Н.П. ПУЧКОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ И ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

Н.П. ПУЧКОВ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ И ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов 1 курса экономических специальностей

Тамбов
Издательство ТГТУ
2008

УДК 51(075)
ББК В11я73-2
П909

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор ТГУ им. Г.Р. Державина
А.И. Булгаков

Доктор педагогических наук, профессор ТГТУ
Е.А. Ракитина

Пучков, Н.П.
П909 Конспект лекций и задачи по курсу «Высшая математика» : учебное пособие. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – Ч. 1. – 80 с. – 150 экз. – ISBN 978-5-8265-0714-8.

Представлены конспекты лекций по курсу «Высшая математика», содержащие основные понятия разделов «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии» и «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». Приведены задачи, а также образцы экзаменационных билетов по названным разделам учебной программы.

Рекомендуется студентам вузов экономических специальностей.

УДК 51(075)

ББК В11я73-2

ISBN 978-5-8265-0714-8

Учебное издание

ПУЧКОВ Николай Петрович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ И ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Зотовой

Подписано в печать 19.06.2008
Формат $60 \times 84/16$. 4,65 усл. печ. л. Тираж 150 экз. Заказ № 292

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ПРЕДИСЛОВИЕ

Несмотря на обилие учебников и учебных пособий по математике для студентов вузов, данное учебное пособие имеет своей целью не просто донести программный материал по математике для студентов-первокурсников, но и научить их конспектировать лекции преподавателей.

Конспект лекций – запись содержания устного изложения учебного материала преподавателем, включая и его записи на аудиторной доске. Конспектирование (сжатое изложение) требует от студентов умения отбирать в исходном тексте главное, исключать второстепенное и обобщать основное, строить логически связанный текст.

Реальные лекции преподавателей носят более развернутый и глубокий характер. Данные конспекты следует воспринимать и как развернутый, содержательный, конструктивный план и как достаточно сжатую теорию, как вспомогательный материал при подготовке студента к практическим занятиям по математике, к коллоквиумам и экзаменам; с таким же успехом эти конспекты может использовать преподаватель при подготовке к лекции.

Каждый из предлагаемых конспектов лекций структурно представлен в виде «пронумерованных» абзацев, содержащих определенные законченные мысли – понятия, определения, теоремы, примеры. Это, на наш взгляд, поможет студентам овладеть искусством конспектирования. В тексте приведены доказательства только тех утверждений, теорем, которые носят принципиальный характер и их доказательство не является громоздким.

Более обстоятельное изложение программного материала, обозначенного в заголовках лекций, можно найти в указанных в конце пособия учебниках и учебных пособиях.

Лекция 1. МАТРИЦЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ. СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

1. Система $m\times n$ чисел a_{ij} $\left(i=\overline{1,m}=1,2,3,...,m;\ j=\overline{1,n}=1,2,3,...,n\right)$, расположенных в прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов, называется матрицей A размера $m\times n$ (читается «*эм* на *эн*»). Обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},\ A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{Vmatrix},\ A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}.$$

Число a_{ij} называется элементом матрицы (индекс i показывает номер строки, а индекс j – номер столбца).

2. Если все $a_{ij}\,(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ равны нулю, то матрица – нулевая; обозначение O.

Если $m=n$, то матрица называется квадратной; в этом случае число m называется порядком матрицы.

Матрицу размером $m\times 1$ (при $m>1$) называют матрицей-столбцом, матрицу размером $1\times n$ (при $n>1$) – матрицей-строкой. В случае $m=n=1$ матрица состоит из одного числа: $A=\left\|a_{11}\right\|$.

Если в квадратной матрице все $a_{ij}=0$ при $i>j$ или при $i<j$, то матрица называется треугольной; если все a_{ij} при $i\neq j$ равны нулю, а при $i=j$ $a_{ij}\neq 0$, то матрица – диагональная; если при этом все a_{ij} равны единице, то матрица называется единичной (обозначение E).

Симметрическая матрица – квадратная матрица, у которой $a_{ij}=a_{ji}$.

3. Две матрицы $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$ и $B=\left\|b_{ij}\right\|_{m\times n}$ одинаковой размерности считаются равными, если все $a_{ij}=b_{ij}$.

4. Линейные операции над матрицами.

Складывать можно матрицы одинаковой размерности по правилу: $A+B=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}+\left\|b_{ij}\right\|_{m\times n}=\left\|a_{ij}+b_{ij}\right\|_{m\times n}$.

Произведение матрицы на постоянное число $k\cdot\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}=\left\|k\cdot a_{ij}\right\|_{m\times n}$.

5. Линейные операции обладают следующими свойствами:

1. $A+B=B+A$.
2. $(k_1+k_2)\cdot A=k_1\cdot A+k_2\cdot B$.
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$.
4. $A+O=A$.
5. $k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$.
6. $(k_1\cdot k_2)A=(k_1\cdot A)\cdot k_2$.
7. $0\cdot A=O$.

6. Транспонированием A^T матрицы A называется такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки делаются ее столбцами с тем же самым номером. Например, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $\left(A^T\right)^T = A$; $A = A^T$ для симметрической матрицы.

7. Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$ на матрицу $B = \|b_{ij}\|_{n\times p}$ называется матрица $C = \|c_{ij}\|_{m\times p}$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$. Чтобы определить элемент c_{ij} матрицы C, необходимо найти сумму произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие (по номеру) элементы j-го столбца матрицы B. Произведение матриц не коммутативно: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

8. Свойства произведения матриц. Пусть A, B, C – матрицы соответствующих размеров (чтобы произведения матриц были определены), а α – действительное число, тогда:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(A+B)C = AC + BC$;
3. $A(B+C) = AB + AC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
5. $AE = EA = A$.

9. Пример.

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -7 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, то

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \\ 15 & 15 & -9 \end{pmatrix},\quad AB + 2C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лекция 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ И МИНОРЫ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Любой квадратной матрице A порядка n ставится в соответствие по определенному закону некоторое число, называемое определителем (или детерминантом) n-го порядка этой матрицы; обозначается $\det A$ или Δ_A

Определителем первого порядка, соответствующим заданной квадратной матрице $A_1 = (a_{11})$, называется число $\det A_1 = a_{11}$.

Определителем второго порядка, соответствующим заданной квадратной матрице $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, называется число $\det A_2$, равное разности произведений чисел, стоящих на диагоналях:

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\det A_3 = \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-го порядка A_n называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A после вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ для } A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы называется его минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

4. Определителем n-го порядка, соответствующим заданной квадратной матрице A_n, называется число $\det A$, вычисляемое по следующему правилу:

$$\Delta_n = \det A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$ для любого фиксированного $i = 1, 2, ..., n$. Эта формула называется разложением определителя по элементам i-й строки.

5. Пример разложения определителя третьего порядка для $i = 1$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Применение этого правила позволяет свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка, каждый из которых вычисляется через $(n-1)$ определитель $(n-2)$-го порядка и т.д. к вычислению $n!$ определителей 1-го порядка.

6. Некоторые свойства определителей матрицы A:

1) $\det A = 0$, если все элементы любой из его строк равны нулю.

2) $\det A = 0$, если элементы его двух строк равны или пропорциональны.

3) Общий множитель элементов любой строки можно вынести за знак определителя.

4) Определитель не изменится, если к элементам одной из его строк прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

5) Сумма произведений всех элементов a_{ik} какой-либо *i*-й строки определителя на алгебраические дополнения A_{jk} соответствующих элементов другой, j-й строки равна нулю: $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + ... + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0$, $i \neq j$.

6) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ (равноправие строк и столбцов).

7. Следствия:

- При транспонировании матрицы определитель не меняется.
- Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Лекции 3 и 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Линейное алгебраическое уравнение имеет вид:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b,$$

где a_i, b – известные числа, $i = \overline{1,n}$; x_i – неизвестные, $i = \overline{1,n}$.

2. Система m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Сокращенно: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = \overline{1,m}$.

3. Решение системы – совокупность n чисел $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ..., $x_n = c_n$, обращающих каждое уравнение в тождество.

Система называется *совместной*, если имеет хотя бы одно решение.

Если $m < n$ – недоопределенная система, $m = n$ – определенная, $m > n$ – переопределенная.

Далее будем рассматривать определенные системы ($m = n$).

4. Обозначим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

тогда $A \cdot X = B$ – запись системы в матричной форме.

5. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A, если их произведение равно единичной матрице: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

6. Рассмотрим процесс нахождения обратной матрицы для матрицы $A = \|a_{ij}\|_{3\times 3}$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Обозначим $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$, которая носит название присоединенной матрицы.

Здесь $\widetilde{A}^T$ – транспонированная к $\widetilde{A}$ матрица, A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij}, $i, j = 1,2,3$.

Найдем произведение $\widetilde{A}^T \cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} & A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} & A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} \\ A_{12}a_{11} + A_{22}a_{21} + A_{32}a_{31} & A_{12}a_{12} + A_{22}a_{22} + A_{32}a_{32} & A_{12}a_{13} + A_{22}a_{23} + A_{32}a_{33} \\ A_{13}a_{11} + A_{23}a_{21} + A_{33}a & A_{13}a_{12} + A_{23}a_{22} + A_{33}a_{32} & A_{13}a_{13} + A_{23}a_{23} + A_{33}a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix} = \Delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta \cdot E.$$

Если $\Delta \neq 0$, то $\frac{1}{\Delta}\cdot \widetilde{A}^T \cdot A = E$, т.е. $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\cdot \widetilde{A}^T$.

7. Если $A\cdot X = B$ и $\exists\, A^{-1}$, то $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$ или $E\cdot X = A^{-1}B$ и $X = A^{-1}\cdot B.$ Для системы трех уравнений с тремя неизвестными: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix}$, откуда

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}\right) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

(использовано разложение определителя Δ_1 по элементам 1-го столбца).

Аналогично

$$x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\Delta_2}{\Delta};\quad x_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

8. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то можно получить так называемые формулы Крамера: $x_1 = \Delta_1/\Delta$, $x_2 = \Delta_2/\Delta$, $x_3 = \Delta_3/\Delta$, где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители третьего порядка, полученные из Δ путем замены, соответственно, первого, второго или третьего столбца столбцом свободных членов.

9. В основе метода Гаусса (последовательного исключения неизвестных) лежит понятие эквивалентных систем – систем, имеющих одно и то же решение.

Например, системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1; \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -2; \\ 3x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ имеют одно и то же решение $(x_1 = 1, x_2 = -1)$.

10. Эквивалентность не нарушается в результате так называемых элементарных преобразований системы уравнений; это:

- удаление строки с нулевыми коэффициентами и свободным членом;
- перестановка местами уравнений;
- прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число.

11. Сущность метода Гаусса – применяя элементарные преобразования свести исходную систему m уравнений с n неизвестными к эквивалентной системе p уравнений $(p \le m)$, содержащих (последовательно по строкам) от n до r ($r \ge 1$) неизвестных. При $m = n = p$, $r = 1$ преобразованная система имеет «треугольный» вид:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + ... + \alpha_{1n}x_n = \beta_1; \\ \qquad \alpha_{22}x_2 + ... + \alpha_{2n}x_n = \beta_2; \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}x_n = \beta_n. \end{cases}$$

Это позволяет последовательно (обратным ходом) найти неизвестные $x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1$.

Если $r > 1$, например $r = 2$, то преобразованная система имеет «трапецеидальный» вид (см. п. 15).

12. Пример. $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \begin{vmatrix} \times a_{21} \\ \times a_{11} \end{vmatrix}$ – все коэффициенты и свободный член каждого уравнения умножаются на одно и то же число.

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}; \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = b_2a_{11}. \end{cases}$$

Первое уравнение оставляем неизменным, а из второго почленно вычитаем первое:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{21}x_2 = b_1a_{21}; \\ -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Из второго уравнения $x_2 = \dfrac{b_1a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$, из первого $x_1 = \dfrac{b_1a_{21} - a_{12}a_{21} \cdot x_2}{a_{12}a_{21}}$.

Метод Гаусса применим к любой системе линейных уравнений. При этом система будет несовместной, если в процессе преобразований мы получим уравнение, в котором коэффициенты при всех неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля; если же такого уравнения не встретим, то система будет совместной. Совместная система будет определенной, если она приводится к треугольному виду, и неопределенной (иметь бесконечно много решений), если приводится к трапецеидальному виду (последнее уравнение содержит более одного неизвестного).

13. Пример. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_1 - x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3; \\ 4x_1 - 2x_1 + x_3 = 3 \end{cases}$ методом обратной матрицы, методом Крамера и методом Гаусса.

13.1. Метод обратной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, AX = B.$$

$\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$, система имеет единственное решение.

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5.$

$$X = \frac{1}{\Delta_A} \quad \widetilde{A}^T \cdot B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 10 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

13.2. Метод Крамера.

$\Delta = 5$; $\Delta_1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 15$; $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1;\quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2;\quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 3$.

13.3. Метод Гаусса.

$$\begin{array}{l} \times(-4) \ \times(-2) \\ \oplus \\ \oplus \end{array}\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2; \\ 2x_1-x_2+x_3=3; \\ 4x_1-2x_2+x_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \ (-2)\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2; \\ -5x_2+3x_3=-1; \\ -10x_2+5x_3=-5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-x_3=2; \\ -5x_2+3x_3=-1; \\ -x_3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2-2x_2+x_3=2-2x_2+3=1; \\ x_2=\frac{1}{5}(1+3x_3)=2; \\ x_3=3. \end{cases}$$

14. Система называется однородной, если все свободные члены равны нулю: $b_1=b_2=...=b_n=0$. Такая система всегда совместна, так как имеет нулевое решение: $x_1=x_2=...=x_n=0$. Если главный определитель такой системы равен нулю, то система имеет и ненулевое решение (бесконечное множество решений).

15. Пример. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0; \\ 2x_1+4x_2-2x_3=0; \\ 4x_1-2x_2-x_3=0; \end{cases} \quad \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}=0.$

Применив метод Гаусса, получим:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0; \\ -10x_2+3x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=x_3; \\ x_2=0{,}3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3-2x_2; \\ x_2=0{,}3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0{,}4x_3; \\ x_2=0{,}3x_3. \end{cases}$$

Полагая $x_3=t$ ($t\in R$, параметр), получим множество решений $(0{,}4t;\,0{,}3t;\,t)$.

Лекции 5 и 6. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ И ИХ СВОЙСТВА. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО БАЗИСУ. СИСТЕМА КООРДИНАТ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ В КООРДИНАТНОЙ ФОРМЕ. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Векторы.

Определение 5.1. *Вектором* называется направленный отрезок. Обозначения: $\overline{a}, \overline{AB}$ (рис. 5.1.) При обозначении $\overline{AB}$ первая буква (A) соответствует началу вектора, вторая (B) – концу.

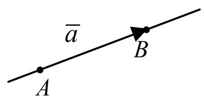


Рис. 5.1.

Определение 5.2. Модулем вектора называется число, равное его длине. (Обозначения: $\left|\overline{AB}\right|$, $|\overline{a}|$). Если $|\overline{a}|=1$, то вектор $\overline{a}$ называется единичным (ортом) (обозначение $\overline{e}$). Если $|\overline{a}|=0$, то вектор $\overline{a}$ называется нулевым; обозначение: $\overline{0}$.

Определение 5.3. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной или параллельных прямых (обозначение $\overline{a}\,//\,\overline{b}$). Векторы $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называются компланарными, если они лежат в одной плоскости либо в параллельных плоскостях.

Определение 5.4. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются равными, если они сонаправлены и $|\overline{a}|=|\overline{b}|$.

Определение 5.5. Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{c}=\lambda\overline{a}$, определяющийся следующими условиями: 1) $|\overline{c}|=|\overline{a}||\lambda|$; 2) векторы $\overline{c}$ и $\overline{a}$ сонаправлены, если $\lambda>0$, противоположно направлены, если $\lambda<0$; если же $\lambda=0$, то $\overline{c}=\overline{0}$.

Любой ненулевой вектор $\overline{a}$ может быть представлен в виде $\overline{a}=a\cdot\overline{e}$, где $a=|\overline{a}|, \overline{e}$ – орт вектора $\overline{a}$ (единичный вектор, сонаправленный с $\overline{a}$).

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (ненулевых) является равенство $\overline{a}=\lambda\overline{b}$.

2. *Суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, полученный по правилу треугольника (рис. 5.2) или параллелограмма (рис. 5.3).

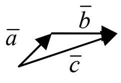


Рис. 5.2

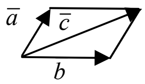


Рис. 5.3

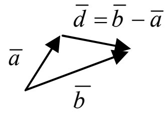


Рис. 5.4

Разностью векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$ называется такой вектор $\overline{d}$, который в сумме с вектором $\overline{a}$ дает вектор $\overline{b}$ (рис. 5.4).

Операции произведения вектора на число и сложения векторов называются линейными.

Выражение вида $\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – числа, называется линейной комбинацией векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$. Если $\alpha_1\overline{a} + \alpha_2\overline{b} + \alpha_3\overline{c} = 0$ выполняется только при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 0$, то вектора $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ называются линейно независимыми, в противном случае – линейно зависимыми.

3. *Свойства линейных операций*. Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ и любых действительных чисел k и λ справедливы следующие соотношения:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$; 2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;

3) $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$; 4) $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;

5) $k(\overline{a} + \overline{b}) = k\overline{a} + k\overline{b}$; 6) $(k + \lambda)\overline{a} = k\overline{a} + \lambda\overline{a}$;

7) $k(\lambda\overline{a}) = (k\lambda)\overline{a}$; 8) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$.

Если в треугольнике OAB (рис. 5.5) точка C делит сторону AB в отношении $|AC| : |AB| = \mu$, $(\mu \in [0,1])$, то $\overline{OC} = (1-\mu)\overline{OA} + \mu\overline{OB}$.

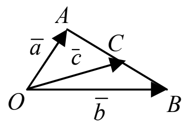


Рис. 5.5

4. *Базисными* векторами (базисом) на плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов этой плоскости, взятая в определенном порядке. *Базисом* в пространстве называется любая тройка некомпланарных векторов, взятая в определенном порядке. Базис, составленный из единичных, взаимно перпендикулярных векторов, называется ортонормированным.

Любой вектор $\overline{a}$ плоскости может быть представлен единственным образом в виде

$$\overline{a} = a_1\,\overline{i} + a_2\,\overline{j}, \tag{5.1}$$

где векторы $\overline{i}$ и $\overline{j}$ – базисные векторы этой плоскости; a_1, a_2 – числа.

Любой вектор $\overline{b}$ пространства единственным образом может быть представлен в виде

$$\overline{b} = b_1 \cdot \overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}, \tag{5.2}$$

где векторы $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – базисные векторы пространства; b_1, b_2, b_3 – числа.

Очевидно, что базисные вектора линейно независимы.

Равенства (5.1) и (5.2) называются разложением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ по базисным векторам, а коэффициенты разложения этих векторов по базису – координатами векторов в данном базисе. Это записывается так: $\overline{a} = \{a_1, a_2\}$, $\overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

5. Если в пространстве задан некоторый базис и $\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ – два вектора в этом базисе, то:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$;

2) $\lambda\overline{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}$, λ – число;

3) Чтобы $\overline{a} = \overline{b}$, необходимо и достаточно, чтобы $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$;

4) Чтобы $\overline{a} \,//\, \overline{b}$, необходимо и достаточно, чтобы $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, $b_3 = \lambda a_3$.

6. Системой координат называется совокупность точки (начала координат) и базиса. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат. Декартовой называется система координат, в которой базисные векторы ортонормированные (взаимно перпендикулярные, единичной длины).

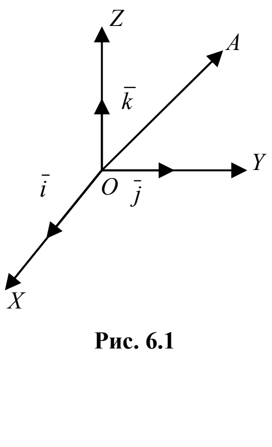


Рис. 6.1

На рис. 6.1 – декартова система координат (ДСК) (O, $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$); OX, OY, OZ – координатные оси: $|\overline{i}| = |\overline{j}| = |\overline{k}| = 1$.

7. Радиус-вектором произвольной точки A пространства (рис. 6.1), содержащего ДСК, называется вектор $\overline{OA}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке A; его разложение по базису: $\overline{OA} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, x_1, y_1, z_1 – координаты вектора $\overline{OA}$.

Координатами точки A называют координаты радиус-вектора этой точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 6.1).

Если заданы $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ – их радиус-векторы, вектор $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

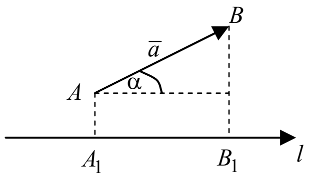


Рис. 6.2

8. Пусть l – некоторая координатная ось на плоскости (рис. 6.2). Проекцией точки A на координатную ось называют точку A_1, расположенную на этой оси, при условии, что вектор $\overline{A_1A}$ перпендикулярен оси.

Проекцией вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ на ось l называют число, абсолютная величина которого равна $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, где A_1 и B_1 – проекции точек A и B на ось. Значение проекции положительно, если $\overline{A_1B_1}$ сонаправлен с осью, и отрицательно, если противоположно направлен. Обозначение $\text{Пр}_l\,\overline{AB}$.

Если направление оси задается вектором $\overline{e}$, то $\text{Пр}_l\,\overline{AB} = \text{Пр}_{\overline{e}}\,\overline{AB}$.

Нетрудно убедиться, что $\text{Пр}_l\,\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\overline{AB}$ и осью $\overline{l}$.

Координаты вектора численно равны его проекциям на координатные оси.

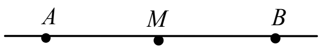


Рис. 6.3

9. Деление отрезка в заданном отношении. Дано: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $M(x, y, z)$ лежат на одной прямой (рис. 6.3) и $\left|\overline{AM}\right| = \lambda\left|\overline{MB}\right|$, $0 < \lambda < \infty$.

Тогда $\overline{AM} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$; $\overline{MB} = \{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\}$; так как $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$, то

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y); \\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z); \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2; \\ y(1+\lambda) = y_1 + \lambda y_2; \\ z(1+\lambda) = z_1 + \lambda z_2, \end{cases}$$

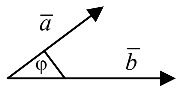
откуда координаты точки M: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$; $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.

10. Скалярным произведением $\overline{a} \cdot \overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi.$$

Двум векторам ставится в соответствие скаляр (число).

$$\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left|\overline{a}\right| \cdot \text{Пр}_{\overline{a}} \cdot \overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot \text{Пр}_{\overline{b}} \cdot \overline{a}.$$



Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов нулевой или они между собой перпендикулярны.

11. Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{b}, \overline{a}\right)$;

2) $\left((\lambda\overline{a}), \overline{b}\right) = \left(\overline{a}, (\lambda\overline{b})\right)$;

3) $\left((\overline{a} + \overline{b}), \overline{c}\right) = \left(\overline{a}, \overline{c}\right) + \left(\overline{b}, \overline{c}\right)$;

4) $(\overline{a}, \overline{a}) = \left|\overline{a}\right|^2$.

Пусть $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$; $\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ в базисе $\left(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right)$ или $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$, $\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$. Тогда

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z;\ \left|\overline{a}\right| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

$$\cos\varphi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

12. Если вектор $\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ образует углы α, β и γ соответственно с базисными векторами $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, то $\left(\overline{a}, \overline{i}\right) = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{i}\right|\cos\alpha$, $\left(\overline{a}, \overline{j}\right) = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{j}\right|\cos\beta$, $\left(\overline{a}, \overline{k}\right) = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{k}\right|\cos\gamma$.

Так как $\left|\overline{i}\right| = \left|\overline{j}\right| = \left|\overline{k}\right| = 1$, то косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{\left|\overline{a}\right|}$; $\cos\beta = \dfrac{a_y}{\left|\overline{a}\right|}$; $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{\left|\overline{a}\right|}$ и называются направляющими косинусами вектора $\overline{a}$; $\overline{e} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором $\overline{a}$.

13. Расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ равно $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \left|\overline{AB}\right|$.

Лекция 7. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ

1. Уравнением линии на плоскости OXY называется такое уравнение, которому:

1) удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии;

2) не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Линия на плоскости может быть задана одним из следующих уравнений: $y = f(x),\ x = \varphi(y),\ F(x, y) = 0$.

Простейшей линией на плоскости является прямая.

Определение. Ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее направляющим вектором (в частном случае он может принадлежать прямой).

2. Прямая на плоскости может быть задана:

1) принадлежащей ей точкой и направляющим вектором;
2) двумя принадлежащими ей точками;
3) принадлежащей ей точкой и вектором, перпендикулярным к ней (нормальным вектором).

Если $\overline{a} = \{a_1, a_2\}$ – направляющий вектор для прямой l, $M_0(x_0, y_0)$ – точка, принадлежащая этой прямой, а $M(x, y)$ – произвольная точка прямой l, то вектора $\overline{a}$ и $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ – коллинеарны, а их координаты – пропорциональны: $x - x_0 = \lambda a_1,\ y - y_0 = \lambda a_2$. Этот факт записывается в виде:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \tag{7.1}$$

Это уравнение, справедливое для любой точки $M(x, y)$ прямой l, называется каноническим уравнением прямой.

Если $\overline{a} = \{0, a_2\}$, то уравнение прямой: $x = x_0$; если $\overline{a} = \{a_1, 0\}$, то уравнение прямой: $y = y_0$.

Если $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ – точки, принадлежащие прямой l, то $\overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - x_0\}$ – ее направляющий вектор и $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$ – уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

Если вектор $\overline{n} = \{A; B\}$ перпендикулярен прямой l, т.е. является ее нормальным вектором, а $M_0(x_0, y_0)$ и произвольная точка $M(x, y)$ принадлежат прямой l, то вектора $\overline{n}$ и $\overline{M_0M}\{x - x_0; y - y_0\}$ перпендикулярны, а их скалярное произведение равно нулю: $\left(\overline{n}, \overline{M_0M}\right) = 0.$

В координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{7.2}$$

Это уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.

3. Уравнение (7.2), записанное в виде $Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$, называется общим уравнением прямой на плоскости. Вектор $\overline{a} = \{-B; A\}$ является направляющим, а $\overline{n} = \{A; B\}$ – нормальным вектором данной прямой.

4. Пусть заданы две прямые l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Образуем систему:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1; \\ A_2x + B_2y = -C_2. \end{cases} \tag{7.3}$$

Если ее главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (равносильно тому, что $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$), то система имеет единственное решение (x_0, y_0) – точка, принадлежащая и первой и второй прямым, точка пересечения этих прямых.

5. Угол между прямыми l_1 и l_2 равен наименьшему углу между их направляющими векторами $\overline{a}_1 = \{-B_1; A_1\}$ и $\overline{a}_2 = \{-B_2; A_2\}$: $\cos\left(l_1 \widehat{,}\, l_2\right) = \dfrac{(\overline{a}_1, \overline{a}_2)}{|\overline{a}_1| \cdot |\overline{a}_2|} = \dfrac{B_1B_2 + A_1A_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Если $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то прямые l_1 и l_2 перпендикулярны.

Если в системе (7.3) $\Delta = 0$ и $\Delta_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ и $\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} = 0$ (равносильно тому, что $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$), то система имеет бесконечное множество решений, а прямые l_1 и l_2 совпадают.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$ и (или) $\Delta_y \neq 0$ (равносильно тому, что $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$), то система (7.3) не имеет решений, а прямые l_1 и l_2 – параллельны.

6. Уравнения прямой на плоскости, имеющие явный геометрический смысл:

1) Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; $|a|$ и $|b|$ – величины отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях (рис. 7.1);

2) Нормальное уравнение прямой: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, где $\overline{n} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}$ – единичный нормальный вектор прямой; p – расстояние от начала координат до прямой; α – наименьший угол, образованный вектором $\overline{n}$ с положительным направлением оси OX (рис. 7.2);

3) Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент, численно равный тангенсу угла наклона прямой и оси OX (рис. 7.3).

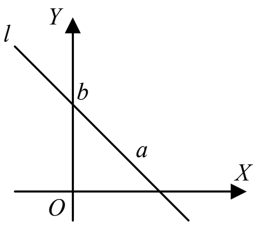


Рис. 7.1

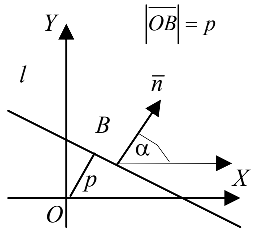


Рис. 7.2

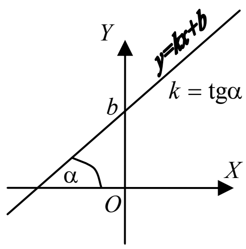


Рис. 7.3

7. Расстояние (d) от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$ определяется по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Лекция 8. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Линия, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, называется линией (или кривой) *n*-го порядка (n = 1, 2, …), если уравнение $F(x, y) = 0$ представляет собой уравнение *n*-й степени относительно координат *x* и *y*.

2. Прямая на плоскости *OXY* является линией первого порядка.

3. Общее уравнение линии второго порядка имеет следующий вид: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Выбор, определенным образом, системы координат позволяет упростить вид данного уравнения: в частности, исключить члены, содержащие произведение $x \cdot y$, x и y: $A'x^2 + C'y^2 + F' = 0$.

4. В аналитической геометрии решаются две взаимно обратные задачи:
1) характеристические свойства линии выразить уравнением;
2) исследовать характеристические свойства линии по ее уравнению.

5. Окружность – множество точек плоскости, равноудаленных от одной заданной точки, называемой центром (характеристическое свойство окружности).

Пусть в системе координат *OXY* центр окружности находится в точке $M_0(x_0, y_0)$, а $M(x, y)$ – произвольная точка, принадлежащая окружности. Тогда расстояние $|\overline{M_0M}| = R = \mathrm{const}$. В координатной форме: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$ или $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Это уравнение окружности.

Если M_0 совпадает с началом координат (перенести начало координат в точку M_0), то $x^2 + y^2 = R^2$ – каноническое уравнение окружности.

Если $M_1(x_1,\ y_1)$ удовлетворяет уравнению окружности: $x_1^2 + y_1^2 = R^2$, то $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{R^2} = |R| = R$, т.е. $M_1(x_1,\ y_1)$ принадлежит окружности (обладает ее характеристическим свойством).

Обратная задача: имея уравнение $x^2 + y^2 = R^2$, можно определить следующие характеристические свойства этой линии:

1) $|x| \leq R,\ |y| \leq R$, т.е. все точки окружности расположены в квадрате с размерами $2R \times 2R$;

2) эта линия симметрична относительно обеих координатных осей;

3) в первой четверти (координатной плоскости) $M_1(0, R)$, $M_2(R, 0)$ – точки пересечения этой линии с осями координат, а $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq R$: при возрастании x от 0 до R переменная y изменяется от R до 0.

4) уравнению $x^2 + y^2 = R^2$ соответствует линия, изображенная на рис. 8.1.

6. Множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами, называется эллипсом.

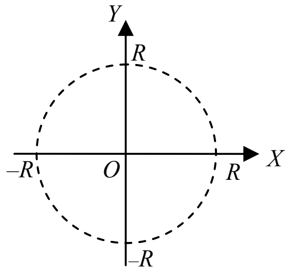


Рис. 8.1

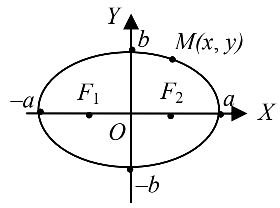


Рис. 8.2

Пусть в системе координат XOY (рис. 8.2) фокусы $F_1(-c,\ 0)$ и $F_2(c,\ 0)$ расположены на оси OX симметрично относительно начала координат: $M(x, y)$ – точка, принадлежащая эллипсу, $2a$ – сумма расстояний точки M до фокусов; $2a > 2c$. Тогда свойство точек эллипса можно записать в виде $\left|\overline{MF_1}\right| + \left|\overline{MF_2}\right| = 2a$, или в координатной форме

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a\,. \qquad (8.1)$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ b^2 = a^2 - c^2\,, \qquad (8.2)$$

называемому каноническим уравнением эллипса.

Если $M_1(x_1, y_1)$ удовлетворяет уравнению (8.2), то она обладает основным свойством точек эллипса (8.1).

Исследование формы эллипса по уравнению (8.2).

1) $|x| \le a$; $|y| \le b$, все точки эллипса расположены в прямоугольнике размерами $2a \times 2b$;

2) эта линия симметрична относительно обеих координатных осей;

3) в первой четверти $M_1(0, b)$ и $M_2(a, 0)$ – точки пересечения эллипса с осями координат (вершины эллипса), a, b – полуоси эллипса, а $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le x \le a$: при возрастании x от 0 до a переменная y изменяется (убывает) от b до 0;

4) уравнению (8.2) соответствует линия, представленная на рис. 8.2.

При $a = b$ эллипс выраждается в окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

7. Показателем, характеризующим форму кривых второго порядка, является эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, характеризующий степень сжатия эллипса к координатным осям, для эллипса $\varepsilon < 1$.

8. Множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшее расстояние между фокусами называется гиперболой. В системе координат XOY с фокусами $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad (8.3)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, $2a$ – абсолютная величина разности расстояний любой точки гиперболы до фокусов.

Гипербола обладает следующими свойствами:

1) $|x| \ge a$ или $x \le -a$, $x \ge a$, $-\infty < y < \infty$: все точки гиперболы расположены или левее прямой $x = -a$ или правее прямой $x = a$; в полосе $-a < x < a$ точек эллипса нет;

2) гипербола симметрична относительно обеих координатных осей; ось OX – действительная, OY – мнимая ось гиперболы;

3) гипербола имеет две точки $M_1(-a, 0)$ и $M_2(a, 0)$ пересечения с осью OX (вершины гиперболы);

4) в первой четверти $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \ge a$. При $x \to \infty$ $y \to \infty$;

5) при $x \gg a$ график гиперболы приближается (но не повторяет) к прямой $y = \frac{b}{a}x$, которая называется асимптотой этой линии;

6) уравнению (8.3) соответствует линия, представленная на рис. 8.3.

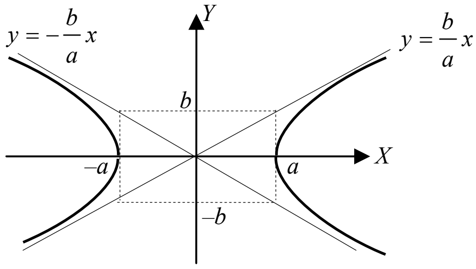


Рис. 8.3

Для гиперболы эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$.

9. Множество точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой директрисой, называется параболой.

В системе координат *XOY* при фокусе $F\left(p/2, 0\right)$, $p > 0$, директрисе $x = -\dfrac{p}{2}$ каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px. \tag{8.4}$$

Парабола обладает следующими свойствами.

1) $x \ge 0,\ -\infty \le y < \infty$, график параболы целиком расположен в правой полуплоскости;

2) ось OX является осью симметрии параболы;

3) точка $O(0,0)$ – точка пересечения параболы и координатных осей (вершина параболы);

4) в первой четверти $y = \sqrt{2px}$; при возрастании x переменная y неограниченно возрастает.

5) уравнению (8.4) соответствует линия, представленная на рис. 8.4.

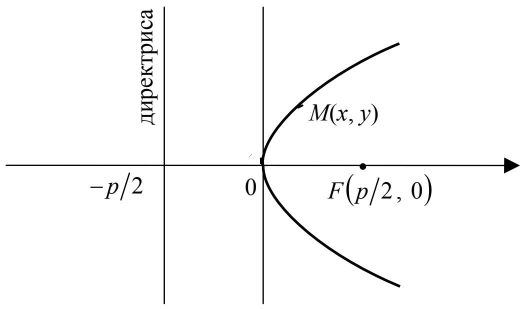


Рис. 8.4

При фокусе $F(0,\ p/2)$, $p > 0$, директрисе $y = -\dfrac{p}{2}$ уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py$; если $p = 1/2$, то $y = x^2$ – известное из школьного курса математики уравнение параболы.

Лекция 9. ПОВЕРХНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПЛОСКОСТЬ. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Уравнением поверхности в пространстве *OXYZ* называется такое уравнение, которому 1) удовлетворяют координаты x, y и z каждой точки этой поверхности и 2) не удовлетворяют координаты любой точки, не принадлежавшей этой поверхности.

2. Примеры уравнений: $F(x, y, z) = 0$; $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.

3. Поверхность, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0$, называется поверхностью n-го ($n = 1, 2, \ldots$) порядка, если уравнение $F(x, y, z) = 0$ представляет собой уравнение n-й степени относительно координат x, y и z.

4. Плоскость в пространстве *OXYZ* является поверхностью первого порядка и задается уравнением:

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \ne 0, \tag{9.1}$$

В основе структуры уравнений плоскости лежит известная аксиоматика:

1) через заданную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную заданному вектору (прямой);

2) через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.

Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежат плоскости *P*, а $\overline{N} = \{A; B; C\}$ – перпендикулярный к плоскости *P* вектор (нормальный вектор), то векторы $\overline{N}$ и $\overline{M_0M}$ также перпендикулярны и их скалярное произведение равно нулю:

$$\left(\overline{N}, \overline{M_0M}\right) = 0 \quad \text{или} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 . \qquad (9.2)$$

Если обозначить $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, то уравнение (9.2) запишется в виде уравнения (9.1), которое называют общим уравнением плоскости в пространстве.

Если три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ принадлежат плоскости *P*, $M(x, y, z)$ – произвольная точка этой плоскости, а $\overline{N} = \{A, B, C\}$ – ее нормальный вектор, то справедливы условия равенства нулю скалярных произведений: $\left(\overline{N}, \overline{M_1M}\right) = 0$; $\left(\overline{N}, \overline{M_1M_2}\right) = 0$ и $\left(\overline{N}, \overline{M_1M}\right) = 0$ или

$$\begin{cases} A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0; \\ A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0; \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0. \end{cases} \qquad (9.3)$$

Система (9.3) имеет ненулевое решение (A, B, C), если определитель

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 . \qquad (9.4)$$

Уравнение (9.4) справедливо для всех точек $M(x, y, z)$, принадлежащих плоскости *P*, т.е определяет саму плоскость.

5. Возможное расположение плоскостей $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяется взаимным расположением их нормальных векторов $\overline{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\overline{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$: $\cos\left(\overline{N}_1 \hat{,} \overline{N}_2\right) = \dfrac{\left(\overline{N}_1, \overline{N}_2\right)}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|}$; $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \left(\overline{N}_1, \overline{N}_2\right) = 0$ или $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2$ или $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ (если и $D_1 = \lambda D_2$, то плоскости совпадают).

Плоскости не параллельны, что равносильно тому, что система $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений (x, y, z), определяющих прямую линию в пространстве. Такой факт имеет место, если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю.

6. Если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежат прямой *l* и $\overline{n} = \{a, b, c\}$ – ее направляющий вектор, то $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ – канонические уравнения прямой в пространстве,

$$\begin{cases} x = a \cdot t + x_0; \\ y = b \cdot t + y_0; \\ z = c \cdot t + z_0, \quad -\infty < t < \infty \ - \end{cases}$$

параметрические уравнения прямой в пространстве.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежат прямой l, то ее уравнения: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

7. Углом между прямой *l* и плоскостью *P* (рис. 9.1) называется наименьший угол (φ), образованный этой прямой и ее проекцией l' на плоскость *P*.

Если $\overline{N} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости *P*: $Ax + By + Cz + D = 0$, а $\overline{n} = \{a, b, c\}$ – направляющий вектор прямой *l*: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$, то $\sin\varphi = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \dfrac{\left(\overline{N}, \overline{n}\right)}{|\overline{n}| \cdot \left|\overline{N}\right|}$.

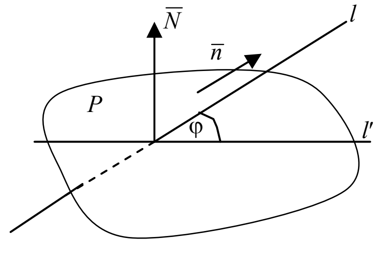


Рис. 9.1

Прямая и плоскость параллельны, если $\varphi = 0$ и $\left(\overline{N}, \overline{n}\right) = 0$, т.е. $A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c = 0$.

Если прямая l перпендикулярна плоскости P, то $\overline{N} \parallel \overline{n}$ и $A = \lambda a, B = \lambda b, C = \lambda c$. Верно и обратное.

8. Общий вид поверхности второго порядка:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0 .$$

Наиболее известная из поверхностей второго порядка – сфера с центром в начале координат и радиуса R: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

9. Пример записи уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки: $M_1(2; 0; 0)$, $M_2(0; 1; 0)$ и $M_3(0; 0; 3)$ (расположенные на координатных осях):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}(x-2) + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} z = 0$ или $3x + 6y + 2z - 6 = 0$.

Лекция 10. МНОЖЕСТВА, ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ОТОБРАЖЕНИЕ. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ СВОЙСТВА

1. *Множество* – одно из основных (неопределяемых) понятий математики. Под словом «множество» подразумевается совокупность тех или иных объектов (элементов множества), объединенных каким-либо признаком или свойством. Числовыми множествами называют множества, состоящие из чисел.

2. Примеры: множество студентов в группе, множество точек плоскости, множество телефонных звонков в квартиру в течение дня, множество людей, имеющих рост более трех метров.

3. Множества, как правило, обозначают прописными буквами $A, B, C, \ldots$, а их элементы – строчными: $a,\ b,\ c,\ x, y,\ \ldots$. Множество, не содержащее элементов, называется нулевым и обозначается Ø.

Если объект a является элементом множества A, то пишут $a \in A$; если не является, то $a \notin A$.

Множество B является подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A; пишут $B \subset A$ (множество B «включено» в множество A).

Пример. A – множество студентов группы, B – множество юношей этой группы, $B \subset A$.

Очевидно, что Ø и любое множество A являются подмножествами множества A: $\varnothing \subset A$, $A \subset A$, Эти подмножества называют «несобственными», остальные – собственными подмножествами множества A.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то, очевидно, множества A и B состоят из одних и тех же элементов и они считаются равными $A = B$.

4. Задать множество – значит указать способ определения (нахождения) его элементов:

1) Перечислить: $A = \{1,\ 3,\ 5\}$.

2) Указать их общее свойство: $A = \{x | P(x)\}$ – множество элементов x, обладающих свойством $P(x)$. Например: $A = \{x | x = 2k,\ k = 1, 2, 3,\ \ldots\}$ – множество четных чисел.

Общее свойство может быть указано и не формально: B – множество солнечных дней в году.

5. Различают конечные и бесконечные множества. В первом случае их элементы можно перечислить (хотя их и очень много, например множество молекул в 1 кг вещества), во втором – нельзя перечислить, например N – множество натуральных чисел.

6. Множество X называется ограниченным сверху (снизу), если существует число k такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \le k\ (x \ge k)$. Число k в этом случае называется верхней (нижней) гранью множества X. Множества, ограниченные сверху и снизу, называются ограниченными.

Любой конечный промежуток ограничен; интервалы $(a, +\infty)$ и $(-\infty, b)$ представляют собой множества, ограниченные соответственно снизу и сверху. Вся числовая прямая не ограничена ни сверху, ни снизу.

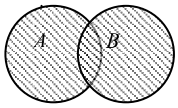
7. *Объединением* двух множеств A и B называется множество C, любой элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A или B; пишут $C = A \bigcup B$.

8. *Пересечением* двух множеств A и B называется такое множество C, элементы которого принадлежат одновременно и множеству A и множеству B; пишут $C = A \bigcap B$.

9. *Разностью* двух множеств A и B называют множество C, элементы которого принадлежат множеству A и при этом не принадлежат множеству B: пишут $C = A \setminus B$. Если $B \subset A$, то множество $D = A \setminus B$ называют дополнением множества B до множества A.

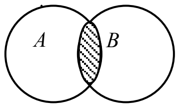
Используя символику, операции над множествами можно обозначить таким образом:

1) объединение: $C = A \bigcup B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ или } x \in B \right\}$.



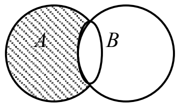
– все заштрихованное – множество C;

2) пересечение: $C = A \bigcap B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ и } x \in B \right\}$.

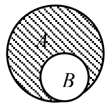


– все заштрихованное – множество C;

3) разность: $C = A \setminus B = \left\{ x \middle| x \in A \text{ и } x \notin B \right\}$.



– все заштрихованное – множество C;



– заштриховано множество D – дополнение B до A.

Символ $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ обозначает объединение бесконечного числа множеств A_k.

Символ $\bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k$ обозначает пересечение n множеств B_k.

10. Если R – множество действительных чисел и $A \subset R, B \subset R$, то *декартовым произведением* множеств A и B называют множество всевозможных пар (a, b) элементов $a \in A$ и $b \in B$; пишут $A \times B$.

Пример. R_1 – множество точек оси абсцисс ПДСК, R_2 – множество точек оси ординат, тогда $R_1 \times R_2 - (x, y)$ – множество точек координатной плоскости.

Д – множество девушек в группе, Ю – множество юношей, тогда P = Д × Ю – множество пар.

11. При записи математических выражений целесообразно употреблять логическую символику. Вместо выражения «любое x из множества X» записывать $\forall x \in X$, где перевернутая латинская буква A взята от начала английского слова any – любой; вместо выражения «существует элемент x из множества X» записывать $\exists x \in X$, где перевернутая латинская буква E взята от начала английского слова existence – существование; логические операции: *импликация* (логическая операция, образующая сложное высказывание из двух высказываний посредством логической связки, соответствующей союзу «если …, то») $P \Rightarrow Q$ – «если P, то Q», или «для того, чтобы P, необходимо, чтобы Q», или «для того, чтобы Q, достаточно, чтобы P»; *эквиваленция* (равносильность) $P \Leftrightarrow Q$ – если P, то Q и обратно», или «для того чтобы P, необходимо и достаточно, чтобы Q.

12. *Отображение* – одно из основных понятий математики. Пусть A и B – непустые множества. Если каждому $x \in A$ по закону f ставится в соответствие один, определенный элемент $y \in B$, то имеет место отображение A в B. Обозначают $f : A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$; $y = f(x)$ – образ элемента x, x – прообраз элемента y. Множество всех $y \in B$ (в которые переходят $x \in A$) называется множеством значений отображения f и обозначается $f(A)$, $f(A) \subseteq B$. Если при этом каждому $y \in B$ соответствует $x \in A$, то говорят, что A *отображается на* B.

Отображение называется обратимым, если из $x_1 \neq x_2 \Rightarrow y_1 \neq y_2$ $\left(x_1, x_2 \in A; y_1, y_2 \in B\right)$. Для каждого образа ($y$) – единственный прообраз (x).

13. Числовые множества.

$N = \{n\} = \{1, 2, 3, ...\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{-n\} \bigcup \{0\} \bigcup \{n\} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ – множество целых чисел;

$Q = \left\{ \dfrac{p}{q} \right\}, p \in Z, q \in Z, \quad q \neq 0$ – множество рациональных чисел.

14. Множество действительных (вещественных) чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел. Всякое рациональное число либо является целым, либо представляет собой конечную или периодическую бесконечную десятичную дробь. Иррациональное число представляет собой бесконечную непериодическую дробь; примеры иррациональных чисел: $\pi = 3{,}141592\ldots$, $e = 2{,}718282\ldots$

15. $A \sim B$ – эквивалентные множества, между их элементами существует взаимно однозначное соответствие. Множество A называется бесконечным, если оно эквивалентно своему некоторому подмножеству; в противном случае оно конечно.

R – множество действительных чисел $\{\, x \,\}$ эквивалентно множеству точек на прямой; такое множество называется непрерывным. Свойством непрерывности не обладает множество, состоящее только из рациональных чисел.

Бесконечное множество, эквивалентное множеству N, называется счетным (Z и Q – счетные, R – несчетное).

16. Абсолютная величина числа и ее свойства.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}.$$

1) $|x| \geq 0$.

2) $|x| = |-x|$.

3) $-|x| \leq x \leq |x|$.

4) Если $a > 0$, то $|x| \leq a$ и $-a \leq x \leq a$ равносильны.

5) Для любых x и y $|x+y| \leq |x| + |y|$.

6) Для любых x и y $|x-y| \geq |x| - |y|$.

Лекция 11. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА, КЛАССИФИКАЦИЯ

1. Пусть имеется некоторое множество действительных чисел X. Если каждому числу x из множества X соответствует (по некоторому правилу) одно действительное число y, то величина y называется функцией величины x, определенной на множестве X (говорят также, что на множестве X задана функция y от x). Множество X называют областью определения функции, переменную x – независимой переменной или аргументом, переменную y – зависимой переменной (или функцией). Множество Y всех значений, которые может принимать переменная y, называют множеством значений функции. Для обозначения функции y от x обычно используют букву f и пишут $y = f(x)$. Наряду с этим принимаются и другие обозначения, например, $y = F(x)$, $y = y(x)$ и т.д.

2. Графиком функции $y = f(x)$ в прямоугольной декартовой системе координат называется множество точек $M(x; f(x))$ плоскости OXY, абсциссы которых равны значениям независимой переменной x, а ординаты – соответствующим значениям функции (рис. 11.1).

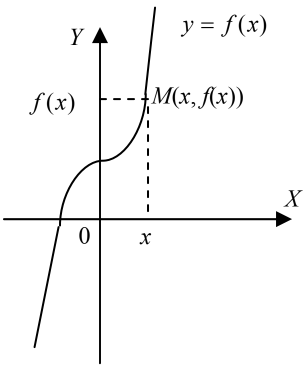


Рис. 11.1

Помимо графического способа задания функции, существуют еще аналитический (с помощью формул), табличный (например, соотношение: день года – продолжительность световой части дня) и словесный или описательный (например, у каждого человека свой отпечаток пальца).

3. Если функция $y = f(x)$ задана аналитически и если нет каких-либо дополнительных условий, то областью определения такой функции является множество всех значений аргумента x, при которых формула $y = f(x)$ имеет смысл. Такую область определения называют также областью существования функции.

Пример: $y = \sqrt{1-x^2}$, $X: -1 \leq x \leq 1$.

4. Функция называется явной, если она задана уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной y. Явная функция y от x задается формулой $y = f(x)$, которая устанавливает, какие вычислительные операции нужно выполнить над числом x, чтобы получить значение числа y.

Пример: уравнение линейной функции $y = kx + b$, где k, b – известные числа (чтобы найти значение y надо значение x умножить на число k и прибавить число b).

5. Функция y от x называется неявной, если она задана уравнением вида $F(x, y) = 0$, которое не разрешено относительно переменной y. При этом каждому значению $x = x_0$ из некоторого множества ставится в соответствие такое значение $y = y_0$, что $F(x_0, y_0) = 0$.

Пример: уравнение полуокружности, радиуса 2: $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, задает неявную зависимость y от x. В то же время можно определить, что $x = 0$ соответствует $y = 2$, $x = \sqrt{2}$ соответствует $y = \sqrt{2}$ и т.д., но нельзя, например, найти значение y для $x = 3$.

6. Если на множестве X определена функция $y = f(x)$, а Y – множество ее значений, то обратной по отношению к функции $y = f(x)$ называется такая функция $x = g(y)$, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) эта функция определена на множестве Y;

2) эта функция ставит в соответствие каждому числу $y \in Y$ такое единственное $x \in X$, что $f(x) = y$.

Пример. Для $y = x^3$ обратная функция $x = \sqrt[3]{y}$; здесь X: $-\infty < x < \infty$ и Y: $-\infty < y < \infty$.

Говоря об обратной функции, часто используют стандартные обозначения, понимая под x независимую переменную, а под y – функцию. В этом случае для записи обратной функции вместо $x = g(y)$ пишут формально $y = g(x)$, заменив x на y, а y на x. Так, функция $x = \sqrt[3]{y}$ обратная для функции $y = x^3$, но можно употреблять и запись $y = \sqrt[3]{x}$.

Графики прямой и обратной функции симметричны относительно биссектрисы (общей) первого и третьего координатных углов (рис. 11.2).

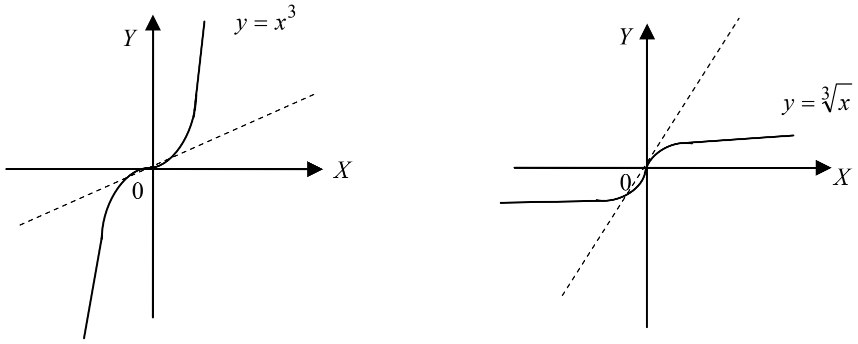


Рис. 11.2

7. Функция называется строго возрастающей (убывающей) на интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому интервалу и удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

8. Если $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, то разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется приращением аргумента в точке x_1 (вообще говоря Δx может быть как положительным, так и отрицательным числом), а разность $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ или $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$ – приращением функции в точке x_1, которое соответствует приращению аргумента Δx. При таком обозначении $y = f(x)$ является строго возрастающей (убывающей), если $\Delta y \cdot \Delta x > 0$ ($\Delta y \cdot \Delta x < 0$).

П р и м е р. 1) $y = kx + b$ – линейная функция.

$\Delta y = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k \cdot \Delta x$; $\Delta y \cdot \Delta x = k \cdot \Delta x^2$: при $k > 0$ эта функция строго возрастающая, при $k < 0$ – строго убывающая.

2) $y = x^2$; $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 = \Delta x(2x + \Delta x)$; $\Delta y \cdot \Delta x = = \Delta x^2(2x + \Delta x)$. Очевидно, что знак выражения $2x + \Delta x$ определяется знаком величины x (Δx можно выбрать таким малым, что оно не повлияет на знак $2x$). Таким образом при $x < 0$ $y = x^2$ строго убывает, при $x > 0$ – строго возрастает.

9. Строго возрастающие и строго убывающие функции относятся к классу строго монотонных функций. Свойство функции $y = f(x)$ являться строго монотонной на интервале (a, b) является необходимым и достаточным условием существования обратной функции $x = g(y)$ на этом интервале.

10. Функция $f(x)$ достигает в точке x_0 строго локального минимума (максимума), если существует $\delta > 0$ такое, что при всех Δx, удовлетворяющих неравенству $0 < |\Delta x| < \delta$, выполняется условие

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0 \ (\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0).$$

Точки локального максимума или минимума называются точками экстремума.

Если в точке $x = x_0$ при любом достаточно малом приращении аргумента $\Delta x \neq 0$ соответствующее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ отрицательно (положительно), то точка $x = x_0$ является точкой строгого локального максимума (минимума).

На рис. 11.3 точка $x = x_1$ – точка локального максимума, $x = x_2$ – точка локального минимума.

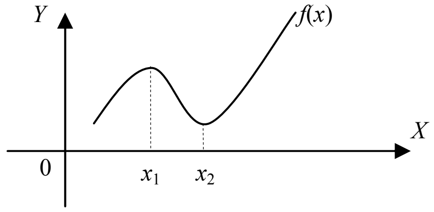


Рис. 11.3

11. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется периодической, если существует такое $T \neq 0$, что для всех $x \in X$ числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат X и выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. В этом случае число T называется периодом функции $f(x)$; наименьшее из всевозможных $T = T_0$ называется основным периодом.

Например, основной период функции $\sin 6x$ равен $\pi/3$.

12. Функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной), если для любого x из области определения выполняется условие $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). Если функция не является ни четной, ни нечетной, то она называется функцией общего вида.

Примеры: $y = x^2$ – четная, $y = x^3$ – нечетная, $y = x - x^2$ – общего вида.

13. Области определения четной и нечетной функций симметричны относительно начала координат. График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – симметричен относительно начала координат.

14. Функция $f(x)$ называется ограниченной на отрезке (интервале), если существуют такие значения m и M, что все значения $f(x)$ удовлетворяют неравенству $m < f(x) < M$. Если $f(x) \ge m$, то число m называется точной нижней границей $f(x)$; если $f(x) \le M$, то M – точная верхняя граница.

15. Пусть дана функция $y = f(x)$, $x \in X$ с множеством значений Y. Если каждому $y \in Y$ по определенному закону ставится в соответствие действительное значение переменной z, то z является функцией от переменной y: $z = F(y)$ и сложной функцией от переменной x: $z = F\big(f(x)\big)$ или суперпозицией (наложением) функций F и f.

16. Простейшими (основными) элементарными функциями называются: постоянная функция $y = \text{const}$, степенная функция $y = x^{\alpha}$ (α – любое число), показательная функция $y = a^x\,(0 < a \ne 1)$, логарифмическая функция $y = \log_a x\,(0 < a \ne 1)$, тригонометрические функции: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

17. Функции, которые можно получить с помощью конечного числа арифметических операций над простейшими элементарными функциями, а также их суперпозиций, образуют класс элементарных функций.

Примеры элементарных функций: $f(x) = x + \sin x$, $f(x) = \operatorname{arctg} 2^x$, $f(x) = \log_3(\operatorname{tg} x^2)$.

18. Элементарная функция вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$, где $n \ge 0$; $a_0, a_1, ..., a_n$ – любые действительные числа (коэффициенты), называется целой рациональной функцией или алгебраическим многочленом степени n.

19. Отношение двух целых рациональных функций $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется дробно-рациональной функцией.

Целые и дробные рациональные функции образуют класс рациональных функций.

20. Функция, полученная путем конечного числа суперпозиций и арифметических действий над степенными функциями с целыми и дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется иррациональной функцией.

Примеры иррациональных функций:

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}\,, \quad f(x) = (x + \sqrt{x+1}) / \sqrt[3]{x}\,.$$

21. Всякая функция, не являющаяся ни рациональной, ни иррациональной, называется трансцендентной функцией.

Примеры: $y = \sin 2x,\ y = \operatorname{ctg} x + x^2,\ y = e^x$.

Лекция 12. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Если каждому числу n из натурального ряда чисел 1, 2, 3, …, n, … поставлено в соответствие вещественное число a_n, то множество вещественных чисел a_1, a_2, …, a_n, … называется числовой последовательностью или просто последовательностью. Числа a_1, a_2, …, a_n, … называются членами (элементами) последовательности, a_n – общим элементом, а n – его номером.

2. Числовая последовательность $\{a_n\}$ определена, если задано соотношение между номером члена последовательности n и его значением a_n, т.е. $a_n = f(n)$.

3. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует число M (m), такое, что любой элемент a_n этой последовательности удовлетворяет неравенству $a_n < M\ (a_n > m)$. При выполнении обоих условий последовательность называется ограниченной: $m < a_n < M$; m и M – точные границы, если $m \le a_n \le M$.

Примеры: $\{n^2\}$ – ограничена снизу: $1 \le n^2$; $\{-n\}$ – ограничена сверху: $-n \le -1$: $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – ограниченная $0 < \dfrac{1}{n} \le 1$.

4. Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа A существует номер N, такой, что при $n > N$ (для всех элементов последовательности с номерами, большими N) выполняется неравенство $|a_n| > A$.

5. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого малого положительного числа ε существует номер N, такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

6. Если $\{a_n\}$ – бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\{1/a_n\}$ – бесконечно малая. Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{\alpha_n\}$ отличны от нуля, то $\{1/a_n\}$ – бесконечно большая последовательность.

7. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, а $\{c_n\}$ – ограниченная последовательность, то $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$, $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$, $\{\alpha_n \cdot c_n\}$, $\{\beta_n \cdot c_n\}$ – бесконечно малые последовательности.

8. Интервал $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ называется ε-окрестностью числа A. Если $a_n \in (A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$, то $|a_n - A| < \varepsilon$.

9. Число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер N, зависящий от ε, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Это записывается так: $a_n \to A$ при $n \to \infty$, либо $\lim a_n = A$ (всегда $n \to \infty$).

Геометрический смысл предела числовой последовательности: начиная с некоторого номера N, все члены последовательности с $n > N$ попадают в ε-окрестность числа A.

10. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; не имеющая предела – расходящейся.

11. Если $\lim a_n = a$, то последовательность $\{\alpha_n\} = \{a_n - a\}$ – бесконечно малая, так как для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, что при $n > N |\alpha_n| = |a_n - a| < \varepsilon$. Поэтому любой элемент сходящейся последовательности $\{a_n\}$, имеющий пределом число a, можно представить в виде $a_n = a + \alpha_n$, α_n – элемент бесконечно малой последовательности.

12. Бесконечно малая последовательность имеет своим пределом число $a = 0$; бесконечно большая последовательность – расходящаяся (условно считают, что $\lim a_n = \infty$ $(\lim a_n = -\infty)$).

13. Сходящиеся последовательности обладают свойствами:

1) Имеют только один предел.

2) Ограничены.

3) Сумма (разность) сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

4) Произведение сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

5) Частное двух сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$, то $\dfrac{a_n}{b_n}$ – расходящаяся последовательность; если же и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то последовательность $\dfrac{a_n}{b_n}$ требует специального исследования (на предмет сходимости).

6) Если элементы сходящихся последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $a_n \le b_n$, то их пределы удовлетворяют неравенству $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

14. *Теорема существования предела*. Монотонная ограниченная последовательность сходится (ограниченность монотонной последовательности является необходимым и достаточным условием сходимости).

15. Последовательность $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ (трансцендентное число, примерно равное 2,7).

Если при $n \to \infty$ $f(n) \to \infty$, то справедливо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$.

16. Примеры нахождения пределов числовых последовательностей.

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+10n-5}{n^3+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{10}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}}{1-\dfrac{3}{n^2}} = 1.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n+2-n}{\sqrt{3n^2+2n}+n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{3+\dfrac{2}{n}}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+4}{n-2}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{4}\cdot\frac{4}{n-2}\cdot 3n} =$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n-2}{4}}\right)^{\frac{n-2}{4}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{12n}{n-2}}=e^{12}.$$

Лекция 13. ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИЙ

1. Число A называется *пределом* функции $f(x)$ на плюс бесконечности, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать число $\Delta>0$, зависящее от $\varepsilon:\Delta=\Delta(\varepsilon)$, такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $x>\Delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае пишут $A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2. Геометрический смысл предела функции на бесконечности: если $A=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, то функция $f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y=A$.

Аналогичным образом вводится понятие предела на минус бесконечности.

3. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, если для сколь угодно малого положительного числа ε существует положительное число δ: $\delta=\delta(\varepsilon)$, такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполнено неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ может выполняться не при всех $0<|x-a|<\delta$, а только при $0<x-a<\delta$ (или $x-a>-\delta$). В этом случае говорят об односторонних пределах функции $f(x)$ в точке $x=a$: правостороннем $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$ и левостороннем $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$.

4. Функция называется бесконечно большой при $x\to a$, если для любого, сколь угодно большого числа E существует положительное число $\delta=\delta(E)$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>E$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$; график этой функции имеет вертикальную асимптоту $x=a$.

5. Функция называется бесконечно малой (б.м.) при $x\to a$, если $f(x)\to 0$ при $x\to a$: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

6. Для того, чтобы число A являлось пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, необходимо и достаточно выполнение равенства $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to a$.

7. Если число $A\neq 0$ является пределом для функции $f(x)$ при $x\to a$, то в некоторой окрестности точки a знак функции $f(x)$ совпадает со знаком числа A: $Af(x)>0$. Если $f(x)\to 0$ при $x\to a$, то $1/f(x)\to\infty$ при $x\to a$. Если $f(x)\to\infty$ при $x\to a$, то $1/f(x)\to 0$ при $x\to a$.

8. Пусть $y=\alpha(x)$ и $y=\beta(x)$ – две бесконечно малые функции при $x\to a$. Тогда при $x\to a$:

1) $\alpha(x)+\beta(x)$ и $\alpha(x)-\beta(x)$ – бесконечно малые функции;

2) $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ – бесконечно малая функция;

3) $c\cdot\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, c – const;

4) $f(x)\cdot\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, если $f(x)$ – ограниченная: $|f(x)|\le c$.

9. Пусть дано: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$; $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=B$. Тогда:

1) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\pm B.$

2) $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A\cdot B.$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}$, если $B\neq 0$.

4) $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}=A^B.$

10. *Теорема существования предела*. Если для трех функций $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = h(x)$ при любых значениях аргумента $x \neq a$ выполнены неравенства $f(x) \le g(x) \le h(x)$ и при этом существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

11. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бесконечно малые функции при $x \to a$. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$, при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. В этом случае пишут $\alpha(x) = 0(\beta(x))$ при $x \to a$.

Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ (A – число). При $A = 1$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми (пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$).

12. Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\alpha(x) - \beta(x) = 0(\alpha(x))$ при $x \to a$.

13. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

14. Следствия: $\sin kx \sim kx$, $\arcsin kx \sim kx$, $\mathrm{tg}\, kx \sim kx$, $\mathrm{arctg}\, kx \sim kx$, $1 - \cos kx \sim (kx)^2/2$ при $x \to 0$.

15. При нахождении пределов, содержащих отношение бесконечно малых функций, эти функции можно заменять на им эквивалентные.

16. Примеры:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-1} = -1$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = e$.

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{-(x+1)(2x-3)}{-(x+1)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{-x-1}} = e^{-2}$.

Лекция 14. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Функция $y = f(x)$, заданная на множестве X, называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если функция имеет в этой точке конечный предел и этот предел равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right) = 0$, другими словами, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

3. Пример. Функция $y = x^2$ непрерывна при всех x $(-\infty < x < \infty)$, так как $\Delta y = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\cdot\Delta x + \Delta y^2$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

4. Пример. $y = |x| = \begin{cases} x, x \ge 0; \\ -x, x < 0. \end{cases}$

При $x > 0$ $\Delta y = \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

При $x < 0$ $\Delta y = -\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

То есть исследуемая функция является непрерывной при всех x.

5. Графиком непрерывной функции является непрерывная линия; ее можно начертить без отрыва карандаша от бумаги.

6. Если функция непрерывна в каждой точке множества, то она непрерывна на этом множестве.

7. Точка $x = x_0$, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва. Точка разрыва $x = x_0$, в которой существуют конечные односторонние пределы, называется точкой разрыва первого рода; все остальные точки разрыва называются точками разрыва второго рода.

Разность односторонних пределов $\Delta = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется скачком функции в точке $x = x_0$. Если скачок функции в точке x_0 равен нулю, то такая точка разрыва (первого рода) называется точкой устранимого разрыва.

К точкам разрыва второго рода относятся точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует.

8. Сумма, разность, произведение двух непрерывных функций, а также частное от деления одной непрерывной функции на другую (не принимающую нулевое значение) являются непрерывными функциями.

9. Сложная функция, составленная из непрерывных функций (суперпозиция непрерывных функций), является непрерывной функцией.

10. Непрерывная в точке $x = x_0$ функция непрерывна и в ее некоторой окрестности: $|x - x_0| < \delta$.

11. Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она:

1) ограничена на этом отрезке: $|f(x)| \le M$;

2) принимает на этом отрезке свое наибольшее $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и наименьшее $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ значения;

3) принимает на этом отрезке любое значение из отрезка $[m, M]$.

12. Наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке $[a, b]$ достигается либо в точке локального экстремума, либо на концах отрезка (в одной из точек a или b).

13. Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

14. Производной функции $y = f(x)$ в некоторой точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю (предполагается, что этот предел существует). Используются обозначения: $f'(x)$, $y'(x)$, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

15. Производная функции, принимающей при всех x постоянное значение, равна нулю.

16. Односторонние производные в точке $x = x_0$.

Правая производная: $f'(x_0+0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Левая производная: $f'(x_0-0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Равенство односторонних производных в точке $x = x_0$ равносильно существованию производной в этой точке, неравенство – отсутствию.

17. Пример. $y = |x|$.

При $x_0 = 0$ $y'(+0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$; $y'(-0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \dfrac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Односторонние производные не равны, $y = |x|$ не имеет производной при $x = 0$.

18. Точка, в которой функция непрерывна и при этом левая производная не равна правой, называется угловой.

19. Примеры нахождения производных.

1) $y = kx$;

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{k(x_0+\Delta x) - kx_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} k = k.$$

2) $y = x^2$;

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

3) $y = \sin x$;

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x_0 = \cos x_0.$$

4) $y = \cos x$; $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-2\sin\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\sin x_0$.

5) $y = \ln x$; $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$

$$= \ln \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x_0}} = \ln e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}.$$

20. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x = x_0$, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента Δx в этой точке, можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция; A – число.

21. Пример. $y = x^3$.

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 =$

$= 3x_0^2 \cdot \Delta x + (3x_0 \Delta x + \Delta x^2) \cdot \Delta x$; здесь $A = 3x_0^2$, $\alpha(\Delta x) = 3x_0 \Delta x + \Delta x^2$.

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (3x_0 \Delta x + \Delta x^2) = 0$, то $y = x^3$ – дифференцируемая при x_0, (как и при других значениях x).

22. Функция называется дифференцируемой на некотором множестве, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

23. Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует конечная производная в этой точке. При этом $A = f'(x_0)$ в формуле $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A = f'(x_0).$$

24. Линейная часть приращения функции в точке x_0 называется дифференциалом функции в этой точке (обозначение: dy).

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Если $y = x$, то $dy = d(x) = \Delta x$: дифференциал независимой переменной равен ее приращению.

Таким образом, $dy = f'(x_0)dx$, а $f(x_0) = dy/dx$.

25. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x_0, то:

1) $(f(x) \pm \varphi(x))' = f'(x) \pm \varphi'(x)$;

2) $(f(x) \cdot \varphi(x))' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)$; $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$;

3) $\left(\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$.

26. Примеры использования этих правил.

1) $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

2) $(\mathrm{tg}x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3) $(\mathrm{ctg}x) = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

4) Если $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, то можно предположить, что $(x^n)' = nx^{n-1}$. Тогда $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n$.

Таким образом доказано (методом математической индукции), что $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Лекция 15. СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ И СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Если $f(x)$ дифференцируется при $x = a$, то

$$\Delta y = f'(a)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \text{ и } \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0,$$

т.е. дифференцируемость гарантирует непрерывность.

Обратное высказывание неверно, т.е. не всякая непрерывная функция дифференцируема, например, $y = |x|$ – непрерывная при всех x функция не имеет производную при $x = 0$.

2. Пусть функция $y = f(x)$ обратная для $x = \varphi(y)$.

Примеры: $y = \arcsin x$, $x = \sin y$; $y = \ln x$, $x = e^y$.

Пусть $\varphi(y)$ – строго монотонная, дифференцируемая функция и $\varphi'(y) \neq 0$. Тогда обратная функция $y = f(x)$ также строго монотонная, дифференцируемая и $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

3. Пусть переменная y является функцией от переменной u: $y = f(u)$, а u, в свою очередь, является функцией от x: $u = u(x)$, тогда $y = f\big(u(x)\big) = F(x)$ – сложная функция от переменной x. Если $f(u)$ и $u(x)$ дифференцируемы в точках x_0 и $u_0 = u(x_0)$, то $y = F(x) = f\big(u(x)\big)$ также дифференцируема в точке x_0 и $y' = f'_u(u_0)\cdot u'(x_0)$.

4. Примеры:

1) $y = a^x$, обратная функция $x = \log_a y$. Известно, что $\left(\log_a y\right)' = \dfrac{1}{y\cdot\ln a}$, тогда $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\frac{1}{y}\cdot\ln a} = y\cdot\ln a = a^x\cdot\ln a$.

Таким образом: $\left(a^x\right)' = a^x\ln a$.

2) $y = \arcsin x$; обратная функция $x = \sin y$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) $y = \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$; $(\arccos x)' = -(\arcsin x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4) $y = \operatorname{arctg} x$; обратная функция $x = \operatorname{tg} y$:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

5) $y = \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$; $(\operatorname{arcctg} x)' = -(\operatorname{arctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Правило дифференцирования сложной функции позволяет находить так называемые логарифмические производные.

Пусть $u = \ln\big(y(x)\big)$; тогда $u'_x = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$, откуда $y'(x) = y(x)\cdot\big(\ln\big(y(x)\big)\big)'$.

Примеры использования логарифмической производной:

1) $y = x^\alpha$, $\alpha\in R$.

$$\left(x^\alpha\right)' = x^\alpha(\alpha\ln x)' = x^\alpha\cdot\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2) $y = x^x$, тогда $\ln y = x\cdot\ln x$, $(\ln y)' = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$.

$$y' = \left(x^x\right)' = x^x(\ln x + 1).$$

3) $y = \sqrt[x]{\sin x}$; $\ln y = \dfrac{1}{x}\cdot\ln\sin x$.

$$y' = \sqrt[x]{\sin x}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\sin x\right)' = \sqrt[x]{\sin x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln\sin x + \frac{\cos x}{x\sin x}\right).$$

6. Справедливо утверждение, что производная элементарной функции также является элементарной функцией; ее можно найти, используя изученные правила и таблицу производных простейших элементарных функций:

1) $(C)' = 0$, C – постоянное число;
2) $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$;
3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
4) $(a^x)' = a^x \ln a$;
5) $(\sin x)' = \cos x$;
6) $(\cos x)' = -\sin x$;
7) $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8) $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11) $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
12) $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Лекция 16. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА И ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

1. Определение 1. Прямая линия, проходящая через две точки кривой $y = f(x)$, называется секущей (секущая AB, рис. 16.1).

2. Определение 2. Если при неограниченно близком приближении точки B к неподвижной точке A (рис. 16.1) существует прямая AD, представляющая собой предельное положение секущей AB, то эта прямая называется касательной к рассматриваемой кривой в точке A.

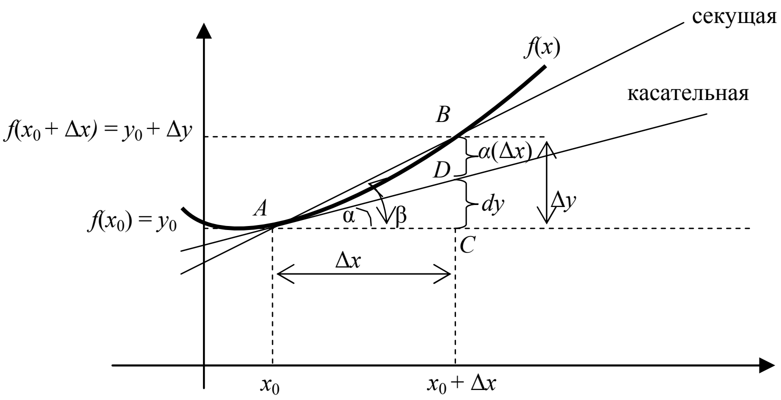


Рис. 16.1

По определению производной $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. На рис. 16.1:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \left|\overline{BC}\right|, \; \Delta x = \left|\overline{AC}\right|.$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\beta$; при $\Delta x \to 0$ $\angle\beta \to \angle\alpha$ и $\mathrm{tg}\beta \to \mathrm{tg}\alpha$ (непрерывность $\mathrm{tg} x$).

Таким образом: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$.

3. Уравнение касательной в точке $A(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

4. *Геометрический смысл производной*: производная функции в точке x_0 численно равна тангенсу угла наклона (угловому коэффициенту) касательной, проведенной к графику этой функции в точке $A(x_0, f(x_0))$.

Если функция дифференцируемая, то

$$\Delta f = \Delta y = dy + \alpha(\Delta x) = y'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x), \quad dy = y'(x_0) \cdot \Delta x.$$

На рис. 16.1 $dy = \left|\overline{DC}\right|$, $\alpha(\Delta x) = \left|\overline{BD}\right|$.

5. *Геометрический смысл дифференциала*. Дифференциал функции в точке x_0 численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в точке $A(x_0, f(x_0))$.

6. Линеаризацией дифференцируемой функции $y=f(x)$ вблизи точки x_0 называется ее замена линейной функцией $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

При линеаризации функции $y=f(x)$ происходит замена ее графика касательной, а приращение функции $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ заменяется ее дифференциалом $dy=f'(x_0)(x-x_0)$. Таким образом, из условия $\Delta y\approx dy$ имеем $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cong f'(x_0)\cdot\Delta x$ или $f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$.

7. Если найти $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ достаточно просто, то также просто можно найти значение $f(x_0+\Delta x)$.

Пример: $f(x)=\sqrt{x};\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, тогда $\sqrt{x_0+\Delta x}\cong\sqrt{x_0}+\dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}$. При $x_0=16,\quad \Delta x=0{,}8$:

$$\sqrt{16{,}8}\cong\sqrt{16}+\frac{0{,}8}{2\sqrt{16}}=4+0{,}1=4{,}1.$$

При $x_0=1$: $\sqrt{1+\Delta x}\cong 1+\dfrac{\Delta x}{2}$ $\sqrt{1{,}21}\cong 1+\dfrac{0{,}21}{2}=1{,}105$.

8. *Производные и дифференциалы высших порядков*. Если производная $f'(x)=\varphi(x)$ – дифференцируемая функция, то $\exists\varphi'(x)$, т.е. существует $\left(f'(x)\right)'$. Такая производная называется производной второго порядка функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$; аналогично $\left(f''(x)\right)'=f'''(x)$ – производная третьего порядка. В общем случае $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'=f^{(n)}(x)$.

Примеры:

1) $f(x)=x^n$; $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$; $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$;

$$(x^n)'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3};\ \ldots;\ \left(x^n\right)^{(n)}=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!.$$

2) $f(x)=\sin x;\quad (\sin x)'=\cos x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$;

$$(\sin x)''=-\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(\pi+x)=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right);$$

$$(\sin x)'''=-\cos x=\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+x\right);\ (\sin x)^{(\mathrm{IV})}=\sin x=\sin\left(4\frac{\pi}{2}+x\right)\ \text{и т.д.};$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}+x\right).$$

3) $f(x)=e^x;\quad \left(e^x\right)'=e^x;\quad \left(e^x\right)''=e^x;\ \ldots;\ \left(e^x\right)^{(n)}=e^x.$

9. Дифференциал:

$$dy=f'(x)\cdot dx;\ d(dy)=d^2y=d\left(f'(x)\cdot dx\right)=\left(f'(x)\cdot dx\right)'\cdot dx=f''(x)dx^2,$$

так как $(dx)'=0$, $d\left(d^{n-1}y\right)=d^ny=f^{(n)}(x)dx^n$ – дифференциал *n*-го порядка.

10. Многочлен Тейлора, формула Тейлора.

Если $P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$, тогда

$$P_n(x_0)=a_0;$$

$$P_n'(x)=a_1+2\cdot a_2(x-x_0)+3\cdot a_3(x-x_0)^2+\ldots+n\cdot a_n(x-x_0)^{n-1};\ P_n'(x_0)=a_1;$$

$$P_n''(x)=2\cdot 1\cdot a_2+3\cdot 2\cdot a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2};\ P_n''(x_0)=2\cdot 1\cdot a_2.$$

Аналогично:

$$P_n'''(x_0)=3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3=3!a_3,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n.$$

Следовательно, при любом $k=1,2,\ldots,n$: $a_k=\dfrac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$ и многочлен $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ можно представить в виде

$$P_n(x)=P_n(x_0)+P_n'(x_0)(x-x_0)+\frac{P_n''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Многочленом Тейлора для функции $y=f(x)$, имеющей производные до n-го порядка, называется выражение

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Значение функции $y = f(x)$ в точке x можно представить в виде суммы многочлена Тейлора $T_n(x)$ и остаточного члена $R_n(x)$, такого, что $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, т.е. бесконечно малой величины более высокого порядка, чем $(x - x_0)^n$: $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$.

Если существует $f^{(n+1)}(x)$, то $R_n(x) = \dfrac{f(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, где точка $x = c$ расположена между x_0 и x.

11. Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора называется формулой Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Примеры:

1) $f(x) = e^x$. Имеем $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$ при любом n. При $x = 0$ производные любого порядка равны 1, тогда

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Можно показать, что

2) $\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + R_n(x)$.

3) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{2k+1}\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$.

4) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{2k}\dfrac{x^{2k}}{2k!} + R_{2k}(x)$.

5) $(1 + x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + R_n(x)$,

где α – вещественное число.

Если $\alpha = n$ – целое число, то $(n+1)$-я производная равна нулю и последняя формула переходит в формулу бинома Ньютона.

Лекция 17. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Знание производной $f'(x)$ функции $f(x)$ часто позволяет делать заключение и о поведении самой функции $f(x)$.

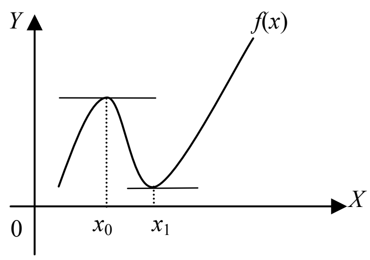


Рис. 17.1

1. *Теорема Ферма*. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ достигает в точке x_0 локального экстремума (максимума или минимума), то $f'(x_0) = 0$.

Пусть Δx принимает как положительное, так и отрицательное значения. В точке x_0 локальный максимум, если $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$; в точке x_1 локальный минимум, если $f(x_1) < f(x_1 + \Delta x)$. Касательные в $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$ параллельны оси OX (рис. 17.1).

Докажем теорему для точки x_0.

Имеем $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$.

Тогда $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k_1 \ge 0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = k_2 \le 0$.

Так как $f'(x_0)$ существует, то $k_1 = k_2 = 0$, т.е. $f'(x_0) = 0$.

2. *Необходимое условие экстремума*. Пусть x_0 – точка экстремума функции. Тогда в этой точке производная равна нулю (теорема Ферма) или *не существует* (например, $y = |x|$ при $x = 0$).

Правило. Экстремумы функции могут быть только в точках, где производная равна нулю или не существует (в условиях непрерывности). Для функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ $\;y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ – в этих точках может быть экстремум.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими. Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными.

В примере $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ являются стационарными.

3. *Обобщенная теорема Коши*. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b), тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $\left[f(b) - f(a)\right]\varphi'(c) = \left[\varphi(b) - \varphi(a)\right]f'(c)$.

Без доказательства.

4. *Теорема Коши* (частный случай). Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $\varphi'(x) \neq 0$ $x \in (a, b)$, тогда справедливо:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad c \in (a,b).$$

Запишем обобщенную формулу Коши для $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\left[f(b) - f(a)\right]\varphi'(c) = \left[\varphi(b) - \varphi(a)\right]f(c).$$

Если $\varphi'(x) \neq 0 \left(x \in (a,b)\right)$, то $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ (см. теорему Ролля). Поделим обе части обобщенной формулы Коши на $\left[\varphi(b) - \varphi(a)\right]\varphi'(c)$ и получим ее частный случай.

5. *Теорема Лагранжа*. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), тогда на (a, b) существует хотя бы одна точка $x = c$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Доказательство. Предположим, что в теореме Коши $\varphi(x) = x$ (которая непрерывна и дифференцируема при всех x), тогда $\varphi(a) = a$; $\varphi(b) = b$; $\varphi'(x) = 1$ и в результате получим формулу Лагранжа. Ее *геометрический смысл*: на дуге AB (рис. 17.2) всегда найдется по крайней мере одна точка C, в которой касательная параллельна секущей AB.

6. *Теорема Ролля*. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и $f(a) = f(b)$, тогда найдется по крайней мере одна точка $c \in (a,b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл: на графике $f(x)$ найдется по крайней мере одна точка, в которой касательная параллельна оси OX (рис. 17.3).

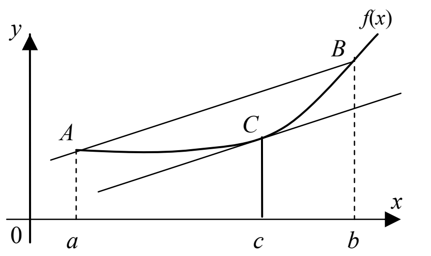


Рис. 17.2

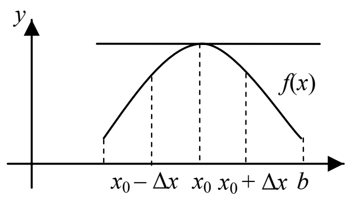


Рис. 17.3

Доказательство. Если в формуле Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, $f(b) = f(a), a \neq b$, то $f'(c) = 0$.

7. Пусть $x = x_0$ и $x = x_0 + \Delta x$ – произвольные точки, принадлежащие отрезку $[a,b]$, $y = f(x)$ – удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c) \cdot \Delta x, \ x_0 < c < x_0 + \Delta x.$$

$$\Delta y \cdot \Delta x = f'(c) \cdot \Delta x^2:$$

при $f'(c) > 0$, $\Delta y \cdot \Delta x > 0$ и $f(x)$ строго возрастает;

при $f'(c) < 0$ – $f(x)$ строго убывает;

при $f'(c) = 0$ – $f(x)$ постоянна.

8. *Достаточное условие монотонности функции на отрезке*. Если $f'(x)$ сохраняет знак на интервале (a,b), то она монотонна на отрезке $[a,b]$; при этом положительный знак производной соответствует возрастанию функции, отрицательный – убыванию, функция – суть постоянная, если ее производная всюду равна нулю.

Доказательство. По теореме Лагранжа на отрезке $[a,b]$ $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. При $b > a$: $f(b) > f(a)$, если $f'(c) > 0$; $f(b) < f(a)$, если $f'(c) < 0$ и $f(b) = f(a)$, если $f'(c) = 0$

Пример. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$; $y' = 3(x - 1)(x - 3)$. Если $-\infty < x < 1$, то $y' > 0$, функция возрастает. Если $1 < x < 3$, то $y' < 0$, функция убывает. Если $3 < x < \infty$, то $y' > 0$, функция возрастает.

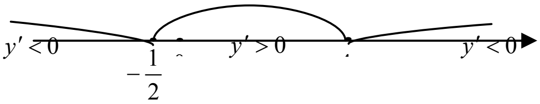
9. *Первое достаточное условие экстремума*. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную $f'(x)$ при $x \neq x_0$, причем при переходе через эту точку производная меняет знак на противопо-

ложный. Тогда точка x_0 является точкой максимума (минимума), если при увеличении аргумента знак производной меняется в этой точке с положительного на отрицательный (с отрицательного на положительный).

Пример. $y = -4x^3 + 21x^2 + 24x + 3$.

$y' = -12x^2 + 42x + 24 = -12\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-4)$.

$x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_2 = 4$ – стационарные точки функции.



$x_1 = -\frac{1}{2}$ – точка минимума; $x_2 = 4$ – точка максимума.

10. *Второе достаточное условие экстремума*. Пусть $y = f(x)$, заданная на интервале (a,b), дважды дифференцируема. Если в точке $x_0 \in (a,b)$ выполнены условия $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то $f(x)$ достигает в точке x_0 локального минимума; если же $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$, то в этой точке функция достигает локального максимума.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для $f(x)$ в окрестности точки x_0 при $n = 1$.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2.$$

Если $f'(x_0) = 0$, то при $x = x_0 + \Delta x$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2!}\Delta x^2, \quad x_0 < c < x_0 + \Delta x.$$

Независимо от знака Δx:

если $f''(c) > 0$, то $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, т.е. x_0 – точка локального минимума;

если $f''(c) < 0$, то $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, т.е. x_0 – точка локального максимума.

Здесь использовано условие сохранения знака производной в окрестности точки $x = c$: $f''(x_0) \cdot f''(c) > 0$!

Пример. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$;

$x_1 = 1, x_2 = 3$;

$y'' = 6x - 12$;

$y''(1) = -6$; $y''(3) = 6$.

Точки $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ являются точками экстремума; $x_1 = 1$ – точка максимума, $x_2 = 3$ – точка минимума.

Лекция 18. НАИМЕНЬШЕЕ И НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ. ВЫПУКЛОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

1. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда она принимает на этом отрезке свое наименьшее и наибольшее значения.

Наибольшее и наименьшее значения функция может принимать или в точках экстремума, или на концах отрезка. Алгоритм их нахождения таков:

1) Определяются критические точки функции.
2) Подсчитываются значения функции во всех критических точках и на концах отрезка.
3) Путем сравнения найденных значений выбираются наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ на отрезке [0, 5].

1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$; $x_1 = 1, \quad x_2 = 3$ – критические точки.

2) $y(0) = 5$; $y(1) = 1 - 6 + 9 + 5 = 9$; $y(3) = 27 - 54 + 27 + 5 = 5$; $y(5) = 125 - 150 + 45 + 5 = 25$.

3) Наибольшее значение $y(5) = 25$; наименьшее $y(0) = y(3) = 5$.

2. Графики возрастающей (убывающей) функции могут наглядно отличаться друг от друга.

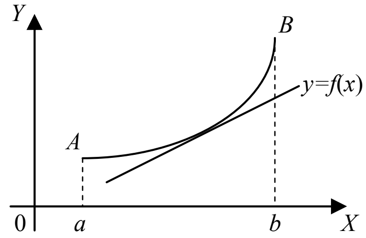


Рис. 18.1

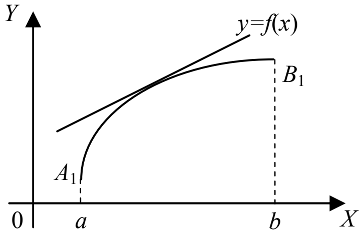


Рис. 18.2

Различают выпуклые вверх и выпуклые вниз (вогнутые) графики функции.

3. Определение 1. Дуга AB графика функции $f(x)$ называется выпуклой вниз (вверх), если все ее точки расположены над (под) касательной, проведенной в любой ее точке (рис. 18.1 и 18.2).

4. *Достаточное условие выпуклости.* Пусть в каждой точке некоторого интервала (a, b) вторая производная функции $y = f(x)$ положительна, тогда график функции на этом интервале направлен выпуклостью вниз. Если же в каждой точке этого интервала вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна, то график функции на этом интервале направлен выпуклостью вверх.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $\left(x_0, f(x_0)\right)$ касательную: $Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ (x, Y) – точки касательной. Запишем формулу Тейлора для $f(x)$ в окрестности точки x_0 при $n = 1$. $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f'(c)}{2!}(x - x_0)^2$ и сравним ординаты графика функции и касательной

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

$$f(x) - Y = f''(c)\frac{(x - x_0)^2}{2},$$

здесь знак разности $f(x) - Y$ определяется знаком $f''(c)$.

Если $f''(c) > 0$, то $f(x) > Y$, график расположен выше касательной выпуклостью вниз.

Если $f''(c) < 0$, то $f(x) < Y$, график расположен ниже касательной выпуклостью вверх.

5. Точка $M_0(x, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика непрерывной функции $y = f(x)$, если при переходе через эту точку меняется направление выпуклости графика.

6. *Необходимое условие перегиба*. В точке перегиба графика функции ее вторая производная равна нулю или не существует.

7. *Достаточное условие перегиба*. Пусть $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, $f''(x_0) = 0$ и при переходе через эту точку вторая производная меняет знак, тогда точка $M_0(x, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Пример. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$; $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0$ в точке $x_0 = 2$, т.е. в точке (2, 7) может быть перегиб графика функции.

При $-\infty < x < 2$ $y'' < 0$ и график $y(x)$ выпуклый вверх, при $2 < x < \infty$ $y'' > 0$, и график выпуклый вниз. Таким образом, (2,7) – точка перегиба.

Лекция 19. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ

1. При отыскании предела функции часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Например: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\ln x} \sim \dfrac{0}{0}$, $\lim\limits_{x \to 0} x^x \sim 0^0$.

Нахождение предела в таких случаях называют раскрытием неопределенностей. Правило (теорема) Лопиталя является в анализе действенным аппаратом для раскрытия неопределенностей.

2. *Теорема* (*Лопиталя*). Если две функции $f(x)$, $\varphi(x)$:

1) стремятся к нулю при $x \to x_0$;

2) дифференцируемы в окрестности точки x_0;

3) существуют конечные производные $f'(x_0)$ и $\varphi'(x_0)$, причем $\varphi'(x_0) \neq 0$;

4) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=k$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=k$$

(предел отношения функций равен пределу отношения производных).

Доказательство. Из условия 2) следует, что $\varphi(x_0)=f(x_0)=0$, тогда $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}$ и, по теореме Коши, $=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где $x_0<c<x$.

Если $x\to x_0$, то $c\to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{c\to x_0}\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=k$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{\frac{1}{x}}=3$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$.

Формула Лопиталя справедлива и при $x\to\infty$, как и при $f(x)\to\infty$ и $\varphi(x)\to\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

Раскрытие других видов неопределенностей рассмотрим на примерах:

$$\lim_{x\to+0}x\cdot\ln x=(0\cdot\infty)^{*}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0;$$

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\left(\infty^0\right)=A;\ \ln A=\ln\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+0}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to+0}(-x\cdot\ln x)=(0\cdot\infty)=0\Rightarrow A=e^0=1.$$

3. *Асимптоты графика функции.*

Линеаризация функции (замена ее линейной) целесообразна не только в микромасштабах (как в дифференциале), но и в макромасштабах, когда ее график при удалении от начала координат неограниченно приближается к какой-либо прямой (но не повторяет ее). Такие прямые называются асимптотами. Различают вертикальные и невертикальные (наклонные) асимптоты.

Определение 1. Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

В частных случаях асимптота может быть «односторонней», т.е. или при $x\to a+0$ или при $x\to a-0$.

Пример. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$. Следовательно, $x=0$ – вертикальная асимптота для $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Вертикальные асимптоты проходят через точки, где функция имеет разрывы второго рода.

Определение 2. Прямая $y=b$ называется горизонтальной асимптотой $f(x)$ для правой (левой) ветви ее графика, если $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b\right)$.

Пример. $y=\dfrac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$; $y=0$ – горизонтальная асимптота.

Пример. $y=1-e^{-x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-e^{-x}\right]=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-e^{-x}\right)=-\infty$; $y=1$ – горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$; при $x\to-\infty$ асимптоты нет.

Определение 3. Прямая $y=kx+b$ называется наклонной асимптотой $f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Для того, чтобы $f(x)$ имела при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ наклонную асимптоту $y=kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}=k\quad\text{и}\quad\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}[f(x)-kx]=b.$$

---

* Вид неопределенности.

Пример. $y = \dfrac{x^2+1}{2x}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Справедливо и при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+1}{2x} - \frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{x}\right] = 0.$$

$y = \dfrac{1}{2}x$ – наклонная асимптота.

4. *Построение графиков функции*. Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить в следующем порядке:

1) Найти область определения функции.
2) Выяснить симметрию графика (четность/нечетность) и периодичность.
3) Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности.
4) Найти асимптоты функции (если таковые имеются) и исследовать поведение функции в граничных точках.
5) Найти нули функции (точки пересечения графика функции с осями координат) и области постоянства знака.
6) Найти стационарные и критические точки и экстремумы и выяснить промежутки возрастания и убывания функции.
7) Определить интервалы выпуклости графика функции и точки перегиба.
8) Используя полученные результаты и выбрав несколько опорных точек, построить график функции.

Пример. $y = x^3 - 3x$.

1) $-\infty < x < +\infty$.

2) $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -\left(x^3 - 3x\right) = -y(x)$; $y(x) = x^3 - 3x$ – нечетная функция; $y(x)$ не является периодической.

3) $y(x)$ непрерывна при всех x.

4) Вертикальных асимптот нет (т.к. 1) и 3)).

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(x^2-3) = \infty$ – наклонных асимптот нет.

5) $y(0) = 0$; если $y = 0$ или $x^3 - 3x = x\left(x^2-3\right) = 0$, то $x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{3}$;
$x_3 = \sqrt{3}$.

В области $[0, \infty]$ нули функции: (0; 0), $(\sqrt{3};0)$. При $0 < x < \sqrt{3}$ $\quad y(x) < 0$; при $\sqrt{3} < x < \infty$ $\quad y(x) > 0$.

6) $y'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$; $y'(x) = 0$ при $x_1 = -1,$ и $x_2 = 1$ (это стационарные точки, они же – критические.).

При $0 < x < 1$ $\ y'(x) < 0$, $y(x)$ убывает; при $1 < x < \infty$ $\ y'(x) > 0$, $y(x)$ возрастает; $x = 1$ – точка минимума, $y(1) = -2$.

7) $y''(x) = 6x$; $y'' = 0$ при $x = 0$.

Если $x < 0$, то $y'' < 0$ и функция выпуклая вверх.

Если $x > 0$, то $y'' > 0$ и функция выпуклая вниз.

$x = 0$ – точка перегиба графика функции $y = x^3 - 3x$.

8) Опорные точки: (0; 0), (2; 2), $(\sqrt{3};\ 0)$.

9) График (рис. 19.1).

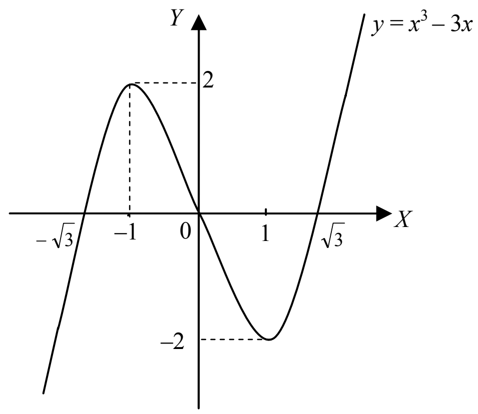


Рис. 19.1

П р и м е р. $y = \dfrac{x^2+1}{2x}$.

1) $-\infty < x < 0 \bigcup 0 < x < +\infty$.

2) $y(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{2(-x)} = -\dfrac{x^2+1}{2x} = -y(x)$, $\dfrac{x^2+1}{2x}$ – нечетная функция, график симметричен относительно начала координат. Так как при $x > 0$ $y > 0$, то график расположен в первой и третьей четвертях.

$\dfrac{x^2+1}{2x}$ – непериодическая функция.

3) $x = 0$ – точка разрыва, в области своего определения функция непрерывна.

4) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x^2+1}{2x} = +\infty$; $x = 0$ – вертикальная асимптота.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{2x} - \dfrac{1}{2}x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$.

$y = \dfrac{1}{2}x$ – наклонная асимптота.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{2} = \infty$ – функция неограниченно возрастает.

5) Функция не имеет нулей.

6) $y' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$y' = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Это стационарные точки.

y' существует в области определения функции.

Если $0 < x < 1$, то $y' < 0$ и y убывает.

Если $1 < x < \infty$, то $y' > 0$ и y возрастает.

$x = 1$ – точка локального минимума; $y(1) = 1$.

7) $y'' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(1 - x^{-2}\right)' = \dfrac{1}{2} \cdot 2x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$.

$y'' \neq 0$; y'' существует в области определения функции.

$y'' > 0$ при $0 < x < \infty$; график выпуклый вниз; точек перегиба нет.

8) Опорные точки (0,5; 1,25), (1; 1), (2; 1,25), (4; 2,125).

9) График функции (рис. 19.2). В первой четверти координатной плоскости график построен по результатам исследования, в третьей – симметричным отображением относительно начала координат.

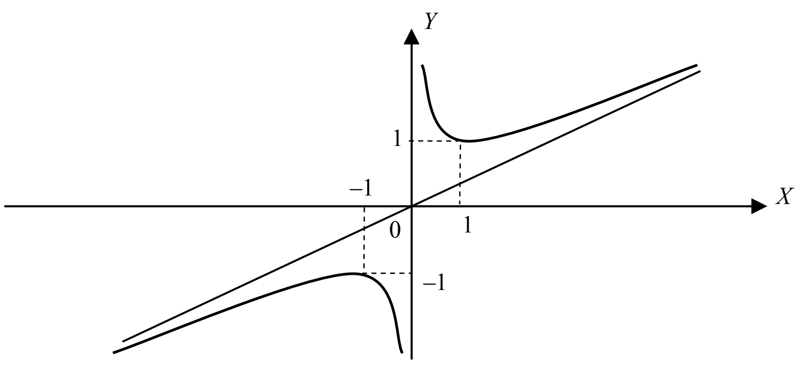


Рис. 19.2

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

I. Матрицы и определители.

1. Вычислить:

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$; 1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 1.3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Найти $A \cdot B$.

3. Даны матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти $(A+B)^2$.

4. Найти обратные для следующих матриц:

4.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 4.2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Методами Гаусса и Крамера решить системы уравнений:

5.1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2; \end{cases}$ 5.2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 11; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16; \end{cases}$.

6. Решить системы уравнений:

6.1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$ 6.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

II. Векторы, линейные операции над векторами.

1. В треугольнике ABC, где $A(1;-3;5), B(-2;4;1), C(1;3;3)$, найти векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{CB}$.

2. Известно, что $|\overline{a}| = 5$. Найти координату t вектора $\overline{a} = \{-2;\, t;\, 3\}$.

3. Даны векторы: $\overline{a}_1 = \{-2;\, 1;\, 3\}$, $\overline{a}_2 = \{3;\, -6;\, 2\}$, $\overline{a}_3 = \{-5;\, -3;\, -1\}$, $\overline{b} = \{31;\, -6;\, 22\}$. Найти разложение вектора $\overline{b}$ по векторам $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$. Найти угол между векторами $\overline{a}_1$ и $3\overline{a}_2 - \overline{a}_3$.

4. Определить угол между векторами $\overline{a} = \{2;\, -1;\, 3\}$ и $\overline{b} = \{-6;\, 3;\, -9\}$.

5. В треугольнике ABC заданы вершины $A(1;0;-1), B(2;2;1)$ и точка $E(-1;2;1)$ пересечения медиан. Найти координаты точки C.

III. Скалярное произведение векторов.

1. Даны векторы $\overline{a} = \{4;\, -2;\, -4\}$ и $\overline{b} = \{6;\, -3;\, 2\}$. Найти $\overline{a} \cdot \overline{b}$; $(\overline{a} - 2\overline{b}) \cdot \overline{a}$.

2. Определить, при каком значении α векторы $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = \{1;\, 2;\, -\alpha\}$ взаимно перпендикулярны?

3. Найти угол между векторами $\overline{a} = \{-3;\, 5;\, 1\}$ и $\overline{b} = \{2;\, -3;\, 5\}$.

4. Вычислить $(\overline{a} - \overline{b})^2$, если $|\overline{a}| = 2\sqrt{2}, |\overline{b}| = 4,$ угол между этими векторами $\varphi = 135^\circ$.

5. Даны векторы $\overline{a} = \{2;\, -1;\, 3\}$, $\overline{b} = \{6;\, -3;\, 2\}$. Вычислить: $\overline{a} \cdot \overline{b}$; $(2\overline{a} - \overline{b})(\overline{a} + 2\overline{b})$.

IV. Линии на плоскости.

1. Определить, какие из точек $A(2;3), B(6;3), C(-3;-3), D(3;-1), F(-2;1)$ лежат на прямой $2x - 3y - 3 = 0$ и какие не лежат.

2. Найти координаты точек пересечения прямой $x + 2y + 6 = 0$ с осями координат и построить эту прямую.

3. Прямая задана уравнением $3x + 2y + 12 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$: 1) параллельно данной прямой; 2) перпендикулярно данной прямой.

4. Даны вершины треугольника $A(3;\,2),\ B(5;\,-2),\ C(1;\,0)$:

4.1. Написать уравнения сторон $AB,\ BC$ и AC;

4.2. Написать уравнения медиан $AM_1,\ BM_2,\ CM_3$;

4.3. Написать уравнения высот $AH_1,\ AH_2,\ AH_3$.

5. Найти угол между прямыми:

5.1. $3x-2y+7=0$ и $2x+3y-3=0$;

5.2. $x-2y-4=0$ и $2x-4y+3=0$;

5.3. $3x+2y-1=0$ и $5x-2y+3=0$.

V. Поверхности и линии в пространстве.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;\,2;\,1)$ перпендикулярно вектору $\overline{N}\{-1;\,3;\,2\}$.

2. Найти координаты точек пересечения плоскости $2x-3y-6z=24$ с осями координат.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ -1;\ 3)$ и $M_2(3;\ 1;\ 2)$: 1) параллельно вектору $\overline{a}=\{3;\,-1;\,4\}$; 2) перпендикулярно плоскости $x-y+1=0$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(3;\,-1;\,2),\ M_2(4;\,-1;\,-1)$ и $M_3\left(2,\,0,\,2\right)$.

5. При каких значениях параметров k и p уравнения $2x+ky+3z-5=0$ и $px-6y-6z+2=0$ определяют параллельные плоскости?

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,-3;\,5)$ перпендикулярно плоскости $3x+2y-5z=2$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;\,2;\,-3)$ и $N(-2;\,4;-5)$.

8. Найти точку пересечения прямой $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ и плоскости $3x+2y+z=0$.

9. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(1;\,-1;\,-3)$ параллельно вектору $\overline{a}=\{2;\,-3;\,4\}$.

10. Дана прямая $\begin{cases}2x-y+2z-3=0;\\ x+2y-z-1=0.\end{cases}$

Написать ее канонические и параметрические уравнения.

11. При каком значении p прямая $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{p}=\dfrac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$?

VI. Основные понятия теории пределов.

1. Являются ли данные последовательности:

1.1. $a_n=\dfrac{1}{n+1}$; 1.2. $a_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ монотонными? Являются ли они ограниченными?

2. Найти пределы следующих последовательностей:

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n}{n-1}$;

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n^2}{2n^2+5}$;

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2n+3n^2}{n^2+5}$;

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^n-2}{10^{n+1}+5}$.

3. Найти следующие пределы:

3.1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x}{x+1}$;

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+4x-x^2}{1+7x-2x^2}$;

3.3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{4x-x^2}$;

3.4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{2-x}$;

3.5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$;

3.6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{3-\sqrt{4+x}}$;

3.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 7x}{1-\cos 4x}$;

3.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-x^2}{tgx}$;

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-4}\right)^{3x}$;

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2x+1}$;

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$;

3.12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{1/x}$.

VII. Производная.

1. Найти приращение Δy функции $y = f(x)$ в произвольной точке x, если приращение аргумента $\Delta x = h$:

1.1. $y = 3 - 2x$; 1.2. $y = x^2 - x + 5$; 1.3. $y = x^3$; 1.4. $y = x^{-1}$.

2. Найти производные следующих функций:

2.1. $y = x^5 - \sqrt[3]{x^2}$; 2.2. $y = \left(1 - 3x^2\right)^4 - \sqrt{x}$;

2.3. $y = \sqrt[5]{\cos^2(3 - 4x)}$; 2.4. $y = \ln x / x$;

2.5. $y = \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x - a}{x + a}$; 2.6. $y = \mathrm{tg}(5 - 9x) \cdot \arccos x$;

2.7. $y = \sqrt{1 - 4x}\, \mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$; 2.8. $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{\mathrm{tg} 3x}}$;

2.9. $y = \sqrt{\log_3 x + \sqrt[3]{x}}$; 2.10. $y = \ln \cos \dfrac{x - 2}{x}$;

2.11. $y = x^{\sin x}$; 2.12. $y = x \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^3 + 1}}$.

3. Найти производные второго порядка y'' для следующих функций:

3.1. $y = e^{-x^2}$; 3.2. $y = \ln(2x - 3)$; 3.3. $y = \mathrm{tg} x$; 3.4. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$.

4. Доказать, что вторая производная функции $u(x)$ и $v(x)$ может быть найдена по формуле Лейбница $(u \cdot v)'' = u'' v + 2u' v' + u v''$. Пользуясь этой формулой, найти вторые производные функций:

4.1. $y = e^{3x} \cos 2x$; 4.2. $y = \ln x \sin^2 x$; 4.3. $y = x^2 e^{-x}$.

VIII. Дифференциал.

1. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = 5x + 1/x + 3$, если при $x_0 = 2$ приращение $\Delta x = h$. При каком h выполняется равенство $\Delta y = dy + 0{,}25$?

2. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^3 \sin x$ в точке $x_0 = \pi$, если приращение $\Delta x = h$.

3. Вычислить приближенное значение:

3.1. $\sqrt{16{,}32}$; 3.2. $\sqrt[3]{63}$; 3.3. $\sqrt[5]{31}$.

4. Составить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 и вычислить приближенное значение функции в заданной точке x_1:

4.1. $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 0;\ x_1 = 0{,}2$;

4.2. $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{(3x - 2)}},\quad x_0 = 2;\ x_1 = \dfrac{53}{27}$;

4.3. $f(x) = \ln x,\quad x_0 = e;\ x_1 = 3$.

5. Найти дифференциал второго порядка следующих функций:

5.1. $y = 4x^5 - 2x^3 - 7$; 5.2. $y = e^x \sin x$;

5.3. $y = e^{\frac{1}{x}}$; 5.4. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$.

6. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

6.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; 6.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\mathrm{tg} x - \sin x}$;

6.3. $\lim\limits_{x \to +0} \sqrt{x} \ln x$; 6.4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\arcsin 3x}$.

IX. Исследование функции на монотонность, экстремум и выпуклость; построение графиков.

1. Исследовать функции на монотонность:

1.1. $y = x(x - 2)$; 1.2. $y = x\sqrt{1 - x^2}$; 1.3. $y = x^{2/3}$.

2. Исследовать функции на экстремум:

2.1. $y = 2x - x^2$; 2.2. $y = xe^{-x}$; 2.3. $y = \sqrt{4x - x^2}$;

2.4. $y = -x^4 - 5x^2 + 9$; 2.5. $y = (x + 1)^2 (x - 2)$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке:

3.1. $y = x^2 - 6x + 5, \quad [-2;\ 2]$;

3.2. $y = \dfrac{x-1}{x+1}, \quad [0;\ 4]$;

3.3. $y = x^2 e^x, \quad [0;\ 4]$;

3.4. $y = \sqrt{100 - x^2}, \quad [-6;\ 8]$.

4. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости графиков следующих функций:

4.1. $y = 3x^5 - 5x^3 + 4$;

4.2. $y = 2 + \left|x^5 - 1\right|$;

4.3. $y = 3 - (x-2)^{7/3}$;

4.4. $y = x + (x-1)^{7/5}$.

5. Исследовать функции и построить их графики:

5.1. $y = x(x-2)$;

5.2. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$;

5.3. $y = \sqrt{4x - x^2}$;

5.4. $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$;

5.5. $y = x \ln x$;

5.6. $y = xe^{-x}$;

5.7. $y = \dfrac{1}{|x| - 1}$;

5.8. $y = 9 - 5x^2 - x^4$;

5.9. $y = \sin^2 x$;

5.10. $y = x\,\mathrm{arctg}\,x$.

Билет № 1

1. Матрицы. Основные определения. Линейные операции над матрицами.
2. Выпуклость и вогнутость графика функции. Достаточные условия. Точки перегиба.
3. Вычислить $\cos\angle ABC$ треугольника, вершины которого лежат в точках: $A(1,\ 0,\ -1)$, $B(0,\ 4,\ 0)$, $C(-1,\ 2,\ 1)$.

Билет № 2

1. Матрицы. Умножение матриц. Свойства операции над матрицами.
2. Экстремумы функции. Достаточные условия.
3. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y = 2x - 5$ и $y = -3x + 4$.

Билет № 3

1. Определители. Вычисление определителей второго и третьего порядков. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Условия монотонности функции на отрезке. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума.
3. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку (–4; 2) перпендикулярно прямой $6x - 3y - 3 = 0$.

Билет № 4.

1. Свойства определителей. Вычисление определителей высших порядков.
2. Односторонние пределы функции в точке. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.
3. Найдите экстремумы функции $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Билет № 5

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный способ записи. Обратная матрица. Решение системы линейных уравнений матричным способом.
2. Непрерывность функции одной переменной. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
3. Найдите точки перегиба графика функции $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.

Билет № 6

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.
2. Теорема Коши (частная). Правило Лопиталя.
3. Найдите приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^3 - x + 2$ в точке $x = 1$, если приращение аргумента $\Delta x = 0{,}2$. На сколько процентов приращение этой функции отличается от ее дифференциала?

Билет № 7

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.
2. Производные и дифференциалы высших порядков. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.
3. Вычислите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(4;\ 10;\ 9)$, $B(-1;\ 6;\ 7)$, $C(-4;\ 0;\ 4)$.

Билет № 8

1. Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами (в геометрической форме). Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и независимость векторов.
2. Обобщенная теорема Коши. Теорема Лагранжа.
3. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Билет № 9

1. Базис (на прямой, на плоскости, в пространстве). Разложение вектора по базису. Координаты векторов. Линейные операции над векторами в координатной форме.
2. Предел функции одной переменной в точке. Признаки существования предела. Основные теоремы о пределах.
3. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2}$ при $x = 1{,}03$.

Билет № 10

1. Скалярное произведение векторов. Определение, свойства. Скалярное произведение векторов в координатах. Модуль вектора.

2. Сходящиеся последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Достаточные условия сходимости последовательности.

3. Найти производную функции $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{arctg}x$.

Билет № 11

1. Скалярное произведение векторов. Определение. Свойства. Скалярное произведение векторов в координатах. Модуль вектора.

2. Дифференциал функции, геометрический смысл. Связь непрерывности и дифференцируемости функции.

3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}$.

Билет № 12

1. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы (на примере $A_{3\times3}$).

2. Производная функции в точке. Геометрический смысл. Условие дифференцируемости функции.

3. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $y = \dfrac{x + 2}{x^3}$ на отрезке [–4; –1].

Билет № 13

1. Прямая в пространстве. Общее уравнение прямой, уравнения прямой через две заданные точки, через точку, параллельную заданному вектору. Угол между прямой и плоскостью.

2. Теорема Ферма.

3. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Билет № 14

1. Линии второго порядка. Общее уравнение. Эллипс.

2. Непрерывность функции в точке. Теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность элементарных функций.

3. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на отрезке [0; 3].

Билет № 15

1. Множества, основные понятия. Операции над множествами. Декартово произведение множеств.

2. Формула Тейлора для многочлена и для функции. Формула Маклорена.

3. Определите, при каких α и β вектора $\overline{a} = 2\overline{i} - \overline{j} + \beta\overline{k}$ и $\overline{b} = \alpha\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$ коллинеарны. При каких соотношениях между α и β векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны?

Билет № 16

1. Множество точек на плоскости. Определение линии. Прямая на плоскости. Уравнения прямой: через две заданные точки, через точку параллельно вектору, общее, с угловым коэффициентом.

2. Бесконечно малые функции и их свойства. Сравнение бесконечно малых функций. Первый замечательный предел.

3. Вычислить скалярное произведение векторов $\overline{AB} \cdot \left(\overline{CD} - \overline{BC}\right)$, если $A(1;\,1;\,2)$, $B(-1;\,1;\,3)$, $C(2;\,-2;\,4)$, $D(-1;\,0;\,-2)$.

Билет № 17

1. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой. Взаимное расположение прямых, угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

2. Правила дифференцирования функции. Доказательство правила дифференцирования произведения функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y + 2z = -3; \\ -x - 2y + z = 0; \\ 2x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$ методом Гаусса.

Билет № 18

1. Функция одной переменной. Способы задания. Элементарные свойства функции. Классификация функций.

2. Экстремумы функции. Достаточные условия.

3. Методом обратной матрицы решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=1; \\ x+z=2; \\ 2x-2y-z=3. \end{cases}$$

Билет № 19

1. Поверхность в пространстве. Плоскость в пространстве. Уравнения плоскости: через три заданные точки; через точку, перпендикулярно заданному вектору. Общее уравнение плоскости.
2. Предел функции одной переменной: в заданной точке, на бесконечности. Бесконечный предел функции.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x-y+z=1; \\ 2x-y+z=2; \\ x-3y+2z=0 \end{cases}$ методом Крамера.

Билет № 20

1. Общее уравнение плоскости в пространстве. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости (алгоритм нахождения).
2. Функция одной переменной. Приращение функции. Дифференциал функции. Смысл дифференцирования функции. Геометрический смысл дифференциала.
3. Найдите косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(-1;\,-2;\,+1), B(-4;\,-2;\,5), C(-8;\,-2;\,2)$.

Билет № 21

1. Числовые последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их взаимосвязь. Свойства бесконечно малых последовательностей. Примеры.
2. Скалярное произведение векторов. Геометрический смысл. Вычисление в координатной форме. Свойства.
3. Найти асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^2+1}{x^2}$.

Билет № 22

1. Функции одной переменной. Способы задания. Элементарные свойства функции. Обратная функция. Сложная функция. Неявная функция.
2. Условия монотонности функции на отрезке. Экстремумы функции. Необходимое условие экстремума.
3. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x-y+z=2; \\ 3x+2y+2z=-2; \\ x-2y+z=1 \end{cases}$ методом Гаусса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красс, М.С. Математика в экономике. Основы математики : учебник / М.С. Красс. – М. : ИД ФБК-ПРЕСС, 2005. – 472 с.
2. Красс, М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрунов. – М. ; СПб. : Питер, 2005. – 464 с.
3. Пучков, Н.П. Введение в аналитическую геометрию и линейную алгебру : учебное пособие / Н.П. Пучков, В.В. Васильев. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. – 116 с.
4. Пучков, Н.П. Сборник задач и упражнений по курсу «Математика в экономике» : учебное пособие / Н.П. Пучков, А.Л. Денисова, А.В. Щербакова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1998. – 85 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК