МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ I

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА

Задания для контрольной работы
для студентов заочного отделения специальностей 010502, 010502.65
«Прикладная информатика (в областях)»

Часть I

Тамбов
Издательство ТГТУ
2008

УДК 51
ББК В12я73
М792

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент ТГТУ
А.Д. Нахман

Составитель

Е.Е. Мордовина

М792 Математика : задания для контрольной работы : в 3 ч. Ч. I. / сост. Е.Е. Мордовина. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 24 с. – 100 экз.

Содержат 10 вариантов типовых заданий для контрольной работы (контрольных работ) за 1 семестр обучения с указанием теоретического материала, необходимого для их выполнения, список рекомендуемой литературы, а также образцы оформления решения всех заданий.

Предназначены для студентов заочного отделения специальностей 010502, 010502.65 «Прикладная информатика (в областях)». Может быть использована также для самостоятельной подготовки студентов дневного отделения.

УДК 51
ББК В12я73

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет» (ТГТУ), 2008

Учебное издание

МАТЕМАТИКА

Задания для контрольной работы

Часть I

Составитель

МОРДОВИНА Елена Евгеньевна

Редактор Т.М. Глинкина
Компьютерное макетирование Т.Ю. Зотовой

Подписано в печать 27.10.2008
Формат $60 \times 84/16$. 1,39 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ 470

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Студент-заочник специальности «Прикладная информатика (в областях)» в I семестре обучения должен выполнить контрольную работу (контрольные работы) по разделам «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия».

В контрольной работе 10 вариантов. Номер своего варианта каждый студент определяет по последней цифре номера своей зачётной книжки (номера учебного шифра студента). При этом цифра 0 соответствует варианту № 10. Например, если номер зачётной книжки студента 5312, то в каждой контрольной работе он выполняет 2-й вариант, т.е. решает задания 1.2, 2.2, 3.2 и т.д.

Для успешного выполнения контрольной работы студенту необходимо предварительно изучить соответствующий теоретический материал, указанный в конце текста заданий контрольной работы. Найти теоретический материал можно в рекомендуемой литературе.

Контрольная работа должна быть аккуратно оформлена, содержать достаточно подробные решения всех заданий с необходимыми к ним пояснениями и рисунками (для задач геометрического содержания). Условие задания должно быть написано перед его выполнением. При оформлении контрольной работы следует сохранять нумерацию заданий, данную в варианте. Замена заданий другими не допускается.

Образцы оформления решения всех заданий контрольной работы представлены на с. 9.

Примечание. *Число заданий, предназначенных для обязательного решения, может варьироваться по усмотрению преподавателя в зависимости от времени, отводимого на изучение курса математики по учебно-тематическому плану, или исходя из принципов уровневой дифференциации при обучении студентов. Например, задания, помеченные звёздочкой, наряду с остальными должны уметь решать студенты, претендующие на экзаменационные оценки «хорошо» и «отлично», но не являются обязательными для претендентов на оценку «удовлетворительно».*

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. Даны матрицы *A* и *B*. Найдите: а) $AB+2B$; б) $B^T A$; в) BB^T.

1.1. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ 1 & 9\\ 4 & 5\end{pmatrix}$. 1.2. $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 5\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

1.3. $A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$. 1.4. $A=\begin{pmatrix}1 & 9 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 0 & 1\\ 6 & -4\end{pmatrix}$.

1.5. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 1\\ 1 & 6\end{pmatrix}$. 1.6. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 3 & 3 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

1.7. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 5\\ 3 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. 1.8. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -7 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

1.9. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 2 & -7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 5 & 3\\ 1 & -6\end{pmatrix}$. 1.10. $A=\begin{pmatrix}8 & -1 & -1\\ 5 & -5 & -1\\ 10 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

2. Вычислите определитель матрицы *A*, указанной в задании 1:
а) по правилу «треугольников»;
б) по правилу разложения по элементам какой-либо строки (укажите выбранную строку);
в) разложением по элементам любого столбца с предварительным получением в нём двух нулевых элементов (укажите выбранный столбец).

3. Дана система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными.
Найдите её решение тремя способами:
а) матричным методом,
б) по формулам Крамера,
в) методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases}3x_1-2x_2-5x_3=5,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=12,\\ x_1-2x_2+3x_3=-1.\end{cases}$ 3.2. $\begin{cases}4x_1+x_2+4x_3=19,\\ 2x_1-x_2+2x_3=11,\\ x_1+x_2+2x_3=8.\end{cases}$

3.3. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=0,\\ 4x_1+x_2+4x_3=6,\\ x_1+x_2+2x_3=4.\end{cases}$ 3.4. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3=8,\\ x_1+x_2+2x_3=11,\\ 4x_1+x_2+4x_3=22.\end{cases}$

3.5. $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=-9,\\ x_1+5x_2+x_3=20,\\ 3x_1+4x_2+2x_3=15.\end{cases}$ 3.6. $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=0,\\ 3x_1+4x_2+2x_3=1,\\ x_1+5x_2+x_3=-3.\end{cases}$

3.7. $\begin{cases}-3x_1+5x_2+6x_3=-8,\\ 3x_1+x_2+x_3=-4,\\ x_1-4x_2-2x_3=-9.\end{cases}$ 3.8. $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3=-4,\\ -3x_1+5x_2+6x_3=36,\\ x_1-4x_2-2x_3=-19.\end{cases}$

3.9. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=-11,\\ 5x_1+x_2+2x_3=8,\\ x_1+2x_2+4x_3=16.\end{cases}$ 3.10. $\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=9,\\ 5x_1+x_2+2x_3=11,\\ x_1+2x_2+4x_3=19.\end{cases}$

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

4. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найдите:

а) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$;

б) скалярное и векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{d}$;

в) угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

г) площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{b}$ и $\overline{d}$.

д) проекцию вектора $\overline{c}$ на вектор $\overline{d}$;

е)* параметр λ_1, при котором вектор $\overline{a}+\lambda_1\overline{b}$ ортогонален вектору $\overline{c}$;

ж)* параметр λ_2, при котором вектор $\overline{a}+\lambda_2\overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{c}$.

4.1. $A(4;3;-2)$, $B(-3;-1;4)$, $C(2;2;1)$,
$\overline{a}=-5\overline{AC}+2\overline{CB}$, $\overline{b}=\overline{AB}$, $\overline{d}=\overline{CB}$, $\overline{c}=\overline{AC}$.

4.2. $A(2;\ 4;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ -4)$, $C(-1;\ 2;\ 2)$,
$\overline{a}=2\overline{BA}+4\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{BA}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $\overline{c}=\overline{b}$.

4.3. $A(2;\ 4;\ 5)$, $B(1;\ -2;\ 3)$, $C(-1;\ -2;\ 4)$,
$\overline{a}=3\overline{AB}-4\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{BC}$, $\overline{d}=\overline{AB}$, $\overline{c}=\overline{b}$.

4.4. $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-1;\ 3;\ 5)$, $C(1;\ 4;\ 2)$,
$\overline{a}=3\overline{AC}-7\overline{BC}$, $\overline{b}=\overline{AB}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $\overline{c}=\overline{b}$.

4.5. $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(-2;\ 4;\ -1)$, $C(1;\ 3;\ -2)$,
$\overline{a}=2\overline{AB}+5\overline{CB}$, $\overline{b}=\overline{AC}$, $\overline{d}=\overline{AB}$, $\overline{c}=\overline{b}$.

4.6. $A(3;\ 2;\ 4)$, $B(-2;\ 1;\ 3)$, $C(2;\ -2;\ -1)$,
$\overline{a}=4\overline{BC}-3\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{BA}$, $\overline{d}=\overline{BC}$, $\overline{c}=\overline{AC}$.

4.7. $A(-5;\ 4;\ 3)$, $B(4;\ 5;\ 2)$, $C(2;\ 7;\ -4)$,
$\overline{a}=3\overline{BC}+2\overline{AB}$, $\overline{b}=\overline{CA}$, $\overline{d}=\overline{AB}$, $\overline{c}=\overline{CA}$.

4.8. $A(3;\ 5;\ 4)$, $B(4;\ 2;\ -3)$, $C(-2;\ 4;\ 7)$,
$\overline{a}=3\overline{BA}-4\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{AB}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $\overline{c}=\overline{BA}$.

4.9. $A(4;\ 6;\ 7)$, $B(2;\ -4;\ 1)$, $C(-3;\ -4;\ 2)$,
$\overline{a}=5\overline{AB}-2\overline{AC}$, $\overline{b}=\overline{BC}$, $\overline{d}=\overline{AB}$, $\overline{c}=\overline{b}$.

4.10. $A(-2;\ -3;\ -2)$, $B(1;\ 4;\ 2)$, $C(1;\ -3;\ 3)$,
$\overline{a}=2\overline{AC}-4\overline{BC}$, $\overline{b}=\overline{AB}$, $\overline{d}=\overline{AC}$, $\overline{c}=\overline{b}$.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5. Даны вершины треугольника ABC: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$. Найдите:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнение высоты CH;

в) уравнение медианы AM;

г) уравнения прямых, проходящих через вершину C соответственно параллельно и перпендикулярно стороне AB;

д) расстояние от точки C до прямой AB.

5.1. $A(-3;\ 8)$, $B(-6;\ 2)$, $C(0;\ -5)$.

5.2. $A(6;-9)$, $B(10;\ -1)$, $C(-4;\ 1)$.

5.3. $A(4;\ 1)$, $B(-3;\ -1)$, $C(7;\ -3)$.

5.4. $A(-4;\ 2)$, $B(6;\ -4)$, $C(4;\ 10)$.

5.5. $A(3;\ -1)$, $B(11;\ 3)$, $C(-6;\ 2)$.

5.6. $A(-7;\ -2)$, $B(-7;\ 4)$, $C(5;\ -5)$.

5.7. $A(-1;\ -4)$, $B(9;\ 6)$, $C(-5;\ 4)$.

5.8. $A(10;\ -2)$, $B(4;\ -5)$, $C(-3;\ 15)$.

5.9. $A(-3;\ -1)$, $B(-4;\ -5)$, $C(8;\ 1)$.

5.10. $A(-2;\ -6)$, $B(-3;\ 5)$, $C(4;\ 0)$.

6.* По координатам точек A, B, C, указанных в задании 4, напишите:

а) уравнение плоскости, проходящей через три точки;

б) канонические и параметрические уравнения прямой AB;

в) уравнения прямых l_1 и l_2, проходящих через начало координат, первая из которых параллельна прямой AB, а вторая – перпендикулярна плоскости ABC;

г) уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой AB.

7. Приведите к канонической форме уравнения указанных линий и изобразите их на координатной плоскости:

7.1. *а)* $3x^2+3y^2-4x-6y-15=0$;
б) $y-x^2-4x-5=0$.

7.2. *а)* $y^2+16x+6y-23=0$;
б) $4x^2-y^2-8x-6y-4=0$.

7.3. *а)* $y^2-x+6y-1=0$;
б) $9x^2+4y^2+54x-8y+49=0$.

7.4. *а)* $x^2+y-4x+9=0$;
б) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

7.5. *а)* $9x^2-25y^2+54x-100y-316=0$;
б) $y^2-8x+12y+36=0$.

7.6. *а)* $x^2+4x-12y+28=0$;
б) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.

7.7. *а)* $x^2+2x-6y+34=0$;
б) $x^2+y^2+6x-2y-9=0$.

7.8. *а)* $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;
б) $y^2+x-4y+4=0$.

7.9. *а)* $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$;
б) $y^2+2x-6y+1=0$.

7.10. *а)* $x^2+4x+y+5=0$;
б) $4x^2+9y^2-8x+54y+49=0$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. Матрицы: основные определения и понятия (размер, порядок матриц, элементы матрицы, главная и побочная диагонали, равные матрицы). Обозначения и виды матриц. Алгебраические операции над матрицами и их свойства (*к заданию 1*).
2. Понятие определителя квадратной матрицы. Простейшие правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков. Основные свойства определителей матриц (*к заданию 2*).
3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Вычисление определителя любого порядка по правилу разложения его по элементам строки или столбца (*к заданию 2*).
4. Обратная матрица: определение и нахождение (*к заданию 3*, *а*).
5. Системы линейных алгебраических уравнений (неоднородные и однородные, определённые и неопределённые). Решение определённых систем по формулам Крамера (*к заданию 3*).
6. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений (*к заданию 3*, *а*).
7. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений. Элементарные преобразования матрицы (*к заданию 3*, *в*).
8. Векторы: определение, обозначение, задание. Модуль вектора. Определения коллинеарных, ортогональных, равных векторов. (*К заданию 4*.) Признак коллинеарности двух векторов (*к заданию 4*, *ж*).
9. Проекция вектора на произвольную направленную ось (*к заданию 4*, *д*).
10. Линейные операции над векторами и их основные свойства (*к заданию 4*, *а*).
11. Скалярное произведение векторов: определение, свойства, вычисление (*к заданию 4*, *б*, *в*). Необходимое и достаточное условие ортогональности двух ненулевых векторов (*к заданию 4*, *е*).
12. Векторное произведение векторов: определение, свойства, вычисление. Геометрический смысл модуля векторного произведения векторов (*к заданию 4*, *б*, *г*).
13. Уравнения прямых на плоскости: проходящих через данную точку с заданным угловым коэффициентом, через две данные точки, через данную точку с заданным нормальным вектором. Общее уравнение прямой на плоскости (*к заданию 5*).
14. Угол между двумя прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности прямых (*к заданию 5*).
15. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором. Общее уравнение плоскости. Решение задачи о составлении уравнения плоскости, проходящей через три данные точки (*к заданию 6*, *а*, *г*).
16. Разновидности уравнений прямой в пространстве (*к заданию 6*, *б*, *в*).
17. Окружность, эллипс, гипербола, парабола: определения и канонические уравнения. Канонические уравнения, соответствующие основным случаям расположения параболы (*к заданию 7*).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев. – М. : Наука, 1987.

2. Ефимов, Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М. : Наука, 1975.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 1997. – Ч. I.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$.

Найдите: а) $AB+2B$; б) $B^T A$; в) BB^T.

Выполнение задания:

а) По правилу умножения матрицы на число

$$2B=2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 6\\ -2 & 10\end{pmatrix},$$

по правилу умножения матриц

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 2+1\cdot 1+5\cdot(-1) & 3\cdot(-1)+1\cdot 3+5\cdot 5\\ 1\cdot 2+(-1)\cdot 1+0\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 3+0\cdot 3\\ 2\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot(-1) & 2\cdot(-1)+3\cdot 3+4\cdot 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+1-5 & -3+3+25\\ 2-1+0 & -1-3+0\\ 4+3-4 & -2+9+20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 25\\ 1 & -4\\ 3 & 27\end{pmatrix},$$

по правилу сложения матриц

$$AB+2B=\begin{pmatrix}2 & 25\\ 1 & -4\\ 3 & 27\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 6\\ -2 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+4 & 25-2\\ 1+2 & -4+6\\ 3-2 & 27+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 23\\ 3 & 2\\ 1 & 37\end{pmatrix}.$$

б) Транспонированная по отношению к матрице B матрица

$$B^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix},$$

$$B^T A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 5\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 3+1\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 3 & 2\cdot 5+1\cdot 0+(-1)\cdot 4\\ -1\cdot 3+3\cdot 1+5\cdot 2 & -1\cdot 1+3\cdot(-1)+5\cdot 3 & -1\cdot 5+3\cdot 0+5\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6+1-2 & 2-1-3 & 10+0-4\\ -3+3+10 & -1-3+15 & -5+0+20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -2 & 6\\ 10 & 11 & 15\end{pmatrix}.$$

в) $BB^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 5 \\ 1\cdot 2 + 3\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 3\cdot 3 & 1\cdot(-1) + 3\cdot 5 \\ -1\cdot 2 + 5\cdot(-1) & -1\cdot 1 + 5\cdot 3 & (-1)\cdot(-1) + 5\cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1 & 2-3 & -2-5 \\ 2-3 & 1+9 & -1+15 \\ -2-5 & -1+15 & 1+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & 10 & 14 \\ -7 & 14 & 26 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель матрицы A, указанной в задании 1:

а) по правилу «треугольников»;

б) по правилу разложения по элементам какой-либо строки (укажите выбранную строку);

в) разложением по элементам любого столбца с предварительным получением в нём двух нулевых элементов (укажите выбранный столбец).

Выполнение задания:

а) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 3\cdot 5 - \left(5\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 4 + 0\cdot 3\cdot 3\right) =$

$= -12 + 0 + 15 + 10 - 4 - 0 = 9$.

б) Разложение определителя по элементам второй строки имеет вид

$$|A| = 1\cdot A_{21} - 1\cdot A_{22} + 0\cdot A_{23}, \qquad (1)$$

где $A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(1\cdot 4 - 5\cdot 3) = 11,\ \ A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 4 - 5\cdot 2 = 2.$

Вычислять A_{23} нет необходимости. Подставив найденные значения A_{21}, A_{22} в равенство (1), получим

$$|A| = 1\cdot 11 - 1\cdot 2 + 0 = 9;$$

в) Два нулевых элемента удобнее получить во втором столбце.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \\ -7 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{12} + 0\cdot A_{22} + 0\cdot A_{32}, \qquad (2)$$

где $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -7 & -11 \end{vmatrix} = -(-44+35) = 9$.

Вычислять A_{22}, A_{32} нет необходимости. Подставив найденное значение A_{12} в равенство (2), получим $|A| = 1\cdot 9 = 9$.

Примечание. *В равенстве* (2) *курсивом и стрелками условно показаны преобразования определителя, основанные на использовании его свойств: сначала элементы второй строки сложили с соответствующими элементами первой строки, затем элементы третьей строки сложили с соответствующими элементами первой строки, предварительно умноженными на* (–3).

3. Дана система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 16, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$

Найдите её решение тремя способами: а) матричным методом; б) по формулам Крамера; в) методом Гаусса.

Выполнение задания:

а) Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix}$, тогда заданную систему можно записать в матричной форме $AX = B$, откуда

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (^*)$$

Матрицу A^{-1}, обратную матрице A, найдём по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \widetilde{A}$,

где $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 1 -$

$- (1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2) = -53,$

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, причём

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(9 + 2) = -11,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(12 - 2) = -10,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 4) = -8,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 = 9,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 3) = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14.$$

Таким образом, $A^{-1} = \frac{-1}{53} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -10 & 9 \\ -11 & 7 & -1 \\ 5 & -8 & -14 \end{pmatrix}$. По формуле (*)

$$X = \frac{-1}{53} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -10 & 9 \\ -11 & 7 & -1 \\ 5 & -8 & -14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{-1}{53} \cdot \begin{pmatrix} -7 \cdot 1 + (-10) \cdot 16 + 9 \cdot (-5) \\ -11 \cdot 1 + 7 \cdot 16 + (-1) \cdot (-5) \\ 5 \cdot 1 + (-8) \cdot 16 + (-14) \cdot (-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{53} \begin{pmatrix} -212 \\ 106 \\ -53 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

б) По формулам Крамера $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$,

где $\Delta = |A| = -53$ (см. задание 3, а),

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 16 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 3 + 4\cdot 2\cdot(-5) + 16\cdot 2\cdot 1 -$$
$$-(1\cdot(-1)\cdot(-5) + 4\cdot 16\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1) = -212,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 16 & 2 \\ -1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 16\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot(-5)\cdot 1 -$$
$$-(1\cdot 16\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot(-5)\cdot 2) = 106,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 16 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot(-5) + 4\cdot 16\cdot(-1) + 3\cdot 2\cdot 1 -$$
$$-(1\cdot(-1)\cdot(-1) + 4\cdot 3\cdot(-5) + 16\cdot 2\cdot 2) = -53.$$

Таким образом, $x_1 = \dfrac{-212}{-53} = 4$, $x_2 = \dfrac{106}{-53} = -2$, $x_3 = \dfrac{-53}{-53} = 1$;

в) Преобразуем расширенную матрицу заданной системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 16 \\ -1 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 & 16 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 3 \,\cdot 2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & -9 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot 5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 1 \\ 0 & 40 & 35 & -45 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot(-8) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 5 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -53 & -53 \end{array}\right).$$

Примечание. *Курсивом и стрелками условно показаны элементарные преобразования матрицы. Сначала переставили местами первую и третью строки (для получения в левом верхнем углу матрицы элемента (–1)), затем элементы второй строки сложили с соответствующими элементами первой строки, предварительно умноженными на 3, а элементы третьей строки сложили с соответствующими элементами первой строки, предварительно умноженными на 2. Элементы третьей строки полученной матрицы умножили на 5, затем сложили их с соответствующими элементами второй строки, предварительно умноженными на (–8). Преобразования осуществлялись для перехода к ступенчатой матрице, эквивалентной исходной.*

Последняя матрица является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5, & (1) \\ 5x_2 + 11x_3 = 1, & (2) \\ -53x_3 = -53, & (3) \end{cases}$$

которая равносильна заданной. Из уравнения (3) $x_3 = 1$. Из уравнения (2) с учётом найденного значения x_3 $x_2 = \dfrac{1}{5}\cdot(1 - 11x_3)\Big|_{x_3=1} = -2$. Из уравнения (1) $x_1 = (5 + 2x_2 + 3x_3)\Big|_{\substack{x_2=-2 \\ x_3=1}} = 4$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

4. По координатам точек $A(1; -3; -1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; 2; 2)$ для указанных векторов найдите:

а) векторы $\bar{a} = 2\overline{AB} + 3\overline{CB}$, $\bar{b} = \overline{BA}$, $\bar{d} = \overline{BC}$, $\bar{c} = \overline{AC}$;

б) скалярное и векторное произведения векторов $\bar{b}$ и $\bar{d}$;

в) угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

г) площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{b}$ и $\bar{d}$;

д) проекцию вектора $\bar{c}$ на вектор $\bar{d}$;

е)* параметр λ_1, при котором вектор $\bar{a}+\lambda_1\bar{b}$ ортогонален вектору $\bar{c}$;

ж)* параметр λ_2, при котором вектор $\bar{a}+\lambda_2\bar{b}$ коллинеарен вектору $\bar{c}$.

Выполнение задания:

а) $\overrightarrow{AB}=\{2-1;\ 0-(-3);\ 1-(-1)\}=\{1;\ 3;\ 2\}$,

$2\overrightarrow{AB}=\{2\cdot 1;\ 2\cdot 3;\ 2\cdot 2\}=\{2;\ 6;\ 4\}$,

$\overrightarrow{CB}=\{2-3;\ 0-2;\ 1-2\}=\{-1;\ -2;\ -1\}$,

$3\overrightarrow{CB}=\{3\cdot(-1);\ 3\cdot(-2);\ 3\cdot(-1)\}=\{-3;\ -6;\ -3\}$,

$\vec{a}=2AB+3CB=\{2-3;\ 6-6;\ 4-3\}=\{-1;\ 0;\ 1\}$,

$\vec{b}=\overrightarrow{BA}=\{-1;\ -3;\ -2\}$,

$\vec{c}=\overrightarrow{AC}=\{3-1;\ 2-(-3);\ 2-(-1)\}=\{2;\ 5;\ 3\}$,

$\vec{d}=\overrightarrow{BC}=\{1;\ 2;\ 1\}$.

б) Скалярное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{d}$ $\left(\vec{b},\vec{d}\right)=(-1)\cdot 1+(-3)\cdot 2+\ +(-2)\cdot 1=-1-6-2=-9$, их векторное произведение

$$\left[\vec{b}\,\vec{d}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=(-3+4)\ \vec{i}-(-1+2)\cdot\vec{j}+(-2+3)\cdot\vec{k}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}=\{1;-1;\ 1\}.$$

в) $$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{(-1)\cdot(-1)+0\cdot(-3)+1\cdot(-2)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-3)^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}}=\frac{-1}{\sqrt{28}},$$

отсюда угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\varphi=\arccos\frac{-1}{\sqrt{28}}$.

г) Искомая площадь находится по формуле $S=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{b}\ \vec{d}\right]\right|$.

$\left[\vec{b}\ \vec{d}\right]=\{1;\ -1;\ 1\}$ (см. задание под буквой «б»);

$\left|\left[\vec{b}\ \vec{d}\right]\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$. Тогда $S=\frac{\sqrt{3}}{2}$ кв. ед.

д) $\text{Пр}_{\bar{d}}\,\vec{c}=\frac{(\vec{c},\vec{d})}{\left|\vec{d}\right|}=\frac{2\cdot 1+5\cdot 2+3\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{15}{\sqrt{6}}$.

е) Искомое значение параметра λ_1 найдём, используя необходимое и достаточное условие ортогональности векторов, т.е. из равенства

$$\left(\vec{a}+\lambda_1\vec{b},\ \vec{c}\right)=0,$$

где $\vec{a}+\lambda_1\vec{b}=\{-1+\lambda_1(-1);\ 0+\lambda_1(-3);\ 1+\lambda_1(-2)\}=\{-1-\lambda_1;\ -3\lambda_1;\ 1-2\lambda_1\}$, $\vec{c}=\{2;\ 5;\ 3\}$.

$$\left(\vec{a}+\lambda_1\vec{b},\ \vec{c}\right)=(-1-\lambda_1)2+(-3\lambda_1)5+(1-2\lambda_1)3=1-23\lambda_1.$$

Из уравнения $1-23\lambda_1=0$ находим $\lambda_1=\frac{1}{23}$.

ж) Искомое значение параметра λ_2 найдём, используя признак коллинеарности векторов $\vec{a}+\lambda_1\vec{b}=\{-1-\lambda_2;\,-3\lambda_2;\,1-2\lambda_2\}$ и $\vec{c}=\{2;\,5;\,3\}$, заключающийся в пропорциональности их соответствующих координат: $\frac{-1-\lambda_2}{2}=\frac{-3\lambda_2}{5}=\frac{1-2\lambda_2}{3}$.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{-1-\lambda_2}{2}=\frac{-3\lambda_2}{5}, \\ \frac{-3\lambda_2}{5}=\frac{1-2\lambda_2}{3}, \\ \frac{-1-\lambda_2}{2}=\frac{1-2\lambda_2}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -5-5\lambda_2=-6\lambda_2, \\ -9\lambda_2=5-10\lambda_2, \\ -3-3\lambda_2=2-4\lambda_2 \end{cases} \quad \text{находим } \lambda_2=5.$$

5. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(–4; 1), *B*(5; 0), *C*(3; 2). Найдите:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) уравнения прямых, проходящих через вершину *C* соответственно параллельно и перпендикулярно стороне *AB*;

д) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Выполнение задания:

Для наглядности все указанные в задаче точки и прямые изображены на рис. 1.

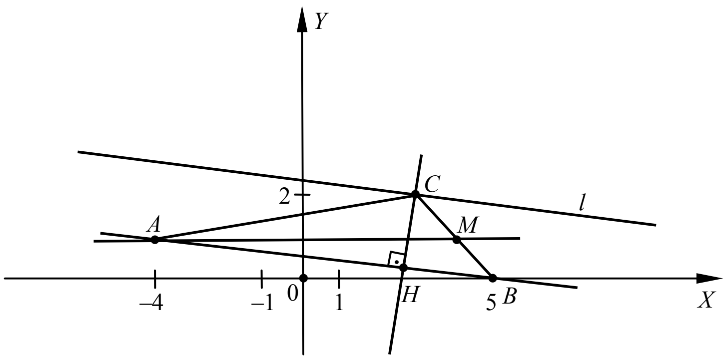

Рис. 1

а) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $(x_1;\, y_1)$ и $(x_2;\, y_2)$ имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{1}$$

Полагая в решаемой задаче $x_1=-4$, $y_1=1$, $x_2=5$, $y_2=0$ и подставляя эти значения в уравнение (1), получим уравнение стороны *AB*: $\frac{x+4}{5+4}=\frac{y-1}{0-1}$, или $\frac{x+4}{9}=\frac{y-1}{-1}$, или $-(x+4)=9(y-1)$, окончательно имеем

$$x+9y+5=0. \tag{2}$$

б) Так как прямые *CH* и *AB* перпендикулярны, то их угловые коэффициенты связаны соотношением $k_{CH}=-\frac{1}{k_{AB}}$. Из уравнения (2) $k_{AB}=-\frac{1}{9}$, тогда $k_{CH}=9$.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $(x_0;\, y_0)$, с известным угловым коэффициентом имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{3}$$

Подставляя в уравнение (3) $x_0=3$, $y_0=2$, $k=k_{CH}=9$, получим *уравнение высоты CH*: $y-2=9(x-3)$ или $9x-y-25=0$.

в) Так как точка *M* является серединой отрезка *CB*, то её координаты находятся по формулам

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_C + y_B}{2},$$

где (x_C; y_C) и (x_B; y_B) – координаты точек C и B соответственно. Таким образом:

$$x_M = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y_M = \frac{2+0}{2} = 1.$$

Воспользовавшись уравнением (1) и полагая в нём $x_1 = -4$, $y_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y_2 = 1$, получим уравнение медианы AM: $\frac{x+4}{4+4} = \frac{y-1}{1-1}$, или $\frac{x+4}{8} = \frac{y-1}{0}$, или $0(x+4) = 8(y-1)$, окончательно $y - 1 = 0$ или $y = 1$.

г) Прямая l, проходящая через вершину C параллельно стороне AB, имеет угловой коэффициент $k_l = k_{AB} = -\frac{1}{9}$ (найден в пункте «б»). Подставляя в уравнение (3) $x_0 = 3$, $y_0 = 2$, $k = k_l = -\frac{1}{9}$, получим уравнение прямой l: $y - 2 = -\frac{1}{9}(x-3)$ или $x + 9y - 21 = 0$.

Прямая, проходящая через вершину C перпендикулярно стороне AB, есть прямая CH.

Её уравнение найдено в пункте «б».

д) Расстояние d между двумя известными точками на плоскости (x_1; y_1) и (x_2; y_2) находится по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4}$$

Заметим, что $d = \left|\overrightarrow{CH}\right|$. Точка H является точкой пересечения прямых AB и CH (их уравнения найдены в пунктах «а» и «б» соответственно), поэтому её координаты найдём, решив систему уравнений $\begin{cases} x + 9y = 5, \\ 9x - y = 25. \end{cases}$ Выразив из первого уравнения системы переменную x через y и подставив её во второе уравнение, будем иметь систему, равносильную заданной:

$$\begin{cases} x = 5 - 9y, & (5) \\ 9(5 - 9y) - y = 25. & (6) \end{cases}$$

(6) $\Leftrightarrow 82y = 20$, откуда $y = \frac{10}{41}$. Тогда из уравнения (5) $x = 5 - 9 \cdot \frac{10}{41} = \frac{115}{41}$. Итак, имеем точки $C(3;\, 2)$ и $H\left(\frac{115}{41};\, \frac{10}{41}\right)$. Подставляя в формулу (4) $x_1 = 3$, $y_1 = 2$, $x_2 = \frac{115}{41}$, $y_2 = \frac{10}{41}$, получим

$$d = \sqrt{\left(\frac{115}{41} - 3\right)^2 + \left(\frac{10}{41} - 2\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{8}{41}\right)^2 + \left(-\frac{72}{41}\right)^2} = \sqrt{\frac{64 + 5184}{41^2}} = \frac{\sqrt{5248}}{41} \text{ (ед.).}$$

6.* По координатам точек $A(1; -3; -1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(3; 2; 2)$, указанных в задании 4, напишите:

а) уравнение плоскости, проходящей через три точки;

б) канонические и параметрические уравнения прямой AB;

в) уравнения прямых l_1 и l_2, проходящих через начало координат, первая из которых параллельна прямой AB, а вторая – перпендикулярна плоскости ABC;

г) уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно прямой AB.

Выполнение задания:

а) Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку (x_0; y_0; z_0) и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = \{a;\, b;\, c\}$, имеет вид

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{1}$$

За x_0, y_0, z_0 можем принять соответствующие координаты любой из заданных точек A, B, C. Нормальный вектор плоскости найдём следующим образом.

$\overrightarrow{AB} = \{1;\, 3;\, 2\}$, $\quad \overrightarrow{AC} = \{2;\, 1;\, 3\}$,

$$\left[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=$$
$$=(9-2)\vec{i}-(3-4)\vec{j}+(1-6)\vec{k}=7\vec{i}+\vec{j}-5\vec{k}\,.$$

Вектор $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB}\;\overrightarrow{AC}\right]=\{7;1;-5\}$ является нормальным вектором плоскости, проходящей через точки A, B, C.

Подставив в уравнение (1) $a = 7$, $b = 1$, $c = –5$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$, получим искомое уравнение плоскости $7(x – 2) + (y – 0) – 5(z – 1) = 0$ или $7x + y – 5z – 9 = 0$.

б) Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{S}=\{m;\,l;\,p\}$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{l}=\frac{z-z_0}{p}\,. \qquad (2)$$

Направляющий вектор прямой AB $\vec{S}_{AB}=\overrightarrow{AB}=\{1;3;2\}$. За x_0, y_0, z_0 можно принять соответствующие координаты любой из точек A, B. Подставив в (2) $x_0 = 1$, $y_0 = –3$, $z_0 = –1$, $m = 1$, $l = 3$, $p = 2$, получим *канонические уравнения прямой AB*:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{2}\,. \qquad (3)$$

Обозначив в (3) каждое из равных отношений через t, где t – параметр (незафиксированное число), перейдём к *параметрическим уравнениям прямой AB*

$$\begin{cases}x=t+1,\\ y=3t-3,\\ z=2t-1.\end{cases}$$

в) Так как прямая l_1 параллельна прямой AB, то за её направляющий вектор $\vec{S}_1$ можно принять вектор $\vec{S}_{AB}=\overrightarrow{AB}=\{1;3;2\}$. Прямая l_2 перпендикулярна плоскости ABC, поэтому за её направляющий вектор $\vec{S}_2$ можно принять нормальный вектор плоскости ABC, найденный в пункте «а». Итак, $\vec{S}_1=\{1;3;2\}$, $\vec{S}_2=\{7;1;-5\}$. Воспользовавшись уравнениями (2) и полагая в них $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, получим *канонические уравнения прямой* l_1 $\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}$ *и прямой* l_2 $\frac{x}{7}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-5}$.

г) За нормальный вектор указанной плоскости можно принять вектор $\overrightarrow{AB}=\{1;3;2\}$. Воспользовавшись уравнением (1) и полагая в нём $a = 1$, $b = 3$, $c = 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, получим *уравнение плоскости* $x + 3y + 2z = 0$, *проходящей через начало координат перпендикулярно прямой AB*.

7. Приведите к канонической форме уравнения указанных линий: а) $5x^2 + 9y^2 – 30x + 18y + 9 = 0$; б) $y^2 + x – 2y + 1 = 0$ и изобразите их на координатной плоскости.

Выполнение задания:

а) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0\Leftrightarrow\left(5x^2-30x\right)+\left(9y^2+18y\right)-9\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5\left(x^2-6x\right)+9\left(y^2+2y\right)=-9\Leftrightarrow 5\left(x^2-2\cdot 3x+3^2-9\right)+9\left(y^2+2y+1-1\right)=-9\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5\left(x^2-2\cdot 3x+3^2\right)-45+9\left(y^2+2y+1\right)-9=-9\Leftrightarrow 5(x-3)^2+9(y+1)^2=45\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\frac{5(x-3)^2}{45}+\frac{9(y+1)^2}{45}=\frac{45}{45}\Leftrightarrow\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{5}=1\,.$

Последнее уравнение является каноническим уравнением эллипса с центром в точке (3; –1) и полуосями $a=3$, $b=\sqrt{5}$. Он изображён на рис. 2.

б) $y^2+x-2y+1=0\Leftrightarrow y^2-2y+1=-x\Leftrightarrow(y-1)^2=-x\,.$

Последнее уравнение есть каноническое уравнение параболы с вершиной в точке (0; 1). Она изображена на рис. 3.

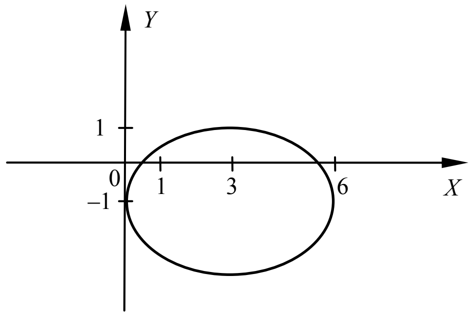

Рис. 2

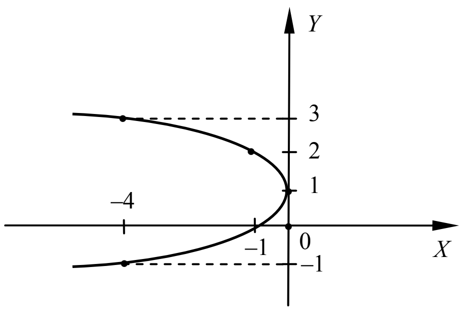

Рис. 3

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК