ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

♦ **Издательство ТГТУ** ♦

УДК 519.6(075)

ББК В193я73-2

Ч671

Р е ц е н з е н т

ЗАВЕДУЮЩИЙ КАФЕДРОЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ ТГТУ
ДОКТОР ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
С.М. ДЗЮБА

С о с т а в и т е л и:

С.Б. ПУТИН, С.А. СКВОРЦОВ, С.И. ТАТАРЕНКО,
А.А. ТРЕТЬЯКОВ, В.Ю. ХАРЧЕНКО

Ч671 Численные методы в задачах управления : лабораторные работы / сост. : С.Б. Путин, С.А. Скворцов, С.И. Татаренко, А.А. Третьяков, В.Ю. Харченко. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 36 с. – 50 экз.

Представлены пять лабораторных работ, которые содержат краткие теоретические положения, порядок выполнения работ, варианты заданий, контрольные вопросы, а также список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов 2 курса очной формы обучения специальности 220301.

УДК 519.6(075)

ББК В193я73-2

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Лабораторные работы
для студентов 2 курса очной формы обучения
специальности 220301

Тамбов
Издательство ТГТУ
2008

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В
ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ**

Лабораторные работы

С О С Т А В И Т Е Л И:

ПУТИН СЕРГЕЙ БОРИСОВИЧ,
Скворцов СЕРГЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ,
Третьяков АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ,
Татаренко СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ,
ХАРЧЕНКО ВЛАДИМИР ЮРЬЕВИЧ

Редактор З.Г. Чернова
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 08.10.2008
Формат 60 × 84/16. 2,09 усл. печ. л. Тираж 50 экз. Заказ № 448

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Выполнение лабораторного практикума по изучению численных методов предусматривается учебными планами следующих дисциплин: «Информатика и программирование», «Численные методы», «Моделирование систем». Лабораторные работы выполняются с целью приобретения практических навыков и закрепления теоретических знаний по указанным дисциплинам.

Лабораторные работы выполняются на ЭВМ с использованием языка программирования С. Для выполнения работ учебная группа разбивается на подгруппы по 3 – 5 человек.

При подготовке к выполнению каждой работы студент должен:

- изучить соответствующие разделы литературы, указанной в учебном плане;
- ознакомиться с описанием лабораторной работы;
- подготовить таблицы для записи результатов.

Проверка подготовки к выполнению очередной лабораторной работы осуществляется преподавателем при личном опросе. Если студент не знает содержания и методики проведения предстоящей лабораторной работы, то он не допускается к ее выполнению.

При выполнении лабораторной работы студент заполняет таблицы экспериментальных данных, производит необходимые расчеты, строит графики и подготавливает отчет о работе. Отчет выполняется по каждой работе отдельно. Студент защищает отчет после выполнения работы.

Лабораторная работа 1

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: Приобретение навыков решения уравнений численными методами.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Задача решения уравнения чаще всего встречается при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в инженерной практике. Отыскать точное значение корня уравнения можно лишь в некоторых частных случаях. Кроме того, точное значение корня часто все равно приходится заменить приближенным (например, при решении уравнения $3x=1$). Поэтому при решении уравнения широко используются методы, позволяющие получать приближенное решение с любой заданной степенью точности.

Пусть задано уравнение $f(x)=0$, где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором отрезке $[a,b]$ и имеет на нем непрерывную первую и вторую производные $f'(x)$ и $f''(x)$. Корни заданного уравнения являются нулями функции $y=f(x)$ и геометрически представляют собой точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью OX (рис. 1.1).

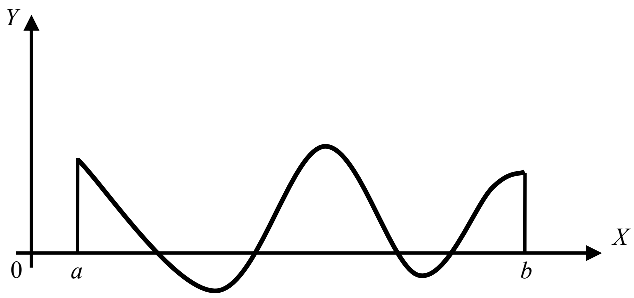

Рис. 1.1

Решение задачи отыскания действительных корней заданного уравнения состоит из двух этапов:

1. Отделение (изоляция) корня, т.е. отыскание отрезка $[a, b]$ принадлежащего области определения функции $f(x)$, на котором имеется один и только один корень уравнения $f(x)=0$.
2. Вычисление или уточнение корня с заданной точностью.

Отделение корня уравнения основано на двух очевидных фактах:

1) На концах отрезка $[a, b]$ функция имеет разные знаки, т.е. $f(a)\ f(b) < 0$. Очевидно, что при этом внутри отрезка $[a, b]$ имеется, по крайней мере, один корень уравнения $f(x)=0$. Однако это условие не гарантирует существования единственного корня.

Например, на рис. 1 $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ т.е. $f(a)\ f(b) < 0$, а внутри $[a, b]$ имеется три корня.

2) На отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ монотонна, т.е. ее производная $f'(x)$ не меняет знака на $[a, b]$. Графически это обозначает, что $f(x)$ либо возрастающая, либо убывающая.

Отделение корня можно производить аналитически или графически.

Графически корни уравнения $f(x)=0$ можно отделить, построив график функции $y=f(x)$ и приблизительно определив точки его пересечения с осью OX.

Аналитический метод отделения корня состоит в том, что вначале определяются интервалы монотонности функции $f(x)$, т.е. интервалы, в которых $f'(x)=0$ (путем решения уравнения $f'(x)=0$), а затем вычисляют значения $f(x)$ на концах этих интервалов и определяют интервал, на концах которого значения $f(x)$ имеют разные знаки. В результате может получиться так, что искомого интервала не найдется. Это означает, что либо уравнение $f(x)=0$ не имеет корня, либо корни являются границами интервалов монотонности, т.е. точками, в которых $f'(x)=0$ (кратные корни).

Собственно говоря, любую точку с интервала, отделяющего корень $c\in[a,b]$, можно считать приблизительным значением корня, поскольку ясно, что разность между истинным значением корня x^* и его приближенным значением c ограничена величиной отрезка $b-a$, т.е. $\left|x^*-c\right| < b-a$. Если требуется более точное определение корня, то необходимо изменить границы интервала $[a,b]$ таким образом, чтобы новый интервал был меньше исходного и удовлетворял приведенным выше условиям существование корня.

Для получения такого нового интервала используются различные методы последовательных приближений, позволяющие за несколько этапов сжатия исходного отрезка (итераций) получить интервал, длиной которого можно пренебречь.

Метод хорд. Идея метода состоит в том, что на отрезке $[a,b]$ строится хорда AB, стягивающая концы дуги графика функции $y=f(x)$, и в качестве приближенного значения корня выбирается число *c*, являющееся абсциссой точки пересечения хорды *AB* с осью *OX* (рис. 1.2).

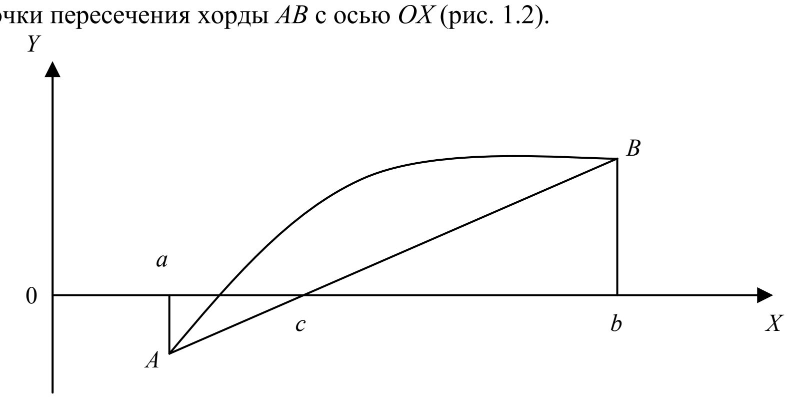

Рис. 1.2

Для определения числа *c* составим уравнение хорды как прямой, проходящей через две точки $A=(a,\,f(a))$, $B=(b,\,f(b))$:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Положив $y=0$, $x=c$, получим

$$\frac{c-a}{b-a}=\frac{f(a)}{f(b)-fa)}.$$

После преобразований имеем две формулы:

$$c=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)};\quad c=b-\frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Число *c* принимаем за первое приближение к искомому корню и обозначим x_1, $x_1=c$. Очевидно, что если $f'(x)$ не имеет знак на $[a,b]$, точка x_1 будет находиться со стороны вогнутости кривой $y=f(x)$ и разделит $[a,b]$ на два отрезка $[a,x_1]$ и $[x_1,b]$, в одном из которых находится искомый корень. Новый отрезок, отделяющий корень, можно определить, сравнивая знаки $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$. Из анализа рис. 1.3, на котором представлены все возможные варианты поведения функции $f(x)$, видно, что, если $f'(x)\cdot f''(x)>0$ (рис. 1.3, *а*, *в*), отрезком, отделяющим корень будет $[x_1,b]$, в противном случае, т.е. при $f'(x)\cdot f''(x)<0$ (рис. 1.3, *б*, *г*), отрезком, отделяющим корень, будет $[a,x_1]$.

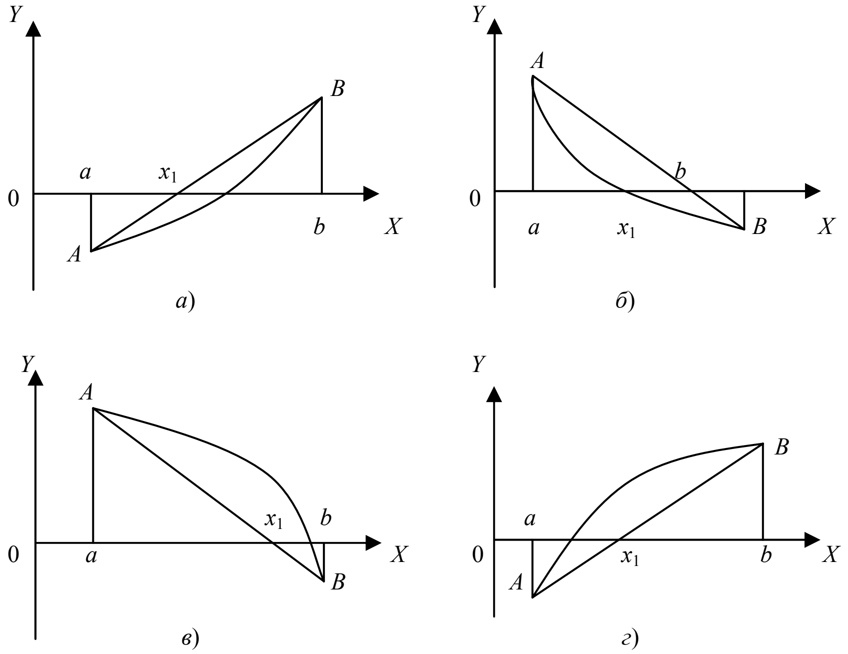

Рис. 1.3

Повторяя такую же процедуру на новом отрезке, определим число x_2:

- при $f'(x)\cdot f''(x)>0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)};$$

- при $f'(x)\cdot f''(x)<0$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\cdot(x_1-a)}{f(x_1)-f(a)}.$$

Затем аналогично находим x_3, x_4 и т.д. по итерационной формуле:

- при $f'(x)\cdot f''(x)>0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(b-x_i)}{f(b)-f(x_i)};$$

- при $f'(x)\cdot f''(x)<0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i-a)}{f(x_i)-f(a)}.$$

Процесс прекращаем тогда, когда оценка полученного приближения x_i удовлетворяет заданной точности. Для упрощения вычисления обычно задают некоторые, достаточно малое число, $\varepsilon>0$ и прекращают вычисления, когда разность между двумя последними приближениями уменьшается меньше ε, т.е. $\left|x_{i-1}-x_i\right|<\varepsilon$. Число x_i принимают за приближенное значение корня уравнения $f(x)=0$.

М е т о д   к а с а т е л ь н ы х (Ньютона). Суть метода состоит в том, что в одном из концов дуги *AB* графика функции $y=f(x)$ проводится касательная к этой дуге и в качестве приближенного значения *x* выбирается число *c*, являющееся абсциссой точки пересечения этой касательной с осью *AX* (рис. 1.4).

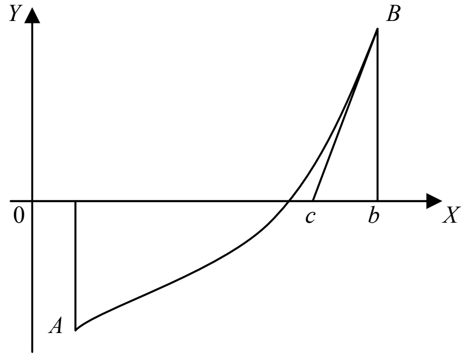

рис. 1.4

Как известно, уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $\left(t,\, f(t)\right)$ имеет вид $y - f(t) = f'(t)(x - t)$.

Следовательно, уравнения касательных в точках *A* и *B* имеют вид $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$, $y - f(b) = f'(b) \cdot (x - b)$.

Положив $y = 0$ и $x = c$, определим абсциссу точки пересечения касательной с осью *OX*:

$$c = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad \text{или} \quad c = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Точка *c* будет первым приближением к корню, поэтому обозначим ее x_1. Очевидно, что точка $\left(x_1, 0\right)$ будет находиться со стороны выпуклости кривой $y = f(x)$. Точка x_1 разделит отрезок $\left[a,\, b\right]$ на два отрезка $\left[a,\, x_1\right]$ и $\left[x_1,\, b\right]$, один из которых содержит корень. Если $f'(x) f''(x) > 0$, это будет отрезок $\left[a,\, x_1\right]$, т.е. касательная проводится к точке *B*, а при $f'(x) f''(x) < 0$ получим отрезок $[x_1,\, b]$, т.е. касательная проводится к точке *A*. Определив новый отрезок, повторим процедуру, причем касательную проведем в точке $\left(x_1,\, f(x_1)\right)$ и получаем новую точку x_2:

$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1).$$

Далее находим второе, третье и последующие приближения по итерационной формуле

$$x_{i+1} = x_1 - f(x_i) / f'(x_i).$$

Процесс прекращается тогда, когда разность между двумя последними приближениями будет меньше заданного числа $\varepsilon > 0$, т.е. $\left| x_{i+1} - x_i \right| < \varepsilon$.

Метод секущих. В методе касательных для нахождения каждого нового приближения корня необходимо вычислять не только значения функции $f(x)$, но и ее производную $f'(x)$, что не всегда возможно, поскольку функция $f(x)$ не обязательно должна быть задана в виде аналитического выражения. Например, $f(x)$ может быть получена в результате решения какого-то дифференциального уравнения, или системы уравнений. Для преодоления этого препятствия можно заменить значения производной в методе касательных отношением конечных разностей в окрестности рассматриваемой точки, т.е. использовать приближенное равенство

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - f(x+h)}{x - (x+h)} = \frac{f(x) - f(x+h)}{h},$$

где *h* – некоторая малая величина.

Геометрически это означает, что через рассматриваемую точку будет проводиться не касательная, а секущая (рис. 1.5).

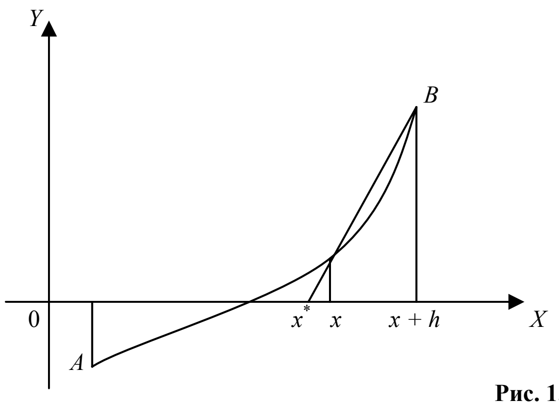

Рис. 1.5

Поэтому данный метод называется методом секущих. Итерационная формула будет аналогична методу касательных:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) \cdot h}{f(x_i) - f(x_i - h)}.$$

При использовании этого метода следует уменьшать величину *h* по мере приближения к корню.

Метод простых итераций. Рассмотрим уравнение $x = g(x)$. Это уравнение может быть получено из уравнения $f(x) = 0$ путем прибавления к обоим членам *x* и заменой $g(x) = x + f(x)$, т.е. корень уравнения $x = g(x)$ совпадает с корнем уравнения $f(x) = 0$.

Пусть $\left[a,\, b\right]$ – отрезок, отделяющий корень x^*, т.е. $x^* = g(x^*)$. Выберем произвольную точку $x_0 \in \left[a,\, b\right]$ и вычислим значение $g(x)$ в этой точке:

$$x_1 = g(x_0).$$

По найденному значению x_1 построим вторую точку x_1 и т.д. по формуле

$$x_{i+1} = g(x_i).$$

Если полученная таким образом последовательность x_i сходится, то она сходится к корню x^*, т.е. $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x^*$ и за конечное число итераций можно получить приближенное значение корня x^* с заданной точностью ε, т.е. $\left|x^* - x_i\right| < \varepsilon$. Однако описанный итерационный процесс не всегда сходится.

Рассмотрим геометрический смысл процесса и его сходимость. Корень уравнения $x = g(x)$, это точка пересечения прямой $y = x$ и графика функции $y = g(x)$ (рис. 1.6). Абсцисса x_1 получена пересечением прямых $y = g(x_0)$ и $y = x$. Абсцисса x_2 получается пересечением прямых $y = g(x_1)$ и $y = x$ и т.д.

На рис. 1.6, *а* видно, что последовательность x_i сходится к x^*, а на рис. 1.6, *б* – расходится. Сходимость процесса зависит от угла наклона линии $y = g(x)$, т.е. от значения $g'(x)$. Если $\left|g'(x)\right| < 1$, $x \in [a, b]$, то процесс сходится, при $\left|g'(x)\right| > 1$, $x \in [a, b]$ процесс расходится и при $\left|g'(x)\right| = 1$, $x \in [a, b]$ процесс может как сходиться, так и расходиться.

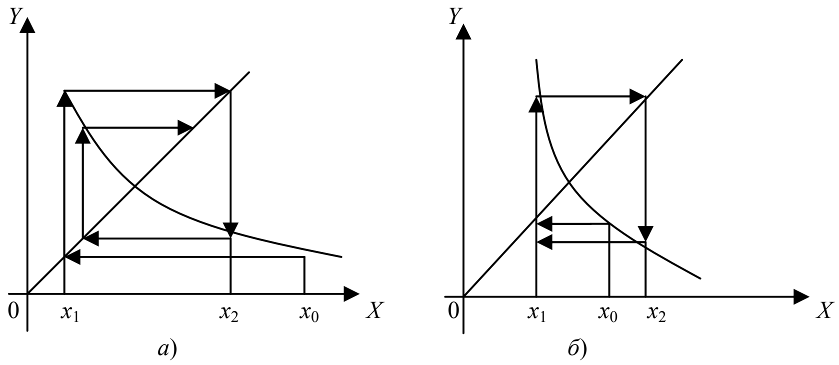

Рис. 1.6

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами приближенного вычисления корней уравнений.
2. В соответствии с вариантом разработать программу на языке С.
3. С помощью дополнительных программ отделить наименьший по модулю корень заданного уравнения. Вариант задания выбрать из табл. 1.1.
4. Вычислить с помощью программы значение отдельного корня четырьмя различными методами. При использовании метода простых итераций найти решение при разных начальных приближениях. Результаты вычислений занести в табл. 1.2.

Таблица 1.1

№ варианта	Вид функции	№ варианта	Вид функции
1	$x^2 - 2x + \ln x$	11	$x^3 - 2x^2 - 6x - 1$
2	$x^2 - 2\ln(x+1)$	12	$x^4 - 3x - 3$
3	$x^3 - 2x - 13$	13	$3 - x^3 + \sin\left(\pi x/2\right)$
4	$x^4 + 6x^2 - 12x - 8$	14	$x^3 + 2x^2 - 11$
5	$2^x + 2x^2 - 3$	15	$x^2 - 1 - \cos(1{,}2x)$
6	$xe^{2x} - 4$	16	$(x - 0{,}5)^2 - \sin(\pi x)$
7	$x^5 + 5x + 1$	17	$x^3 - 2\cos(\pi x)$
8	$(x-2)^2 - e^x$	18	$(x-1)^2 - 0{,}5e^x$
9	$2xe^x - 5$	19	$x^5 + 18x^3 - 34$
10	$2x - 3\sin(2x) - 1$	20	$\mathrm{tg}(1{,}2x) - 2 + 3x$

Таблица 1.2

1	Метод 1		Метод 2		Метод 3		Метод 4		Метод 5	
	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
1 2 3 . . .										

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

1. График исследуемой функции с интервалами отделения корней.
2. Таблицы пошаговых расчетов корня уравнения.
3. Обоснованное заключение о преимуществах и недостатках использования исследованных методов решения применительно к заданному уравнению.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как и зачем выполняется отделение корня?
2. Каково условие сходимости метода хорд?
3. Чем отличаются итерационные методы хорд и секущих?
4. Какие методы предпочтительнее воспользоваться для решения уравнений $2x^2 + \sin(0{,}5x) - 5 = 0$, $2^{-x} - x = 0$?
5. В чем заключается условие сходимости метода простых итераций?
6. В чем отличие методов касательной и секущей, и что у них общего?

Литература [1, с. 451 – 473]; [3, с. 112 – 157]; [5, с. 170 – 210]; [6, с. 86 – 116].

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

МЕТОДЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Цель работы: Получение навыков использования методов интерполирования функции.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Задача интерполирования ставится в следующей форме: найти многочлен $P(x) = P_n(x)$ степени не выше n, значение которого в заданных точках x_i, $l = \overline{0, n}$ совпадают с заданными значениями данной функции $P_n(x_i) = y(x_i)$, $i = \overline{0, n}$.

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую вида $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$, проходящую через заданную систему точек (x_i, y_i), $i = \overline{0, n}$ (рис. 2.1).

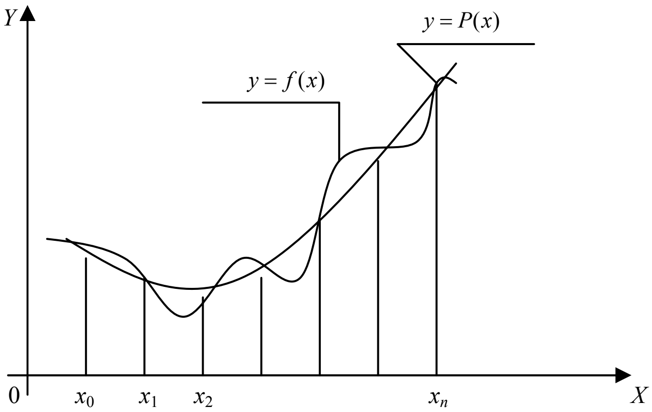

Рис. 2.1

Многочлен $P(x)$ называется интерполяционным многочленом, а точки x_i, $i = \overline{0, n}$ – узлами интерполяции. Интерполяционные многочлены обычно используются для нахождения неизвестных значений $f(x)$ при промежуточных значениях аргумента. При этом различают задачу интерполирования, когда x находится между x_0 и x_n, и экстраполирования, когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$.

Узлы интерполяции называются равноотстоящими, если $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i = h = \text{const}\,(i = 0, n-1)$. Конечными разностями функции $y = f(x)$ называются разности вида:

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ – разность первого порядка;

$\Delta y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ – разность второго порядка;

. . . .

. . . .

$\Delta^{\kappa-1} y_i = \Delta^{k-2} y_{i+1} - \Delta^{k-3} y_i$ – разность k – 1-го порядка;

$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$ – разность k-го порядка.

Таблица 2.1

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$			
x_4	y_4	Δy_4				
x_5	y_5					

В таблице 2.1 приведены конечные разности до $k = 5$.

Первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид

$$y(x) = P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n-1)}{n!}\Delta^n y_0 + R_n(x),$$

где $q = (x - x_0)/h$.

В этой формуле используется верхняя горизонтальная строка таблицы разностей. Остаточный член $R(x)$ этой формулы имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(s),$$

где s – некоторая точка промежутка, содержащего все узлы интерполирования x и точку x_i.

Первая формула Ньютона используется для интерполирования и экстраполирования в точках x, близких к начальной точке таблицы x_0.

Для точек x, близких к конечной точке таблицы x_n используют вторую интерполяционную формулу Ньютона:

$$y(x) = P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 + R_n(x),$$

где $q = (x - x_n)/h$.

Остаточный член этой формулы

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(s).$$

Во второй формуле Ньютона используется нижняя наклонная строка конечных разностей (см. табл. 2.1).

Для неравноотстоящих узлов интерполирования $x_{i+1} - x_i \neq h$ используется интерполяционная формула Лагранжа

$$y(x) = L_n(x) = \sum_{i \neq 0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

с остаточным членом

$$R(x) = \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n).$$

Выражения

$$L_i^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

называются коэффициентами Лагранжа.

Иногда бывает полезным для упрощения вычислений использовать инвариантность коэффициентов Лагранжа относительно линейной подстановки: если $x = at + b$, $x_j = at_j + b$, $(j = \overline{0, n})$, то $L_i^n(x) = L_i^n(t)$.

В случае равноотстоящих узлов имеются таблицы лагранжевых коэффициентов.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами интерполирования функции.
2. Ознакомиться с инструкцией к ПДП.
3. Ознакомиться с методом использования ПДП для нахождения интерполяционных многочленов на демонстрационных примерах.
4. Для заданной таблично функции построить все возможные интерполяционные многочлены Ньютона и Лагранжа максимальной степени, пригодные для определения значения функции в указанных промежуточных точках x_{Ti}. Варианты задания выбрать из табл. 2.2. Для всех вариантов $x_0 = 0$, $x_1 = b/4$, $x_2 = b/2$, $x_3 = 0{,}75b$, $x_4 = b$, $x_{Ti} = x_i + b/8$.
5. Вычислить значения функции в указанных промежуточных точках, используя найденные многочлены. Сравнить значения, полученные по разным интерполяционным формулам.

Таблица 2.2

№ варианта	b	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
1	4,4	–14,6	1,1	0,7	13,5	5,6
2	4,8	8,6	–12,2	–2,8	2,7	–5,3
3	5,2	–9,0	9,1	–0,2	–10,4	–12,1
4	5,6	4,3	–1,3	4,7	0,2	–13,6
5	6,0	–3,6	12,1	4,9	7,9	–7,4
6	6,4	4,6	0,2	–6,5	11,4	–7,9
7	6,8	–9,5	–1,4	–9,0	–1,0	–13,6
8	7,2	–11,8	11,9	–12,6	–2,6	7,4
9	7,6	–1,1	4,8	5,4	2,3	14,8
10	8,0	–7,9	5,4	12,3	–10,9	–2,7
11	8,4	9,2	2,3	–6,0	–1,3	14,2
12	8,8	8,3	1,1	8,9	–5,5	–11,3
13	9,2	–11,2	–11,9	–9,8	–2,7	–14,2
14	9,6	6,8	8,1	–13,4	–13,9	–11,9
15	10,0	12,8	3,9	–11,2	–1,4	9,9
16	10,4	10,7	–13,7	–5,5	–1,8	9,5
17	10,8	–9,4	–12,8	–8,7	–0,4	1,1
18	11,2	–11,2	–4,5	10,0	5,5	–14,2
19	11,6	–10,2	13,0	8,4	0,1	8,4
20	12,0	–13,9	–8,6	11,1	11,9	1,2

6. Результаты вычисления занести в табл. 2.3.

Таблица 2.3

i	x_{Ti}	$y(x_{Ti})$	Вид многочлена
			(1-я Ньютона n = 4)
			(Лагранжа)
			(1-я Ньютона n = 3)
			(2-я Ньютона n = 2)
			(Лагранжа)
	.	……….	…………………………………………………

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:
1. Таблицу значений заданной функции и обоснование выбора степени многочленов для промежуточных точек.
2. Найденные интерполяционные многочлены.
3. Значения функции в промежуточных точках, вычисление с помощью найденных многочленов.
4. Мотивированный вывод об окончательном выборе значения функции в промежуточных точках.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как ставится задача интерполяции?
2. В чем отличие интерполирования от экстраполирования?
3. Какие формулы используются для интерполирования в равноотстоящих узлах, а какие в неравноотстоящих?

4. Что такое узлы интерполяции?
5. Чем отличаются первая и вторая формулы Ньютона?

Л и т е р а т у р а [1, с. 46 – 84]; [3, с. 497 – 540]; [6, с. 149 – 165].

Лабораторная работа 3

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Цель работы: Получение навыков использования аппроксимационных формул.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Задача приближения функции заданного вида $y = f(x)$ к ряду из n точек (x_i, y_i) сводится к выбору таких параметров функции $f(x)$, при которых значение функции $f(x)$ в точках x_i не слишком сильно отличается от заданных значений y_i, т.е. разности $y_i - f(x_i)$ должны быть малы. Для оценки указанных разностей используется метод наименьших квадратов, согласно которому наилучшее приближение функции достигается при минимуме суммы квадратов разностей:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i) - y_i\right)^2 = \min .$$

Считая, что функция $f(x)$ имеет n параметров $a_1, a_2, ..., a_n$, т.е. $f(x) = f(x, a_1, a_2, ..., a_n)$, получаем задачу о нахождении минимума функции нескольких переменных. Такая задача решается путем приравнивания нулю всех частных производных искомой функции по переменным $a_1, a_2, ..., a_n$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(f(x, a_1, a_2, ..., a_n) - y_i\right)^2}{\partial a_1} = 0; \\ \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(f(x, a_1, a_2, ..., a_n) - y_i\right)^2}{\partial a_2} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{n}\left(f(x, a_1, a_2, ..., a_n) - y_i\right)^2}{\partial a_n} = 0. \end{cases}$$

Если приближающая линия представляет собой прямую $f(x, a, b) = a'x + b$, то имеем систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Для аппроксимирующей линии параболического типа

$$f(x,\ a,\ b,\ c) = ax^2 + bx + c .$$

Получаем систему трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

В ряде случаев, когда аппроксимирующая кривая не является многочленом первой или второй степени, можно при помощи замены переменных свести ее к многочлену. Например, для показательной функции $y = ab^x$ после логарифмирования имеем $\lg y = \lg a + x \lg b$ и после замены переменных $q = \lg y$, $z = x$, $p = \lg b$, $s = \lg a$ получаем линейное уравнение $q = pz + s$. После пересчета $q_i = \lg y_i$ и $z_i = x_i$ находим параметры p и s и по ним определяем a и b по обратным преобразованиям $a = 10^s$, $b = 10^p$. В таблице 3.1 приведены замены переменных, которые сводят различные зависимости к линейным.

Таблица 3.1

№ варианта	Функция	Замена переменных			
1	$y = ax^b$	$q = \lg y$	$z = \lg x$	$p = a$	$s = \lg b$
2	$y = ab^x$	$q = \lg y$	$z = \lg x$	$p = \lg b$	$s = \lg a$
3	$y = a + b / x$	$q = y$	$z = 1 / x$	$p = a$	$s = b$
4	$y = a + b / x$	$q = xy$	$z = x$	$p = a$	$s = b$
5	$y = 1/(ax + b)$	$q = 1/ y$	$z = x$	$p = a$	$s = b$
6	$y = x/(ax + b)$	$q = x / y$	$z = x$	$p = a$	$s = b$
7	$y = a \cdot \lg x + b$	$q = y$	$z = \lg x$	$p = a$	$s = b$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами получения аппроксимирующих функций.
2. Ознакомиться с программой построения аппроксимирующих функций на демонстрационном примере.
3. По данным табл. 3.1 с помощью программ построить аппроксимационные функции и методом наименьших квадратов подобрать их параметры. Результаты занести в табл. 3.2.
4. Выбрать окончательный вид аппроксимационной функции и построить ее график с нанесением на него заданных точек.

Таблица 3.1

$n \setminus i$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x_i	29	23	0	12	47	36	24	37	32	43
	y_i	3,8	1,2	1,6	0,1	8,2	4,1	5,3	1,2	1,7	3,8
2	x_i	7,5	16,3	0,2	8,5	16,8	18,9	7,7	11,1	9,6	10,0
	y_i	1,1	6,4	10,9	12,5	5,9	15,0	15,5	2,1	15,5	16,8
3	x_i	24	26	33	34	4	23	14	30	27	30
	y_i	21,9	7,2	39,1	35,2	41,0	30,4	21,4	36,5	34,3	5,0
4	x_i	39,6	9,3	14,2	12,1	14,6	42,6	1,4	2,9	13,6	1,5
	y_i	0,7	3,2	6,4	5,6	6,4	7,2	7,9	5,0	6,5	0,5
5	x_i	18,1	15,1	15,5	17,9	29,3	38,4	16,8	34,1	10,0	23,6
	y_i	29,2	36,0	33,3	16,6	35,1	44,2	9,4	35,7	24,2	24,8
6	x_i	17,5	42,7	13,9	22,4	44,0	16,4	50,5	49,7	6,8	7,4
	y_i	3,5	2,5	17,4	24,6	3,7	18,8	28,2	3,0	9,8	2,7
7	x_i	13,3	14,2	1,9	1,7	4,0	3,5	0,3	19,7	15,6	3,2
	y_i	29,2	1,6	1,2	0,3	22,6	18,1	37,4	1,4	30,8	14,8
8	x_i	48	39	1	34	30	22	52	35	31	9
	y_i	5,4	6,4	1,0	1,9	1,7	8,8	7,7	6,9	9,0	0,7
9	x_i	3,7	19,7	5,9	15,1	4,3	39,3	13,2	13,3	29,4	32,4
	y_i	4,2	16,8	14,5	10,1	11,9	14,9	5,8	15,1	5,5	15,6
10	x_i	25,7	40,7	0,9	17,4	52,6	7,7	23,3	51,0	44,0	18,3
	y_i	11,0	8,9	9,6	16,6	8,4	10,5	10,2	10,3	4,5	15,4

Таблица 3.2

№ варианта	Вид функции	a	b	c	$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-y_i)^2$
1	$y=ax+b$				
2	$y=ax^b$				
3	$y=ab^x$				
4	$y=a+b/x$				
5	$y=1/(ax+b)$				
6	$y=x/(ax+b)$				
7	$y=a\cdot\lg x+b$				
8	$y=ax^2+bx+c$				

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:
1. Таблицу с исследованными аппроксимирующими функциями.
2. Обоснование выбора вида аппроксимирующей функции.
3. График аппроксимирующей функции с нанесенными на него заданными точками (x_i, y_i).

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как ставится задача приближения функции?
2. Как оценить отклонение точек от заданной функции?
3. Как выполняется линеаризация аппроксимирующей функции?
4. Как выбрать аппроксимирующую функцию?

Литература [1, с. 340 – 351]; [2, с. 71 – 88].

Лабораторная работа 4

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Цель работы: Получение навыков использования численных методов вычисления определенных интегралов.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Задача численного интегрирования сводится к нахождению значения определенного интеграла:

$$I=\int_a^b f(x)dx .$$

Один из способов решения такой задачи – это замена подынтегральной функции $f(x)$ каким-либо интерполяционным многочленом и получение квадратурных формул вида

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=1}^{n} A_i\cdot f(x_i)+R ,$$

где x_i – выбранные узлы интерполирования; $f(x_i)$ – значение функции в узлах интерполирования; A_i – коэффициенты, зависящие от выбора узлов интерполирования (от вида функций не зависит); R – остаточный член.

При равноотстоящих узлах интерполирования квадратурные формулы называются формулами Ньютона-Котеса. Такие формулы различаются степенями используемых интерполяционных многочленов. Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно разбивают промежуток интерполирования на отдельные участки, а потом складывают полученные результаты, что дает, так называемые, составные формулы.

Разобьем интервал интегрирования $[a, b]$ на n равных частей системой точек:

$$x_i=x_0+i\cdot h \quad (i=\overline{0, n}) ;$$

$$x_0=a ;\ x_n=b ;\ h=(b-a)/n ;\ y_i=f(x_i) .$$

Используя интерполяцию многочленом нулевой, первой и второй степени, получим соответственно формулы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона).

Ф о р м у л а   п р я м о у г о л ь н и к о в . Если считать, что подынтегральная функция на каждом элементарном участке интегрирования постоянна и равна значению $f(x) = \text{const}$ на одном из концов участка, то получим формулу правых или левых прямоугольников.

Формула прямоугольников:

- правых

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} h \cdot f(x_i);$$

- левых

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} h \cdot f(x_i).$$

Если в качестве значения функции принимать ее значение в середине интервала интегрирования, получим модифицированную формулу прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot f(x_i + h/2).$$

Остаточный член во всех этих формулах имеет первый порядок, т.е. пропорционален первой производной $f'(x)$.

Геометрическая интерпретация методов прямоугольников заключается в том, что площадь под интегрируемой кривую заменяется суммой площадей прямоугольников (рис. 4.1).

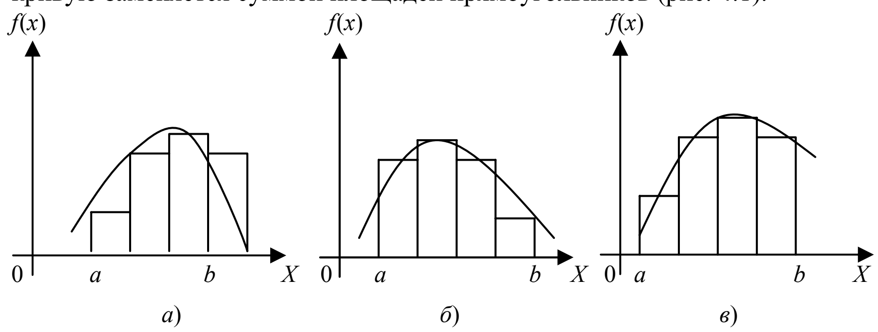

Рис. 4.1

Ф о р м у л а   т р а п е ц и й . При Интерполировании кривой $f(x)$ линейной функцией получаем формулу трапеции:

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{1} + y_1 + y_2 + \ldots + y_n\right) - R = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) - R,$$

где $R = \dfrac{(b-a)\,h^2}{12} f''(s)$, $s \in [a, b]$ – остаточный член.

Формула трапеций дает точное значение интервала, когда подынтегральная функция линейна, так как при этом $f''(x) = 0$.

Геометрически формула трапеций осуществляет замену площади под подынтегральной кривой суммой площадей трапеций, высоты которых совпадают со значениями функции $f(x)$ в точках x_i, $i = \overline{1, n}$ (см. рис. 4.2).

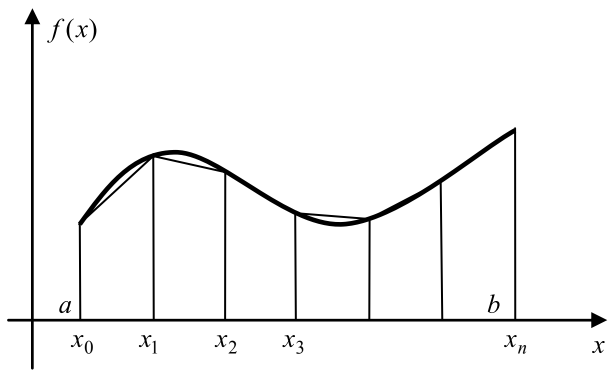

Рис. 4.2

Ф о р м у л а   С и м п с о н а (парабол). Получается при замене подынтегральной функции $f(x)$ параболами, совпадающими с функцией $f(x)$ в m тройках соседних точек, $n = 2m$ (рис. 4.3):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\cdot(y_0 + y_{2m} + 2\cdot(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) +$$

$$+4\cdot(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})) - R,$$

где $R = \dfrac{(b-a)\cdot h^4}{180}\cdot f''''(s)$, $s \in [a, b]$ – остаточный член.

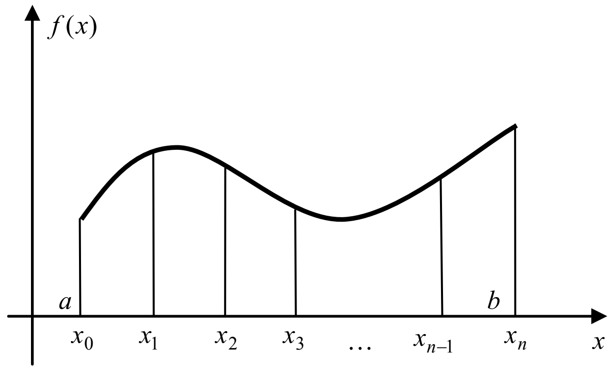

Рис. 4.3

Формула Симпсона является точной для многочленов до третьей степени включительно, так как в таких случаях $f''''(x) = 0$.

Как правило, более точная интерполяционная формула позволяет получить более точный результат при одинаковом числе точек интегрирования, поэтому на практике наиболее часто используется формула Симпсона. Если же и она не дает приемлемой точности, то используется более сложная формула Ньютона (правило трех восьмых), в которой число интервалов интегрирования должно быть кратно трем.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами вычисления определенных интегралов с помощью квадратурных формул Ньютона-Котеса.
2. С помощью моделирующей программы вычислить указанные в задании интегралы по трем различным формулам с одинаковым значением шага. Варианты заданий выбрать из табл. 4.1. Результаты вычислений занести в табл. 4.2.

Таблица 4.1

№ варианта	Задание	№ варианта	Задание
1	$\int_0^2 \sqrt{1+x^2+\sin(x)}\,dx,\ h=0{,}5$	7	$\int_0^5 x\sqrt{2x+1}\,dx,\ h=1{,}0$
2	$\int_3^8 \sin\left(e^{\frac{x}{3}}+x\right)dx,\ h=0{,}5$	8	$\int_0^{10} \sqrt{6x+5}\,dx,\ h=0{,}2$
3	$\int_0^3 \cos\left(e^{\frac{x}{3}}+x\right)dx,\ h=0{,}5$	9	$\int_3^5 \frac{x}{3(2+3x)^3}\,dx,\ h=0{,}2$
4	$\int_1^2 0{,}5e^{\sqrt{1+2x}}\,dx,\ h=0{,}2$	10	$\int_3^8 \frac{\sqrt{x^2+9}}{e^{0{,}1x}}\,dx,\ h=1{,}0$
5	$\int_2^5 \sin\left(\sqrt{1+x^2+x}\right)dx,\ h=0{,}2$	11	$\int_3^8 \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sin x}\,dx,\ h=1{,}0$
6	$\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{1+x^2+x}}\,dx,\ h=0{,}2$	12	$\int_3^8 \sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}}\,dx,\ h=1{,}0$

Таблица 4.2

<table>
<tr><th rowspan="3">Точное значение интеграла</th><th colspan="6">Квадратурные формулы</th></tr>
<tr><th colspan="2">1</th><th colspan="2">2</th><th colspan="2">3</th></tr>
<tr><th>значение</th><th>погреш-ность</th><th>значение</th><th>погреш-ность</th><th>значение</th><th>погреш-ность</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3. Вычислить точное значение заданного интеграла и погрешности различных методов интегрирования (как разность между точным и приближенным значении). Результаты занести в табл. 4.2.

4. Пользуясь моделирующей программой вычислить значение заданного интеграла одним из исследуемых методов при разных значениях шага интегрирования. Результаты занести в табл. 4.3.

5. По данным табл. 4.3 построить график зависимости значения интеграла от шага интегрирования и определить значение шага, при котором погрешность вычисления интеграла не превышает одного процента.

Таблица 4.3

h					
$\int_a^b f(x)\,dx$					

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

1. Исследуемую подынтегральную функцию и краткое описание используемых методов интегрирования.
2. Таблицу с вычисленными значениями определенного интеграла и погрешностями.
3. Таблицу и график зависимости вычисленного значения интеграла от шага интегрирования.
4. Максимальное значение шага, при котором вычисленное значение интеграла отличается от истинного не более чем на один процент.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как меняется погрешность квадратурных формул с увеличением степени интерполяционной формулы и уменьшением шага?
2. Как получить квадратурную формулу для неравноотстоящих узлов интегрирования?
3. Какие методы дают точное значение при интегрировании линейной функции?
4. Что выгоднее – увеличивать степень полинома, или уменьшать шаг интегрирования?
5. Как меняется реальная точность вычислений при увеличении числа узлов интегрирования?

Литература [1, с. 165 – 189]; [3, с. 577 – 586]; [4, с. 140 – 157].

Лабораторная работа 5

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель работы: Получение навыков использования численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Общий вид дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0\,. \tag{1}$$

Нормальная форма дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)\,, \tag{2}$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция, подлежащая определению; $f(x, y)$ – правая часть дифференциального уравнения в нормальной форме, равная первой производной функции $y(x)$. В функцию $f(x, y)$ помимо аргумента x входит и сама неизвестная функция $y(x)$.

Если неизвестная функция y зависит от одного аргумента x, то дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется обыкновенным дифференциальным уравнением.

Если функция y зависит от нескольких аргументов, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ является семейство функций $y = y(x, c)$, рис. 5.1.

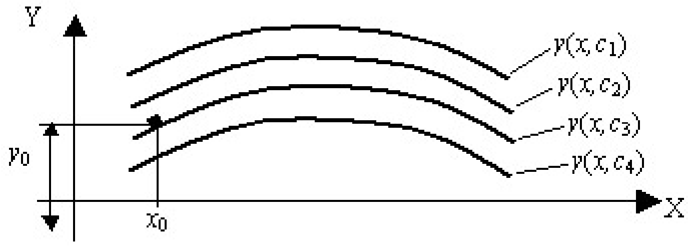

Рис. 5.1

При решении прикладных задач ищут частные решения дифференциальных уравнений. Выделение частного решения из семейства общих решений осуществляется с помощью задания начальных условий:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0\,, \tag{3}$$

т.е. начальной точки с координатами (x_0, y_0).

Нахождение частного решения дифференциального уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию называется задачей Коши.

В численных методах задача Коши ставится следующим образом: найти табличную функцию $y_i = f(x_i),\ i = \overline{1, n}$ которая удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению (2) и начальному условию (3) на отрезке $[a,\ b]$ с шагом h.

На графике (рис. 5.2) решение задачи Коши численными методами представляется в виде совокупности узловых точек с координатами $(x_i,\ y_i)$, $i = \overline{1, n}$.

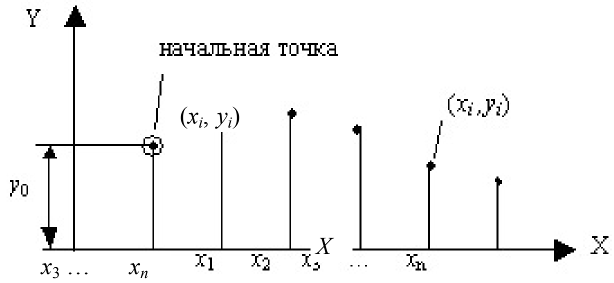

Рис. 5.2

Наиболее эффективными и часто встречаемыми методами решениями задачи Коши являются *методы Рунге–Кутта.* Они основаны на аппроксимации искомой функции $y(x)$ в пределах каждого шага многочленом, который получен при помощи разложения функции $y(x)$ в окрестности шага h каждой i-й точки в ряд Тейлора:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \dots . \tag{4}$$

Усекая ряд Тейлора в различных точках и отбрасывая правые члены ряда, Рунге и Кутт получали различные методы для определения значений функции $y(x)$ в каждой узловой точке. Точность каждого метода определяется отброшенными членами ряда.

Метод Рунге–Кутта первого порядка (*метод Эйлера*)

Отбросим в (4) члены ряда, содержащие h^2, h^3, h^4, … . Тогда $y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i)$, так как $y'(x_i) = f(x_i,\ y_i)$. Получим формулу Эйлера:

$$y_{i+1} = y(x_i) + h \cdot f(x_i,\ y_i)\,. \tag{5}$$

Так как точность *методов Рунге–Кутта* определяется отброшенными членами ряда (4), то точность *метода Эйлера* на каждом шаге составляет $\approx h^2$.

Рассмотрим геометрический смысл *метода Эйлера.*

Формула Эйлера имеет вид

$$y_{i+1} = y(x_i) + h \cdot f(x_i,\ y_i)\,,$$

где $f(x_i,\ y_i) = y'(x_i) = \operatorname{tg} \alpha_i$.

Тогда формула Эйлера принимает вид

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \operatorname{tg}\alpha_i ,$$

где $\operatorname{tg}\alpha_i$ – тангенс угла наклона касательной к искомой функции $y(x)$ в начальной точке каждого шага.

В результате в *методе Эйлера* на графике (рис. 5.3) вся искомая функция $y(x)$ на участке $[a, b]$ аппроксимируется ломаной линией, каждый отрезок которой на шаге h линейно аппроксимирует искомую функцию. Поэтому метод Эйлера получил еще название метода ломаных.

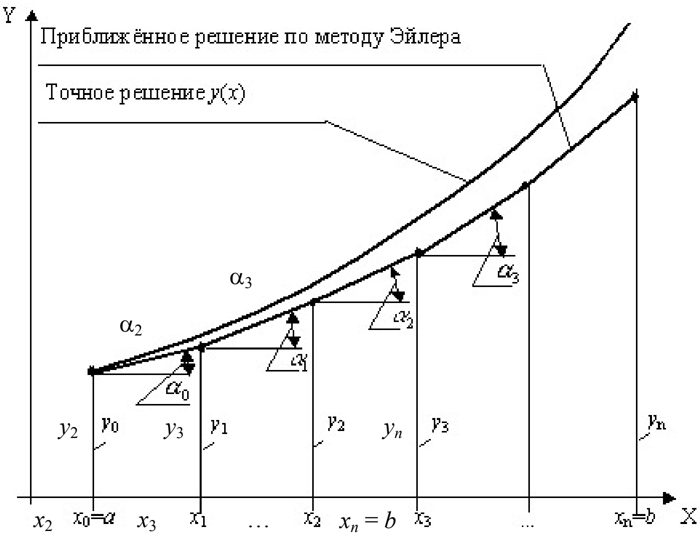

Рис. 5.3

В *методе Эйлера* наклон касательной в пределах каждого шага считается постоянным и равным значению производной в начальной точке шага x_i. В действительности производная, а, значит, и тангенс угла наклона касательной к кривой $y(x)$ в пределах каждого шага меняется. Поэтому в точке $x_i + h$ наклон касательной не должен быть равен наклону в точке x_i. Следовательно, на каждом шаге вносится погрешность.

Первый отрезок ломаной действительно касается искомой интегральной кривой $y(x)$ в точке (x_0, y_0). На последовательных же шагах касательные проводятся из точек (x_i, y_i), подсчитанных с погрешностью. В результате с каждым шагом ошибки накапливаются.

Основной недостаток *метода Эйлера* – систематическое накопление ошибок. Поэтому *метод Эйлера* рекомендуется применять для решения дифференциальных уравнений при малых значениях шага интегрирования *h*.

Метод Рунге–Кутта второго порядка (*модифицированный метод Эйлера*)

Отбросим в (4) члены ряда, содержащие h_3, h_4, h_5, … . Тогда

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) . \tag{6}$$

Чтобы сохранить член ряда, содержащий h^2, надо определить вторую производную $y''(x_i)$. Ее можно аппроксимировать разделенной разностью 2-го порядка

$$y''(x_i) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h} .$$

Подставляя это выражение в (6), получим

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2} \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h} = y(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i + h) .$$

Окончательно, модифицированная или уточненная формула Эйлера имеет вид

$$y_{i+1} = y(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}) . \tag{7}$$

Как видно, для определения функции $y(x)$ в точке $i + 1$ необходимо знать значение правой части дифференциального уравнения $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ в этой точке, для определения которой необходимо знать предварительное значение y_{i+1}.

Для определения предварительного значения y_{i+1} воспользуемся формулой Эйлера. Тогда все вычисления на каждом шаге по модифицированной или уточненной формуле Эйлера будем выполнять в два этапа:

На первом этапе вычисляем предварительное значение $y^{э}_{i+1}$ по формуле Эйлера:

$$y^{э}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) .$$

На втором этапе уточняем значение y_{i+1} по модифицированной или уточненной формуле Эйлера:

$$y_{i+1} = y(x_i) + \frac{h}{2} \cdot f(x_i,\, y_i) + \frac{h}{2} \cdot f(x_{i+1},\, y^{э}_{i+1})$$

Точность метода определяется отброшенными членами ряда Тейлора (4), т.е. точность уточненного или *модифицированного метода Эйлера* на каждом шаге $\approx h^3$.

Метод Рунге–Кутта четвертого порядка

Самое большое распространение из всех численных методов решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ получил метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

В этом методе на каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений искомая функция $y(x)$ аппроксимируется рядом Тейлора (4), содержащим члены ряда с h^4:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \dots .$$

В результате ошибка на каждом шаге имеет порядок h^5.

Для сохранения членов ряда, содержащих h_2, h_3, h_4, необходимо определить вторую y'', третью y''' и четвертую $y^{(4)}$ производные функции $y(x)$. Эти производные аппроксимируем разделенными разностями второго, третьего и четвертого порядков, соответственно.

В результате для получения значения функции y_{i+1} по методу Рунге–Кутта выполняется следующая последовательность вычислительных операций:

$$T_1 = h \cdot f(x_i\,, y_i);$$
$$T_2 = h \cdot f(x_i + h/2\,, y_i + T_1/2);$$
$$T_3 = h \cdot f(x_i + h/2\,, y_i + T_2/2);$$
$$T_4 = h \cdot f(x_i + h/2\,, y_i + T_3);$$
$$y_{i+1} = y_i + (T_1 + 2T_2 + 2T_3 + T_4)/6.$$

Методы Рунге–Кутта относятся к так называемым одношаговым методам, поскольку для вычисления значения функции $y(x)$ в точке x_{i+1} требуется знать только значение функции $y(x)$ в одной предыдущей точке x_i.

Многошаговые методы построены путем интерполирования по нескольким соседним точкам; для их использования необходимо знать значение функции $y(x)$ в нескольких предыдущих точках.

Эти методы численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка были разработаны Адамсом в 1855 году.

Достоинство многошаговых методов состоит в том, что независимо от порядка метода для вычисления значения функции $y(x)$ в одной точке требуется один раз вычислить функцию $f(x, y)$.

Метод Адамса второго порядка записывается следующим образом:

$$y_{i+1} = y_i + h(3y'_i - y'_{i-1})/2\,,$$

где $y'_i = f(x_i\,, y_i)$.

Методы Адамса третьего и четвертого порядков имеют вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (23y'_i - 16y'_{i-1} - 5y'_{i-2})/12\,;$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3})/24\,.$$

Метод Рунге–Кутта четвертого порядка и метод Адамса четвертого порядка имеют одинаковую погрешность, но метод Адамса требует примерно вчетверо меньшего объема вычислений.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Ознакомиться с методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. С помощью моделирующей программы решить указанное в задании дифференциальное уравнение по трем различным методам с одинаковым значением шага. Варианты заданий выбрать из табл. 5.1.
3. Пользуясь моделирующей программой, решить дифференциальное уравнение одним из исследуемых методов при разных значениях шага.

Таблица 5.1

№ варианта	Исходное уравнение	№ варианта	Исходное уравнение
1	$y' = \sqrt{1 + x^2 + \sin(x)}$, $y(0) = 0$	7	$y' = x \cdot \sqrt{2x + 1}$, $y(1) = 0$
2	$y' = \sin\left(e^{\frac{x}{3}} + x\right)$, $y(0) = 1$	8	$y' = \sqrt{6x + 5}$, $y(1) = 1$
3	$y' = \cos\left(e^{\frac{x}{3}} + x\right)$, $y(1) = 0$	9	$y' = \dfrac{x}{(2 + 3x)^3}$, $y(0) = 0$
4	$y' = 0{,}5 \cdot e^{\sqrt{1 + 2 \cdot x}}$, $y(1) = 1$	10	$y' = \sqrt{x^2 + 9}$, $y(0) = 1$
5	$y' = \sin\left(\sqrt{1 + x^2 + x}\right)$, $y(0) = 0$	11	$y' = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{e^{x - 5}}}$, $y(0) = 3$
6	$y' = \dfrac{e^x}{\sqrt{1 + x^2 + x}}$, $y(0) = 1$	12	$y' = x \cdot \sqrt{\dfrac{2x + 1}{\sqrt{x^3}}}$, $y(1) = 0$

ОТЧЕТ О РАБОТЕ

Отчет должен содержать:

1. Исследуемое дифференциальное уравнение и краткое описание используемых методов решения.
2. Таблицу с вычисленными значениями решения дифференциального уравнения.
3. Таблицу и график зависимости решения дифференциального уравнения от величины шага.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое порядок метода?
2. Какие методы дают точное значение при решении дифференциального уравнения с линейной правой частью?
3. Что выгоднее – увеличивать порядок метода, или уменьшать величину шага?
4. Как меняется реальная точность вычислений при уменьшении шага?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин, И.С. Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М. : Наука, 1966. – 632 с.

2. Бодров, В.И. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.И. Бодров, С.И. Дворецкий, В.Ф. Калинин. – М. : МИХМ, 1986. – 92 с.

3. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.

4. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – М. : Наука, 1972. – 337 с.

5. Крылов, В.И. Вычислительные методы / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. – М. : Наука, 1976. – 304 с.

6. Основные численные методы и их реализация на микрокалькуляторах / И. Сулима и др. – Киев : Виша школа, 1987. – 312 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ