ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Издательство ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания для студентов 2 курса
инженерно-технических специальностей дневной формы обучения

Тамбов
Издательство ТГТУ
2008

УДК 51
ББК В143я73-5
Т462

Рекомендовано редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики ТГТУ
В.В. Васильев

Составитель

В.Г. Тихомиров

Т462 Линейная алгебра : методические указания / сост. В.Г. Тихомиров. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 16 с. – 100 экз.

Изложены основные положения линейной алгебры, предписанные к изучению действующим образовательным стандартом в области естественно-математических дисциплин.

Предназначены для студентов 2 курса инженерно-технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 51
ББК В143я73-5

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические указания

Составитель

ТИХОМИРОВ Вадим Геннадьевич

Редактор Е.С. Мордасова
Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано в печать 26.02.08
Формат 60 × 84/16. 0,93 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 124

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ И СТРУКТУРА МЕТОДИЧЕСКИХ РЕКОМЕНДАЦИЙ

Часто встречающиеся в тексте термины заменены сокращениями: линейное пространство – ЛП, кроме того, буква V будет обозначать произвольное ЛП; линейно зависимая – ЛЗ; линейно независимая – ЛНЗ; система векторов – СВ; система линейных (алгебраических) уравнений – СЛАУ. Слова "Условие", "Действие", "Замечание", "Пример" заменяются первой буквой соответствующего слова с нумерацией, например, **У2** будем читать как условие 2 или второе условие, или **П2.6** будет означать пример 6 из параграфа 2. Особо отметим **П1.3 – 1.5**, поскольку они рассматриваются на протяжении всего изложения – целесообразно их запомнить.

Представленный материал состоит из параграфов, каждый из которых посвящен типовой задаче, отраженной в его названии. Параграф, как правило, состоит из двух частей: в первой дается схема решения определенной типовой задачи, а во второй – эта схема применятся к конкретным задачам. Отметим, что если *хотя бы одно* из условий данной схемы *не выполняется*, то выполнять дальнейшие действия или проверять последующие условия нецелесообразно – следует остановиться и дать отрицательный ответ на вопрос, поставленный в соответствующей типовой задаче. Кроме того, некоторые действия (условия) взаимно пересекаются или достаточно просты, поэтому решения, их содержащие, не дробятся по пунктам **Д1**, **Д2**, **Д3**, … . В остальных случаях такое дробление присутствует.

Номера задач для контроля освоения материала выделяются курсивом, например, *5*, а решенных – полужирным курсивом, как то ***6***. Такое деление достаточно условно, поскольку есть примеры, в которых часть решения предлагается для самостоятельного рассмотрения.

1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X – некоторое непустое множество, для любых элементов которого определено понятие равенства. Чтобы установить, является ли X линейным (векторным) пространством достаточно проверить выполнимость следующих условий:

У1. Определена операция "+", называемая сложением, т.е. определено правило, по которому любым двум элементам $x, y \in X$ ставится в соответствие некоторый элемент $x+y$ из X.

У2. Определена операция "$\cdot$" умножения произвольного элемента из X на число α, результатом которой является элемент из X.

У3. Введенные выше операции связаны соотношениями 1) – 8):

1) $\forall x, y \in X : x+y = y+x$; 2) $\forall x, y, z \in X : (x+y)+z = x+(y+z)$;

3) $\exists \theta \in X$: $\forall x \in X$ $x+\theta = x$; 4) $\forall x \in X \exists y \in X$: $x+y=\theta$;

5) $\forall x \in X$: $1 \cdot x = x$; 6) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}, \forall x \in X$: $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$;

7) $\forall \alpha, \beta \in \mathrm{R}, \forall x \in X$: $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

8) $\forall \alpha \in \mathrm{R}, \forall x, y \in X$: $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

Установить, какие из множеств являются ЛП.

1. $X = \{0,1,2\}$. Под "$+$" понимается сумма чисел из X, а "$\cdot$" означает умножение действительного числа на любое число из X, например, $1+2=3$ и $10{,}7 \cdot 2 = 21{,}4$, откуда легко заметить, что $1+2 \not\in X$ и $10{,}7 \cdot 2 \not\in X$. Таким образом, действия "$+$" и "$\cdot$" не вводят, соответственно, операций сложения и умножения на число в данном множестве X, а значит, X *с указанными действиями* "$+$" и "$\cdot$" не является ЛП.

2. $X = \{0,1,2\}$. Под $x_1 + x_2$ будем понимать остаток от деления числа $x_1 + x_2$ на 3, а под $\alpha \cdot x = x$. Например, $1+2=0$ и $10{,}7 \cdot 2 = 2$.

У1, **У2**. Очевидно, что указанные действия задают в X операции сложения и умножения на число, соответственно.

У3. Легко заметить, что соотношения 1) – 6) для **У1** выполняются (проверьте самостоятельно, учитывая, что $\theta = 0$). Вместе с тем, соотношение 7) не выполняется, так как, с одной стороны, $(\alpha+\beta) \cdot 1 = 1$, а с другой, $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = 1+1 = 2$. Таким образом, X с указанными действиями "$+$" и "$\cdot$" не является ЛП.

3. Пусть P_n – множество всех многочленов от одной переменной степени не выше фиксированного числа n. Например, пусть $n=3$, тогда $2x^2+x-7 \in \mathrm{P}_3$, также $2x+4 \in \mathrm{P}_3$, а $x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 4 \not\in \mathrm{P}_3$.

Под "$+$" будем понимать сумму многочленов, а запись $\alpha P_k(x)$ будет означать, что каждый из коэффициентов многочлена $P_k(x)$ умножается на число α. Кроме того, отметим, что $\theta = 0 \in \mathrm{P}_n$ и предварительно обозначим $p = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$, $q = \sum_{i=0}^{l} b_i x^i$, $r = \sum_{i=0}^{m} c_i x^i$, где $k \le l \le m \le n$, а коэффициенты $a_i, b_i, c_i \in \mathrm{R}$, и еще $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$.

У1. $p+q = \sum_{i=0}^{s} (a_i + b_i) x^i$, где $s = \max\{k, l\}$ и для удобства будем полагать, что $a_i = 0$, если $k < l$, или $b_i = 0$, если $k > l$. Понятно, что $s \le k$ и $s \le l$, значит, $s \le n$, т.е. $p+q \in \mathrm{P}_n$.

У2. Пусть $\alpha \in \mathrm{R}$, тогда $\alpha \cdot p = \alpha \sum_{i=0}^{k} a_i x^i = \sum_{i=0}^{k} (\alpha a_i) x^i$. При этом $k \le n$, значит, $\alpha \cdot p \in \mathrm{P}_n$.

У3.

1) $p+q=\sum_{i=0}^{s}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{s}(b_i+a_i)x^i=q+p$;

2) $(p+q)+r=\sum_{i=0}^{s}(a_i+b_i)x^i+\sum_{i=0}^{m}c_ix^i=\sum_{i=0}^{u}(a_i+b_i+c_i)x^i=$

$=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i+\sum_{i=0}^{v}(b_i+c_i)x^i=p+(q+r)$. Здесь $u=\max\{s,m\}$, $v=\max\{l,m\}$.

3) $p+\theta=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i+0=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i=p.$

4) Пусть $w=-\sum_{i=0}^{k}a_ix^i=\sum_{i=0}^{k}(-a_i)x^i$, тогда $p+w=\sum_{i=0}^{k}(a_i-a_i)x^i=0.$

5) $1\cdot p=1\cdot\sum_{i=0}^{k}a_ix^i=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i=p.$

6) $\alpha\cdot(\beta p)=\alpha\cdot(\beta\sum_{i=0}^{k}a_ix^i)=(\alpha\beta)\cdot\sum_{i=0}^{k}a_ix^i=(\alpha\beta)\cdot p.$

7) $(\alpha+\beta)\cdot p=(\alpha+\beta)\cdot\sum_{i=0}^{k}a_ix^i=\sum_{i=0}^{k}(\alpha+\beta)\cdot a_ix^i=$

$=\sum_{i=0}^{k}(\alpha\cdot a_ix^i+\beta\cdot a_ix^i)=\sum_{i=0}^{k}\alpha\cdot a_ix^i+\sum_{i=0}^{k}\beta\cdot a_ix^i=\alpha p+\beta p$.

8) $\alpha\cdot(p+q)=\alpha\sum_{i=0}^{s}(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{s}\alpha\cdot(a_i+b_i)x^i=\sum_{i=0}^{s}(\alpha a_i+\alpha b_i)x^i=$

$=\sum_{i=0}^{k}\alpha x^i+\sum_{i=0}^{l}\alpha b_ix^i=\alpha p+\alpha q.$

У1 – **У3** выполняются, значит, P_n с указанными операциями сложения и умножения на число является ЛП.

4. Обозначим $\mathrm{R}^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in\mathrm{R}\}$. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathrm{R}^n$, $y=(y_1,\ldots,y_n)\in\mathrm{R}^n,\alpha\in\mathrm{R}$. Определим действия $x+y=(x_1+y_1,\ldots,x_n+\ \ +y_n)$ и $\alpha\cdot x=(\alpha x_1,\ldots,\alpha x_n)$. Кроме того, отметим, что $\theta=(0,\ldots,0)$. Покажите, что R^n является ЛП.

5. Множество $\mathrm{M}_{m\times n}$ всех матриц (при фиксированных m и n), где "$+$" означает сумму матриц, а "$\cdot$" – умножение матрицы на число.

6. Множество всех геометрических векторов на плоскости.

7. Множество всех геометрических векторов на плоскости при фиксированном $a>0$, удовлетворяющих условию $|x|>a$.

2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СВ

Для установления линейной зависимости (независимости) СВ $B=\{e_1,\ldots,e_k\}$ последовательно выполняем:

Д1. Составляем линейную комбинацию СВ: $\sum_{i=1}^{k}\alpha_ie_i$.

Д2. Умножаем каждый вектор e_i на число α_i по правилу "$\cdot$", заданному в ЛП.

Д3. Складываем полученные векторы по правилу "+", заданному в ЛП.

Д4. Приравниваем найденный вектор к θ, посмотрев на полученное соотношение как на уравнение (векторное).

Д5. Решаем полученное уравнение относительно неизвестных α_i.

У1. Если хотя бы одно из решений содержит, по крайней мере, одно $\alpha_j\neq 0$, то данная система векторов ЛЗ, иначе – ЛНЗ.

Установить линейную (не)зависимость СВ.

1. $B=\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}\in\{0,1,2\}$ (см. **П1.2**).

Вектором называется элемент ЛП. Указанное множество не является ЛП, поэтому невозможно говорить о ЛЗ (ЛНЗ).

2. $V=\mathrm{R}^3, B=\{e_1=(1,1,1),e_2=(0,-1,2),e_3=(-1,-2,1)\}$.

Составим линейную комбинацию СВ B:

$\alpha_1(1,1,1)+\alpha_2(0,-1,2)+\alpha_3(-1,-2,1)$,

преобразуем полученный вектор: $(\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1)+(0,-\alpha_2,2\alpha_2)+$
$+(-\alpha_3,-2\alpha_3,\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)$,

приравняем преобразованный вектор к θ и запишем в виде СЛАУ:

$$(\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1\quad-\alpha_3=0;\\ \alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3=0;\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0.\end{cases}$$

З1. Обратим внимание, что коэффициенты при неизвестных α_i представляют собой координаты векторов системы (в случае R^n).

Очевидно, что полученная СЛАУ является однородной. Известно, что она всегда имеет нулевое решение, причем, если ее определитель $\Delta \neq 0,$ то оно единственное, а иначе существует бесконечное множество (ненулевых) решений.

З2. Приведенные выше рассуждения приводят к следующему: если $\Delta = (\neq)0$, то СВ линейно (не) зависима.

Находим $\Delta = -1+0-2-(1+0-4) = 0,$ значит СВ B ЛЗ.

3. $V = \mathrm{R}^4,\, B = \{(2,1,1,1),(0,1,2,3),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

В силу **З1**, **З2** достаточно вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(1+0+0-(3+0+0)) +$$

$+2+0+3-(2+1+0) = -4+2 = -2 \neq 0.$ Таким образом, СВ B ЛНЗ.

4. $B = \{3, x-1, x^2+2x+5\} \in \mathrm{P}_2$. **З1** не срабатывает, действуем по полной программе. Составляем линейную комбинацию, приравниваем ее к $\theta = 0$, преобразуем:

$\alpha_1\cdot 3 + \alpha_2\cdot(x-1) + \alpha_3\cdot(x^2+2x+5) = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 x^2 + (\alpha_2+2\alpha_3)x + \alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0.$ Приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях (слева и справа) из последнего равенства, запишем СЛАУ:

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0; \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0; \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0+0+0-(3+0+0) = -3.$$

В силу **З2** данная СВ ЛНЗ.

5. $B = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\} \in \mathrm{R}^n$.

6. $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\} \in \mathrm{M}_{2\times 2}.$

7. $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \in \mathrm{P}_n$.

3. БАЗИС

Для установления того, что СВ $B = \{e_1,\ldots,e_k\}$ является базисом в V, проверяем условия:

У1. Каждый из векторов $e_i \in V$.

У2. Система векторов B является ЛНЗ.

У3. Любой вектор из V единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов системы B.

Установить, является ли данная СВ $B = \{e_1,\ldots,e_n\}$ базисом в V.

1. $V = \mathrm{R}^4,\, B = \{e_1 = (1,1,1), e_2 = (0,-1,2), e_3 = (-1,-2,1)\}$.

Очевидно, что **У1** не выполняется, так как $e_i \not\in \mathrm{R}^4.$ Значит указанная система B не является базисом в R^4.

2. $V = \mathrm{R}^3,\, B = \{e_1 = (1,1,1), e_2 = (0,-1,2), e_3 = (-1,-2,1)\}$.

Очевидно, что **У1** выполняется, так как $e_i \in \mathrm{R}^3.$ Далее заметим, что в силу **П2.2** не выполняется **У2**, т.е. система B не является базисом.

3. $V = \mathrm{R}^4,\, B = \{(2,1,1,1),(0,1,2,3),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

Очевидно, что **У1** выполняется. **У2** также выполняется (см. **П2.3**). Проверим **У3**, которое предварительно перепишем в виде $(y_1,y_2,y_3,y_4) = \alpha_1(2,1,1,1)+\alpha_2(0,1,2,3)+\alpha_3(1,0,1,0)+\alpha_4(0,1,0,1),$ где (y_1,y_2,y_3,y_4) – произвольный вектор из R^4, а α_i – некоторые числа. Преобразовав правую часть записанного равенства, будем иметь:

$$(y_1,y_2,y_3,y_4) = (2\alpha_1+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4).$$

Последнее можно переписать в виде СЛАУ

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_3 = y_1; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = y_2; \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = y_3; \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 = y_4. \end{cases}$$

Исходя из найденного, **У3** для данной СВ B можно переформулировать так: полученная СЛАУ должна иметь единственное решение для любых y_i. А это условие равносильно требованию $\Delta \neq 0,$ что выполняется (см. **П2.3**). Таким образом, данная СВ образует базис в R^4.

4. $B = \{3, x-1, x^2+2x+5\} \in \mathrm{P}_2$.

5. $B=\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}\in \mathrm{R}^n$.

6. $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\right\}\in \mathrm{M}_{2\times 2}$.

У1, очевидно, выполняется. Выполнив **П2.6**, отметим, что данная система векторов ЛНЗ. Проверим **У3**, которое предварительно перепишем в виде: $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ – произвольный вектор из $\mathrm{M}_{2\times 2}$, а α_i – некоторые числа. Преобразовав правую часть записанного равенства, будем иметь:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\\ -2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3 & \alpha_2\end{pmatrix},$$

что можно записать как СЛАУ (относительно неизвестных $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$):

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+5\alpha_3=a_{11}\ ;\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=a_{12}\ ;\\ -2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=a_{21}\ ;\\ \alpha_2=a_{22}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+5\alpha_3=a_{11}-3a_{22}\\ \alpha_1+\alpha_3=a_{12}+a_{22}\\ -2\alpha_1-2\alpha_3=a_{21}-2a_{22}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+5\alpha_3=a_{11}-3a_{22};\\ -\alpha_1-\alpha_3=-a_{12}-a_{22};\\ -\alpha_1-\alpha_3=\dfrac{1}{2}a_{21}-a_{22}\ .\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+5\alpha_3=a_{11}-3a_{22}\\ 4\alpha_3=a_{11}-a_{12}-4a_{22}\\ 4\alpha_3=a_{11}+\dfrac{1}{2}a_{21}-4a_{22}\end{cases}.$$

Как следует из последних двух уравнений полученной системы должно выполняться равенство $-a_{12}=\dfrac{1}{2}a_{21}$, которое не всегда возможно в силу произвольности значений a_{12} и a_{21}, значит, исходное векторное равенство не всегда возможно, т.е. **У3** не выполняется и данная система векторов не образует базис в $\mathrm{M}_{2\times 2}$.

7. $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}\in \mathrm{P}_n$.

4. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В БАЗИСЕ

Пусть $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ – выбранный в V базис, y – произвольный вектор из V. Чтобы найти координаты вектора y в базисе B выполняем следующие действия:

Д1. Составляем векторное уравнение $y=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$.

Д2. Преобразуем его к СЛАУ относительно неизвестных α_i.

Д3. Решаем полученную СЛАУ – найденные значения α_i и будут искомыми координатами.

Найти координаты вектора y в базисе B

1. $y=(-1,2,3,4);B=\{(2,1,1,1),(0,1,2,3),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}\in \mathrm{R}^4$.

Составляем векторное уравнение

$(-1,2,3,4)=\alpha_1(2,1,1,1)+\alpha(0,1,2,3)+\alpha_3(1,0,1,0)+\alpha_4(0,1,0,1)$.

Преобразуем в систему линейных уравнений (см. **П3.3**)

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_3=-1;\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=2;\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=3;\\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4=4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=2;\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=3;\\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4=4;\\ 2\alpha_1+\alpha_3=-1.\end{cases}$$

Решаем полученную систему (например, методом Гаусса)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&2\\1&2&1&0&3\\1&3&0&1&4\\2&0&1&0&-1\end{array}\right):\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&2\\0&1&1&-1&1\\0&2&0&0&2\\0&-2&1&-2&-5\end{array}\right):\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&2\\0&1&1&-1&1\\0&0&-2&2&0\\0&0&3&-4&-3\end{array}\right):\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&1&2\\0&1&1&-1&1\\0&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&-3\end{array}\right):$$

$$:\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&-1\\0&1&1&0&4\\0&0&-1&0&-3\\0&0&0&1&3\end{array}\right):\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&-1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&3\end{array}\right):\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&3\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-2\\\alpha_2=\ \ 1\\\alpha_3=\ \ 3\\\alpha_4=\ \ 3\end{cases}.$$

Таким образом, данный вектор имеет координаты $(-2,1,3,3)$.

2. $y=2x^2-x+4; B=\{3,x-1,x^2+2x+5\}\in \mathrm{P}_2$.

Составляем векторное уравнение

$2x^2-x+4=\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cdot(x-1)+\alpha_3\cdot(x^2+2x+5)$.

Преобразовав правую часть записанного равенства, будем иметь:

$2x^2-x+4=\alpha_3x^2+(\alpha_2+2\alpha_3)x+\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3$.

Приравнивая коэффициенты многочленов при одинаковых степенях, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\alpha_3=2;\\ \alpha_2+2\alpha_3=-1;\\ 3\alpha_1-\alpha_2+5\alpha_3=4;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\alpha_1=\alpha_2-5\alpha_3+4;\\ \alpha_2=-2\alpha_3-1;\\ \alpha_3=2;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-11/3;\\ \alpha_2=\ \ -5;\\ \alpha_3=\ \ \ 2.\end{cases}$$

Таким образом, данный вектор имеет координаты $\left(-11/3,-5,2\right)$.

3. $y=\left(1/2,1/3,1/4\right); B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\in \mathrm{R}^3$.

4. $y=\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\end{pmatrix}; B=\left\{\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}\in \mathrm{M}_{2\times2}$.

Составляем векторное уравнение

$$\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1\\2&3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

Преобразовав правую часть полученного уравнения, будем иметь

$$\begin{pmatrix}-1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\alpha_1+\alpha_3&\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4\\\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3&\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_3=-1;\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_4=2;\\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=3;\\ \alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4=4.\end{cases}$$

Эта СЛАУ встречалась ранее, ее решение будет $(-2,1,3,3)$ и, соответственно, координаты данного вектора тоже.

5. $y=(1,-2,-3,4); B=\{(2,1,1,1),(0,1,2,3),(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}\in \mathrm{R}^4$.

6. $y=x^2+3x-6; B=\{1,x+1,x^2-x+2\}\in \mathrm{P}_2$.

5. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Пусть $B=\{e_1,\ldots,e_n\}$ и $B'=\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ – два различных базиса в V. Чтобы найти матрицу перехода от базиса B к базису B' выполняем следующие действия:

Д1. Составляем векторные уравнения $e'_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}e_j$, где $i=1,...,n$.

Д2. Записываем их в матричном виде $(\tilde{B}\,|\,\tilde{B}')$.

Д3. Элементарными преобразованиями приводим записанную матрицу к виду $(E\,|\,T)$, тогда $T=\left(t_{ji}\right)$ – искомая матрица перехода от базиса B к базису B'.

Найти матрицу перехода от базиса B к базису B'.

1. $B=\{x+1,\ x^2+x+3,2\},\ B'=\{x^2+1,2x^2+3x+1,-x^2+x+2\}\in \mathrm{P}_2$.

Составляем векторные уравнения

$$\begin{cases}x^2+1=t_{11}(x+1)+t_{12}(x^2+x+3)+2t_{13};\\ 2x^2+3x+1=t_{21}(x+1)+t_{22}(x^2+x+3)+2t_{23};\\ -x^2+x+2=t_{31}(x+1)+t_{32}(x^2+x+3)+2t_{33}.\end{cases}$$

Из определения равенства элементов в P_2 и первого уравнения, получим: $\begin{cases}x^2: t_{12}=1\\ x^1: t_{11}+t_{12}=0\\ x^0: t_{11}+3t_{12}+2t_{13}=1\end{cases}\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&1\\1&1&0&0\\1&3&2&1\end{array}\right)$. Аналогично для оставшихся уравнений запишем $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right)$.

Заметим, что у полученных матриц компоненты левее черты совпадают, обозначим их как $\tilde{B}$. А матрицу $\tilde{B}'$ соберем из столбцов правее черты выписанных матриц:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) :$$

$$: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -6 & 3 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 & -3 & 1,5 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,5 & -3 & 1,5 \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица перехода будет $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -0,5 & -3 & 1,5 \end{pmatrix}$.

2. $B = \{(1,2,3),(1,0,1),(0,-2,-1)\}; B' = \{(1,0,0),(-1,-1,0),(3,2,1)\}$.

Выполняя действия (самостоятельно), аналогичные приведенным выше, запишем матрицу $(\tilde{B} \,|\, \tilde{B}')$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

(Заметьте, как связаны между собой матрица $\tilde{B}$ и координаты векторов базиса B, а также матрица $\tilde{B}'$ и координаты векторов базиса B'.)

Преобразуем выписанную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3 & -8 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) :$$

$$: \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2,5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1,5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2,5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right).$$

Таким образом, матрица перехода будет $\begin{pmatrix} -1 & 1,5 & -3 \\ 2 & -2,5 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $B = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, $B' = \{(1,2,3,4),\ (1,1,1,1),(0,1,0,1),(1,0,1,0)\} \in \mathrm{R}^4$.

4. $B = \{1, x, x^2\}, B' = \{1, x-1, (x-1)^2\} \in \mathrm{P}_2$.

5. $B' = \{1, x-1, (x-1)^2\}, B = \{1, x, x^2\} \in \mathrm{P}_2$.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА

Пусть вектор x имеет в базисе B координаты $X = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, что можно обозначить и так $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_B$.

Чтобы найти координаты вектора x в базисе B' выполняем следующие действия:

Д1. Находим матрицу перехода T от базиса B к базису B'.

Д2. Находим матрицу, обратную матрице перехода – матрицу T^{-1}.

Д3. По формуле $X' = T^{-1} X^T$ находим столбец координат вектора x в базисе B'.

Найти координаты вектора x в базисе B', если известны его координаты в базисе B: $x_B = (1,2,3)$. *Базисы B, B' см. в* §5.

1. **Д1.** См. §5.

Д2. Обратную матрицу можно найти несколькими способами, воспользуемся одним из них – методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & -3 & 1,5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3,5 & 0,5 & -0,5 & 0 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & 2/3 & 7/6 & 1 \end{array}\right) :$$

$$: \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 7/10 & 3/5 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1/5 & -7/5 & -6/5 \\ 0 & 3 & 0 & 3/5 & 3/10 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 7/10 & 3/5 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1/5 & -7/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 7/10 & 3/5 \end{array}\right) :$$

$$:\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 7/10 & 3/5 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1{,}5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \end{array}\right).$$

Таким образом, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Д3. $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}7 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1{,}5\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 0{,}2\cdot 1 + 0{,}1\cdot 2 - 0{,}2\cdot 3 \\ 0{,}4\cdot 1 + 0{,}7\cdot 2 + 0{,}6\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -0{,}2 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $x_{B'} = (6; -0{,}2; 3{,}6)$. Сделаем проверку:

$$1\cdot(x+1) + 2\cdot(x^2+x+3) + 3\cdot 2 = x + 1 + 2x^2 + 2x + 6 + 6 = 2x^2 + 3x + 13.$$

$$6\cdot(x^2+1) - 0{,}2\cdot(2x^2+3x+1) + 3{,}6\cdot(-x^2+x+2) = 6x^2 + 6 - 0{,}4x^2 - 0{,}6x - 0{,}2 - \quad -3{,}6x^2 + 3{,}6x + 7{,}2 = 2x^2 + 3x + 13.$$

2. **Д1.** См. § 5.

Д2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3/2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3/2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) : \; : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3/2 & 0 & -10 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, $T^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Д3. $X' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0+9 \\ 4+4+0 \\ 3+2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$. Таким образом, $x_{B'} = (5;8;2)$. Сделаем проверку

$$1\cdot(1,2,3) + 2\cdot(1,0,1) + 3\cdot(0,-2,-1) = (1,2,3) + (2,0,2) + (0,-6,-3) = (3,-4,2).$$

$$5\cdot(1,0,0) + 8\cdot(-1,-1,0) + 2\cdot(3,2,1) = (5,0,0) + (-8,-8,0) + (6,4,2) = (3,-4,2).$$

7. НОРМА

1. В ЛП R^n можно ввести норму различными способами, например, для любого $p \geq 1$ положим $\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i |^p \right)^{\frac{1}{p}}$ или $\| x \|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} | x_i |$, возможны и другие варианты. Понятно, чтобы вычислить норму конкретного вектора $x \in \mathrm{R}^n$, достаточно подставить его компоненты в указанную формулу для нормы.

Вычислим $\| x \|_1, \| x \|_2, \| x \|_\infty$, если $x = (1,2,3,4) \in \mathrm{R}^4$.

$\| (1,2,3,4) \|_1 = \sum_{i=1}^{4} | x_i | = | 1 | + | 2 | + | 3 | + | 4 | = 10.$

$\| (1,2,3,4) \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{4} | x_i |^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{| 1 |^2 + | 2 |^2 + | 3 |^2 + | 4 |^2} = \sqrt{30}.$

$\| (1,2,3,4) \|_\infty = \max\{| 1 |, | 2 |, | 3 |, | 4 |\} = 4.$

Вычислите указанные нормы для $x = (-1,2,3,4)$ и $x = (\sqrt{3}, -1, 0, 2)$.

2. В ЛП P_n для любого $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ можно также ввести норму неединственным способом, например, $\| p \|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}$ или $\| p \|_\infty = \max\limits_{i=0,\ldots,n} | a_i |$.

Вычислим указанные нормы для $p = 7 - 2x + x^2 + 5x^3 \in \mathrm{P}_3$. Понятно, что в данном случае $a_0 = 7, a_1 = -2, a_2 = 1, a_3 = 5$. Откуда

$\| 7 - 2x + x^2 + 5x^3 \|_2 = \sqrt{7^2 + (-2)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{79};$

$\| 7 - 2x + x^2 + 5x^3 \|_\infty = \max\{| 7 |, | -2 |, | 1 |, | 5 |\} = 7.$

Вычислите указанные нормы для $p = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

3. Придумайте какую-либо норму в ЛП $\mathrm{M}_{2\times2}$ и вычислите ее для вектора $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

З1. Слова "можно ввести норму" означают, что функционал $\| x \|$ удовлетворяют условиям:

1) $\| x \| \geq 0$, причем $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\forall \alpha \in \mathrm{R}$ имеет место $\| \alpha \cdot x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$;

3) $\forall y \in V$ справедливо $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

8. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Пусть для любых $x, y \in V$ задано скалярное произведение (x, y). Чтобы найти косинус угла между фиксированными векторами x и y выполняем следующие действия.

Д1. Вычисляем скалярное произведение (x, y).

Д2. Находим согласованные с введенным скалярным произведением нормы заданных векторов $\| x \| = \sqrt{(x,x)}, \| y \| = \sqrt{(y,y)}$.

Д3. По формуле $\cos(\hat{x},\ y) \dfrac{(x,y)}{\| x \| \cdot \| y \|}$ находим косинус угла между данными векторами.

Найти косинус угла между заданными векторами.

1. Пусть в R^4 задано скалярное произведение $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{4} x_i y_i$.

Даны векторы $x = (1, 2, 3, 4)$ и $y = (-2, 0, -1, 3)$. Являются ли заданные векторы ортогональными?

Д1. $(x, y) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = -2 + 0 - 3 + 12 = 7$.

Д2. $\| x \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$, $\| y \| = \sqrt{4 + 0 + 1 + 9} = \sqrt{14}$.

Д3. $\cos(\hat{x},\ y) = \dfrac{7}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{7}{\sqrt{2 \cdot 15} \cdot \sqrt{2 \cdot 7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{15}}$.

Векторы x, y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. В данном примере это условие не выполняется, значит, данные векторы не являются ортогональными.

2. Пусть в P_3 для любых $p = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i x^i$ и $q = \sum\limits_{i=0}^{3} b_i x^i$ задано скалярное произведение $(p, q) = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i b_i$.

Даны векторы $p = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ и $q = -3x + 2x^2$. Очевидно, что для данных векторов $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$ и $b_0 = 0, b_1 = -3, b_2 = 2, b_3 = 0$.

Д1. $(p, q) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$.

Д2. $\| p \| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30}$, $\| q \| = \sqrt{0 + 9 + 4 + 0} = \sqrt{13}$.

Д3. $\cos(\hat{p},\ q) = \dfrac{0}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{13}} = 0 \Rightarrow$ данные векторы ортогональны.

3. Пусть в $\mathrm{M}_{2\times2}$ для любых $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ задано скалярное произведение $(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$.

Даны векторы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

З1. Слова "в ЛП задано скалярное произведение" означают, что для функционала (x, y) выполняются условия

1) $(x, x) \geq 0$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

4) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Специальные курсы / под ред. А.В. Ефимова. – М. : Наука, 1981.
2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра / А.И. Кострикин. – М. : Физ.-мат. лит., 2000.
3. Артамонов, В.А. Линейная алгебра для экономистов / В.А. Артамонов. – М. : МГУ, 1999.