Н.А. БУЛГАКОВ, О.И. ОРЕХОВА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ОСНОВНЫЕ
ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ
ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ФИЗИКА

• ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ •

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

Н.А. БУЛГАКОВ, О.И. ОРЕХОВА

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ФИЗИКА

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ

Тамбов
Издательство ТГТУ
2009

УДК 531(075)
ББК В3я73
Б907

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор
Д.М. Мордасов

Кандидат химических наук, доцент
В.И. Барсуков

Б907 **Булгаков, Н.А.**
Основные законы и формулы по математике и физике : справ. пособие / Н.А. Булгаков, О.И. Орехова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. – 176 с. – 300 экз. – ISBN 978-5-8265-0836-7.

Представлены в сжатой форме основные законы и формулы по всему курсу физики, а также по школьной и высшей математике, знание которых необходимо для решения задач и осмысления физической сущности явлений.

Основное назначение – помочь быстро найти или восстановить в памяти необходимые законы и формулы.

Предназначено в качестве справочного материала при подготовке к семинарским занятиям и экзаменам. Помимо студентов вузов может быть полезен инженерно-техническим работникам и учащимся колледжей и школ.

УДК 531(075)
ББК В3я73

ISBN 978-5-8265-0836-7

Справочное издание

БУЛГАКОВ Николай Александрович,
ОРЕХОВА Оксана Ивановна

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

**ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ФИЗИКА**

Справочное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 31.08.2009.
Формат 60 × 84 / 32. 5,11 усл. печ. л.
Тираж 300 экз. Заказ № 321

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета,
392000, Тамбов, Советская 106, к. 14

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

1. АЛГЕБРА

● Числовые неравенства:
Если $a > b$, то $b < a$.
Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
Если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$.
Если $a > b > 0$ и n – натуральное число, то $a^n > b^n$.
● Разложение на множители:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3;$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2);$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4;$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2);$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2);$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab;$$

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2);$$

$$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2 + b^2);$$

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 = 2(a^4 + 6a^2b^2 + b^4);$$

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2);$$

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

$$(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = x \pm 2\sqrt{xy} + y;$$

$$x\sqrt{x} \pm y\sqrt{y} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})(x \mp \sqrt{xy} + y);$$

$$(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^3 = x\sqrt{x} \pm 3x\sqrt{y} + 3y\sqrt{x} \pm y;$$

$$x^2 - y^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x + y);$$

$$(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^4 = x^2 \pm 4x\sqrt{xy} + 6xy \pm 4y\sqrt{xy} + y^2;$$

$$x^2 + y^2 = (x - \sqrt{2xy} + y)(x + \sqrt{2xy} + y);$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = 4\sqrt{xy};$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 = 2\sqrt{x}(3x + y);$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}^3) - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^3 = 2\sqrt{y}(x + 3y);$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 + (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 2(x^2 + 6xy + y^2);$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 = 8\sqrt{xy}(x + y);$$

$$x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b);$$

$$a^2x + 2abx + b^2 = (ax + b)^2;$$

$$x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2;$$

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = (x + 1)((ax^2 + (b - a)x + a);$$

$$\begin{aligned} x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc &= \\ &= (x - a)(x - b)(x - c); \end{aligned}$$

$$a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 = (ax + b)^3;$$

$$x^3 \pm 1 = (x \pm 1)(x^2 \mp x + 1);$$

$$x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1 = (x \pm 1)^3;$$

$$x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2 = (x - a)(x + a)(x - b)(x + b);$$

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1);$$

$$x^4 \pm 4x^3 + 6x^2 \pm 4x + 1 = (x \pm 1)^4;$$

$$x^4 \pm 4x^3 + 6x^2 \pm 4x + 1 = (x \pm 1)^4;$$

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2x} + 1)(x^2 + \sqrt{2x} + 1);$$

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2.$$

● Преобразование формул при $x=\sqrt{y} \quad (y\geq 0)$:

$$y-(a+b)\sqrt{y}+ab=(\sqrt{y}-a)(\sqrt{y}-b)\,;$$

$$a^2y+2ab\sqrt{y}+b^2=(a\sqrt{y}+b)^2\,;$$

$$y\pm 2\sqrt{y}+1=(\sqrt{y}\pm 1)^2\,;$$

$$ay\sqrt{y}+by+b\sqrt{y}+a=(\sqrt{y}+1)((ay+(b-a)\sqrt{y}+a)\,.$$

● Решение уравнений.

Приведены типы простейших уравнений и их решения (корни), а также некоторые виды равносильных преобразований:

$$ax+b=0,\ a\neq 0 \Leftrightarrow x=-b/a\,;$$

$$ax+b=0,\ a=0,\ b=0 \Leftrightarrow x\in R\,;$$

$$ax+b=0,\ a=0,\ b\neq 0 \Leftrightarrow \varnothing\,;$$

$$|x|=a,\ a>0 \Leftrightarrow x_1=a, x_2=-a\,;$$

$$|x|=a,\ a=0 \Leftrightarrow x=0\,;$$

$$|x|=a,\ a<0 \Leftrightarrow \varnothing\,;$$

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

● Квадратное уравнение

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ D>0;$$
$$D=b^2-4ac;\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,\ D=0, D=b^2-4ac \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a};$$

$$ax^2+bx+c=0, D<0, a\neq 0, \Leftrightarrow \varnothing .$$

● Теорема Виета.

Если x_1, x_2 корни уравнения $ax^2+px+q=0$, то

$$x_1+x_2=-\frac{p}{a},\ x_1x_2=\frac{q}{a}.$$

Следствия:

$$x_1^2+x_2^2=p^2-2q;$$

$$x_1^3+x_2^3=-p\left(p^2-3q\right);$$

$$x_1^4+x_2^4=\left(p^2-2q\right)^2-2q^2.$$

● Алгоритм решения уравнения 3-й степени

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

где a, b, c, d – целые числа; $a\neq 0$.

1. Выпишите все делители свободного члена d.
2. Выберите среди этих делителей то число x_1, которое является корнем уравнения (если такого числа нет, то алгоритм неприменим).
3. Разделите ax^3+bx^2+cx+d на $(x-x_1)$, получите в частном квадратный трехчлен $ax^2+bx_1+c_1$.
4. Найдите корни x_2, x_3 уравнения $ax^2+b_1x+c_1=0$.
5. Запишите ответ.

● Иррациональные уравнения:

$$\sqrt{x}=a,\ a\geq 0 \Leftrightarrow x=a^2;$$

$$\sqrt{x}=a,\ a<0, \Leftrightarrow \varnothing;$$

$$\sqrt[3]{x}=a \Leftrightarrow x=a^3;$$

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0; \\ f(x)=g^2(x). \end{cases}$$

● Показательные уравнения:

$$a^x=b,\ a>0,\ a\neq 1,\ b>0 \Leftrightarrow x=\log_a b;$$

$$a^x = b,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b \leq 0 \Leftrightarrow \varnothing\ ;$$

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} a,\ b > 0;$$
$$a, b \neq 1 \Leftrightarrow f(x)\log_c a = g(x)\log_c b,\ c > 0,\ c \neq 1.$$

● Логарифмические уравнения:

$$\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1 \Leftrightarrow x = a^b\ ;$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),\ a > 0,\ a \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

● Простейшие тригонометрические уравнения:

$$\sin x = a,\ |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z\ ;$$

$$\sin x = a,\ |a| > 1 \Leftrightarrow \varnothing\ ;$$

$$\cos x = a,\ |a| \leq 1 \Leftrightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z\ ;$$

$$\cos x = a,\ |a| > 1 \Leftrightarrow \varnothing\ ;$$

$$\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z\ ;$$

$$\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z\ .$$

● Решение неравенств.

Приведены типы простейших неравенств и их решения, а также некоторые виды равносильных преобразований:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ f(x) = 0; \end{array}\right.$$

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) < 0, \\ f(x) = 0; \end{array}\right.$$

$$ax + b > 0,\ a > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}\ ;$$

$$ax + b > 0,\ a < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}\ ;$$

$$ax + b < 0,\ a > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}\ ;$$

$$ax + b < 0,\ a < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}\ ;$$

$$|x| < a,\ a > 0 \Leftrightarrow -a < x < a;$$

$$|x| < a,\ a \le 0 \Leftrightarrow \varnothing;$$

$$|x| > a,\ a \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -a, \\ x > a; \end{array}\right.$$

$$|x| > a,\ a < 0 \Leftrightarrow x \in R;$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c > 0,\ a > 0,\ D > 0 \text{ или}$$
$$a(x - x_1)(x - x_2)\rangle 0,\ a > 0,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1, \\ x > x_2; \end{array}\right.$$

$$ax^2 + bx + c < 0,\ a0, D > 0 \text{ или}$$
$$a(x - x)(x - x) < 0,\ a > 0,\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2;$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{array}\right.$$

$$ax^2 + bx + c > 0,\ a > 0,\ D = 0 \text{ или}$$
$$a(x - x_1)^2 > 0, a > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < x_1, \\ x > x_2; \end{array}\right.$$
$$ax^2 + bx + c < 0, a > 0, D = 0 \text{ или } a(x - x)^2 \langle 0, a\rangle 0 \Leftrightarrow \varnothing;$$

$$ax^2 + bx + c > 0, a > 0,\ D < 0 \Leftrightarrow x \in R;$$

$$ax^2 + bx + c < 0,\ a > 0,\ D < 0 \Leftrightarrow \varnothing;$$

$$\sqrt{x} > a,\ a \ge 0 \Leftrightarrow x > a^2;$$

$$\sqrt{x} > a,\ a < 0 \Leftrightarrow x \ge 0;$$

$$\sqrt{x} < a,\ a > 0 \Leftrightarrow 0 \le x \le a^2;$$

$$\sqrt{x} < a,\ a \le 0 \Leftrightarrow \varnothing;$$

$$\sqrt[3]{x} > a \Leftrightarrow x > a^3;$$

$$\sqrt[3]{x} < a \Leftrightarrow x < a^3;$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \rangle g^2(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$$

$$a^x > b,\ 0 < a < 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x < \log_a b\ ;$$

$$a^x > b,\ 0 < a \langle 1,\ b \leq 0 \Leftrightarrow x \in R\ ;$$

$$a^x > b,\ a > 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x > \log_a b\ ;$$

$$a^x > b,\ a > 1,\ b \leq 0 \Leftrightarrow x \in R\ ;$$

$$a^x < b,\ 0 < a < 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x > \log_a b\ ;$$

$$a^x < b,\ 0 < a < 1,\ b \leq 0 \Leftrightarrow \varnothing\ ;$$

$$a^x < b,\ a > 1,\ b > 0 \Leftrightarrow x < \log_a b\ ;$$

$$a^x < b,\ a > 1,\ b \leq 0 \Leftrightarrow \varnothing\ ;$$

$$\log_a x > b,\ 0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 < x < a^b\ ;$$

$$\log_a x > b,\ a > 1 \Leftrightarrow x > a^b\ ;$$

$$\log f(x) > \log_a g(x),\ a > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

$$\log_a x < b,\ 0 < a < 1 \Leftrightarrow x > a^b\ ;$$

$$\log_a x < b,\ a > 1 \Leftrightarrow 0 < x < a^b\ .$$

- Арифметическая прогрессия:

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – члены арифметической прогрессии;

d – разность арифметической прогрессии;

$a_{n+1} = a_n + d$ – определение арифметической прогрессии;

$a_n = a_1 + d(n-1)$ – формула *n*-го члена;

$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ – характеристическое свойство;

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ – формула суммы *n* первых членов.

- Геометрическая прогрессия:

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – члены геометрической прогрессии;
q – знаменатель геометрической прогрессии;
$b_{n+1} = bq$, $b \neq 0$, $q \neq 0$ – определение геометрической прогрессии;
$b_n = b_1 q^{n-1}$ – формула n-го члена;
$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$ – характеристическое свойство;
$S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ – формула суммы n первых членов;
$S = \dfrac{b_1}{1-q}$ – формула суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$.

2. ТРИГОНОМЕТРИЯ

- Свойства тригонометрических функций:

$$\sin(-x) = -\sin x; \qquad \sin(x+2\pi k) = \sin x;$$

$$\cos(-x) = \cos x; \qquad \cos(x+2\pi k) = \cos x;$$

$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x; \qquad \mathrm{tg}(x+\pi k) = \mathrm{tg}\, x;$$

$$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x; \qquad \mathrm{ctg}(x+\pi k) = \mathrm{ctg}\, x,$$

где k – любое целое число.

- Таблица значений тригонометрических функций некоторых углов

Функция	Аргумент α						
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0

Примечание. Связь между градусной и радианной мерами измерения угла: 1° = π / 180 рад.

- Связь радианной и градусной меры угла:

$$1 \text{ радиан} = \frac{360°}{2\pi}.$$

- Формулы, связывающие тригонометрические функции одного и того же аргумента:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

- Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha};$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha};\quad \mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}.$$

- Формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

- Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

- Формулы сложения и вычитания аргументов:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

- Формулы сложения и вычитания тригонометрических функций:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\mp\mathrm{tg}\,\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

- Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и разность:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

- Обратные тригонометрические функции:

$$\arcsin a + \arcsin(-a) = 0, \left|a\right| \le 1;$$

$$\arccos a + \arccos(-a) = \pi, \left|a\right| \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}(-a) = 0;$$

$$\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg}(-a) = \pi;$$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \left|a\right| \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}.$$

- Дополнительные тождества:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta);$$

$$\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha);$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta);$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right);$$

$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^2 = 1 \pm \sin 2\alpha;$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2;$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2\sin 2\alpha;$$

$$\sin^3\alpha \pm \cos^3\alpha = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)(1 \mp \sin\alpha\cos\alpha);$$
$$(\sin\alpha \pm \cos\alpha)^3 = (\sin\alpha \pm \cos\alpha)(1 \pm \sin 2\alpha);$$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$$

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha .$$

- Тригонометрические функции половинного угла:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} ;$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} ;$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} ;$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} .$$

- Знаки тригонометрических функций по четвертям:

Функция	Четверть			
	I	II	III	IV
sin	+	+	–	–
cos	+	–	–	+
tg	+	–	+	–
ctg	+	–	+	–

- Формулы приведения:

Функция	Аргумент t						
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\, t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

- Решение простейших тригонометрических уравнений:

$$\sin x = a,\ |a| \le 1, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n ;$$

$$\cos x = a,\ |a| \le 1, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n \text{ ;}$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n \text{ ;}$$

$$\operatorname{ctg} x = a, \quad x = \operatorname{arcctg} a + \pi n \text{ ,}$$

n – целое число.

- Обратные тригонометрические функции:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \arccos x \le \pi \text{ ;}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi \text{ ;}$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x \text{ ;}$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \text{ .}$$

- Модуль (абсолютная величина):

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0, \\ x, \text{ если } x < 0; \end{cases}$$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \ge 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x) < 0; \end{cases}$$

$$|a| \ge 0, \quad |-a| = |a| \text{ ;}$$

$$|a^2| = |a|^2 = a^2 \text{ ;}$$

$$|ab| = |a| \cdot |b| \text{ ;}$$

$$|a : b| = |a| : |b| \quad (b \ne 0) \text{ ;}$$

$$|a+b| \le |a|+|b|;$$

$$|a-b| \ge |a|-|b|;$$

$$|x| = c,\ c \ge 0 \Leftrightarrow x_1 = c,\ x_2 = -c;$$

$$|x| < c,\ c > 0 \Leftrightarrow -c < x < c;$$

$$|x| > c,\ c > 0 \Leftrightarrow x < -c,\ x > c.$$

- Степени и корни. Логарифмы:

$$(n,\ k \in N,\ a,\ b,\ c \in R);$$

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n - \text{множителей},\ n > 1);$$

$$a^1 = a;$$

$$a^0 = 1\ (a \ne 0);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}(a \ne 0);$$

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a(b \ge 0);$$

$$\sqrt[n]{0} = 0;$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a};$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}\ (k \in N);$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt{a^2} = |a|;$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}\ (a \ge 0);$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a\ ;$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a\ .$$

- Свойства арифметических корней **(**a, $b \geq 0$, $c > 0$):

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\ ;$$

$$\sqrt[n]{a : c} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{c}\ ;$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}\ ;$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a}\ ;$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k}\ .$$

- Свойства степеней (a, $b > 0$):

$$a^x \cdot b^y = a^{x+y}\ ;$$

$$a^x : a^{\ y} = a^{x-y}\ ;$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x\ ;$$

$$(a : b)^x = a^x : b^x\ ;$$

$$(a^x)^y = a^{xy}\ .$$

- Свойства логарифмов $(a, b > 0;\ a, b \neq 1;\ x, y > 0)$:

$$a^{\log_a x} = x\ ;$$

$$\log_a a = 1\ ;$$

$$\log_a 1 = 0\ ;$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y\ ;$$

$$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y\ ;$$

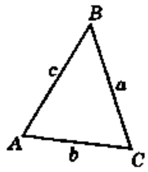
$$\log_{a^\beta} (x^\alpha) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \log_a x (\beta \neq 0)\ ;$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}\ ;$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\ ;$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} (a, b, c > 0;\ b \neq 1)\ .$$

3. ГЕОМЕТРИЯ



● Треугольник (a, b, c – стороны; h – высота, проведенная к основанию a; C – угол между сторонами a и b; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности; p – полупериметр).

● Теорема синусов. В любом треугольнике

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

● Теорема косинусов. В любом треугольнике

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

● Формулы площади любого треугольника:

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

$$S = pr;$$

$$S = \frac{abc}{4R};$$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ – формула Герона.

Медиана, биссектриса, высота треугольника:

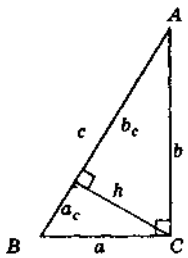
$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4};$$

$$l_a^2 = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2};$$

$$h_a^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2}.$$

Высоты и стороны треугольника:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$



● Прямоугольный треугольник:

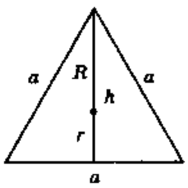
$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}hc \ \left(\angle C = 90°\right).$$

Теорема Пифагора:

$$c^2 = a^2 + b^2 \ \left(\angle C = 90°\right);$$

$$R = \frac{c}{2} = m_c;$$

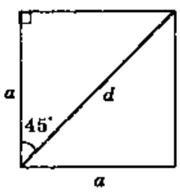
$$a_c : a = a : c \ \ b_c : b = b : c \ \ b_c : h = h : a_c.$$



● Равносторонний треугольник (a – сторона):

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \ R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \ r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

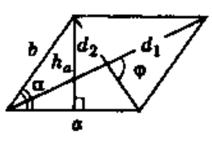
$$R = 2r; \ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



● Квадрат (a – сторона квадрата; d – диагональ; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности):

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2; \quad P = 4a;$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad d = a\sqrt{2}; \quad r = \frac{1}{2}a.$$



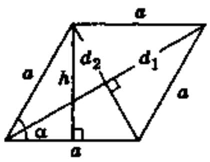
● Параллелограмм (a, b, c – смежные стороны; h – высота, проведенная к основанию; α – угол между сторонами a и $в$; d_1, d_2 – диагонали; φ – угол между диагоналями):

$$S = ah_a; \quad S = bh_b; \quad S = ab\sin\alpha;$$

$$S=\frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi\,;$$

$$P=2(a+b)\,;$$

$$d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)\,.$$



● Ромб:

$$S=ah;\quad S=a^2\sin\alpha;$$

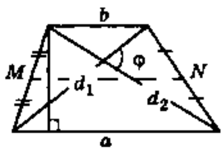
$$S=\frac{1}{2}d_1 d_2;$$

$$d_1=2a\cos\frac{\alpha}{2}\,;\quad d_2=2a\sin\frac{\alpha}{2}\,;$$

$$d_1^2+d_1^2=4a^2\,;$$

$$r=\frac{1}{2}h,\quad r=\frac{1}{2}a\sin\alpha\,;$$

$$P=4a\,.$$



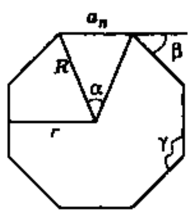
● Трапеция:

$$S=\frac{a+b}{2}h\,;$$

$$S=\frac{1}{2}d_1 d_2\sin\varphi\,;$$

–средняя линия

$$MN=\frac{1}{2}(a+b)\,.$$



● Правильный многоугольник (*n* сторон):
–центральный угол

$$\alpha=360:n\,;$$

–внешний угол

$$\beta = 360 : n;$$

–внутренний угол

$$\gamma = 180 - \beta;$$

$$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2};$$

$$R = \frac{a_n}{2\sin\frac{\alpha}{2}}; \quad r = \frac{a_n}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}};$$

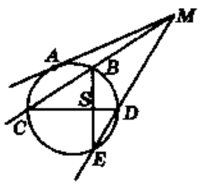
$$S = \frac{1}{2}na_n r = nr^2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}nR^2\sin\alpha = \frac{1}{4}na_n^2\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

● Длина окружности радиуса R

$$L = 2\pi R.$$

● Длина дуги окружности радиуса R с центральным углом $\alpha°$ (в градусах) или β (в радианах):

$$L = 2\pi R\frac{\alpha°}{360}; \; L = R\beta.$$



● Свойства хорд, секущих и касательной:

$$BS \cdot ES = CS \cdot DS;$$

$$MB \cdot MC = MD \cdot ME;$$

$$MA^2 = MB \cdot MC = MD \cdot ME.$$

● Площадь круга радиуса R:

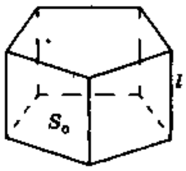
$$S = \pi R^2;$$

$$S = \pi \frac{d^2}{4};$$

$$S = \frac{Cd}{4}.$$

● Площадь сектора круга радиуса R с центральным углом $\alpha°$ (в градусах) или β (в радианах):

$$S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha°}{360°}; \; S = \frac{1}{2} R^2 \beta.$$



● Призма ($S_{осн}$ – площадь основания; h – высота; $P_{\perp}$ – периметр перпендикулярного сечения):

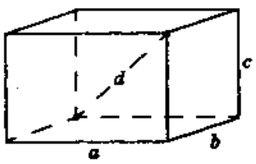
$$V = S_{осн} h;$$

$$S_{полн} = 2S_о + S_{бок};$$

$$S_{бок} = P_{\perp} l.$$

Прямая призма:

$$S_{бок} = P_о l \quad (l = h).$$

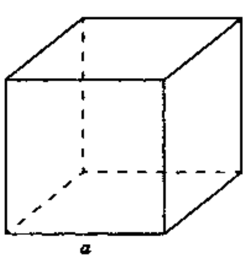


● Параллелепипед:

$$S_{полн} = 2(ab + bc + ac);$$

$$V = abc;$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



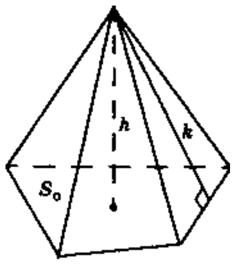
● Куб (a – ребро; V – объем; S – площадь боковой поверхности; h – высота; R – радиус описанной сферы; r – радиус вписанной сферы):

$$S = 6a^2;$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$r = \frac{a}{2};$$

$$h = a.$$

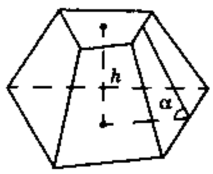


● Пирамида ($S_{осн}$ – площадь основания; h – высота):

$$V = \frac{1}{3}S_{осн}h;\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Правильная пирамида ($P_{о}$ – периметр основания; k – апофема):

$$S_{бок}\frac{1}{2}P_{о}k.$$

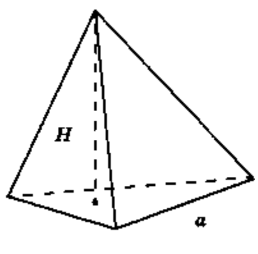


● Усеченная пирамида (S_1, S_2 – площади оснований; α – двугранный угол при ребре нижнего основания):

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right);$$

$$S_{бок}(S_1 - S_2) : \cos\alpha.$$

● Тетраэдр (a – ребро; V – объем; S – площадь боковой поверхности; H – высота; R – радиус описанной сферы; r – радиус вписанной сферы):



$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};\ S = a^2\sqrt{3};$$

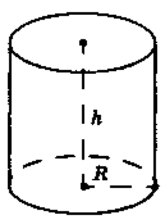
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4};\ r = \frac{a\sqrt{6}}{12};$$

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Правильный тетраэдр:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};\quad S_{полн} = a^2\sqrt{3};$$

$$R = \frac{3}{4}H;\quad r = \frac{1}{4}H;\quad H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

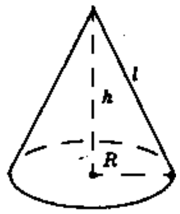


● Цилиндр ($S_{осн}$ – площадь основания; h – высота; R – радиус основания):

$$V = S_{осн}h = \pi R^2 h;$$

$$S_{бок} = 2\pi R h;$$

$$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi R h.$$



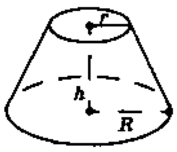
- Конус (l – образующая; R – радиус основания; h – высота):

$$S_{\text{бок}} = \pi R l;$$

$$S_{\text{полн}} = \pi R(R + l);$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

- Усеченный конус (h – высота; R и r – радиусы оснований):



$$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r);$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + \pi(R^2 + r^2);$$

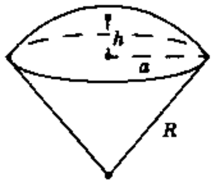
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 Rr + r^2).$$

- Шар:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3;$$

$$S_{\text{сферы}} = 4\pi R^2 = \pi d^2.$$

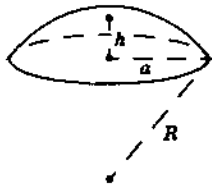
- Шаровой сектор:



$$S = \pi R(2h + a);$$

$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3}.$$

- Шаровой сегмент:



$$a^2 = h(2R - h);$$

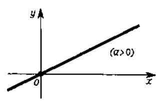
$$S_{\text{бок}}\, 2\pi Rh = \pi(h^2 + 2a^2);$$

$$V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right);$$

$$S_{\text{полн}} = \pi\left(2Rh + a^2\right);\; S_{\text{полн}} = \pi\left(h^2 + 2a^2\right).$$

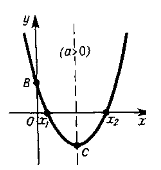
4. ГРАФИКИ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

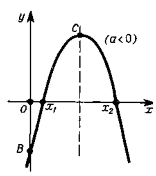
- Линейная функция $y = ax + b$:



Графиком этой функции является прямая линия. Функция возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$. Оси координат пересекаются прямой в точках $A(-b/a;\ 0)$ и $B(0;\ b)$. В случае $b = 0$ получаем прямую пропорциональность $y = ax$. График функции проходит через начало координат.

- Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$:

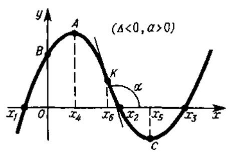


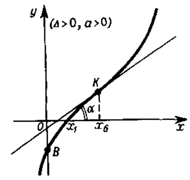


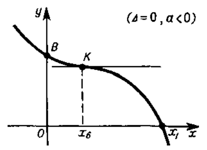
Графиком функции является парабола с осью симметрии, параллельной оси ординат. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ – вниз. Ось ординат пересекается кривой в точке $B(0;\ c)$. Вершина параболы C имеет координаты $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Абсциссы x_1, x_2 точек пересечения параболы с осью Ox определяют по формуле $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Величины x_1 и x_2

являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в том случае, когда оно имеет решения на множестве действительных чисел.

● Многочлен третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

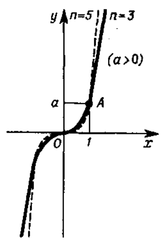


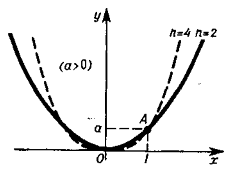




Графиком функции является кубическая парабола. Поведение функции зависит от знаков a и $\Delta = 3ac - b^2$. В случае $\Delta \geq 0$ функция возрастает при $a > 0$ и убывает при $a < 0$. Если же $\Delta < 0$, то функция имеет одну точку максимума и одну точку минимума. Кубическая парабола имеет одну точку перегиба K. Ось ординат пересекается кривой в точке $B(0; d)$. Абсциссы точек максимума и минимума x_4 и x_5 определяют по формуле $\frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}$. Абсцисса точки перегиба x_6 равна $\left(-\frac{b}{3a}\right)$. Касательная к графику в точке перегиба наклонена к оси Ox под углом α таким, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta}{3a}$.

● Степенная функция $y = ax^n$ ($n > 1$ – целое):





Графиком функции является парабола n-го порядка, которая проходит через точки $O(0; 0)$ и $A(1; a)$ и касается оси Ox в начале координат.

При n четном график функции симметричен относительно оси Oy и в начале координат имеет минимум при $a > 0$ и максимум при $a < 0$.

При n нечетном график функции симметричен относительно начала координат, которое является точкой перегиба графика.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

- $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ – расстояние между точками $M_1(x_1\,;\,y_1)$ и $M_2(x_2\,;\,y_2)$.

- $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ – координаты точки, делящей отрезок с концами $M_1(x_1\,;\,y_1)$ и $M_2(x_2\,;\,y_2)$ в отношении $\lambda=|M_1M|:|MM_2|$.

- $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой (A, B, C – любые вещественные числа, $A^2+B^2\neq 0)$.

- $y=kx+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k (b – величина отрезка, отсекаемого прямой по оси Oy).

- $y-y_1=k(x-x_1)$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_1(x_1\,;\,y_1)$.

- $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ – уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1\,;\,y_1)$ и $M_2(x_2\,;\,y_2)$.
- $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – уравнение прямой в отрезках (a, b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy).
- $d=\dfrac{|Ax_0+Bx_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – расстояние от точки $M_0(x_0\,;\,y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$.
- $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ – формула вычисления одного из углов между прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$.
- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение эллипса (a, b – полуоси).
- $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – каноническое уравнение гиперболы.
- $y^2=2px,\ y^2=-2px$ – каноническое уравнение параболы с осью симметрии Ox ($p>0$ – параметр).
- Уравнение окружности радиуса R с центром в точке (x_0, y_0) :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 .$$

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

- $X=x_2-x_1,\ Y=y_2-y_1,\ Z=z_2-z_1$ – выражение координат вектора $\overline{AB}$ через координаты точек $A(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$ и $B(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$.
- $|\,\bar{a}\,|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ – выражение длины вектора $\bar{a}=\{X\,;\,Y\,;\,Z\}$ через его координаты.

- $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ – расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

- $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$ – определение скалярного произведения векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (φ – угол между векторами).

- $\overline{a}\cdot\overline{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$ – выражение скалярного произведения векторов $\overline{a}=\{X_1;\,Y_1;\,Z_1\}$ и $\overline{b}=\{X_2;\,Y_2;\,Z_2\}$ через их координаты.

- $\cos\varphi=\dfrac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$ – выражение угла между векторами.

- $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости (A,B,C – любые вещественные числа, $A^2+B^2+C^2\neq 0$).

- $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{A^2+B^2+C^2}$ – расстояние от точки $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

- $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой с направляющим вектором $\overline{a}=\{l;\,m;\,n\}$, проходящей через точку $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$.

- $x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt$ – параметрические уравнения прямой.

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – каноническое уравнение эллипсоида (a,b,c – полуоси).

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – каноническое уравнение однополосного гиперболоида.

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – каноническое уравнение двуполосного гиперболоида.

- $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ – каноническое уравнение эллиптического параболоида ($p>0$, $q>0$ – параметры).

- $\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}=z$ – каноническое уравнение гиперболического параболоида.

- $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – каноническое уравнение конуса второго порядка.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ – второй замечательный предел.

- $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ – определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

- $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$ – дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0.

- Производные простейших элементарных функций:

– правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

2) $(uv)'=u'v+uv'$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2},\ \ v\neq 0;$

– производная постоянной функции

$$y=f(x)=C\ \Rightarrow\ y'=0;$$

$$(Cu)'=Cu';$$

– производная степенной функции

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1};\qquad \left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=-\frac{1}{x^2};$$

– производная показательной функции

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a;\qquad \left(e^x\right)'=e^x;$$

– производная логарифмической функции

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a};\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

- Производные тригонометрических функций:

$(\sin x)'=\cos x$;	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\cos x)'=-\sin x$;	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
$(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$;	$(\mathrm{arctg}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;
$(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\mathrm{cosec}^2 x$;	$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

- $y'(t_0)=f'(x_0)\,\varphi'(t_0)$ – правило дифференцирования сложной функции $y=f[\varphi(t)]$ в точке t_0; здесь $x_0=\varphi(t_0)$.

- Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

- $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ – правило дифференцирования обратной функции $x = \varphi(y)$ в точке $y_0 = f(x_0)$.

- $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + ... + \ + uv^{(n)}$ – формула Лейбница.

- Первообразная $F(x)$ функции $f(x)$

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенный интеграл – это общее выражение для всех первообразных функций от данной функции $f(x)$:

$$F(x) + C = \int f(x)dx.$$

- Основное свойство неопределенного интеграла

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

- Основные правила интегрирования:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx;$$

$$\int f(x) + g(x) = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ – формула Лагранжа; $c \in (a, b)$.

- $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ – формула Коши; $c \in (a, b)$.

- $f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 +$

$+ ... + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ – формула Тейлора; $\xi \in (a, x)$.

- При $a = 0$ получаем формулу Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{(n)} +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{(n+1)}.$$

- Свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ ;$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \ ;$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ ;$$

$$\int_a^b f(px+q)dx = \frac{1}{p}\int_{pa+q}^{pb+q} f(t)dt \ .$$

Если $f(x)$ четная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx \ .$$

Если $f(x)$ нечетная, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0 \ .$$

● Неопределенный и определенный интегралы: табличные интегралы:

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1);\qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C;$$

$$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\ (0<a\neq1);\qquad \int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C;$$

$$\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C;$$

$$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}\,x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{arctg}\,x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\ (a\neq0);$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C\ (a\neq0);$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\mathrm{arctg}\,x+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm k}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm k}\right|+C;$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+C$$

- $\int f(x)\mathrm{d}x\big|_{x=\varphi(t)}=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ – формула замены переменной в неопределенном интеграле;

- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ – формула замены переменной в определенном интеграле; $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

- $\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)\mathrm{d}x$ – формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле;

- $\int\limits_a^b u\,\mathrm{d}v=uv\big|_a^b-\int\limits_a^b v\,\mathrm{d}u$ – формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(c)(b-a)$ – формула среднего значения; $c\in[a,\,b]$.

- $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b$ – формула Ньютона-Лейбница.

- $s=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ – площадь криволинейной трапеции

$$0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\ .$$

- $s=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ – площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$.

- $s=\frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$ – площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$.

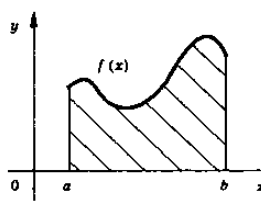
- $L=\int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ – длина дуги кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, $a \le x \le b$.

- $L=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$ – длина дуги кривой, заданной параметрически: $x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ \alpha \le t \le \beta$.

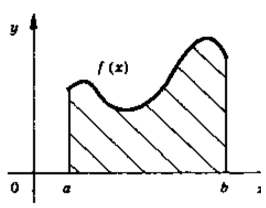
- $L=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,\mathrm{d}\varphi$ – длина дуги кривой, заданной в полярных координатах: $\rho=\rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

- $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ – объем тела вращения вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции $0 \le y \le f(x)$, $a \le x \le b$.
- $P=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ – площадь поверхности вращения вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции $0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b$.

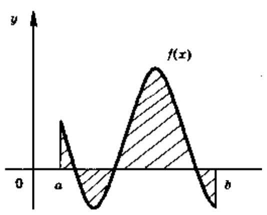
- Площадь криволинейной трапеции:



$$S=\int\limits_a^b f(x)dx$$

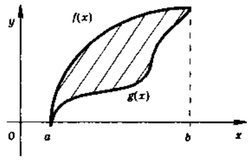


$$S=\int\limits_a^b -f(x)dx$$



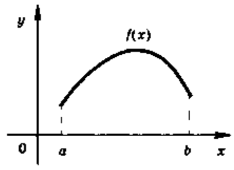
$$S=\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$$

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx$$



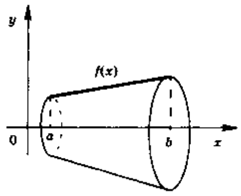
- Длина кривой:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} \; dx$$



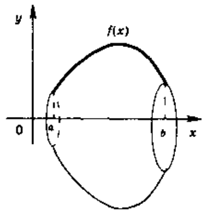
- Площадь поверхности вращения:

$$S = \\ = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2} \; dx$$



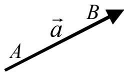
- Объем тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 \; dx$$



4. ПОНЯТИЕ О ВЕКТОРАХ И СКАЛЯРАХ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

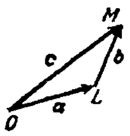
● *Векторной величиной,* или *вектором* (в широком смысле), называется всякая величина, обладающая направлением. *Скалярной величиной,* или *скаляром,* называется величина, не обладающая направлением.

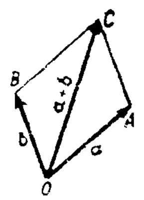


● Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой, либо выделяться жирным шрифтом, например: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ или $\bar{a} = \overline{AB}$.

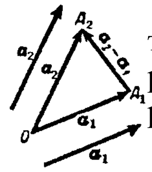
● Векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными.* Коллинеарные векторы могут иметь одно и то же направление (*равнонаправленные векторы*) или противоположные.

● **Сложение векторов по правилу треугольников.** *Суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется третий вектор $\boldsymbol{c}$, получаемый следующим построением: из произвольного начала O строим вектор $\overrightarrow{OL}$, равный $\boldsymbol{a}$; из точки L, как из начала, строим вектор $\overrightarrow{LM}$, равный $\boldsymbol{b}$. Вектор $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OM}$ есть сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

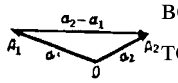




● **Сложение векторов по правилу параллелограмма.** Если слагаемые $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны, то сумму $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ можно найти следующим построением: из любого начала O строим векторы $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$; на отрезках OA, OB строим параллелограмм $OACB$. Вектор диагонали $\overrightarrow{OC} = \boldsymbol{c}$ есть сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$). Обозначение: $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$.

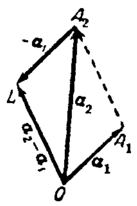


● **Вычитание векторов.** Вычесть вектор $\boldsymbol{a}_1$ (вычитаемое) из вектора $\boldsymbol{a}_2$ (уменьшаемое) значит найти новый вектор $\boldsymbol{x}$ (разность), который в сумме с вектором $\boldsymbol{a}_1$ дает вектор $\boldsymbol{a}_2$. Отсюда следует, что вычитание векторов есть действие, обратное сложению.



Из определения вытекает такое построение: из произвольного начала O строим векторы $\overrightarrow{OA_1} = \boldsymbol{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \boldsymbol{a}_2$. Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ (проведенный из конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого) есть разность $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}.$$



Другое построение. Чтобы построить разность $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$ векторов $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_1$, можно взять сумму векторов $\boldsymbol{a}_2$ и $-\boldsymbol{a}_1$, т.е. $\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 + (-\boldsymbol{a}_1)$.

● **Умножение вектора на число.** Умножить вектор $\boldsymbol{a}$ (множимое) на число x (множитель), значит построить новый вектор (произведение), модуль которого получается умножением модуля вектора $\boldsymbol{a}$ на абсолютное значение числа x, а направление совпадает с направлением вектора $\boldsymbol{a}$ или противоположно ему, смотря по тому, положительно число x или отрицательно. Если же $x = 0$, то произведение есть нуль-вектор.

Обозначение: $\boldsymbol{a}x$ или $x\boldsymbol{a}$.

● **Деление вектора на число.** Разделить вектор $\boldsymbol{a}$ на число x значит найти такой вектор, который, будучи умножен на число x, даст в произведении вектор $\boldsymbol{a}$.

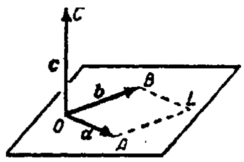
Обозначение: $\boldsymbol{a} : x$ или $\frac{\boldsymbol{a}}{x}$.

Вместо деления $\frac{\boldsymbol{a}}{x}$ можно выполнить умножение $\boldsymbol{a} \times \frac{1}{x}$.

● *Скалярным произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

● *Векторным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ (множимое) на не коллинеарный с ним вектор $\boldsymbol{b}$ (множитель) называется третий вектор $\boldsymbol{c}$ (произведение), который строится следующим образом:



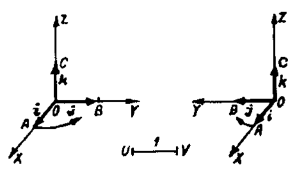
1) его модуль численно равен площади параллелограмма (*AOBL* на чертеже), построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т.е. он равен $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$;

2) его направление перпендикулярно к плоскости упомянутого параллелограмма;

3) при этом направление вектора $\boldsymbol{c}$ выбирается (из двух возможных) так, чтобы векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ составляли правую систему.

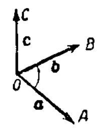
• **Прямоугольная система координат в пространстве.** Три взаимно перпендикулярные оси *OX*, *OY*, *OZ*, проходящие через некоторую точку *O*, образуют *прямоугольную систему координат*. Точка *O* называется *началом координат*, прямые *OX*, *OY*, *OZ* – *осями координат* (*OX* – ось *абсцисс*; *OY* – ось *ординат*; *OZ* – ось *аппликат*), а плоскости *XOY*, *YOZ*, *ZOX* – *координатными плоскостями*. Какой-либо отрезок *UV* принимается за единицу масштаба для всех трех осей (см. рис. ниже). Отложив на осях *OX*, *OY*, *OZ* в положительном направлении отрезки *OA*, *OB*, *OC*, равные единице масштаба, получим три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Они называются *основными векторами* и обозначаются соответственно $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

• **Правая и левая системы координат.**

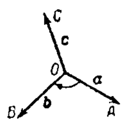


Положительные направления на осях принято выбирать так, чтобы поворот на 90°, совмещающий положительный луч *OX* с лучом *OY*, казался происходящим против часовой стрелки, если наблюдать его со стороны луча *OZ*. Такая система координат называется *правой*. Иногда пользуются и *левой системой координат*. В ней упомянутый поворот совершается по часовой стрелке.

• **Правая и левая системы трех векторов.** Пусть ***a***, ***b***, ***c*** – три (ненулевые) вектора, не параллельные одной плоскости и взятые в указанном порядке (т.е. ***a*** – первый вектор, ***b*** – второй и ***c*** – третий.) Приведя их к общему началу *O*, получим три вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, не лежащие в одной плоскости. Система трех векторов ***a***, ***b***, ***c*** называется правой, если поворот вектора $\overrightarrow{OA}$, совмещающий его по кратчайшему пути с вектором $\overrightarrow{OB}$, совершается против часовой стрелки для наблюдателя, глаз которого помещается в точке *C*.



Если же упомянутый поворот совершается по часовой стрелке, то система трех векторов ***a***, ***b***, ***c*** называется левой.



ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

1. СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ

Измерить какую-либо величину – значит узнать, сколько раз заключается в ней однородная величина, принятая за единицу меры. Измерения проводятся с помощью соответствующих приборов, которые выбираются в соответствии с желаемой точностью измерений и устанавливаются в соответствии с рекомендациями по их нормальной технической эксплуатации. Следует исключать влияние внешних факторов на показания приборов. После установки приборов необходимо выполнить ряд контрольных измерений.

Процесс измерения состоит из наблюдения и отсчета. Отсчет – считывание результата измерения со шкалы прибора или цифрового табло.

Каждый результат измерений имеет свою ошибку (погрешность). Причины появления ошибок могут быть различными: неправильные или неточные показания приборов; влияние внешних условий; несовершенство наших органов чувств и др.

Таким образом, вместо истинного значения какой-либо величины μ мы всегда получаем лишь ее приближенное значение x.

Следует научиться оценивать степень, характер этого приближения, т.е. точность, которая характеризует одновременно два вида ошибок: рассеяние результатов измерения вследствие случайных ошибок (*воспроизводимость*) и систематические ошибки (*правильность*).

Воспроизводимость измерения определяется отклонением повторных результатов измерения относительно их среднего значения и обуславливается наличием случайных ошибок.

Правильность измерения характеризуется величиной систематической ошибки. Результаты измерения правильны, если они не искажены систематической ошибкой и тем правильней, чем меньше эта ошибка. Правильность измерений оценивается при помощи эталонов.

Следует отметить, что хорошая воспроизводимость не доказывает еще правильности результатов измерения. Например, при пятикратном измерении силы тока в цепи, стрелка прибора всегда устанавливается против одного и того же деления – 3А, но так как шкала прибора была плохо пропечатана, в журнале наблюдений ошибочно записали показания 8А, приняв цифру 8 за 3. Ясно, что полученный результат неправильный, воспроизводимость же хорошая.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ОШИБОК

По своему характеру ошибки делятся на систематические, случайные и промахи.

Систематические ошибки вызваны одной или несколькими причинами, действующими по определенным законам. К числу этих обычно относят инструментальные, ошибки метода, индивидуальные и другие. Систематические ошибки бывают постоянные и переменные.

Появление первых обуславливается постоянно действующими причинами, например, дефектностью измерительной аппаратуры. Переменные систематические ошибки вызываются причинами, изменяющимися определенным и закономерным образом, например, равномерным изменением температуры. Можно либо исключить систематические ошибки, либо ввести в расчет соответствующие поправки, которые находят опытным путем.

Случайные ошибки – это ошибки измерения, применяющие при повторных измерениях одной и той же величины в тех же условиях различные положительные и отрицательные значения, не зависящие друг от друга.

Исключить случайные ошибки при измерении нельзя, однако применение метода теории ошибок позволяет более точно установить возможную ошибку окончательного результата измерений.

Различают абсолютную и относительную ошибки. Абсолютная ошибка – разница в абсолютных цифрах между истинным или, точнее, наиболее достоверным значением определяемой величины и полученным результатом, выраженная в единицах измерения величины.

Относительная ошибка – отношение абсолютной ошибки к истинному или среднему значению измеряемой величины, выраженное в процентах. Относительная ошибка дает более наглядное представление о точности измерений.

Промахи (грубые ошибки) связаны с неверными отсчетами или с недостаточной тщательностью в работе. При обработке результатов измерений эти данные отбрасывают.

В дальнейшем будем считать систематические ошибки и промахи устраненными, и рассматривать только случайные ошибки.

3. ОШИБКИ ПРЯМЫХ РАВНОТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В метрологии измерения делятся на прямые и косвенные. При прямых (непосредственных) измерениях числовое значение измеряемой величины x сразу получается из показаний прибора, при помощи которого выполняется данное измерение. Например, длина стержня при отсчете по шкале линейки, его масса – по шкале весов.

Результат каждого прямого измерения включает случайную ошибку, которая зависит от большего числа случайных факторов. Если отклонения, вызываемые этими факторами, по абсолютной величине меньше чувствительности прибора, то они не обнаруживаются; при многократных измерениях одной и той же величины результаты получаются одинаковые, хотя ошибка и не равна нулю. В этом случае (как и при однократных измерениях) критерием точности измерения является цена наименьшего деления шкалы прибора или ее половина. Если же отклонения, вызванные случайными факторами, сравнимы по абсолютной величине с чувствительностью прибора, то они обнаруживаются приборами и при n измерениях одной и той же величины получаются результаты x_1, x_2, …, x_n, которые могут отличаться друг от друга в приделах чувствительности данных измерений.

Среднее арифметическое из этих результатов, т.е.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

есть величина, наиболее близкая к истинному значению, называемая средним значением. Отсюда следует, что каждое физическое измерение должно быть повторено несколько раз.

Разности Δx_1; Δx_2; Δx_3; …, Δx_n между средним значением x измеряемой величины и значениями x_1, x_2, x_3, …, x_n полученными при отдельных измерениях, т.е.

$$\Delta x_1 = \bar{x} - x_1; \quad \Delta x_2 = \bar{x} - x_2;$$
$$\Delta x_3 = \bar{x} - x_3; \quad \Delta x_n = \bar{x} - x_n$$

называются абсолютными ошибками и могут быть и положительными и отрицательными.

Для определения средней абсолютной ошибки результата берут среднее арифметическое абсолютных значений (модулей) отдельных ошибок, т.е.

$$\Delta x = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + |\bar{x} - x_3| + ... + |\bar{x} - x_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \Delta x_i. \tag{2}$$

Отношения $\frac{\Delta x_1}{x_1}$, $\frac{\Delta x_2}{x_2}$, $\frac{\Delta x_3}{x_3}$, …, $\frac{\Delta x_n}{x_n}$, называются относительными ошибками отдельных измерений.

Отношение средней абсолютной ошибки результата к его среднему значению дает среднею относительную ошибку результата измерений:

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}}. \tag{3}$$

Относительные ошибки принято выражать в процентах:

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\ \%.$$

Истинное значение измеряемой величины

$$\mu = \bar{x} \pm \Delta x \tag{4}$$

надо понимать так, что истинное значение измеряемой величины находится в интервале

$$\bar{x} - \Delta x < \mu < \bar{x} + \Delta x.$$

Если точность прибора такова, что при любом числе измерений получается одно и то же число, лежащее где-то между делениями шкалы, то приведенный метод оценки погрешности неприменим. В этом случае измерение производится один раз и результат измерения записывается так:

$$x_{\text{ист}} = x_{\text{ср}} \pm \Delta x_{\text{пр}},$$

где $x_{\text{ист}}$ – искомый результат измерения; $x_{\text{ср}}$ – средний результат, равный среднему арифметическому из двух значений, соответствующих соседним делениям шкалы, между которыми заключено остающееся неизвестным истинное значение измеряемой величины; $\Delta x_{\text{пр}}$ – приборная погрешность (предельная), равная половине цены деления шкалы прибора.

Если в работах даются значения некоторых величин, измеренных заранее, то в этих случаях абсолютную погрешность принимают равной ее предельной величине, т.е. равной половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе. Например, если дана масса тела m = 524,3 г, то Δm = 0,05 г, следовательно,

$$M = (524{,}3 \pm 0{,}05)\ \text{г}.$$

4. ПОГРЕШНОСТЬ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В случаях, когда физическая величина не может быть измерена непосредственно, прибегают к косвенным измерениям. Измерения называются косвенными, если уравнение измерения имеет вид

$$z = f(x_1, x_2, x_3 \dots a, b), \tag{5}$$

где x_1, x_2, x_3 – результаты прямых измерений; a, b – физические константы и постоянные приборов; z – значения измеряемой величины в соответствующих единицах.

В этом случае средняя абсолютная ошибка Δz может быть найдена по правилам дифференцирования. Если знак дифференциала заменить значком ошибки Δ и выбрать знаки (+, –) таким образом, чтобы величина ошибки была максимальной, т.е.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial z}{\partial x_3} + \dots + \Delta a + \Delta b \tag{6}$$

и

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial z}{\partial x_3} \Delta x_3 + \dots + \Delta a + \Delta b\,. \tag{7}$$

Относительная ошибка находится по формуле (3), т.е. $E = \frac{\Delta z}{z}$, а так как дифференциал натурального логарифма

$$d(\ln z) = \frac{dz}{z}, \quad \text{то} \quad \Delta(\ln z) = \frac{\Delta z}{\bar{z}} \tag{8}$$

или

$$E = \frac{\Delta z}{\bar{z}} = \Delta(\ln z)\,. \tag{9}$$

Таким образом, относительная ошибка результата равна полному дифференциалу натурального логарифма функции, определяющей зависимость данной величины от измеряемых величин. При вычислении надо брать сумму абсолютных значений дифференциалов всех членов логарифма (все частные ошибки складываются) с заменой значков d значком Δ.

Относительную ошибку измерения надо вычислять в такой последовательности:

а) прологарифмировать расчетную формулу;

б) найти от логарифма полный дифференциал;

в) если ошибка отдельных измерений входит в результат дифференцирования несколько раз, то надо сгруппировать все члены, содержащие одинаковый дифференциал и выражения в скобках, стоящие перед дифференциалом, взять по модулю; знак d заменить на знак Δ; знаки (+, –) выбрать так, чтобы абсолютная величина относительной ошибки была максимальной.

Выполнив все измерения и вычисления записывают окончательный результат в виде $\mu = \bar{x} \pm \Delta x;\quad E = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$.

Однако следует отметить, что и в этом случае информация о точности измерения не является полной, так как доверительный интервал в формуле (4) не является исчерпывающей характеристикой точности результата. Для того чтобы доверительный интервал имел конкретный смысл, нужна количественная характеристика его достоверности, показывающая, насколько можно быть уверенным в том, что истинное значение измеряемой величины окажется в пределах доверительного интервала. Такой характеристикой является доверительная вероятность, показывающая вероятность того, что среднее значение $\bar{x}$ отличается от истинного значения не более чем на Δx. Она равна доле результатов однотипных серий измерений, попадающих в пределы доверительного интервала, т.е. отличающихся от истинного значения не более, чем на Δx. Доверительную вероятность обозначают α или *w*. При оценке прямых измерений α можно определить по формуле

$$\alpha = 1 - (1/2)^{n-1}, \qquad (10)$$

где *n* – число измерений.

Окончательную запись результата делают после округления погрешности, затем результата $\bar{x}$, так, чтобы его последняя значащая цифра соответствовала значащей цифре погрешности, например, вместо $x = 38{,}72 \pm 4{,}3$; $E = 0{,}1$, необходимо записать:

$$x = 39 \pm 4;\ \ E = 0{,}1;\ \ \alpha = 0{,}94 \ \text{ при } n = 5.$$

Более строго обработка результатов эксперимента, определение случайных погрешностей, доверительного интервала, вероятности тому подобные проводится на основе математической статистики, считая возможным применение закона нормального распределения случайных ошибок.

5. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ И ПРАВИЛЬНОСТИ ПРИ МАЛОМ ЧИСЛЕ ИЗМЕРЕНИЙ

В лабораторном практикуме имеют дело не с генеральной совокупностью, а с небольшим числом измерений ($2 \le n \le 10$).

Для расчета точности измерений в этом случае пользуются методами математической статистики, разработанной для малого числа измерений. При этом полученные результаты рассматривают как случайную выборку из некоторой гипотетической генеральной совокупности.

Оценку точности измерений и правильности производят с помощью следующих критериев.

Выборочное среднее – среднее арифметическое (1). Единичные отклонения – отклонения отдельных измерений от среднего арифметического (абсолютная ошибка единичного измерения)

$$\varepsilon_i = \bar{x} - x_i. \qquad (14)$$

Алгебраическая сумма одиночных отклонений равна нулю:

$$\sum \varepsilon_i = 0.$$

Выборочная дисперсия – для *n* найденных значений $x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots, x_n$ случайной величины:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}. \qquad (15)$$

Положительное значение корня квадратичного из дисперсии называется средней квадратичной ошибкой отдельного измерения или выборочным отклонением:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1}}. \qquad (16)$$

Коэффициент вариации: $\omega = \frac{\varepsilon}{\bar{x}} \cdot 100\ \%$.

При оценке точности полученных результатов вычисляют также выборочную дисперсию среднего значения (среднего результата):

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}. \tag{17}$$

Значение корня квадратного из этой величины называется средней квадратичной ошибкой среднего арифметического или стандартным отклонением среднего результата:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{18}$$

Доверительный интервал – при заданной доверительной вероятности зависит от размера выборки, т.е. от количества проведенных опытов. В общем случае граница доверительного интервала при выбранном коэффициенте надежности α выражается уравнением

$$\bar{x} - t_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_\alpha \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{или} \quad \bar{x} - \varepsilon_\alpha < \mu < \bar{x} + \varepsilon_\alpha, \tag{19}$$

где t_α – коэффициент Стьюдента, а ε_α – абсолютная ошибка:

$$\varepsilon_\alpha = t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{20}$$

Выражение (20) характеризует точность измерения, т.е. точность приближенного равенства $\bar{x} \approx \mu$.

Из уравнений (19) и (20) следует, что с уменьшением числа измерений n увеличивается доверительный интервал (при той же надежности) или при заданном доверительном интервале уменьшается надежность измерений. По мере увеличения числа измерений величина ε_α стремится к значению 2σ при $\alpha = 0{,}95$ и к значению 3σ при α = 0,97.

Следовательно, величина коэффициента Стьюдента t_α при большом числе измерений $t_{0,95}$ будет стремиться к 2, а $t_{0,97}$ – к 3.

Иными словами, коэффициента Стьюдента t_α с надежностью α показывает во сколько раз разность между истинным и средним результатами больше стандартного отклонения среднего результата:

$$t_\alpha = \frac{|\mu - \bar{x}|}{S_{\bar{x}}} = \frac{|\mu - \bar{x}|\sqrt{n}}{S}. \tag{21}$$

Значение t_α для избранной надежности находят по таблице Стьюдента.

Таблица коэффициентов Стьюдента

Число измерений, *n*	Надежность, α			
	0,4	0,7	0,95	0,999
2	0,73	2,0	12,7	636,6
3	0,62	1,3	4,3	31,6
4	0,58	1,3	3,2	12,9
5	0,57	1,2	2,8	8,6
6	0,56	1,2	2,6	6,9
7	0,55	1,1	2,4	6,0
8	0,55	1,1	2,4	5,4
9	0,54	1,1	2,3	5,0
10	0,54	1,1	2,3	4,8

Пользуясь соотношениями (19) и (20) и таблицей Стьюдента, можно легко определять доверительные интервалы по выбранной надежности или, наоборот, задавшись определенной точностью, можно рассчитывать t_α и по таблице оценить надежность выбранных доверительных интервалов. Кроме того, на основании (21) и таблицы (с. 66) можно установить число параллельных измерений, необходимых для того, чтобы средний результат имел точность не ниже заданной.

Относительную ошибку среднего результата (%) вычисляют с надежностью α по формуле

$$\frac{\varepsilon_\alpha}{\mu}\cdot 100\ \% \quad \text{или} \quad \frac{\varepsilon_\alpha}{\bar{x}}\cdot 100\ \%. \qquad (22)$$

Таким образом, значения $\bar{x}$, $\bar{x}\pm\varepsilon_\alpha$, S, α полностью определяет точность (воспроизводимость и правильность) измерений.

6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОРЯДКУ ОПЕРАЦИЙ ПРИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

1. Результаты каждого измерения записываются в таблицу.
2. Вычисляется среднее значение из *n* измерений по формуле (1):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3. Находятся погрешности отдельных измерений по формуле

$$\Delta x_i = \bar{x} - x_i\,.$$

4. Вычисляются квадраты погрешностей отдельных измерений Δx_i^2.
5. Если одно (иди два) измерения резко отличается по своему значению от остальных измерений, то следует проверить, не является ли оно промахом.
6. Определяется средняя квадратичная погрешность результата серии измерений:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}{n(n-1)}}\,.$$

7. Задается значение доверительной вероятности.
8. Определяется коэффициент Стьюдента t_α для заданной вероятности α и числа проведенных измерений по таблице (см. с. 66).

9. Находятся границы доверительного интервала (абсолютная погрешность результата измерений) $\Delta x = t_\alpha \cdot S_{\bar{x}}$.

10. Если величина погрешности результата измерений (п. 9) окажется сравнимой с величиной погрешности прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину

$$\Delta x = \sqrt{t_\alpha^2 S_{\bar{x}}^2 + (k_\alpha/3)^2 \delta^2}; \quad k_\alpha = t_\alpha \ (n \to \infty),$$

где δ – величина погрешности прибора.

11. Окончательный результат записывается в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$.

12. Оценивается относительная погрешность результата серии измерений:

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100 \ \% .$$

ФИЗИКА

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ

● Средняя и мгновенная скорости материальной точки:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}, \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t},$$

где $\Delta \mathbf{r}$ – элементарное перемещение точки за промежуток времени Δt; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки; Δs – путь, пройденный точкой за промежуток времени Δt.

● Среднее и мгновенное ускорения материальной точки:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}, \quad \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}.$$

● Полное ускорение при криволинейном движении:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n, \quad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$ – тангенциальная составляющая ускорения; $a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$ – нормальная составляющая ускорения (r – радиус кривизны траектории в данной точке).

● Путь и скорость для равнопеременного движения:

$$s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2};$$

$$\upsilon = \upsilon_0 \pm at,$$

где υ_0 – начальная скорость.

● Угловая скорость:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

● Угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

- Угловая скорость для равномерного вращательного движения:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

где T – период вращения; n – частота вращения ($n = N/t$, где N – число оборотов, совершаемых телом за время t).

- Угол поворота и угловая скорость для равнопеременного вращательного движения:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}; \qquad \omega = \omega_0 t \pm \varepsilon t,$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

- Связь между линейными и угловыми величинами:

$$s = R\varphi; \quad v = R\omega; \quad a_\tau = R\varepsilon; \quad a_n = \omega^2 R,$$

где R – расстояние от оси вращения.

1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

- Импульс (количество движения) материальной точки

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

- Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики материальной точки):

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}.$$

- Это же уравнение в проекциях на касательную и нормаль к траектории точки:

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}; \quad F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

- Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где f – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления.

- Сила трения качения

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{к}} N / r,$$

где f – коэффициент трения качения; r – радиус качающегося тела.

- Закон сохранения импульса для замкнутой системы:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \text{const},$$

где n – число материальных точек (или тел), входящих в систему.

- Координаты центра масс системы материальных точек:

$$x_C = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}; \quad y_C = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}; \quad z_C = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i},$$

где m_i – масса *i*-й материальной точки; x_C, y_C, z_C – ее координаты.

- Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{р}},$$

где реактивная сила $\mathbf{F}_{\text{р}} = -\mathbf{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ ($\mathbf{u}$ – скорость истечения газов из ракеты).

- Формула Циолковского для определения скорости ракеты

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}\ln\frac{m_0}{m},$$

где m_0 – начальная масса ракеты.

1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

- Работа, совершаемая постоянной силой,

$$\mathrm{d}A = \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r} = F_s \mathrm{d}s = F\mathrm{d}s\cos\alpha,$$

где F_s – проекция силы на направление перемещения; α – угол между направлениями силы и перемещения.

- Работа, совершаемая переменной силой, на пути s

$$A = \int_s F_s \mathrm{d}s = \int_s F\cos\alpha \mathrm{d}s.$$

- Средняя мощность за промежуток времени Δt

$$\langle N \rangle = \Delta A / \Delta t.$$

- Мгновенная мощность

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}, \text{ или } N = \mathbf{F}\mathbf{v} = F_s \upsilon = F\upsilon\cos\alpha.$$

-
-
-

$$\Pi = mgh,$$

где g – ускорение свободного падения.

- Сила упругости

$$F = -kx,$$

где x – деформация; k – коэффициент упругости.

● Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = kx^2/2 .$$

● Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы):

$$T + \Pi = E = \text{const} .$$

● Коэффициент восстановления

$$\varepsilon = \upsilon_n' / \upsilon_n ,$$

где υ_n' и υ_n – соответственно нормальные составляющие относительной скорости тел после и до удара.

● Скорости двух тел массами m_1 и m_2 после абсолютно упругого центрального удара:

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} ;$$

$$\upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\,\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2} ,$$

где υ_1 и υ_2 – скорости тел до удара.

● Скорость движения тел после абсолютно неупругого центрального удара

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} .$$

1.4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

● Момент инерции материальной точки

$$J = mr^2 ,$$

где m – масса точки; r – расстояние до оси вращения.

● Момент инерции системы материальной точки

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 ,$$

где r_i – расстояние материальной точки массой m_i до оси вращения.

В случае непрерывного распределения масс $J = \int r^2 \mathrm{d}m$.

● Моменты инерции тел правильной геометрической формы (тела считаются однородными; m – масса тела):

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

- Теорема Штейнера:

$$J = J_C + ma^2 ,$$

где J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс; J – момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии a; m – масса тела.

- Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z,

$$T_{\text{вр}} = J_z\omega^2/2 ,$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – его угловая скорость.

- Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения,

$$T = \frac{1}{2}m\upsilon_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2 ,$$

где m – масса тела; υ_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

- Момент силы относительно неподвижной точки

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}] ,$$

где **r** – радиус-вектор, проведенный из этой точки в точку приложения силы **F**.

- Модуль момента силы

$$M = Fl ,$$

где l – плечо силы (кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения).

- Работа при вращении тела

$$dA = M_z d\varphi,$$

где dφ – угол поворота тела; M_z – момент силы относительно оси z.

● Момент импульса (момент количества движения) твердого тела относительно оси вращения

$$L_z = \sum m_i \upsilon_i r_i = J_z,$$

где r_i – расстояние от оси z до отдельной частицы тела; $m_i\upsilon_i$ – импульс этой частицы; J_z – момент инерции тела относительно оси z; ω – его угловая скорость.

● Уравнение (закон) динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}; \quad M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon,$$

где ε – угловое ускорение; J_z – момент инерции тела относительно оси z.

● Закон сохранения момента импульса (момента количества движения) для замкнутой системы:

$$\mathbf{L} = \text{const}.$$

● Напряжение при упругой деформации

$$\sigma = F / S,$$

где F – растягивающая (сжимающая) сила; S – площадь поперечного сечения.

● Относительное продольное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon = \Delta l / l,$$

где Δl – изменение длины тела при растяжении (сжатии); l – длина тела до деформации.

● Относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \Delta d / d,$$

где Δd – изменение диаметра стержня при растяжении (сжатии); d – диаметр стержня.

● Связь между относительным поперечным сжатием (растяжением) ε' и относительным продольным растяжением (сжатием) ε

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon,$$

μ

● Закон Гука для продольного растяжения (сжатия):

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E – модуль Юнга.

● Потенциальная энергия упругорастянутого (сжатого) стержня

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} F\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{ES}{l}(\Delta l)^2 = \frac{E\varepsilon^2}{2}V,$$

где V – объем тела.

1.5. ТЯГОТЕНИЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

● Третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

где T_1 и T_2 – периоды обращения планет вокруг Солнца; R_1 и R_2 – большие полуоси их орбит.

● Закон всемирного тяготения:

$$\mathbf{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{F}$ – сила всемирного тяготения (гравитационная сила) двух материальных точек массами m_1 и m_2, r – расстояние между точками; G – гравитационная постоянная.

● Сила тяжести

$$P = mg,$$

где m – масса тела; g – ускорение свободного падения.

● Напряженность поля тяготения

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}/m,$$

где $\mathbf{F}$ – сила тяготения, действующая на материальную точку массой m, помещенную в данную точку поля.

● Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -Gm_1 m_2/r.$$

● Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \Pi/m,$$

где Π – потенциальная энергия материальной точки массой m, помещенной в данную точку поля.

● Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью:

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы координатных осей.

- Первая и вторая космические скорости:

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_0}, \quad \upsilon_2 = \sqrt{2gR_0},$$

где R_0 – радиус Земли.

- Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета:

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} + \mathbf{F}_{\text{ин}},$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}'$ – соответственно ускорение тела в инерциальной и неинерциальной системах отсчета, $\mathbf{F}_{\text{ин}}$ – силы инерции.

- Силы инерции

$$\mathbf{F}_{\text{ин}} = \mathbf{F}_{\text{и}} + \mathbf{F}_{\text{ц}} + \mathbf{F}_{\text{к}},$$

где $\mathbf{F}_{\text{и}}$ – силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением $\boldsymbol{a}_0$: $\mathbf{F}_{\text{и}} = -m\boldsymbol{a}_0$; $\mathbf{F}_{\text{ц}}$ – центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R): $\mathbf{F}_{\text{ц}} = -m\omega^2 R$; $\mathbf{F}_{\text{к}}$ – кориолисова сила инерции (силы инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью $\mathbf{v}'$ во вращающейся системе отсчета:

$$\mathbf{F}_{\text{к}} = 2m[\mathbf{v}'\omega].$$

1.6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

- Гидростатическое давление столба жидкости на глубине h

$$p = \rho g h,$$

где p – плотность жидкости.

- Закон Архимеда:

$$F_{\text{А}} = \rho g V,$$

где $F_{\text{А}}$ – выталкивающая сила; V – объем вытесненной жидкости.

- Уравнение неразрывности

$$S\upsilon = \text{const},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки тока; υ – скорость жидкости.

- Уравнение Бернулли для стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const},$$

где p – статическое давление жидкости для определенного сечения трубки тока; υ – скорость жидкости для этого же сечения; $\rho\upsilon^2/2$ – динамическое давление жидкости для этого же сечения; h – высота, на которой расположено сечение; ρgh – гидростатическое давление.

Для трубки тока, расположенной горизонтально,

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + p = \text{const} .$$

● Формула Торричелли, позволяющая определить скорость истечения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде,

$$\upsilon = \sqrt{2gh} ,$$

где h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

● Сила внутреннего трения между слоями текущей жидкости

$$F = \eta \left| \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x} \right| S ,$$

где η – динамическая вязкость жидкости; $\Delta\upsilon/\Delta x$ – градиент скорости; S – площадь соприкасающихся слоев.

● Число Рейнольдса, определяющее характер движения жидкости,

$$\text{Re} = \rho < \upsilon > d/\eta ,$$

где ρ – плотность жидкости; $< \upsilon >$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например, диаметр трубы.

● Формула Стокса, позволяющая определить силу сопротивления, действующую на медленно движущийся в вязкой среде шарик,

$$F = 6\pi\eta r\upsilon ,$$

где r – радиус шарика; υ – его скорость.

● Формула Пуазейля, позволяющая определить объем жидкости, протекающий за время t через капиллярную трубку длиной l,

$$V = \pi R^4 \Delta p t/(8\eta l) ,$$

где R – радиус трубки; Δp – разность давлений на концах трубки.

● Лобовое сопротивление

$$R_x = C_x \frac{\rho\upsilon^2}{2} S ,$$

где C_x – безразмерный коэффициент сопротивления; ρ – плотность среды; υ – скорость движения тела; S – площадь наибольшего поперечного сечения тела.

- Подъемная сила

$$R_y = C_y \frac{\rho \upsilon^2}{2} S ,$$

где C_y – безразмерный коэффициент подъемной силы.

1.7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ (ЧАСТНОЙ) ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

- Преобразования Лоренца:

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \upsilon x / c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} ,$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью υ в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y, z' и z – параллельны; c – скорость распространения света в вакууме.

- Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} ,$$

где τ – промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами; τ' – промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами.

- Релятивистское (лоренцево) сокращение длины

$$l = l_0 \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2} ,$$

где l_0 – длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l – длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью υ.

- Релятивистский закон сложения скоростей:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \upsilon u_x / c^2}; \qquad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 - \upsilon u_x / c^2};$$

$$u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}{1 - \upsilon u_x / c^2},$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью υ в положительном направления оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, оси y' и y, z' и z – параллельны.

- Интервал s_{12} между событиями (инвариантная величина)

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \mathrm{inv},$$

где t_{12} – промежуток времени между событиями 1 и 2; l_{12} – расстояние между точками, где произошли события.

- Масса релятивистской частицы и релятивистский импульс

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

где m_0 – масса покоя.

- Основной закон релятивистской динамики:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t},$$

где $\mathbf{p}$ – релятивистский импульс частицы.

- Полная и кинетическая энергии релятивистской частицы:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T, \quad T = (m - m_0)c^2 .$$

- Связь между энергией и импульсом релятивистской частицы:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2, \quad pc = \sqrt{T\left(T + 2m_0 c^2\right)} .$$

- Энергия связи системы

$$E_{\text{св}} = \sum_{i=1}^{n} m_{0i} c^2 - M_0 c^2 \ ,$$

где m_{0i} – масса покоя i-й частицы в свободном состоянии; M_0 – масса покоя системы, состоящей из n частиц.

2. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

● Закон Бойля-Мариотта:

$$pV = \text{const} \quad \text{при} \quad T = \text{const}, \quad m = \text{const},$$

где p – давление; V – объем; T – термодинамическая температура; m – масса газа.

● Закон Гей-Люссака:

$$V = V_0(1+\alpha t), \text{ или } V_1/V_2 = T_1/T_2$$
$$\text{при } p = \text{const}, \; m = \text{const};$$

$$p = p_0(1+\alpha t), \text{ или } p_1/p_2 = T_1/T_2$$
$$\text{при } V = \text{const}, \; m = \text{const},$$

где t – температура по шкале Цельсия; V_0 и p_0 – соответственно объем и давление при 0 °С; коэффициент $\alpha = 1/273\ \text{К}^{-1}$; индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям.

● Закон Дальтона для давления смеси n идеальных газов:

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_i ,$$

где p_i – парциальное давление i-го компонента смеси.

● Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона-Менделеева):

$$pV_m = RT \text{ (для одного моля газа);}$$
$$pV = (m/M)RT \text{ (для произвольной массы газа),}$$

где V_m – молярный объем; R – молярная газовая постоянная; M – молярная масса газа; m – масса газа; $m/M = \nu$ – количество вещества.

● Зависимость давления газа от концентрации n молекул и температуры

$$p = nkT ,$$

где k – постоянная Больцмана ($k = R/N_A$, N_A – постоянная Авогадро).

● Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2 ,$$

или

$$pV = \frac{2}{3} N\left(\frac{m_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2}{2}\right) = \frac{2}{3} E ,$$

или

$$pV = \frac{1}{3} N m_0 \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle^2 ,$$

где $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул; E – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа; n – концентрация молекул, m_0 – масса одной молекулы; $m = Nm_0$ – масса газа; N – число молекул в объеме газа V.

● Скорость молекул:

– наиболее вероятная

$$\upsilon_{\text{в}} = \sqrt{2RT / M} = \sqrt{2kT / m_0} ;$$

– средняя квадратичная

$$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3RT / M} = \sqrt{3kT / m_0} ;$$

– средняя арифметическая

$$\upsilon = \sqrt{8RT / (\pi M)} = \sqrt{8kT / (\pi m_0)} ,$$

где m_0 – масса одной молекулы.

● Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT .$$

● Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по скоростям:

$$f(\upsilon) = \frac{\mathrm{d}N(\upsilon)}{N \mathrm{d}\upsilon} = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \upsilon^2 \mathrm{e}^{-m_0 \upsilon^2 / (2kT)} ,$$

где функция $f(\upsilon)$ распределения молекул по скоростям определяет относительное число молекул $\mathrm{d}N(\upsilon)/N$ из общего числа N молекул, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + \mathrm{d}\upsilon$.

● Закон Максвелла для распределения молекул идеального газа по энергиям теплового движения:

$$f(\varepsilon) = \frac{\mathrm{d}N(\varepsilon)}{N \mathrm{d}\varepsilon} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} \mathrm{e}^{-\varepsilon / (kT)} ,$$

где функция $f(\varepsilon)$ распределения молекул по энергиям теплового движения определяет относительное число молекул $\mathrm{d}N(\varepsilon)/N$ из общего числа N молекул, которые имеют кинетические энергии $\varepsilon = m_0\upsilon^2/2$, заключенные в интервале от ε до ε + dε.

- Барометрическая формула

$$p_h = p_0 \mathrm{e}^{-Mg(h-h_0)/(RT)},$$

где p_h и p_0 – давление газа на высоте h и h_0.

- Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле:

$$n = n_0 \mathrm{e}^{-Mgh/(RT)} = n_0 \mathrm{e}^{-m_0 gh/(kT)}, \quad \text{или} \quad n = n_0 \mathrm{e}^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 – концентрация молекул на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0 gh$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

- Среднее число соударений, испытываемых молекулой газа за 1 с,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle \upsilon \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

- Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{\langle \upsilon \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

- Закон теплопроводности Фурье:

$$Q = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} S t,$$

где Q – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через площадь S за время t; $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$ – градиент температуры; λ – теплопроводность:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения его молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

- Закон диффузии Фика:

$$M = -D \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} S t,$$

где M – масса вещества, переносимая посредством диффузии через площадь S за время t; $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x$ – градиент плотности; D – диффузия:

$$D = \frac{1}{3} \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle.$$

● Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости):

$$F = -\eta \frac{d\upsilon}{dx} S ,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями площадью S; $d\upsilon/dx$ – градиент скорости; η – динамическая вязкость:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\langle l\rangle .$$

2.2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

● Средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на одну степень свободы молекулы,

$$\langle\varepsilon_1\rangle = \frac{1}{2}kT .$$

● Средняя энергия молекулы

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT ,$$

где i – сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы $(i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}})$.

● Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu\frac{i}{2}RT = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT ,$$

где ν – количество вещества; m – масса газа; M – молярная масса газа; R – молярная газовая постоянная.

● Первое начало термодинамики

$$Q = \Delta U + A ,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное системе или отданное ею; ΔU – изменение ее внутренней энергии; A – работа системы против внешних сил.

● Первое начало термодинамики для малого изменения системы

$$dQ = dU + \delta A.$$

● Связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM ,$$

где M – молярная масса газа.

● Молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{i}{2}R, \quad C_p = \frac{i+2}{2}R .$$

● Уравнение Майера

$$C_p = C_V + R.$$

- Изменение внутренней энергии идеального газа

$$\mathrm{d}U = \frac{m}{M} C_V \mathrm{d}T.$$

- Работа, совершаемая газом при изменении его объема,

$$\delta A = p\mathrm{d}V.$$

- Полная работа при изменении объема газа

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\mathrm{d}V,$$

где V_1 и V_2 – соответственно начальный и конечный объемы газа.

- Работа газа:

– при изобарном процессе

$$A = p(V_2 - V_1), \quad \text{или} \quad A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1);$$

– при изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{V_2}{V_1}, \quad \text{или} \quad A = \frac{m}{M} RT \ln\frac{p_1}{p_2}.$$

- Уравнение адиабатического процесса (уравнение Пуассона):

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const}; \quad TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}; \quad T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \mathrm{const},$$

где $\gamma = C_p / C_V = (i+2)/i$ – показатель адиабаты.

- Работа в случае адиабатического процесса:

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2),$$

или

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 – соответственно начальные и конечные температура и объем газа.

- Термический коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное системой; Q_2 – количество теплоты, отданное системой; A – работа, совершаемая за цикл.

- Термический коэффициент полезного действия цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

● Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{i\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}U + \delta A}{T}.$$

2.3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

● Уравнение состояния реальных газов (уравнение Ван-дер-Ваальса) для моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT,$$

где V_m – молярный объем; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса, различные для разных газов.

● Уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

или

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = RT,$$

где $\nu = m / M$ – количество вещества.

● Внутреннее давление, обусловленное силами взаимодействия молекул,

$$p' = a / V_m^2.$$

● Связь критических параметров (объема, давления и температуры) с постоянными a и b Ван-дер-Ваальса:

$$V_{\text{к}} = 3b, \quad p_{\text{к}} = a/\left(27b^2\right), \quad T_{\text{к}} = 8a/(27Rb).$$

● Внутренняя энергия реального газа

$$U = \nu\left(C_V T - a/V_m\right),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

● Энтальпия системы

$$U_1 + p_1 V_1 = U_2 + p_2 V_2,$$

где индексы 1 и 2 соответствуют начальному и конечному состояниям системы.

● Поверхностное натяжение

$$\sigma = F/l, \quad \text{или} \quad \sigma = \Delta E/\Delta S,$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE – поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности пленки.

●

$$\Delta p = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)\ ,$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости; радиус кривизны положителен, если центр кривизны находится внутри жидкости (выпуклый мениск), и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости (вогнутый мениск). В случае сферической поверхности

$$\Delta p = 2\sigma / R\ .$$

● Высота подъема жидкости в капиллярной трубке

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}\ ,$$

где θ – краевой угол; *r* – радиус капилляра; *p* – плотность жидкости; *g* – ускорение свободного падения.

● Закон Дюлонга и Пти:

$$C_V = 3R\ ,$$

где C_V – молярная (атомная) теплоемкость химически простых твердых тел.

● Уравнение Клапейрона-Клаузиуса, позволяющее определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесно протекающем процессе,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}\ ,$$

где *L* – теплота фазового перехода; $(V_2 - V_1)$ – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; *T* – температура перехода (процесс изотермический).

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

● Закон Кулона:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{F}$ – сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2 в вакууме; r – расстояние между зарядами; ε_0 – электрическая постоянная, равная $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

● Напряженность и потенциал электростатического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0; \quad \varphi = \Pi/Q_0, \quad \text{или} \quad \varphi = A_\infty/Q_0,$$

где $\mathbf{F}$ – сила, действующая на точечный положительный заряд Q_0, помещенный в данную точку поля; П – потенциальная энергия заряда Q_0; A_∞ – работа перемещения заряда из данной точки поля за его пределы.

● Напряженность и потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии от заряда

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

● Поток вектора напряженности через площадку

$$\mathrm{d}\Phi_E = \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = E_n \mathrm{d}S,$$

где $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S\mathbf{n}$ – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к площадке; E_n – составляющая вектора $\mathbf{E}$ по направлению нормали к площадке.

● Поток вектора напряженности через произвольную поверхность S

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S E_n \mathrm{d}S.$$

● Принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i; \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i,$$

где $\mathbf{E}_i$, φ_i – соответственно напряженность и потенциал поля, создаваемого зарядом.

● Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi, \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы координатных осей.

● В случае поля, обладающего центральной или осевой симметрией,

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}.$$

● Электрический момент диполя (дипольный момент)

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ – плечо диполя.

● Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов:

$$\tau = \frac{dQ}{dl}; \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}; \quad \rho = \frac{dQ}{dV},$$

т.е. соответственно заряд, приходящийся на единицу длины, поверхности и объема.

● Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV,$$

где ε_0 – электрическая постоянная; $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности S; n – число зарядов; ρ – объемная плотность зарядов.

● Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E = \sigma/(2\varepsilon_0).$$

● Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E = \sigma/\varepsilon_0.$$

● Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра сферы:

$E = 0$ при $r < R$ (внутри сферы);

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ при $r \geq R$ (вне сферы).

● Напряженность поля, создаваемого объемно заряженным шаром радиусом R с общим зарядом Q на расстоянии r от центра шара:

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}$ при $r \leq R$ (внутри шара);

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ при $r \geq R$ (вне шара).

● Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным бесконечным цилиндром радиусом R на расстоянии r от оси цилиндра:

$E = 0$ при $r < R$ (внутри цилиндра);

$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r}$ при $r \geq R$ (вне цилиндра).

● Циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = \int_L E_l dl = 0,$$

где E_l – проекция вектора **E** на направление элементарного перемещения d**l**. Интегрирование производится по любому замкнутому пути L.

● Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2:

$$A_{12}=Q_0(\varphi_1-\varphi_2)\,, \quad \text{или} \quad A_{12}=Q_0\int_1^2 \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l}=Q_0\int_1^2 E_l \mathrm{d}l\ ,$$

где E_l – проекция вектора **E** на направление элементарного перемещения d**l**.

● Поляризованность

$$\mathbf{P}=\sum_i \mathbf{p}_i/V\ ,$$

где V – объем диэлектрика; $\mathbf{p}_i$ – дипольный момент *i*-й молекулы.

● Связь между поляризованностью диэлектрика и напряженностью электростатического поля:

$$\mathbf{P}=\chi\varepsilon_0\mathbf{E}\ ,$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость вещества.

● Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью χ:

$$\varepsilon=1+\chi\ .$$

● Связь между напряженностью E поля в диэлектрике и напряженностью E_0 внешнего поля:

$$E=E_0-P/\varepsilon_0\,,\ \text{или}\ E=E_0/\varepsilon.$$

● Связь между векторами электрического смещения и напряженностью электростатического поля:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\ .$$

● Связь между $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\ .$$

● Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:

$$\Phi_D=\oint_S \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_S D_n\mathrm{d}S=\sum_{l=1}^{n}Q_i\ ,$$

где $\sum\limits_{l=1}^{n}Q_i$ – алгебраическая сумма заключенных внутри замкнутой поверхности S свободных электрических зарядов; D_n – составляющая вектора $\mathbf{D}$ по направлению нормали к площадке – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью **n** к площадке. Интегрирование ведется по всей поверхности.

● Напряженность электростатического поля у поверхности проводника

$$E=\sigma/(\varepsilon_0\varepsilon)\,,$$

где σ – поверхностная плотность зарядов.

- Электроемкость уединенного проводника

$$C = Q/\varphi ,$$

где Q – заряд, сообщенный проводнику; φ – потенциал проводника.

- Емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d ,$$

где S – площадь каждой пластины конденсатора; d – расстояние между пластинами.

- Емкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(r_2/r_1)} ,$$

где l – длина обкладок конденсатора; r_1, r_2 – радиусы полых коаксиальных цилиндров.

- Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} ,$$

где r_1 и r_2 – радиусы концентрических сфер.

- Емкость системы конденсаторов при последовательном и параллельном соединении

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i} \quad \text{и} \quad C = \sum_{i=1}^{n} C_i ,$$

где C_i – емкость i-го конденсатора; n – число конденсаторов.

- Энергия уединенного заряженного проводника

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C} .$$

- Энергия взаимодействия системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i ,$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд Q_i всеми зарядами, кроме i-го.

- Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C} ,$$

где Q – заряд конденсатора; C – его емкость; $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между обкладками.

- Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}.$$

- Энергия электростатического поля плоского конденсатора

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} S d = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} V,$$

где S – площадь одной пластины; U – разность потенциалов между пластинами; $V = Sd$ – объем конденсатора.

- Объемная плотность энергии

$$w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2},$$

где D – электрическое смещение.

3.2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

- Сила и плотность электрического тока:

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}; \quad j = \frac{I}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения проводника.

- Плотность тока в проводнике

$$\mathbf{j} = ne\langle \mathbf{v} \rangle,$$

где $\langle \mathbf{v} \rangle$ – скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n – концентрация зарядов.

- Электродвижущая сила, действующая в цепи,

$$\mathcal{E} = A/Q_0, \quad \text{или} \quad \mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{ст}} \mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

где Q_0 – единичный положительный заряд; A – работа сторонних сил; $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ – напряженность поля сторонних сил.

- Сопротивление R однородного линейного проводника, проводимость G проводника и удельная электрическая проводимость γ вещества проводника

$$R = \rho l / S; \quad G = 1/R; \quad \gamma = 1/\rho,$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление; S – площадь поперечного сечения проводника; l – его длина.

- Сопротивление проводников при последовательном и параллельном соединении

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad \text{и} \quad \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i},$$

где R_i – сопротивление i-го проводника; n – число проводников.

- Зависимость удельного сопротивления ρ от температуры

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t),$$

где α – температурный коэффициент сопротивления.

- Закон Ома для:

– однородного участка цепи

$$I = U / R;$$

– неоднородного участка цепи

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}) / R;$$

– замкнутой цепи

$$I = \mathcal{E} / R,$$

где U – напряжение на участке цепи; R – сопротивление цепи (участка цепи); $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; $\mathcal{E}_{12}$ – э.д.с. источников тока, входящих в участок; $\mathcal{E}$ – э.д.с. всех источников тока цепи.

- Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ – напряженность электростатического поля.

- Работа тока за время t

$$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

- Мощность тока

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}.$$

- Закон Джоуля-Ленца:

$$Q = I^2Rt = IUt,$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t.

- Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$w = jE = \gamma E^2,$$

где w – удельная тепловая мощность тока.

- Правило Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i.$$

3.3. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ В МЕТАЛЛАХ, В ВАКУУМЕ И ГАЗАХ

- Контактная разность потенциалов на границе двух металлов 1 и 2

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e}\ln\frac{n_1}{n_2},$$

где A_1, A_2 – работы выходов свободных электронов из металлов; k – постоянная Больцмана; n_1, n_2 – концентрации свободных электронов в металлах.

● Термоэлектродвижущая сила

$$\mathcal{E} = \frac{k}{e}(T_1 - T_2)\ln\frac{n_1}{n_2},$$

где $(T_1 - T_2)$ – разность температур спаев.

● Формула Ричардсона-Дешмана

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-A/(kT)},$$

где $j_{\text{нас}}$ – плотность тока насыщения термоэлектронной эмиссии; C – постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов; A – работа выхода электрона из металла.

3.4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

● Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{B}$ – магнитная индукция; $\mathbf{p}_m$ – магнитный момент контура с током:

$$\mathbf{p}_m = IS\mathbf{n},$$

где S – площадь контура с током; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности контура.

● Связь магнитной индукции $\mathbf{B}$ и напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

где μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость среды.

● Закон Био-Савара-Лапласа:

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}\frac{I[\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^2},$$

где $\mathrm{d}\mathbf{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемая элементом длины $\mathrm{d}\mathbf{l}$ проводника с током I; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный от $\mathrm{d}\mathbf{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция.

● Модуль вектора $\mathrm{d}\mathbf{B}$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi}\frac{I \mathrm{d}l \sin\alpha}{r^2},$$

где α – угол между векторами $\mathrm{d}\mathbf{l}$ и $\mathbf{r}$.

● Принцип суперпозиции (наложения) магнитных полей:

$$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i \ ,$$

где $\mathbf{B}$ – магнитная индукция результирующего поля; $\mathbf{B}_i$ – магнитные индукции складываемых полей.

● Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R},$$

где R – расстояние от оси проводника.

● Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R},$$

где R – радиус кривизны проводника.

● Закон Ампера:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I[\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{B}],$$

где d**F** – сила, действующая на элемент длины d**l** проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией **B**.

● Модуль силы Ампера:

$$\mathrm{d}F = IBl \sin\alpha \ ,$$

где α – угол между векторами d**l** и **B**.

● Сила взаимодействия двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} \mathrm{d}l \ ,$$

где R – расстояние между проводниками; dl – отрезок проводника.

● ●●

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\mathbf{v}\,\mathbf{r}]}{r^3},$$

где r – радиус-вектор, проведенный от заряда к точке наблюдения.

● Модуль магнитной индукции

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin\alpha \ ,$$

где α – угол между векторами **v** и **r**.

● Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\,\mathbf{B}],$$

где **F** – сила, действующая на заряд Q, движущийся в магнитном поле со скоростью **v**.

- Формула Лоренца

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

где **F** – результирующая сила, действующая на движущийся заряд Q, если на него действует электрическое поле напряженностью **E** и магнитное поле индукцией **B**.

- Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d},$$

где B – магнитная индукция; I – сила тока; d – толщина пластинки; $R = 1/(en)$ – постоянная Холла (n – концентрация электронов).

- Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора **B**):

$$\oint_L \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_L B_l \mathrm{d}l = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

где μ_0 – магнитная постоянная; d**l** – вектор элементарной длины контура, направленной вдоль обхода контура; $B_l = B\cos\alpha$ – составляющая вектора **B** в направлении касательной контура L произвольной формы (с учетом выбранного направления обхода); угол между векторами **B** и $\mathrm{d}\mathbf{l}$; $\sum_{k=1}^{n} I_k$ – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром.

- Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B = \mu_0 NI/l,$$

где l – длина соленоида.

- Магнитная индукция поля внутри тороида (в вакууме)

$$B = \mu_0 NI/2\pi r.$$

- Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через площадку dS

$$\mathrm{d}\Phi_B = \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{S} = B_n \mathrm{d}S,$$

где d**S** = dS **n** – вектор, модуль которого равен dS, а направление совпадает с нормалью **n** к площадке; B_n – проекция вектора **B** на направление нормали к площадке.

- Поток вектора магнитной индукции через произвольную поверхность S

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S B_n \mathrm{d}S.$$

● Потокосцепление (полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида)

$$\Phi = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S ,$$

где μ – магнитная проницаемость среды.

● Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

$$\mathrm{d}A = I \mathrm{d}\Phi ,$$

где $\mathrm{d}\Phi$ – магнитный поток, пересеченный движущимся проводником.

● Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$\mathrm{d}A = I \mathrm{d}\Phi' ,$$

где $\mathrm{d}\Phi'$ – изменение магнитного потока, сцепленного с контуром.

3.5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

● Закон Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} ,$$

где $\mathcal{E}_i$ – э.д.с. индукции.

● Э.д.с. индукции, возникающая в рамке площадью S при вращении рамки с угловой скоростью в однородном магнитном поле с индукцией B ,

$$\mathcal{E}_i = BS\omega \sin \omega t ,$$

где ωt – мгновенное значение угла между вектором **B** и вектором нормали **n** к плоскости рамки.

● Магнитный поток, создаваемый током I в контуре с индуктивностью L,

$$\Phi = LI .$$

● Э.д.с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} ,$$

где L – индуктивность контура.

● Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l} ,$$

где N – число витков соленоида; l – его длина.

● Токи при размыкании и при замыкании цепи

$$I = I_0 e^{-t/\tau};\ I = I_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

где $\tau = L / R$ – время релаксации (L – индуктивность; R – сопротивление).

● Э.д.с. взаимной индукции (э.д.с., индуцируемая изменением силы тока в соседнем контуре)

$$\mathcal{E} = -L_{12} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t},$$

где L_{12} – взаимная индуктивность контуров.

● Взаимная индуктивность двух катушек (с числом витков N_1 и N_2, намотанных на общий тороидальный сердечник)

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S,$$

где μ_0 – магнитная проницаемость сердечника; I – длина сердечника по средней линии; S – площадь сердечника.

● Коэффициент трансформации

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{I_1}{I_2},$$

где $N, \mathcal{E}, I$ – соответственно число витков, э.д.с. и сила тока в обмотках трансформатора.

● Энергия магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре, по которому течет ток I,

$$W = LI^2 / 2.$$

● Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

3.6. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

● Связь орбитального магнитного $\mathbf{p}_m$ и орбитального механического $\mathbf{L}_e$ моментов электрона:

$$\mathbf{p}_m = -g\mathbf{L}_e = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}_e,$$

где $g = e/(2m)$ – гиромагнитное отношение орбитальных моментов.

● Намагниченность

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}_m / V = \sum \mathbf{p}_a / V,$$

где $\mathbf{P}_m = \sum \mathbf{p}_a$ – магнитный момент магнетика, равный векторной сумме магнитных моментов отдельных молекул.

● Связь между намагниченностью и напряженностью магнитного поля:

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость вещества.

- Связь между векторами $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}),$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

- Связь между магнитной проницаемостью и магнитной восприимчивостью вещества:

$$\mu = 1 + \chi .$$

- Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора **B**):

$$\oint_L \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_L B_l \mathrm{d}l = \mu_0(I + I'),$$

где $\mathrm{d}\mathbf{l}$ – вектор элементарной длины контура, направленный вдоль обхода контура; B_l – составляющая вектора **B** в направлении касательной контура L произвольной формы; I и I' – соответственно алгебраические суммы макротоков (токов проводимости) и микротоков (молекулярных токов), охватываемых заданным контуром.

- Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

$$\oint_L \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} = I ,$$

где I – алгебраическая сумма токов проводимости, охватываемых контуром L.

3.7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

- Плотность тока смещения

$$\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t},$$

где **D** – электрическое смещение; $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ – плотность тока смещения в вакууме; $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ – плотность тока поляризации.

- Полная система уравнений Максвелла:

– в интегральной форме:

$$\oint_L \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{S} ; \qquad \oint_S \mathbf{D}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V ;$$

$$\oint_L \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\mathbf{S} ; \qquad \oint_S \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{S} = 0 .$$

– в дифференциальной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} ; \qquad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho ;$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} ; \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 ,$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$; $\mathbf{j} = \gamma\mathbf{E}$ (ε_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости; γ – удельная проводимость вещества).

4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

4.1. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

● Уравнение гармонических колебаний

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где s – смещение колеблющейся величины от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота; $\nu = 1/T$ – частота; T – период колебаний; φ_0 – начальная фаза.

● Скорость и ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 s.$$

● Кинетическая энергия колеблющейся точки массой m

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi).$$

● Потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

● Полная энергия

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

● Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки массой m

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \text{или} \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где k – коэффициент упругости $(k = \omega_0^2 m)$.

● Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},$$

где m – масса пружинного маятника; k – жесткость пружины.

● Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g},$$

где J – момент инерции маятника относительно оси колебаний; l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; $L = J / (ml)$ – приведенная длина физического маятника; g – ускорение свободного падения.

● Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}\ ,$$

где l – длина маятника.

● Формула Томсона, устанавливающая связь между периодом T собственных колебаний в контуре без активного сопротивления и индуктивностью L и емкостью контура C,

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\ .$$

● Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре и его решение:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0; \quad Q = Q_{\text{m}}\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right),$$

где Q_{m} – амплитуда колебаний заряда; $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота контура.

● Амплитуда A результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)\ ,$$

где A_1 и A_2 – амплитуды складываемых колебаний; φ_1 и φ_2 – их начальные фазы.

● Начальная фаза результирующего колебания

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}\ .$$

● Период биений

$$T = 2\pi/\Delta\omega\ .$$

● Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{2xy}{AB}\cos\varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi\ .$$

где A и B – амплитуды складываемых колебаний; φ – разность фаз обоих колебаний.

● Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы и его решение:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = 0\ ; \qquad s = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)\ ,$$

где s – колеблющаяся величина, описывающая физический процесс; δ – коэффициент затухания ($\delta = r\,/\,(2m)$ в случае механических колебаний и $\delta = R/(2L)$ в случае электромагнитных колебаний); ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота затухающих колебаний; $A_0 \mathrm{e}^{-\delta t}$ – амплитуда затухающих колебаний.

- Декремент затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \mathrm{e}^{\delta T},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

- Логарифмический декремент затухания

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N},$$

где $\tau = 1\,/\,\delta$ – время релаксации; N – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в е раз.

- Добротность колебательной системы

$$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

-

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = x_0 \cos\omega t; \quad s = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где s – колеблющаяся величина, описывающая физический процесс ($x_0 = F_0\,/\,m$ – в случае механических колебаний; $x_0 = U_m\,/\,L$ – в случае электромагнитных колебаний);

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 4\delta^2\omega^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

- Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

- Полное сопротивление Z цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C, на концы которой подается переменное напряжение $U = U_m \cos\omega t$,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2},$$

где $R_L = \omega L$ – реактивное индуктивное сопротивление; $R_C = 1\,/\,(\omega C)$ – реактивное емкостное сопротивление.

- Сдвиг фаз между напряжением и силой тока:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

- Действующие (эффективные) значения тока и напряжения:

$$I = I_m/\sqrt{2}; \quad U = U_m/\sqrt{2},$$

- Средняя мощность, выделяемая в цепи переменного тока,

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos\varphi,$$

где

$$\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

4.2. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

- Связь длины волны λ, периода T колебаний и частоты ν:

$$\lambda = \upsilon T; \quad \upsilon = \lambda\nu,$$

где υ – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость).

- Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси x,

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $\xi(x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A – амплитуда волны; ω – циклическая (круговая) частота; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(\upsilon T) = \omega/\upsilon$ – волновое число (λ – длина волны; υ – фазовая скорость; T – период колебаний); φ_0 – начальная фаза колебаний.

- Связь между разностью фаз Δφ и разностью хода Δ:

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda}.$$

- Условия максимума и минимума амплитуды при интерференции волн:

$$\Delta_{\max} = \pm 2m\frac{\lambda}{2}; \quad \Delta_{\min} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$.

- Фазовая υ и групповая u скорости, а также связь между ними:

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}; \quad u = \frac{d\omega}{dk}; \quad u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}.$$

- Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

- Координаты пучностей и узлов:

$$x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}; \quad x_п = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

- Уровень интенсивности звука

$$L = \lg(I/I_0),$$

где I – интенсивность звука; I_0 – интенсивность звука на пороге слышимости (I_0 = 1 кВт/м^2).

● Скорость распространения звуковых волн в газах

$$\upsilon = \sqrt{\gamma RT / M} \ ,$$

где R – малярная газовая постоянная; M – молярная масса; $\gamma = C_p / C_V$ – отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме; T – термодинамическая температура.

● Эффект Доплера в акустике:

$$\nu = \frac{(\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}})\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}} ,$$

где ν – частота звука, воспринимаемая движущимся приемником; ν_0 – частота звука, посылаемая источником; $\upsilon_{\text{пр}}$ – скорость движения приемника; $\upsilon_{\text{ист}}$ – скорость движения источника; υ – скорость распространения звука. Верхний знак берется, если при движении источника или приемника происходит их сближение, нижний знак – в случае их взаимного удаления.

4.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

● Фазовая скорость распространения электромагнитных волн в среде:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} ,$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость распространения света в вакууме; ε_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ε и μ – соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды.

● Связь между мгновенными значениями напряженностей электрического E и магнитного H полей электромагнитной волны:

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H ,$$

где E и H – соответственно мгновенные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны.

● Уравнения плоской электромагнитной волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi); \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) ,$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ – соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω – круговая частота; $k = \omega / \upsilon$ – волновое число; φ – начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

● Объемная плотность энергии электромагнитного поля

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} .$$

●

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}].$$

5. ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

5.1. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКИ

● Законы отражения и преломления света:

$$i_1' = i_1; \quad \sin i_1 / \sin i_2 = n_{21},$$

где i_1 – угол падения; i_1' – угол отражения; i_2 – угол преломления; $n_{21} = n_2 / n_1$ – относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 – абсолютные показатели преломления первой и второй среды.

● Предельный угол полного отражения при распространении света из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную

$$\sin i_{\text{пр.}} = n_2 / n_1 = n_{21}.$$

● Преломление на сферической поверхности (для параксиальных лучей)

$$\frac{n_2}{b} - \frac{n_1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

где R – радиус сферической поверхности; n_1 и n_2 – показатели преломления сред по разные стороны сферической поверхности; a – расстояние от точки, лежащей на оптической оси сферической поверхности, до преломляющей поверхности; b – расстояние от поверхности до изображения. В формуле $R > 0$ – для выпуклой поверхности, $R < 0$ – для вогнутой.

● Формула сферического зеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b – соответственно расстояния от полюса зеркала до предмета и изображения; f – фокусное расстояние зеркала; R – радиус кривизны зеркала.

● Оптическая сила тонкой линзы

$$\Phi = \frac{1}{f} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где f – фокусное расстояние линзы: $N = n / n_1$ – относительный показатель преломления (n и n_1 – соответственно абсолютные показатели преломления линзы и окружающей среды); R_1 и R_2 – радиусы кривизны поверхностей ($R > 0$ для выпуклой поверхности; $R < 0$ для вогнутой); a и b – соответственно расстояния от оптического центра линзы до предмета и изображения.

● Сила излучения

$$I_e = \Phi_e / \omega ,$$

где Φ_e – поток излучения источника; ω – телесный угол, в пределах которого это излучение распространяется.

- Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником,

$$\Phi_0 = 4\pi I ,$$

где I – сила света источника.

- Светимость поверхности

$$R = \Phi / S ,$$

где Φ – световой поток, испускаемый поверхностью; S – площадь этой поверхности.

- Яркость B светящейся поверхности в некотором направлении φ

$$B_\varphi = I / (S \cos\varphi) ,$$

где I – сила света; S – площадь поверхности; φ – угол между нормалью к элементу поверхности и направлением наблюдения.

- Освещенность E поверхности

$$E = \Phi / S ,$$

где Φ – световой поток, падающий на поверхность; S – площадь этой поверхности.

- Связь светимости R и яркости B при условии, что яркость не зависит от направления,

$$R = \pi B .$$

5.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

- Скорость света в среде

$$\upsilon = c / n ,$$

где c – скорость света в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

- Разность фаз двух когерентных волн

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\Delta ,$$

где $L = sn$ – оптическая длина пути (s – геометрическая длина пути световой волны в среде; n – показатель преломления этой среды); $\Delta = L_2 - L_1$ – оптическая разность хода двух световых волн; λ_0 – длина волны в вакууме.

- Условие интерференционных максимумов:

$$\Delta = \pm m\lambda_0 , \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

● Условие интерференционных минимумов:

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

● Ширина интерференционной полосы

$$\Delta x = \frac{l}{d}\lambda_0 ,$$

где d – расстояние между двумя когерентными источниками, находящимися на расстоянии l от экрана, параллельного обоим источникам, при условии $l >> d$.

● Условия максимумов и минимумов при интерференции света, отраженного от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пленки, находящейся в воздухе ($n_0 = 1$),

$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 ,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots ;$$

$$2dn\cos r \pm \frac{\lambda_0}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где d – толщина пленки; n – показатель ее преломления; i – угол падения; r – угол преломления. В общем случае член $\pm\lambda_0/2$ обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела: если $n > n_0$, то необходимо употреблять знак «плюс», если $n < n_0$ – знак «минус».

● Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем свете)

$$r_m = \sqrt{(m - 1/2)\lambda_0 R} , \; m = 1, 2, 3, \ldots ,$$

где m – номер кольца; R – радиус кривизны линзы.

●

$$r_m^* = \sqrt{m\lambda_0 R} , \quad m = 1, 2, \ldots .$$

● В случае «просветления оптики» интерферирующие лучи в отраженном свете гасят друг друга при условии

$$n = \sqrt{n_\text{с}} ,$$

где $n_\text{с}$ – показатель преломления стекла; n – показатель преломления пленки.

5.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

● Радиус внешней границы m-й зоны Френеля для сферической волны

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda} ,$$

где m – номер зоны Френеля; λ – длина волны; a и b – соответственно расстояния диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника и от экрана, на котором дифракционная картина наблюдается.

● Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели, на которую свет падает нормально:

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где a – ширина щели; φ – угол дифракции; m – порядок спектра; λ – длина волны.

● Условия главных максимумов и дополнительных минимумов дифракционной решетки, на которую свет падает нормально:

$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$d\sin\varphi = \pm 2m'\frac{\lambda}{N}, \ m' = 0, 1, 2, 3, \ldots, \text{ кроме } 0, N, 2N, \ldots,$$

где d – период дифракционной решетки; N – число штрихов решетки.

● Период дифракционной решетки

$$d = 1/N_0,$$

где N_0 – число щелей, приходящихся на единицу длины решетки.

● Условие дифракционных максимумов от пространственной решетки (формула Вульфа-Брэггов):

$$2d\sin\vartheta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ – угол скольжения.

● Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}.$$

● Наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек могут быть разрешены в фокальной плоскости объектива,

$$\varphi \geq 1{,}22\lambda/D.$$

где D – диаметр объектива; λ – длина волны света.

● Разрешающая способность дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

где λ, $(\lambda + \delta\lambda)$ – длины волн двух соседних спектральных линий, разрешаемых решеткой; m – порядок спектра; N – общее число штрихов решетки.

5.4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

● Связь угла φ отклонения лучей призмой и преломляющего угла A призмы:

$$\varphi = A(n-1),$$

где n – показатель преломления призмы.

- Связь между показателем преломления и диэлектрической проницаемостью вещества:

$$n = \sqrt{\varepsilon} \ .$$

- Уравнение вынужденных колебаний оптического электрона под действием электрической составляющей поля волны (простейшая задача дисперсии)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t \ ,$$

где eE_0 – амплитудное значение силы, действующей на электрон со стороны поля волны; ω_0 – собственная частота колебаний электрона; ω – частота внешнего поля; m – масса электрона.

- Зависимость показателя преломления вещества n от частоты ω внешнего поля, согласно элементарной электронной теории дисперсии,

$$n^2 = 1 + \frac{n_{0i}}{\varepsilon_0}\sum\frac{e^2/m}{\omega_{0i}^2 - \omega^2} \ ,$$

где ε_0 – электрическая постоянная; $n_{0\,i}$ – концентрация электронов с собственной частотой $\omega_{0\,i}$; m – масса электрона; e – заряд электрона.

- Закон ослабления света в веществе (закон Бугера):

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \ ,$$

где I_0 и I – интенсивности плоской монохроматической световой волны соответственно на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной x; α – коэффициент поглощения.

- Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 + (\upsilon/c)\cos\vartheta} \ ,$$

где ν_0 и ν – соответственно частоты электромагнитного излучения, испускаемого источником и воспринимаемого приемником; υ – скорость источника электромагнитного излучения относительно приемника; c – скорость света в вакууме; ϑ – угол между вектором скорости $\mathbf{v}$ и направлением наблюдения, измеряемый в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

- Поперечный эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме $(\vartheta = \pi/2)$:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \upsilon^2/c^2} \ .$$

- Эффект Вавилова-Черенкова:

$$\cos\vartheta = c/(n\upsilon),$$

где ϑ – угол между направлением распространения излучения и вектором скорости частицы; n – показатель преломления среды.

5.5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

- Степень поляризации света:

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

где I_{max} и I_{min} – соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

● Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha ,$$

где I – интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 – интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α – угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора.

● Закон Брюстера:

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

где i_B – угол падения, при котором отраженный от диэлектрика луч является плоскополяризованным; n_{21} – относительный показатель преломления.

● Оптическая разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами на пути l в ячейке Керра

$$\Delta = l(n_o - n_e) = klE^2 ,$$

где n_o, n_e – показатели преломления соответственно обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси; E – напряженность электрического поля; k – постоянная.

● Оптическая разность хода для пластинки в четверть волны

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm(m + 1/4)\lambda_0, \quad m = 0, 1, 2, \dots ,$$

где знак «плюс» соответствует отрицательным кристаллам, «минус» – положительным; λ_0 – длина волны в вакууме.

● Угол поворота плоскости поляризации:

– для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d ;$$

– для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha]Cd ,$$

где d – длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе; $\alpha_0[\alpha]$ – удельное вращение; C – массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

5.6. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

● Закон Стефана-Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4 ,$$

где R_e – энергетическая светимость (излучательность) черного тела; σ – постоянная Стефана-Больцмана; T – термодинамическая температура.

● Связь энергетической светимости R_e и спектральной плотности энергетической светимости $r_{\nu,T}$ $(r_{\lambda,T})$ черного тела

$$R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T}\,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\,\mathrm{d}\lambda .$$

● Энергетическая светимость серого тела

$$R_T^c = A_T\,\sigma T^4 ,$$

где A_T – поглощательная способность серого тела.

● Закон смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = b/T ,$$

где $\lambda_{\max}$ – длина волны, соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости черного тела; b – постоянная Вина.

● Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости черного тела от температуры

$$(r_{\lambda,T}) = CT^5 ,$$

где $C = 1{,}30 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м^3 · К^5).

● Формула Рэлея-Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}kT ,$$

где k – постоянная Планка.

● Энергия кванта

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda .$$

● Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{h\nu/(kT)}-1},$$

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5}\frac{h\nu}{\mathrm{e}^{hc/(kT\lambda)}-1}.$$

● Связь радиационной $T_{\text{р}}$ и истинной T температур:

$$T_{\text{р}} = \sqrt[4]{A_{\text{т}}}\,T ,$$

где $A_{\text{т}}$ – поглощательная способность серого тела.

● Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$\varepsilon = h\nu = A + T_{\max} ,$$

где $\varepsilon = h\nu$ – энергия фотона, падающего на поверхность металла; A – работа выхода электрона из металла; $T_{\max} = m\upsilon_{\max}^2/2$ – максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона.

● «Красная граница» фотоэффекта для данного металла:

$$\nu_0 = A/h; \quad \lambda_0 = hc/A ,$$

где λ_0 – максимальная длина волны излучения (ν_0 – соответственно минимальная частота), при которой фотоэффект еще возможен.

- Масса и импульс фотона:

$$m_\gamma = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2}; \quad p_\gamma = \frac{h\nu}{c},$$

где $h\nu$ – энергия фотона.

- $p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho)$,

где $E_e = Nh\nu$ – облученность поверхности (энергия всех фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени); ρ – коэффициент отражения; w – объемная плотность энергии излучения.

- Изменение длины волны рентгеновского излучения при комптоновском рассеянии:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1-\cos\vartheta) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\vartheta}{2} = 2\lambda_C \sin^2\frac{\vartheta}{2},$$

где λ и λ' – длины волн падающего и рассеянного излучения; m_0 – масса электрона; ϑ – угол рассеяния; $\lambda_C = h/(m_0 c)$ – комптоновская длина волны.

6. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ, МОЛЕКУЛ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

6.1. ТЕОРИЯ АТОМОВ ВОДОРОДА ПО БОРУ

- Обобщенная формула Бальмера, описывающая серии в спектре водорода,

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где ν – частота спектральных линий в спектре атома водорода; R – постоянная Ридберга; m определяет серию (m = 1, 2, 3, ...); n определяет отдельные линии соответствующей серии (n = m +1, m + 2, ...): m = 1 (серия Лаймана), m = 2 (серия Бальмера), m = 3 (серия Пашена), m = 4 (серия Брэкета), m = 5 (серия Пфунда), m = 6 (серия Хэмфри).

- Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний):

$$m_e \upsilon r_n = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где m_e – масса электрона; υ – скорость электрона по n-й орбите радиусом r_n.

- Второй постулат Бора (правило частот):

$$h\nu = E_n - E_m,$$

где E_n и E_m – соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения).

- Энергия электрона на n-й стационарной орбите

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где Z – порядковый номер элемента в системе Менделеева; ε_0 – электрическая постоянная.

6.2. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

- Связь дебройлевской волны частицы с импульсом p:

$$\lambda = h/p = h/(m\upsilon),$$

где m – масса частицы; υ – ее скорость.

- Фазовая скорость свободно движущейся со скоростью υ частицы массой m

$$\upsilon_{\text{фаз}} = \omega/k = E/p = c^2/\upsilon,$$

где $E = \hbar\omega$ – энергия частицы (ω – круговая частота); $p = \hbar k$ – импульс ($k = 2\pi/\lambda$ – волновое число).

- Групповая скорость свободно движущейся частицы

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp}.$$

● Соотношения неопределенностей:

– для координаты и импульса частицы:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h;$$
$$\Delta y \Delta p_y \geq h;$$
$$\Delta z \Delta p_z \geq h,$$

где Δx, Δy, Δz – неопределенности координат; Δp_x, Δp_y, Δp_z – неопределенности соответствующих проекций импульса частицы на оси координат;

– для энергии и времени

$$\Delta E \Delta t \geq h\ ,$$

где ΔE – неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt – время пребывания системы в данном состоянии.

● Вероятность нахождения частицы в объеме dV

$$\mathrm{d}W = \Psi\Psi\,\mathrm{d}V = |\ \Psi\ |^2\,\mathrm{d}V\ ,$$

где $\Psi = \Psi(x,\ y,\ z,\ t)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы; Ψ^* – функция, комплексно сопряженная с Ψ; $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ – квадрат модуля волновой функции;

– для стационарных состояний

$$\mathrm{d}W = \psi\psi\,\mathrm{d}V = |\ \psi\ |^2\,\mathrm{d}V,$$

где $\psi = \psi(x,\ y,\ z)$ – координатная (амплитудная) часть волновой функции.

● Условие нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ \Psi\ |^2\,\mathrm{d}V = 1,$$

где интегрирование производится по всему бесконечному пространству, т.е. по координатам $x,\ y,\ z$ от $-\infty$ до $+\infty$.

● Вероятность обнаружения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\ \psi(x)\ |^2\,\mathrm{d}x.$$

● Среднее значение физической величины L, характеризующей частицу, находящуюся в состоянии, описываемом волновой функцией Ψ,

$$\langle L\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}L|\ \Psi\ |^2\,\mathrm{d}V.$$

● где $\Psi=\Psi(x,\,y,\,z,\,t)$ – волновая функция, описывающая состояние частицы; $\hbar=h/(2\pi)$; m – масса частицы; Δ – оператор Лапласа $\left(\Delta\Psi=\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)$; $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица; $U=U(x,\,y,\,z,\,t)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется.

● Уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0\,,$$

где $U(r)$ – координатная часть волновой функции $\left(\Psi(x,\,y,\,z,\,t)=\psi(x,\,y,\,z)e^{-i(E/\hbar)t}\right)$; $U=U(x,y,z)$ – потенциальная энергия частицы; E – полная энергия частицы.

●

где A – амплитуда волн де Бройля; $p_x=k\hbar$ – импульс частицы; $E=\hbar\omega$ – энергия частицы.

● Собственные значения энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»,

$$E_n=n^2\,\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2},\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где l – ширина ямы.

● Собственная волновая функция, соответствующая вышеприведенному собственному значению энергии,

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\,.$$

● Коэффициент прозрачности D прямоугольного потенциального барьера конечной ширины l,

$$D=D_0\exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)l}\,\right],$$

где D_0 – множитель, который можно приравнять единице; U – высота потенциального барьера; E – энергия частицы.

● Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора в квантовой механике:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)\psi=0\,,$$

где $m\omega_0^2x^2/2=U$ – потенциальная энергия осциллятора; ω_0 – собственная частота колебаний осциллятора;
m – масса частицы.

● Собственные значения энергии гармонического осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots .$$

● Энергия нулевых колебаний гармонического осциллятора

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 .$$

6.3. ЭЛЕМЕНТЫ СОВРЕМЕННОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ И МОЛЕКУЛ

● Потенциальная энергия $U(r)$ взаимодействия электрона с ядром в водородоподобном атоме

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где r – расстояние между электроном и ядром; Z – порядковый номер элемента; ε_0 – электрическая постоянная.

● Собственное значение энергии E_n электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

● Энергия ионизации атома водорода

$$E_i = -E_1 = \frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} .$$

● Момент импульса (механический орбитальный момент) электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)} ,$$

где l – орбитальное квантовое число, принимающее при заданном n следующие значения: $l = 0, 1, \ldots, n-1$ (всего n значений).

● Проекция момента импульса на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{lz} = \hbar m_l ,$$

где m_l – магнитное квантовое число, принимающее при заданном l следующие значения: $m_l = 0, \pm 1, \ldots, \pm l$ (всего $(2l + 1)$ значений).

● Правила отбора для орбитального и магнитного квантовых чисел

$$\Delta l = \pm 1 \quad \text{и} \quad \Delta m_l = 0, \pm 1 .$$

● Нормированная волновая функция, отвечающая ls-состоянию (основному состоянию) электрона в атоме водорода,

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} ,$$

где $a = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2)$ – величина, совпадающая с первым боровским радиусом.

● Вероятность обнаружить электрон в атоме водорода, находящемся в ls-состоянии, в интервале от r до $r + \mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}W = |\,\psi_{100}\,|^2\,\mathrm{d}V = |\,\psi_{100}\,|^2\,4\pi r^2 \mathrm{d}r\,.$$

● Спин (собственный механический момент импульса) электрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}\,,$$

где s – спиновое квантовое число (s = 1/2).

● Проекция спина на направление z внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = \hbar m_s\,,$$

где m_s – магнитное спиновое квантовое число ($m_s = \pm 1/2$).

● Принцип Паули:

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \;\text{ или }\; 1\,,$$

где $Z(n, l, m_l, m_s)$ – число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел: n – главного, l – орбитального, m_l – магнитного, m_s – магнитного спинового.

● Максимальное число электронов $Z(n)$, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом n,

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2\,.$$

● Коротковолновая граница сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = ch/(eU)\,,$$

где e – заряд электрона; U – разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке.

● Закон Мозли, определяющий частоты спектральных линий характеристического рентгеновского излучения,

$$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где R – постоянная Ридберга, Z – порядковый номер элемента в периодической системе; σ – постоянная экранирования; m определяет рентгеновскую серию (m = 1, 2, 3, ...); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1$, $m + 2$, ...).

● Закон Мозли для линии K_α (σ = 1):

$$\nu = R(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right).$$

6.4. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКИ

● Распределение Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} - 1} \qquad \text{и} \qquad \langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} + 1}\,,$$

где $\langle N_i \rangle$ – соответственно средние числа бозонов и фермионов в квантовом состоянии с энергией E_i; k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура; μ – химический потенциал. При $e^{(E_i-\mu)/(kT)} >> 1$ оба распределения переходят в классическое распределение Максвелла-Больцмана $\langle N_i \rangle = Ae^{-E_i/(kT)}$, где $A = e^{\mu/(kT)}$.

● Распределение Ферми-Дирака по энергиям для свободных электронов в металле:

$$\langle N(E) \rangle = \frac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1},$$

где E_F – энергия Ферми;

– при $T = 0$ К

$$\langle N(E) \rangle = \begin{cases} 1 \text{ при } E < F_F, \\ 0 \text{ при } E > F_F. \end{cases}$$

● Характеристическая температура Дебая (при $T << T_D$)

$$T_D = \hbar\omega_D / k ,$$

● Электрическая проводимость металла, согласно квантовой теории электропроводности металлов,

$$\gamma = \frac{ne^2 \langle l_F \rangle}{m \langle u_F \rangle},$$

где n – концентрация электронов проводимости в металле; $\langle l_F \rangle$ – средняя длина свободного пробега электрона, имеющего энергию Ферми; $\langle u_F \rangle$ – средняя скорость теплового движения такого электрона.

6.5. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

●

$$n_e = C_1 e^{-(E_2-E_F)/(kT)} \quad \text{и} \quad n_p = C_2 e^{-(E_1-E_F)/(kT)},$$

где E_2 – энергия, соответствующая дну зоны проводимости; E_1 – энергия, соответствующая верхней границе валентной зоны; E_F – энергия Ферми; T – термодинамическая температура; C_1 и C_2 – постоянные, зависящие от температуры и эффективных масс электронов проводимости и дырок (при равенстве последних $C_1 = C_2$).

● Уровень Ферми в собственном полупроводнике

$$E_F = \Delta E / 2 .$$

где ΔE – ширина запрещенной зоны.

● Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)},$$

где γ_0 – постоянная, характерная для данного полупроводника.

7. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

- Радиус ядра

$$R = R_0 A^{1/3},$$

где $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м; A – массовое число (число нуклонов в ядре).

- Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = \left[Zm_p + (A-Z)m_n - m_{\text{я}}\right]c^2 = \\ = [Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_n - m]c^2,$$

где m_p, m_n, $m_{\text{я}}$ – соответственно массы протона, нейтрона и ядра; Z – зарядовое число ядра (число протонов в ядре); A – массовое число; $m_{\text{H}} = m_p + m_e$ – масса атома водорода $\left({}_1^1\text{H}\right)$; m – масса атома.

- Дефект массы ядра

$$\Delta m = \left[Zm_p + (A-Z)m_n\right] - m_{\text{я}} = [Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_n] - m.$$

- Удельная энергия связи (энергия связи, отнесенная к одному нуклону)

$$\delta E_{\text{св}} = E_{\text{св}} / A.$$

- Число ядер, распавшихся в среднем за промежуток времени от t до $t + \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t,$$

где N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t; λ – постоянная радиоактивного распада.

- Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N – число нераспавшихся ядер в момент времени t; N_0 – начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени $t = 0$); λ – постоянная радиоактивного распада.

- Число ядер, распавшихся за время t,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

- Связь периода полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного распада λ

$$T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda.$$

● Связь среднего времени жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

$$\tau = 1/\lambda \,.$$

● Активность нуклида

$$A = \left| \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} \right| = \lambda N \,.$$

● Правила смещения для:

– α-распада

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \,;$$

– β^{-}-распада

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} \,;$$

– β^{+}-распада

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{+1}\mathrm{e} \,.$$

● Символическая запись ядерной реакции:

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} + a \rightarrow {}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} + b \qquad \text{или} \qquad {}^{A}_{Z}\mathrm{X}(a\,,\,b){}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} \,,$$

где ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ и ${}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y}$ – исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A', a и b – соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

● Энергия ядерной реакции

$$Q = c^{2}\left[(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)\right] ,$$

где m_1 и m_2 – массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $(m_3 + m_4)$ – суммы масс покоя ядер продуктов реакции. Если $Q > 0$ – экзотермическая реакция, $Q < 0$ – эндотермическая реакция.

● Энергия ядерной реакции представляется также в виде

$$Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4) \,,$$

где T_1, T_2, T_3, T_4 – соответственно кинетические энергии ядра-мишени, бомбардирующей частицы, испускаемой частицы и ядра продукта реакции.

● Скорость нарастания цепной реакции

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{N(k-1)}{T} \,, \quad \text{откуда} \quad N = N_0 \mathrm{e}^{(k-1)t/T} \,,$$

где N_0 – число нейтронов в начальный момент времени; N – число нейтронов в момент времени t; T – среднее время жизни одного поколения; k – коэффициент размножения нейтронов.

Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	g	9,81 м/с^2
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Фарадея	F	$96{,}48 \cdot 10^{3}$ Кл/моль
Молярная газовая постоянная		8,31 Дж/моль
Молярный объем идеального газа при нормальных условиях	V_m	$22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м^3/моль
Постоянная Больцмана	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Скорость света в вакууме	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ м/с
Постоянная Стефана-Больцмана	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4)
Постоянная закона смещения Вина	b	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	h $\hbar = h/2\pi$	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с $1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

Продолжение табл.

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Постоянная Ридберга	R	$1{,}10 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Радиус Бора	a	$0{,}529 \cdot 10^{-10}$ м
Масса покоя электрона	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	m_p	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя нейтрона	m_n	$1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса покоя α-частицы	m_α	$6{,}6425 \cdot 10^{-27}$ кг
Атомная единица массы	а.е.м.	$1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг
Отношение массы протона к массе электрона	m_p / m_e	1836,15
Элементарный заряд	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл
Отношение заряда электрона к его массе	e / m_e	$1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
Комптоновская длина волны электрона	Λ	$2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м
Энергия ионизации атома водорода	E_i	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$ Дж (13,6 эВ)
Магнетон Бора	μ_B	$0{,}927 \cdot 10^{-23}$ А $\cdot$ м^2
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	μ_0	$12{,}566 \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Единицы и размерности физических величин в СИ

Величина		Единица		Выражение через основные и дополнительные единицы
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
Основные единицы				
Длина	L	метр	м	
Масса	M	килограмм	кг	
Время	T	секунда	с	
Сила электрического тока	I	ампер	А	
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	К	
Количество вещества	N	моль	моль	
Сила света	J	кандела	кд	
Дополнительные единицы				
Плоский угол	–	радиан	рад	
Телесный угол	–	стерадиан	ср	

Продолжение табл.

Величина		Единица		Выражение через основные и дополнительные единицы
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
Производные единицы				
Частота	T^{-1}	герц	Гц	$с^{-1}$
Сила, вес	LMT^{-2}	ньютон	Н	$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Давление, механическое напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-2}$
Мощность, поток энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	$м^2 \cdot кг \cdot с^{-3}$
Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	$с \cdot А$

Электрическое напряжение, электрический потенциал, разность электрических потенциалов, электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	м^2 · кг · с$^{-3}$ · А$^{-1}$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарад	Ф	м$^{-2}$ · кг$^{-1}$ · с^4 · А^2
Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	м^2 · кг · с$^{-3}$ · А$^{-2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	м$^{-2}$ · кг$^{-1}$ · с^3 · А^2
Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	м^2 · кг · с$^{-2}$ · А$^{-1}$
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	кг · с$^{-2}$ · А$^{-1}$
Индуктивность, взаимная индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	м^2 · кг · с$^{-2}$ · А$^{-2}$
Световой поток	**J**	люмен	лм	кд · ср
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	м$^{-2}$ · кд · ср

Активность изотопа (активность нуклида в радиоактивном источнике)	T^{-1}	беккерель	Бк	$с^{-1}$
Поглощенная доза излучения	$L^{-2}T^{-2}$	грей	Гр	$м^{-2} \cdot с^{-2}$

Соотношения между единицами измерения СИ и некоторыми единицами других систем, а также внесистемными единицами

Физическая величина	Соотношения
Длина	1 Å = 10^{-10} м
Масса	1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	1 год = $3{,}16 \cdot 10^{7}$ с 1 сутки = 86 400 с
Объем	1 л = 10^{-3} $м^3$
Скорость	1 км/ч = 0,278 м/с
Угол поворота	1 об = 6,28 рад
Сила	1 дин = 10^{-5} Н 1 кГ = 9,81 Н
Давление	1 дин/$см^2$ = 0,1 Па 1 кГ/$м^2$ = 9,81 Па 1 ат = $9{,}81 \cdot 10^{4}$ Па 1 атм = $1{,}01 \cdot 10^{5}$ Па 1 мм рт. ст = 133,3 Па
Работа, энергия	1 эрг = 10^{-7} Дж 1 кГ·м = 9,81 Дж 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

Мощность	1 кал = 4,19 Дж 1 эрг/с = 10^{-7} Вт 1 кГ·м/с = 9,81 Вт
Заряд	1 СГСЭ$_q$ = $3{,}33 \cdot 10^{-10}$ Кл
Напряжение, э.д.с.	1 СГСЭ$_U$ = 300 В
Электрическая емкость	1 см = $1{,}11 \cdot 10^{-12}$ Ф
Напряженность магнитного поля	1 Э = 79,6 А/м

Астрономические величины

Космическое тело	Средний радиус, м	Масса, кг	Средняя плотность, г/см^3	Период вращения вокруг оси, сутки
Солнце	$6{,}95 \cdot 10^8$	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	1,41	25,4
Земля	$6{,}37 \cdot 10^6$	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	5,52	1,00
Луна	$1{,}74 \cdot 10^6$	$7{,}35 \cdot 10^{22}$	3,30	27,3

Расстояние от центра Земли до центра Солнца: $1{,}49 \cdot 10^{11}$ м.
Расстояние от центра Земли до центра Луны: $3{,}84 \cdot 10^8$ м.

Планета Солнечной системы	Среднее расстояние от Солнца, 10^6 км	Период обращения вокруг Солнца, в годах	Масса в единицах массы Земли
Меркурий	57,87	0,241	0,056
Венера	108,14	0,615	0,817
Земля	149,50	1,000	1,000
Марс	227,79	1,881	0,108
Юпитер	777,8	11,862	318,35
Сатурн	1426,1	29,458	95,22

Уран	2867,7	84,013	14,58
Нептун	4494	164,79	17,26

Плотности веществ

<table>
<tr><th>Твердое вещество</th><th>г/см^3</th><th>Жидкость</th><th>г/см^3</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Алмаз
Алюми-
ний
Вольфрам
Графит
Железо
(сталь)
Золото
Кадмий
Кобальт
Лед
Медь
Молибден
Натрий
Никель
Олово
Платина
Пробка
Свинец
Серебро
Титан
Уран
Фарфор
Цинк</td><td rowspan="3">3,5
2,7
19,1
1,6
7,8
19,3
8,65
8,9
0,916
8,9
10,2
0,97
8,9
7,4
21,5
0,20
11,3
10,5
4,5
19,0
2,3
7,0</td><td>Бензол
Вода
Глицерин
Касторовое
масло
Керосин
Ртуть
Сероуглерод
Спирт
Тяжелая во-
да
Эфир</td><td>0,88
1,00
1,26
0,90
0,80
13,6
1,26
0,79
1,1
0,72</td></tr>
<tr><th>Газ (при нормальных условиях)</th><th>кг/м^3</th></tr>
<tr><td>Азот
Аммиак
Водород
Воздух
Кислород
Метан
Углекислый
газ
Хлор</td><td>1,25
0,77
0,09
1,293
1,43
0,72
1,98
3,21</td></tr>
</table>

Упругие постоянные. Предел прочности

Материал	Модуль Юнга E, ГПа	Модуль сдвига G, ГПа	Коэффициент Пуассона μ	Предел прочности на разрыв σ_m, ГПа	Сжимаемость β, $ГПа^{-1}$
Алюминий	70	26	0,34	0,10	0,014
Медь	130	40	0,34	0,30	0,007
Свинец	16	5,6	0,44	0,015	0,022
Сталь (железо)	200	81	0,29	0,60	0,006
Стекло	60	30	0,25	0,05	0,025
Вода	–	–	–	–	0,49

Тепловые постоянные твердых тел

Вещество	Удельная теплоемкость c, Дж/(г · К)	Дебаевская температура θ, К	Температура плавления, °С	Удельная теплота плавления q, Дж/г
Алюминий	0,90	374	660	321
Железо	0,46	467	1535	270
Лед	2,09	–	0	333
Медь	0,39	329	1083	175
Свинец	0,13	89	328	25
Серебро	0,23	210	960	88

Примечание. Значения удельных теплоемкостей соответствуют нормальным условиям.

Коэффициент теплопроводности

Вещество	χ, Дж/(м · с · К)
Вода	0,59
Воздух	0,023
Дерево	0,20
Стекло	2,90

Некоторые постоянные жидкостей

Жидкость	Вязкость η, мПа · с	Поверхностное натяжение α, мН/м	Удельная теплоемкость c, Дж/(г · К)	Удельная теплота парообразования q, Дж/(г · К)
Вода	10	73	4,18	2250
Глицерин	1500	66	2,42	–
Ртуть	16	470	0,14	284
Спирт	12	24	2,42	853

Примечание. Приведенные значения величин соответствуют: η и α – комнатной температуре (20 °С), c – нормальным условиям, q – нормальному атмосферному давлению.

Постоянные газов

Газ (относительная молекулярная масса)	$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$	Теплопроводность χ, $\frac{\text{мВт}}{\text{м·К}}$	Вязкость η, мкПа · с	Диаметр молекулы d, нм	Постоянные Ван-дер-Ваальса	
					a, $\frac{\text{Па·м}^6}{\text{моль}^2}$	b, $10^{-6}\ \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
He (4)	1,67	141,5	18,9	0,20	–	–
Ar (40)	1,67	16,2	22,1	0,35	0,132	32
H_2 (2)	1,41	168,4	8,4	0,27	0,024	27
N_2 (28)	1,40	24,3	16,7	0,37	0,137	39
O_2 (32)	1,40	24,4	19,	0,3	0,13	32

			2	5	7	
CO_2 (44)	1,30	23,2	14,0	0,40	0,367	43
H_2O (18)	1,32	15,8	9,0	0,30	0,554	30
Воздух (29)	1,40	24,1	17,2	0,35	–	–

Примечание. Значения γ, χ и η – при нормальных условиях.

Давление водяного пара, насыщающего пространство при разных температурах

t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па	t, °C	$p_н$, Па
–5	400	8	1070	40	7 335
0	609	9	1145	50	12 302
1	656	10	1225	60	19 817
2	704	12	1396	70	31 122
3	757	14	1596	80	47 215
4	811	16	1809	90	69 958
5	870	20	2328	100	101 080
6	932	25	3165	150	486240
7	1025	30	4229	200	1 549 890

Диэлектрические проницаемости

Диэлектрик	ε	Диэлектрик	ε
Вода	81	Полиэтилен	2,3
Воздух	1,00058	Слюда	7,5
Воск	7,8	Спирт	26
Керосин	2,0	Стекло	6,0
Парафин	2,0	Фарфор	6,0
Плексиглас	3,5	Эбонит	2,7

Удельные сопротивления проводников и изоляторов

Проводник	Удельное сопротивление (при 20°С), нОм · м	Температурный коэффициент a, кК$^{-1}$	Изолятор	Удельное сопротивление, Ом · м
Алюминий	25	4,5	Бумага	10^{10}
Вольфрам	50	4,8	Парафин	10^{15}
Железо	90	6,5	Слюда	10^{13}
Золото	20	4,0	Фарфор	10^{13}
Медь	16	4,3	Шеллак	10^{14}
Свинец	190	4,2	Эбонит	10^{14}
Серебро	15	4,1	Янтарь	10^{17}

Магнитные восприимчивости пара- и диамагнетиков

Парамагнетик	$\mu - 1$, 10^{-6}	Диамагнетик	$\mu - 1$, 10^{-6}
Азот	0,013	Водород	–0,063
Воздух	0,38	Бензил	–7,5
Кислород	1,9	Вода	–9,0
Эбонит	14	Медь	–10,3
Алюминий	23	Стекло	–12,6
Вольфрам	176	Каменная соль	–12,6
Платина	360	Кварц	–15,1
Жидкий кислород	3400	Висмут	–176

Показатели преломления *n*

Газ	n	Жидкость	n	Твердое тело	n
Азот	1,00030	Бензол	1,50	Алмаз	2,42
Воздух	1,00029	Вода	1,33	Кварц плавленый	1,46
Кислород	1,00027	Глицерин	1,47	Стекло (обычное)	1,50
		Сероуглерод	1,63		

Примечание. Показатели преломления зависят и от длины волны света, поэтому приведенные здесь значения n следует рассматривать как условные.

Для кристаллов с двойным лучепреломлением

Длина волны λ, нм	Цвет	Исландский шпат		Кварц	
		n_e	n_o	n_e	n_o
687	Красный	1,484	1,653	1,550	1,541
656	Оранжевый	1,485	1,655	1,551	1,542
589	Желтый	1,486	1,658	1,553	1,544
527	Зеленый	1,489	1,664	1,556	1,547
486	Голубой	1,491	1,668	1,559	1,550
431	Сине-фиолетовый	1,495	1,676	1,564	1,554
400	Фиолетовый	1,498	1,683	1,568	1,558

Вращение плоскости поляризации
Естественное вращение в кварце

Длина волны λ, нм	Постоянная вращения α, град/мм
275	120,0
344	70,6
373	58,8
405	48,9
436	41,5
49	31,1
590	21,8
656	17,4
670	16,6

Магнитное вращение (λ = 589 нм)

Жидкость	Постоянная Верде *V*, угл. мин/А
Бензол	2,59
Вода	0,016
Сероуглерод	0,053
Спирт этиловый	1,072

П р и м е ч а н и е. Приведенные значения постоянной Верде соответствуют комнатной температуре.

Работа выхода электрона из металлов

Металл	*A*, эВ	Металл	*A*, эВ	Металл	*A*, эВ
Алюминий	3,74	Калий	2,15	Никель	4,84
Барий	2,29	Кобальт	4,25	Платина	5,29
Висмут	4,62	Литий	2,39	Серебро	4,28
Вольфрам	4,50	Медь	4,47	Титан	3,92
Железо	4,36	Молибден	4,27	Цезий	1,89
Золото	4,58	Натрий	2,27	Цинк	3,74

Энергия ионизации

Вещество	E_i, Дж	E_i, эВ
Водород	$2{,}18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3{,}94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Литий	$1{,}21 \cdot 10^{-17}$	75,6
Ртуть	$1{,}66 \cdot 10^{-18}$	10,4

Подвижность ионов в газах, м^2/(В · с)

Газ	Положительные ионы	Отрицательные ионы
Азот	$1{,}27 \cdot 10^{-4}$	$1{,}81 \cdot 10^{-4}$
Водород	$5{,}4 \cdot 10^{-4}$	$7{,}4 \cdot 10^{-4}$
Воздух	$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	$1{,}9 \cdot 10^{-4}$

Край *K*-полосы поглощения

Z	Элемент	$\lambda_к$, пм	Z	Элемент	$\lambda_к$, пм
23	Ванадий	226,8	47	Серебро	48,60
26	Железо	174,1	50	Олово	42,39
27	Кобальт	160,4	74	Вольфрам	17,85
28	Никель	148,6	78	Платина	15,85
29	Медь	138,0	79	Золото	15,35
30	Цинк	128,4	82	Свинец	14,05
42	Молибден	61,9	92	Уран	10,75

Массовые коэффициенты ослабления (рентгеновское излучение, узкий пучок)

λ, пм	Массовый коэффициент ослабления μ / ρ, см^2/г				
	воздух	вода	алюминий	медь	свинец
10		0,16	0,16	0,36	3,8
20		0,18	0,28	1,5	4,9
30		0,29	0,47	4,3	14
40		0,44	1Д	9,8	31
50	0,48	0,66	2,0	19	54
60	0,75	1,0	3,4	32	90

70	1,3	1,5	5,1	48	139
80	1,6	2,1	7,4	70	
90	2Д	2,8	11	98	
100	2,6	3,8	15	131	
150	8,7	12	46	49	
200	21	28	102	108	
250	39	51	194	198	

Константы двухатомных молекул

Молекула	Межъядерное расстояние d, 10^{-8} см	Частота колебаний ω, 10^{14} $с^{-1}$	Молекула	Межъядерное расстояние d, 10^{-8} см	Частота колебаний ω, 10^{14} $с^{-1}$
H_2	0,741	8,279	HF	0,917	7,796
N_2	1,094	4,445	HCl	1,275	5,632
O_2	1,207	2,977	HBr	1,413	4,991
F_2	1,282	2,147	HI	1,604	4,350
S_2	1,889	1,367	CO	1,128	4,088
Cl_2	1,988	1,064	NO	1,150	3,590
Br_2	2,283	0,609	OH	0,971	7,035
I_2	2,666	0,404			

Периоды полураспада радионуклидов

Кобальт ^{60}Co	5,2 года (β)	Радон ^{222}Rn	3,8 сут (α)
Стронций ^{90}Sr	28 лет (β)	Радий ^{226}Ra	1620 лет (α)
Полоний ^{10}Po	138 сут (α)	Уран ^{238}U	$4,5 \cdot 10^9$ лет (α)

Массы легких нуклидов

Z	Нуклид	Избыток массы нуклида M–A, а.е.м.	Z	Нуклид	Избыток массы нуклида M–A, а.е.м.
0	n	0,00867	6	^{11}C	0,01143
1	^{1}H	0,00783		^{12}C	0
	^{2}H	0,01410		^{13}C	0,00335
	^{3}H	0,01605	7	^{13}N	0,00574
2	^{3}He	0,01603		^{14}N	0,00307
	^{4}He	0,00260		^{15}N	0,00011
3	^{6}Li	0,01513	8	^{15}O	0,00307
	^{7}Li	0,01601		^{16}O	–0,00509
4	^{7}Be	0,01693		^{17}O	–0,00087
	^{8}Be	0,00531	9	^{19}F	–0,00160
	^{9}Be	0,01219	10	^{20}Ne	–0,00756
	^{10}Be	0,01354	11	^{23}Na	–0,01023
5	^{10}Be	0,01294		^{24}Na	–0,00903
	^{11}Be	0,00930	12	^{24}Mg	–0,01496

Примечание. Здесь М – масса нуклида в а.е.м., А – массовое число.

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Множитель	Приставка	Обозначение приставки: международное	Обозначение приставки: русское	Множитель	Приставка	Обозначение приставки: международное	Обозначение приставки: русское
10^{-18}	атто	a	а	10^{1}	дека	da	да
10^{-15}	фемто	f	ф	10^{2}	гекто	h	г

10^{-12}	пико	p	п	10^{3}	кило	k	к
10^{-9}	нано	n	н	10^{6}	мега	M	М
10^{-6}	микро	μ	мк	10^{9}	гига	G	Г
10^{-3}	милли	m	м	10^{12}	тера	T	Т
10^{-2}	санти	c	с	10^{15}	пета	P	П
10^{-1}	деци	d	д	10^{18}	экса	E	Э

Греческий алфавит

Обозначения букв	Название букв	Обозначения букв	Название букв
Α, α	альфа	Ν, ν	ню
Β, β	бета	Ξ, ξ	кси
Γ, γ	гамма	Ο, ο	омикрон
Δ, δ	дельта	Π, π	пи
Ε, ε	эпсилон	Ρ, ρ	ро
Ζ, ζ	дзета	Σ, σ	сигма
Η, η	эта	Τ, τ	тау
Θ, θ, ϑ	тета	Υ, υ	ипсилон
Ι, ι	йота	Φ, φ	фи
Κ, κ	каппа	Χ, χ	хи
Λ, λ	ламбда	Ψ, ψ	пси
Μ, μ	мю	Ω, ω	омега

ОГЛАВЛЕНИЕ