**А.Я. АЛЕЕВА, Ю.Ю. ГРОМОВ,
Н.В. КОСТЫЛЕВА, Н.Ю. ФЕДОРОВА**

МАТЕМАТИКА
Вводный курс

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

А.Я. Алеева, Ю.Ю. Громов,
Н.В. Костылева, Н.Ю. Федорова

МАТЕМАТИКА

Вводный курс

Тамбов
Издательство ТГТУ
2008

УДК 510
ББК В1я73
М34

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей физики ТГУ им. Г.Р. Державина
Т.Н. Плужникова

Кандидат технических наук,
доцент кафедры ИСиЗИ

О.Г. Иванова

Алеева, А.Я.
М34 Математика: вводный курс : учебное пособие / А.Я. Алеева, Ю.Ю. Громов, Н.В. Костылева, Н.Ю. Федорова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2008. – 76 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-0703-2.

Содержит тексты, лексико-грамматический материал и упражнения, позволяющие студентам-иностранцам усвоить новые грамматические формы и терминологическую лексику курсов математики.

Предназначено студентам-иностранцам, обучающимся на подготовительном факультете.

УДК 510
ББК В1я73

ISBN 978-5-8265-0703-2
© ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет" (ТГТУ), 2008

Учебное издание

АЛЕЕВА Анна Яковлевна,
ГРОМОВ Юрий Юрьевич,
КОСТЫЛЕВА Наталья Викторовна,
ФЕДОРОВА Наталья Юрьевна

МАТЕМАТИКА
Вводный курс

Учебное пособие

Редактор Е.С. Мордасова
Компьютерное макетирование Т.Ю. Зотовой

Подписано в печать 26.02.08
Формат 60 × 84/16. 4,42 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 239

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для работы со студентами-иностранцами, обучающимися математике на подготовительном факультете.

В пособии рассматриваются основные числа и действия над ними, а также понятия иррационального и действительного числа, числовые множества и их стандартные обозначения.

Цель пособия – изложить студентам отобранный в пособии математический материал в доступной языковой форме, познакомить их с языком математики, заложить элементарные умения в чтении и понимании математических текстов, активизировать лексический запас студентов в процессе чтения текстов пособия и ответов на вопросы по ним. Кроме того, пособие будет способствовать формированию вычислительных навыков при выполнении студентами соответствующих упражнений.

Пособие состоит из восьми занятий, каждое из которых раскрывает определенную тему. Темы, в свою очередь, делятся на подтемы, содержащие теоретический материал и примеры, иллюстрирующие вводные математические понятия и термины.

В каждое занятие включены упражнения двух типов: на закрепление вычислительных навыков и на отработку вводимой математической лексики.

Работа по пособию рассчитана на 32 – 40 учебных часов в зависимости от уровня подготовки учащихся. При работе в группах учащихся со средним уровнем математической подготовки занятия 1, 2, 3, 5, 6, 7 рекомендуется изучать в течение 4 академических часов каждое, а уроки 4 и 8 – в течение 8 часов.

Занятие 1

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ

1.1. Натуральные числа

0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 – это цифры.

Цифры – это знаки.

a; +; =; $\in$; ... – это тоже знаки.

3; 0; –3; –5; 7; 69; 834 – это числа.

Числа 1; 2; 3; 4; ...; 9; 10; 11; ...; 47; 48; 49; ... – натуральные числа.

Число 0 – это ненатуральное число.

Число 0 – это целое число. Натуральные числа – это тоже целые числа.

0 ноль (нуль)	1 один (единица)
2 два	3 три
4 четыре	5 пять
6 шесть	7 семь
8 восемь	9 девять
10 десять	11 одиннадцать
12 двенадцать	13 тринадцать
14 четырнадцать	15 пятнадцать
16 шестнадцать	17 семнадцать
18 восемнадцать	19 девятнадцать
20 двадцать	30 тридцать
40 сорок	50 пятьдесят
60 шестьдесят	70 семьдесят
80 восемьдесят	90 девяносто
100 сто	200 двести
300 триста	400 четыреста
500 пятьсот	600 шестьсот
700 семьсот	800 восемьсот
900 девятьсот	1000 тысяча
1 000 000 миллион	

92 – девяносто два; 247 – двести сорок семь; 905 – девятьсот пять; 1451 – тысяча четыреста пятьдесят один.

1.2. Множество натуральных чисел

Все натуральные числа можно записать как множество:

$\{1; 2; 3; ...; 241; 242; 243; ...\} = N$.

N – это множество натуральных чисел. = это знак "равно". Натуральные числа 1; 2; 3; ... – это элементы множества N. 12 – это натуральное число или 12 – элемент N. Это можно записать так: $12 \in N$. 0 – это не натуральное число или 0 – не элемент N. Это можно записать так: $0 \notin N$.

1.3. Четные и нечетные числа

Натуральное число может быть четное и нечетное.

2; 4; 6; 8; 10; 12; ... – это четные числа.

1; 3; 5; 7; 9; 11; ... – это нечетные числа.

Например: 472 – это четное число. 37 – это нечетное число.

Все четные числа можно записать как множество:

$$\{2k \mid k \in N\} = \{2; 4; 6; ...\}.$$

Все нечетные числа можно записать как множество:

$$\{2k - 1 \mid k \in N\} = \{1; 3; 5; ...\}.$$

1.4. Арифметические действия

Арифметика изучает четыре действия:
Действия мы читаем так:
2 + 3 = 5 (2 плюс 3 равно 5) – сложение;
7 – 4 = 3 (7 минус 4 равно 3) – вычитание;
2 · 5 = 10 (2 умножить на 5 равно 10) – умножение;
8 : 2 = 4 (8 разделить на 2 равно 4) – деление.

1.5. Компоненты действий

1) Компоненты сложения.
$a + b = c$, где a – это слагаемое; b – это слагаемое; c – это сумма; выражение $a + b$ – это сумма.
2) Компоненты вычитания.
$a - b = c$, где a – это уменьшаемое; b – это вычитаемое; c – это разность; выражение $a - b$ – это разность.
3) Компоненты умножения.
$a \cdot b = c$, где a – это множитель; b – это множитель; c – это произведение; выражение $a \cdot b$ – это произведение.
4) Компоненты деления.
$a : b = c$, где a – это делимое; b – это делитель; c – это частное; выражение $a : b$ – это частное.

Действие	Знак	Что сделать?	Результат
сложение	+ плюс	сложить	сумма
вычитание	– минус	вычесть	разность
умножение	·умножение	умножить	произведение
деление	: деление	разделить	частное

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Прочитайте числа*:**

1) 2, 12, 20, 200; 3, 13, 30, 300; 4, 14, 40, 400; 5, 15, 50, 500;6, 16, 60, 600; 7, 17, 70, 700; 8, 18, 80, 800; 9, 19, 90, 900.
2) 1, 10, 100, 1000, 1 000 000.
3) 311, 836, 917, 519, 512, 603, 1007, 1042, 1204, 1300, 1020.

2. ***Запишите числа цифрами*:**

семь, двадцать три, двенадцать, сорок пять; девятнадцать; девяносто семь, сто пятьдесят четыре; семьсот три, двести одиннадцать; шестьсот сорок один; тысяча девятьсот восемьдесят пять.

3. ***Ответьте на вопросы*:**

1) Число 2 – это натуральное или ненатуральное число?
2) Число 39 – это натуральное или ненатуральное число?
3) Число 0 – это натуральное или ненатуральное число?
4) Число 158 – это натуральное или ненатуральное число?
5) Число 56 – это четное или нечетное число?
6) Число 173 – это четное или нечетное число?
7) Число 75 – это четное или нечетное число?
8) Число 84 – это четное или нечетное число?

4. ***Прочитайте предложения и запишите их с помощью знаков*** $\in$, $\notin$, ***N*.**

Образец: 15 – это натуральное число. $15 \in N$.
1) 3 – это натуральное число;
2) 0 – это ненатуральное число;
3) 29 – это натуральное число;
4) 46 – это натуральное число;
5) –5 – это ненатуральное число.

5. ***Прочитайте.***

1 + 4 = 5;	19 – 15 = 4;	2 · 1 = 2;	16 : 2 = 8;
7 + 5 = 12;	23 – 17 = 6;	5 · 4 = 20;	4 : 1 = 4;
15 + 17 = 32;	12 – 5 = 7;	7 · 10 = 70;	48 : 24 = 2.

6. ***Прочитайте, запишите действие и ответ.***

О б р а з е ц : Сложите 5 и 3.
5 + 3 = 8.
1) Сложите: 13 и 17; 48 и 3; 7 и 15; 20 и 40.
2) Вычтите: из числа 8 число 3; из числа 12 число 9.
3) Умножьте: 5 на 7; 6 на 8; 12 на 48; 10 на 3.
4) Разделите: 12 на 6; 18 на 3; 14 на 7; 45 на 15.

7. ***Прочитайте, запишите действие и ответ, скажите какое это действие, какие это компоненты действий.***

1) Запишите сумму чисел 5 и 9; 12 и 16.
2) Запишите разность чисел 7 и 2; 45 и 26.
3) Запишите произведение чисел 4 и 7; 10 и 3.
4) Запишите частное чисел 21 и 7; 42 и 6.

8. ***Прочитайте текст. Ответьте на вопросы.***

Т Е К С Т

2 – это цифра и число. 37 – это не цифра, это число. Здесь две цифры 3 и 7. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... – это натуральные числа, 0 – ненатуральное число.

Числа 2; 4; 6; 8; 10; ... – это четные числа.
Числа 1; 3; 5; 7; 9; ... это нечетные числа.
Вопросы:
1) 2 – это цифра или число?
2) 37 – это цифра или число? Сколько здесь цифр?
3) 0 – это натуральное или ненатуральное число?
4) 4 – это натуральное или ненатуральное число?
5) 5 – это четное или нечетное число?
6) 8 – это четное или нечетное число?

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Арифметика	
Арифметический, -ая, -ое, -ие	Арифметическое действие
Выражение	
Вычитать – вычесть	
(что? из чего?) (Вычтите!)	
Вычитаемое	
Вычитание	
Действие (мн. – действия)	
Деление	
Делимое	
Делить – разделить	
(что? на что?)	
Делитель	
Единица	
Записывать – записать	
(что? как что?)	
Знак	
И так далее	
Компонента	
Минус	
Множество	
Множитель	
Натуральное число	
Нечетное число	
Ноль (нуль)	
Плюс	
Принадлежит	
Произведение	Произведение чисел
Равно	
Разность	Разность чисел
Складывать – сложить (что?)	
Сложите!	
Слагаемое	
Сложение	
Сумма	Сумма чисел
Уменьшаемое	

Умножение
Целое число
Цифра

Частное	Частное чисел
Число (мн. число – числа)	Четное число

Занятие 2

ПОРЯДОК ДЕЙСТВИЙ. СРАВНЕНИЕ ЧИСЕЛ

2.1. Порядок действий

Пример 1. 17 – 15 + 24 – 18 – это числовое выражение. Оно содержит только действия сложения и вычитания. Мы делаем эти действия последовательно (слева направо):

$$17 - 15 + 24 - 18.$$
$$\rightarrow$$

1) 17 – 15 = 2; 2) 2 + 24 = 26; 3) 26 – 18 = 8.

Следовательно, 17 – 15 + 24 – 18 = 8.

Правило 1. Если выражение содержит только действия сложения и вычитания, то делаем эти действия последовательно (слева направо).

Пример 2. 45 : 9 · 6 : 3.

Это числовое выражение содержит только умножение и деление. Мы делаем эти действия последовательно (слева направо):

$$45 : 9 \cdot 6 : 3.$$
$$\rightarrow$$

1) 45 : 9 = 5; 2) 5 · 6 = 30; 3) 30 : 3 = 10.

Следовательно, 45 : 9 · 6 : 3 = 10.

Правило 2. Если выражение содержит только умножение и деление, то выполняем эти действия последовательно (слева направо).

Пример 3. 18 – 10 : 5 + 12 · 2.

Это выражение содержит действия: сложение, вычитание, умножение, деление. Здесь нужно сначала делать действия умножение и деление, а потом – сложение и вычитание:

$$18 \underset{(3)}{-} 10 \underset{(1)}{:} 5 \underset{(4)}{+} 12 \underset{(2)}{\cdot} 2.$$

1) 10 : 5 = 2; 2) 12 · 2 = 24; 3) 18 – 2 = 16; 4) 16 + 24 = 40.

Следовательно, 18 – 10 : 5 + 12 · 2 = 18 – 2 + 24 = 40.

Правило 3. Если выражение содержит действия: сложение, вычитание, умножение, то сначала выполняем умножение и деление, а потом сложение и вычитание.

Выражение может содержать скобки (...) – круглые скобки; [...] – квадратные скобки; {...} – фигурные скобки.

Пример 4. (5 + 4) · 3.

Это выражение содержит круглые скобки. Вычислим это выражение. Сначала мы выполняем действие, которое находится в скобках (сложение), а потом – умножение:

$$(5 \underset{(1)}{+} 4) \underset{(2)}{\cdot} 3.$$

1) 5 + 4 = 9; 2) 9 · 3 = 27.

Следовательно, (5 + 4) · 3 = 9 · 3 = 27.

Пример 5. 20 – [10 + 18 : (9 – 3 · 2)].

Это выражение содержит круглые и квадратные скобки. Вычислим это выражение. Сначала мы выполняем действия, которые находятся в круглых скобках, а потом – действия в квадратных скобках.

$$20 \overset{(5)}{-} [10 \overset{(4)}{+} 18 \overset{(3)}{:} (9 \overset{(2)}{-} 3 \overset{(1)}{\cdot} 2)].$$

1) 3 · 2 = 6; 2) 9 – 6 = 3; 3) 18 : 3 = 6; 4) 10 + 6 = 16; 5) 20 – 16 = 4.

Следовательно, 20 – [10 + 18 : (9 – 3 · 2)] = 20 – [10 + 18 : 3] = 20 – 16 = 4.

Пример 6. 7 + 6 : 2 · {12 – [15 + (18 – 3) : 5] : 9}.

Это выражение содержит круглые, квадратные и фигурные скобки. Вычислим это выражение. Сначала мы выполняем действия в круглых скобках, потом квадратных скобках, а потом в фигурных скобках:

$$7 + 6 : 2 \cdot \{12 - [15 + (18 - 3) : 5] : 9\}.$$

(8) (6) (7) (5) (3) (1) (2) (4)

1) $18 - 3 = 15$; 2) $15 : 5 = 3$; 3) $15 + 3 = 18$; 4) $18 : 9 = 2$;
5) $12 - 2 = 10$; 6) $6 : 2 = 3$; 7) $3 \cdot 10 = 30$; 8) $7 + 30 = 37$.

Следовательно, $7 + 6 : 2 \cdot \{12 - [15 + (18 - 3) : 5]: 9\} = 7 + 6 : 2 \times \{12 - [15 + 15 : 5] : 9\} = 7 + 6 : 2 \cdot \{12 - 18 : 9\} = 7 + 6 : 2 \cdot 10 = 37$.

П р а в и л о 4. Если выражение содержит скобки, то сначала выполняем действия в круглых скобках (...), потом в квадратных скобках [...], а потом в фигурных {...}.

2.2. Сравнение чисел

Два числа a и b можно сравнить:
$a = b$ или $a > b$ или $a < b$.
Если $a > b$ или $a < b$, то $a \neq b$.
$\neq$ это знак "не равно";
$>$ это знак "больше"; $<$ это знак "меньше".
Сравним числа 5 и 8.
$5 \neq 8$ (5 не равно 8);
$5 < 8$ (5 меньше, чем 8);
$8 > 5$ (8 больше, чем 5).
Сравним выражение $3 + 7$ и число 10. Выражение $3 + 7$ и число 10 равны: $3 + 7 = 10$.
Сравним числа 40 и 10.
$40 \neq 10$ (40 не равно 10). $40 > 10$ (40 больше, чем 10);
$10 < 40$ (10 меньше, чем 40).
На сколько 40 больше, чем 10 (или на сколько 10 меньше, чем 40). $40 - 10 = 30$ (разность равна 30).
Следовательно, 40 больше, чем 10, на 30 (или 10 меньше, чем 40, на 30).
Во сколько раз 40 больше, чем 10 (или во сколько раз 10 меньше, чем 40)?
$40 : 10 = 4$ (частное равно 4).
Следовательно, 40 больше, чем 10, в 4 раза (или 10 меньше, чем 40, в 4 раза).

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Вычислите выражения*:**

1) $12 - 5 + 3$; 2) $13 + 4 - 9$;
3) $100 - 80 + 30 + 20 - 10$; 4) $32 + 18 - 40 + 23 - 13$;
5) $18 \cdot 6 : 3$; 6) $24 : 8 \cdot 12$;
7) $36 : 4 \cdot 2 : 9 \cdot 5$; 8) $9 \cdot 6 : 18 \cdot 10 \cdot 4 : 5$;
9) $15 - 4 \cdot 3 + 20 : 10$; 10) $24 + 2 \cdot 8 - 45 : 9 - 30$;
11) $42 : 7 + 5 \cdot 4 - 6$; 12) $12 \cdot 4 - 18 + 20 : 5 \cdot 3$;
13) $38 - (12 + 3) \cdot 2 + 4$; 14) $15 - 5 + (25 - 3 \cdot 5) - 13$;
15) $23 - 5 \cdot [28 : (15 - 8)] - 14 : 7$; 16) $7 + [(9 - 3) : 3 + 15] \cdot (5 - 3)$;
17) $12 - \{[17 -(19 + 12 : 6) : 3] - 8\}$;
18) $9 + \{48 - [12 - (15 - 13) \cdot 5] \cdot 23\} : 2$;
19) $24 : [15 : (7 - 2) \cdot 4] + 8 : (12 - 5 \cdot 2)$.

2. ***Прочитайте выражения*:**

$27 \neq 19$; $7 > 3$; $5 < 9$; $15 > 6$; $3 < 14$.

3. ***Скажите, на сколько…***

7 больше, чем 5;
13 больше, чем 9;
25 меньше, чем 45;
17 меньше, чем 27.

4. ***Скажите, во сколько раз…***

30 больше, чем 6;
24 больше, чем 4;
5 меньше, чем 15;
9 меньше, чем 90.

5. ***Сравните числа и выражения*:**

1) 12 и 5; 2) 7 и 13; 9) $8 + 2$ и 18.
3) $3 + 5$ и 12; 4) $2 \cdot 3$ и 6;
5) 15 и $12 + 3$; 6) $12 : 2$ и $4 + 3$;

7) 15 – 7 и 2 + 3; 8) 3 · 4 и 1 + 5;

6. ***Прочитайте текст и ответьте на вопросы.***

ТЕКСТ

Сравним числа 20 и 4. Эти числа не равны; 20 больше, чем 4; 4 меньше, чем 20. Число 20 больше, чем 4, на 16, потому что разность 20 – 4 равна 16.
Число 4 меньше, чем 20, на 16, потому что разность 20 – 4 равна 16.
Число 20 больше, чем 4, в 5 раз, потому что частное 20 : 4 равно 5. Число 4 меньше, чем 20, в 5 раз, потому что 20 : 4 равно 5.

Вопросы:

1) Числа 20 и 4 равны или не равны?
2) Какое число больше: 20 или 4?
3) Какое число меньше: 20 или 4?
4) На сколько 20 больше, чем 4?
5) Почему 20 больше, чем 4, на 16?
6) На сколько 4 меньше, чем 20?
7) Почему 4 меньше, чем 20, на 16?
8) Во сколько раз 20 больше, чем 4?
9) Почему 20 больше, чем 4, в 5 раз?
10) Во сколько раз 4 меньше, чем 20?
11) Почему 4 меньше, чем 20, в 5 раз?

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Больше (чем что?)
Больше в 2 раза
Больше на 2
Выполнять – выполнить (что?)
Вычислять – вычислить (что?)
Если …, то … .
Квадратные скобки
(в квадратных скобках – где? – мн. число)
Следовательно
Фигурные скобки
(в фигурных скобках – где? – мн. число)
Круглые скобки
(в круглых скобках – где? – мн. число)
Меньше (чем что?)
Меньше в 5 раз
Меньше на 5
Находить – найти (что?)
Общий, -ая, -ее, -ие
Порядок действий
Получать – получить (что?)
Последовательно
Правило
Пример
Равен, равна, равно (мн. число – равны)
Раз
Скобка (в скобках – где? – мн. число)
Содержать (что?)
Слева
Сравнение   Сравнение чисел
Сравнивать – сравнить (что?)   Сравните!
Часть (жен. род)
Чем
Числовые выражения

Занятие 3

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

3.1. Делитель и кратное

12 : 4 = 3; частное 12 : 4 – это натуральное число ($3 \in N$).
Следовательно, 12 делится на 4.

$12 : 5 = \frac{12}{5}$; частное 12 : 5 – это ненатуральное число ($\frac{12}{5} \notin N$).

Следовательно, 12 не делится на 5.

Если а и b – натуральные числа и частное $a : b$ – натуральное число, то a делится на b.

Если a и b – натуральные числа, а частное $a : b$ – ненатуральное число, то a не делится на b.

Если a делится на b, то b – это делитель числа a; a – это кратное числа b.

Например, 15 делится на 3. Следовательно, число 3 – это делитель числа 15, а число 15 – это кратное числа 3.

Найдем все делители числа 12. Получим 1; 2; 3; 4: 6; 12. Запишем все делители числа 12 как множество: {1; 2; 3; 4; 6; 12}. Это множество содержит шесть элементов. *Это конечное множество.*

Найдем все делители числа 26. Получим множество {1; 2; 13; 26}. Это множество содержит четыре элемента. Это тоже конечное множество.

Числа 5, 10, 15, 20, 25, ... и так далее делятся на 5. Эти числа кратные числа 5. Их можно записать как множество: {5; 10; 15; 20; 25; ...} = = $\{5k \mid k \in N\}$. Это множество содержит бесконечно много элементов. *Это бесконечное множество.*

Все кратные числа 7 можно записать как множество {7; 14; 21; 28; 35;...} = $\{7k \mid k \in N\}$. Это тоже бесконечное множество.

3.2. Признаки делимости чисел

Определим, какие числа делятся на 2, на 3, на 5; на 10.

Числа 8, 32, 150, 236, ... делятся на 2. Эти числа – четные.

На 2 делятся четные числа.

Числа 50, 130, 200, 1570, ... делятся на 10. Их последняя цифра – ноль (0).

На 10 делятся числа, если их последняя цифра – 0 (ноль).

Числа 30, 75, 120, 1935, ... делятся на 5. Их последняя цифра 0 или 5.

На 5 делятся числа, если их последняя цифра 0 или 5.

Числа 21, 732, 2430, ... делятся на 3. Найдем их сумму цифр и увидим, что она тоже делится на 3. Так, 21 имеет сумму цифр 2 + 1 = 3, а 3 делится на 3; 732 имеет сумму цифр 7 +3 + 2 = 12, а 12 делится на 3. 2430 имеет сумму цифр 2 + 4 + 3 + 0 = 9, а 9 делится на 3.

На 3 делятся числа, если их сумма цифр делится на 3.

3.3. Простые и составные числа

Число 23 делится только на 1 и на себя (на 23). Число 23 не делится на другие числа. 23 – это простое число.

Простое число делится только на 1 и на себя.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... – это простые числа. Они делятся только на 1 и на себя.

Число 18 делится на 1, на себя (на 18) и на другие числа, например, на 3 и на 6. 18 – это составное число.

Составное число делится на 1, на себя и на другие числа.

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, ... – это составные числа. Они делятся на 1, на себя и на другие числа. Число 1 (единица) – не простое и не составное число.

3.4. Разложение чисел на простые множители

Составное число 35 можно записать как произведение $5 \cdot 7$.

Множители 5 и 7 – простые числа. Значит, число 35 можно разложить *на простые множители*: $35 = 5 \cdot 7$

Произведение $5 \cdot 7$ – это разложение числа 35 на простые множители.

Разложить число на простые множители – это значит записать его как произведение простых чисел.

Разложим число 60 на простые множители:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Разложим число 210 на простые множители. Это можно сделать и записать так:

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

3.5. Наибольший общий делитель

Числа 24 и 30 делятся на 2. Число 2 – это их общий делитель.

Числа 24 и 30 имеют другие общие делители: 1, 3, 6.

Число 6 – наибольший общий делитель (НОД) чисел 24 и 30: НОД(24; 30) = 6.

Наибольший общий делитель можно найти так: сначала разложить числа 24 и 30 на простые множители

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$,

потом взять общие множители 2 и 3 и найти их произведение:

НОД(24; 30) = $2 \cdot 3 = 6$.

Найдем НОД(30; 40; 50).

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.   Общие множители 2 и 5.

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. НОД(30; 40; 50) $= 2 \cdot 5 = 10$.
$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$.

3.6. Наименьшее общее кратное

Числа 15, 30, 45, 60, 75, 90, ... делятся на 15. Следовательно, эти числа – кратные числа 15.
Числа 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, ... делятся на 10. Следовательно, эти числа – кратные числа 10.
Числа 30, 60, 90, ... – это общие кратные чисел 15 и 10, потому что все они делятся на 15 и 10.
Число 30 – наименьшее общее кратное (НОК) чисел 15 и 10.

НОК(15; 10) = 30.

Разложим числа 15; 10 и 30 на простые множители:

$15 = 3 \cdot 5$; $10 = 2 \cdot 5$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Мы видим, что НОК(15; 10) = 30 содержит все множители числа 15 (3 и 5) и все множители числа 10 (2 и 5).
Найдем НОК(12; 14). Сначала разложим числа 12 и 14 на простые множители:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3; \quad 14 = 2 \cdot 7.$$

Потом найдем НОК:

$$\text{НОК}(12; 14) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84.$$

Найдем НОК(42; 56; 63).

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7; \quad 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7; \quad 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

$$\text{НОК}(42; 56; 63) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 504.$$

3.7. Взаимно простые числа

Возьмем числа 14 и 15 и разложим их на простые множители: $14 = 2 \cdot 7$; $15 = 3 \cdot 5$.
Произведения $2 \cdot 7$ и $3 \cdot 5$ не имеют общих множителей.

14 и 15 – это взаимно простые числа.

Числа a и b – взаимно простые, если их разложения на простые множители не имеют общих множителей.
Найдем НОД и НОК чисел 14 и 15.

$$\text{НОД}(14; \underbrace{15)}\ = \underbrace{1;}\ \text{НОК}(14; 15) = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 14 \cdot 15 = 210.$$

Следовательно, если числа a и b взаимно простые, то НОД(a; b) = 1, НОК (a; b) $= a \cdot b$.
Например, числа 8 и 9 взаимно простые, потому что их разложения на простые множители не имеют общих множителей:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2; 9 = 3 \cdot 3.$$

Найдем НОД и НОК чисел 8 и 9, получим:

НОД(8; 9) = 1; НОК(8; 9) $= 8 \cdot 9 = 72$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Используя признаки делимости чисел, определите, делятся или не делятся числа 46, 157, 230 на 2, на 3, на 5, на 10.***

2. ***Запишите множества чисел. Скажите, какое множество вы получили – конечное или бесконечное?***

1) Множество делителей числа 24.
2) Множество делителей числа 35.
3) Множество четных делителей числа 30.
4) Множество нечетных делителей числа 42.
5) Множество кратных числа 3.
6) Множество кратных числа 18.

3. ***Определите, число а – это простое или составное число?***

1) $a = 15$; 2) $a = 19$; 3) $a = 21$; 4) $a = 24$; 5) $a = 1$.

4. ***Разложите числа на простые множители:*** **24; 38; 46; 100; 135; 270; 1000.**

5. ***Объясните, как можно найти наибольший общий делитель (НОД) чисел 12 и 18; 24 и 40; 36 и 54; 48 и 60.***
Образец. Возьмем числа 12 и 18. Разложим их на простые множители: $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$. Найдем общие множители и умножим их: $2 \cdot 3 = 6$.
Получим: НОД(12; 18) = 6.

6. ***Найдите НОД и НОК чисел*****:**

1) 10 и 15;	2) 63 и 56;	3) 13 и 17;	4) 30, 45 и 60;
5) 48, 84 и 36;	6) 8, 9 и 25;	7) 15, 28 и 42;	8) 4, 25 и 100.

7. ***Прочитайте тексты и ответьте на вопросы.***

ТЕКСТ 1

Возьмем число 582 и определим, делится или не делится оно на 2, на 3, на 5, на 10.

582 – это четное число. Значит, оно делится на 2.

Найдем сумму цифр числа 582. Получим: 5 + 8 + 2 = 15; 15 делится на 3. Значит, число 582 делится на 3.

Последняя цифра числа 582 – это 2. Это не 5 и не 0. Следовательно, число 582 не делится на 5 и не делится на 10.

Возьмем число 145 и определим, делится или не делится оно на 2, на 3, на 5, на 10.

Число 145 – нечетное, следовательно, оно не делится на 2. Найдем сумму цифр числа 145. Получим 1 + 4 + 5 = 10, не делится на 3. Следовательно, 145 не делится на 3. Последняя цифра числа 145 – это 5, следовательно, число 145 делится на 5. Число 145 не делится на 10, потому что его последняя цифра не 0.

Вопросы:
1) Число 582 делится на 2 или не делится? Почему?
2) Число 582 делится на 3 или не делится? Почему?
3) Число 582 делится на 10 или не делится? Почему?
4) Число 145 делится на 2 или не делится? Почему?
5) Число 145 делится или не делится на 3? Почему?
6) Число 145 делится или не делится на 5? Почему?
7) Число 145 делится или не делится на 10? Почему?

ТЕКСТ 2

17 – это простое число, потому что оно делится только на 1 и на себя. Число 17 имеет только два делителя: 1 и 17.

30 – это составное число, потому что оно делится не только на 1 и на себя. Оно делится еще и на другие числа: на 2, 3, 5, 6, 10, 15. Число 30 имеет больше, чем два делителя. Оно имеет восемь делителей: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30.

Составное число можно разложить на простые множители. Разложить число на простые множители – это значит записать его как произведение простых множителей. Разложим число 30 на простые множители. Получим:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Множители 2, 3, 5 – простые числа.

Вопросы:
1) 17 – это простое или составное число? Почему?
2) Сколько делителей имеют число 17?
3) Какие делители имеют число 17?
4) 30 – это простое или составное число?
5) Почему 30 – это составное число?
6) Сколько делителей имеет число 30?
7) Какие делители имеет число 30?
8) Число 30 можно или нельзя разложить на простые множители?
9) Что значит разложить число на простые множители

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Бесконечно много
Бесконечное множество
Взять (что?) Возьмите! (мы) возьмем
Взаимно простые числа (мн. число)
Делиться (на что?) (что? делиться на что?)
Делимость чисел
Другой, -ая, -ое (мн. число – другие)
Иметь (что?)
Конечное множество
Наибольший общий делитель (НОД)
Кратное (мн. число – кратные)
Наименьшее общее кратное (НОК)
Находить – найти (что?) Найдите! (мы) найдем
Общий, -ая, -ее, -ие
Определять – определить (что?) Определите!
Последний, -яя, -ее, -ие
Признаки делимости чисел
Простое число (произведение простых чисел)
Раскладывать – разложить (что? на что?) Разложите!
Разложение (чего? на что?)
(разложение чисел на простые множители)
Составное число

Занятие 4

ДРОБИ

4.1. Обыкновенные дроби

Возьмем 1 (единицу) и разделим ее на три равные части (рис. 1).

Одна третья часть единицы – это дробь $\frac{1}{3}$ (одна третья). Две третьих части единицы – это дробь $\frac{2}{3}$ (две третьих). Три третьих части единицы – это дробь $\frac{3}{3}$ (три третьих).

$\frac{3}{3} = 1$. Дробь $\frac{3}{3}$ равна 1 (единице).

Числа $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{3}$ – это обыкновенные дроби.

Если $a \in N$ и $b \in N$, то число $\frac{a}{b}$ – это обыкновенная дробь, где a – числитель, b – знаменатель.

Знаменатель дроби показывает, на сколько частей мы разделили единицу. Числитель дроби показывает, сколько частей мы взяли. Частное а : b можно записать как дробь $\frac{a}{b}$. Например, частное 3 : 4 можно записать как дробь $\frac{3}{4}$, здесь 3 – числитель, 4 – знаменатель.

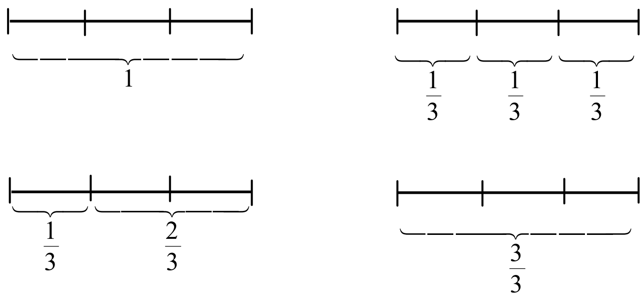

Рис. 1

Читаем дроби так:

$\frac{1}{2}$ – одна вторая	$\frac{1}{3}$ – одна третья
$\frac{1}{4}$ – одна четвертая	$\frac{1}{5}$ – одна пятая
$\frac{1}{6}$ – одна шестая	$\frac{1}{7}$ – одна седьмая
$\frac{1}{8}$ – одна восьмая	$\frac{1}{9}$ – одна девятая
$\frac{1}{10}$ – одна десятая	$\frac{5}{2}$ – пять вторых
$\frac{2}{3}$ – две третьих	$\frac{3}{4}$ – три четвертых
$\frac{3}{5}$ – три пятых	$\frac{4}{7}$ – четыре седьмых
$\frac{9}{10}$ – девять десятых	$\frac{3}{11}$ – три одиннадцатых
$\frac{5}{21}$ – пять двадцать первых	$\frac{1}{10}$ – одна десятая
$\frac{21}{10}$ – двадцать одна десятая	$\frac{1}{100}$ – одна сотая
$\frac{41}{1000}$ – сорок одна тысячная	$\frac{43}{55}$ – сорок три пятьдесят пятых
$\frac{59}{70}$ – пятьдесят девять семидесятых	$\frac{17}{100}$ – семнадцать сотых

$\frac{23}{1000}$ – двадцать три тысячных

4.2. Правильные и неправильные дроби

Смешанные дроби

Возьмем дробь $\frac{10}{17}$. Здесь числитель 10 меньше, чем знаменатель 17 ($10 < 17$).

$\frac{10}{17}$ – это правильная дробь.

Возьмем дробь $\frac{7}{5}$. Здесь числитель 7 больше, чем знаменатель 5 ($7 > 5$).

$\frac{7}{5}$ – это неправильная дробь.

Возьмем дробь $\frac{11}{11}$. Здесь числитель и знаменатель равны ($11 = 11$).

$\frac{11}{11}$ – это тоже неправильная дробь.

Дробь $\frac{a}{b}$ – это правильная дробь, если $a < b$.

Дробь $\frac{a}{b}$ – это неправильная дробь, если $a \geq b$.

$\geq$ – это знак "больше или равно".

Например:

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{45}{67}$; $\frac{4}{121}$ – это правильные дроби,

$\frac{2}{1}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{10}{7}$; $\frac{23}{5}$; $\frac{102}{41}$; $\frac{7}{7}$ – это неправильные дроби.

Неправильную дробь $\frac{23}{5}$ можно записать так:

$$\frac{23}{5} = \frac{20+3}{5} = \frac{20}{5} + \frac{3}{5} = 4 + \frac{3}{4} = 4\frac{3}{5}.$$

$4\frac{3}{5}$ – это смешанная дробь. Смешанная дробь имеет две части:

4 – это целая часть, $\frac{3}{5}$ – это дробная часть.

Мы можем записать неправильные дроби как смешанные дроби:

$$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}; \quad \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}; \quad \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}; \quad \frac{46}{7} = 6\frac{4}{7}.$$

Читаем смешанные дроби так:

$1\frac{1}{2}$ – одна целая и одна вторая;

$1\frac{1}{4}$ – одна целая и одна четвертая;

$1\frac{1}{5}$ – одна целая и одна пятая;

$3\frac{3}{4}$ – три целых и три четвертых;

$6\frac{4}{7}$ – шесть целых и четыре седьмых;

$10\frac{2}{3}$ – десять целых и две третьих;

$11\frac{4}{9}$ – одиннадцать целых и четыре девятых;

$27\frac{5}{12}$ – двадцать семь целых и пять двенадцатых.

Смешанную дробь $7\frac{3}{4}$ можно записать так:

$$7\frac{3}{4} = \frac{7\cdot 4 + 3}{4} = \frac{31}{4}.$$

$\frac{31}{4}$ – это неправильная дробь.

Мы можем записать смешанные дроби как неправильные дроби. Например:

$$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}; \quad 5\frac{17}{21} = \frac{122}{21}; \quad 10\frac{3}{4} = \frac{43}{4}; \quad 31\frac{4}{5} = \frac{159}{5}.$$

4.3. Основное свойство дроби

Возьмем дробь $\frac{1}{2}$. Умножим ее числитель и знаменатель на 3:

$$\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 3} = \frac{3}{6}.$$

Дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{6}$ равны (величина дроби не изменилась).

Возьмем дробь $\frac{10}{15}$. Разделим ее числитель и знаменатель на 5:

$$\frac{10}{15} = \frac{10:5}{15:5} = \frac{2}{3}.$$

Дроби $\frac{10}{15}$ и $\frac{2}{3}$ равны (величина дроби не изменилась).

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot m}{b\cdot m} = \frac{a:n}{b:n}, \text{ если } \quad m \neq 0, \quad n \neq 0.$$

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одинаковые числа (если эти числа не равны нулю).

4.4. Сокращение дробей

Возьмем дробь $\frac{15}{35}$. Здесь числитель и знаменатель имеют общий делитель 5. Разделим числитель и знаменатель дроби на 5 (смотри основное свойство дроби):

$$\frac{15}{35} = \frac{15:5}{35:5} = \frac{3}{7}.$$

Разделить числитель и знаменатель дроби на их общий делитель – значит сократить дробь.

Мы сократили дробь $\frac{15}{35}$ на 5.

Число 5 – это НОД(15; 35). Мы получили дробь $\frac{3}{7}$. Эту дробь сократить нельзя, потому что числа 3 и 7 взаимно простые: НОД(3; 7) = (НОД равен единице); $\frac{3}{7}$ – это несократимая дробь.

Дробь $\frac{a}{b}$ можно сократить, если НОД(a, b) > 1.

Например, дробь $\frac{12}{18}$ можно сократить на 2, на 3, на 6.

$$\frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9}; \quad \frac{12}{18} = \frac{12:3}{18:3} = \frac{4}{6}; \quad \frac{12}{18} = \frac{12:6}{18:6} = \frac{2}{3}.$$

Дроби $\frac{6}{9}$ и $\frac{4}{6}$ тоже можно сократить:

$$\frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}; \quad \frac{4}{6} = \frac{4:2}{6:2} = \frac{2}{3}.$$

Дроби $\frac{12}{18}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{4}{6}$ и $\frac{2}{3}$ равны.

Сократим дроби:

$$\frac{14}{28}=\frac{1}{2}; \quad \frac{25}{40}=\frac{5}{8}; \quad \frac{72}{120}=\frac{3}{5}; \quad \frac{39}{91}=\frac{3}{7}.$$

Дроби $\frac{4}{7}$; $\frac{13}{15}$; $\frac{8}{25}$ сократить нельзя.

4.5. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю

Возьмем дроби $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{18}$. Эти дроби имеют разные знаменатели 12 и 18 ($12 \neq 18$).

Найдем наименьшее общее кратное чисел 12 и 18:

$$\text{НОК}(12; 18) = 36.$$

Разделим 36 на 12 и на 18:

$$36 : 12 = 3; 36 : 18 = 2.$$

Числа 3 и 2 – это дополнительные множители дробей $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{18}$.

Умножим числители и знаменатели дробей $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{18}$ на их дополнительные множители.

$$\frac{1}{12} = \frac{1\cdot 3}{12\cdot 3}=\frac{3}{36}; \quad \frac{1}{18} = \frac{1\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{2}{36}.$$

Дроби $\frac{3}{36}$ и $\frac{2}{36}$ имеют одинаковый знаменатель 36. Число 36 – это наименьший общий знаменатель (НОЗ) дробей $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{18}$.

Мы привели дроби $\frac{1}{12}$ и $\frac{1}{18}$ к наименьшему общему знаменателю и получили дроби $\frac{3}{36}$ и $\frac{2}{36}$.

Приведем дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$ к наименьшему общему знаменателю:

1) Найдем наименьший общий знаменатель:

$$\text{НОЗ} = \text{НОК}(6; 8) = 24.$$

2) Найдем дополнительные множители:

$$24 : 6 = 4; \quad 24 : 8 = 3.$$

3) Умножим числители и знаменатели дробей на их дополнительные множители:

$$\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{20}{24}; \quad \frac{3}{8}=\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{9}{24}.$$

Мы получим дроби $\frac{20}{24}$ и $\frac{9}{24}$, т.е. мы привели дроби $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$ к наименьшему общему знаменателю.

4.6. Сравнение дробей

Рассмотрим три случая:

1) Знаменатели дробей одинаковые.

Сравним дроби $\frac{6}{7}$ и $\frac{3}{7}$. Здесь знаменатели одинаковые, а числитель 6 больше, чем числитель 3 ($6 > 3$). Следовательно, $\frac{6}{7} > \frac{3}{7}$ (рис. 2).

Если знаменатели одинаковые, то больше та дробь, которая имеет больший числитель.

Примеры:

$$\frac{4}{5}>\frac{3}{5}; \quad \frac{17}{42}<\frac{31}{42}; \quad \frac{1}{2}<\frac{5}{2}; \quad \frac{8}{9}>\frac{7}{9}.$$

2) Числители дробей одинаковые.

Сравним дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{2}{5}$. Здесь числители одинаковые, а знаменатель 3 меньше, чем знаменатель 5. Значит, $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ (рис. 3).

Если числители дробей одинаковые, то больше та дробь, которая имеет меньший знаменатель.

Примеры:

$$\frac{3}{2} > \frac{3}{5}; \quad \frac{7}{15}<\frac{7}{10}; \quad \frac{43}{50}>\frac{43}{100}; \quad \frac{17}{45}<\frac{17}{44}.$$

3) Числители и знаменатели дробей неодинаковые.

Сравним дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$. Сначала приведем дроби к наименьшему общему знаменателю: $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$. Потом сравним дроби $\frac{9}{12}$ и $\frac{10}{12}$. $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$. Следовательно, $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

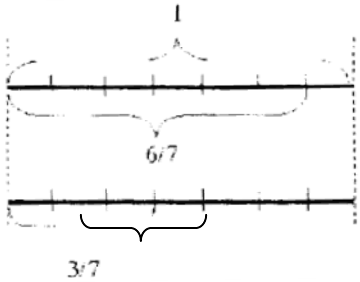

Рис. 2

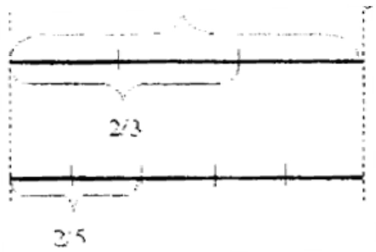

Рис. 3

Если числители и знаменатели дробей неодинаковые, то сначала нужно привести дроби к наименьшему общему знаменателю, а потом сравнить их.

Например, сравним дроби $\frac{7}{10}$ и $\frac{8}{15}$.

$\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$; $\frac{8}{15} = \frac{16}{30}$. $\frac{21}{30} > \frac{16}{30}$. Следовательно, $\frac{7}{10} > \frac{8}{15}$.

4.7. Сложение и вычитание обыкновенных дробей

Рассмотрим два случая:

1) Знаменатели дробей одинаковые.

а) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$;

б) $\frac{18}{41}-\frac{5}{41}=\frac{18-5}{41}=\frac{13}{41}$.

Если знаменатели дробей одинаковые, то нужно сложить (вычесть) числители дробей и написать общий знаменатель.

2) Знаменатели дробей разные.

а) $\frac{1}{12}+\frac{1}{18}$.

Сначала приведем дроби к наименьшему общему знаменателю:

$$\text{НОЗ} = 36;\ \ 36 : 12 = 3;\ \ 36 : 18 = 2;$$

$$\frac{1}{12}=\frac{3}{36};\ \ \frac{1}{18}=\frac{2}{36},$$

потом выполним сложение:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{3}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{36}.$$

б) $\frac{7}{15}-\frac{3}{10}=\frac{14-9}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

Если знаменатели дробей разные, то сначала нужно привести дроби к наименьшему общему знаменателю, а потом сделать сложение (вычитание).

4.8. Сложение и вычитание смешанных дробей

Рассмотрим примеры:

1) $7\frac{1}{4}+12\frac{3}{8}=19\frac{2+3}{8}=19\frac{5}{8}$.

2) $124\frac{5}{6}-7\frac{3}{5}=117\frac{25-18}{30}=117\frac{7}{30}$.

Смешанные дроби можно сложить (вычесть) так: сначала сложить (вычесть) целые части, а потом сложить (вычесть) дробные части.

3) $3+1\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$.

4) $5-\dfrac{2}{3}=4\dfrac{3}{3}-\dfrac{2}{3}=4\dfrac{3-2}{3}=4\dfrac{1}{3}$.

5) $3\dfrac{7}{8}+12\dfrac{5}{6}=15\dfrac{21+20}{24}=15\dfrac{41}{24}=16\dfrac{17}{24}$.

6) $35\dfrac{5}{21}-12\dfrac{9}{14}=23\dfrac{10-27}{42}=22\dfrac{42+10-27}{42}=22\dfrac{25}{42}$.

4.9. Умножение обыкновенных дробей

Рассмотрим примеры:

1) $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{1\cdot4}{3\cdot7}=\dfrac{4}{21}$.

2) $\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{15}{22}=\dfrac{2\cdot15}{5\cdot22}=\dfrac{1\cdot3}{1\cdot11}=\dfrac{3}{11}$.

Умножаем обыкновенные дроби так: числитель умножаем на числитель, знаменатель умножаем на знаменатель, второе произведение – как знаменатель:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

4.10. Умножение смешанных дробей

Найдем произведение

$$3\frac{3}{5}\cdot4\frac{1}{6}.$$

Сначала запишем дроби как неправильные дроби: $3\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$; $4\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{6}$, потом умножим эти дроби: $3\dfrac{3}{5}\cdot4\dfrac{1}{6}=\dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{25}{6}=\dfrac{18\cdot25}{5\cdot6}=$

$=\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{5}{1}=\dfrac{15}{1}=15$.

Умножение смешанных дробей делаем так: сначала записываем смешанные дроби как неправильные дроби, а потом умножаем эти дроби.

Примеры:

1) $4\dfrac{3}{7}\cdot2\dfrac{1}{5}=\dfrac{30}{7}\cdot\dfrac{11}{5}=\dfrac{30\cdot11}{7\cdot5}=\dfrac{6:11}{7:1}=\dfrac{66}{7}=9\dfrac{3}{7}$.

2) $3\dfrac{3}{8}\cdot5=\dfrac{27}{8}\cdot\dfrac{5}{1}=\dfrac{27\cdot5}{8}=\dfrac{135}{8}=16\dfrac{7}{6}$.

(Здесь множитель 5 мы записали как дробь $\dfrac{5}{1}$).

4.11. Деление дробей

Рассмотрим примеры:

1) $\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{3\cdot5}{4\cdot2}=\dfrac{15}{8}=1\dfrac{7}{8}$.

2) $\dfrac{23}{18}\cdot\dfrac{69}{36}=\dfrac{23\cdot36}{18\cdot69}=\dfrac{1\cdot2}{1\cdot3}=\dfrac{2}{3}$.

Делим обыкновенные дроби так: числитель первой дроби умножаем на знаменатель второй дроби, и знаменатель первой дроби умножаем на числитель второй дроби. Первое произведение записываем как числитель дроби, а второе произведение – как знаменатель дроби.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}.$$

4.12. Деление смешанных дробей

Найдем частное $1\dfrac{7}{10}:2\dfrac{4}{15}$.

Сначала запишем смешанные дроби как неправильные дроби:

$$1\frac{7}{10}:2\frac{4}{15}=\frac{17}{10}:\frac{34}{15}=\frac{17\cdot15}{10\cdot34}=\frac{3}{4}.$$

Деление смешанных дробей делаем так: сначала записываем смешанные дроби как неправильные дроби, а потом выполняем деление.

Примеры:

1) $3\frac{1}{5}:4\frac{1}{10}=\frac{16}{5}:\frac{41}{10}=\frac{16\cdot 10}{5\cdot 41}=\frac{16\cdot 2}{1\cdot 41}=\frac{32}{41}$.

2) $5:3\frac{3}{4}=\frac{5}{1}:\frac{15}{4}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 15}=\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$.

3) $7\frac{3}{5}:19=\frac{38}{5}:\frac{19}{1}=\frac{38\cdot 1}{5\cdot 19}=\frac{2\cdot 1}{5\cdot 1}=\frac{2}{5}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Прочитайте дроби*:**

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{21}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$; $\frac{11}{2}$; $\frac{20}{2}$; $\frac{41}{2}$; $\frac{49}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{31}{3}$; $\frac{3}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{11}{3}$; $\frac{17}{3}$; $\frac{35}{3}$; $\frac{41}{3}$; $\frac{47}{3}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{1}{21}$; $\frac{8}{21}$; $\frac{12}{35}$; $\frac{19}{107}$; $\frac{27}{100}$.

2. ***Прочитайте и запишите дроби цифрами*:**
одна третья; одна седьмая; одна двадцать вторая; три пятых; семь восьмых; двенадцать пятнадцатых; сорок пять двадцатых; сорок двадцать первых; семь тридцать вторых; семь тринадцатых; двенадцать девятнадцатых.

3. ***Запишите неправильные дроби как смешанные дроби*:**

$$\frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{19}{3};\ \frac{45}{72};\ \frac{28}{13};\ \frac{45}{8};\ \frac{14}{5};\ \frac{125}{19}.$$

4. ***Запишите смешанные дроби как неправильные дроби*:**

$$1\frac{2}{3};\ 1\frac{7}{8};\ 2\frac{4}{9};\ 10\frac{1}{11};\ 7\frac{8}{15};\ 4\frac{3}{20};\ 25\frac{1}{3};\ 142\frac{7}{10}.$$

5. ***Прочитайте смешанные дроби*:**

$1\frac{1}{5}$; $1\frac{3}{7}$; $2\frac{1}{2}$; $3\frac{4}{5}$; $9\frac{3}{8}$; $36\frac{2}{3}$; $21\frac{3}{4}$; $44\frac{10}{12}$.

6. ***Прочитайте и запишите смешанные дроби цифрами*:**
одна целая одна четвертая; пять целых две третьих; две целых одна двадцать пятая; десять целых шесть одиннадцатых; тридцать одна целая одна вторая.

7. ***Сократите дроби*:**

$\frac{14}{48}$; $\frac{26}{42}$; $\frac{24}{36}$; $\frac{35}{84}$; $\frac{34}{51}$; $\frac{121}{220}$; $\frac{336}{630}$; $\frac{840}{960}$; $\frac{75}{90}$; $\frac{43}{53}$; $\frac{120}{24}$.

8. ***Сравните дроби*:**

а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$; $\frac{26}{7}$ и $\frac{20}{7}$; $\frac{2}{127}$ и $\frac{5}{127}$; $\frac{19}{48}$ и $\frac{5}{48}$;

б) $\frac{5}{9}$ и $\frac{5}{10}$; $\frac{3}{41}$ и $\frac{3}{42}$; $\frac{25}{19}$ и $\frac{25}{21}$; $\frac{43}{137}$ и $\frac{43}{150}$;

в) $\frac{5}{9}$ и $\frac{8}{15}$; $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{6}$; $\frac{5}{7}$ и $\frac{15}{21}$; $\frac{7}{20}$ и $\frac{11}{15}$.

9. ***Вычислите*:**

1) $\frac{7}{30}+\frac{29}{30}$;

2) $14\frac{11}{12}+3\frac{5}{12}$;

3) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$;

4) $3\frac{1}{8}+1\frac{5}{12}$;

5) $3\frac{17}{24}+2\frac{8}{15}+1\frac{7}{8}$;

6) $\frac{15}{17}-\frac{13}{17}$;

7) $4\frac{1}{2}-2$;

8) $5-3\frac{2}{3}$;

9) $\frac{35}{36}-\frac{5}{8}$;

10) $17\frac{1}{55}-12\frac{13}{33}$.

10. *Вычислите*:

1) $6\cdot\frac{4}{7}$; 2) $\frac{2}{3}\cdot 5$;

3) $\frac{17}{27}\cdot 18$; 4) $\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{14}$;

5) $5\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{20}$; 6) $3\frac{5}{9}\cdot 4\frac{7}{8}$;

7) $2\frac{2}{5}\cdot 9\frac{1}{6}$; 8) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{15}$;

9) $2\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{2}\cdot 3\frac{3}{4}\cdot 4\frac{1}{5}$; 10) $1\frac{11}{24}+1\frac{13}{36}\cdot 9$.

11. *Вычислите*:

1) $\frac{7}{8}:\frac{3}{4}$; 2) $\frac{15}{16}:\frac{5}{8}$;

3) $\frac{3}{4}:2$; 4) $1\frac{1}{2}:3$;

5) $16:\frac{6}{7}$; 6) $25:\frac{10}{11}$;

7) $120:1\frac{4}{5}$; 8) $1:\frac{8}{9}$;

9) $\dfrac{8\frac{1}{2}}{15:\frac{5}{17}}$; 10) $\dfrac{4\frac{1}{2}\cdot 5\frac{2}{3}}{6\frac{3}{4}}$.

12. *Вычислите*:

1) $10\cdot 5\frac{7}{10}-3\frac{3}{4}$. (Ответ: $53\frac{1}{4}$)

2) $\left(3\frac{4}{15}+4\frac{5}{6}\right)\cdot\left(3\frac{17}{18}-2\frac{7}{9}\right)$. (Ответ: $9\frac{9}{20}$)

3) $\left(8\frac{7}{15}-6\frac{13}{60}\right)\cdot\left(11\frac{3}{4}-9\frac{7}{8}\right)$. (Ответ: $4\frac{7}{32}$)

4) $\left[\left(3\frac{2}{5}+1\frac{7}{10}\right)\cdot 1\frac{3}{17}-\left(2\frac{7}{23}-1\frac{45}{46}\right)\cdot\frac{69}{80}\right]\cdot\frac{4}{9}$. (Ответ: $2\frac{13}{24}$)

5) $2\frac{1}{2}\cdot 48-3\frac{2}{3}:\frac{1}{18}+5\frac{5}{12}:\frac{7}{36}$. (Ответ: $81\frac{6}{7}$)

6) $\left(1\frac{8}{13}\cdot\frac{13}{42}+5\frac{5}{7}:\frac{8}{21}\right):\left(8\frac{1}{8}+3\frac{1}{2}\right)$. (Ответ: $1\frac{1}{3}$)

7) $1\frac{9}{40}\cdot\left[7\frac{5}{7}:3\frac{3}{5}-\left(\frac{53}{56}-\frac{29}{35}\right):\frac{33}{40}\right]$. (Ответ: $2\frac{9}{20}$)

8) $\frac{2}{5}+2\frac{4}{9}:\left[\left(7\frac{5}{12}-5\frac{3}{4}\right):22\frac{1}{2}+10\frac{5}{8}\right]-\frac{4}{5}$. (Ответ: $\frac{16}{35}$)

13. *Прочитайте тексты, ответьте на вопросы.*

ТЕКСТ 1

Число $\frac{2}{3}$ (две третьих) – это обыкновенная дробь.

2 – это числитель, а 3 – это знаменатель. $\frac{2}{3}$ – это правильная дробь, потому что числитель 2 меньше, чем знаменатель 3. Число $\frac{5}{4}$ (пять четвертых) – это тоже обыкновенная дробь. Здесь 5 – числитель, а 4 – знаменатель. $\frac{5}{4}$ – это неправильная дробь, потому что числитель 5 больше, чем знаменатель 4.

Неправильную дробь $\frac{5}{4}$ можно записать как смешанную дробь $1\frac{1}{4}$.

$2\frac{1}{2}$ – это смешанная дробь. Смешанную дробь $2\frac{1}{2}$ можно записать как неправильную дробь $\frac{5}{2}$.

Вопросы:

1) Число 2 – это числитель или знаменатель дроби $\frac{2}{3}$?

2) Число 3 – это числитель или знаменатель дроби $\frac{2}{3}$?

3) $\frac{2}{3}$ – это правильная или неправильная дробь? Почему?

4) $\frac{5}{4}$ – это правильная или неправильная дробь? Почему?

5) Как можно записать неправильную дробь $\frac{5}{4}$?

6) Как можно записать смешанную дробь $2\frac{1}{2}$?

ТЕКСТ 2

Возьмем дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$. Приведем их к наименьшему общему знаменателю.

Сначала найдем наименьший общий знаменатель. НОЗ = 12. Потом найдем дополнительные множители. Разделим НОЗ на знаменатели дробей: 12 : 4 = 3; 12 : 6 = 2.

Число 3 – это дополнительный множитель дроби $\frac{3}{4}$. Число 2 – это дополнительный множитель дроби $\frac{5}{6}$.

Умножим числитель и знаменатель каждой дроби на ее дополнительный множитель: $\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 3}{4\cdot 3} = \frac{9}{12}$; $\frac{5}{6} = \frac{5\cdot 2}{6\cdot 2} = \frac{10}{12}$.

Мы получили дроби $\frac{9}{12}$ и $\frac{10}{12}$. Их знаменатели равны. Следовательно, мы привели дроби к наименьшему общему знаменателю.

Вопросы:

1) Какой наименьший общий знаменатель имеют дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$?

2) Какой дополнительный множитель имеет дробь $\frac{3}{4}$?

3) Какой дополнительный множитель имеет дробь $\frac{5}{6}$?

4) Какие дроби мы получили? Какие у них знаменатели? Что это значит?

5) Что мы должны сделать, если хотим привести дроби к наименьшему общему знаменателю.

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Величина Величина дроби
Дробь (жен. род)
Дробный, -ая, -ое, -ые
Дополнительный множитель
Знаменатель (муж. род)
Изменяться – измениться
Наименьший общий знаменатель (НОЗ)
Нельзя
Правильная дробь
Неправильная дробь
Несократимая дробь
Обыкновенная дробь
Одинаковый, -ая, -ое, -ые
Показывать – показать (что?)
Приведение дробей к НОЗ
Приводить – привести
Равный, -ая -ое, -ые
Разный; -ая, -ое
Рассматривать – рассмотреть
Свойство (мн. число свойства)
Случай (муж. род)

Смешанная дробь
Сокращать – сократить (что?)
Сокращение
Числитель (муж. род)

Занятие 5

ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Дроби $\frac{1}{10}$; $\frac{3}{100}$; $\frac{29}{1000}$; $\frac{57}{10\,000}$ можно записать так:

$$\frac{1}{10} = 0{,}1; \quad \frac{3}{100} = 0{,}3; \quad \frac{29}{1000} = 0{,}029; \quad \frac{57}{10\,000} = 0{,}0057.$$

Числа 0,1; 0,03; 0;029; 0,0057 – это десятичные дроби. Мы читаем десятичные дроби так:
0,1 – ноль целых одна десятая;
0,03 – ноль целых три сотых;
0,029 – ноль целых двадцать девять тысячных;
0,0057 – ноль целых пятьдесят семь десятитысячных.
Десятичная дробь имеет две части: целую и дробную.
Рассмотрим дробь 12,154.

Число 12 – это целая часть, число 0,154 – это дробная часть. Целая часть и дробная часть числа 12,154 разделяются запятой (,).

Дробная часть имеет три знака (три цифры) – 1, 5, 4. Это значит, что десятичная дробь 12,154 имеет знаменатель 1000:

$$12{,}154 = 12\frac{154}{1000} = \frac{12\,154}{1000}.$$

5.1. Свойства десятичной дроби

1) 0,7 = 0,70 = 0,700 = 0,7000 = ... , потому что

$$\frac{7}{10} = \frac{70}{100} = \frac{700}{1000} = \frac{7000}{10\,000} = \ldots .$$

Величина десятичной дроби не изменится, если написать нули справа.
2) 0,7 = 00,7 = 000,7 = 0000,7 = ... , потому что

$$0{,}7 = \frac{7}{10}; \quad 00{,}7 = \frac{7}{10}; \quad 000{,}7 = \frac{7}{10}; \; 0000{,}7 = \frac{7}{10}.$$

Величина десятичной дроби не изменится, если написать нули слева.

5.2. Сложение и вычитание десятичных дробей

Рассмотрим примеры.
1) Сложим дроби 0,7 и 0,2. Они имеют одинаковые знаменатели 10.

$$0{,}7 + 0{,}2 = \frac{7}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7+2}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$$

или 0,7 + 0,2 = 0,9.

2) Сложим дроби 0,3 и 0,12. Они имеют разные знаменатели 10 и 100. Приведем эти дроби к наименьшему общему знаменателю. Это можно сделать так: дробь 0,3 записать как 0,30. Получим дробь 0,30 и 0,12. Они имеют одинаковое число знаков в дробной части (после запятой). Следовательно, мы уравняли число знаков после запятой.

Сложим эти дроби:

$$0{,}3 + 0{,}12 = 0{,}30 + 0{,}12 = 0{,}42.$$

3) Сложим дроби 0,2; 0,05 и 0,023.
Сначала нужно уровнять число знаков после запятой, а потом сложить дроби:

$$0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}023 = 0{,}200 + 0{,}050 + 0{,}023 = 0{,}273.$$

4) Выполним вычитание дробей: 3,2 – 1,57.

$$3{,}2 - 1{,}57 = 3{,}20 - 1{,}57 = 1{,}63.$$

5.3. Умножение десятичной дроби на 10, на 100, на 1000 и так далее

Рассмотрим примеры:

1) $0{,}357 \cdot 10 = \frac{357}{1000} \cdot 10 = \frac{357 \cdot 10}{1000} = \frac{357}{100} = 3\frac{57}{100} = 3{,}57.$

или $0{,}357 \cdot 10 = 3{,}57$.

Здесь множитель 10 имеет один нуль. Мы перенесли запятую вправо на один знак.

2) $0{,}357 \cdot 100 = \frac{357}{1000} \cdot 100 = \frac{357 \cdot 100}{1000} = \frac{357}{10} = 35\frac{7}{10} = 35{,}7$

или $0{,}357 \cdot 100 = 35{,}7$.

Здесь множитель 100 имеет два нуля. Мы перенесли запятую вправо на два знака.

П р а в и л о 1. Чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и так далее, нужно перенести запятую вправо на столько знаков, сколько нулей имеет множитель.

5.4. Деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и так далее

Рассмотрим примеры:

1) $27{,}6 : 10 = \frac{276}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{276}{100} = 2{,}76$ или $27{,}6 : 10 = 2{,}76$;

2) $27{,}6 : 100 = \frac{276}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{276}{1000} = 0{,}276$

или $27{,}6 : 100 = 027{,}6 : 100 = 0{,}276$;

3) $27{,}6 : 1000 = \frac{276}{10} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{276}{10\,000} = 0{,}0276$

или $27{,}6 : 1000 = 0027{,}6 : 1000 = 0{,}0276$.

П р а в и л о 2. Чтобы разделить десятичную дробь на 10, 100, 1000 и так далее, нужно перенести запятую влево на столько знаков, сколько нулей имеет делитель.

5.5. Умножение десятичных дробей

Рассмотрим примеры:

1) $0{,}5 \cdot 7 = \frac{5}{10} \cdot 7 = \frac{5 \cdot 7}{10} = \frac{35}{10} = 3{,}5$;

2) $0{,}7 \cdot 0{,}8 = \frac{7}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{7 \cdot 8}{10 \cdot 10} = \frac{56}{100} = 0{,}56$;

3) $0{,}4 \cdot 0{,}13 = \frac{4}{10} \cdot \frac{13}{100} = \frac{4 \cdot 13}{10 \cdot 100} = \frac{52}{1000} = 0{,}052.$

Мы видим, что произведение имеет столько знаков в дробной части (после запятой), сколько их имеют множители вместе.

Например, найдем произведение $0{,}12 \cdot 0{,}4$.

Первый множитель 0,12 имеет два знака после запятой, а второй множитель 0,4 имеет один знак после запятой. Поэтому произведение имеет три знака после запятой: $0{,}12 \cdot 0{,}4 = 0{,}048$.

5.6. Деление десятичных дробей

а) Деление десятичной дроби на целое число.

Рассмотрим примеры:

1) $17{,}52 : 3 = \frac{1752}{100} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1752}{100 \cdot 3} = \frac{584}{100} = 5{,}84$;

2) $0{,}34 : 5 = \frac{34}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{34}{100 \cdot 5} = \frac{34}{500} = \frac{68}{1000} = 0{,}068.$

Десятичную дробь можно разделить на целое число так: сначала нужно разделить целую часть и написать запятую, потом разделить дробную часть.

б) Деление десятичной дроби на десятичную дробь:

1) $0{,}36 : 0{,}4 = \frac{0{,}36}{0{,}4} = \frac{0{,}36 \cdot 10}{0{,}4 \cdot 10} = \frac{3{,}6}{4} = 0{,}9.$

Здесь мы умножили делимое и делитель на 10 и получили делитель 4 – целое число. Потом выполнили деление: 3,6 :

4 = 0,9.

2) $0{,}125 : 0{,}05 = \dfrac{0{,}125}{0{,}05} = \dfrac{0{,}125 \cdot 100}{0{,}05 \cdot 100} = \dfrac{12{,}5}{5} = 2{,}5.$

Здесь мы умножили делимое и делитель на 100 и получили делитель 5 – целое число. Потом выполнили деление: 1,25 · 5 = 0,25.

3) $0{,}72 : 0{,}008 = \dfrac{0{,}72}{0{,}008} = \dfrac{0{,}72 \cdot 1000}{0{,}008 \cdot 1000} = \dfrac{720}{8} = 90.$

Здесь мы умножили делимое и делитель на 1000 и получили делитель 8 – целое число. Потом выполнили деление:

$$720 : 8 = 90.$$

Если делитель – десятичная дробь, то сначала нужно умножить делимое и делитель на число 10 или 100, или 1000 и так далее и получить целый делитель, а потом выполнить деление.

5.7. Обращение десятичной дроби в обыкновенную дробь

Рассмотрим примеры:

1) $0{,}4 = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5};$ 2) $0{,}75 = \dfrac{75}{100} = \dfrac{3}{4};$

3) $4{,}23 = 4\dfrac{23}{100};$ 4) $17{,}025 = 17\dfrac{25}{1000} = 17\dfrac{1}{40}.$

Десятичную дробь можно обратить в обыкновенную дробь так: записать десятичную дробь как обыкновенную и сократить ее, если это возможно.

5.8. Обращение обыкновенной дроби в десятичную дробь

Возьмем дробь $\dfrac{3}{5}$ и разделим ее числитель на знаменатель:

$\dfrac{3}{5} = 3 : 5 = 0{,}6.$

Мы обратили обыкновенную дробь $\dfrac{3}{5}$ в десятичную дробь 0,6.

Обыкновенную дробь можно обратить в десятичную дробь так: числитель дроби нужно разделить на ее знаменатель.
Рассмотрим примеры:

1) $\dfrac{7}{8} = 7 : 8 = 0{,}875.$

2) $\dfrac{13}{20} = 13 : 20 = 0{,}65.$

Здесь мы получили конечные десятичные дроби 0,875 и 0,65.

3) $\dfrac{5}{33} = 5 : 33 = 0{,}151515...$

4) $\dfrac{7}{12} = 7 : 12 = 0{,}58333...$

Мы получили бесконечные периодические десятичные дроби. Их можно записать так: 0,151515… = 0,(15); 0,58333... = 0,58(3).

Следовательно, обыкновенную дробь можно обратить в конечную десятичную дробь или в бесконечную периодическую десятичную дробь. Определим, когда получается конечная десятичная дробь, а когда – бесконечная периодическая дробь.

Рассмотрим знаменатели дробей $\dfrac{7}{8}$ и $\dfrac{13}{20}$:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2;\ 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Мы видим, что их разложение на простые множители содержит только множители 2 и 5.

$$\frac{7}{8} = 0{,}875;\ \frac{13}{20} = 0{,}65 \text{ (смотри примеры 1 и 2).}$$

Следовательно, если разложение знаменателя обыкновенной дроби на простые множители содержит только множители 2 и 5, то обыкновенную дробь можно записать как конечную десятичную дробь.

Рассмотрим знаменатели дробей $\frac{5}{33}$ и $\frac{7}{12}$:

$$33 = 3 \cdot 11;\ 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$$

Мы видим, что их разложение на простые множители содержит множители 3 и 11, которые не равны 2 и 5.

$\frac{5}{33} = 0{,}151515... = 0{,}(15)$; $\frac{7}{12} = 0{,}58333... = 0{,}58(3)$ (смотри примеры 3 и 4).

Следовательно, если разложение знаменателя обыкновенной дроби на простые множители имеет множители, которые не равны 2 или 5, то обыкновенную дробь можно записать как бесконечную периодическую десятичную дробь.

5.9. Обыкновенные и десятичные дроби и действия с ними

Рассмотрим, как можно вычислить выражения, которые содержат обыкновенные и десятичные дроби.

Пример 1. Вычислим сумму $\frac{3}{8} + 0{,}012$.

Здесь обыкновенную дробь $\frac{3}{8}$ можно записать как конечную десятичную дробь, потому что разложение ее знаменателя на множители $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ имеет только множители 2. Запишем дробь $\frac{3}{8}$ как десятичную дробь 0,375 и сложим две десятичные дроби.

$$\frac{3}{8} + 0{,}012 = 0{,}375 + 0{,}012 = 0{,}387.$$

Пример 2. Вычислим произведение $\frac{7}{15} \cdot 0{,}3$.

Обыкновенную дробь $\frac{7}{15}$ нельзя записать как конечную десятичную дробь, потому что разложение ее знаменателя на множители $15 = 3 \cdot 5$ содержит множитель 3. Эту дробь можно записать только как бесконечную периодическую десятичную дробь. Поэтому запишем десятичную дробь 0,3 как обыкновенную дробь $\frac{3}{10}$ и умножим две обыкновенные дроби:

$$\frac{7}{15} \cdot 0{,}3 = \frac{7}{15} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{150} = \frac{7}{50} = 0{,}14.$$

Пример 3. Вычислим выражение $\frac{5}{12} : \left(\frac{3}{5} - 0{,}35\right)$.

Сначала делаем вычитание:

$$\frac{3}{5} - 0{,}35 = 0{,}6 - 0{,}35 = 0{,}60 - 0{,}35 = 0{,}25;$$

потом делаем деление:

$$\frac{5}{12} : 0{,}25 = \frac{5}{12} : \frac{25}{100} = \frac{5}{12} : \frac{1}{4} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 1} = 1\frac{2}{3}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Прочитайте десятичные дроби*:**

0,5; 0,43; 0,019; 1,3; 2,75; 6,042; 0,0048; 0,5497; 0,01735.

2. ***Напишите десятичные дроби цифрами*:**

Одна целая девять сотых
Ноль целых семь десятых
Ноль целых тринадцать сотых
Ноль целых сто пятьдесят четыре тысячных
Три целых сорок семь тысячных

3. ***Вычислите*:**

1) 5,2 + 3,5; 2) 0,12 + 1,7;
3) 4,037 + 1,71; 4) 2,15 + 1,394;
5) 1,3 – 0,7; 6) 5,9 – 3,42;
7) 0,834 – 2,756; 8) 3,21 – 2,756.

4. ***Вычислите*:**

1) $3{,}12 \cdot 10$; 2) $0{,}7 \cdot 10$:

3) $0{,}154 \cdot 100$; 4) $2{,}3 \cdot 100$;
5) $0{,}0173 \cdot 1000$: 6) $0{,}015 \cdot 1000$;
7) $0{,}00254 \cdot 10\,000$; 8) $0{,}4005 \cdot 10\,000$.

5. ***Вычислите*:**

1) $0{,}5 : 10$; 2) $1{,}73 : 10$;
3) $24{,}1 : 100$; 4) $0{,}47 : 100$;
5) $12{,}3 : 1000$; 6) $312{,}71 : 1000$;
7) $0{,}7 : 10\,000$; 8) $15{,}3 : 1000$.

6. ***Вычислите*:**

1) $0{,}3 \cdot 0.3$; 2) $1{,}5 \cdot 0.4$;
3) $2{,}3 \cdot 0{,}02$; 4) $7{,}25 \cdot 0{,}06$;
5) $12 \cdot 0{,}3$; 6) $0{,}54 \cdot 1{,}2$;
7) $0{,}013 \cdot 1{,}5$; 8) $3{,}72 \cdot 0{,}01$.

7. ***Вычислите*:**

1) $0{,}24 : 6$; 2) $0{,}754 : 3$;
3) $12{,}5 : 5$; 4) $432{,}24 : 12$;
5) $0{,}12 : 0{,}2$; 6) $0{,}56 : 0{,}07$;
7) $1{,}69 : 1{,}3$, 8) $3{,}6 : 0{,}08$;
9) $1{,}7 : 0{,}11$; 10) $3{,}5 : 0{,}01$;
11) $47{,}04 : 0{,}0084$; 12) $0{,}654 : 10{,}9$.

8. ***Запишите обыкновенные дроби как десятичные*:**

$$\frac{1}{4};\ \frac{5}{8};\ 1\frac{1}{2};\ \frac{7}{10};\ 2\frac{3}{16};\ \frac{7}{12};\ \frac{5}{8};\ \frac{5}{18};\ \frac{11}{15};\ \frac{8}{7}.$$

9. ***Выполните действия. Получите точный результат.***

1) $2{,}3 + \frac{1}{4}$; 2) $\frac{7}{12} - 0{,}5$;
3) $0{,}15 \cdot \frac{2}{3}$; 4) $2\frac{1}{2} \cdot 0{,}04$;
5) $2{,}88 \cdot \frac{35}{75}$; 6) $4\frac{1}{8} : 0{,}65$;
7) $6{,}075 : \frac{3}{20}$; 8) $1\frac{1}{4} : 0{,}2$;
9) $\left(3\frac{4}{5} - 3{,}68\right) : 2\frac{1}{2}$; 10) $3{,}06 : 7\frac{1}{2} + 3\frac{2}{5} \cdot 0{,}38$;
11) $3{,}075 : 1{,}5 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{25} + 3{,}26\right)$, (Ответ: $1\frac{9}{40}$);
12) $\left(6{,}72 : \frac{3}{5} + 1\frac{1}{8} \cdot 0{,}8\right) : 1{,}21 - 6\frac{3}{8}$, (Ответ: $3\frac{5}{8}$).

10. ***Прочитайте текст и ответьте на вопросы.***

ТЕКСТ

Найдем произведение $0{,}02 \cdot 5{,}3$.

Множитель 0,02 имеет два знака после запятой, а множитель 5,3 – один знак.

Множители 0,02 и 5,3 вместе имеют три знака после запятой, поэтому произведение должно иметь три знака после запятой. Найдем это произведение $0{,}02 \cdot 5{,}3 = 0{,}106$.

Вопросы:

1) Сколько знаков после запятой имеет множитель 0,02?
2) Сколько знаков после запятой имеет множитель 5,3?
3) Сколько знаков после запятой имеют множители вместе?
4) Сколько знаков после запятой имеет произведение?
5) Почему произведение имеет три знака после запятой?
6) Чему равно произведение?

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Бесконечная периодическая десятичная дробь
Влево, вправо
Десятичная дробь
Запятая
Конечная десятичная дробь
Обращать – обратить (что? во что?)
Переносить – перенести (что? куда?)
Периодический, -ая, -ое, -ие
После (после запятой)
Слева, справа
Следовательно
Точный, -ая, -ое, -ые
Уравнивать – уравнять (что?)

З а н я т и е 6

ОТНОШЕНИЯ. ПРОПОРЦИИ. ПРОЦЕНТЫ

6.1. Отношения

Частное 6 : 3 = 2 – это отношение чисел 6 и 3. Отношение чисел 6 и 3 равно числу 2.

Частное 1 : 5 = $\frac{1}{5}$ – это отношение чисел 1 и 5. Отношение чисел 1 и 5 равно $\frac{1}{5}$.

Отношение чисел a и b – это частное $\frac{a}{b}$.

a – это первый член отношения, b – это второй член отношения. Отношение чисел 1 и 5 не равно отношению чисел 5 и 1; потому что $\frac{1}{5} \neq \frac{5}{1}$.

6.2. Неизвестный член отношения

Рассмотрим примеры:

1) $\frac{x}{2} = 5$. Здесь x – это неизвестный первый член отношения. Найдем x:

$$x = 2 \cdot 5 = 10.$$

Проверим результат: $\frac{10}{2} = 5$. Следовательно, мы нашли неизвестный первый член отношения правильно. О т в е т: $x = 10$.

Если $\frac{x}{b} = c$, то $x = b \cdot c$ $(b \neq 0)$.

2) $\frac{6}{x} = 3$. Здесь x – неизвестный второй член отношения. Найдем x:

$$x = \frac{6}{3} = 2.$$

Проверим результат: $\frac{6}{2} = 3$. Следовательно, мы нашли неизвестный второй член отношения правильно. О т в е т: $x = 2$.

Если $\frac{a}{x} = c$, то $x = \frac{a}{c}$ $(c \neq 0)$.

6.3. Пропорции

Рассмотрим отношения 10 : 2 и 15 : 3. Эти отношения равны:

$$10 : 2 = 15 : 3.$$

Равенство 10 : 2 = 15 : 3 или $\frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ – это пропорция.

Пропорцию $\frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ читаем так: отношение чисел 10 и 2 равно отношению чисел 15 и 3.

Рассмотрим пропорцию:

$$a : b = c : d.$$

Числа a, b, c и d – это члены пропорции.

a и d – это крайние члены пропорции.
b и c – это средние члены пропорции.
Например: 1 : 2 = 4 : 8. Здесь 1 и 8 – это крайние члены, а 2 и 4 – это средние члены.

6.4. Свойства пропорции

Рассмотрим пропорцию 6 : 3 = 10 : 5. Найдем произведение крайних членов: $6 \cdot 5 = 30$. Найдем произведение средних членов: $3 \cdot 10 = 30$. Эти произведения равны: $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10 = 30$.

Произведение крайних членов пропорции и произведение средних членов равны.

$$\text{Если } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } a \cdot d = b \cdot c.$$

6.5. Неизвестный член пропорции

Рассмотрим примеры:

1) $\frac{x}{2} = \frac{6}{3}$. Здесь x – неизвестный крайний член пропорции. Найдем x. По свойству пропорции имеем: $x \cdot 3 = 2 \cdot 6$, поэтому $x = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$. О т в е т: $x = 4$.

$$\text{Если } \frac{x}{a} = \frac{c}{d}, \text{ то } x = \frac{a \cdot c}{d}.$$

2) $\frac{12}{x} = \frac{6}{3}$. Здесь x – неизвестный средний член пропорции.

Найдем x. По свойству пропорции имеем: $12 \cdot 3 = x \cdot 6$, поэтому $x = \frac{12 \cdot 3}{6} = 6$. О т в с т: $x = 6$.

Если $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$, то $x = \frac{a \cdot d}{c}$.

6.6. Перестановка членов пропорции

Рассмотрим пропорцию

$$2 : 6 = 5 : 15. \qquad (1)$$

Возьмем пропорцию (1) и переставим средние члены:

$$2 : 5 = 6 : 15. \qquad (2)$$

Равенство (2) – это тоже пропорция.
Возьмем пропорцию (1) и переставим крайние члены

$$15 : 6 = 5 : 2. \qquad (3)$$

Равенство (3) – это тоже пропорция.
Возьмем пропорцию (1) и переставим члены отношений

$$6 : 2 = 15 : 5. \qquad (4)$$

Равенство (4) – это тоже пропорция.
Возьмем пропорции (1), (2), (3) и (4) и переставим в каждой пропорции левую и правую части:

$$5 : 15 = 2 : 6; \qquad (5)$$
$$6 : 15 = 2 : 5; \qquad (6)$$
$$15 : 6 = 5 : 2; \qquad (7)$$
$$6 : 2 = 15 : 5. \qquad (8)$$

Равенства (5), (6), (7) и (8) – это тоже пропорции.
Если $a : b = c : d$, то $a : c = b : d$;

$$d : b = c : a;$$
$$b : a = d : c;$$
$$c : d = a : b;$$
$$b : d = a : c;$$
$$c : a = d : b;$$
$$d : c = b : a.$$

6.7. Проценты

Возьмем число 200 и разделим его на 100.

$$200 : 100 = 2.$$

Число 2 – это одна сотая часть $\left(\frac{1}{100}\right)$ от числа 200.

Одна сотая часть числа называется процентом от этого числа. Проценты обозначают знаком %. Тогда число 2 – это 1

% от 200.

Задача 1. Найти 12 % от числа 300.

Р е ш е н и е. 300 : 100 = 3. Следовательно, 1 % от числа 300 равен 3. А 12 % от числа 300 равны числу 36, так как 3 · 12 = 36.

Обозначим 12 % от числа 300 буквой *a.* Тогда можно записать:

$$a = \frac{300}{100} \cdot 12 = \frac{300 \cdot 12}{100} = 36.$$

О т в е т: $a = 36$.

Если число *a* составляет *p* % от *m*, то

$$a = \frac{mp}{100}. \qquad (1)$$

По формуле (1) найдем число *a*, если *a* составляет от *m* 50 %, 25 %, 10 %, 17 %:

1) $a = \frac{m \cdot 50}{100} = \frac{m}{2}$;

2) $a = \frac{m \cdot 25}{100} = \frac{m}{4}$;

3) $a = \frac{m \cdot 10}{100} = \frac{m}{10}$;

4) $a = \frac{m \cdot 17}{100} = \frac{17}{100} m$.

Задача 2. Найти число *m*, если 8 % от *m* равны числу 32.

Р е ш е н и е. По условию задачи число 32 составляет 8 % от *m.* Тогда по формуле (1) имеем:

$$32 = \frac{8 \cdot m}{100}.$$

Найдем *m*:

$$32 \cdot 100 = 8 \cdot m \quad \text{или} \quad m = \frac{32 \cdot 100}{8} = 400.$$

О т в е т: $m = 400$.

Если число *a* составляет *p* % от числа *m*, то число *m* можно найти из формулы (1)

$$a = \frac{mp}{100} \Rightarrow .^{1}\, a \cdot 100 = mp \Rightarrow m = \frac{a \cdot 100}{p}.$$

$$m = \frac{a \cdot 100}{p}. \qquad (2)$$

По формуле (2) найдем число *m*, если *a* составляет от *m* 50 %, 25 %, 10 %, 39 %:

1) $m = \frac{a \cdot 100}{50} = 2a$; 2) $m = \frac{a \cdot 100}{25} = 4a$;

3) $m = \frac{a \cdot 100}{10} = 10a$; 4) $m = \frac{a \cdot 100}{39} = \frac{100}{39} a$.

Задача 3. Найти, сколько процентов составляет число 28 от числа 400.

Р е ш е н и е. Обозначим число процентов буквой *p.* По условию задачи число 28 составляет *p* % от 400. Тогда по формуле (1) имеем

$$28 = \frac{p \cdot 400}{100}.$$

Найдем *p.* $28 \cdot 100 = p \cdot 400$ или $p = \frac{28 \cdot 100}{400} = 7$.

О т в е т: $p\,\% = 7\,\%$.

Если число *a* составляет *p* % от числа *m*, то число *p* можно найти из формулы (1)

$$a = \frac{p \cdot m}{100} \Rightarrow a \cdot 100 = p \cdot m \Rightarrow p = \frac{a \cdot 100}{m}.$$

$$p\,\% = \left(\frac{a}{m} \cdot 100\right) \qquad (3)$$

Выражение $\left(\frac{a}{m} \cdot 100\right)\%$ называется процентным отношением чисел *a* и *m.*

По формуле (3) найдем процентные отношения чисел 23 и 46; 15 и 60; 7 и 70; 13 и 65:

[1] Символ ⇒ обозначает: «следовательно».

1) $p = \frac{23}{46} \cdot 100 = 50$; $p\ \% = 50\ \%$.

2) $p = \frac{15}{60} \cdot 100 = 25$; $p\ \% = 25\ \%$.

3) $p = \frac{7}{70} \cdot 100 = 10$; $p\ \% = 10\ \%$.

4) $p = \frac{13}{65} \cdot 100 = 20$; $p\ \% = 20\ \%$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Найдите неизвестный член отношения.***

1) $\frac{x}{3} = 12$; 2) $\frac{x}{37} = 10$;

3) $\frac{x}{1{,}2} = 4{,}7$; 4) $\frac{x}{0{,}02} = 8$;

5) $\frac{x}{2{,}5} = 0{,}5$; 6) $\frac{x}{0{,}001} = 24$;

7) $\frac{24}{x} = 6$; 8) $\frac{120}{x} = 40$;

9) $\frac{2{,}7}{x} = 0{,}3$; 10) $\frac{0{,}46}{x} = 8$;

11) $\frac{1{,}34}{x} = 0{,}01$; 12) $\frac{10{,}5}{x} = 035$.

2. ***Найдите неизвестный член пропорции.***

1) $x : 15 = 8 : 24$; 2) $24 : 3 = 18 : x$;

3) $17 : 5 = x : 15$; 4) $28 : 12 = –7 : x$;

5) $x : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} : \frac{7}{8}$; 6) $5 : x = 3\frac{1}{2} : 4$;

7) $\frac{7}{12} : \frac{3}{5} = x : \frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{2} : \frac{4}{5} = \frac{3}{8} : x$;

9) $0{,}75 : 0{,}2 = 1{,}5 : x$; 10) $x : 0{,}12 = 0{,}3 : 1{,}8$;

11) $3{,}2 : x = 0{,}16 : 0{,}5$; 12) $10{,}2 : 0{,}07 = x : 0{,}021$.

3. ***Найдите*** x**:**

1) $42 : (3 \cdot x) = 14 : 7$;

2) $13\frac{1}{3} : 1\frac{1}{3} = 26 : (0{,}2 \cdot x)$;

3) $6\frac{2}{3} : (1\frac{7}{9} \cdot x) = 0{,}48 : 1{,}2$;

4) $(0{,}7 \cdot x) : 1{,}5 = 0{,}35 : 0{,}3$.

4. ***Запишите пропорцию*****: 9 : 4 = 27 : 12.** ***Переставьте члены пропорции и получите еще*** **7** ***пропорций.***

5. ***Найдите p % от числа m, если***

1) $p = 4$, $m = 72$; 2) $p = 5$, $m = 165$;

3) $p = 10$, $m = 57{,}9$; 4) $p = 1$, $m = 0{,}34$;

5) $p = 25$, $m = 250$; 6) $p = 50$, $m = 534$;

7) $p = 120$, $m = 216$; 8) $p = 300$, $m = 175$;

9) $p = 12{,}5$, $m = 173$; 10) $p = 3\frac{1}{5}$, $m = 165$;

11) $p = 0{,}12$, $m = 3\frac{1}{2}$; 12) $p = 1{,}6$, $m = 92$.

6. ***Найдите число m, если p % от m равны числу a.***

1) $p = 10$, $a = 7$; 2) $p = 25$, $a = 20$;

3) $p = 50$, $a = 16{,}4$;

4) $p = 7{,}8$, $a = 3{,}9$;

5) $p = 12\frac{1}{2}$, $a = 6{,}5$;

6) $p = 5\frac{1}{3}$, $a = 5{,}6$;

7) $p = 18$, $a = 14\frac{2}{5}$;

8) $p = 200$, $a = 86{,}4$.

7. ***Найдите, сколько процентов составляет а от т, если…***

1) $a = 1$, $m = 4$;

2) $a = 2$, $m = 10$;

3) $a = 7$, $m = 14$;

4) $a = 42$, $m = 60$;

5) $a = 18$, $m = 36$;

6) $a = 12$, $m = 12$;

7) $a = 5$, $m = 100$;

8) $a = 22\frac{1}{2}$, $m = 250$.

8. ***Найдите процентное отношение чисел а и т, если***

1) $a = 10$, $m = 40$;

2) $a = 3$, $m = 12$;

3) $a = 75$, $m = 150$;

4) $a = 0{,}7$, $m = 0{,}5$;

5) $a = 0{,}1$, $m = 10$;

6) $a = 0{,}11$, $m = 8{,}8$;

7) $a = 5\frac{1}{5}$, $m = 20$;

8) $a = 14\frac{2}{3}$, $m = 5\frac{1}{4}$.

9. ***Решите задачи*:**

1) В библиотеке 5000 книг. 17 % книг – учебники. Сколько учебников в библиотеке?

2) В диктанте 150 слов. 6 % слов студент написал неправильно. Сколько слов студент написал правильно?

3) Автомобиль ехал 3 дня и проехал путь 2000 км (километров).

В первый день автомобиль проехал 37 % пути. Во второй день он проехал 28 % пути. Сколько километров автомобиль проехал в третий день?

4) В группе занимаются 6 студентов-арабов. Но арабы составляют 75 % от числа студентов в группе. Сколько студентов в группе?

5) Стороны прямоугольника – 12 см и 15 см. На сколько процентов увеличится площадь прямоугольника, если мы увеличим каждую сторону на 10 %.

6) Стороны прямоугольника – 12 см и 15 см. На сколько процентов уменьшится площадь прямоугольника, если мы уменьшим каждую его сторону на 10 %.

10. ***Прочитайте тексты, ответьте на вопросы.***

ТЕКСТ 1

Рассмотрим пропорцию $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$. Числа 12, 6, 8 и 4 – это члены пропорции. Числа 12 и 4 – это крайние члены пропорции. Числа 6 и 8 – это средние члены пропорции. Произведение крайних членов пропорции равно числу 48 ($12 \cdot 4 = 48$). Произведение средних членов пропорции тоже равно числу 48 ($6 \cdot 8 = 48$). В пропорции произведение крайних членов и произведение средних членов равны. Это свойство пропорции.

Вопросы:

1) Как называется равенство $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$?
2) Как называются числа 12, 6, 8 и 4?
3) Как называются числа 12 и 4?
4) Как называются числа 6 и 8?
5) Какое свойство пропорции вы знаете?

ТЕКСТ 2

Рассмотрим пропорцию $\frac{x}{12} = \frac{3}{6}$. Здесь 12, 3 и 6 – это известные члены пропорции, x – неизвестный крайний член пропорции. Найдем x. По свойству пропорции имеем $12 \cdot 3 = x \cdot 6$.

Поэтому

$$x = \frac{12 \cdot 3}{6} = 6 .$$

Неизвестный член пропорции x равен 6.

Вопросы:
1) Какие члены пропорции известные?
2) Какой член пропорции неизвестный?
3) Как мы нашли неизвестный член пропорции?
4) Чему равен неизвестный член пропорции?

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Отношение (ср. род), отношения (мн. число)
Отношение чисел
Пропорция (жен. род), пропорции (мн. число)
Член пропорции, члены пропорции
Левая часть, правая часть (чего?)
Перестановка (жен. род)
Переставлять – переставить (что?)
Процент (муж. род, мн.ч. – проценты)
Процент от числа (от чего?)
Процентное отношение чисел

Занятие 7

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

7.1. Целые числа

Натуральные числа можно писать со знаком плюс (+):

$$1 = +1;\ 2 = +2;\ 3 = +3,\ \ldots\ .$$

Числа +1, +2, +3, ... – это целые положительные числа. Натуральные числа со знаком минус (–) –1, –2, –3, ... – это целые отрицательные числа. 0 – это тоже целое число (не положительное и не отрицательное).

Например: 12; +47; 0; –124; –17 – это целые числа. Числа $\frac{1}{2}$; 0,137; $\frac{45}{12}$; 11,456 – это не целые числа, это дробные числа.

Все целые числа можно записать как множество:

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Следовательно, $12 \in Z$; $+47 \in Z$; $0 \in Z$; $-124 \in Z$; $-17 \in Z$; $\frac{1}{2} \notin Z$; $0{,}137 \notin Z$; $\frac{45}{12} \notin Z$; $11{,}456 \notin Z$.

Каждое натуральное число – это целое число, т.е. каждый элемент множества N принадлежит множеству Z. В этом случае говорят, что N – это подмножество множества Z и пишут $N \subset Z$.

7.2. Рациональные и иррациональные числа. Действительные числа

Дробные числа, как и целые, могут быть положительные и отрицательные.

Например, $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{5}$; 0,7; +1,18; –3,485.

Рациональные числа – это числа, которые можно записать как дробь $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

Например, –3; 5; 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{7}{15}$; –5,12; 4,3 – это рациональные числа.

Все рациональные числа можно записать как множество

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle|\ m \in Z,\ n \in N \right\}.$$

Следовательно, $-3 \in Q$; $5 \in Q$; $0 \in Q$; $\frac{1}{2} \in Q$; $-\frac{7}{15} \in Q$; $-15 \in Q$, $12 \in Q$; $4{,}3 \in Q$.

Каждое натуральное число – это рациональное число.

Например, $1 = \frac{1}{1} \in Q$; $4 = \frac{4}{1} \in Q$; $124 = \frac{124}{1} \in Q$.

Следовательно, N – это подмножество Q: $N \subset Q$.

Каждое целое число – это рациональное число. Например,

$$3 = \frac{3}{1} \in Q;\ -2 = \frac{-2}{1} \in Q;\ 0 = \frac{0}{3} \in Q;\ -7 = \frac{-7}{1} \in Q.$$

Следовательно, Z – это подмножество Q: $Z \subset Q$.

Каждую конечную или бесконечную периодическую десятичную дробь можно записать как дробь $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. Следовательно, конечные и бесконечные периодические десятичные дроби – это рациональные числа. Например, $0{,}7 \in Q$; $0{,}3 \in Q$; $0{,}354 \in Q$.

Иррациональные числа – это бесконечные непериодические десятичные дроби. Например, число π (пи): $\pi = 3{,}141592...$ – это иррациональное число. Обозначим множество иррациональных чисел буквой J, тогда $\pi \in J$.

Все рациональные и иррациональные числа – это действительные числа. Например, 0; 2; –7; $-\frac{3}{2}$; 12,4; 1,(3); 3,141592... – это действительные числа. Обозначим множество действительных чисел буквой R, тогда $0 \in R$; $2 \in R$; $-7 \in R$; $-\frac{3}{2} \in R$; $12{,}4 \in R$; $1{,}3 \in R$; $3{,}141592... \in R$.

Множество R не содержит других элементов. В этом случае говорят, что R – это объединение Q и J и пишут

$$R = Q \cup J.$$

Множества N, Z, Q, J – это подмножества R.

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

Действительные числа – это положительные числа, отрицательные числа и 0. Множество всех положительных чисел обозначается R^+, а множество отрицательных чисел обозначается R^-. Например, $\frac{3}{7} \in R^+$; $126{,}1 \in R^+$; $-8 \in R^-$; $-3{,}2 \in R^-$.

Каждое действительное число можно записать как десятичную дробь: конечную, бесконечную периодическую, бесконечную непериодическую.

7.3. Противоположные числа

Рассмотрим числа +2 и –2.
Это противоположные числа.
Число +2 противоположно числу –2.
Число –2 противоположно числу +2.
Рассмотрим еще примеры противоположных чисел:

$$-7 \text{ и } +7; \ +3{,}2 \text{ и } -3{,}2; \ -\frac{4}{7} \text{ и } +\frac{4}{7}.$$

Если a – любое действительное число, то $-a$ – это противоположное число.
Если a – положительное число, то $-a$ – отрицательное число.
Например, $a = +5$, тогда, $-a = -(+5) = -5$.
Если a – отрицательное число, то $-a$ – положительное число.
Например, $a = -7$, тогда $-a = -(-7) = +7$.

7.4. Абсолютная величина числа

Абсолютная величина или модуль числа a обозначается так: $|a|$.
$|1|$ – это абсолютная величина числа 1 или модуль числа 1.
$|-3|$ – это абсолютная величина числа –3 или модуль числа –3.
$|m|$ – это абсолютная величина m или модуль m.

О п р е д е л е н и е 1.

Абсолютная величина положительного числа a равна числу a, если $a \in R^+$.

Например, $|3| = 3$; $|1{,}4| = 1{,}4$; $\left|\frac{7}{12}\right| = \frac{7}{12}$.

О п р е д е л е н и е 2.

Абсолютная величина числа 0 равна 0 (нулю).

$$|0| = 0.$$

О п р е д е л е н и е 3.

Абсолютная величина отрицательного числа a равна противоположному числу $-a$.

$$|a| = -a, \ a \in R^-.$$

Например, $|-2| = -(-2) = 2$; $|-7{,}2| = -(-7{,}2) = 7{,}2$.
Определения 1, 2, 3 можно записать так:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \in R^{+}; \\ 0, \text{ если} & a = 0; \\ -a, & a \in R^{-}. \end{cases}$$

Абсолютная величина любого действительного числа больше или равна 0:

$$|a| \geq 0.$$

$$|a| = 0 \text{ только, если } a = 0.$$

Противоположные числа имеют равные абсолютные величины. Например:

$$|-5| = |5| = 5; \ |-7{,}1| = |7{,}1| = 7{,}1.$$

Если $x \in R$, то $|-x| = |x|$.

7.5. Числовая ось

Рассмотрим прямую линию (рис. 1). Обозначим ее направление вправо знаком $\rightarrow$.

Будем рассматривать это направление как положительное, а противоположное направление (влево) как отрицательное.

Мы получили ось. Возьмем на ней любую точку и обозначим ее буквой *O.* Точка *O* изображает число 0 (ноль). Это начало отсчета. Возьмем любую точку справа от точки *O* и обозначим ее буквой *E.* Будем считать, что отрезок *OE* – это единица длины (т.е. длина отрезка *OE* равна 1). Точка *E* изображает число 1.

Мы получили числовую ось. Каждая ее точка изображает действительное число.

Точки справа от *O* изображают положительные числа. Точка *A* изображает положительное число *a,* если длина отрезка *OA* равна числу *a.* Например, точки *M* и *N* изображают числа 2 и 3,5, потому что длина отрезка *OM* равна 2, а длина отрезка *ON* равна 3,5 (рис. 2).

Точки слева от *O* изображают отрицательное числа. Точка *B* изображает отрицательное число *b,* если длина отрезка *OB* равна $|b|$ (модулю числа *b*). Например, точки *C*, *D* изображают числа –1 и –2, поэтому длина отрезка *OC* равна $|-1|$ = 1, а длина отрезка *OD* равна $|-2|$ = 2.

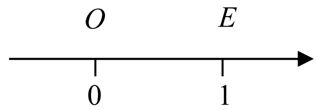

Рис. 1

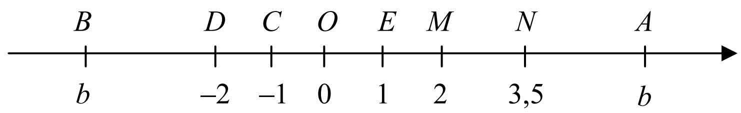

Рис. 2

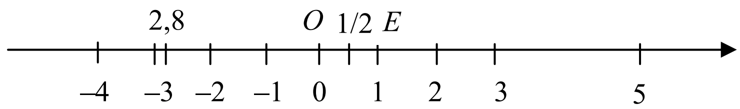

Рис. 3

Каждое действительное число можно изобразить на числовой оси. Например, изобразим на числовой оси числа 2; 3; 5; $\frac{1}{2}$; –1; –2; –3; –4; –2,8 (рис. 3).

7.6. Сравнение рациональных чисел

Сравним два рациональных числа. Рассмотрим все возможные случаи:

1) Если *a* и *b* – положительные числа, то сравниваем их как натуральные числа или обыкновенные дроби (см. занятия 2 и 4). Например, 4 > 1; 7 < 15,2; $\frac{4}{7} < \frac{7}{10}$.

2) Если *a* – положительное число, то *a* больше, чем 0: *a* > 0. Например, $\frac{1}{2} > 0$; 10 > 0; 4,475 > 0.

3) Если *a* – отрицательное число, то *a* меньше, чем 0: *a* < 0. Например, –7 < 0; $-\frac{2}{3} < 0$; –10,23 < 0.

4) Если *a* – положительное число, а *b* – отрицательное число, то *a* больше, чем *b*.

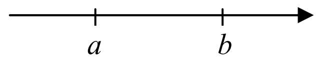

Рис. 4

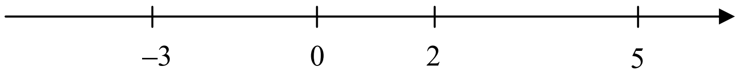

Рис. 5

Например, $3 > -1$; $7{,}2 > -103{,}1$; $\frac{1}{4} > -\frac{2}{3}$.

5) Если a и b – отрицательные числа, то сравниваем их абсолютные величины:

а) если $|a| > |b|$, то $a < b$;

б) если $|a| = |b|$, то $a = b$;

в) если $|a| < |b|$, то $a > b$.

Например: $-3 > -5$; $-\frac{1}{2} = -0{,}5$; $-2 < -1$.

Если $a > b$, то число a находится справа от числа b на числовой оси (рис. 4).

Например, 5 > 2. Число 5 находится справа от числа 2. 0 > –3. Число 0 находится справа от числа –3 (рис. 5).

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Запишите с помощью знаков N, Z, Q, J, R, R^+, R^-, $\in$, $\notin$:***

1) 5 – натуральное число;
2) –3 – целое число;
3) 12 – положительное число;
4) $\frac{2}{7}$ – нецелое число;
5) –2 – неположительное число;
6) –7,1 – отрицательное число;
7) 4,2 – рациональное число;
8) 8 – действительное число;
9) π – нерациональное число;
10) 0 – ненатуральное число.

2. ***Напишите знак $\in$ или $\notin$ вместо точек.***

$$3 \ldots N;\ -5 \ldots N;\ \frac{3}{4} \ldots Z;\ \frac{7}{8} \ldots Q;\ -2 \ldots Z;\ -2{,}8 \ldots R;\ 3{,}14 \ldots Z;\ -0{,}12 \ldots Q.$$

3. ***Найдите число, противоположное числу a:***

1) $a = 2$;	2) $a = 4{,}7$;	3) $a = \frac{17}{30}$;
4) $a = 64{,}57$;	5) $a = -1$;	6) $a = -\frac{2}{5}$;
7) $a = -17{,}1$;	8) $a = -2{,}47$;	9) $a = 0$.

4. ***Найдите абсолютные величины (модули) чисел:***

1) 5;	2) 7,3;	3) $\frac{1}{2}$;
4) $10\frac{2}{3}$;	5) 0;	6) –3;
7) –5,7;	8) $-\frac{3}{4}$;	9) –246,2.

5. ***Изобразите на числовой оси числа.***

$0; 1; 2; 3; 5; 10; -1; -2; -3; -5; -10; 0{,}8; 1\frac{1}{2}; 2{,}75; -\frac{1}{3}; -1{,}4; -2{,}6.$

6. ***Сравните числа*****:**

1) 7 и 5;
2) $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$;
3) 2,6 и 2,37;
4) 0 и 1,5;
5) 0 и –1,5;
6) –2 и 1;
7) –3,7 и 1,75;
8) –2 и –1;
9) –2,34 и –2,37;
10) $-\frac{5}{6}$ и $-\frac{4}{5}$;
11) $-12\frac{1}{5}$ и $-12\frac{1}{4}$;
12) $-27\frac{3}{8}$ и $-27\frac{2}{5}$.

7. ***Прочитайте тексты и ответьте на вопросы.***

Т Е К С Т 1

Число 2 – это натуральное число:
– это целое число;
– это рациональное число;
– это действительное число.
Число –3 – это целое число:
– это рациональное число;
– это действительное число;
– это ненатуральное число.
Число –10,3 – это рациональное число:
– это действительное число;
– это ненатуральное число;
– это нецелое число.
Вопросы:
1) 2 – какое это число?
2) –3 – какое это число?
3) –10,3 – какое это число?

Т Е К С Т 2

Рассмотрим числовую ось (рис. 6). Точки *O, M, N* изображают действительные числа. Точка *O* изображает число 0. Точка *O* – это начало отсчета. Точка *M* изображает число 3. Число 3 – это положительное число, поэтому точка *M* находится справа от точки *O.* Точка *N* изображает число –3. Число –3 – отрицательное число, поэтому точка *N* находится слева от точки *O.*

Числа 3 и –3 – это противоположные числа. Они имеют равные модули ($|3| = |-3| = 3$). Числа находятся на одинаковом расстоянии от точки *O.*

Вопросы:

1) Что изображают точки *O, N* и *M* на числовой оси?
2) Какое число изображает точка *O*?
3) Какие числа изображают точки *N* и *M*?
4) Где находятся точки *N* и *M*? Почему?
5) Что вы можете сказать о числах 3 и –3?

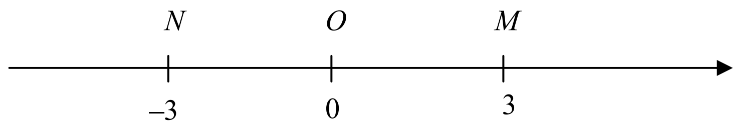

Рис. 6

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Абсолютный, -ая, -ое, -ые	Абсолютная величина
Возможный, -ая, -ое, -ые	
Действительное число	
Длина	Длина отрезка
Изображать – изобразить (что?)	
Иррациональное число	

Линия
Модуль (муж. род)
Направление
Начало отсчета

Непериодическая дробь

Объединение
Определение
Ось (жен. род)
Отрезок (мн. число – отрезки)
Отрицательное число
Подмножество
Положительное число
Принадлежать (несов. вид) (чему? – дат. пад.)
Противоположный, -ая, -ое
Прямая линия
Расстояние
Рациональное число

Занятие 8

ДЕЙСТВИЯ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ

8.1. Сложение рациональных чисел

Пусть a и b – рациональные числа. Сумма $a + b$ определяется так:

1) Чтобы сложить два положительных числа a и b надо сложить их модули.

Например, (+2) + (+5) = + (2 + 5) = +7 = 7;

$$\left(+\frac{1}{7}\right) + \left(+\frac{3}{7}\right) = +\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{7}\right) = +\frac{4}{7} = \frac{4}{7};$$

(+0,5) + (+0,3) = + (0,5 + 0,3) = +0,8 = 0,8.

2) Чтобы сложить два отрицательных числа a и b, надо сложить их модули и перед полученным результатом поставить знак «минус».

Например, (–2) + (–5) = –(2 + 5) = –7;

$$\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = -1;$$

(–0,3) + (–0,2) = – (0,3 + 0,2) = –0,5.

3) Чтобы сложить два числа a и b с разными знаками, надо из большего модуля вычесть меньший и перед полученным результатом поставить знак того слагаемого, модуль которого больше.

Например, (+5) + (–2) = + (5 – 2) = +3 = 3;

$$\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right) = -\left(\frac{7}{8}-\frac{3}{8}\right) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2};$$

(+0,2) + (–0,7) = – (0,7 – 0,2) = –0,5.

4) Сумма противоположных чисел a и b равна нулю.

Например, (+5) + (–5) = 0;

$$\left(+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right) = 0;$$

(+0,4) + (–0,4) = 0.

6) Если a – любое рациональное число, то $a + 0 = 0 + a = a$.

Например, (+3) + 0 = 0 + (+3) = 0;

$$\left(-\frac{3}{5}\right)+0 = 0+\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3}{5};$$

(–0,17) + 0 = 0 + (–0,17) = –0,17;

$$0 + 0 = 0.$$

8.2. Законы сложения

Если a, b и c – любые рациональные числа, то
а) $a + b = b + a$ (коммутативный закон);
б) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативный закон).
Например, $(–3) + (+7) = (+7) + (–3) = +4 = 4$;

$(–2) + (+3) + (–4) = ((–2) + (+3)) + (–4) = (–2) + ((+3) + (–4)) = –3$.

8.3. Вычитание рациональных чисел

Вычитание – это действие, обратное сложению. Если a и b – это рациональные числа, то разность $a – b$ – это рациональное число c, если и только если $c + b = a$, т.е.

$$a - b = c \Leftrightarrow^{2} c + b = a.$$

Например, $(+5) – (+2) = +3$, потому что $(+3) + (+2) = +5$;

$(–5) – (+2) = –7$, потому что $(–7) + (+2) = –5$.

Вычитание рациональных чисел a и b можно рассматривать как сложение числа a и числа b, которое противоположно числу a, т.е.

$$a - b = a + (-b). \qquad (1)$$

Равенство (1) можно рассматривать как правило вычитания рациональных чисел.

Например, $(+5) – (+2) = (+5) + (–2) = +3$;

$$(-5) - (+2) = (-5) + (-2) = -7;$$

$$\left(-\frac{3}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(+\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$(+0{,}7) - (-0{,}4) = (0{,}7) + (+0{,}4) = 1{,}1.$$

8.4. Алгебраическая сумма

Рассмотрим выражение:

$$(-7) + (+3) - (-5) + (-2) - (+4).$$

Это выражение содержит действия сложение и вычитание.
Запишем это выражение как сумму:

$$(-7) + (+3) + (+5) + (-2) + (-4). \qquad (2)$$

Выражение (2) – это алгебраическая сумма. Ее слагаемые – положительные и отрицательные числа. Алгебраическую сумму (2) можно записать так:

$$-7 + 3 + 5 - 2 - 4. \qquad (3)$$

Выражение (3) тоже алгебраическая сумма.
Вычислим выражение (3). Сначала сложим положительные слагаемые: $3 + 5 = 8$.
Потом сложим отрицательные слагаемые: $–7 – 2 – 4 = –13$. Затем сложим 8 и –13, получим –5.
Следовательно,

$$(-7) + (+3) - (-5) + (-2) - (+4) = (-7) + (+3) + (+5) + (-2) + (-4) =$$
$$= -7 + 3 + 5 - 2 - 4 = (3 + 5) + (-7 - 2 - 4) = 8 - 13 = -5.$$

8.5. Умножение рациональных чисел

Пусть a и b – рациональные числа.
1) Произведение двух чисел a и b одного знака есть число положительное.
Например, $(+3) \cdot (+4) = +3 \cdot 4 = +12 = 12$.

$$(-3) \cdot (-4) = +3 \cdot 4 = +12 = 12.$$

2) Произведение двух чисел a и b с разными знаками есть число отрицательное.

Например, $(+3) \cdot (–4) = –3 \cdot 4 = –12$;

$$(-3) \cdot (+4) = -3 \cdot 4 = -12.$$

3) Если a – любое рациональные число, то $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

[2] Символ $\Leftrightarrow$ обозначает: «если и только если» или «тогда и только тогда, когда».

Например, $(-3) \cdot 0 = 0 \cdot (-3) = 0;$

$$(+3) \cdot 0 = 0 \cdot (+3) = 0;$$

$$0 \cdot 0 = 0.$$

8.6. Законы умножения

Если a, b и c – любые рациональные числа, то

а) $a \cdot b = b \cdot a$ (коммутативный закон);

б) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (ассоциативный закон);

в) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивный закон).

Например, $(-3) \cdot (+2) = (+2) \cdot (-3) = -6;$

$$(+5) \cdot (-3) \cdot (-2) = ((+5) \cdot (-3)) \cdot (-2) =$$
$$= (+5) \cdot ((-3) \cdot (-2)) = +30 = 30.$$

Рассмотрим примеры умножения нескольких чисел.

Пример 1. $(-2) \cdot (+3) \cdot (-5) \cdot \left(+\frac{1}{5}\right) \cdot (-4) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = +6.$

Выражение содержит 4 отрицательных множителя (4 – четное число множителя). Мы получили положительное произведение +6.

Пример 2. $(+3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (+2) \cdot (-6) \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -10.$

Выражение содержит три отрицательных множителя (3 – нечетное число множителя). Мы получили отрицательное произведение (–10).

Следовательно, произведение – это положительное число, если число отрицательных множителей четное, и произведение – это отрицательное число, если число отрицательных множителей нечетное.

8.7. Деление рациональных чисел

Деление – это действие, обратное умножению.

Если a и b – рациональные числа ($b \neq 0$), то частное $a : b$ – это рациональное число c, если и только если $c \cdot b = a$, т.е.

$$a : b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a.$$

Например, $(+8) : (-4) = -2$, потому что $(-2) \cdot (-4) = +8$.

$(-8) : (-4) = +2$, потому что $(+2) \cdot (-4) = -8$.

Деление числа a на число b можно рассматривать как умножение числа a на число $\frac{1}{b}$, которое обратно числу b, т.е.

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}. \qquad (1)$$

Числа b и $\frac{1}{b}$ имеют одинаковые знаки. Следовательно,

1) Если $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$,

то $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = +|a| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = +\frac{|a|}{|b|}.$

2) Если $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$,

то $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = -|a| \cdot \left|\frac{1}{b}\right| = |a| \cdot \frac{1}{|b|} = -\frac{|a|}{|b|}.$

3) Если $b \in Q$ и $b \neq 0$, то $0 : b = 0 \cdot \frac{1}{b} = 0.$

Например, $(+10) : (+5) = +\frac{10}{5} = +2 = 2;$

$$(-10) : (-5) = +\frac{10}{5} = +2 = 2;$$

$$(+10) : (-5) = -\frac{10}{5} = -2;$$

$$(-10) : (+5) = -\frac{10}{5} = -2.$$

8.8. Возведение в степень рационального числа

Рассмотрим умножение одинаковых чисел, например: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Произведение $2 \cdot 2 \cdot 2$ можно записать так: 2^3 (два в третьей степени). Выражение 2^3 – это степень. Следовательно, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Умножение одинаковых множителей – это действие возведения в степень.

Например, возвести число 3 в четвертую степень (3^4) – это значит найти произведение $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, то есть $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

О п р е д е л е н и е 1. Если $a \in Q$ и $n \in N$ ($n \neq 1$), то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

Выражение a^n – это степень, a – основание степени, n – показатель степени.

Читаем степени так:

a^2 – "a во второй степени", или "a в квадрате", или "a квадрат";

a^3 – "a в третьей степени", или "a в кубе", или "a куб";

a^4 – "a в четвертой степени";

a^{12} – "a в двенадцатой степени";

a^n – "a в энной степени" или "a в степени эн".

О п р е д е л е н и е 2. Если $a \in Q$, то $a^1 = a$.

Рассмотрим примеры возведения в степень рациональных чисел:

1) Возведем число 3 в квадрат, получим $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$.

2) Возведем число –2 в куб, получим $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

3) Возведем дробь $\frac{1}{5}$ в четвертую степень, получим

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{625}.$$

4) Возведем дробь – 0,2 в пятую степень, получим

$$(-0{,}2)^5 = (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}00032.$$

Рассмотрим другие примеры:

5) $(-3{,}7)^1 = -3{,}7$;

6) $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;

7) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$;

8) $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$.

8.9. Возведение в степень отрицательного числа

Пусть $a > 0$, тогда $-a < 0$ ($-a$ – отрицательное число).

$$|-a| = |a| = a.$$

Рассмотрим степени $(-a)^{2n}$ и $(-a)^{2n-1}$, где $n \in N$ ($2n$ – четное число; $(2n - 1)$ – нечетное число).

$$(-a)^{2n} = (-a) \cdot (-a) \ldots (-a) = +|a|^{2n} = +a^{2n};$$

$$(-a)^{2n-1} = (-a) \cdot (-a) \ldots (-a) = -|a|^{2n-1} = -a^{2n-1}.$$

Следовательно, четная степень отрицательного числа равна положительному числу, а нечетная степень отрицательного числа равна отрицательному числу.

Например $\qquad (-2)^6 = +2^6 = 64;$

$$(-5)^3 = -5^3 = -125;$$

$$(-0{,}3)^4 = +0{,}3^4 = 0{,}0081;$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = -\frac{1^3}{4^3} = -\frac{1}{64};$$

$$(-1)^{42} = +1^{42} = 1;$$
$$(-1)^{75} = -1^{75} = -1.$$

8.10. Извлечение корня из рационального числа

Рассмотрим равенство $2^4 = 16$. Здесь 2 – это основание степени; 4 – показатель степени, 16 – степень. Основание степени 2 можно назвать так: корень четвертой степени из числа 16. Это арифметический корень. Его записывают так: $\sqrt[4]{16} = 2$.

О п р е д е л е н и е. Если $a^n = b$ и $a \geq 0$, $b \geq 0$, $n \in N$ $(n \neq 1)$, то число a – арифметический корень энной степени из числа b. Его обозначают знаком $\sqrt[n]{b}$. Число n – это показатель корня; число b – это подкоренное число.

Читаем корни так:

$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$ – квадратный корень из a;

$\sqrt[3]{a}$ – кубический корень из a;

$\sqrt[4]{a}$ – корень четвертой степени из a;

$\sqrt[5]{2}$ – корень пятой степени из двух;

$\sqrt[6]{3}$ – корень шестой степени их трех;

$\sqrt[10]{7}$ – корень десятой степени из семи.

Извлечь корень – это значит найти корень, а действие извлечения – это нахождение корня.

Извлечение корня – это действие, обратное возведению в степень:

$$\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b \quad (a \geq 0, \quad b \geq 0).$$

Рассмотрим примеры извлечения корней:

1) $\sqrt{36} = 6$, потому что $6^2 = 36$;

2) $\sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$, потому что $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49}$;

3) $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$, потому что $0{,}2^3 = 0{,}008$;

4) $\sqrt[4]{81} = 3$, потому что $3^4 = 81$;

5) $\sqrt[5]{0{,}00032} = 0{,}2$, потому что $0{,}2^5 = 0{,}00032$;

6) $\sqrt[7]{1} = 1$, потому что $1^7 = 1$;

7) $\sqrt[18]{0} = 0$, потому что $0^{18} = 0$.

8.11. Порядок выполнения действий

Рассмотрим выражение

$$(-4) \cdot \sqrt[3]{27} - (-16) : (-2)^3 + \sqrt{18} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2. \tag{1}$$

Это выражение содержит различные действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня. Вычислим его.

Сначала делаем действия возведение в степень и извлечение корня:

1) $\sqrt[3]{27} = 3$; 2) $(-2)^3 = -8$; 3) $\sqrt{81} = 9$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

Получаем выражение

$$(-4) \cdot 3 - (-16) : (-8) + 9 \cdot \frac{4}{9}.$$

Потом делаем действия умножение и деление:

5) $(-4) \cdot 3 = -12$; 6) $(-16) : (-8) = 2$; 7) $9 \cdot \frac{4}{9} = 4$.

Получаем выражение

$$-12 - 2 + 4. \tag{2}$$

Выражение (2) – это алгебраическая сумма. Вычислим ее:

8) $-12 - 2 + 4 = -14 + 4 = -10$.

Следовательно, $(-4) \cdot \sqrt[3]{27} - (-16) : (-2)^3 + \sqrt{81} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 =$

$= (-4) \cdot 3 - (-16) : (-8) + 9 \cdot \frac{4}{9} = -12 - 2 + 4 = -14 + 4 = -10$.

Правило. Если выражение содержит различные действия (сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, извлечение корня), то сначала делаем действия возведения в степень и извлечение корня, потом делаем действия умножение и деление и, наконец, находим алгебраическую сумму.

УПРАЖНЕНИЯ

1. ***Выполните действия сложение и вычитание*:**

1) $(-4) + (-7)$;
2) $(-5) + (+3)$;
3) $(+9) + (-4)$;
4) $\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{7}{8}\right)$;
5) $(-3) - (+7)$;
6) $(+9) - (+4)$;
7) $(-12) - (-5)$;
8) $(+3) - (-8)$;
9) $(-8) + (-4) - (+5) + (-7) - (-3)$;
10) $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + 0{,}3 - \frac{5}{6} - 0{,}7$;
11) $\left[\left(-\frac{3}{4}\right) + 0{,}75\right] - \left[\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(+\frac{3}{8}\right)\right]$;
12) $(-0{,}38) - 0{,}27 + (-0{,}41) - (-0{,}38) - (+0{,}54)$.

2. ***Выполните действия умножение и деление*:**

1) $(-12) \cdot (-2)$;
2) $(-4) \cdot (+13)$;
3) $(+7) \cdot (-19)$;
4) $(-6) \cdot 0$;
5) $0 \cdot (+7)$;
6) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$;
7) $\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{7}{15}\right)$;
8) $(-0{,}2) \cdot (-0{,}4)$;
9) $(-24) : (-6)$;
10) $(-5) : (+20)$;
11) $(-14) : \left(-\frac{1}{2}\right)$;
12) $+8 : (-0{,}2)$;
13) $(-4) \cdot (-2) \cdot (-3)$;
14) $(+18) \cdot (-4) : (-6)$;
15) $(-36) : (-9) \cdot (+3)$;
16) $(-1) \cdot (-3) \cdot (+2) \cdot (-5)$;
17) $(-15) \cdot (+3) : (-5) : (-1)$;
18) $\left(-\frac{7}{20}\right) : \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} : \left(-\frac{4}{5}\right)$.

3. ***Выполните действия возведение в степень и извлечение корня*:**

1) $(-2)^3$;
2) 15^2;
3) $(-3)^4$;
4) $(-4)^2$;
5) $(-3)^5$;
6) 12^2;
7) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$;
8) 0^{12};
9) $(-1)^{26}$;
10) $(-1)^{17}$;
11) $(-0{,}2)^4$;
12) $(-0{,}7)^3$;
13) $(-0{,}1)^5$;
14) $(-11)^2$;
15) $\sqrt{81}$;
16) $\sqrt[3]{27}$;
17) $\sqrt{256}$;
18) $\sqrt{169}$;

19) $\sqrt[4]{16}$; 20) $\sqrt{0{,}04}$;

21) $\sqrt{0{,}09}$; 22) $\sqrt[3]{0{,}008}$;

23) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{625}}$; 24) $\sqrt[5]{1}$.

4. *Выполните действия*:

1) $(-3{,}2) - (-5{,}4) : (+0{,}9)$;
2) $\left(-\dfrac{3}{8}\right) + \left(-\dfrac{5}{12}\right) \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right)$;
3) $[(-18) + (-32) : (-16)] : (-8) - (+12) : (-6)$;
4) $(-24) - (-3) : \sqrt[4]{81} + (-12) : \sqrt[3]{8} - (-2) \cdot (-3)^2$;
5) $(-13) + [(-8) - (-4) \cdot (-2)^2] - (-3)^3$;
6) $0{,}17 - 0{,}3 \cdot 0{,}04 + (-48) : (-2)^4$.

5. *Прочитайте текст и ответьте на вопросы*:

ТЕКСТ

Рассмотрим выражение $5 \cdot 5 \cdot 5$.

Выражение $5 \cdot 5 \cdot 5$ – это произведение одинаковых множителей. Умножение одинаковых множителей – это действие возведение в степень. Произведение $5 \cdot 5 \cdot 5$ содержит три одинаковых множителя. Его можно записать как степень 5^3 (пять в кубе) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Выражение 5^3 или число 125 – это степень. Число 5 – это основание степени, число 3 – это показатель степени. Пусть основание степени неизвестно, а показатель степени и степень известны, т.е. $x^3 = 125$.

Тогда число x можно найти с помощью действия извлечения корня:

$$x = \sqrt[3]{125} = 5.$$

Выражение $\sqrt[3]{125}$ или число 5 – это кубический корень из числа 125. Число 3 – это показатель корня. Число 125 – это подкоренное число.

Вопросы:
1) Сколько множителей содержит произведение $5 \cdot 5 \cdot 5$?
2) Какие это множители?
3) Как называется действие умножения одинаковых множителей?
4) Как можно записать произведение $5 \cdot 5 \cdot 5$?
5) Как называется выражение 5^3?
6) Как называется число 5 в выражении 5^3?
7) Как называется число 3 в выражении 5^3?
8) Как можно найти неизвестное основание x, если показатель степени и степень известны?
9) Как называется выражение $\sqrt[3]{125}$?
10) Как называется число 3 в выражении $\sqrt[3]{125}$?
11) Как вы прочитаете выражение $\sqrt[3]{125} = 5$?

СЛОВА И СЛОВОСОЧЕТАНИЯ

Алгебраический, -ая, -ое, -ие
Алгебраическая сумма
Ассоциативный закон
Верное равенство
Возводить – возвести (что?)
Возведение в степень
Дистрибутивный закон
Доказывать – доказать (что?) (мы) докажем
Закон
Извлечение корня (из чего?)
Извлекать – извлечь корень (из чего?)

Квадрат
Коммутативный закон
Корень (муж. род; мн. ч. – корни)
Корень квадратный
Корень кубический
Показатель корня
Куб
Обратный, -ая, -ое, -ые (чему?) (дат. пад.)

Подкоренное число

Основание степени
Показатель степени
Различный, -ая, -ое, -ые
Символ
Степень (жен. род)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Зверев, Н.И. Математика. Вводный курс / Н.И. Зверев, Е.А. Лазерева, М.М. Олесинова. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986.

2 Цыпкин, А.Г. Справочник по математике для средней школы / А.Г. Цыпкин ; под ред. С.А. Степанова. – 2-е изд. – М. : Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1981.

ОГЛАВЛЕНИЕ