $\Delta K < 2$  дБ и  $f_c = 100$  Гц на базе секций рис. 4.7. Используйте для этого выражение для передаточной функции

$$K(P) = \frac{\alpha}{1 + \underbrace{\frac{3-\alpha}{\omega_c RC}}_a \frac{1}{P} + \underbrace{\left(\frac{1}{\omega_c RC}\right)^2}_{b} \frac{1}{P^2}}.$$

#7. Получите выражение для  $K(P)$  полосового фильтра 4-го порядка, используя в качестве исходного ФНЧ с передаточной функцией

$$K(P) = \frac{1}{1 + aP + bP^2}.$$

## 5. ГЕНЕРАТОРЫ СИГНАЛОВ

Генераторами называют электронные схемы, формирующие переменный сигнал требуемой формы без всякого входного сигнала. Основными параметрами генератора являются:

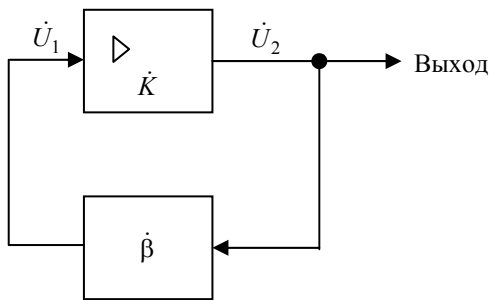
- форма колебаний на выходе;
- частота, измеряемая в Гц, кГц, МГц и т.д.;
- интенсивность колебаний, характеризуемая амплитудой либо выходной мощностью.

По форме различают генераторы гармонических (синусоидальных) сигналов и релаксационные генераторы. В свою очередь релаксационные генераторы разделяют на генераторы прямоугольных сигналов (мульти-вибраторы) и генераторы специальной формы (функциональные генераторы).

По частоте генераторы условно можно разделить на три категории: нижних частот (до нескольких десятков кГц), высоких частот (до 1 ГГц) и сверхвысоких частот (более 1 ГГц).

По интенсивности различают генераторы малой мощности (до нескольких десятков мВт), средней мощности (до нескольких десятков Вт) и большой мощности (до МВт и выше).

подавляющее большинство генераторов (но не все, например, генератор Ганна) строятся по схеме усилителя, охваченного положительной обратной связью (рис. 5.1).



**Рис. 5.1**

Условием существования стационарных колебаний является равенство

$$\dot{U}_1 = \dot{\beta} \dot{U}_2 = \dot{\beta} \dot{K} \dot{U}_1,$$

откуда

$$\dot{\beta} \dot{K} = 1. \tag{5.1}$$

Из этого соотношения следуют два условия:

$$|\dot{\beta} \dot{K}| = 1, \tag{5.2}$$

$$\varphi_{\beta} + \varphi_K = 2n\pi. \tag{5.3}$$

Первое условие называют балансом амплитуд. Оно заключается в том, что для поддержания стационарных колебаний усиление в петле обратной связи должно компенсировать потери. Второе условие называется балансом фаз. Оно означает, что колебания в замкнутой системе могут возбуждаться только тогда, когда напряжение, вернувшееся на вход усилителя по цепи обратной связи, синфазно колебаниям в самом усилителе.

Если условия (5.2) и (5.3) выполняются на одной частоте  $\omega_0$ , то колебания будут гармоническими. Если же эти условия выполняются для полосы частот, то колебания имеют релаксационный характер.

Наконец, для возникновения колебаний или, как говорят, для самовозбуждения генератора, необходимо, чтобы

$$|\dot{\beta} \dot{K}| > 1. \tag{5.4}$$

В этом случае естественные электрические флуктуации в радиоэлементах генератора приводят к нарастающим колебаниям. Процесс нарастания неизбежно останавливается из-за снижения  $K$  на большом сигнале (насыщение усилителя) и схема автоматически возвращает нас к условию (5.2).

Обычно в схему генератора специально вводят элементы автоматической регулировки усиления (АРУ), так, чтобы возврат к условию (5.2) выполнялся при заданном уровне выходного сигнала.

## 5.1. ГЕНЕРАТОРЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

На низких частотах для генерации синусоидальных сигналов используют  $RC$ -цепи и ОУ.

Так, ФНЧ Саллена и Кея, описанный в модуле 4, при  $\alpha=3$  превращается в генератор с частотой

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Очень хорошим источником синусоидальных колебаний может служить генератор Вина (рис. 5.2):

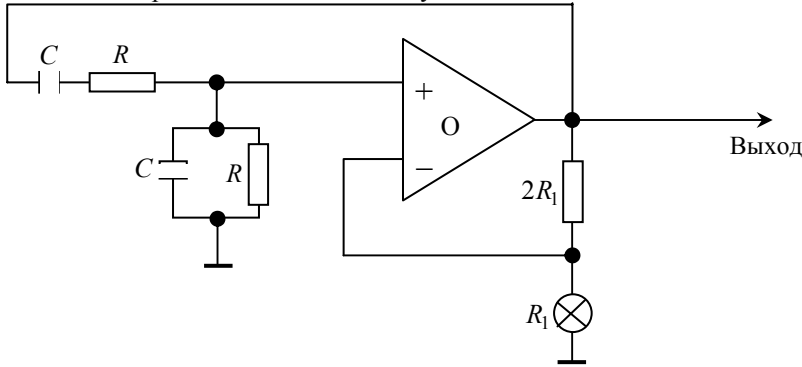


Рис. 5.2

В этой схеме цепь положительной обратной связи представляет собой полосовой фильтр с центральной частотой  $f_0$ , причём на этой частоте коэффициент передачи цепи  $\beta = \frac{1}{3}$ , а фазовый сдвиг  $\varphi_\beta = 0$ . Если сделать коэффициент усиления усилителя равным 3, то схема будет работать как генератор.

Для получения хорошей синусоиды на выходе генератора не следует допускать полного размаха колебаний в ОУ. Этого можно достичь путём использования в качестве  $R1$  лампы накаливания, у которой, как известно, сопротивление возрастает при нагревании электрическим током. Нетрудно убедиться, что положительный температурный коэффициент сопротивления такой лампы обеспечивает автоматическую стабилизацию амплитуды выходного сигнала.

На высоких частотах для генерации синусоидальных колебаний чаще всего используется резонансный  $LC$ -контур, настроенный на нужную частоту. Обычно такой генератор выполняется по трёхточечной схеме (рис. 5.3), где  $Z_i$  – чисто реактивные элементы, т.е.  $Z_i = jx_i$ .

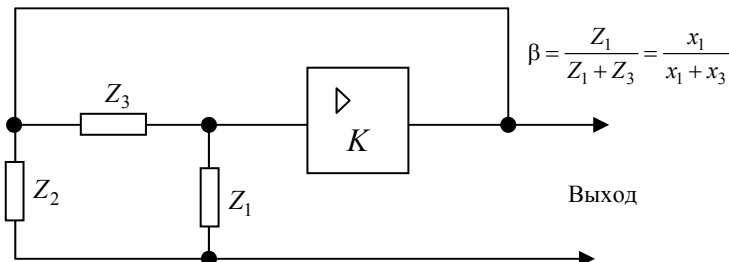


Рис. 5.3

### 5.1.1. ТРЁХТОЧЕЧНАЯ СХЕМА С ИНВЕРТИРУЮЩИМ УСИЛИТЕЛЕМ ( $K < 0$ )

Поскольку  $K < 0$ , то для выполнения баланса фаз коэффициент обратной связи  $\beta$  должен быть также отрицательным. Это возможно только, если  $x_1$  и  $x_3$  разных знаков, а  $|x_1| < |x_3|$ . Элемент  $x_2$  берётся того же знака, что и  $x_1$ , а его величина выбирается такой, чтобы обеспечить резонанс контура на требуемой частоте генерации:  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Тогда

$$\beta = \frac{x_1}{x_1 + x_3} = -\frac{x_1}{x_2}.$$

Для выполнения баланса амплитуд, очевидно, необходимо, чтобы

$$-\frac{x_1}{x_2} K = 1, \text{ т.е. } K = -\frac{x_2}{x_1}.$$

Здесь  $K$  – коэффициент усиления нагруженного на контур  $Z_1, Z_2, Z_3$  усилителя.

На резонансной частоте контур представляет собой эквивалентную нагрузку

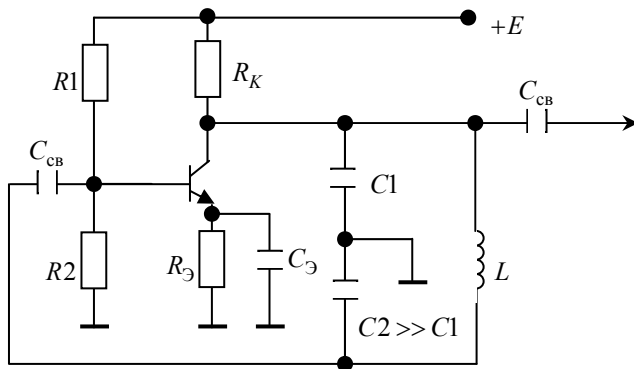
$$R_{\text{эКВ}} = k^2 |x_3| Q,$$

где  $k = \frac{x_2}{x_1 + x_2}$  – коэффициент связи контура с выходом усилителя;  $Q$  – добротность контура, которая на радиочастотах обычно не превышает 100.

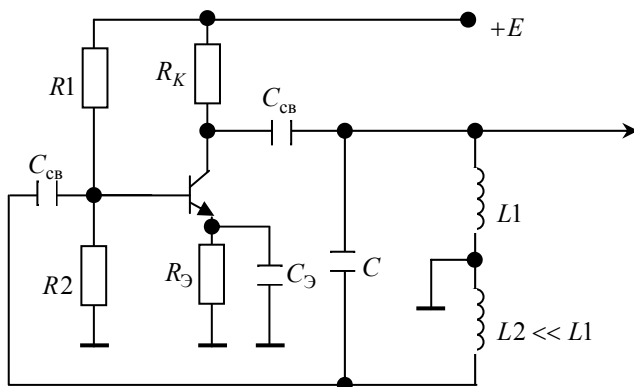
Влево и вправо от резонансной частоты эквивалентное сопротивление контура резко падает, что приводит к уменьшению  $K$  на всех частотах, кроме резонансной.

Две практические схемы генератора на транзисторе с ОЭ (инвертирующий усилитель) представлены на рис. 5.4.

Резисторы  $R_1, R_2, R_K, R_Э$  задают рабочую точку транзистора (вместо  $R_K$  часто используют ВЧ-дроссель). Конденсаторы  $C_{\text{сВ}}$  обеспечивают связь по высокой частоте и развязку по постоянному току.



a)



б)

**Рис. 5.4**

Первая схема (рис. 5.4, a) называется ёмкостной трёхточкой. В этой схеме

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}};$$

$$k = \frac{C2}{C1+C2};$$

$$\beta = -\frac{C1}{C2};$$

$$K = -\frac{R_K \parallel R_{\text{эКВ}}}{r'_3},$$

где  $R_{\text{эКВ}} = k^2 \omega_0 L Q$ .

**#1. Пример.** Пусть в схеме рис. 5.4, а  $L = 15$  мкГн,  $C1 = 1$  нФ,  $C2 = 10$  нФ,  $R_K = 10$  кОм,  $Q = 50$ . Рассчитать  $f_0$ ,  $\beta$ , а также необходимые коэффициент усиления  $K$  и рабочую точку транзистора.

*Решение.*

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1 \cdot 10}{1+10} \cdot 10^{-9}}} = 1,36 \text{ МГц};$$

$$\beta = -\frac{1 \text{ нФ}}{10 \text{ нФ}} = -0,1.$$

Для самовозбуждения генератора необходимо, чтобы  $K$  было больше 10. Оценим эквивалентную нагрузку транзистора:

$$R_{\text{эКВ}} = k^2 \omega_0 L Q = \left( \frac{10}{1+10} \right)^2 \cdot 2\pi \cdot 1,36 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 5,32 \text{ кОм}.$$

$$R_K \parallel R_{\text{эКВ}} = \frac{10 \text{ кОм} \cdot 5,32 \text{ кОм}}{10 \text{ кОм} + 5,32 \text{ кОм}} = 3,47 \text{ кОм}.$$

Тогда для получения  $|K| > 10$  достаточно задать рабочую точку транзистора таким образом, чтобы  $r'_3$  было меньше  $\frac{3,47 \text{ кОм}}{10} = 0,347 \text{ кОм}$ . Например, при  $I_{K,Q} = 0,5 \text{ мА}$ ,  $r'_3 = \frac{0,025 \text{ В}}{0,5 \text{ мА}} = 50 \text{ Ом}$ , что даёт

$$K = -\frac{3,47 \text{ кОм}}{50 \text{ Ом}} = -69,4.$$

Вторая схема (рис. 5.4, б) называется индуктивной трёхточкой. В этой схеме

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L1 + L2)C}};$$

$$k = \frac{L1}{L1 + L2};$$

$$\beta = -\frac{L2}{L1};$$

$$K = -\frac{R_K \parallel R_{\text{эКВ}}}{r'_3},$$

где  $R_{\text{эКВ}} = \frac{k^2}{\omega_0 C} Q$ .

### 5.1.2. ТРЁХТОЧЕЧНАЯ СХЕМА С НЕИНВЕРТИРУЮЩИМ УСИЛИТЕЛЕМ ( $K > 0$ )

Поскольку  $K > 0$ , то для выполнения баланса фаз  $\beta$  должно быть тоже положительным. Для этого следует взять  $x_1$  и  $x_3$  одного знака. Элемент  $x_2$  берётся противоположного знака и такой величины, чтобы обеспечивался резонанс контура на требуемой частоте:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Тогда

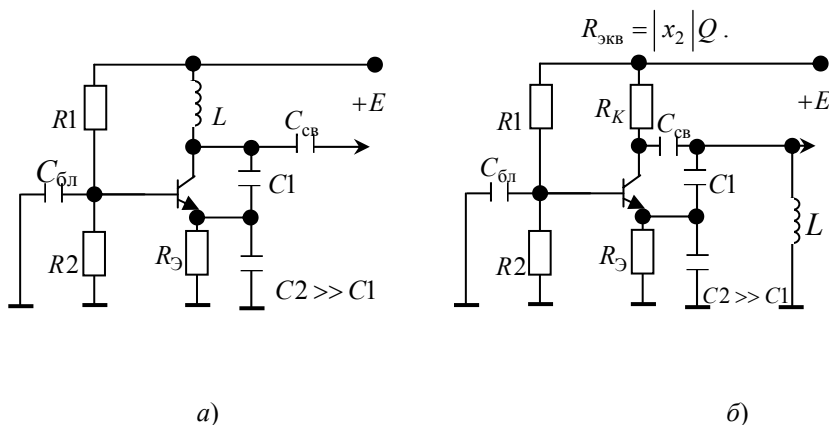
$$\beta = \frac{x_1}{x_1 + x_3} > 0.$$

Для выполнения баланса амплитуд необходимо, чтобы

$$K = \frac{1}{\beta} = \frac{x_1 + x_3}{x_1},$$

где  $K$  – коэффициент усиления нагруженного на контур  $Z1Z2Z3$  усилителя.

В данной схеме, в отличие от генератора с инвертирующим усилителем, коэффициент связи контура с выходом усилителя  $k$  равен 1. На резонансной частоте контур представляет собой эквивалентную нагрузку



**Рис. 5.5**

Две практические схемы генератора на транзисторе с ОБ (неинвертирующий усилитель) представлены на рис. 5.5.

База транзистора заземлена по переменному току с помощью конденсатора  $C_{бл}$ .

Основные соотношения в этих схемах:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}};$$

$$\beta = \frac{C_1}{C_1 + C_2};$$

$$K = \frac{R_K \parallel R_{э_кв}}{r'_э},$$

где  $R_{э_кв} = \omega_0 L Q$ .

**#2. Пример.** Пусть в схеме рис. 5.5, б)  $L = 15$  мкГн,  $R_э = 1$  кОм,  $C_1 = 1$  нФ,  $C_2 = 10$  нФ,  $R_K = 10$  кОм,  $Q = 50$ . Рассчитать  $f_0$ ,  $\beta$ , а также необходимые коэффициент усиления  $K$  и рабочую точку транзистора.

*Решение.*



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{15 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1 \cdot 10}{1+10} \cdot 10^{-9}}} = 1,36 \text{ МГц},$$

$$\beta = \frac{1 \text{ нФ}}{1 \text{ нФ} + 10 \text{ нФ}} = 0,091.$$

Для самовозбуждения генератора необходимо, чтобы  $K$  было больше 11. Оценим эквивалентную нагрузку транзистора:

$$R_{\text{экв}} = \omega_0 L Q = 2\pi \cdot 1,36 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-6} \cdot 50 = 6,43 \text{ кОм},$$

$$R_K \parallel R_{\text{экв}} = \frac{10 \text{ кОм} \cdot 6,43 \text{ кОм}}{10 \text{ кОм} + 6,43 \text{ кОм}} = 3,9 \text{ кОм}.$$

Тогда для получения  $K > 11$  достаточно задать рабочую точку транзистора таким образом, чтобы  $r'_3$  было меньше  $\frac{3,9 \text{ кОм}}{11} = 0,355 \text{ кОм}$ . Например, при  $I_{K,Q} = 0,5 \text{ мА}$   $r'_3 = \frac{0,025 \text{ В}}{0,5 \text{ мА}} = 50 \text{ Ом}$ , что даёт  $K = \frac{3,9 \text{ кОм}}{50 \text{ Ом}} = 81$ .

### 5.1.3. ГЕНЕРАТОР ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ С КВАРЦЕВЫМ РЕЗОНАТОРОМ

Параметры  $LC$ -генераторов довольно существенно зависят от внешних условий и прежде всего от температуры. Поэтому в ряде случаев стабильность частоты этих генераторов оказывается недостаточной (обычно  $\frac{\Delta f}{f_0}$   $LC$ -генераторов имеет порядок  $10^{-4}$ ).

Для повышения стабильности можно использовать термостатирование, однако это не всегда приемлемо. Чаще всего прибегают к использованию кварцевых резонаторов. Эквивалентная схема кварцевого резонатора представлена на рис. 5.6.

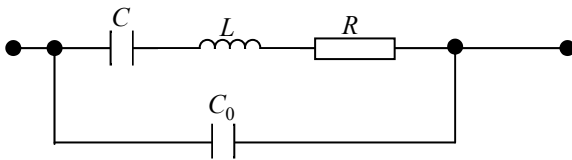


Рис. 5.6

$C_0$  – это ёмкость между электродами, а  $L$ ,  $C$ ,  $R$  – внутренние параметры кристалла.

Индуктивность  $L$  кварца очень велика (может достигать нескольких Генри), ёмкость  $C$  – мала (обычно сотые доли пикофарады),  $R$  может составлять сотни или тысячи Ом. Ёмкость  $C_0$  обычно имеет порядок нескольких пикофарад. Например, один из кварцев на 4 МГц имел следующие параметры:

$$L = 0,1 \text{ Гн}; \quad C = 0,015 \text{ пФ}; \quad R = 100 \text{ Ом}; \quad C_0 = 5 \text{ пФ}.$$

Кварц, в соответствии с эквивалентной схемой рис. 5.6, имеет два резонанса:

- 1) последовательный  $f_S = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ;
- 2) параллельный  $f_P = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{CC_0}{C+C_0}}} \approx f_0\sqrt{1+\frac{C}{C_0}}$ .

Обычно разница между  $f_S$  и  $f_P$  не превышает 0,2%. На частоте  $f_S$  импеданс кварца становится чисто активным и принимает минимальное значение, которое равно  $R$ .

На частоте  $f_P$  импеданс кварца также становится активным и достигает больших значений (в несколько тысяч раз превышает  $R$ ).

Частотная зависимость импеданса  $Z$  кварца на 4 МГц, описанного выше, вблизи частоты 4 МГц представлена на рис. 5.7.

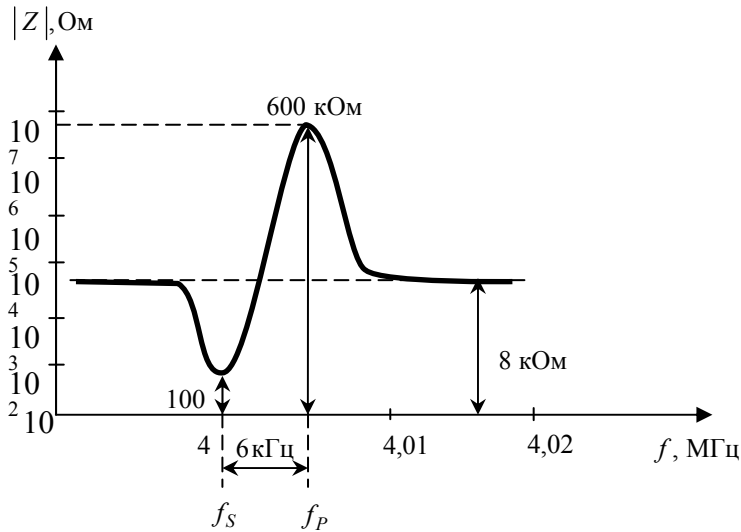


Рис. 5.7

Острота резонансных пиков кварца оценивается его добротностью  $Q$ , отсчитываемой по уровню 3 дБ. Для представленного выше кварца она составляет  $\sim 25\,000$ .

В интервале частот  $(f_s, f_p)$  кварц имеет индуктивную реакцию ( $x > 0$ ), а за его пределами – ёмкостную ( $x < 0$ ).

Замечательным свойством кварца является не только его высокая добротность  $Q$ , но и его высокая стабильность частоты ( $\frac{\Delta f}{f_0}$  от  $10^{-6}$  до  $10^{-10}$ ).

Схема транзисторного генератора с кварцевым резонатором представлена на рис. 5.8.

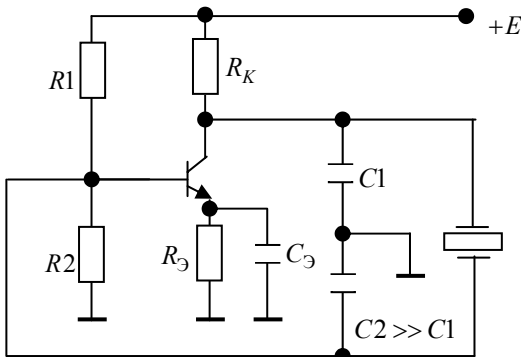


Рис. 5.8

В этой схеме часто вместо  $R_k$  используют ВЧ-дроссель. Кварцевый резонатор в данной схеме работает как индуктивность, образуя параллельный контур совместно с  $C_1$  и  $C_2$ . Результирующая резонансная частота  $f_0$  лежит при этом между  $f_s$  и  $f_p$ . Если сделать ёмкость  $C_1$  переменной, то появляется возможность подстройки в пределах  $(f_s, f_p)$ .

## 5.2. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ГЕНЕРАТОРЫ

Любой генератор гармонических сигналов превращается в релаксационный генератор, если сделать в нём большое петлевое усиление  $\beta K$ . При этом просто-напросто усилитель входит в насыщение и форма колебаний становится несинусоидальной. Однако, на практике чаще предпочитают иной способ: заряд-разряд ёмкости конденсатора под управлением переключающего порогового элемента (чаще всего с гистерезисом, т.е. триггера Шмитта). На низких частотах (до нескольких десятков кГц) для этого используют ОУ или интегральные компараторы, а на высоких частотах – интегральные логические элементы ТТЛ или КМОП.

Схема низкочастотного мультивибратора на ОУ представлена на рис. 5.9.

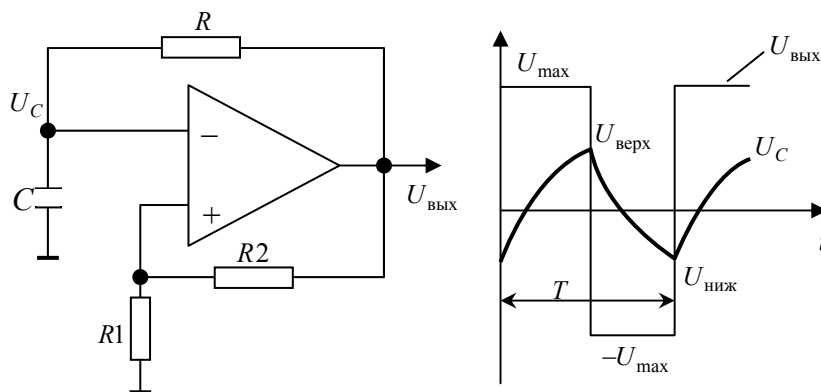


Рис. 5.9

В этой схеме ОУ с делителем  $R1R2$  образуют инвертирующий триггер Шмитта с порогами

$$U_{\text{верх}} = U_{\text{max}} \frac{R1}{R1 + R2}; \quad U_{\text{ниж}} = -U_{\text{max}} \frac{R1}{R1 + R2},$$

где  $U_{\text{max}}$  – выходное напряжение насыщения ОУ (для упрощения полагаем, что пределы насыщения ОУ симметричны).

Пока ОУ находится в насыщении  $+U_{\text{max}}$ , происходит заряд ёмкости  $C$  через резистор  $R$ . Напряжение на конденсаторе  $U_C$  возрастает по экспоненте с постоянной времени  $RC$  и при достижении порога переключения  $U_{\text{верх}}$  происходит переборс триггера Шмитта в насыщение  $-U_{\text{max}}$ . Ёмкость  $C$  начинает перезаряжаться. При достижении  $U_{\text{ниж}}$  опять происходит переборс триггера Шмитта и т.д.

Анализ показывает, что период колебаний равен

$$T = 2RC \ln \left[ 1 + 2 \frac{R1}{R2} \right].$$

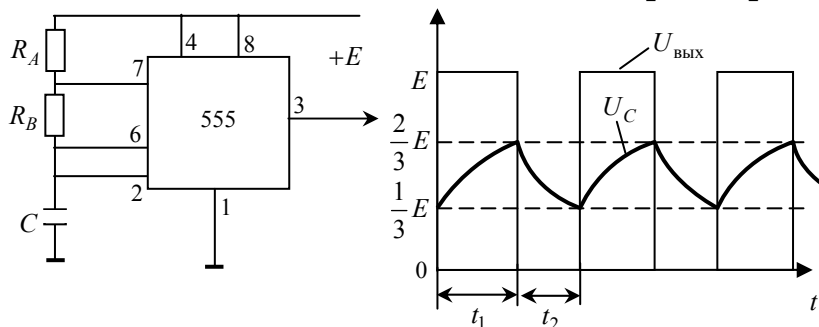


Рис. 5.10

В частности, при  $R1 = R2$  период составляет  $T \approx 2,2 RC$ .

Схема низкочастотного мультивибратора на базе интегрального таймера 555 представлена на рис. 5.10.

Таймер 555 включен по схеме инвертирующего триггера Шмитта с порогами переключения  $\frac{1}{3}E$  и  $\frac{2}{3}E$ .

При  $U_{\text{вых}} = E$  вывод 7 микросхемы находится в высокоимпедансном состоянии и происходит заряд ёмкости  $C$  через  $R_A$  и  $R_B$  с постоянной времени  $(R_A + R_B)C$ . Когда напряжение  $U_C$  достигает верхнего порога переключения  $\frac{2}{3}E$ , происходит переключение триггера в состояние  $U_{\text{вых}} = 0$ , а вывод 7 микросхемы переходит в состояние КЗ на общий провод. При этом ёмкость  $C$  начинает разряжаться через  $R_B$  с постоянной времени  $R_B C$ .

При снижении  $U_C$  до нижнего порога переключения  $\frac{1}{3}E$  триггер вновь переключается в состояние  $U_{\text{вых}} = E$  и ёмкость начинает заряжаться и т.д. Анализ показывает, что

$$t_1 = (R_A + R_B) C \ln 2 \approx 0,7(R_A + R_B) C;$$

$$t_2 = R_B C \ln 2 \approx 0,7 R_B C ;$$

$$T = t_1 + t_2 \approx 0,7(R_A + 2R_B) C .$$

Мультивибратор на базе ИС ТТЛ представлен на рис. 5.11. Элемент 74LS14 представляет собой инвертирующий триггер Шмитта с порогами переключения 0,8 и 1,8 В.

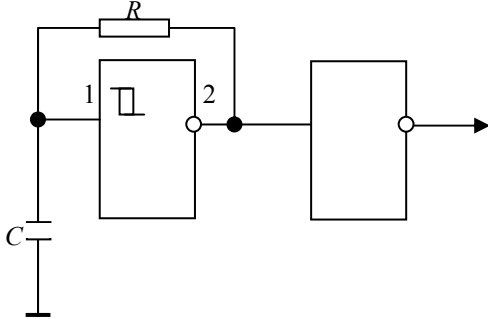


Рис. 5.11

Эта схема может быть использована в широком диапазоне частот: от 0,1 Гц до 10 МГц. Следует, однако, помнить, что величина сопротивления  $R$  ограничена пределами:

$$100 \text{ Ом} \leq R \leq 470 \text{ Ом}.$$

Период колебания в этой схеме составляет

$$T \approx 1,4RC.$$

Схема рис. 5.12 выполнена на базе элемента И-НЕ КМОП.

Период колебаний в этой схеме  $T \approx 2,2RC$ .

Резистор 100 кОм служит для защиты входа первого элемента от перегрузки по току в момент, когда напряжение  $U_0$  принимает экстремальные значения  $-0,5E$  и  $1,5E$ .

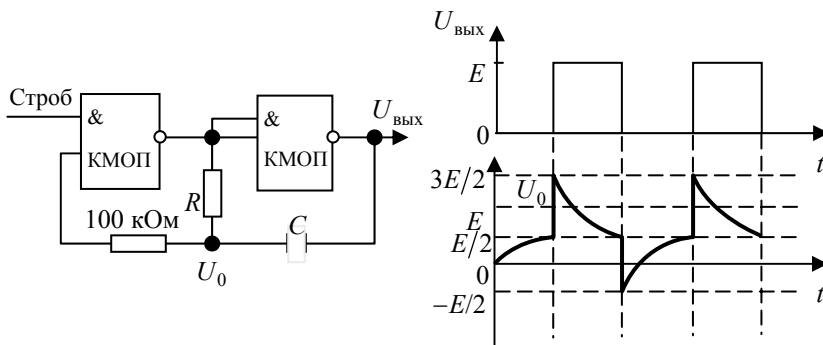


Рис. 5.12

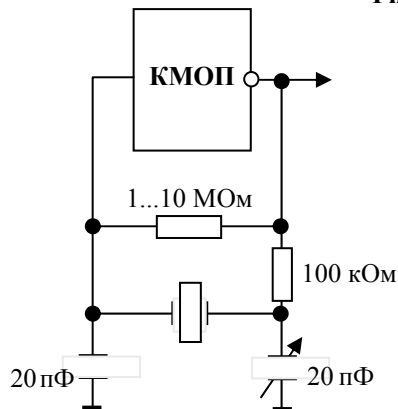


Рис. 5.13

При работе на низких частотах в схеме лучше использовать триггер Шмитта, например, 4093.

Мультивибратор с кварцевым резонатором представлен на рис. 5.13.

Переменная ёмкость 20 пФ служит для подстройки частоты. В простом варианте в схеме можно оставить только инвертор КМОП, сопротивление смещения 1...10 МОм и кварц.

Схема генератора пилообразного напряжения представлена на рис. 5.14.

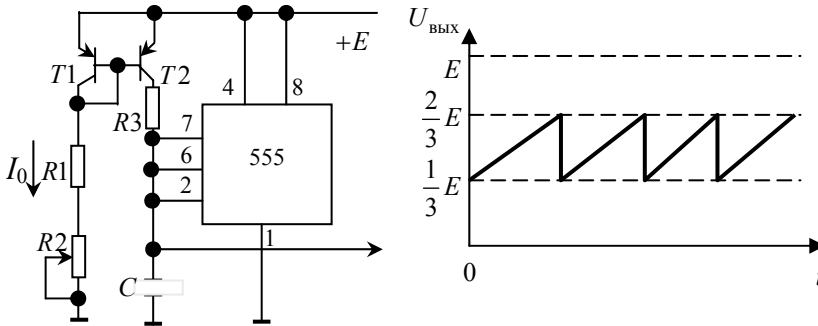


Рис. 5.14

Ёмкость  $C$  заряжается током  $I_0$ , передаваемом через токовое зеркало на транзисторах  $T1, T2$ . При достижении верхнего порога переключения  $\frac{2}{3}E$  вывод 7 микросхемы переходит в состояние КЗ на общий провод и ёмкость  $C$  быстро разряжается до нижнего порога переключения  $\frac{1}{3}E$ , после чего вывод 7 переходит в высокоимпедансное состояние и процесс повторяется. Поскольку ток разряда  $I_0$  постоянен, напряжение на конденсаторе  $C$  возрастает линейно. С помощью резистора  $R2$  можно управлять скоростью заряда ёмкости  $C$ , а, значит, и частотой выходного сигнала.

### 5.3. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Покажите, что в схеме генератора Вина цепь обратной связи на центральной частоте  $f_0$  имеет коэффициент передачи  $\frac{1}{3}$ , а фазовый сдвиг равен нулю.

#2. Для генератора из #1 примера выберите и рассчитайте все элементы схемы, обеспечивающие рабочую точку  $I_{К, Q} = 0,5 \text{ mA}$ .

Напряжение питания  $E$  возьмите равным 12 В.

#3. Сделайте то же самое для генератора из #2 примера.

#4. Оцените максимальную частоту, на которой возможна нормальная работа мультивибратора рис. 5.9, если напряжение питания равно  $\pm 12 \text{ В}$ , а в качестве ОУ выбран усилитель 741 (максимальная скорость нарастания выходного напряжения  $\frac{0,5 \text{ В}}{\text{мкс}}$ ).

#5. Что произойдёт с частотой генератора рис. 5.12, если заменить в ней обычный элемент КМОП на триггер Шмитта КМОП?

- увеличится;
- уменьшится;
- останется прежней.

#6. Объясните назначение входа "Строб" в схеме рис. 5.12.

## 6. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ

Сигналы, поступающие от источника информации (микрофон, датчик телеметрической системы, видеокамера, и т.п.) имеют сравнительно низкочастотный спектр и поэтому не могут быть непосредственно переданы по радиоканалу с высокой эффективностью, так как это потребовало бы гигантских размеров для передающих и приёмных антенн. Кроме того, даже если бы это и было возможно, возникла бы проблема разделения информации, передаваемой разными станциями, из-за наложения спектров.

Обе эти трудности удаётся обойти путём согласованного закрепления за каждой передающей станцией некоторого высокочастотного несущего колебания  $\omega_0$ , один или несколько параметров которого меняются в такт передаваемому сообщению  $s(t)$ . Физический процесс управления параметрами несущего колебания называют модуляцией, а получаемый сигнал – модулированным сигналом.

В радиотехнике чаще всего в качестве несущего используют простое гармоническое колебание

$$u_H(t) = U_H \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

имеющее три свободных параметра:  $U_H$ ,  $\omega_0$  и  $\varphi_0$ .

В зависимости от выбранного параметра управления различают амплитудную модуляцию (АМ), частотную модуляцию (ЧМ) и фазовую модуляцию (ФМ).

### 6.1. СИГНАЛЫ С АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

При АМ амплитуда несущего колебания меняется в такт передаваемому сообщению  $s(t)$

$$U_H(t) = U_H + K_A s(t).$$

Тогда общее выражение для АМ-сигнала будет иметь вид

$$u_{AM}(t) = [U_H + K_A s(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Рассмотрим простейший случай однотонального АМ сигнала, когда

$$s(t) = E_0 \cos(\Omega t + \Phi_0).$$

В этом случае АМ сигнал принимает вид

$$\begin{aligned} u_{AM}(t) &= U_H \left[ 1 + K_A \frac{E_0}{U_H} \cos(\Omega t + \Phi_0) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_H [1 + m \cos(\Omega t + \Phi_0)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Коэффициент  $m = K_A \frac{E_0}{U_H}$  называют коэффициентом или глубиной модуляции.

Осциллограмма однотонального АМ-сигнала представлена на рис. 6.1.

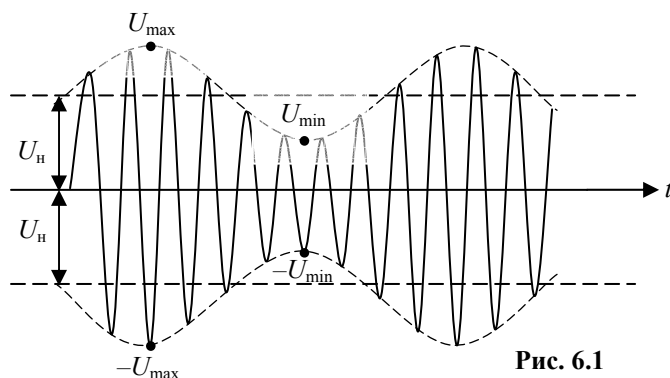


Рис. 6.1

Его огибающая повторяет форму модулирующего сигнала  $s(t)$ . Не трудно проверить, что

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}.$$

Величина  $m$  для неискажённой передачи должна лежать в пределах от 0 до 1. При  $m > 1$  огибающая уже не повторяет форму модулирующего сигнала – этот случай называют перемодуляцией.

Используя тригонометрическую формулу для произведения косинусов, из выражения (6.1) сразу получаем

$$u_{\text{AM}}(t) = U_{\text{H}} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{mU_{\text{H}}}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi_0] + \frac{mU_{\text{H}}}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]. \quad (6.2)$$

Согласно этой формуле, спектр однотонового АМ-сигнала имеет всего три составляющие:  $\omega_0$  – несущая частота;  $\omega_0 + \Omega$  – верхняя боковая частота;  $\omega_0 - \Omega$  – нижняя боковая частота.

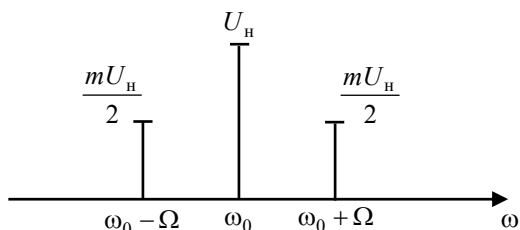


Рис. 6.2

Спектральная диаграмма этого сигнала представлена на рис. 6.2.

Средняя мощность сигнала окажется равной сумме средних мощностей несущего и боковых колебаний:

$$P_{\text{cp}} = \frac{U_{\text{H}}^2}{2} + \frac{(mU_{\text{H}}/2)^2}{2} + \frac{(mU_{\text{H}}/2)^2}{2} = \frac{U_{\text{H}}^2}{2} + \frac{(mU_{\text{H}})^2}{4}.$$

Из последнего соотношения видно, что даже при 100%-ной модуляции ( $m = 1$ ) доля мощности обоих боковых колебаний составляет всего лишь 50 % от мощности несущего колебания. Поскольку информация о передаваемом сигнале  $s(t)$  заключена в боковых колебаниях, становится ясно, что в энергетическом отношении АМ не является эффективной.

Все особенности АМ-сигнала, рассмотренные для случая однотоновой модуляции, повторяются и при сложном модулирующем сигнале. В частности, спектр сложного модулированного АМ-сигнала состоит из несущего колебания  $\omega_0$  и двух симметричных боковых полос, каждая из которых повторяет спектр модулирующего сигнала (рис. 6.3).

Из сказанного следует важный вывод: ширина спектра АМ-сигнала равна удвоенному значению наибольшей частоты в спектре модулирующего сигнала.

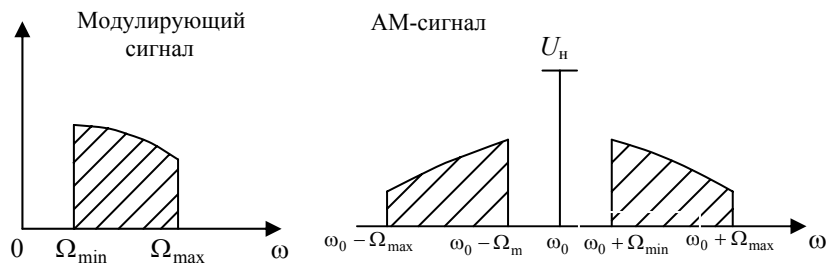


Рис. 6.3

## 6.2. СИГНАЛЫ С ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

При ЧМ частота несущего колебания меняется в такт передаваемому сообщению  $s(t)$ :

$$\omega(t) = \omega_0 + K_{\text{ч}}s(t).$$

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением однотоновой модуляции

$$\omega(t) = \omega_0 + K_{\text{ч}}E_0 \cos(\Omega t + \Phi_0) = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t + \Phi_0).$$

Здесь  $\Delta\omega = K_{\text{ч}}E_0$  – девиация частоты сигнала. Полная фаза ЧМ-сигнала

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0 = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi_0) + \varphi_0.$$

Величина  $m = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$  называется индексом частотной модуляции. Она представляет собой девиацию фазы модулированного сигнала, выраженную в радианах. Положим для простоты  $\Phi_0 = \varphi_0 = 0$  и выразим мгновенное значение ЧМ-сигнала в виде

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{н}} \cos(\omega_0 t + m \sin \Omega t). \quad (6.3)$$

Различают два случая ЧМ:

- узкополосная ( $m \ll 1$ );
- широкополосная ( $m > 1$ ).

Рассмотрим вначале первый случай ( $m \ll 1$ ). Воспользовавшись тригонометрической формулой для косинуса суммы, преобразуем выражение (6.3):

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{н}} \cos(m \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_{\text{н}} \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Поскольку  $m$  мало, можно принять, что  $\cos(m \sin \Omega t) \approx 1$ ;  $\sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t$ . Тогда

$$\begin{aligned} u_{\text{ЧМ}}(t) &\approx U_{\text{н}} \cos \omega_0 t - U_{\text{н}} m \sin \Omega t \sin \omega_0 t = \\ &= U_{\text{н}} \cos \omega_0 t + \frac{m U_{\text{н}}}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{m U_{\text{н}}}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned}$$

Таким образом, в спектре ЧМ-сигнала при  $m \ll 1$  содержится несущее колебание  $\omega_0$  и два боковых колебания  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ , как и в случае АМ-сигнала. Однако, в отличие от АМ, нижнее боковое колебание имеет дополнительный фазовый сдвиг на  $180^\circ$ .

В энергетическом отношении узкополосная ЧМ крайне неэффективна, так как  $m \ll 1$  и мощность обоих боковых колебаний очень мала.

Рассмотрим теперь широкополосную ЧМ. Можно показать, что в этом случае ЧМ-сигнал (6.3) представляется в виде

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_{\text{н}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(m) \cos(\omega_0 + k\Omega)t, \quad (6.4)$$

где  $J_k(m)$  – функция Бесселя  $k$ -го индекса от аргумента  $m$ .

Теоретически, спектр такого сигнала бесконечен, однако коэффициенты  $J_k(m)$  при  $k > m + 1$  становятся такими малыми, что ими можно пренебречь. Поэтому можно считать, что ЧМ-сигнал занимает полосу  $\pm(m+1)\Omega$  вокруг  $\omega_0$ . Спектральная диаграмма ЧМ-сигнала при  $m = 5$  представлена на рис. 6.4.



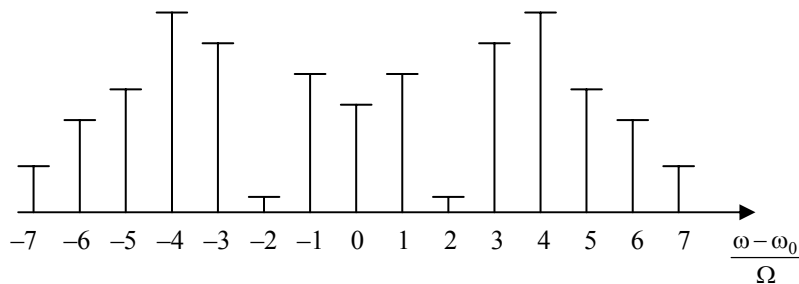


Рис. 6.4

Если  $m \gg 1$ , то практическая ширина спектра ЧМ-сигнала

$$P_{\text{прак}} = 2(m+1)\Omega \sim 2m\Omega = 2\Delta\omega, \text{ т.е. равна удвоенной девиации частоты.}$$

Ранее было выяснено, что для АМ-сигнала требуется полосачастот, равная  $2\Omega$ , т.е. в  $m$  раз меньшая. Большая широкополосность ЧМ-сигнала приводит к тому, что ЧМ реально может использоваться для радиосвязи лишь на очень высоких частотах, в диапазоне метровых и более коротких волн. Однако ЧМ-сигналы имеют ряд важных преимуществ перед АМ-сигналами.

Во-первых, при частотной модуляции амплитуда модулированных колебаний не несёт никакой информации и не требуется её постоянства, поэтому практически любые вредные изменения амплитуды радиосигнала в процессе его прохождения через атмосферу не приводят к искажению передаваемых сообщений. Известно, что большинство атмосферных помех воздействуют именно на амплитуду радиосигнала, что весьма болезненно воспринимается АМ-приёмниками и остаётся практически неощутимым для ЧМ-приёмников, обеспечивающих поэтому гораздо более высокое качество радиопередачи.

Во-вторых, постоянство амплитуды ЧМ-сигнала, излучаемого передающей станцией, позволяет полностью использовать энергетические возможности передатчика, который работает в этом случае при неизменной колебательной мощности.

### 6.3. СИГНАЛЫ С ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

При ФМ фаза несущего колебания меняется в такт передаваемому сообщению  $s(t)$ :

$$\Psi(t) = \omega_0 t + K_{\phi} s(t).$$

Анализ ФМ-сигнала приводит к таким же результатам, что и для ЧМ-сигнала.

При однотоновой модуляции ЧМ- и ФМ-сигналы вообще невозможно отличить. Различия между этими двумя видами модуляции проявляются только при изменении амплитуды  $E_0$  и частоты  $\Omega$  модулирующего сигнала  $s(t)$ .

При ЧМ девиация частоты  $\Delta\omega$  пропорциональна амплитуде  $E_0$  и не зависит от частоты  $\Omega$ . Индекс же модуляции  $m = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$  оказывается прямо пропорционален амплитуде  $E_0$  и обратно пропорционален частоте  $\Omega$ . При

ФМ девиация частоты  $\Delta\omega$  изменяется пропорционально амплитуде  $E_0$  и частоте  $\Omega$ . Индекс модуляции  $m = \frac{\Delta\omega}{\Omega}$  оказывается при этом пропорционален амплитуде  $E_0$  и не зависит от частоты  $\Omega$  модулирующего сигнала.

ФМ- и ЧМ-сигналы часто объединяют под общим названием "сигналы с угловой модуляцией".

### 6.4. СИГНАЛЫ С ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

При импульсной модуляции (ИМ) в качестве несущего колебания используют различные периодические импульсные последовательности (радио- или видео-).

Наиболее широко применяются следующие виды импульсной модуляции:

- амплитудно-импульсная (АИМ), когда в такт передаваемому сообщению изменяется амплитуда импульсов исходной последовательности;

- широтно-импульсная (ШИМ), когда по закону передаваемого сообщения изменяется ширина импульсов исходной последовательности;
- фазо-импульсная (ФИМ), когда передаваемое сообщение управляет временным положением коротких импульсов;
- импульсно-кодовая модуляция (ИКМ), когда первичный аналоговый сигнал преобразуется в цифровой двоичный код с помощью АЦП, а затем этот код передаётся последовательно, разряд за разрядом, в виде импульсов (единиц) и пауз (нулей), либо в виде импульсов разной полярности для 0 и 1.

В современной радиолокации широко используются радиоимпульсы, высокочастотное заполнение которых имеет переменную частоту. Чаще всего используется внутриимпульсная частотная модуляция с линейным законом изменения мгновенной частоты за время действия импульса.

Рассмотрим принцип линейной частотной модуляции (ЛЧМ). Пусть прямоугольный радиоимпульс длительностью  $\tau_n$  располагается симметрично относительно начала отсчёта  $t = 0$ , а его мгновенная частота линейно нарастает от начала импульса к его концу по закону:

$$\omega(t) = \omega_0 + \mu t .$$

Здесь  $\omega_0$  – несущая частота;  $\mu$  – параметр модуляции.

В начале импульса мгновенная частота минимальна и равна  $\omega_0 - \mu \frac{\tau_n}{2}$ , а к концу импульса она увеличивается до значения  $\omega_0 + \mu \frac{\tau_n}{2}$ . Таким образом, за время действия импульса девиация частоты

$$\Delta\omega = \mu\tau_n .$$

Замечательным свойством ЛЧМ-сигналов является то, что они допускают существенное сжатие во времени. Для этого используют специальную линию задержки, в которой время задержки обратно пропорционально частоте. Обычно такая линия реализуется на поверхностных акустических волнах (ПАВ).

ЛЧМ-сигнал, будучи подан на вход такой линии задержки, выходит из неё в виде короткого импульса, так как и более низкочастотные составляющие, относящиеся к началу импульса, и более высокочастотные, относящиеся к концу импульса, достигают выхода одновременно.

Свойства ЛЧМ-сигнала во многом определяются безразмерной величиной

$$B = \Delta f \tau_n ,$$

называемой базой ЛЧМ-сигнала. Здесь  $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$  – девиация циклической частоты за время действия импульса.

На практике используются ЛЧМ-сигналы с большой базой, т.е.  $B \gg 1$ . Их замечательным свойством является то, что спектральная плотность равномерна в полосе частот  $\left( \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right)$  и резко падает до нуля за её пределами. Следствием такого спектра является то, что ширина основного лепестка автокорреляционной функции (АКФ) оказывается равной  $\frac{2}{\Delta f}$ , в то время как для подобного радиоимпульса с однородным частотным заполнением  $\omega_0$  она равна  $2\tau_n$ .

Для примера, сравним ширину интервала корреляции для прямоугольного радиоимпульса с  $\tau_n = 10$  мкс и однородным заполнением  $f_0 = 1$  ГГц и для соответствующего ему ЛЧМ-сигнала, у которого частота заполнения меняется от 0,99 ГГц в начале импульса до 1,01 ГГц в конце. Будем иметь:

– для обычного импульса  $\tau_{кор} = 2\tau_n = 20$  мкс;

– для ЛЧМ-импульса  $\tau_{кор} = \frac{2}{\Delta f} = \frac{2}{1,01 \text{ ГГц} - 0,99 \text{ ГГц}} = 0,1$  мкс.

Видно, что корреляционные свойства ЛЧМ-сигнала существенно лучше.

## 6.5. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Антенна с сопротивлением излучения  $R_{\text{изл}} = 50 \text{ Ом}$  возбуждается АМ-током

$$i(t) = 20[1 + 0,8 \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot t)] \cos(2\pi \cdot 10^7 \cdot t), \text{ А.}$$

Постройте спектральную диаграмму тока.

#2. В задаче #1 найдите:

- а) пиковую мощность, излучаемую антенной;
- б) среднюю излучаемую мощность;
- в) относительную долю мощности, сосредоточенной в несущем колебании.

#3. Верхняя частота модулирующего звукового сигнала  $F_{\text{верх}} = 10 \text{ кГц}$ . Найдите полосу частот, занимаемую АМ-радиостанцией, передающей этот сигнал на длине волны  $\lambda_0 = 30 \text{ м}$ .

#4. ЧМ-сигнал имеет мгновенную частоту

$$\omega(t) = 10^8 (1 + 10^{-3} \cos(2\pi \cdot 10^4 \cdot t)), \text{ с}^{-1}.$$

Найдите девиацию частоты и индекс модуляции этого сигнала, а также занимаемую им полосу частот.

#5. Определите индекс модуляции ЧМ-сигнала, промодулированного низкой частотой  $F = 6 \text{ кГц}$ . Несущая частота  $f_0 = 100 \text{ МГц}$ , максимальное значение частоты  $f_{\text{max}} = 102 \text{ МГц}$ .

#6. Изобразите спектральную диаграмму ЧМ-сигнала, если  $f_0 = 50 \text{ МГц}$ ,  $\Delta f = 0,5 \text{ МГц}$ , а частота модуляции  $F = 4 \text{ кГц}$ .

#7. Прямоугольный ЛЧМ-радиоимпульс длительности  $\tau_{\text{и}} = 15 \text{ мкс}$  имеет в начале импульса частоту заполнения  $f_{\text{нач}} = 80 \text{ МГц}$ , а в конце  $f_{\text{кон}} = 120 \text{ МГц}$ . Определите базу этого сигнала. Изобразите качественно спектральную плотность этого сигнала и оцените его интервал корреляции.

## 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Нелинейные цепи играют важную роль в радиоэлектронике. Они позволяют осуществлять ряд преобразований, которые оказываются неэффективными либо вообще невозможными в линейных цепях. Например, нелинейные усилители мощности имеют гораздо больший КПД нежели линейные усилители, умножение и преобразование частоты просто невозможно в линейных устройствах, равно как и детектирование и т.д.

В общем случае нелинейное радиотехническое устройство может быть представлено структурной схемой рис. 7.1.



Рис. 7.1

Анализ такого устройства базируется на предположении, что нелинейный элемент (НЭ) безинерционен и характеризуется передаточной функцией

$$s_{\text{вых}} = f(s_{\text{вх}}), \tag{7.1}$$

для которой обычно подыскивают простую аппроксимацию.

Наиболее удобно в качестве входного сигнала  $s_{\text{вх}}$  взять входное напряжение, а в качестве отклика  $s_{\text{вых}}$  – выходной ток. Тогда соотношение (7.1) примет вид

$$i_{\text{вых}} = f(u_{\text{вх}}), \tag{7.2}$$

который представляет собой вольтамперную характеристику (ВАХ) НЭ. Для небольших воздействий на НЭ используют аппроксимацию ВАХ в виде степенного полинома

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots + a_n(u - U_0)^n, \quad (7.3)$$

где  $a_0, a_1, a_2, \dots$  – коэффициенты ряда Тейлора;  $U_0$  – значение напряжения в рабочей точке.

В практически важных случаях бывает достаточно ограничиться второй или третьей степенью. Коэффициенты  $a_k$  определяются известной формулой

$$a_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k i}{du^k} \right|_{u=U_0}.$$

Для малых сигналов вообще ограничиваются первой степенью

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0),$$

где  $a_1 = \left. \frac{di}{du} \right|_{u=U_0}$  называют дифференциальной крутизной и обозначают  $S_{\text{диф}}$ . Тогда

$$i(u) = I_0 + S_{\text{диф}}(u - U_0),$$

т.е. на малом сигнале НЭ ведёт себя, как линейный. Величина, обратная крутизне  $S_{\text{диф}}$ , называется дифференциальным сопротивлением НЭ в рабочей точке.

Для больших воздействий на НЭ обычно используют кусочно-линейную аппроксимацию ВАХ (см. рис. 7.2).

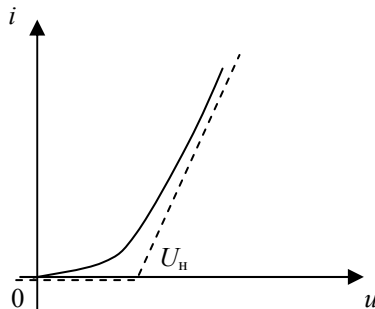


Рис. 7.2

Тогда

$$i(u) = \begin{cases} 0, & u < U_{\text{н}}; \\ S(u - U_{\text{н}}), & u \geq U_{\text{н}}. \end{cases} \quad (7.4)$$

Здесь  $U_{\text{н}}$  – напряжение начала характеристики;  $S$  – крутизна на большом сигнале.

Напряжение начала выходных характеристик биполярных транзисторов имеет порядок 0,3...0,8 В; крутизна на характеристики тока базы  $i_{\text{б}}(U_{\text{бэ}})$  обычно около 10 мА/В.

Крутизна характеристики  $i_{\text{к}}(U_{\text{бэ}})$  в  $\beta$  раз больше. Поскольку у современных транзисторов  $\beta = 100 \dots 300$ , эта крутизна имеет порядок нескольких ампер на вольт.

Для полупроводниковых приборов, содержащих  $p$ - $n$  переходы, широко используют экспоненциальную аппроксимацию

$$i(u) = I_0[\exp(u/V_T) - 1]. \quad (7.5)$$

Здесь  $I_0$  – обратный ток  $p$ - $n$  перехода;  $V_T$  – тепловой потенциал, равный 25 мВ при температуре 300 К.

Эта аппроксимация вполне точна при токах, не превышающих нескольких мА, что, например, имеет место в маломощных транзисторах.

Дифференцирование выражения (7.5) приводит к известным соотношениям для дифференциальной крутизны и динамического сопротивления  $p$ - $n$  перехода на малом сигнале:

$$S_{\text{диф}} = \frac{I_Q}{V_T};$$

$$r_D = \frac{V_T}{I_Q},$$

где  $I_Q$  – ток в рабочей точке.

## 7.1. ОТКЛИК НЕЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ НА ГАРМОНИЧЕСКИЙ СИГНАЛ

### 7.1.1. СПЕКТР ТОКА В ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ПРИ СТЕПЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЕГО ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Рассмотрим воздействие на НЭ сигнала

$$u(t) = U_0 + U_m \cos \omega t,$$

где  $U_0$  – напряжение смещения, задающее рабочую точку.

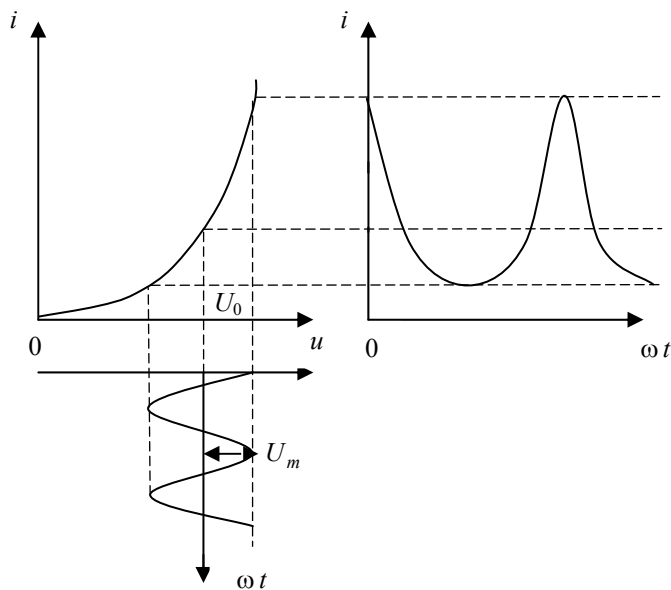


Рис. 7.3

Форма токов и напряжений представлена на рис. 7.3. Видно, что ток в цепи не синусоидален. Представим его рядом Фурье:

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos n\omega t.$$

Для нахождения амплитуд гармоник воспользуемся степенной аппроксимацией ВАХ НЭ

$$i(u) = a_0 + a_1(u - U_0) + a_2(u - U_0)^2 + \dots = a_0 + U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t + \dots$$

Используя известные формулы для степеней косинуса

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \cos^3 x = \frac{1}{4}(3 \cos x + \cos 3x);$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2x + \cos 4x) \text{ и т.д.,}$$

запишем общее выражение для тока

$$i(t) = \left( a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots \right) + \left( a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos \omega t + \\ + \left( \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots \right) \cos 2\omega t + \left( \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots \right) \cos 3\omega t + \dots$$

Таким образом, постоянная составляющая  $I_0$  и амплитуды гармоник  $I_n$  составляют

$$\begin{aligned} I_0 &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots; \\ I_1 &= a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots; \\ I_2 &= \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{8} a_4 U_m^4 + \dots; \\ I_3 &= \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$

Рассмотрим частный случай сравнительно небольшого входного сигнала, когда в аппроксимирующем полиноме (7.3) достаточно ограничиться второй степенью, т.е. считать, что все коэффициенты, начиная с  $a_3$ , равны нулю. В этом случае в спектре тока (7.6) присутствуют только первые три составляющие:

$$\begin{aligned} I_0 &= a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2; \\ I_1 &= a_1 U_m; \\ I_2 &= \frac{1}{2} a_2 U_m^2, \end{aligned} \quad (7.6')$$

а все остальные равны нулю.

#### 7.1.2. СПЕКТР ТОКА В ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В этом случае форма тока имеет вид косинусоидальных импульсов (рис. 7.4).

Параметр  $\theta$ , при котором ток уменьшается до нуля, называется углом отсечки. Из графиков рис. 7.4 трудно определить, что

$$\cos \theta = (U_n - U_0) / U_m.$$

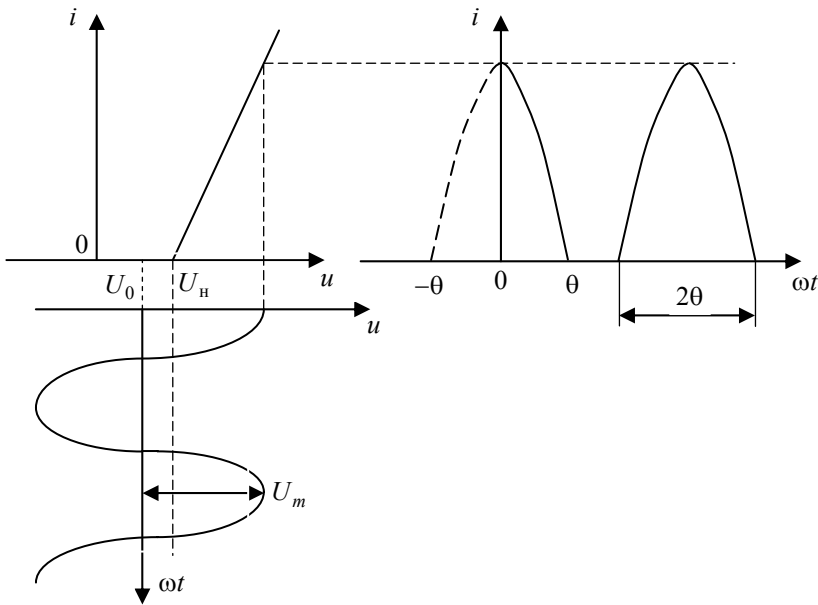


Рис. 7.4

Если разложить полученную последовательность импульсов в ряд Фурье, получаются следующие значения для составляющих спектра тока:

$$I_0 = \frac{SU_m}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta) = SU_m \gamma_0;$$

$$I_1 = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta) = SU_m \gamma_1;$$

$$I_n = \frac{2SU_m}{\pi} \frac{\sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta}{n(n^2 - 1)} = SU_m \gamma_n, \quad n = 2, 3, \dots$$

Здесь  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  – так называемые функции Берга  $\gamma_i(\theta)$  или коэффициенты гармоник. Эти коэффициенты широко используются в инженерных расчётах, поэтому они приводятся в справочной литературе по радиоэлектронике. Графики первых трёх из этих функций в зависимости от угла отсечки  $\theta$  показаны на рис. 7.5.

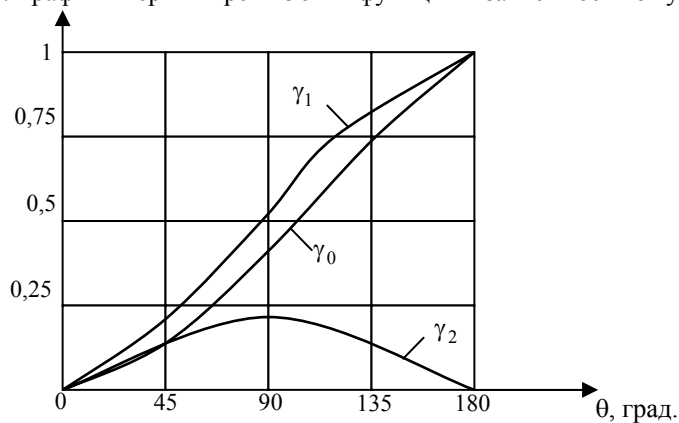


Рис. 7.5

## 7.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ УСИЛИТЕЛИ И УМНОЖИТЕЛИ ЧАСТОТЫ

В радиопередающих устройствах широко применяются резонансные усилители мощности (УМ). Их отличительная черта – работа при больших уровнях выходного сигнала, причём практика показывает, что наилучших результатов с точки зрения КПД можно добиться только если НЭ (транзистор, лампа) работает в режиме отсечки выходного тока.

Схема транзисторного усилителя с нагрузкой в виде параллельного  $LC$ -контура представлена на рис. 7.6.

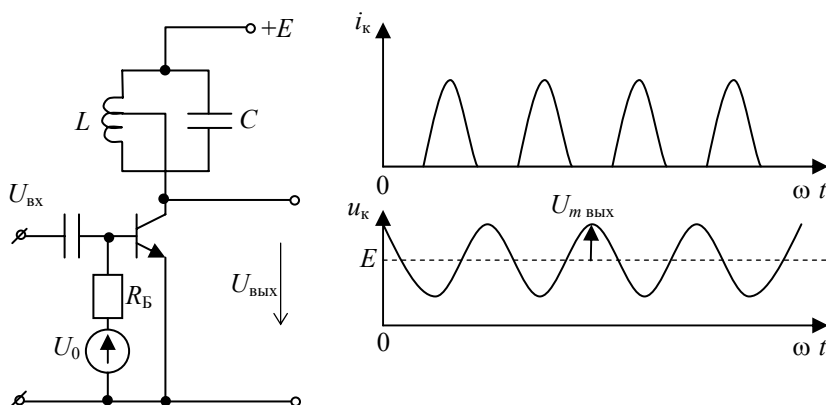


Рис. 7.6

Напряжение смещения  $U_0$  выбирается равным нулю или даже отрицательным, так что в отсутствие входного сигнала транзистор закрыт. При подаче входного сигнала достаточно большой амплитуды  $U_{m\text{вх}}$  в коллекторной цепи транзистора появляются импульсы тока, содержащие  $I_0$  и все гармоники  $I_1, I_2$  и т.д. Однако ввиду того, что контур настроен на 1-ю гармонику, только эта гармоника коллекторного тока создаёт на выходе заметное напряжение с амплитудой

$$U_{m\text{вых}} = I_1 R_{\text{рез}} = S U_{m\text{вх}} R_{\text{рез}} \gamma_1(\theta), \quad (7.7)$$

где  $R_{\text{рез}}$  – эквивалентное сопротивление  $LC$ -контра при резонансе.

Все остальные гармоники тока не могут создать сколь-нибудь заметное напряжение, так как на этих частотах импеданс  $LC$ -контра оказывается меньше  $R_{\text{рез}}$  в  $Q$  раз или более ( $Q$  – добротность контра). Для того чтобы добротность была максимально высокой, используют частичное включение контра в коллекторную цепь, чтобы выходное сопротивление транзистора меньше шунтировало контур. В итоге, выходное напряжение практически не содержит высших гармоник  $2\omega, 3\omega$  и т.д. Временные диаграммы  $i_k$  и  $u_k$  приведены на том же рис. 7.6.

Качество работы УМ оценивается формой зависимости  $U_{m\text{вых}} = f(U_{m\text{вх}})$ , которая называется колебательной характеристикой усилителя (рис. 7.7).

Для усиления АМ-сигналов используют линейный участок колебательной характеристики, заботясь о том, чтобы  $U_{m\text{вх}}$  всегда оставалось меньше  $U_{m\text{вх}}^{\text{кр}}$ .

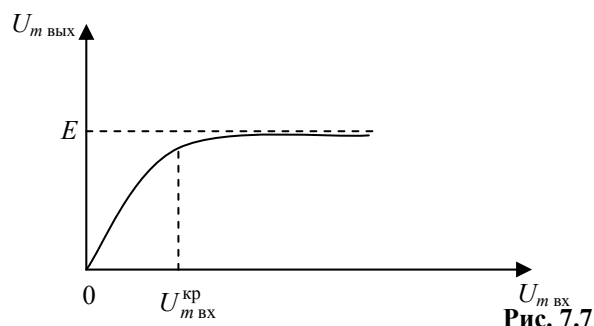


Рис. 7.7



Если  $U_{m \text{ вх}} > U_{m \text{ вх}}^{\text{кр}}$ , то говорят, что усилитель работает в перенапряжённом режиме. Этот режим широко используют для ЧМ- и ФМ-сигналов, так как он за счёт ограничения  $U_{m \text{ вх}}$  дополнительно ослабляет паразитную амплитудную модуляцию ЧМ- и ФМ-сигналов.

Если в схеме рис. 7.6 LC-контур будет настроен на частоту  $n\omega$ , то данное устройство может использоваться в качестве умножителя частоты.

Умножители обычно применяются при создании источников гармонических колебаний с высокой стабильностью частоты, если непосредственное генерирование в заданном частотном диапазоне такой стабильности обеспечить не может. Проблема решается путём каскадного соединения низкочастотного стабильного генератора и одного или нескольких умножителей частоты.

Амплитуда выходного сигнала умножителя

$$U_{m \text{ вх}} = SR_{\text{рез}} U_{m \text{ вх}} \gamma_n(\theta), \quad (7.8)$$

где  $R_{\text{рез}}$  – резонансное сопротивление контура, настроенного на  $n$ -ю гармонику.

Трудность создания резонансных умножителей частоты заключается в низких значениях  $\gamma_n(\theta)$  при большой кратности умножителя. Поэтому следует выбирать углы отсечки, максимизирующие соответствующий коэффициент Берга. Анализ функций  $\gamma_n(\theta)$  показывает что  $\theta_{\text{опт}} \approx \frac{180^\circ}{n}$ .

### 7.3. ПОЛУЧЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Схема рис. 7.6 легко может быть преобразована в модулятор АМ. Для этого достаточно сделать так, чтобы напряжение смещения  $U_0$  менялось в такт передаваемому сообщению. Форма сигналов на выходе такого модулятора для случая однотоновой модуляции представлена на рис. 7.8.

В последнее время в модуляторах АМ все шире начинают применяться специализированные аналоговые интегральные микросхемы, получившие название аналоговых перемножителей напряжений. Такой перемножитель реализует функцию

$$u_{\text{вх}} = ku_1u_2,$$

где  $u_1, u_2$  – входные напряжения;  $k$  – масштабный коэффициент.

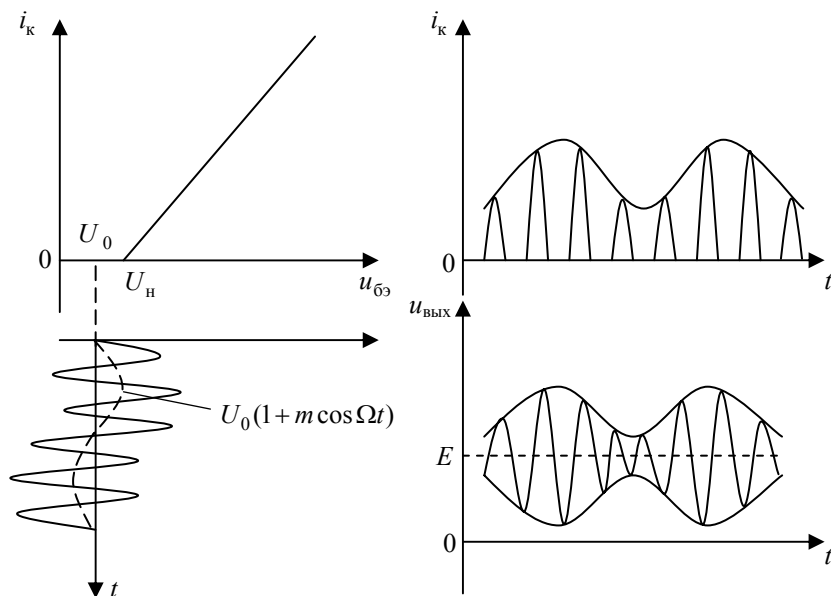


Рис. 7.8

Если на входы перемножителя подать модулирующий сигнал  $E_0 \cos \Omega t$  и несущее колебание  $U_H \cos \omega_0 t$ , то на выходе получим сигнал

$$u(t) = kE_0 \cos \Omega t U_n \cos \omega_0 t = \frac{kU_n E_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{kU_n E_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t,$$

который состоит из нижней и верхней боковых частот АМ-сигнала. Такое устройство называется балансным модулятором (БМ). Его назначение – получить АМ-сигнал с подавленной несущей.

Если требуется получить АМ-сигнал, в котором несущее колебание  $\omega_0$  должно быть сохранено, то это можно сделать в схеме, приведенной на рис. 7.9.

Если сделать коэффициент усиления масштабирующего усилителя регулируемым, то можно менять уровень несущей в результирующем сигнале.

Для получения ЧМ-сигнала проще всего воспользоваться электронной перестройкой резонансной частоты LC-контура автогенератора. Обычно для этого используют варикап, который включают в LC-контур, например, как это показано на рис. 7.10.

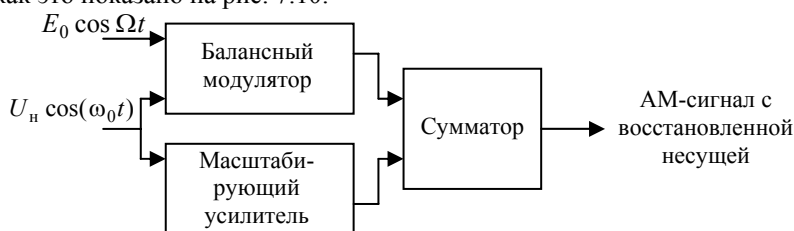


Рис. 7.9

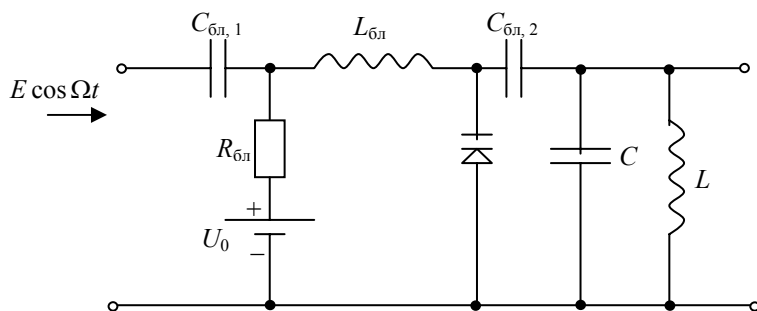


Рис. 7.10

Ёмкость варикапа совместно с  $C$  и  $L$  образует колебательный контур, резонирующий на частоте  $\omega_0$ . Элементы  $R_{бл}$ ,  $C_{бл,1}$  и  $C_{бл,2}$  обеспечивают взаимную развязку источника модулирующего сигнала, источника постоянного смещения  $U_0$  и высокочастотного LC-контура.

В современной радиотехнике для получения ЧМ-сигналов все шире применяются интегральные микросхемы преобразователей "напряжение-частота". Такая микросхема представляет собой генератор, частота которого зависит от управляющего напряжения, прикладываемого к входу. По-английски такая схема называется Voltage controlled oscillator (VCO) – генератор, управляемый напряжением (ГУН).

## 7.4. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

### 7.4.1. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ АМ-СИГНАЛОВ

Операция амплитудного детектирования обратна амплитудной модуляции. Имея на входе детектора АМ-сигнал  $u_{вх}(t) = U_{m вх}(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ , следует получить на выходе сигнал  $u_{вых}(t) = U_{m вых} \cos \Omega t$ , пропорциональный передаваемому сообщению.

Эффективность работы АМ-детектора принято оценивать коэффициентом детектирования  $K_{дет} = \frac{U_{m вых}}{m U_{m вх}}$ , представляющим собой отношение амплитуды выходного низкочастотного напряжения к амплитуде огибающей входного АМ-сигнала.

В зависимости от амплитуды АМ-сигнала и степени нелинейности характеристики используемого НЭ различают два режима детектирования: линейный (режим больших амплитуд с кусочно-линейной аппроксимацией характеристики) и квадратичный (работа при малых амплитудах на участке характеристики, описываемой полиномом 2-й степени).

### 7.4.1.1. Линейный диодный детектор

Схема такого детектора представлена на рис. 7.11.

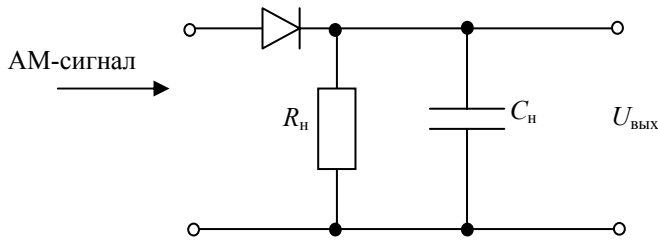


Рис. 7.11

Поскольку в качестве НЭ обычно используют германиевые диоды, для ВАХ применяют упрощённую аппроксимацию

$$i(u) \begin{cases} 0 & u < 0; \\ Su & u \geq 0, \end{cases}$$

считая, что  $U_n$  мало по сравнению с амплитудой входного сигнала. Крутизна  $S$  имеет порядок 10 мА/В.

Для того чтобы обеспечить нормальную работу детектора, сопротивление  $R_n$  выбирают таким, чтобы оно было гораздо больше сопротивления диода в прямом направлении, т.е. чтобы  $SR_n \gg 1$ .

Схема рис. 7.11, по сути, работает как однополупериодный выпрямитель с ёмкостным фильтром. Для хорошего подавления пульсаций на несущей частоте  $\omega_0$  необходимо, чтобы  $\frac{1}{(\omega_0 C_n)} \ll R_n$ .

В тоже время схема должна хорошо "отслеживать" изменения амплитуды входного сигнала, которые происходят на частоте модуляции  $\Omega$ . Для этого достаточно потребовать, чтобы  $\frac{1}{(\Omega C_n)} \gg R_n$ . Таким образом получаем окончательно условие выбора  $R_n$ :

$$\frac{1}{\omega_0 C_n} \ll R_n \ll \frac{1}{\Omega C_n}. \quad (7.9)$$

Более детальный анализ работы схемы приводит к следующей формуле для коэффициента детектирования:

$$K_{\text{дет}} = \cos \left[ \sqrt[3]{3\pi / (SR_n)} \right].$$

Входное сопротивление детектора на частоте несущего колебания оказывается равным  $R_{\text{вх}} = \frac{R_n}{2}$ . Это сопротивление необходимо учитывать при рассмотрении работы предшествующего детектору каскада усиления сигнала.

### 7.4.1.2. Коллекторный детектор

Коэффициент детектирования диодного детектора остаётся всегда меньше единицы ( $K_{\text{дет}} < 1$ ). Применение транзистора в качестве НЭ позволяет осуществить одновременно детектирование и усиление полученного НЧ сигнала (рис. 7.12).

Напряжение смещения в схеме коллекторного детектора выбирается близким к  $U_n$ , поэтому импульсы коллекторного тока имеют угол отсечки  $\theta \approx 90^\circ$ .

Пусть входное напряжение

$$u_{\text{вх}}(t) = \underbrace{U_m(1 + m \cos \Omega t)}_{U_{\text{вх}}(t)} \cos \omega_0 t.$$

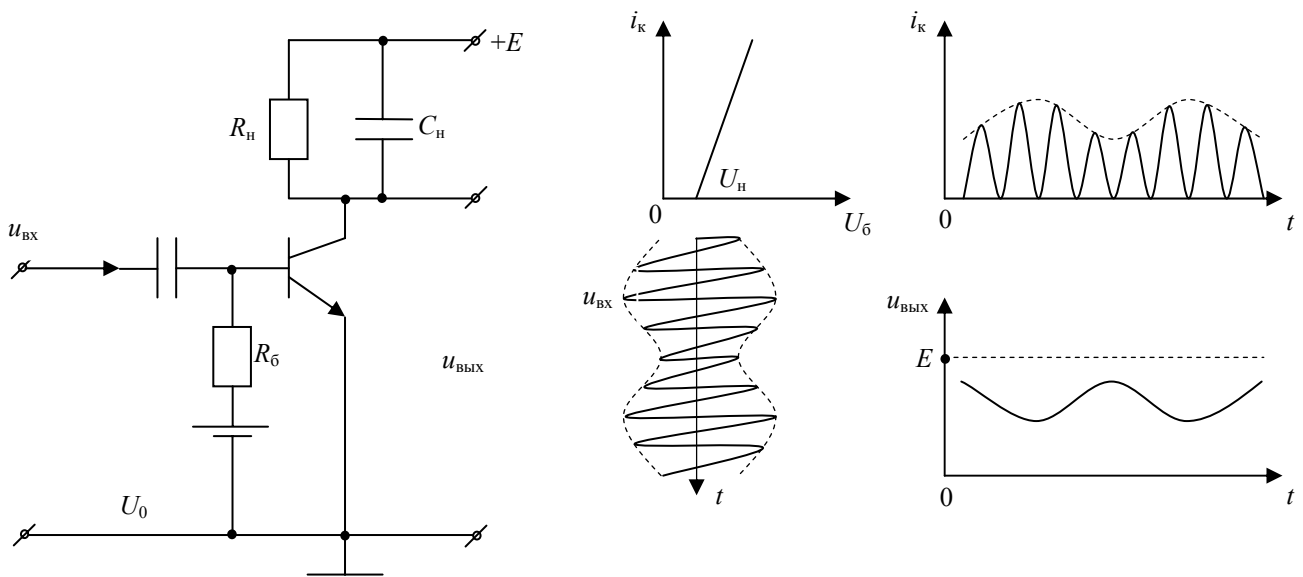


Рис. 7.12

Коллекторный ток

$$i_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{S U_{\text{BX}}(t) \gamma_n(90^\circ)}_{I_n} \cos n\omega_0 t .$$

Емкость  $C_H$ , выбираемая из условия (7.9), шунтирует  $R_H$  на высоких частотах, так что только  $I_0$  будет создавать заметное падение напряжения на резисторе  $R_H$ .

В итоге,

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= E - I_0(t)R_H = E - SR_H U_{\text{BX}}(t) \gamma_0(90^\circ) = \\ &= E - 0,318SR_H U_m (1 + m \cos \Omega t) = \\ &= E - 0,318SR_H U_m - 0,318SR_H m U_m \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Отсюда коэффициент детектирования

$$K_{\text{дет}} = 0,318SR_H .$$

Поскольку крутизна ВАХ транзисторов составляет несколько ампер на вольт, а  $R_H$  может быть порядка нескольких кОм, в таком детекторе  $K_{\text{дет}}$  может быть легко доведен до тысячи.

#### 7.4.1.3. Квадратичный детектор

При малых амплитудах сигнала, подлежащего детектированию, характеристика НЭ хорошо аппроксимируется полиномом второй степени:

$$i(t) = a_0 + a_1 u_{\text{ВХ}}(t) + a_2 u_{\text{ВХ}}^2(t) .$$

Подставляя в это выражение значение входного напряжения

$$u_{\text{вх}}(t) = U_m(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = U_{\text{вх}}(t) \cos \omega_0 t,$$

получим

$$i(t) = a_0 + a_1 U_{\text{вх}}(t) \cos \omega_0 t + 0,5 a_2 U_{\text{вх}}^2(t) + 0,5 a_2 U_{\text{вх}}^2(t) \cos 2\omega_0 t.$$

На выходе АМ-детектора составляющие тока с высокими частотами  $\omega_0$  и  $2\omega_0$  отфильтровываются RC-фильтром. Остаются только постоянная составляющая и низкочастотная, которая равна

$$i_{\text{нч}}(t) = a_2 U_m^2 m \cos \Omega t + \frac{1}{4} a_2 U_m^2 m^2 \cos 2\Omega t.$$

Эта составляющая тока НЭ создаёт на сопротивлении нагрузки детектора  $R_{\text{н}}$  напряжение

$$U_{\text{вых}}(t) = a_2 R_{\text{н}} U_m^2 m \cos \Omega t + \frac{1}{4} a_2 R_{\text{н}} U_m^2 m^2 \cos 2\Omega t.$$

Первое слагаемое несёт полезный эффект детектирования, который оказывается пропорциональным величине  $U_m^2$ , поэтому детектирование АМ-сигналов с малыми амплитудами является квадратичным. Коэффициент детектирования при этом, очевидно, равен

$$K_{\text{дет}} = a_2 R_{\text{н}} U_m.$$

Второе слагаемое определяет величину нелинейных искажений передаваемого сообщения. Введя коэффициент нелинейных искажений  $K_{\text{н.и}}$ , равный отношению амплитуд выходных колебаний с частотами  $2\Omega$  и  $\Omega$ , найдём, что

$$K_{\text{н.и}} = \frac{m}{4}.$$

Нелинейные искажения в квадратичном детекторе оказываются весьма значительными, особенно при глубокой модуляции. Поэтому в радиоприемниках АМ-сигнал обязательно усиливается так, чтобы на входе детектора амплитуда составляла несколько вольт, при этом детектор переходит в режим линейного детектирования и нелинейных искажений не возникает.

#### 7.4.1.4. Детектор на операционном усилителе

Применение ОУ позволяет осуществить линейное детектирование даже слабых АМ-сигналов. Схема такого детектора приведена на рис. 7.13.

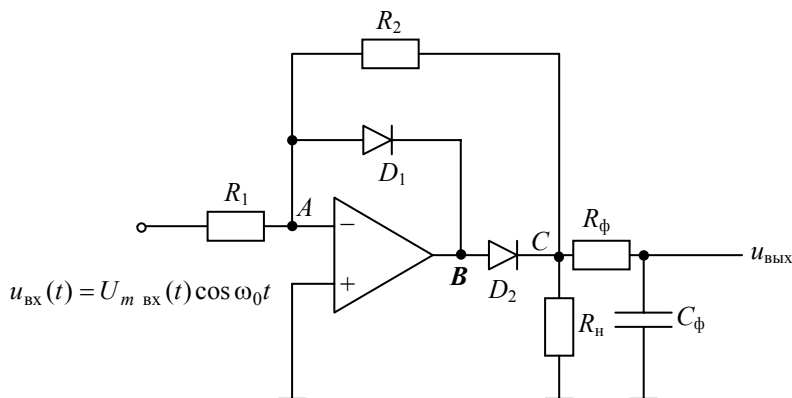


Рис. 7.13

Вначале рассмотрим работу схемы без фильтра  $C_{\phi} R_{\phi}$ .

При поступлении положительных полуволн входного напряжения напряжение на выходе ОУ  $U_B$  будет отрицательным. При этом диод  $D_1$  открыт, а диод  $D_2$  закрыт. Открытый диод  $D_1$  обеспечивает отрицательную обратную связь, поэтому  $U_A = 0$ . Но тогда сопротивления  $R_2$  и  $R_H$  оказываются подключенными своими крайними выводами к нулевой точке, тогда как их средние выводы (точка  $C$ ) изолированы запертым диодом  $D_2$ . Ясно, что при этом через  $R_2$  и  $R_H$  не течёт никакого тока, а, стало быть,  $U_{\text{вых}} = 0$ .

При поступлении отрицательных полуволн входного напряжения напряжение на выходе ОУ  $U_B$  будет положительным. При этом диод  $D_2$  открывается и обеспечивает замыкание цепи ООС через резистор  $R_2$ , поэтому  $U_A = 0$ . Благодаря этому диод  $D_1$  закрывается, и весь ток, создаваемый  $U_{\text{вх}}$ , течёт через  $R_1$  и далее через  $R_2$  на выход схемы. ОУ работает как инвертирующий усилитель напряжения с коэффициентом передачи  $K_u = -R_2 / R_1$ . Таким образом, отрицательные полуволны входного напряжения инвертируются и усиливаются в  $R_2 / R_1$  раз.

При наличии фильтра  $C_\Phi R_\Phi$  высокочастотные пульсации выходного напряжения сглаживаются и  $u_{\text{вых}}(t)$  повторяет форму огибающей входного АМ-сигнала

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{R_2}{\pi R_1} U_m \text{вх}(t).$$

Коэффициент детектирования, очевидно, равен

$$K_{\text{дет}} = \frac{R_2}{\pi R_1}.$$

*Замечание:* Детектор на ОУ может работать лишь на сравнительно низких частотах

$$f_0 \leq \frac{R_1}{R_2} f_1,$$

где  $f_1$  – частота единичного усиления ОУ, которая для большинства ОУ не превышает нескольких МГц.

#### 7.4.2. ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ЧМ- И ФМ-СИГНАЛОВ

При детектировании ЧМ- и ФМ-сигналов обычно они предварительно преобразуются в колебания с неглубокой амплитудной модуляцией и затем детектируются АМ-детектором.

##### 7.4.2.1. Простейший ЧМ-детектор

Он представляет собой последовательное соединение резонансного усилителя и АМ-детектора, причем  $LC$ -контур нагрузки резонансного усилителя расстроен относительно несущей частоты ЧМ-сигнала  $\omega_0$  так, что  $\omega_0$  попадает на середину склона резонансной кривой контура. Тогда амплитуда выходного напряжения усилителя будет изменяться в такт изменениям частоты входного сигнала, увеличиваясь при отклонении  $\omega(t)$  от  $\omega_0$  в сторону резонансной частоты  $LC$ -контура и уменьшаясь при отклонении  $\omega(t)$  в другую сторону. В итоге, при воздействии ЧМ-сигнала на выходе резонансного усилителя появляется сложное АМ–ЧМ-колебание, которое затем детектируется АМ-детектором.

Недостаток данного метода детектирования – весьма ограниченный линейный участок на склоне резонансной кривой контура, так что хорошее детектирование возможно лишь для ЧМ-сигналов с небольшой девиацией частоты.

### 7.4.2.2. Частотный дискриминатор

Схема ЧМ-детектора, используемая во многих приемниках ЧМ-сигналов, а также в схемах автоматической подстройки частоты (АПЧ) представлена на рис. 7.14.

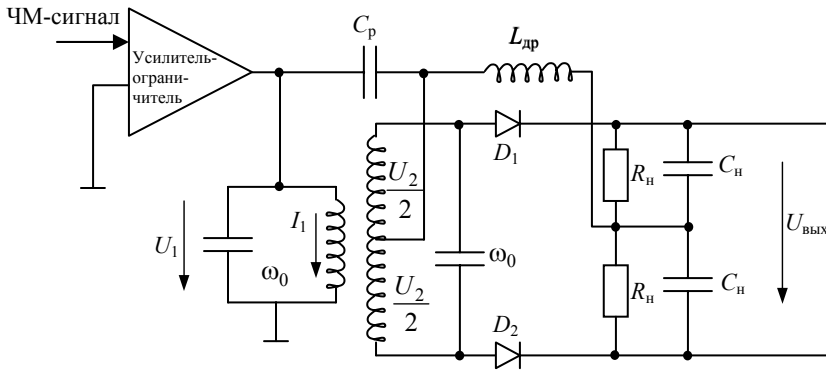


Рис. 7.14

Схема содержит резонансный усилитель-ограничитель к выходу которого подключены два индуктивно-связанных контура, настроенных на несущую частоту  $\omega_0$ . Разделительный конденсатор  $C_p$  выбирается таким, чтобы его импеданс на высокой частоте  $\omega_0$  был мал, а на низкой частоте  $\Omega$  – велик. Дроссель  $L_{др}$ , наоборот, на частоте  $\omega_0$  имеет высокий импеданс, а на частоте  $\Omega$  – низкий.

На выходе схемы включены последовательно два АМ-детектора. В отсутствие модуляции, когда частота ЧМ-сигнала  $\omega_0$  совпадает с резонансными частотами контуров, напряжения на входах обоих диодов одинаковы и, поскольку диоды включены встречно, выходное напряжение  $U_{вых}$  равно нулю. При увеличении частоты ЧМ-сигнала напряжение на аноде диода  $D_1$  увеличивается, а на аноде диода  $D_2$  уменьшается, поэтому  $U_{вых}$  становится положительным.

При уменьшении частоты сигнала напряжение на  $D_1$  уменьшается, а на  $D_2$  – увеличивается, в результате,  $U_{вых}$  становится отрицательным.

Зависимость  $U_{вых}$  от величины  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  называется детекторной характеристикой ЧМ-детектора, типичный вид которой представлен на рис. 7.15.

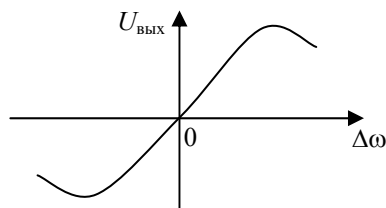


Рис. 7.15

В последнее время для детектирования ЧМ-сигналов все шире используются интегральные микросхемы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ). Для того чтобы понять принцип их работы, необходимо прежде ознакомиться с работой ФМ-детектора, который чаще называют фазовым детектором.

### 7.4.2.3. Фазовый детектор

Существуют разные схемы фазовых детекторов. Общим для них является то, что на них подаётся, кроме входного ФМ-сигнала, ещё и так называемое опорное напряжение  $u_0(t) = U_0 \sin \omega_0 t$ .

Одна из возможных схем фазового детектора представлена на рис. 7.16.

Пусть ФМ-сигнал

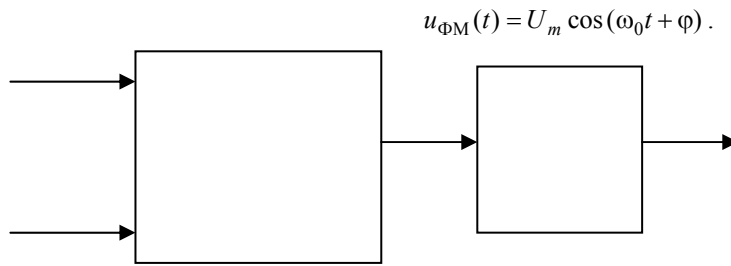


Рис. 7.16

Напряжение на выходе перемножителя

$$u_1(t) = U_m U_0 \sin \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} U_m U_0 \sin(2\omega_0 t + \varphi) - \frac{1}{2} U_m U_0 \sin \varphi.$$

ФНЧ отфильтровывает высокочастотную составляющую  $2\omega_0$  и напряжение на выходе детектора

$$U_{\text{вых}}(t) = -\frac{1}{2} U_m U_0 \sin \varphi.$$

Детекторная характеристика имеет вид рис. 7.17.

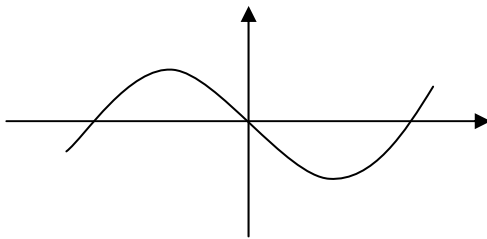


Рис. 7.17

В пределах  $\varphi = \pm\pi/4$  эта характеристика имеет хорошую линейность.

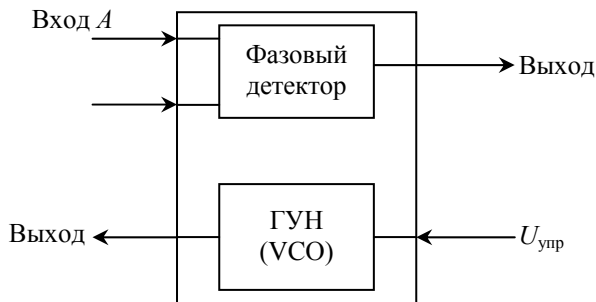
В последнее время предпочтение отдаётся цифровым фазовым детекторам, выполненным на базе цифровых логических элементов. В таких детекторах входной ФМ-сигнал преобразуется в последовательность логических нулей и единиц (это делается с помощью триггера Шмитта, который должен срабатывать при каждом переходе аналогового сигнала через нуль). опорный сигнал также имеет прямоугольную форму.

Оба сигнала подаются далее на цифровую логическую схему (в простейшем случае это один элемент "Исключающее ИЛИ"), за которой следует ФНЧ. На выходе схемы вырабатывается напряжение пропорциональное фазовому сдвигу между двумя входными логическими последовательностями. Практика показывает, что цифровые фазовые детекторы обладают высокой помехозащищённостью.



**7.4.2.4. Схема ФАПЧ**  
(английское название Phase-Locked-Loop, или PLL)

Схема включает в себя фазовый детектор и ГУН, объединённые в одном корпусе (рис. 7.18).

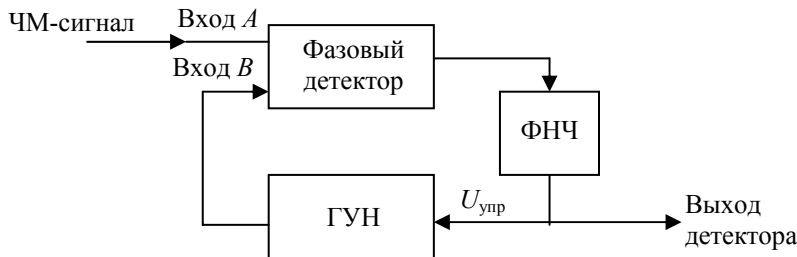


**Рис. 7.18**

И фазовый детектор, и ГУН могут использоваться по-отдельности. В частности, ГУН может быть использован как модулятор ЧМ. Фазовый детектор может быть также использован для сравнения фаз двух каких-либо сигналов.

Более интересные применения схемы связаны, однако, с замкнутым контуром ФАПЧ.

Применение ФАПЧ для детектирования ЧМ-сигналов показано на рис. 7.19.



**Рис. 7.19**

При поступлении ЧМ-сигнала происходит захват частоты замкнутым контуром ФАПЧ, т.е. ГУН начинает отслеживать мгновенную частоту входного ЧМ-сигнала, стремясь уменьшить фазовое рассогласование между входами *A* и *B*. При этом  $U_{упр}$  меняется в такт изменениям частоты входного сигнала, т.е. является выходным напряжением ЧМ-детектора.

**7.5. УПРАЖНЕНИЯ**

**#1.** ВАХ нелинейного двухполюсника имеет вид

$$i(u) = 10u^3, \text{ мА.}$$

Запишите аналитическое выражение для этой характеристики в окрестности рабочей точки  $U_0 = 2 \text{ В}$ .

**#2.** Резонансный усилитель гармонических колебаний создан по схеме, приведённой на рис. 7.6. Характеристика транзистора аппроксимирована отрезками двух прямых:

$$i_k(U_{бэ}) = \begin{cases} 0, & U_{бэ} < 0,5 \text{ В;} \\ 0,2(U_{бэ} - 0,5 \text{ В}), \text{ А,} & U_{бэ} \geq 0,5 \text{ В.} \end{cases}$$

Резонансный контур имеет параметры:  $L = 100 \text{ мкГн}$ ,  $C = 10 \text{ нФ}$ ,  $Q_0 = 50$ .

Коэффициент включения контура  $k = 0,1$ .

Напряжение источника питания  $E = 12 \text{ В}$ .

Рабочая точка  $U_0 = 0,5 \text{ В}$ .

Найдите составляющие  $I_0$ ,  $I_1$ , и  $I_2$  коллекторного тока, если амплитуда входного напряжения равна  $2 \text{ В}$ .

**#3.** По условию задачи #2 найдите амплитуду напряжения выходного гармонического сигнала.

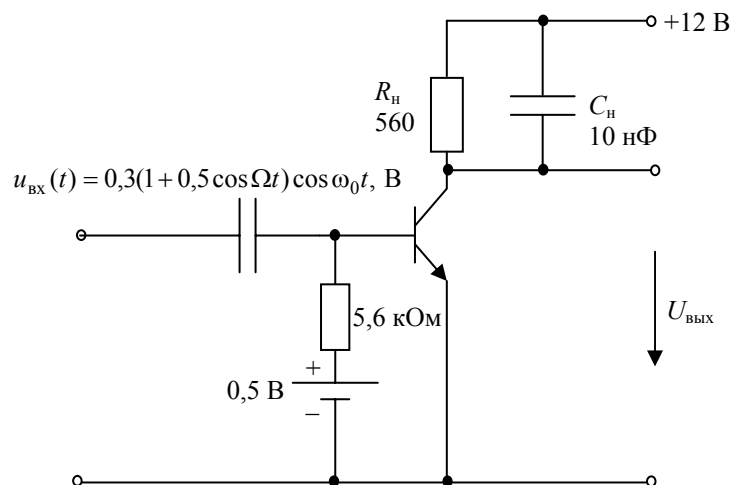
#4. По условию задачи #2 найдите амплитуду входного сигнала, при которой в усилителе возникает пере-напряжённый режим.

#5. В диодном детекторе применен диод с крутизной  $S = 10 \text{ mA/V}$ , сопротивление нагрузки  $R_H = 10 \text{ k}\Omega$ . На вход детектора подано напряжение  $U(t) = 5(1 + 0,6 \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \text{ В}$ .

Найдите амплитуду сигнала низкой частоты  $\Omega$  на выходе детектора.

#6. В задаче #5 выберите величину ёмкости фильтра  $C_H$ , если частота несущей  $500 \text{ кГц}$ , а максимальная частота модуляции  $F_{\max} = 10 \text{ кГц}$ .

#7. Найдите  $u_{\text{вых}}(t)$  в схеме коллекторного детектора.



Характеристику транзистора возьмите из задачи #2.

#8. В задаче #7 оцените величину максимальной частоты модуляции  $F_{\max}$ .

## 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В радиоэлектронике, наряду с линейными стационарными системами, широко используются линейные нестационарные системы. Это системы, в которых системный оператор зависит от времени

$$s_{\text{вых}}(t) = T(t)[s_{\text{вх}}(t)], \quad (8.1)$$

причем благодаря линейности системы сохраняется в силе принцип суперпозиции, т.е.

$$T(t)[\alpha_1 s_{\text{вх1}} + \alpha_2 s_{\text{вх2}}] = \alpha_1 T(t)s_{\text{вх1}} + \alpha_2 T(t)s_{\text{вх2}}.$$

Системы, описываемые равенством (8.1), обычно представляют собой цепь, содержащую элементы, параметры которых изменяются во времени по заданному закону. Поэтому такие системы в радиоэлектронике называют параметрическими цепями. В них находят применение следующие параметрические элементы: сопротивления  $R(t)$ , ёмкости  $C(t)$  и индуктивности  $L(t)$ .

Отличительная особенность параметрической цепи – наличие вспомогательного источника колебаний, управляющего параметрами цепи. Обычно это генератор с достаточно большой амплитудой колебаний, в то время как входной информационный сигнал имеет сравнительно малый уровень.

### 8.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В РЕЗИСТИВНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ

Параметрическую цепь называют резистивной, если её системный оператор имеет вид коэффициента пропорциональности  $K(t)$  между входным и выходным сигналами:

$$s_{\text{вых}}(t) = K(t)s_{\text{вх}}(t). \quad (8.2)$$

Простейшей системой такого вида служит параметрический резистор  $R(t)$ , связывающий мгновенное значение тока и напряжение

$$u(t) = R(t)i(t).$$

Здесь входным сигналом является ток, а выходным – напряжение. Однако чаще входным сигналом является напряжение, а выходным – ток. В этом случае параметрический резистивный элемент характеризуется проводимостью  $G(t)$ :

$$i(t) = G(t)u(t).$$

На практике в качестве такого элемента используют нелинейный безынерционный двухполюсник с ВАХ  $i = f(u)$ , на который подают сумму двух колебаний: управляющего напряжения  $u_y(t)$  и напряжения сигнала  $u_c(t)$ , причём  $u_y(t)$  имеет значительно большую амплитуду чем  $u_c(t)$ . Ток в нелинейном двухполюснике можно представить в виде разложения в ряд Тейлора относительно мгновенного значения управляющего напряжения:

$$i = i(u_y + u_c) = i(u_y) + i'(u_y)u_c + \frac{1}{2}i''(u_y)u_c^2 + \dots$$

Амплитуду сигнала выбирают столь малой, что в этом выражении можно пренебречь членами с  $u_c^2$ ,  $u_c^3$  и т.д.

Обозначив через  $i_c(t)$  приращение тока, вызванное наличием сигнала  $u_c(t)$ , получим

$$i_c(t) = i - i(u_y) \approx i'(u_y)u_c = S_{\text{диф}}[u_y(t)]u_c(t). \quad (8.3)$$

Здесь  $S_{\text{диф}}$  – дифференциальная крутизна ВАХ нелинейного элемента.

В качестве НЭ может быть использован  $p-n$  диод, биполярный транзистор, полевой транзистор и т.п.

### 8.1.1. Преобразование частоты

Преобразование частоты – это перенос спектра модулированного сигнала из окрестности несущей частоты  $\omega_c$  в окрестность некоторой промежуточной частоты  $\omega_{\text{пр}}$ , совершаемый без изменения закона модуляции.

Преобразователь частоты состоит из смесителя – параметрического НЭ, гетеродина – вспомогательного генератора с частотой  $\omega_r$ , служащего для управления крутизной  $S_{\text{диф}}$  смесителя, и полосового фильтра, настроенного на промежуточную частоту  $\omega_{\text{пр}}$  (рис. 8.1).

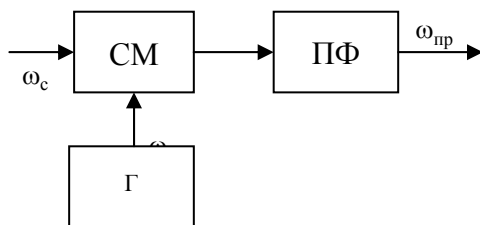


Рис. 8.1

Под действием напряжения гетеродина  $S_{\text{диф}}$  смесителя изменяется во времени по закону:

$$S_{\text{диф}}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_1 t + S_2 \cos 2\omega_2 t + \dots \quad (8.4)$$

Если на вход преобразователя подать малый сигнал

$$u_c(t) = U_c \cos \omega_c t,$$

то в соответствии с выражениями (8.3) и (8.4) в выходном токе появляется целый спектр частот:

$$i_c(t) = S_0 U_c \cos \omega_c t + \frac{1}{2} S_1 U_c \cos(\omega_r - \omega_c)t + \frac{1}{2} S_1 U_c \cos(\omega_r + \omega_c)t + \frac{1}{2} S_2 \cos(2\omega_r - \omega_c)t + \frac{1}{2} S_2 \cos(2\omega_r + \omega_c)t + \dots$$

В качестве промежуточной частоты принято выбирать частоту  $\omega_{пр} = [\omega_r - \omega_c]$ , ток на этой частоте

$$i_{пр}(t) = \frac{1}{2} S_1 U_c \cos \omega_{пр} t. \quad (8.5)$$

Полосовой фильтр (ПФ), настроенный на эту частоту, представляет высокий импеданс на частоте  $\omega_{пр}$  и низкий на всех остальных частотах составляющих выходного тока смесителя. В результате, на выходе преобразователя будет наблюдаться только напряжение промежуточной частоты

$$U_{вых}(t) = \frac{1}{2} S_1 U_c R_{ПФ}(\omega_{пр}) \cos \omega_{пр} t. \quad (8.6)$$

Эффективность работы преобразователя принято характеризовать величиной  $S_{пр} = \frac{1}{2} S_1$ , которая называется крутизной преобразования.

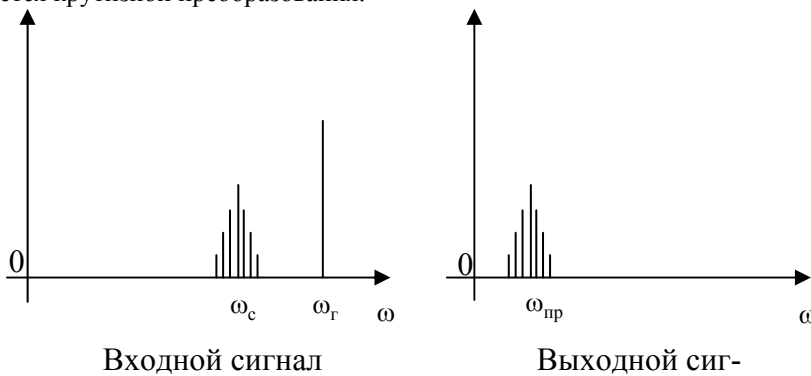


Рис. 8.2

Из выражения (8.6) легко понять, что если входной сигнал преобразователя представляет собой модулированное колебание, то выходной сигнал повторяет в точности тот же закон модуляции, осуществляя тем самым лишь перенос спектра входного сигнала в окрестность  $\omega_{пр}$  (рис. 8.2).

Преобразование частоты широко используется в супергетеродинных радиоприёмниках. Структурная схема такого приёмника изображена на рис. 8.3.

Приставка "супер" означает, что частота гетеродина в таком приёмнике выбирается выше частоты преобразуемого входного сигнала.

Сигнал, принятый антенной, проходит избирательную входную цепь и усилитель радиочастоты УРЧ и поступает на смеситель. Выходной сигнал смесителя подаётся на селективный усилитель промежуточной частоты (УПЧ), настроенный на частоту  $\omega_{пр} = \omega_r - \omega_c$ . Основное усиление приёмника и его частотная избирательность обеспечивается УПЧ. Главное достоинство супергетеродина – неизменность УПЧ;

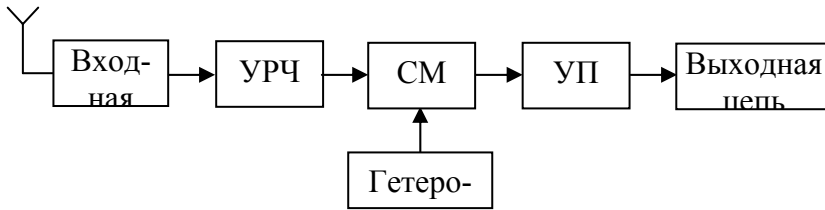


Рис. 8.3

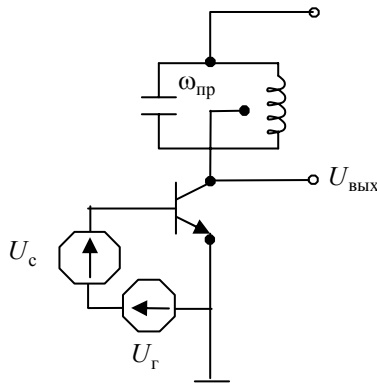


Рис. 8.4

для настройки приёмника на другую станцию необходимо перестроить лишь гетеродин и в некоторых случаях входную цепь и УРЧ. Важно отметить, что преобразователь частоты одинаково реагирует на сигналы с частотами  $\omega_{c1} = \omega_r - \omega_{пр}$  и  $\omega_{c2} = \omega_r + \omega_{пр}$ . В радиоэлектронике частота  $\omega_{c2} = \omega_r + \omega_{пр}$  называется зеркальным каналом. Во избежание приёма по зеркальному каналу требуется обеспечить такую избирательность цепей, включённых между антенной и преобразователем частоты, чтобы практически подавить сигналы зеркального канала. Схема преобразователя частоты на базе транзистора с ОЭ представлена на рис. 8.4.

Контур, включённый в коллекторную цепь транзистора, настроен на частоту  $\omega_{пр}$ .

В современной радиоэлектронике для преобразования частоты все шире применяются аналоговые перемножители. Если на входы перемножителя подать сигнал  $u_c(t) = U_c \cos \omega_c t$  и опорное напряжение гетеродина  $u_r(t) = U_r \cos \omega_r t$ , то выходное напряжение будет содержать две составляющие:

$$u_{\text{вых}}(t) = K u_c(t) u_r(t) = \frac{1}{2} K U_c U_r \cos(\omega_r - \omega_c)t + \frac{1}{2} K U_c U_r \cos(\omega_r + \omega_c)t.$$

Составляющая с разностной частотой  $\omega_{пр} = \omega_r - \omega_c$  выделяется полосовым фильтром и используется в качестве промежуточной частоты преобразованного сигнала.

### 8.1.2. СИНХРОННОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ

Синхронным детектором называют преобразователь частоты, работающий при условии  $\omega_c = \omega_r$ ; для выделения полезного сигнала на его выходе включают ФНЧ.

Предположим, что в преобразователе частоты гетеродин настроен на частоту  $\omega_c$ , поэтому  $S_{\text{диф}}$  изменяется во времени по закону

$$S_{\text{диф}}(t) = S_0 + S_1 \cos \omega_c t + S_2 \cos \omega_c t + \dots$$

**Подадим на вход преобразователя АМ-сигнал**

$$u_c(t) = U_{mc}(1 + m \cos \Omega t) \cos(\omega_c t + \varphi).$$

Выходной ток тогда будет иметь вид

$$i_{\text{вых}}(t) = S_{\text{диф}}(t) u_c(t) = U_{mc} (1 + m \cos \Omega t) \times \\ \times [S_0 \cos(\omega_c t + \varphi) + \frac{1}{2} S_1 \cos(2\omega_c t + \varphi) + \frac{1}{2} S_1 \cos \varphi + \dots].$$

Видно, что выходной ток имеет низкочастотную составляющую

$$i_{\text{нч}}(t) = \frac{1}{2} S_1 U_{mc} (1 + m \cos \Omega t) \cos \varphi,$$

которая пропорциональна переменной амплитуде АМ-сигнала.

Из последнего выражения видно, что результат детектирования существенно зависит от фазового соотношения  $\varphi$  между сигналом и гетеродином. В частности, при  $\varphi = 90^\circ$  полезный выходной сигнал просто отсутствует. Поэтому в системах с синхронным детектированием принимают специальные меры по фазировке сигнала и гетеродина.

Синхронное детектирование позволяет выделять слабые узкополосные сигналы на фоне сильных шумов. Это оказывается возможным благодаря тому, что синхронный детектор воспринимает только частоты, лежащие в полосе  $\omega_r \pm \Delta\omega_{\text{ФНЧ}}$ . Если выбрать частоту среза ФНЧ малой, то синхронный детектор будет эквивалентен селективному фильтру очень высокой добротности.

**#Пример:** Частота гетеродина  $f_r = 1$  МГц, частота среза ФНЧ  $F_{\text{верх}} = 10$  Гц.

Тогда полоса частот сигнала, воспринимаемая синхронным детектором, будет заключена между 999 990 Гц и 1 000 010 Гц, что эквивалентно селективному фильтру с добротностью

$$Q = \frac{1\,000\,000 \text{ Гц}}{20 \text{ Гц}} = 50\,000.$$

Реализовать такой фильтр иным способом, нежели синхронное детектирование, затруднительно даже с использованием кварцевых резонаторов.

При этом самое замечательное, что синхронный детектор легко перестраивается путём простого изменения частоты гетеродина, что совсем уж невозможно для обычных пассивных селективных фильтров.

## 8.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РЕАКТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Существенным недостатком резистивных параметрических цепей является то, что они имеют довольно высокий уровень собственных шумов. Это объясняется тем, что в них параметрический элемент в принципе должен работать при протекании тока, а это добавляет к известным тепловым (Найквистовским) шумам ещё и дробовые шумы используемого нелинейного элемента (диоды, транзисторы и пр.) В этом смысле большой интерес представляют параметрические реактивные элементы, у которых либо ёмкость  $C(t)$ , либо индуктивность  $L(t)$  переменны во времени. На практике получили распространение параметрические конденсаторы (варикапы), так как создать параметрическую индуктивность  $L(t)$  на радиочастотах не удаётся. Благодаря малым потерям в конденсаторе оказывается возможным создание параметрических устройств (преобразователи частоты, усилители и др.) с рекордно-низкими шумами.

Рассмотрим как можно осуществить преобразование частоты в параметрической цепи с варикапом.

Если на варикап подать только гетеродинное напряжение, то его ёмкость приближенно будет меняться по закону

$$C(t) = C_0 + C_1 \cos \omega_r t.$$

Если на варикап воздействует ещё и малый сигнал  $u_c(t) = U_c \cos \omega_c t$ , то заряд на ёмкости варикапа будет определяться выражением

$$q(t) = C(t) u_c(t) = (C_0 + C_1 \cos \omega_r t) U_c \cos \omega_c t = \\ = C_0 U_c \cos \omega_c t + 0,5 C_1 U_c \cos(\omega_r - \omega_c) t + 0,5 C_1 U_c \cos(\omega_r + \omega_c) t.$$

Ток, протекающий через варикап, будет равен

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega_c C_0 U_c \sin \omega_c t - 0,5(\omega_r - \omega_c) C_1 U_c \sin(\omega_r - \omega_c)t - 0,5(\omega_r + \omega_c) C_1 U_c \sin(\omega_r + \omega_c)t.$$

Включив последовательно с вариакпом резонансный контур, настроенный на частоту  $\omega_{np} = \omega_r - \omega_c$ , можно выделить желаемое напряжение преобразованного сигнала.

В параметрической ёмкостной цепи можно создать также параметрический генератор, усилитель мощности, множитель частоты. Общая идея этих устройств заключается в том, что изменяя ёмкость  $C(t)$  с помощью некоторого генератора, называемого генератором накачки, и выполняя при этом определённые условия синхронизации, можно осуществить перекачку энергии от генератора накачки на другие частоты. Для этого вариакп включают в многоконтурную резонансную цепь, которая предназначена для выделения определённых частот.

Обычно используют трехконтурную цепь, выделяющую три частоты:

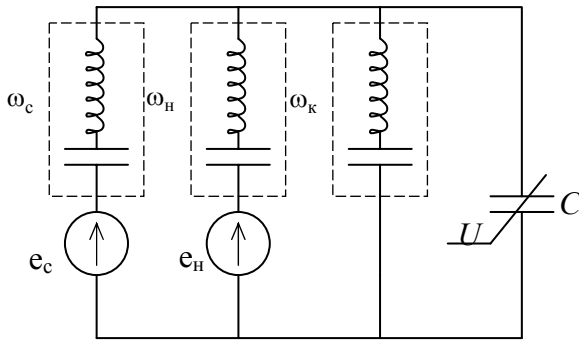
$\omega_c$  – частота сигнала;

$\omega_n$  – частота накачки;

$\omega_k = m\omega_c + n\omega_n$  – комбинационная частота. Здесь  $m, n$  – целые числа.

Общая схема такой цепи представлена на рис. 8.5.

Выходной сигнал снимается с нагрузки  $R$ , которая включается в зависимости от выбранного типа устройства либо в контур  $\omega_c$ , либо в контур  $\omega_k$ .



**Рис. 8.5**

Анализ энергетических процессов в схеме рис. 8.5 приводит к важным соотношениям для мощностей, которые называются уравнениями Мэнли-Роу:

$$\frac{P_c}{\omega_c} + \frac{mP_k}{m\omega_c + n\omega_n} = 0,$$

$$\frac{P_n}{\omega_n} + \frac{nP_k}{m\omega_c + n\omega_n} = 0. \quad (8.7)$$

Кроме этих соотношений из закона сохранения энергии следует, что  $P_c + P_n + P_k = 0$ .

В этих соотношениях мощность  $P$  считается положительной, если она выделяется в нагрузке, и отрицательной, если отдается генератором.

Рассмотрим два наиболее интересных случая:

**1. Параметрическое усиление с преобразованием частоты "вверх".**

Положив  $m = n = 1$ , будем иметь

$$\frac{P_c}{\omega_c} + \frac{P_k}{\omega_c + \omega_n} = 0,$$

$$\frac{P_n}{\omega_n} + \frac{P_k}{\omega_c + \omega_n} = 0.$$

Поскольку  $P_n < 0$  (контур накачки является источником энергии), то из второго уравнения следует, что  $P_k > 0$ , а тогда из первого получаем

$$P_c < 0.$$

В результате, и контур накачки и контур сигнала отдают свою энергию контуру  $\omega_k$  ( $\omega_k$  называют часто холостой частотой). Поместив нагрузку в контур  $\omega_k$ , получим усилитель мощности, так как из первого уравнения следует, что

$$\left| \frac{P_k}{P_c} \right| = \frac{\omega_c + \omega_n}{\omega_c}.$$

Таким образом, входной сигнал частоты  $\omega_c$  порождает на выходе усиленный сигнал на более высокой частоте  $\omega_k = \omega_c + \omega_n$ . Замечательно то, что такой усилитель обладает абсолютной устойчивостью: он не самовозбуждается ни при каких мощностях сигнала и накачки.

Недостаток же связан с тем, что частота выходного сигнала оказывается выше частоты входного, – в ряде случаев, например на СВЧ, это вызывает определённые трудности при дальнейшей обработке сигнала.

## 2. Регенеративное параметрическое усиление.

Выберем  $m = -1$ , а  $n = 1$ , т.е. частота настройки холостого контура  $\omega_k = \omega_n - \omega_c$ . Кроме того отметим, что  $\omega_n > \omega_c$ .

В этом случае уравнения Мэнли-Роу принимают вид

$$\frac{P_c}{\omega_c} - \frac{P_k}{\omega_n - \omega_c} = 0,$$

$$\frac{P_n}{\omega_n} + \frac{P_k}{\omega_n - \omega_c} = 0.$$

Так как  $P_n < 0$ , то из второго уравнения следует  $P_k > 0$ , а тогда из первого уравнения получаем, что

$$P_c > 0.$$

Таким образом, в данном режиме положительными оказываются обе мощности  $P_c$  и  $P_k$ , а это означает, что некоторая часть мощности, отбираемой от генератора накачки, поступает в сигнальный контур, т.е. в системе наблюдается регенерация на частоте сигнала. Выходную мощность можно извлечь как из сигнального, так и из холостого контура.

Уравнения Мэнли-Роу не дают возможности определить коэффициент усиления регенеративного усилителя, поскольку мощность  $P_c$  содержит в себе как часть, потребляемую от источника входного сигнала, так и часть, отбираемую от источника накачки. Математически действие накачки в таком усилителе эквивалентно внесению в контур сигнала  $\omega_c$  некоторого отрицательного сопротивления, величина которого пропорциональна мощности накачки. При увеличении  $P_n$  до некоторого критического уровня отрицательное сопротивление, вносимое в контур  $\omega_c$ , полностью компенсирует сопротивление собственных потерь контура и происходит самовозбуждение усилителя. Учитывая эту склонность регенеративного усилителя к самовозбуждению, коэффициент усиления такого усилителя редко делают больше чем 20 дБ, так как чем выше коэффициент усиления, тем ближе усилитель к границе генерации.

Самое замечательное свойство параметрических усилителей – чрезвычайно низкий уровень собственных шумов. Поэтому такие усилители обычно используют как УРЧ, включая их между антенной и смесителем, что позволяет ослабить влияние шумов смесителя, уровень которых заметно выше чем у других каскадов приемного тракта.

## 8.3. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Параметрическая проводимость изменяется во времени по закону

$$G(t) = 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} \cos(2\pi \cdot 10^6 t) + 3 \cdot 10^{-4} \cos(4\pi \cdot 10^6 t), \text{ См.}$$

К данному элементу приложено напряжение

$$u(t) = 0,5 \cos(2\pi \cdot 10^5 t), \text{ В.}$$



Найдите амплитуды и частоты всех составляющих тока. Постройте спектральную диаграмму тока.

#2. Безинерционный НЭ преобразователя частоты имеет ВАХ вида

$$i(u) = 5 + 2,5u + 1,5u^2, \text{ мА.}$$

К элементу приложено напряжение гетеродина

$$u_r(t) = 3 + 0,5 \cos \omega_r t, \text{ В.}$$

Напишите выражение для зависимости дифференциальной крутизны от времени. Вычислите крутизну преобразования.

#3. В преобразователе частоты применён транзистор с характеристикой

$$i_k = \begin{cases} 0, & u_{\text{бэ}} < 0,5 \text{ В;} \\ 20(u_{\text{бэ}} - 0,5), \text{ мА,} & u_{\text{бэ}} \geq 0,5 \text{ В.} \end{cases}$$

К базе приложено напряжение гетеродина

$$u_r(t) = 0,5 + 0,7 \cos \omega_r t, \text{ В.}$$

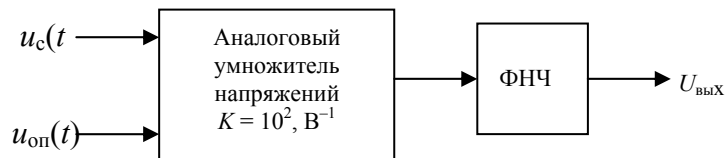
Вычислите крутизну преобразования.

#4. На схему синхронного детектора подано напряжение сигнала

$$u_c(t) = 10 \cos \left( 2\pi \cdot 10^6 t + \frac{\pi}{4} \right), \text{ мкВ}$$

и опорное напряжение

$$u_{\text{оп}}(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 10^6 t), \text{ В.}$$



Найдите выходное напряжение детектора.

## 9. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

В последние десятилетия широкое развитие получила статистическая теория связи. Это раздел радиоэлектроники, который занимается изучением явлений при передаче сообщений в условиях, когда детерминированное описание сигналов принципиально невозможно и приходится прибегнуть к их вероятностному (статистическому) описанию. Статистическая теория связи занимается случайными сигналами, т.е. такими сигналами, мгновенное значение которых заранее не предсказуемо. Однако, ряд характеристик случайных сигналов весьма точно описывается в вероятностном смысле. В основе такого описания лежит понятие случайного процесса.

### 9.1. СЛУЧАЙНЫЙ ПРОЦЕСС

Случайный процесс  $X(t)$  – это особого вида функция, характеризующаяся тем, что в любой момент времени  $t$  принимаемые ею значения являются случайными величинами. Наблюдая экспериментально мгновенные значения случайного процесса на определенном промежутке времени, получим отдельную реализацию случайного процесса. Бесконечная совокупность таких реализаций  $\{x_1(t), x_2(t), \dots\}$  называется статистическим ансамблем. Этот ансамбль и задает рассматриваемый случайный процесс.

Выберем некоторый момент времени  $t_1$ . Совокупность мгновенных значений всех реализаций ансамбля в рассматриваемый момент времени  $\{x_1(t_1), x_2(t_1), \dots\}$  даёт случайную величину  $X(t_1)$ , называемую сечением случайного процесса. Её плотность вероятности  $p(x, t_1)$  называют одномерной плотностью вероятности случайного процесса  $X(t)$  в момент времени  $t_1$ . Согласно определению, величина  $P = p(x, t_1) dx$  есть вероятность того, что реализация случайного процесса в момент времени  $t_1$  примет значения, лежащие в интервале  $(x, x + dx)$ .

Одного сечения оказывается не достаточным для анализа развития случайного процесса во времени. Рассматривая два сечения в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , приходим к двумерной случайной величине  $\{X(t_1), X(t_2)\}$ , которая описывается двумерной плотностью вероятности  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$ .

Эта характеристика позволяет оценить вероятность события, заключающегося в том, что реализация случайного процесса при  $t = t_1$  пройдет в окрестности точки  $x_1$ , а при  $t = t_2$  – в окрестности точки  $x_2$ . Ещё более полное описание случайного процесса получается при рассмотрении  $n$ -мерного сечения, которое приводит к  $n$ -мерной плотности вероятности  $p(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n)$ . Однако такое описание на практике никогда не используется. Обычно рассматривают не более двух сечений случайного процесса, причем вместо двумерной плотности вероятности  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$  пользуются тремя числовыми характеристиками, или моментами, случайного процесса: математическим ожиданием (момент 1-го порядка) дисперсией (момент 2-го порядка) и функцией корреляции (центральный двумерный момент).

#### Математическое ожидание

$$m(t) = \overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t) dx \quad (9.1)$$

есть среднее значение случайного процесса в момент времени  $t$ , полученное усреднением по всему ансамблю реализаций.

Дисперсия

$$\sigma^2(t) = \overline{[x(t) - m(t)]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m(t)]^2 p(x, t) dx \quad (9.2)$$

характеризует разброс мгновенных значений реализаций случайного процесса относительно среднего значения.

Величина  $\sigma(t)$  называется среднеквадратичным отклонением и имеет физический смысл – это действующее значение напряжения или тока на единичном сопротивлении.

Функция корреляции

$$R(t_1, t_2) = \overline{[x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)]} =$$

$$= \int \int_{-\infty}^{\infty} [x(t_1) - m(t_1)][x(t_2) - m(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (9.3)$$

Эта функция характеризует степень статистической связи между значениями случайного процесса в сечениях  $t_1$  и  $t_2$ . При совмещении сечений  $t_1$  и  $t_2$  функция корреляции численно равна дисперсии

$$R(t, t) = \sigma^2(t).$$

Анализ случайного процесса существенно упрощается, если этот процесс стационарен.

Стационарными называют случайные процессы, статистические характеристики которых не изменяются во времени. На практике обычно считают случайный процесс стационарным, если его математическое ожидание  $m$  и дисперсия  $\sigma^2$  не зависят от времени, а функция корреляции зависит лишь от разности времен

$$\tau = |t_2 - t_1|, \text{ т.е. } R(t_1, t_2) = R(\tau).$$

Из определения стационарности следуют два важных свойства функции корреляции:

$$R(\tau) = R(-\tau),$$

$$|R(\tau)| \leq R(0) = \sigma^2.$$

**#Пример 1.** Случайный процесс  $U(t)$  образован реализациями вида  $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где амплитуда  $U_m$  и частота  $\omega_0$  – известные параметры, а фаза  $\varphi$  – случайная величина, которая равномерно распределяется на отрезке  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ .

Найти числовые характеристики данного случайного процесса и определить, является ли он стационарным?

*Решение.* Ясно, что плотность вероятности фазы  $\varphi$   $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ . Тогда математическое ожидание

$$\bar{u} = \overline{U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{U_m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = 0.$$

#### Дисперсия

$$\sigma^2 = \overline{[u - \bar{u}]^2} = \overline{U_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \frac{U_m^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{U_m^2}{2}.$$

#### Функция корреляции

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \overline{U_m^2 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi) \cos(\omega_0 t_2 + \varphi)} = \\ &= \frac{U_m^2}{2} \{ \overline{\cos[\omega_0(t_1 + t_2) + 2\varphi]} + \overline{\cos \omega_0(t_2 - t_1)} \} = \frac{U_m^2}{2} \cos \omega_0(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Итак, все искомые характеристики не зависят от времени, а значит заданный случайный процесс является стационарным.

подавляющее большинство стационарных случайных процессов обладает свойством эргодичности, при котором усреднение по ансамблю реализаций можно заменить усреднением по времени одной реализации  $x(t)$  в пределах бесконечно длительного интервала  $T$ . Тогда для эргодического случайного процесса

$$m = \langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (9.4)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени.

Точно так же

$$\sigma^2 = \overline{[x(t) - m]^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - m]^2 dt = \overline{x^2(t)} - m^2, \quad (9.5)$$

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \overline{[x(t) - m][x(t + \tau) - m]} = \overline{x(t)x(t + \tau)} - m^2 = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int x(t)x(t + \tau) dt - m^2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Одним из наиболее часто встречающихся в радиоэлектронике случайных процессов является стационарный гауссовский процесс. Его одномерная плотность распределения вероятности подчиняется нормальному закону:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением стационарных случайных процессов с нулевым математическим ожиданием  $m = 0$ , так как прохождение постоянной составляющей сигнала через радиотехнические цепи может быть рассмотрено методами анализа детерминированных сигналов.

## 9.2. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим стационарный случайный процесс  $X(t)$  с нулевым математическим ожиданием  $m = 0$ .

Отдельно взятая реализация этого процесса есть детерминированная функция, которую можно представить в виде преобразования Фурье.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где  $S_x(\omega)$  – спектральная плотность реализации  $x(t)$ .

Если учесть весь ансамбль реализаций, образующих случайный процесс  $X(t)$ , приходим к выводу, что  $S_x(\omega)$  есть величина случайная.

Оценим её статистические свойства. Для этого усредним мгновенные значения сигналов  $x(t)$  по ансамблю реализаций:

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega)} e^{j\omega t} dt. \quad (9.7)$$

Вспомним, что  $\overline{x(t)} = m = 0$ . Для того чтобы это равенство тождественно выполнялось при любом  $t$ , необходимо чтобы  $\overline{S_x(\omega)} = 0$ .

Итак, для стационарного случайного процесса

$$\overline{S_x(\omega)} = 0. \quad (9.8)$$

Вычислим теперь функцию корреляции

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \overline{x(t)x(t + \tau)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} e^{j(\omega - \omega')t} e^{j\omega\tau} d\omega d\omega' = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega) S_x^*(\omega')} e^{j(\omega - \omega')t} d\omega'. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Для стационарного случайного процесса  $R(\tau)$  не зависит от  $t$ . Для того чтобы это выполнялось, нужно в последнем выражении потребовать, чтобы  $\overline{S_x(\omega)S_x^*(\omega')} = A\delta(\omega - \omega')$ .

Коэффициент пропорциональности  $A$  записывают в виде  $A = 2\pi W_x(\omega)$ .

Величина  $W_x(\omega)$  называется спектральной плотностью мощности случайного процесса  $X(t)$  или, более коротко, спектром мощности процесса  $X(t)$ . Итак, для стационарного случайного процесса

$$\overline{S_x(\omega)S_x^*(\omega')} = 2\pi W_x(\omega)\delta(\omega - \omega'). \quad (9.10)$$

Таким образом, случайная спектральная плотность  $S_x(\omega)$  стационарного случайного процесса имеет специфическую структуру: её значения, относящиеся к несовпадающим частотам, не коррелированы между собой. В то же время дисперсия случайной спектральной плотности неограниченно велика на любой частоте.

Подставив (9.10) в (9.9), получим

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (9.11)$$

Имеет место и обратное преобразование:

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9.12)$$

Формулы (9.11) и (9.12) составляют содержание теоремы Винера-Хинчина, играющей фундаментальную роль в радиоэлектронике: спектр мощности и функция корреляции стационарного случайного процесса связаны между собой преобразованием Фурье. Физический смысл спектра мощности  $W_x(\omega)$  легко выяснить, если положить  $\tau = 0$ :

$$R_x(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) d\omega. \quad (9.13)$$

Итак, дисперсия  $\sigma_x^2$ , равная средней мощности флуктуаций стационарного случайного процесса, пропорциональна площади под кривой спектра мощности  $W_x(\omega)$ . Так как  $R_x(\tau)$  является четной функцией, формулы Винера-Хинчина (9.11) и (9.12) можно записать, используя лишь интегралы в положительной области:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega; \quad (9.14)$$

$$W_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (9.15)$$

Целесообразно ввести так называемый односторонний спектр мощности, определив его так:

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0; \\ \frac{W(\omega)}{\pi}, & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Функция  $F(\omega)$  позволяет вычислить дисперсию стационарного случайного процесса путём интегрирования по положительным (физическим) частотам:

$$\sigma^2 = R(0) = \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (9.16)$$

Заменим в последнем выражении интегрирование по  $\omega$  на интегрирование по  $f$ :

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} F(2\pi f) d(2\pi f) = \int_0^{\infty} \frac{W(2\pi f)}{\pi} 2\pi df = \int_0^{\infty} 2W(2\pi f) df .$$

Величина  $N(f) = 2W(2\pi f)$  очень часто используется в технических расчётах.  $N(f)$  представляет собой среднюю мощность случайного процесса, приходящуюся на интервал частот шириной 1 Гц. При этом

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} N(f) df . \quad (9.17)$$

Если случайный процесс  $X(t)$  имеет размерность напряжения В, то односторонний спектр мощности  $N(f)$  имеет размерность В<sup>2</sup>/Гц.

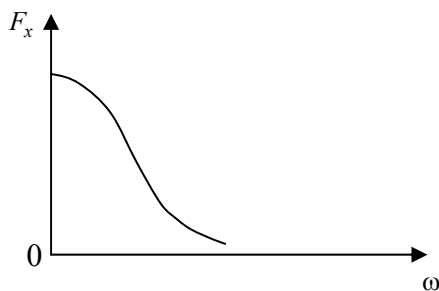
**# Пример 2.** Пусть процесс  $X(t)$  имеет функцию корреляции вида  $R_x(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha |\tau|)$ , причём,  $\alpha > 0$ . Найти спектр мощности  $W_x(\omega)$ .

*Решение.*

$$W_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 2\sigma^2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \omega \tau d\tau = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2} .$$

Односторонний спектр мощности

$$F_x(\omega) = \frac{W_x(\omega)}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2} .$$



**Рис. 9.1**

График функции  $F_x(\omega)$  представлен на рис. 9.1.

Видно, что спектр мощности этого случайного процесса имеет выраженный низкочастотный характер – его максимум наблюдается на нулевой частоте.

**# Пример 3.** Пусть случайный процесс  $X(t)$  имеет спектр мощности гауссовского типа

$$W_x(\omega) = W_0 \exp(-\beta\omega^2) .$$

Найти его функцию корреляции и дисперсию.

*Решение.*

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\beta\omega^2} \cos \omega \tau d\omega = \frac{W_0}{2\sqrt{\pi\beta}} \exp[-\tau^2/(4\beta)] .$$

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = \frac{W_0}{2\sqrt{\pi\beta}} .$$

**# Пример 4.** Пусть случайный процесс  $X(t)$  имеет равномерный спектр мощности в полосе частот  $(-\omega_B, \omega_B)$ , т.е.

$$W_x(\omega) = \begin{cases} W_0 & \text{при } -\omega_B \leq \omega \leq \omega_B; \\ 0 & \text{вне этой полосы.} \end{cases}$$

Найти функцию корреляции  $R_x(\tau)$ .

Решение.

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} W_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega_B} \cos \omega \tau d\omega = \frac{W_0 \omega_B}{\pi} \frac{\sin \omega_B \tau}{\omega_B \tau}.$$

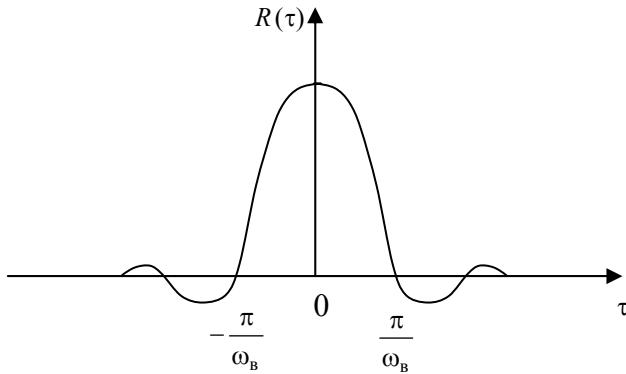


Рис. 9.2

Вид этой функции представлен на рис. 9.2.

Рассмотренные примеры отражают известный факт: чем шире спектр случайного процесса, тем быстрее затухает функция корреляции  $R_x(\tau)$  при увеличении  $\tau$ , а значит тем меньшей оказывается статистическая связь между мгновенными значениями случайного процесса в текущий и в будущий моменты времени.

Числовой характеристикой скорости убывания этой связи является интервал корреляции  $\tau_k$ , определяемый выражением

$$\tau_k = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} |R_x(\tau)| d\tau. \quad (9.18)$$

Смысл интервала корреляции поясняется на рис. 9.3.

Площади под обеими кривыми равны.

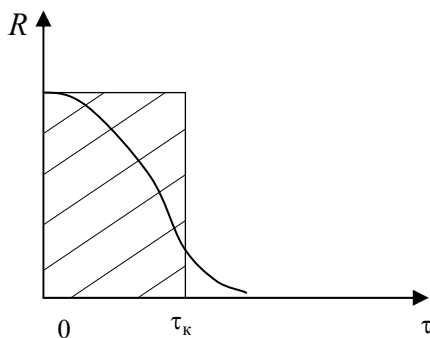


Рис. 9.3

Другой числовой характеристикой случайного процесса является эффективная ширина спектра  $\Delta\omega_{\text{эфф}}$ .

Пусть  $F(\omega)$  – односторонний спектр мощности случайного процесса, причем  $F_{\text{max}}$  – экстремальное значение этой функции. Тогда

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{F_{\text{max}}} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega. \quad (9.19)$$

Этой характеристикой часто пользуются для инженерной оценки дисперсии шумового сигнала:

$$\sigma^2 = F_{\max} \Delta\omega_{\text{эфф}}.$$

Эффективная ширина спектра  $\Delta\omega_{\text{эфф}}$  и интервал корреляции  $\tau_k$  случайного процесса связаны между собой соотношением неопределенности: произведение  $\Delta\omega_{\text{эфф}} \tau_k$  имеет порядок единицы.

Реализации некоторых стационарных случайных процессов имеют вид квазипериодических колебаний. Для таких процессов используют понятие квазичастоты, под которой понимают среднее число пересечений нулевого уровня. Для гауссовского процесса получено аналитическое выражение для квазичастоты

$$n(0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x} \left[ \int_0^\infty \omega^2 F_x(\omega) d\omega \right]^{1/2}. \quad (9.20)$$

**# Пример 5.** Оценить квазичастоту стационарного гауссовского процесса с ограниченным равномерным спектром из примера 4.

*Решение.*

$$\int_0^\infty \omega^2 F_x(\omega) d\omega = F_0 \int_0^{\omega_B} \omega^2 d\omega = \frac{F_0 \omega_B^3}{3}, \quad \sigma_x = \sqrt{\int_0^\infty F_x(\omega) d\omega} = \sqrt{F_0 \omega_B}.$$

Здесь  $F_0 = \frac{W_0}{\pi}$ . Тогда

$$n(0) = \frac{\omega_B}{2\pi\sqrt{3}} = \frac{f_B}{\sqrt{3}}.$$

### 9.3. УЗКОПОЛОСНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

В радиотехнике очень важную роль играют случайные процессы, спектр мощности которых имеет резко выраженный максимум вблизи некоторой частоты  $\omega_0$  (рис. 9.4).

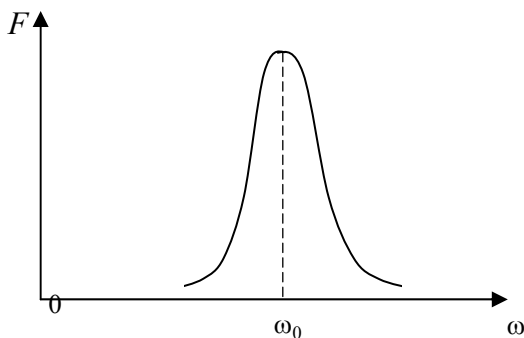


Рис. 9.4

По теореме Винера-Хинчина функция корреляции

$$R(\tau) = \int_0^\infty F(\omega) \cos \omega \tau d\omega.$$

Анализ этого интеграла с учётом узкой полосы спектра мощности рис. 9.4 приводит к выражению

$$R(\tau) = a(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad (9.21)$$



где  $a(\tau)$  – медленно меняющаяся огибающая (рис. 9.5).

Такой вид функции корреляции свидетельствует о том, что отдельные реализации узкополосного случайного процесса представляют собой квазигармонические колебания

$$x(t) = U(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)], \quad (9.22)$$

у которых огибающая  $U(t)$  и начальная фаза  $\varphi(t)$  являются случайными функциями, медленно меняющимися во времени по сравнению с  $\omega_0 t$  (рис. 9.6).

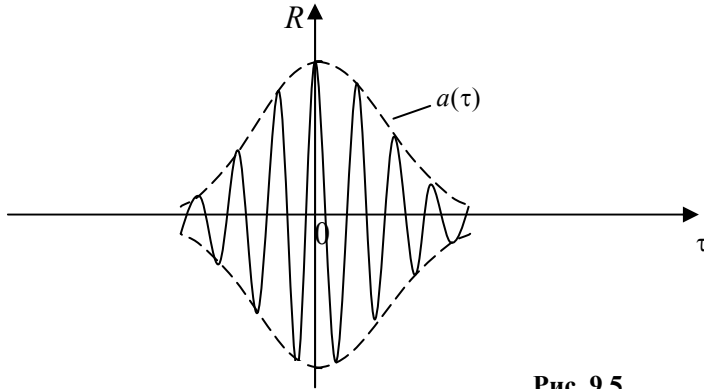


Рис. 9.5

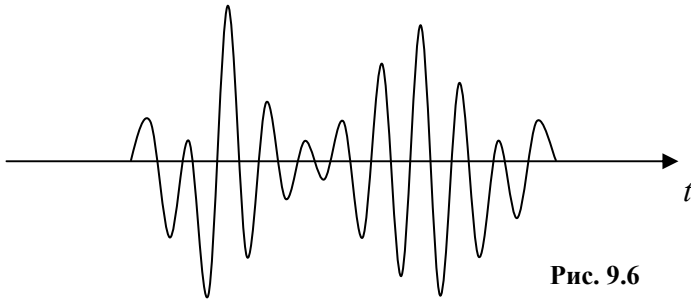
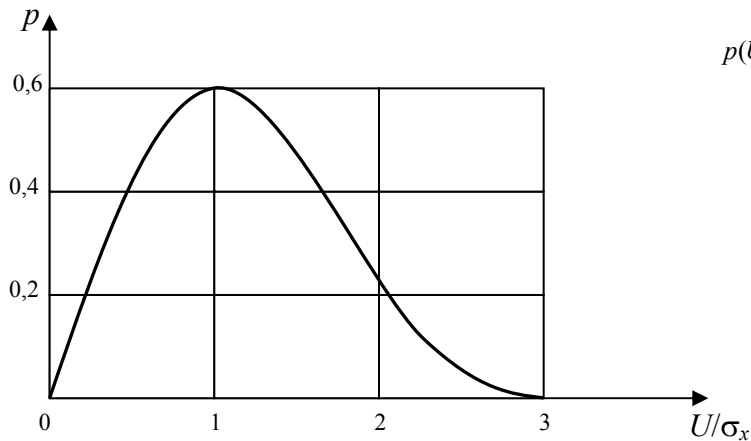


Рис. 9.6

На практике чаще всего приходится иметь дело с гауссовскими случайными процессами. Для узкополосного гауссовского процесса удаётся показать, что в выражении (9.22) случайная фаза  $\varphi(t)$  имеет равномерное распределение на участке  $[0, 2\pi]$  с плотностью

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi},$$

а случайная амплитуда  $U(t)$  подчинена так называемому закону Рэлея:



$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} \exp\left[-\frac{U^2}{2\sigma_x^2}\right]. \quad (9.23)$$

Рис. 9.7

График плотности вероятности распределения Рэлея представлен на рис. 9.7.

Проводя усреднение с помощью плотности вероятности (9.23), находим среднее значение огибающей квази-гармонического колебания (9.22)

$$m_u = \bar{U} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma_x^2 = 1,253 \sigma_x$$

и её дисперсию

$$\sigma_u^2 = \bar{U}^2 - (\bar{U})^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma_x^2 = 0,429 \sigma_x^2.$$

В радиотехнике большой интерес представляет анализ статистических свойств суммы гармонического сигнала  $U_m \cos \omega_0 t$  и узкополосного нормального (гауссовского) шума с дисперсией  $\sigma_x^2$ .

Именно этот случай имеет место на выходе некоторого частотно-избирательного устройства, например, резонансного усилителя.

Такой случайный процесс также может быть описан выражением (9.22) с медленно изменяющимися огибающей  $U(t)$  и фазой  $\varphi(t)$ , однако огибающая при этом имеет иное распределение плотности вероятности:

$$p(U) = \frac{U}{\sigma_x^2} \exp\left[-(U^2 + U_m^2)/(2\sigma_x^2)\right] I_0(UU_m / \sigma_x^2), \quad (9.24)$$

где  $I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi} d\varphi$  – модифицированная функция Бесселя нулевого индекса.

Формула (9.24) выражает закон, получивший название закона Райса. Отметим, что при  $U_m = 0$ , т.е. в отсутствие детерминированного сигнала, закон Райса переходит в закон Рэлея.

На рисунке 9.8 представлены графики плотности вероятности случайной величины, распределённой по закону Райса при различных отношениях  $\alpha = U_m / \sigma_x$ .

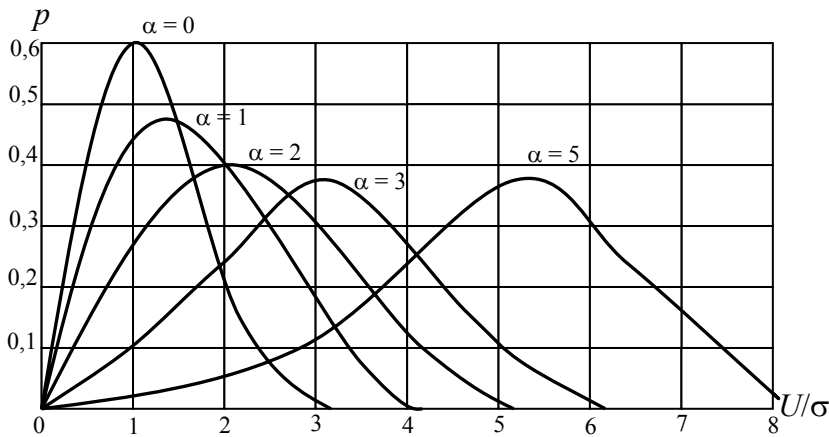


Рис. 9.8

Если амплитуда детерминированного сигнала  $U_m$  значительно превышает среднеквадратичный уровень шума  $\sigma_x$ , то вместо выражения (9.24) можно пользоваться асимптотически приближённым выражением

$$p(U) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(U - U_m)^2}{2\sigma_x^2}\right],$$

т.е. огибающая сигнала приобретает нормальный закон распределения с математическим ожиданием  $m_u = U_m$  и дисперсией  $\sigma_u^2 = \sigma_x^2$ .

Практически этим приближением можно пользоваться уже при  $U_m / \sigma_x = 3$ .

#### 9.4. ПРОХОЖДЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ЦЕПИ

Ограничимся рассмотрением стационарных входных случайных сигналов  $X(t)$  с нулевым математическим ожиданием, т.е.  $\overline{x(t)} = 0$ .

Рассмотрим отдельно взятую реализацию входного сигнала  $x(t)$  и представим её в виде интеграла Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Выходной сигнал, очевидно, может быть найден в соответствии с выражением

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

где  $K(j\omega)$  – частотный коэффициент передачи цепи.

Переходя от отдельной реализации к статистическому ансамблю всех реализаций, получим среднее значение выходного сигнала

$$\overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{S_x(\omega)} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega;$$

поскольку для стационарного случайного процесса  $\overline{S_x(\omega)} = 0$ , приходим к выводу, что

$$\overline{y(t)} = 0. \quad (9.25)$$

Спектр мощности выходного сигнала

$$W_y(\omega) = W_x(\omega) |K(j\omega)|^2, \quad (9.26)$$

где  $W_x(\omega)$  – спектр мощности входного случайного сигнала.

Тогда

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (9.27)$$

В инженерных расчётах используют обычно односторонний спектр мощности  $N(f)$ . Тогда соотношение (9.26) запишется так:

$$N_y(f) = N_x(f) |K(j2\pi f)|^2, \quad (9.28)$$

поэтому дисперсия выходного сигнала

$$\sigma_y^2 = R_y(0) = \int_0^{\infty} N_x(f) |K(j2\pi f)|^2 df. \quad (9.29)$$

**# Пример 6.** Источник шума с равномерным спектром мощности  $W_0$  (В·с) воздействует на интегрирующую RC-цепь.

Найти дисперсию и функцию корреляции выходного напряжения  $U(t)$ .

*Решение.* Коэффициент передачи этой цепи хорошо известен:

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

отсюда

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2(RC)^2}.$$

Тогда дисперсия шума на выходе

$$\sigma_u^2 = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2} = \frac{W_0}{\pi RC} \operatorname{arctg}(\omega RC) \Big|_0^{\infty} = \frac{W_0}{2RC}.$$

Функция корреляции выходного сигнала

$$R_u(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau} d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2} = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2} = \frac{W_0}{2RC} e^{-\frac{|\tau|}{RC}}.$$

Итак, белый шум, поданный на вход интегрирующей  $RC$ -цепи, порождает на выходе цепи случайный процесс с экспоненциальной функцией корреляции.

Его спектр мощности имеет низкочастотный характер:

$$W_u(\omega) = \frac{W_0}{1 + \omega^2(RC)^2}.$$

Найдём эффективную ширину спектра выходного шумового сигнала

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{F_{\max}} \int_0^{\infty} F(\omega) d\omega.$$

Здесь

$$F(\omega) = \frac{1}{\pi} W_k(\omega) = \frac{\frac{1}{\pi} W_0}{1 + \omega^2(RC)^2}, \quad F_{\max} = \frac{1}{\pi} W_0.$$

Тогда

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2(RC)^2} = \frac{1}{RC} \operatorname{arctg}(\omega RC) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2RC}.$$

Интересно отметить, что  $\Delta\omega_{\text{эфф}}$  в  $\frac{\pi}{2} = 1,57$  раз шире полосы пропускания  $RC$ -цепи на уровне 3 дБ, так как  $\omega_{\text{в}} RC$ -цепи равна  $1/RC$ .

Оценим теперь интервал корреляции этого сигнала:

$$\tau_k = \frac{1}{R(0)} \int_0^{\infty} |R_u(\tau)| d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau = RC.$$

Заметим, что  $\Delta\omega_{\text{эфф}}$  и  $\tau_k$  рассматриваемого сигнала связаны соотношением неопределённости

$$\Delta\omega_{\text{эфф}} \tau_k = \frac{\pi}{2RC} RC = \frac{\pi}{2}.$$

**# Пример 7.** Воздействие белого шума на резонансный усилитель.

Пусть белый шум с односторонним спектром мощности  $N_0$  ( $\text{В}^2/\text{Гц}$ ) воздействует на вход резонансного усилителя с коэффициентом передачи

$$K(j2\pi f) = \frac{K_{\text{рез}}}{1 + j2Q \frac{f - f_{\text{рез}}}{f_{\text{рез}}}} = \frac{K_{\text{рез}}}{1 + j2 \frac{f - f_{\text{рез}}}{\Delta f}},$$

где  $Q$  – добротность контура;  $f_{\text{рез}}$  – резонансная частота;  $\Delta f$  – полоса пропускания усилителя на уровне – 3дБ.

Требуется найти  $\sigma_{\text{вых}}^2$  и  $R_{\text{вых}}(\tau)$ .

*Решение.* Коэффициент передачи мощности

$$|K(j2\pi f)|^2 = \frac{K_{\text{рез}}^2}{1 + 4 \left( \frac{f - f_{\text{рез}}}{\Delta f} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2 &= \int_0^{\infty} N_0 |K(j2\pi f)|^2 df = \\ &= N_0 K_{\text{рез}}^2 \int_0^{\infty} \frac{df}{1 + \left( \frac{2}{\Delta f} \right)^2 (f - f_{\text{рез}})^2} = N_0 K_{\text{рез}}^2 \int_{-f_{\text{рез}}}^{\infty} \frac{d\eta}{1 + \left( \frac{2}{\Delta f} \right)^2 \eta^2}, \end{aligned}$$

где  $\eta = f - f_{\text{рез}}$ .

Если контур имеет достаточно высокую добротность, то подынтегральная функция при приближении к нижнему пределу становится пренебрежимо малой, поэтому можно заменить нижний предел интегрирования на  $-\infty$ . Тогда

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = N_0 K_{\text{рез}}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{1 + \left( \frac{2}{\Delta f} \right)^2 \eta^2} = N_0 K_{\text{рез}}^2 \frac{\Delta f}{2} \arctg \left( \frac{2\eta}{\Delta f} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = N_0 \frac{\pi}{2} \Delta f K_{\text{рез}}^2.$$

Видно, что эффективная шумовая полоса усилителя

$$\Delta f_{\text{эфф. шума}} = \frac{\pi}{2} \Delta f.$$

Найдём функцию корреляции

$$R_{\text{вых}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\text{вх}}(\omega) |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega,$$

$$W_{\text{вх}}(\omega) = \frac{N_0}{2},$$

поэтому

$$\begin{aligned} R_{\text{вых}}(\tau) &= \frac{N_0}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0 K_{\text{рез}}^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\tau d\omega}{1 + \left( \frac{1}{\pi\Delta f} \right)^2 (\omega - \omega_{\text{рез}})^2} = \\ &= N_0 \frac{\pi}{2} \Delta f K_{\text{рез}}^2 \exp(-|\tau| \pi \Delta f) \cos(\omega_{\text{рез}} t). \end{aligned}$$

Такая функция корреляции, как мы уже видели, характерна для квазигармонического колебания со средней частотой  $f_{\text{рез}}$  и случайной фазой и амплитудой.

**Численный пример:**  $N_0 = 10^{-16}$  В<sup>2</sup>/Гц;  $K_{\text{рез}} = 33$ ;  $f_{\text{рез}} = 10$  МГц;  $Q = 100$ . Оценить эффективное напряжение шума на выходе усилителя.

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2 &= N_0 \frac{\pi}{2} \Delta f K_{\text{рез}}^2 = N_0 \frac{\pi}{2} \frac{f_{\text{рез}}}{Q} K_{\text{рез}}^2 = \\ &= 10^{-16} \text{ В}^2/\text{Гц} \cdot 1,57 \cdot 10^5 \text{ Гц} \cdot 33^2 = 1,57 \cdot 10^{-8} \text{ В}^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{\text{ВЫХ}} = \sqrt{1,57 \cdot 10^{-8}} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 0,13 \text{ мВ}.$$

## 9.5. ИСТОЧНИКИ ШУМОВ В РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВАХ

### 9.5.1. ТЕПЛОВЫЕ ШУМЫ РЕЗИСТОРОВ

В проводящих телах (резисторах) из-за хаотического теплового движения носителей заряда возникает шумовая разность потенциалов на внешних зажимах. Спектр этого шума оказывается настолько широким, что для его описания наиболее подходящей является модель белого шума.

Анализ показывает, что спектральная плотность мощности теплового шума резисторов

$$W_0 = 2kTR,$$

где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура;  $R$  – сопротивление резистора.

На практике пользуются односторонним спектром мощности

$$N_0 = 2W_0 = 4kTR, \text{ В}^2/\text{Гц}. \quad (9.30)$$

Это соотношение носит название формулы Найквиста. Величина  $N_0$  имеет простой физический смысл: это удельная дисперсия теплового шума резистора, приходящаяся на полосу частот в 1 Гц.

Например для резистора  $R = 1$  кОм при  $T = 300$  К величина  $N_0$  составит  $1,66 \cdot 10^{-17}$  В<sup>2</sup>/Гц, откуда удельное эффективное напряжение шума равно  $4,1 \cdot 10^{-9}$  В /  $\sqrt{\text{Гц}}$ .

### 9.5.2. ШУМЫ ПРИЁМНЫХ АНТЕНН

Источником шума в радиоэлектронном устройстве может быть приёмная антенна, которая улавливает шумы окружающего пространства. Этот шум также описывается формулой Найквиста

$$U_{\text{уд}}^2 = N_0 = 4kT_{\text{экв}}R_{\text{изл}}, \quad (9.31)$$

где  $R_{\text{изл}}$  – сопротивление излучения антенны;  $T_{\text{экв}}$  – эквивалентная температура окружающего пространства, которая зависит от ориентации антенны и наличия внешних источников шумового излучения.

Измерения показали, что "холодные" участки небесного свода имеют температуру всего лишь в несколько кельвинов. В то же время в направлении некоторых радиогалактик  $T$  может достигать  $10^4$  К.

### 9.5.3. ДРОБОВОЙ ШУМ

Еще одним источником шума в радиоэлектронике являются электронные приборы (диоды, транзисторы и т.п.), в которых протекает направленный ток  $I_0$ .

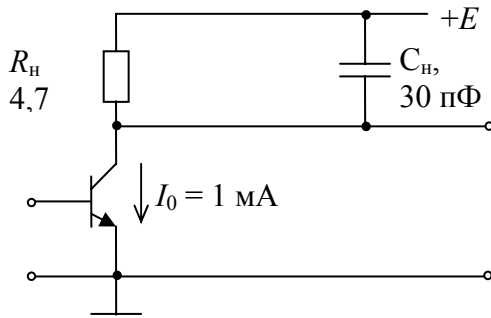
Этот шум возникает за счёт того, что ток  $I_0$  является усреднённой величиной, получаемой в процессе движения большого количества элементарных носителей заряда, каждый из которых создаёт малый импульс тока.

Статистический анализ процесса направленного переноса зарядов в электронных приборах приводит к известной формуле Шоттки для дисперсии флуктуационного тока (А<sup>2</sup>/Гц), приходящейся на полосу частот в 1 Гц:

$$N_0 = 2qI_0, \text{ А}^2/\text{Гц}, \quad (9.32)$$

где  $q$  – заряд электрона.

**# Пример 8.** Найти эффективное напряжение шума на выходе усилителя, обусловленное дробовым шумом транзистора.



Решение.

$$N_0 = 2qI_0 = 2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3} = 3,2 \cdot 10^{-22}, \text{ А}^2/\text{Гц}.$$

По формуле (9.29) найдём дисперсию выходного шумового напряжения

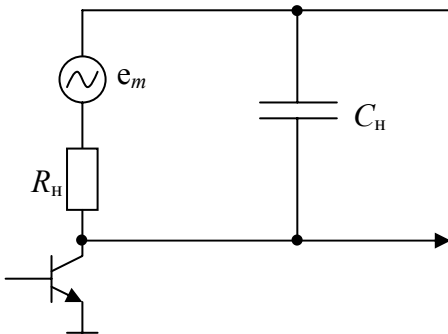
$$\begin{aligned} \sigma_u^2 &= \int_0^\infty N_0 |Z_n|^2 df = N_0 R_n^2 \int_0^\infty \frac{df}{1 + 4\pi^2 f^2 R_n^2 C_n} = \\ &= \frac{N_0 R_n}{2C_n} = \frac{3,2 \cdot 10^{-22} \cdot 4,7 \cdot 10^3}{4 \cdot 30 \cdot 10^{-12}} = 1,25 \cdot 10^{-8}, \text{ В}^2. \end{aligned}$$

Тогда эффективное напряжение шумов на выходе усилителя составит

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_u^2} = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 112 \text{ мкВ}.$$

**# Пример 9.** В примере #8 оценить выходной шум усилителя, создаваемый резистором  $R_n$ .

Решение. Эквивалентная схема для теплового шума имеет вид



Спектр мощности для шума  $N_0 = 4kTR_n$ , В<sup>2</sup>/Гц.

Воспользовавшись результатами примера #6, будем иметь

$$\sigma_{U,R}^2 = \frac{W_0}{2R_n C_n} = \frac{N_0}{4R_n C_n} = \frac{4kTR_n}{4R_n C_n} = \frac{kT}{C_n} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{30 \cdot 10^{-12}} = 1,38 \cdot 10^{-10}, \text{ В}^2,$$

отсюда

$$\sigma_{U,R} = \sqrt{\sigma_{U,R}^2} = 1,18 \cdot 10^{-5} \text{ В} = 11,8 \text{ мкВ}.$$

Можно видеть, что этот шум на порядок меньше дробового шума транзистора.

## 9.6. УПРАЖНЕНИЯ

#1. Найдите спектр мощности стационарного случайного процесса, если его функция корреляции

$$R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - |\tau|/t_0) & \text{при } |\tau| \leq t_0; \\ 0 & \text{при } |\tau| > t_0. \end{cases}$$

#2. Найдите односторонний спектр мощности  $N(f)$  для случайного процесса из задачи #1.

#3. Односторонний спектр мощности стационарного случайного процесса задан формулой

$$N(f) = N_0 e^{-\alpha f} \quad (\alpha > 0).$$

Найдите функцию корреляции и дисперсию процесса.

#4. Стационарный случайный процесс имеет эффективную ширину спектра, равную 20 кГц. Максимальное значение одностороннего спектра мощности  $N_{\max}$  составляет  $5 \cdot 10^{-13} \text{ В}^2/\text{Гц}$ .

Определите дисперсию процесса.

#5. Стационарный случайный процесс с односторонним спектром мощности

$$N(f) = \begin{cases} N_0 & \text{при } f \leq f_0, \\ 0 & \text{при } f > f_0 \end{cases}$$

подан на вход интегрирующей RC-цепи с верхней граничной частотой  $f_{\text{верх}} > f_0$ .

Найдите дисперсию выходного сигнала.

#6. В задаче #5 найдите дисперсию выходного сигнала, если  $f_{\text{верх}} = 0,5f_0$ .

#7. Стационарный случайный процесс с функцией корреляции

$$R(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$$

подан на вход идеального ФНЧ с характеристикой

$$K(j2\pi f) = \begin{cases} K_0 & \text{при } f < f_{\text{гр}}; \\ 0 & \text{при } f > f_{\text{гр}}. \end{cases}$$

Вычислите спектр мощности, функцию корреляции и дисперсию сигнала на выходе фильтра.

#8. На входе резонансного усилителя действует белый шум со значением  $N_0 = 10^{-15} \text{ В}^2/\text{Гц}$ . Параметры усилителя:  $K_{\text{рез}} = 50$ ;  $Q = 50$ ;  $f_{\text{рез}} = 20 \text{ МГц}$ .

Найдите эффективное напряжение шума на выходе усилителя.

#9. Резистор сопротивлением 10 кОм, находящийся при  $T = 300 \text{ К}$ , включен на вход идеального УНЧ с верхней граничной частотой  $f_{\text{верх}} = 12 \text{ кГц}$  и коэффициентом усиления  $K_0 = 10^4$ .

Определите эффективное напряжение шума, создаваемое этим резистором на выходе усилителя.



## 10. ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМА

Выделение полезного сигнала на фоне шума является основной задачей во многих областях радиоэлектроники. Для того чтобы обеспечить высокую помехоустойчивость систем передачи информации, идут двумя путями. Во-первых, стараются создать такие устройства для обработки принятой информации, которые наилучшим образом выделяют сигнал, искажённый присутствием помехи. Другой путь заключается в совершенствовании структуры передаваемых сигналов, использовании помехоустойчивых методов кодирования и модуляции (например, используют коды Баркера, ЛЧМ-сигналы и т.п.).

В этом модуле мы рассмотрим первый путь, т.е. создание устройств, обеспечивающих наилучшую фильтрацию полезных сигналов.

### 10.1. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ЧАСТОТНОГО ФИЛЬТРА

Общая идея заключается в том, чтобы попытаться так выбрать частотный коэффициент передачи фильтра  $K(j\omega)$ , что значения  $|K(j\omega)|$  были бы велики в области частот, где сконцентрирована основная доля энергии полезного сигнала, и малы там, где велика спектральная плотность шума. Тогда можно ожидать что на выходе такого фильтра удастся получить заметное увеличение относительной доли полезного сигнала.

Пусть на входе линейного фильтра присутствует сумма

$$s_{\text{вх}}(t) + n_{\text{вх}}(t),$$

где  $s_{\text{вх}}$  – полезный сигнал;  $n_{\text{вх}}$  – шум.

Относительный уровень сигнала характеризуют с помощью отношения сигнал/шум

$$C/\text{Ш} = \frac{\langle s_{\text{вх}}^2 \rangle}{\langle n_{\text{вх}}^2 \rangle} = \frac{\langle s_{\text{вх}}^2 \rangle}{\sigma_{n_{\text{вх}}}^2}. \quad (10.1)$$

Здесь  $\langle s_{\text{вх}}^2 \rangle$  – средняя мощность входного сигнала;  $\sigma_{n_{\text{вх}}}^2$  – дисперсия входного шума.

Отношение сигнал/шум часто выражают в децибелах:

$$C/\text{Ш}, \text{ дБ} = 10 \lg \frac{\langle s_{\text{вх}}^2 \rangle}{\sigma_{n_{\text{вх}}}^2}.$$

Линейный фильтр подчиняется принципу суперпозиции, поэтому сигнал и шум проходят через него независимо и создают на выходе сумму

$$s_{\text{вых}}(t) + n_{\text{вых}}(t),$$

которая так же может быть охарактеризована отношением сигнал/шум.

$$(C/\text{Ш})_{\text{вых}} = \frac{\langle s_{\text{вых}}^2 \rangle}{\sigma_{n_{\text{вых}}}^2}.$$

Если это отношение оказывается большим, нежели  $(C/\text{Ш})_{\text{вх}}$ , то говорят, что фильтр даёт выигрыш, величина которого оценивается так:

$$M_{\text{ф}} = \frac{(C/\text{Ш})_{\text{вых}}}{(C/\text{Ш})_{\text{вх}}}.$$

Пусть фильтр имеет частотный коэффициент передачи  $K(j\omega)$ .

**Рассмотрим случай, когда входной сигнал имеет дискретный спектр:**

$$s_{\text{вх}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k).$$

И пусть входной шум имеет односторонний спектр мощности  $F_n(\omega)$ . Тогда

$$\langle s_{\text{вх}}^2 \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \quad (\text{формула Рэлея}),$$

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = \int_0^{\infty} F_n(\omega) d\omega.$$

На выходе фильтра будем иметь

$$\langle s_{\text{вых}}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 |K(j\omega)|^2,$$

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \int_0^{\infty} F_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega.$$

Отношение сигнал/шум на выходе будет

$$(C/Ш)_{\text{вых}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 |K(j\omega)|^2}{\int_0^{\infty} F_n(\omega) |K(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (10.2)$$

Формула (10.2) позволяет, в принципе, зная спектр сигнала и шума, так подобрать АЧХ фильтра, чтобы получить ощутимое увеличение  $(C/Ш)_{\text{вых}}$ .

*Замечание:* Выражение (10.2) учитывает лишь энергетические соотношения на выходе фильтра, игнорируя фазовые сдвиги. Поэтому меры, повышающие отношение  $(C/Ш)$ , могут сопровождаться значительными искажениями формы полезного сигнала.

## 10.2. ОПТИМАЛЬНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ. СОГЛАСОВАННЫЙ ФИЛЬТР

Пусть известный входной сигнал  $s_{\text{вх}}(t)$  действует на входе линейного фильтра с импульсной характеристикой  $h(t)$ . Выходной отклик

$$s_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(\tau) h(t-\tau) d\tau.$$

Постараемся так выбрать функцию  $h(t)$ , чтобы в некоторый момент  $t_0$  величина  $|s_{\text{вых}}(t_0)|$  достигала максимально возможного значения. Такой фильтр называют согласованным с заданным входным сигналом или согласованным фильтром. Можно показать, что фильтр будет согласованным, если его импульсная характеристика представляет собой зеркальное отражение заданного входного сигнала относительно момента  $t_0$ :

$$h_{\text{согл}}(t) = k s_{\text{вх}}(t_0 - t), \quad (10.3)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности.

Принцип построения функции  $h_{\text{согл}}(t)$  поясняется на рис. 10.1, применительно к некоторому импульсному сигналу  $s_{\text{вх}}(t)$  длительностью  $\tau_n$ .

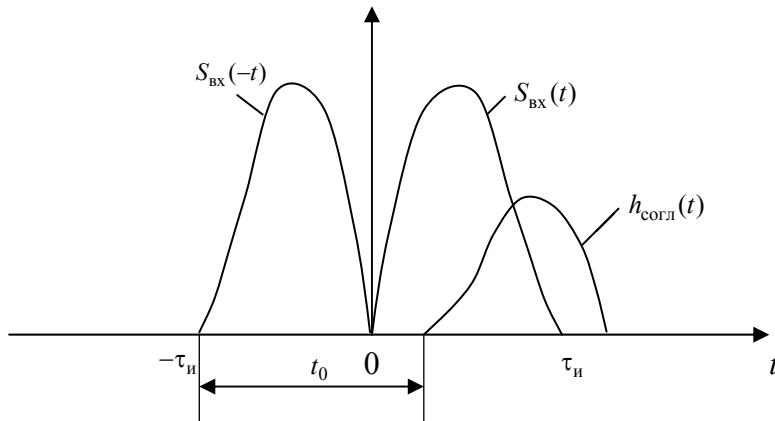


Рис. 10.1

Анализируя построение рис. 10.1, можно сформулировать необходимое условие физической реализуемости согласованного фильтра: промежуток времени  $t_0$  между началом импульса на входе и моментом достижения максимальной выходной реакции должен быть не менее длительности выделяемого импульса. В противном случае импульсная характеристика фильтра была бы отличной от нуля при  $t < 0$ , что физически не реализуемо.

Смысл этого условия ясен: для создания максимально возможного мгновенного сигнала на выходе согласованный фильтр должен предварительно провести обработку всего входного сигнала.

Сигнал на выходе согласованного фильтра отличается по форме, причем значительно, от входного сигнала. Анализ показывает, что выходной сигнал повторяет форму автокорреляционной функции входного сигнала, сдвинутой на отрезок  $t_0$ :

$$s_{\text{вых}}(t) = kB_s(t - t_0). \quad (10.4)$$

В момент времени  $t_0$  этот сигнал достигает максимального значения  $s_{\text{вых}}(t_0) = kB_s(0)$ .

Вспомним, что автокорреляционная функция  $B_s(\tau)$  при  $\tau = 0$  принимает значение  $E_s$  (энергия сигнала).

Тогда

$$s_{\text{вых}}(t_0) = kE_s,$$

т.е. максимальный отклик на выходе согласованного фильтра определяется энергией входного сигнала и не зависит от его формы.

Что касается ширины выходного импульса, то она определяется корреляционными свойствами входного сигнала. В этом смысле наибольший интерес представляют сигналы типа кода Баркера, обладающие узкой формой автокорреляционной функции. Поскольку импульсная характеристика и частотный коэффициент передачи линейной стационарной системы связаны между собой преобразованием Фурье, то для согласованного фильтра

$$K_{\text{согл}}(j\omega) = k \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t_0 - t) e^{-j\omega t} dt.$$

Отсюда легко получить следующее соотношение:

$$K_{\text{согл}}(j\omega) = kS_{\text{вх}}^*(\omega) e^{-j\omega t_0}, \quad (10.5)$$

где  $S_{\text{вх}}^*$  – комплексно-сопряжённое значение спектральной плотности входного сигнала.

Итак, частотный коэффициент передачи согласованного фильтра выражается через спектральную плотность полезного сигнала, для выделения которого этот фильтр предназначен. Значение момента времени  $t_0$  входит в выражение фазовой характеристики фильтра. При этом множитель  $e^{j\omega t_0}$  описывает смещение выходного отклика фильтра по оси времени на величину  $t_0$ .

Рассмотрим случай, когда на выходе согласованного фильтра действует полезный сигнал  $s_{\text{вх}}(t)$ , на который настроен фильтр, и белый гауссовский шум со спектральной плотностью  $W_0$ .

Дисперсия шума на выходе фильтра

$$\sigma_{n \text{ вых}}^2 = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_{\text{согл}}(j\omega)|^2 d\omega.$$

Подставив в это выражение  $K_{\text{согл}}(j\omega)$  из (10.5), будем иметь

$$\sigma_{n \text{ вых}}^2 = \frac{k^2 W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{вх}}(\omega) S_{\text{вх}}^*(\omega) d\omega = k^2 W_0 E_s.$$

В то же время  $s_{\text{вх}}$  в момент  $t_0$  достигает максимума

$$s_{\text{вх}}(t_0) = kB_s(0) = kE_s,$$

а мощность

$$s_{\text{вх}}^2(t_0) = k^2 E_s^2.$$

Тогда отношение сигнал/шум на выходе фильтра будет равно

$$(C/\text{Ш})_{\text{вых}} = \frac{s_{\text{вх}}^2(t_0)}{\sigma_{n \text{ вых}}^2} = \frac{E_s}{W_0}. \quad (10.6)$$

Поскольку числитель в этой формуле представляет собой предельно достигаемый отклик, ясно, что согласованная фильтрация обеспечивает максимально возможное отношение с/ш.

По этой причине согласованный фильтр является оптимальным фильтром, выделяющим известный сигнал из смеси с белым гауссовским шумом при максимально-возможном отношении сигнал/шум.

### 10.3. РЕАЛИЗАЦИЯ СОГЛАСОВАННЫХ ФИЛЬТРОВ

Выражения (10.3) и (10.5) говорят о том, что реализация согласованного фильтра заключается в синтезе линейной электрической цепи по заданной импульсной или частотной характеристике.

Рассмотрим, как это делается, на примере прямоугольного видеоимпульса.

Пусть

$$s_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U & \text{при } 0 \leq t \leq \tau_{\text{и}}; \\ 0 & \text{при } t > \tau_{\text{и}}. \end{cases}$$

Для реализации фильтра, согласованного с этим сигналом, найдём вначале его частотную характеристику. Прежде всего вычислим спектральную плотность входного сигнала

$$S_{\text{вх}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{вх}}(t) e^{-j\omega t} dt = U \int_0^{\tau_{\text{и}}} e^{-j\omega t} dt = \frac{U_0}{j\omega} (1 - e^{-j\omega \tau_{\text{и}}}).$$

Отсюда на основании выражения (10.5) найдём частотный коэффициент передачи согласованного фильтра, положив для конкретности  $t_0 = \tau_{\text{и}}$ , что соответствует достижению максимального отклика в момент окончания импульса:

$$K_{\text{согл}}(j\omega) = k \frac{1 - e^{j\omega\tau_n}}{-j\omega} e^{-j\omega\tau_n} = \frac{k}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau_n}).$$

Это выражение позволяет синтезировать согласованный фильтр. Действительно, фильтр должен представлять собой каскадное соединение трёх звеньев:

- масштабного усилителя с коэффициентом усиления  $k$ ;
- интегратора;
- устройства с коэффициентом передачи  $1 - e^{-j\omega\tau_n}$ .

Структурная схема согласованного фильтра представлена на рис. 10.2.

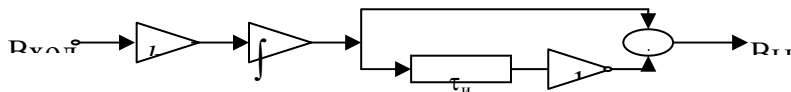


Рис. 10.2

На рисунке 10.3 представлена структурная схема согласованного фильтра для прямоугольного радиоимпульса вида

$$s_{\text{вх}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ U \sin \omega_0 t & \text{при } 0 < t \leq \tau_n; \\ 0 & \text{при } t > \tau_n. \end{cases}$$

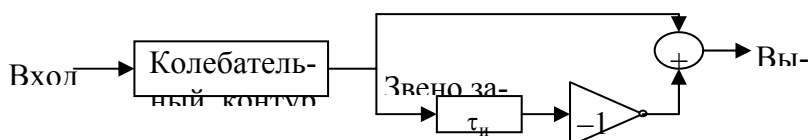


Рис. 10.3

В настоящее время разработаны схемы согласованных фильтров для сигналов Баркера, ЛЧМ-сигналов и других сигналов.

#### 10.4. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Согласованные фильтры являются оптимальными с точки зрения максимума отношения сигнал/шум, однако их строгая реализация зачастую приводит к слишком громоздким схемам. В то же время в ряде случаев можно существенно упростить схему фильтра при незначительном ухудшении отношения сигнал/шум по сравнению с оптимальным фильтром. Подобные фильтры называют квазиоптимальными.

Так, вместо согласованного фильтра рис. 10.2 для прямоугольного видеоимпульса можно использовать интегрирующую  $RC$ -цепь, подобрав определённым образом её постоянную времени  $RC$ .

Рассмотрим  $RC$ -цепь, на входе которой одновременно действуют белый шум со спектральной плотностью  $W_0$  и прямоугольный видеоимпульс с амплитудой  $U$  и длительностью  $\tau_n$ .

Полезный сигнал на выходе максимален в момент окончания импульса

$$s_{\text{вых.мах}} = U \left( 1 - e^{-\frac{\tau_n}{RC}} \right).$$

В то же время дисперсия шума на выходе  $RC$ -цепи (см. Модуль 9) равна

$$\sigma_{\text{вых}}^2 = \frac{W_0}{2RC}.$$

Тогда отношение  $(C/Ш)_{\text{вых}}$  в момент окончания импульса достигнет своего максимума:

$$(C/Ш)_{\text{вых. max}} = \frac{U^2 (1 - e^{-\tau_n / RC})^2}{W_0 / 2RC}.$$

Поскольку энергия видеоимпульса  $E_s = U^2 \tau_n$ , можем записать

$$(C/Ш)_{\text{вых. max}} = \frac{E_s (1 - e^{-\tau_n / RC})^2}{W_0 \tau_n / 2RC}.$$

Первый множитель в этом выражении задаёт отношение (с/ш), реализуемое согласованным фильтром (см. рис 10.2). Второй множитель оценивает проигрыш  $RC$ -цепи в отношении (С/Ш) по сравнению с согласованным фильтром. Простой анализ этого множителя показывает, что он достигает своего максимума при

$$\frac{\tau_n}{RC} = 1,25. \text{ Величина этого максимума равна } 0,814.$$

Таким образом, выбрав постоянную времени  $RC$ -фильтра из условия

$$RC = \frac{\tau_n}{1,25},$$

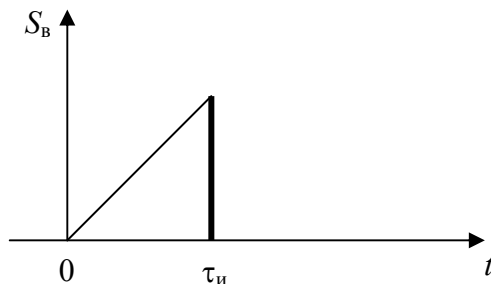
мы получим простой квазиоптимальный фильтр, который всего лишь на 20 % уступает согласованному фильтру в отношении сигнал/шум.

Для прямоугольного радиоимпульса с частотой заполнения  $\omega_0$  и длительностью  $\tau_n$ , как показывает анализ, в качестве квазиоптимального фильтра можно применить колебательный контур, настроенный на частоту  $\omega_0$  и имеющий полосу пропускания

$$\Delta f_{3 \text{ дБ}} = \frac{0,72}{\tau_n}.$$

## 10.5. УПРАЖНЕНИЯ

**#1.** Постройте импульсную характеристику фильтра, согласованного с входным сигналом



**#2.** На входе согласованного фильтра кроме полезного сигнала действует белый шум со спектральной плотностью  $N_0 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$ . Найдите минимальную энергию полезного сигнала, которая обеспечивает на выходе фильтра отношение сигнал/шум не хуже 3 дБ. Исследуйте полученное значение с точки зрения соотношения "амплитуда  $\times$  длительность" выделяемого сигнала.

**#3.** Разработайте схему квазиоптимального фильтра для выделения прямоугольных видеоимпульсов с длительностью 10 мкс.

**#4.** Оцените параметры  $LC$ -контра, используемого в качестве квазиоптимального фильтра для выделения прямоугольных радиоимпульсов с частотой заполнения 10 МГц и длительностью 10 мкс.

**#5.** Докажите, что если на вход согласованного фильтра подать тот сигнал, на который он был согласован, то сигнал на выходе фильтра повторит форму АКФ входного сигнала.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

---

Пособие "Радиотехнические цепи и сигналы" посвящено теоретическим основам радиотехники и в этом смысле призвано заложить прочный фундамент для дальнейшего усвоения студентами специальных радиотехнических дисциплин.

Современная теоретическая радиотехника добилась значительных успехов как в области анализа сигналов и устройств, так и в вопросах их синтеза. Этому во многом способствовало бурное развитие информационных технологий, появление таких программных систем как Micro-Cap, MultiSim, Microwave Office и др. Соответственно возросшей технической вооружённости расширился и круг решаемых ею задач. Пособие не ставит целью дать исчерпывающее изложение всех вопросов, относящихся к теоретической радиотехнике. Так, за пределами рассмотрения остались методы вейвлет-анализа, нелинейной фильтрации сигналов, компьютерного расчёта и моделирования радиотехнических цепей. Тем не менее, хочется надеяться, что, проработав материал данного пособия, студенты смогут самостоятельно пользоваться в дальнейшем научной литературой и успешно осваивать специальные дисциплины радиотехнического профиля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы : учебник для вузов / С.И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 2003.
2. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы : руководство к решению задач / С.И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 1987.
3. Иванов, М.Т. Теоретические основы радиотехники : учебное пособие / М.Т. Иванов, А.Б. Сергиенко, В.Н. Ушаков ; под ред. В.Н. Ушакова. – М. : Высшая школа, 2002.
4. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов : учебник для вузов / А.Б. Сергиенко. – 2-е изд. – СПб. : Питер, 2006.
5. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника / В.И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1982.
6. Дахнович, А.А. Дискретные системы и цифровая обработка сигналов : учебное пособие / А.А. Дахнович. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007.
7. Гаврилов, Л.П. Расчет и моделирование линейных электрических цепей с применением ПК : учебное пособие / Л.П. Гаврилов, Д.А. Соснин. – М. : Солон-Пресс, 2007.
8. Дьяконов, В.П. MATLAB 6 : учебный курс / В.П. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2002.
9. Новгородцев, А.Б. Расчёт электрических цепей в MATLAB : учебный курс / А.Б. Новгородцев. – СПб. : Питер, 2004.
10. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн ; пер. с англ. ; под ред. И.Г. Арамановича. – М. : Наука, 1970 и последующ. изд.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>1. РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ СИГНАЛЫ</b> .....	5
1.1. Классификация радиотехнических сигналов .....	6
1.2. Принцип суперпозиции в радиоэлектронике. Представление произвольного сигнала в виде суперпозиции элементарных сигналов .....	9
1.2.1. Принцип суперпозиции при анализе радиоэлектронных систем .....	10
1.2.2. Представление произвольного сигнала с помощью функций включения $\sigma(t - \tau)$ .....	13
1.2.3. Представление произвольного сигнала с помощью $\delta$ -функций $\delta(t - \tau)$ .....	13
1.2.4. Представление произвольного сигнала с помощью гармонических сигналов (спектральный анализ произвольного сигнала) .....	15
1.2.5. Представление произвольного сигнала с помощью обобщённых гармонических сигналов .....	26
1.3. Упражнения .....	29
<b>2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ   НА ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ</b> .....	31
2.1. Реакция линейной стационарной системы на элементарные сигналы .....	31
2.1.1. Воздействие на систему ступенчатого сигнала $\sigma(t)$ . Переходная характеристика системы .....	31
2.1.2. Воздействие на систему импульсного сигнала $\delta(t)$ . Импульсная характеристика системы .....	31
2.1.3. Воздействие на систему гармонического сигнала $e^{j\omega t}$ . Частотная характеристика системы .....	32
2.1.4. Воздействие на систему обобщённого гармонического сигнала $e^{pt}$ . Операторная передаточная функция системы .....	33
2.2. Методы нахождения переходной, импульсной, частотной и операторной характеристик линейной стационарной системы .....	34
2.2.1. Экспериментальный метод определения характеристик системы .....	34
2.2.2. Определение характеристик системы с помощью дифференциального уравнения, связывающего $s_{\text{вых}}(t)$ и $s_{\text{вх}}(t)$ .....	34
2.2.3. Определение характеристик радиотехнической цепи с помощью математического аппарата теории цепей .....	39
2.3. Нахождение сигнала на выходе линейной стационарной системы при воздействии на неё входного сигнала произвольной формы .....	40
2.3.1. Нахождение выходного сигнала с помощью переходной характеристики $g(t)$ .....	40
2.3.2. Нахождение выходного сигнала с помощью импульсной характеристики $h(t)$ .....	43

2.3.3. Нахождение выходного сигнала с помощью частотной характеристики $\dot{K}(j\omega)$ .....	45
2.3.4. Нахождение выходного сигнала с помощью операторной передаточной функции $K(p)$ .....	46
2.3.5. Сводная таблица для анализа прохождения сигналов через линейную стационарную цепь .....	47
2.4. Упражнения .....	50
<b>3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ</b> .....	<b>53</b>
3.1. Автокорреляционная функция сигнала .....	53
3.2. Автокорреляционная функция неограниченно протяжённого сигнала .....	56
3.3. Автокорреляционная функция дискретного сигнала .....	56
3.4. Взаимокорреляционная функция двух сигналов .....	60
3.5. Упражнения .....	62
<b>4. ФИЛЬТРЫ</b> .....	<b>63</b>
4.1. Фильтры нижних частот .....	64
4.2. Фильтры верхних частот .....	72
4.3. Полосовые фильтры .....	73
4.4. Упражнения .....	76
<b>5. ГЕНЕРАТОРЫ СИГНАЛОВ</b> .....	<b>78</b>
5.1. Генераторы гармонических сигналов .....	79
5.1.1. Трёхточечная схема с инвертирующим усилителем ( $K < 0$ ) .....	81
5.1.2. Трёхточечная схема с неинвертирующим усилителем ( $K > 0$ ) .....	84
5.1.3. Генератор гармонических колебаний с кварцевым резонатором .....	86
5.2. Релаксационные генераторы .....	88
5.3. Упражнения .....	93
<b>6. МОДУЛИРОВАННЫЕ СИГНАЛЫ</b> .....	<b>94</b>
6.1. Сигналы с амплитудной модуляцией .....	94
6.2. Сигналы с частотной модуляцией .....	97
6.3. Сигналы с фазовой модуляцией .....	99
6.4. Сигналы с импульсной модуляцией .....	100
6.5. Упражнения .....	102
<b>7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ</b> .....	<b>103</b>
7.1. Отклик нелинейной цепи на гармонический сигнал .....	105
7.1.1. Спектр тока в цепи с нелинейным элементом при степенной аппроксимации его вольтамперной характеристики .....	105
7.1.2. Спектр тока в цепи с нелинейным элементом при кусочно-линейной аппроксимации .....	107
7.2. Нелинейные резонансные усилители и умножители частоты .....	109
7.3. Получение модулированных колебаний .....	111
7.4. Детектирование модулированных сигналов .....	113
7.4.1. Детектирование АМ-сигналов .....	113

7.4.2. Детектирование ЧМ- и ФМ-сигналов .....	119
7.5. Упражнения .....	224
<b>8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ .....</b>	<b>126</b>
8.1. Преобразование сигналов в резистивной параметрической цепи .....	126
8.1.1. Преобразование частоты .....	127
8.1.2. Синхронное детектирование .....	131
8.2. Преобразование сигналов в цепи, содержащей параметрические реактивные элементы .....	132
8.3. Упражнения .....	136
<b>9. ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ НА ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ .....</b>	<b>138</b>
9.1. Случайный процесс .....	138
9.2. Спектральное представление стационарных случайных процессов .....	141
9.3. Узкополосные случайные процессы .....	148
9.4. Прохождение случайных сигналов через линейные стационарные цепи .....	152
9.5. Источники шумов в радиоэлектронных устройствах .....	156
9.5.1. Тепловые шумы резисторов .....	156
9.5.2. Шумы приёмных антенн .....	157
9.5.3. Дробовой шум .....	157
9.6. Упражнения .....	159
<b>10. ВЫДЕЛЕНИЕ СИГНАЛОВ НА ФОНЕ ШУМА .....</b>	<b>161</b>
10.1. Выделение полезного сигнала с помощью линейного частотного фильтра .....	161
10.2. Оптимальная линейная фильтрация сигналов известной формы. Согласованный фильтр .....	163
10.3. Реализация согласованных фильтров .....	166
10.4. Квазиоптимальные фильтры .....	167
10.5. Упражнения .....	169
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>170</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>171</b>