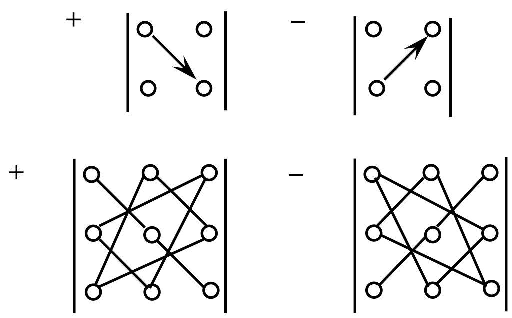
Л.И. ТКАЧ

АЛГЕБРА

Часть 1



♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»

Л.И. ТКАЧ

АЛГЕБРА

Часть 1

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия

Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УДК 512.5(075)
ББК В14я73
Т484

Р е ц е н з е н т ы :

Доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Алгебра и геометрия»
ТГУ им. Г.Р. Державина
А.И. Булгаков

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Теоретическая механика» ТГТУ
В.И. Галаев

Ткач, Л.И.
Т484 Алгебра : учеб. пособие / Л.И. Ткач. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 116 с. – 100 экз. – Ч. 1. – ISBN 978-5-8265-0641-7.

Рассмотрены вопросы, излагаемые обычно в начальные этапы изучения математики (а именно, алгебры) в высшем учебном заведении: матрицы, определители, системы линейных уравнений и методы их решения, а также выходящие за рамки традиционного курса высшей математики: множество, комбинаторика, отображение (в самом широком смысле), бинарное отношение, подстановки.

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальности «Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем», а также для студентов других специальностей, изучающих расширенный курс математики.

УДК 512.5(075)
ББК В14я73

ISBN 978-5-8265-0641-7

Учебное издание

ТКАЧ Леонид Иванович

АЛГЕБРА

Ч а с т ь 1

Учебное пособие

Редактор Т.М. Г л и н к и н а
Инженер по компьютерному макетированию Т.Ю. З о т о в а

Подписано в печать 07.11.2007
Формат 60 × 84 / 16. 6,71 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 706

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1. МНОЖЕСТВО

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Любая область человеческой деятельности связана не только с одним предметом, объектом, а с целой совокупностью. Например, медицина изучает не одну отдельно взятую болезнь, а все болезни, зоология изучает не отдельно взятое животное, а совокупность всех животных.

Математика, как и другая область человеческих знаний, изучает те или иные объекты не каждый в отдельности, а в их связи между собой. Объекты, обладающие теми или иными общими свойствами, объединяются вместе в одну совокупность и изучаются совместно. Например, в геометрии изучают не один отдельно взятый треугольник, а отвлекаются от его положения на плоскости или даже от его размеров, получая теоремы, справедливые для всех равных или же подобных треугольников.

Естественно, на это обстоятельство математики давно обратили внимание. Но только в конце XIX века немецкий математик Георг Кантор[1] создал общую теорию таких совокупностей, имеющую название «теория множеств», которая лежит в основе всей математики. Почему? Почти каждое издание по «современной» математике говорит о множествах и пестрит странными символами: $\in, \overline{\in}, \subseteq, \bigcup, \bigcap, \varnothing$. Дело в том, что теория множеств – это своего рода основа математического языка. Без него невозможно не только заниматься математикой, невозможно даже объяснить, о чем идет речь. Это все равно, что изучать китайскую литературу, не зная китайского языка.

К сожалению, понятию «множество» нельзя дать строгого определения. Разумеется, можно сказать, что множество[2] – это «совокупность», «семейство», «класс», «несколько объектов, объединенных некоторым общим признаком и рассматриваемых как одно целое» и т.д. Однако это было бы не математическим определением, а скорее злоупотреблением словарным богатством русского языка.

Для того чтобы определить какое-то понятие, нужно прежде всего указать, частным случаем какого более общего понятия оно является. Для понятия множества сделать это невозможно, потому что более общего понятия, чем множество, в математике нет.

Человек в процессе своего интеллектуального развития приобретает смысл слова «множество» и математики этим пользуются, говоря, что «множество» – это основное понятие.

Примеры.

1. Множество букв на этой странице.
2. Множество студентов в группе.
3. Множество преподавателей в аудитории.

Определение 1.1.1. Объекты, составляющие данное множество, называются его *элементами*.

Пример. Множество *дни недели* состоит из элементов: *понедельник*, *вторник*, *среда*, *четверг*, *пятница*, *суббота*, *воскресенье*.

Множества и их элементы обозначаются буквами. Мы будем использовать строчные буквы a, b, c, … для обозначения элементов, а прописные A, B, C, … – для обозначения множеств, хотя все это относительно, так как сами множества могут быть элементами других множеств.

Символ принадлежности общепринято имеет вид: $\in$. Тогда $a \in A$ читается как «элемент a принадлежит множеству A»; отрицание принадлежности обозначается как $\overline{\in}$ или $\notin$. Запись $d \notin B$ читается как «элемент d не принадлежит множеству B».

Пример. Если A – множество *дни недели*, то *суббота* $\in A$, а *январь* $\notin A$.

Задавать множества можно как угодно, лишь бы для каждого множества и каждого объекта можно было бы установить, является ли данный объект элементом данного множества.

Пример. $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ означает, что множество A состоит в точности из n элементов: a_i, $i = 1, …, n$.

Определение 1.1.2. Множество, количество элементов которого выражается некоторым числом, называется *конечным*.

Примеры. Множество студентов-отличников в университете, множество песчинок в мешке с песком.

Определение 1.1.3. Множество, в котором нет элементов, называется *пустым*. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$.

Пример. Множество людей, имеющих рост 0 м.

В пустом множестве количество элементов выражается числом 0, следовательно, оно конечное.

Иногда бывает трудно сказать, пусты ли те или иные множества. Например, до сих пор неизвестно, пусто ли множество всех живых динозавров на земном шаре, – если чудовище озера Лох-Несс действительно окажется динозавром, то это множество не пусто.

Вопросы для самопроверки. Что следует понимать под множеством $A = \{\varnothing\}$? Верно ли равенство $A = \varnothing$? Перечислить элементы множества $B = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$.

Определение 1.1.4. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Пример. Множество N натуральных чисел[3].

Если конечное множество можно задать, перечислив все элементы, то как же задавать бесконечные множества?

Бесконечные множества можно задавать указанием определяющего или *характеристического* свойства его элементов. Свойство называется характеристическим для некоторого множества, если этому множеству принадлежат в точности те элементы, которые обладают данными свойствами. Например: свойство «быть кубом целого числа» задает бесконечное множество кубов целых чисел. Это можно записать так: $\{x : x$ является кубом целого числа$\}$ (читается «множество тех x, которые являются кубами целых чисел»).

---

[1] Georg Cantor (1845 – 1918).

[2] По словам Георга Кантора, «множество – есть многое, мыслимое нами как единое целое».

[3] Числовые множества будут рассмотрены позже.

Вообще, обозначив символом $P(x)$ характеристическое свойство элементов множества A, будем писать: $A = \left\{ x : P(x) \right\}$ или $A = \left\{ x \,\middle|\, P(x) \right\}$.

В такой форме можно задавать любые (и конечные, и бесконечные) множества.

Примеры.

1. $\left\{ x : x^2 - 3x + 2 = 0 \right\}$ – множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$.

2. $\{a : a = \dfrac{p}{q}$, где p и q – целые числа, $q \neq 0\}$ – множество рациональных чисел.

3. {студент университета: отличник} – множество отличников в университете.

1.2. ПОДМНОЖЕСТВО. РАВЕНСТВО МНОЖЕСТВ

Нередко одно множество оказывается частью другого множества. Например, множество всех женщин составляет часть множества всех людей; множество четных чисел – часть множества целых чисел. Для описания этой ситуации используется термин «подмножество».

Определение 1.2.1. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Обозначение: $A \subset B$. Читается: «A входит в B», или «A содержится в B», или «B содержит A».

Примеры.

1. $N \subset Z \subset Q \subset R$. (Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, которое является подмножеством множества рациональных чисел, которое, в свою очередь, является подмножеством множества действительных чисел).

2. Многие теоремы в математике имеют вид: $A \subset B$. Например, в теореме «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» речь идет о двух множествах: A – множество всех ромбов, B – множество всех геометрических фигур с перпендикулярными диагоналями. И теорема состоит в том, что $A \subset B$.

Из определения подмножества видно, что всякое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Будем считать, что пустое множество $\varnothing$ есть подмножество любого множества: $\varnothing \subset A$.[4]

Исключив эти «крайние» случаи (т.е. $\varnothing$, A), мы получим так называемые *собственные подмножества* множества A, т.е. такие, которые не пусты и не совпадают с A.

Определение 1.2.2. Множества A и B *равны*, если одновременно: $A \subset B$ и $B \subset A$ (т.е *всякий элемент A принадлежит B и наоборот*).

Обозначение: $A = B$.

В случае равенства множества A и B оказываются состоящими из одних и тех же элементов.

Примеры.

1. A есть множество корней уравнения $x^2 + 5x + 4 = 0$, B есть множество, состоящее из двух элементов: –1 и –4, $A = B$.

2. Все теоремы о том, что некоторое условие является необходимым и достаточным, – это теорема о совпадении двух множеств. Например: «Для того, чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны» (сравните с соответствующим примером выше).

1.3. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Множества можно комбинировать между собой и получать другие множества. Среди бесчисленного количества мыслимых способов комбинирования некоторые оказались полезными.

Определение 1.3.1. *Объединением* (*суммой*) двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

Обозначение: $C = A \bigcup B$.

Примеры.

1. $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, тогда $C = A \bigcup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

2. $A = (-\infty, 2]$, $B = (1, +\infty)$, тогда $C = A \bigcup B = R$.

3. Если A – множество студентов, не сдавших первый экзамен, B – второй, то $A \bigcup B$ – множество студентов-задолжников после двух экзаменов (не исключено, что кто-то не сдал оба экзамена).

Аналогично определяется объединение любого количества множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

Обозначение: $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots \bigcup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ – для конечного числа множеств; $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_k \bigcup \ldots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – для бесконечного.

Построенные объединения (суммы) состоят из всех элементов, входящих по крайней мере в одно из множеств A_k.

Пример.

$A_k = \{k\}$ – натуральное число k, тогда $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_k \bigcup \ldots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = N$ – множество натуральных чисел.

Определение 1.3.2. *Пересечением* (*произведением*) множеств A и B называется множество C, состоящее из тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из множеств A и B.

Обозначение: $C = A \bigcap B$.

Пример.

Пусть $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, $D = \{10; 11\}$, тогда $C = A \bigcap B = \{2; 3\}$, $A \bigcap D = \varnothing$.

Аналогично определяется пересечение для любого количества множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

---

[4] Для этого есть оправдания: $\varnothing \subset A \bigcup \varnothing = A$, $\varnothing = A \bigcap \varnothing \subset A$.

Обозначение: $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ – для конечного числа множеств, $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_k \bigcap \ldots = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – для бесконечного числа множеств.

Пример.

Студент, сдавший все экзамены на «отлично», получает повышенную стипендию. Сессия состоит из четырех экзаменов. Пусть A_i – множество студентов, сдавших i-й экзамен на «отлично» (i = 1, 2, 3, 4), тогда

$A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap A_4 = \bigcap\limits_{i=1}^{4} A_i$ – множество студентов, получающих повышенную стипендию.

Определение 1.3.3. *Разностью* множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множества A, не входящих в B.

Обозначение: $C = A \setminus B$.

Примеры.

1. $A_1 \setminus A_2$ – множество студентов, получивших «отлично» на первом экзамене, а на втором – другую оценку (см. предыдущий пример).
2. $R \setminus Q$ – множество иррациональных чисел.
3. $Q \setminus R = \varnothing$.

Определение 1.3.4. Если $B \subset A$, то множество $C = A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A.

Обозначение: $\overline{B}$ или $\overline{B}_A$.

Пример.

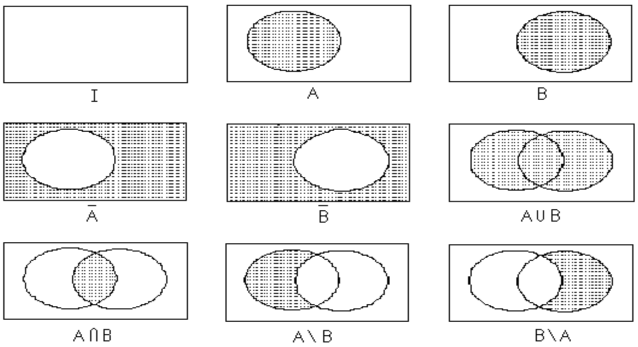
A – множество студентов в группе, B – множество студентов, сдавших первый экзамен, то $\overline{B}$ – множество студентов, не сдавших первый экзамен.

Обычно все множества, которые рассматриваются в том или ином рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества I. Это множество называется *универсальным*.

Задача. Пусть универсальным множеством I является множество всех учащихся данной школы. Какие множества при этом условии можно рассматривать?

Ответ. Множества, состоящие только из учащихся данной школы.

Операции над множествами имеют наглядное представление с помощью диаграмм, на которых множества представлены в виде областей, и те области, где лежат нужные элементы, выделены. Эти диаграммы называются *диаграммами Венна*[5] (или *диаграммами Эйлера*[6]*-Венна*):



Есть и другой способ проиллюстрировать операции над множествами. Составим так называемую *таблицу вхождения элементов в множества* по следующему правилу: рассмотрим все возможные случаи вхождения фиксированного элемента в множества A и B и их комбинации. Результат принадлежности этого элемента множествам A и B отметим в первых двух столбцах таблицы (1 – если элемент входит в данное множество, 0 – если не входит). Получится четыре случая или четыре строчки в таблице. Столбцы, соответствующие операциям $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, заполним согласно определений этих операций.

A	B	$A \bigcup B$	$A \bigcap B$	$A \setminus B$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	0
0	0	0	0	0

Например, вторая строка в таблице читается так: если элемент входит в A, но не входит в B, то он входит в $A \bigcup B$, не входит в $A \bigcap B$, но входит в $A \setminus B$.

Рассмотрим некоторые важные свойства операций объединения, пересечения и разности. Пусть A, B, C являются подмножествами для I.

1. $A \bigcup B = B \bigcup A$.

1'. $A \bigcap B = B \bigcap A$.

Эти тождества выражают *коммутативность* операций объединения и пересечения.

2. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$.

2'. $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$.

Эти тождества выражают *ассоциативность* операций объединения и пересечения.

---

[5] Джон Венн (John Venn, 1834 – 1923) – английский логик.

[6] Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707 – 1783) – швейцарский математик, долгое время работавший в России.

3. $A \bigcup A = A$.

3'. $A \bigcap A = A$.

Эти тождества называются *законами идемпотентности*.

4. $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.

4'. $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.

Эти тождества называются *законами дистрибутивности*.

5. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

5'. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

Эти тождества называются *законами де Моргана*[7].

6. $A \bigcup \varnothing = A$.

6'. $A \bigcap I = A$.

7. $A \bigcup \overline{A} = I$.

7'. $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.

Докажем свойство 5 на основе таблицы вхождения элементов в множества.

A	B	$A \bigcup B$	$\overline{A \bigcup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \bigcap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Из таблицы вхождения элементов в множества видно, что при различных вариантах вхождения элемента в множества A, B он входит или не входит в левую и правую части доказываемого равенства одновременно (см. соответствующие столбцы). Значит, $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

Впервые система с тремя операциями, удовлетворяющими свойствам 1 – 7, 1′ – 7′, рассматривалась английским математиком Джорджем Булем (George Boole, 1815 – 1864), в связи с чем такие системы получили название *булевых алгебр*.

Задача. Вытекает ли из $A \setminus B = C$, что $A = B \bigcup C$? Вытекает ли из $A = B \bigcup C$, что $A \setminus B = C$?

Решение. Рассмотрим первый вопрос. Запишем в другом виде: $A = B \bigcup C = B \bigcup (A \setminus B)$. Проверим это равенство.

A	B	$A \setminus B$	$B \bigcup (A \setminus B)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1

Мы видим, что столбцы, соответствующие A и $B \bigcup (A \setminus B)$ не совпадают, т.е. это равенство не верное, а верно $A \subset B \bigcup (A \setminus B)$. (Это можно увидеть и так: $B \bigcup (A \setminus B) = B \bigcup A$ и ясно, что $A \subset B \bigcup A = B \bigcup (A \setminus B)$).

Рассмотрим второй вопрос: $A = B \bigcup C$, верно ли, что $A \setminus B = C$ (или $(B \bigcup C) \setminus B = C$)?

B	C	$B \bigcup C$	$(B \bigcup C) \setminus B$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Это равенство неверное. На самом деле: $(B \bigcup C) \setminus B \subset C$.

1.4. НАИВНАЯ И АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Поскольку исходные положения канторовской теории множеств основываются на пояснениях, а не на строгих определениях и аксиомах, эту теорию называют *наивной* теорией множеств. Однако, несмотря на такое название, в наивной теории множеств не все так просто. Дело вот в чем.

Одним из положений наивной теории множеств является то, что для выделения множества не нужно указывать те или иные свойства, с помощью которых выделяется это множество, достаточно сказать «элементы, принадлежащие данному множеству», т.е. задание множества уже определяет некоторое свойство.

Вскоре выяснилось, что столь широкая точка зрения на понятие множества приводит к противоречиям, которые называются *антиномиями*[8]. Например, в 1902 г. Б. Рассел[9] обнаружил парадокс (*антиномия Рассела*), заключающийся в следующем.

---

[7] Де Морган А. (A. De Morgan, 1806 – 1871) – шотландский математик.

[8] Антиномия (парадокс) – ситуация, когда в теории доказываются два исключающих друг друга суждения, причем каждое из этих суждений выведено верными средствами с точки зрения данной теории.

[9] Bertrand Russel (1872 – 1970) – английский математик и логик, лауреат Нобелевской премии по литературе в 1950 году, один из инициаторов Пагоушского движения. Одним из известных литературных произведений Б. Рассела является «История западной философии».

Обозначим через M множество всех множеств, которые не являются элементами самих себя. Предположим, что M содержит само себя: $M \in M$. Тогда, согласно определению M, оно не содержит самого себя: $M \notin M$. Полученное противоречие доказывает, что наше предположение неверно и потому M не содержит самого себя: $M \notin M$. Но тогда, по определению M, оно должно содержать себя: $M \in M$. Итак, M и содержит себя в качестве элемента и не содержит себя. Значит, понятие множества M внутренне противоречиво.

Кроме антиномии Рассела, были обнаружены и другие неожиданные выводы. Во многих доказательствах различных теорем использовалось следующее утверждение, впервые сформулированное в 1904 г. Э. Цермело[10] (это утверждение носит название *аксиома выбора* (AC)[11]):

Если дана некоторая совокупность множеств $\{M_\alpha\}$, *состоящая из непустых попарно непересекающихся множеств* M_α, *то существует множество N, пересекающееся с каждым из множеств* M_α *по одному элементу* a_α *(т.е. можно выбрать в каждом из множеств* M_α *по элементу* a_α *).*[12]

С помощью AC были получены результаты, плохо согласующиеся с интуитивными представлениями и здравым смыслом. В 1924 г. С. Банах[13] и А.Тарский[14] установили, что любой шар может быть разбит на конечное число частей так, что переставляя их, можно в другом порядке сложить шар вдвое больший, чем данный[15].

Парадоксы вроде вышеуказанных побудили математиков подвергнуть систематическому изучению основы математики. Конечная цель этих исследований заключалась в создании для теории множеств (тем самым и для всей математики) такой логической базы, относительно которой можно было бы доказать, что она свободна от возможных противоречий, и которая вместе с тем была бы достаточной, чтобы из нее можно было бы вывести все, что в математике признается существенным.

В качестве такой логической базы были приняты наиболее важные свойства (названные *аксиомами теории множеств*), определяющие множества и правила действий с ними. Таким образом, теория множеств становится *аксиоматической теорией множеств*, т.е. теория множеств строится *аксиоматическим методом*.

Поясним вкратце суть аксиоматического метода. В математической теории за определение нового вводимого понятия признается только такая формулировка, которая полностью сводит новое понятие к уже известным понятиям той же теории. Отсюда ясно, что математика не может начинаться с определений. В определении какого-нибудь понятия мы пользуемся другими понятиями, которые, в свою очередь, раньше были введены с помощью других понятий. Но это сведение не может быть бесконечным, когда-то придется остановиться на понятиях, не определяя их. Последние называются *первоначальными*, или *основными*, *понятиями*.

С перечисления основных понятий и должно начинаться логически строгое построение и изложение любой математической теории.

Между основными понятиями устанавливаются некоторые взаимоотношения. Эти взаимоотношения называются *аксиомами* данной научной области, они принимаются без доказательства. Полный список аксиом приводится одновременно с перечнем основных понятий. Список основных понятий и аксиом является фундаментом логического построения математической теории. После того как он установлен, всякое новое понятие должно быть определено с помощью ранее введенных и первоначальных понятий, а каждая новая теорема доказана на основе ранее доказанных теорем и аксиом. В этом состоит *аксиоматический метод* построения теории.

Выбор системы первичных понятий и аксиом может быть осуществлен по-разному. Но набор их должен подчиняться определенным требованиям. Построенная на основе выбранной системы аксиом теория не должна содержать противоречий. Это значит, что, пользуясь ими, нельзя логически доказать два взаимно исключающих утверждения. Если система аксиом удовлетворяет такому требованию, она называется *непротиворечивой*. Кроме того, система аксиом должна быть *полной*, т.е. такой, чтобы на ее основе можно было получить любое утверждение данной теории. Наконец, системе аксиом нужно быть *независимой*, т.е. такой, чтобы ни одна аксиома системы не была следствием ее остальных аксиом. Если какая-нибудь из аксиом может быть доказана с помощью других аксиом системы, то ее придется отнести к теоремам. Впрочем, требование независимости имеет для построения теории скорее практическое, чем принципиальное значение. Отметим, что в математике существуют методы доказательства непротиворечивости, полноты и независимости системы аксиом (более подробно, например, в книге Успенский В.А. Что такое аксиоматический метод? Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет», 2000.).

В 1908 г. попытку аксиоматизации теории множеств предпринял Э. Цермело. В аксиоматике Цермело уже не было средств для получения множеств, фигурирующих в антиномиях, известных к тому времени.

В 1922 г. аксиоматика Цермело была модифицирована Абрахамом Френкелем[16]. На основе этой системы строится теория множеств, которая называется теорией ZF[17] (в честь Цермело и Френкеля). Если мы добавим к этой теории аксиому выбора, то получим теорию, называемую ZFC. В настоящее время теория ZF наиболее часто используется для формализации теории множеств, хотя имеются и другие варианты[18] аксиоматики[19].

---

[10] Ernst Zermelo (1871 – 1953) – немецкий математик.

[11] Choice по-английски – выбор.

[12] Элементарное обсуждение вопросов, связанных с аксиомой выбора, можно найти в книге: В. Серпинский. О теории множеств. М. : Просвещение, 1966.

[13] Stefan Banach (1892 – 1945) – польский математик.

[14] Tarski A. (1902 – 1983) – американский математик польского происхождения.

[15] Это так называемый парадокс Банаха-Тарского. Указать конкретный способ разбиения здесь невозможно. В предлагаемом же разбиении получаются очень уж необычные части: у них нет объемов (или как говорят математики, они неизмеримы!).

[16] Abraham A. Fraenkel (1865 – 1965) – израильский математик и логик.

[17] Стандартный набор аксиом теории ZF можно найти, например, в книгах: Клини С. «Математическая логика». М., 1973, Куратовский К., Мостовой А. «Теория множеств». М., 1970, Френкель А.А., Бар-Хиллел И. «Основания теории множеств». М., 1966.

[18] Аксиоматическая система GB, отличная от ZF, была предложена К. Гёделем (K. Gödel, 1906 – 1978) и П. Бернайсом (P. Bernays, 1888 – 1977).

[19] Мы совсем не упомянули еще об одной проблеме, способствовавшей исследованию основ математики. Сделаем только краткое пояснение. В ряде статей Кантор сформулировал гипотезу, согласно которой между мощностью счетного множества и мощностью множества действительных чисел, которая называется мощностью континуума (от латинского слова, означающего «непрерывный»), нет проме-

Аксиомы теории ZFC вводятся на формализованном языке[20], изложение которого не входит в нашу задачу. Тем не менее отметим, что согласно аксиомам теории ZFC можно образовать множество всех подмножеств данного множества (это постулируется *аксиомой степени*[21]), можно рассматривать подмножество данного множества, образованное элементами с какими-то свойствами (*аксиома выделения*), можно рассмотреть множество всех элементов, входящих хотя бы в один из элементов данного множества (*аксиома объединения* или *суммы*). Далее, множество однозначно определяется своими элементами (*аксиома объемности*), аксиомы теории ZFC обеспечивают возможность для построения модели множества N натуральных чисел (*аксиома бесконечности*), следовательно, и всех чисел, на основании аксиом теории ZFC возможно ввести понятие как неупорядоченной, так и упорядоченной пары множеств (*аксиома пары*) и т.д.[22]

Однако, во-первых, нельзя признать, что средств ZFC достаточно для нужд математики (например, Справочная книга по математической логике. М., 1982. Т. 2, Гл. I, с. 19) и, во-вторых, во взглядах на то, каким образом можно было бы достигнуть удовлетворительного обоснования теории множеств, все еще имеется большое расхождение, и громадное количество возникающих в этой связи проблем еще далеко не решено.[23]

В заключение приведем два замечательных высказывания Н. Бурбаки:

«Вот уже двадцать пять веков математики имеют обыкновение исправлять свои ошибки и видеть в этом обогащение, а не обеднение науки; это дает им право смотреть в будущее спокойно»;

«Сегодня мы знаем, что, логически рассуждая, возможно вывести почти всю известную математику из единого источника – теории множеств».

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

Умение решать задачи – практическое
искусство, подобное плаванию,
или катанию на лыжах, или игре на
фортепьяно: научиться этому можно,
лишь подражая избранным образцам
и постоянно тренируясь…

Д. Пойа

1.1. Пусть A – множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0; 2\}$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

1.2. Двое играют в шахматы. Обозначим: A – множество партий, в которых выиграл первый игрок, B – множество партий, в которых выиграл второй игрок. Описать множества:

а) $A \cup B$;
б) $\overline{A \cup B}$;
в) $A \cap B$;
г) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
д) $\overline{B} \setminus A$;
е) $\overline{A} \setminus B$;
ж) $B \setminus A$;
з) $A \setminus \overline{B}$.

1.3. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $R_1 < R_2 < \ldots < R_{10}$. Множество A_k есть множество попаданий в круг радиуса R_k. Описать множества:

а) $B = A_1 \cup A_3 \cup A_6$;
б) $C = A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_8$;
в) $D = (A_1 \cup A_3) \cap A_6$.

1.4. Какое из двух множеств является подмножеством другого:

а) P и $P \cap Q$;
б) P и $P \cup Q$.

жуточных мощностей. Эта гипотеза получила название *континуум-гипотеза* (CH). CH была первой из 23 проблем, сформулированных в 1900 г. Д. Гильбертом на II Международном математическом конгрессе в Париже. Только в 1940 г. Гёделю удалось доказать совместимость ZF как с AC, так и с CH и построить модель ZFC + CH. В 1963 г. американский математик П. Коэн доказал, что AC и CH независимы и друг от друга и от аксиоматики ZF (см. книгу Коэн П. Дж. «Теория множеств и континуум-гипотеза». М., 1969). За полученные результаты П. Коэн был награжден самой престижной математической наградой – премией и медалью Филдса на Международном математическом конгрессе 1966 г. в Москве.

[20] Формализованный язык – искусственный (в отличие от естественного, например, русского) язык, характеризующийся точными правилами построения выражений и их понимания. (См. Математика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М. : Большая Российская энциклопедия, 1998. С. 609.).

[21] К сожалению, в математической литературе существуют разные (но, тем не менее, определяющие один и тот же объект) варианты названий, состава и содержания аксиом теории ZFC. Упомянутая аксиома называется также аксиомой булеана или аксиомой множества множеств.

[22] Элементарное обсуждение аксиом теории ZFC и выводов из этой системы аксиом можно прочитать в книге Зорич В.А. Математический анализ. М. : Наука. 1981. Ч. 1. С. 38.

[23] Изложение материала носило ознакомительный характер, желающим более подробно изучить рассмотренные вопросы можно порекомендовать цитируемые монографии. Очень доступное изложение этих вопросов можно также найти в книгах: Виленкин Н.Я., Дуничев К.И. и др. Современные основы школьного курса математики. М. : Просвещение, 1980; Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев. М. : Гардарики, 2002.

1.5. Даны множества A и B, причем $A \subset V$, $B \subset V$, и $A \bigcap B \neq \varnothing$. Изобразите при помощи диаграмм Эйлера-Венна следующие множества:

а) $\overline{A \bigcap B}$; г) $\overline{A \bigcup B}$; ж) $\overline{A} \setminus B$;

б) $A \bigcap \overline{B}$; д) $\overline{A} \bigcup \overline{B}$; з) $A \setminus \overline{B}$.

в) $\overline{A} \bigcap \overline{B}$; е) $\overline{A} \bigcup B$;

1.6. Для каких множеств A и B справедливо соотношение $A \bigcap B = A$?

1.7. Для каких множеств A и B справедливо соотношение $A \bigcap B = A \bigcup B$?

1.8. Найти все множества X такие, что: $\overline{(X \bigcup A)} \bigcup \overline{(X \bigcup \overline{A})} = B$, где A и B – некоторые множества.

Решение. Заметим, что $\overline{B} = (X \bigcup A) \bigcap (X \bigcup \overline{A}) = X \bigcup (A \bigcap \overline{A}) = X$.

Ответ. $X = \overline{B}$.

1.9. Пусть A и B – некоторые множества. Найти все такие множества X, что $A \bigcap X = A \bigcap B$.

1.10. Определить подмножества A и B множества C, если

а) $A \bigcup B = \overline{A}$;

б) $A \bigcap B = \overline{A}$.

1.11. Доказать, что для любых множеств A и B соотношения $A \subset B$, $\overline{A} \supset \overline{B}$, $A \bigcup B = B$, $A \bigcap B = A$, $A \setminus B = \varnothing$ равносильны.

1.12. Обязаны ли совпадать множества A и B, если:

а) $\overline{A} = \overline{B}$;

б) $A \bigcup C = B \bigcup C$ (C – некоторое множество);

в) $A \bigcap C = B \bigcap C$ (C – некоторое множество);

г) $A \bigcap (A \bigcup B) = B \bigcap (A \bigcup B)$;

д) $A \setminus B = \varnothing$;

е) $A \bigcap (A \setminus B) = B \bigcap (A \setminus B)$;

ж) $A \bigcap (A \setminus B) = B \bigcap (B \setminus A)$.

В случае возможного несовпадения множеств A и B привести соответствующий пример, используя диаграммы Эйлера-Венна.

1.13. Какие из следующих равенств верны для любых множеств, верны для некоторых множеств, бессмысленны:

а) $P \bigcup Q = Q \bigcup P$; д) $P \bigcup (Q \bigcup R) = (P \bigcup R) \bigcup Q$;

б) $P \bigcap Q = Q \bigcap P$; е) $P \bigcap (Q \bigcap R) = (Q \bigcap P) \bigcap R$;

в) $P \bigcup P = 2P$; ж) $P \bigcup Q = P \bigcap Q$;

г) $P \bigcap P = P^2$; з) $P \bigcup (Q \bigcap R) = (P \bigcup Q) \bigcap R$?

1.14. Доказать тождества:

а) $(A \setminus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \setminus (B \bigcap C)$;

б) $A \bigcap B \bigcap C = A \setminus (A \setminus (B \bigcap C))$;

в) $(A \setminus B) \bigcup (A \setminus C) = A \setminus (B \bigcap C)$;

г) $(A \setminus B) \bigcap (A \setminus C) = A \setminus (B \bigcup C)$;

д) $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus C) \bigcup (C \setminus A) \bigcup (A \bigcap B \bigcap C) = A \bigcup B \bigcup C$;

е) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \bigcup (A \bigcap B)$;

ж) $\overline{A} \bigcup \overline{(B \bigcup C)} = \overline{(A \bigcap B)} \bigcap \overline{(A \bigcap C)}$.

1.15. Докажите включения:

а) $A \bigcap B \subset A \bigcup B$;

б) $(A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap D) \subset (A \bigcup B) \bigcap (C \bigcup D)$;

в) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;

г) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \bigcup (B \setminus C)$;

д) $(A \bigcup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \bigcup C$.

Пример доказательства включения в):

A	B	C	$B \setminus C$	$B \setminus A$	$(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$	$A \setminus C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0

0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Рассматривая разные варианты вхождения элемента в множества A, B, C, мы видим, что, если элемент входит в $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)$, то он входит и в $A\setminus C$, т.е. $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$.

1.16. Какие включения справедливы для множеств:

а) $A\setminus(B\bigcup C)$ и $(A\setminus B)\setminus C$;

б) $A\bigcup(B\setminus C)$ и $(A\bigcup B)\setminus C$;

в) $(A\setminus B)\bigcup C)$ и $A\bigcup(C\setminus B)$?

1.17. Пусть универсальным множеством является множество точек плоскости. Описать и изобразить дополнение следующих множеств:

а) $A=\left\{(x,y):\ x^2+y^2<1\right\}$;

б) $A=\left\{(x,y):\ x^2+3x+2\le 0\right\}$;

в) $A=\left\{(x,y):\ 3x+2y+5>0\right\}$;

г) $A=\left\{(x,y):\ |x|\le 2\right\}$.

2. КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО И ЕГО ПОДМНОЖЕСТВА

Рассмотрим более подробно конечные множества. Конечные множества выделяются из всех множеств тем, что их можно задать, предъявив явно их элементы. Таким образом, самая простая характеристика конечного множества – это его элементы и их количество. Следующая характеристика конечного множества, по-видимому, это все его подмножества или все его подмножества определенного типа. Рассмотрим такой вопрос: сколько всего подмножеств у конечного множества, содержащего n элементов? Решим сначала задачу.

Задача. Пусть X – конечное множество, a – элемент множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих элемент a или не содержащих элемент a?

Решение. Каждый раз, когда мы указываем подмножество A множества X, содержащее элемент a, то мы указываем и подмножество $X \setminus A$ множества X, не содержащее элемент a, и наоборот. Если мы указываем подмножество множества X, не содержащее элемент a, то мы указываем и подмножество множества X, содержащее элемент a. Поэтому подмножеств множества X, содержащих элемент a столько же, сколько и подмножеств множества X, не содержащих элемент a.

Ответ. Поровну.

Теорема 2.1.1. Число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.

Доказательство. Множество, состоящее из одного элемента a, имеет два (т.е. 2^1) подмножества: $\varnothing$ и $\{a\}$. Множество, состоящее из двух элементов a и b, имеет четыре (т.е. 2^2) подмножества: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{b; a\}$.

Множество, состоящее из трех элементов a, b, c имеет восемь (т.е. 2^3) подмножеств: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{b; a\}$, $\{c\}$, $\{c; a\}$, $\{c; b\}$, $\{c; b; a\}$.

Ясно, что добавление нового элемента удваивает число подмножеств.

Завершим доказательство применением метода математической индукции. Сущность этого метода в том, что если утверждение (свойство) справедливо для некоторого начального натурального числа n_0 и если из предположения, что оно справедливо для произвольного $n = k \geq n_0$, можно доказать его справедливость для числа $k + 1$, то это свойство справедливо для всех натуральных чисел $n \geq n_0$.

1. Для $n = 1$ (и даже для $n = 2, 3$) теорема доказана.

2. Допустим, что теорема доказана для $n = k$, т.е. число подмножеств множества, состоящего из k элементов, равно 2^k. Докажем, что число подмножеств множества B, состоящего из $n = k + 1$ элемента, равно 2^{k+1}.

Выбираем некоторый элемент b множества B. Рассмотрим множество $A = B\setminus\{b\}$. Оно содержит k элементов. Все подмножества множества A – это подмножества множества B, не содержащие элемент b и, по предположению, их 2^k штук. Подмножеств множества B, содержащих элемент b, столько же, т.е. 2^k штук (по предыдущей задаче). Следовательно, всех подмножеств множества B: $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ штук. Теорема доказана.

На вопрос о том, сколько у конечного множества подмножеств того или иного типа отвечает раздел теории множеств – комбинаторика.

2.2. КОМБИНАТОРИКА. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА

Комбинаторика – это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколькими различными подмножествами, подчиненными тем или иным условиям, обладает конечное множество. Причем, природа самих элементов, составляющих конечное множество, как принято в теории множеств, не рассматривается. Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств – любую комбинаторную задачу можно выразить, используя понятие конечного множества.

Рассмотрим сначала два основных правила комбинаторики – правило суммы и правило произведения, которые являются аксиомами комбинаторики.

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a не совпадает с каким-нибудь способом выбора элемента b, то выбор «a или b» можно осуществить $m + n$ способами.

Пример. На полке в книжном шкафу стоят книги, среди которых есть учебники: 5 книг по математике, 4 книги по физике, 6 книг по химии, остальные книги – детективы. Сколькими способами можно выбрать учебник в книжном шкафу?

Книгу по математике можно выбрать 5 способами, книгу по физике – 4 способами, книгу по химии – 6 способами. Выборы учебников не влияют друг на друга. Значит, по правилу суммы учебник можно выбрать $5 + 4 + 6 = 15$ способами.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать m способами и после каждого из этих выборов элемент b может быть выбран n способами, то выбор «a и b» может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5, если цифры в числе не повторяются?

На месте сотен поставим любую из трех цифр (т.е. получаем три способа для выбора первой цифры). После каждого такого выбора на месте десятков можно поставить любую из двух оставшихся цифр (т.е. два способа), так как цифры в числе не повторяются. Наконец, на месте единиц можно поставить оставшуюся одну цифру (т.е. один способ). Применяя правило произведения два раза, получим: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ трехзначных числа.

Графической иллюстрацией правила произведения является специальная схема, условно называемая «дерево». Для предыдущего примера соответствующая схема будет выглядеть так:

Задача. Придумайте графическую иллюстрацию правила суммы.

Пример. Сколько различных «слов» (или последовательностей букв), состоящих не менее чем из пяти различных букв, можно образовать из букв слова «рисунок»?

Слово «рисунок» состоит из семи различных букв. Применяя правило произведения соответствующее число раз, можно установить, что из букв слова «рисунок» получается:

$N_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ – «слов» из пяти букв;

$N_2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ – «слов» из шести букв;

$N_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ – «слов» из семи букв.

Применяя правило суммы, получим, что возможно $N = N_1 + N_2 + N_3 =$ = 2520 + 5040 + 5040 = 12 600 «слов», состоящих не менее чем из пяти букв слова «рисунок».

2.3. ПЕРЕСТАНОВКИ. РАЗМЕЩЕНИЯ. СОЧЕТАНИЯ. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Обозначим символом $n!$ (читается «эн факториал») – число, равное произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Например:

1! = 1;
2! = 1 · 2 = 2;
3! = 1 · 2 · 3 = 6;
4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24;
5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120;
...

Положим по определению[24]: 0! = 1.

Рассмотрим некоторое множество, состоящее из n различных элементов. Если в множестве введено отношение порядка, т.е. определено, какой элемент множества за каким следует или какому предшествует, то множество называется *упорядоченным*.

Пример. Пусть даны три буквы: A, B, C. Составим все возможные упорядоченные множества из этих букв:

$$ABC;\quad ACB;\quad BCA;\quad BAC;\quad CBA;\quad CAB.$$

Таких множеств получилось 6 штук. Они отличаются только порядком расположения букв.

Определение 2.3.1. Упорядоченные множества из n элементов, которые отличаются только порядком элементов, называются *перестановками из n элементов*.

Число перестановок из n элементов обозначается: P_n. В предыдущем примере мы выяснили, что $P_3 = 6$.

Пример. Пусть даны четыре буквы: A, B, C, D. Составим упорядоченные подмножества, состоящие из двух букв:

$$\begin{matrix} AB; & AC; & AD; \\ BA; & BC; & BD; \\ CA; & CB; & CD; \\ DA; & DC; & DB. \end{matrix}$$

Все полученные подмножества отличаются или буквами, или порядком букв (т.е. AB и BA считаются разными подмножествами). Этих подмножеств 12 штук.

Определение 2.3.2. Упорядоченные подмножества из n элементов по k элементов каждое, называются *размещениями из n элементов по k элементов* (или кратко: размещениями из n по k).

Таким образом, размещения из n по k отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число размещений из n по k обозначается: A_n^k. В предыдущем примере мы выяснили, что $A_4^2 = 12$.

Пример. Пусть даны четыре буквы: A, B, C, D. Составим подмножества из двух элементов:

$$\begin{matrix} AB; & AC; & AD; \\ & BC; & BD; \\ & & CD. \end{matrix}$$

[24] Это определение связано с желанием распространить основное свойство факториала $n! = (n-1)! \cdot n$ на целые числа $n \ge 1: 1 = 1! = (1-1)! \cdot 1 = 0! \cdot 1 \Rightarrow 0! = 1$.

Изменение порядка букв внутри этих подмножеств не приводит к новому подмножеству. Этих подмножеств получилось 6 штук.

Определение 2.3.3. Подмножества из n элементов по k элементов каждое, отличающиеся хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями из n элементов по k элементов* (или кратко: сочетаниями из n по k).

Число сочетаний из n по k обозначается: C_n^k. В предыдущем примере мы выяснили, что $C_4^2 = 6$.

Теорема 2.3.1. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$.

Доказательство. Подсчитаем число размещений из n по k. Первый элемент размещения из n по k можно выбрать n способами. Второй элемент можно выбрать $n - 1$ способом, так как в качестве второго элемента можно взять любой элемент множества, кроме уже выбранного первым. После выбора первых двух элементов остается $n - 2$ возможности для выбора третьего элемента и т.д. Последний k-й элемент размещения из n по k может быть выбран $n - k + 1$ способом, так как к моменту выбора k-го элемента осталось $n-(k-1)$ элементов. По правилу произведения число всех размещений из n по k равно:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.3.2. $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Доказательство. Перестановки являются частным случаем размещений, а именно, перестановка из n элементов – это размещение из n элементов по n элементов. Поэтому

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.3.3. $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы подсчитаем число всех размещений из n по k следующим образом. Сначала образуем все возможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов – это будут сочетания из n по k, их число равно C_n^k. Затем из полученных неупорядоченных подмножеств (сочетаний из n по k) перестановкой их элементов получим все упорядоченные подмножества из k элементов (размещения из n по k), которых будет в $k!$ раз больше, так как каждое k-элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Следовательно:

$$A_n^k = k!C_n^k.$$

Из этого равенства получим формулу для числа сочетаний из n по k. Теорема доказана.

Задача. В чемпионате страны по футболу участвуют n команд. Каждые две команды встречаются между собой 1 раз. Было сыграно 153 матча. Найти n.

Решение. Число сыгранных матчей равно C_n^2. Поэтому

$$C_n^2 = 153;$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 153;$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 153;$$

$$n^2 - n - 306 = 0.$$

$n_1 = 18, \quad n_2 = -17$ – не подходит по смыслу задачи.

Ответ. 18 команд.

Задача. Сколькими способами можно упорядочить множество 1, 2, ..., $2n$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Четные числа (их n штук) можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n штук) $n!$ способами. Каждому способу расположения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов расположения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа по правилу умножения равно: $n!\cdot n! = (n!)^2$.

Ответ. $(n!)^2$.

Задача. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?

Решение. Чашки для трех человек можно выбрать из четырех различных чашек A_4^3 способами. Блюдца для трех человек можно выбрать из пяти различных блюдец A_5^3 способами. Чайные ложки для трех человек можно выбрать из шести различных чайных ложек A_6^3 способами. По правилу произведения накрыть стол для чаепития для трех человек можно $A_4^3\cdot A_5^3\cdot A_6^3$ способами.

$$A_4^3\cdot A_5^3\cdot A_6^3 = \frac{4!}{(4-3)!}\cdot\frac{5!}{(5-3)!}\cdot\frac{6!}{(6-3)!} = \frac{4!\cdot 5!\cdot 6!}{2!\cdot 3!} = 2\cdot 5!\cdot 6! = 172\,800.$$

Ответ. 172 800.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

2.1. Пусть X – конечное множество, A – подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не пересекающихся с множеством A?

2.2. Пусть X – конечное множество, A – подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не содержащих множество A?

2.3. Вычислить: а) $\frac{6!-5!}{5!}$; б) $\frac{6!}{7!+8!}$; в) $\frac{20!}{5!16!}$; г) $\frac{21!+20!}{19!+18!}$.

2.4. Сократить дробь:

а) $\frac{n!}{(n-1)!}$; б) $\frac{n!}{2!(n-2)!}$; в) $\frac{(2k+1)!}{(2k-1)!}$; г) $\frac{(4m-1)!}{(4m+1)!}$.

2.5. Найдите область определения функции и множество ее значений:

а) $f(x)=A_{7-x}^{x-3}$; б) $f(x)=C_{x+1}^{2x-8}$.

Правило произведения и правило суммы

2.6. Сколько полных различных обедов можно составить, если в меню имеются 3 первых, 4 вторых и 3 третьих блюда?

2.7. Сколько различных трехбуквенных перестановок можно составить из букв слова «ромб»?

2.8. В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2 санитара. Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

2.9. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что а) ни одна цифра не повторяется; б) цифры в числе могут повторяться?

2.10. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены все возможные четырехзначные числа так, что в каждом числе а) нет одинаковых цифр; б) возможны одинаковые цифры. Сколько получилось чисел?

2.11. Сколько существует различных положений, в которых могут оказаться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен?

2.12. Сколько различных натуральных делителей имеет число $2^7\cdot 3^{10}\cdot 7^{15}\cdot 11^9$?

Перестановки

2.13. Курьеру поручено разнести пакеты в 6 различных учреждений. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

2.14. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «вершина» так, чтобы:

а) «ш» стояло посередине?

б) чтобы перестановка начиналась с «ш»?

в) чтобы начиналась на «в» и кончалась на «на»?

2.15. Сколько можно составить перестановок из букв A, B, C, a, b, c, начинающихся с прописной буквы?

2.16. За одним круглым столом надо рассадить пять мальчиков и пять девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами это можно сделать?

2.17. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, не кратные 5 и не содержащие одинаковых цифр. Сколько существует таких чисел?

2.18. Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные два элемента a и b не стоят рядом? Данные три элемента a , b, c не стоят рядом (в любом порядке)?

2.19. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли «бить» друг друга?

2.20. Сколькими способами можно рассадить в ряд 12 человек на 12 стульях?

2.21. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом на 12 стульях, причем расположения сидящих считаются одинаковыми, если а) у каждого из сидящих за столом один и тот же сосед справа и один и тот же сосед слева; б) каждый из сидящих за столом имеет одних и тех же соседей; в) каждый из сидящих за столом имеет одного и того же диаметрально противоположного соседа?

2.22. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они смогут встать в круг?

2.23. Сколько различных ожерелей можно составить из 7 различных бусинок?

2.24. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом и в порядке возрастания?

2.25. Сколько существует перестановок из n элементов, в которых между двумя данными элементами стоят какие-то r элементов из оставшихся $n-2$ элементов?

Размещения

2.26. В профкоме имеются 3 туристические путевки. Сколькими способами их можно распределить между 5 желающих сотрудников, если 3 путевки по 3 разным маршрутам: Крым, Алтай, Карпаты?

2.27. Сколькими способами можно опустить три письма в 7 почтовых ящиков, если в один и тот же ящик опускать не более одного письма?

2.28. Из точки проведено n лучей. Сколько при этом получилось углов, меньших 360°?

2.29. Сколько словарей надо издать: чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих 5 языков?

2.30. В классе 20 мальчиков и 20 девочек. Для участия в концерте нужно выделить танцующий дуэт, дуэт певцов и гимнастический дуэт (каждый из которых состоит из мальчика и девочки). Сколькими способами это можно сделать (при условии, что все умеют петь, танцевать и выполнять гимнастические упражнения)?

2.31. Сколькими способами могут быть присуждены 1, 2 и 3-я премии 3 лицам, если число соревнующихся равно 10?

2.32. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг (три горизонтальные цветные полосы равной ширины), если имеется материал 5 разных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной (красный – один из имеющихся цветов)?

2.33. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (содержащей 52 карты) по одной карте каждой масти? То же самое при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, т.е. двух королей, двух десяток и т.д.?

2.34. У отца 5 попарно различных апельсинов, которые он выдает своим 8 сыновьям так, что каждый получает либо один апельсин, либо ничего. Сколькими способами можно это сделать? Аналогичная задача, если число апельсинов, получаемых каждым сыном, не ограничено.

2.35. Сколькими способами можно переставить буквы слова:

а) «фазан»; б) «параллелизм» так, чтобы не поменялся порядок гласных букв?

Сочетания

2.36. В профкоме имеются 3 туристические путевки. Сколькими способами их можно распределить среди 5 желающих сотрудников, если все три путевки на Алтай?

2.37. В подразделении 60 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно выделить караул, состоящий из трех солдат и одного офицера?

2.38. Сколькими способами из 35 учеников класса можно выбрать трех дежурных по школе и одного по столовой?

2.39. На одной из параллельных прямых лежат 15 точек, на второй – 21. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

2.40. Сколькими способами группу из 15 студентов можно разбить:

а) на две группы в 6 и 9 человек;

б) на три группы в 3, 7 и 5 человек?

2.41. На плоскости даны 15 точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой:

а) сколько различных прямых определяют эти точки;

б) сколько окружностей определяют эти точки?

2.42. Трое юношей и семь девушек отправляются на двух лодках по реке. Сколькими способами их можно разместить в лодках поровну, чтобы в каждой был хотя бы один юноша?

2.43. В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются два ученика. Можно ли составить расписание дежурства так, чтобы никакие два ученика не дежурили вместе дважды в течение учебного года?

2.44. Сколько произведений по три множителя в каждом, кратных 3, можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 9 (цифры используются только раз)?

2.45. Имеются p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?

2.46. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых

а) каждая следующая цифра больше предыдущей;

б) каждая следующая цифра меньше предыдущей?

Разные задачи

2.47. Сколько букв алфавита можно закодировать пятью сигналами, если три сигнала – импульсы тока, а два – паузы?

2.48. Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?

2.49. Найдите число различных перестановок букв в слове «статистика», в слове «парабола».

2.50. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано?

2.51. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

2.52. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

2.53. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются мужчины и женщины?

2.54. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из призеров вручается только одна книга)?

2.55. Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?

2.56. Автомобильные номера состоят из одной, двух или трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если используются 24 буквы русского алфавита и 10 цифр.

2.57. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы 4 буквы «е» не стояли подряд?

3. ЧИСЛА

3.1. НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. АКСИОМЫ ПЕАНО

Бог создал натуральное число,
все остальное – дело рук человеческих.

Л. Кронекер[25]

Аксиоматический метод построения математической дисциплины требует от изучающего очень высокого уровня логической культуры. В частности, по этой причине в школе иногда приходится отказываться от строгих определений некоторых понятий, заменяя их поясняющими описаниями. Так в арифметике говорят, что число есть результат счета или измерения. Но что такое «счет или измерение»? Возможно попытаться ответить, что это «некий процесс». Но что такое «процесс»? Наверно, не каждый ответит однозначно. Обходя все эти вопросы, просто считается, что понятие числа, как результат счета или измерения, для школьника вполне очевидно и согласуется с его жизненным опытом и более школьнику на данном этапе его интеллектуального развития не надо. Но, повторимся, не все так просто: результатом какого измерения является -1 или π (вспомните, как определяется это число)? И в то же время любой закончивший школу вряд ли станет говорить о том, что отрицательные (или иррациональные) числа совсем не нужны.

Математики давно поняли, что если говорить о чем-то, то говорить надо вразумительно, и если создавать в накопившихся знаниях систему, то эта система должна быть логически безупречной. Поэтому математики и изобрели специальный способ построения логических теорий – аксиоматический метод (см. соответствующий параграф).

Для обоснования понятия «число», как мы уже поняли, применяется аксиоматический метод. Естественно надо начинать с самых простых чисел – натуральных. В конце XIX в. итальянский математик Джузеппе Пеано (G. Peano, 1858 – 1932) выделил первоначальные свойства натуральных чисел, из которых ему удалось вывести все существенные свойства натуральных чисел. Назвав эти первоначальные свойства аксиомами натуральных чисел, он тем самым определил натуральные числа аксиоматическим методом.

В аксиоматике Пеано первоначальные понятия: *натуральное число, единица, следующее число.* Аксиомы Пеано[26]:

1. Единица есть натуральное число.
2. Каждое натуральное число имеет следующее число.
3. Единица не является следующим числом.
4. Натуральные числа, имеющие одинаковые следующие числа, равны.
5. Множество, содержащее единицу и вместе с каждым числом его следующее, содержит все натуральные числа.

Можно доказать[27], что:

1. Система аксиом Пеано является непротиворечивой.
2. Аксиомы Пеано определяют натуральные числа однозначно (или, как говорят математики – с точностью до изоморфизма), – это свойство системы аксиом называется *категоричностью.*
3. Если система аксиом ZFC непротиворечива, то и система аксиом Пеано не противоречива.

Покажем, как в рамках теории ZFC можно построить теоретико-множественную модель для аксиом Пеано. Назовем множество *следующим для множества A*, если оно является объединением этого множества A с множеством, единственным элементом которого является множество A. Обозначим множество следующее для множества A через $S(A)$: $S(A) = A \cup \{A\}$. Например, следующим множеством для пустого множества $\varnothing$ является множество $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$ (т.е. множество, единственный элемент которого есть пустое множество $\varnothing$). Следующим для множества $\{\varnothing\}$ является множество $\{\varnothing \cup \{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ (т.е. множество, элементами которого являются два множества: пустое множество $\varnothing$ и множество $\{\varnothing\}$, состоящее из одного элемента – тоже пустого множества).

Совокупность множеств M называется *индуктивной*, если вместе с каждым множеством A она содержит и множество $S(A)$. Теперь аксиому бесконечности Цермело-Френкеля можно сформулировать так: *существует хотя бы одна индуктивная совокупность множеств, содержащая пустое множество $\varnothing$.*

Возьмем одну из индуктивных совокупностей множеств, содержащих пустое множество $\varnothing$, и обозначим ее M. Через W обозначим семейство всех индуктивных совокупностей подмножеств в M, а через N – пересечение всех совокупностей из W. Тогда N и будет искомой моделью, в которой начальным элементом 1 (т.е. единицей) является пустое множество $\varnothing$, следующим числом для 1, которое мы обозначим 2, является следующее множество для $\varnothing$ и т.д.

Можно доказать, что в N выполнены аксиомы Пеано (если положить $1 = \varnothing$ и считать $S(A)$ «следующим числом» для A). В указанной модели N (которую, согласно категоричности аксиом Пеано, можно назвать множеством натуральных чисел) в теории ZFC можно определить операции сложения и умножения (а также вычитания и деления, когда они возможны) и установить справедливость всех обычных свойств натуральных чисел, перечислим основные группы этих свойств[28]:

1. Свойства натуральных чисел для операций сложения, вычитания (в том случае, когда она выполнима), умножения, деления (в том случае, когда она выполнима).
2. Свойства упорядочения натуральных чисел.
3. Свойства, касающиеся операций и упорядочения натуральных чисел.

Подведем итог. Множеству натуральных чисел N в рамках теории ZFC можно дать такое определение.

---

[25] Leopold Kronecker (1823 – 1891) – немецкий математик.

[26] В математической литературе встречается система аксиом, называемая аксиомами Пеано, имеющая несущественные отличия от предлагаемой (см. Куратовский К., Мостовой А. Теория множеств. М. : Мир, 1970).

[27] Что касается доказательств в этом параграфе, то см. например: Виленкин Н.Я., Дуничев К.И. и др. Современные основы школьного курса математики. М. : Просвещение, 1980. С. 128 – 141.

[28] Сами свойства мы предполагаем известными (см., например, Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении, М. : Наука. 1979. С. 26.). Заметим, что, так как на множестве натуральных чисел введены операции сложения и умножения (являющиеся основными), то множество натуральных чисел N было бы точнее обозначать $(N; + ; \cdot)$.

Множество натуральных чисел N – это пересечение всех индуктивных совокупностей индуктивного множества, содержащих пустое множество $\varnothing$, на котором определены операции сложения, умножения и отношение порядка, удовлетворяющие указанным свойствам. Причем элементы множества N обозначаются символами 1, 2, 3, … .

Заметим, что множество натуральных чисел вместе со всеми нужными свойствами можно определить на основании и других систем аксиом[29].

3.2. ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Используя множество натуральных чисел, можно определить множество целых чисел. Например, это можно сделать так. Множество целых чисел Z есть объединение множеств N^+, N^- и $\{0\}$, где N^+ – состоит из пар вида $(+, n)$, $n \in N$, N^- – состоит из пар вида $(–, n)$[30], $n \in N$, а операции над этими парами и нулем совершаются нужным образом (например, $(+, 4) + (–, 2) = (+, 2)$ и т.д.) с сохранением всех основных свойств. Данное определение множества целых чисел является *конструктивным* (в отличие от аксиоматического)[31].

Следующий шаг в расширении понятия числа – множество рациональных чисел Q. Определим это множество[32]. Рассмотрим множество упорядоченных пар (a, b), где a, b – целые числа, $b \neq 0$. Упорядоченную пару (a, b) будем обозначать как $\frac{a}{b}$. Назовем две пары $\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_2}{b_2}$ *эквивалентными* (или *равными*), если $a_1b_2 = a_2b_1$. Множество всех упорядоченных пар распадается на непересекающиеся подмножества, состоящие из равных пар. Эти подмножества называются *рациональными числами* (например, рациональное число $q = \left\{\frac{1}{2}, \frac{-1}{-2}, \frac{2}{4}, \frac{-2}{-4}, ...\right\}$), для удобства и краткости речи рациональными числами называют и элементы этих подмножеств. Причем подмножества равных пар, содержащие пары вида $\frac{n}{1}$, естественно отождествлять с целым числом n. Определим операции сложения и умножения рациональных чисел. *Суммой рациональных чисел* q_1 и q_2 называется рациональное число $q_1 + q_2$, содержащее пару $\frac{a_1b_2 + a_2b_1}{b_1b_2}$, где $\frac{a_1}{b_1} \in q_1$, $\frac{a_2}{b_2} \in q_2$. *Произведением рациональных чисел* q_1 и q_2 называется рациональное число q_1q_2, содержащее пару $\frac{a_1a_2}{b_1b_2}$, где $\frac{a_1}{b_1} \in q_1$, $\frac{a_2}{b_2} \in q_2$. На основании операций суммы и произведения определяются известным образом операции вычитания и деления рациональных чисел. На множестве рациональных чисел можно также ввести *отношение порядка*, а именно, $q_1 < q_2$, если $a_1b_2 - a_2b_1 < 0$, где $\frac{a_1}{b_1} \in q_1$, $\frac{a_2}{b_2} \in q_2$. Так введенные определения позволяют доказать все известные свойства рациональных чисел[33].

Следующие шаги в расширении понятия «число» – множество действительных чисел R, множество комплексных чисел C. Как правило, обоснование всех сторон этого расширения происходит в рамках математического анализа (и даже функционального анализа), что находится довольно далеко от нашего изложения.

Отметим то, что множество действительных чисел R можно определить и как бесконечные десятичные дроби[34], и как дедекиндовы сечения в множестве рациональных чисел[35], и как совокупность классов эквивалентности в множестве фундаментальных последовательностей рациональных чисел[36]. Можно определить множество действительных чисел R и аксиоматически[37] (т.е. множество действительных чисел R – линейно упорядоченное поле, в котором выполняется аксиома Дедекинда[38]). Множество комплексных чисел C, как расширение множества действительных чисел R, можно определить, используя известный нам прием, как множество упорядоченных пар (a, b) (или $a + ib$), где $a \in R$, $b \in R$. Причем, на этом множестве упорядоченных пар определяются особым образом операции сложения, вычитания, умножения, деления. Отождествление пары вида $(a, 0)$ с действительным числом a, а пары вида $(0, b)$ – с «чисто мнимым» числом ib позволяет говорить о возможности равенства[39] $i^2 = -1$. На этом построения, связанные с понятием числа, не заканчиваются[40]. Дальнейшее расширение понятия числа слишком выходят за рамки нашего рассмотрения и поэтому мы их опускаем.

---

[29] См. Нечаев В.И. Числовые системы. М. : Просвещение, 1977 или Вилен-кин Н.Я., Дуничев К.И. и др. Современные основы школьного курса математики. М. : Просвещение. 1980. С. 140.

[30] Другими словами, N^+ (соответственно N^-) есть *декартово произведение* множеств {+} (соответственно {–}) и N или $N^+ = \{+\} \times N$, $N^- = \{-\} \times N$.

[31] Конечно, возможно и аксиоматическое определение множества целых чисел. Например такое – множество целых чисел есть наименьшее кольцо, содержащее полукольцо натуральных чисел (Виленкин Н.Я., Дуничев К.И. и др. Современные основы школьного курса математики. М. : Просвещение, 1980. С. 37.).

[32] К этому определению желательно вернуться после рассмотрения понятий *отношение эквивалентности, фактормножество.*

[33] См., например, Жолков С.Ю. Математика и информатика для гуманитариев. М. : Гардарики, 2002. С. 28 – 30 или Б.Л. ван дер Варден. Алгебра. М. : Наука, 1976. С. 58 – 62.

[34] См., например, Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. М. : Издательство МГУ, 1985. Глава 2.

[35] См., например, Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, М. : Наука, 1964. Т. 1.

[36] Этот способ связан с понятием *пополнения* метрического пространства, которое изучается в курсе функционального анализа.

[37] См., например, Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. М. : Издательство МГУ, 1985. С. 58 или Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М. : Наука, 1982. С. 607.

[38] См. Успенский В.А. Что такое аксиоматический метод ? Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет», 2000. С. 86. Dedekind J.W.R (1831 – 1916) – немецкий математик.

[39] Этот способ определения комплексных чисел был предложен в 1833 г. ирландским математиком У.Р. Гамильтоном (Hamilton W.R., 1805 – 1865) (см. Балк М.Б., Балк Г.Д., Полухин А.А. Реальные применения мнимых чисел. Киев : Радянська школа, 1988. С. 15.).

4. ОТОБРАЖЕНИЯ

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть X *и* Y *– произвольные непустые множества.*

Определение 4.1.1. Отображением, определенном на множестве X со значениями в множестве Y, *называется правило, согласно которому каждому элементу* x $\in$ X *ставится в соответствие единственный элемент* y $\in$ X.

Если это правило обозначить через *f*, то можно записать так *y* = *f* (*x*), $x \mapsto f(x)$, $x \xrightarrow{f} y, f: X \to Y$ **.**

Множество *X* называется *областью определения* отображения *f*, множество $\{y = f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ **– *областью значений* отображения *f*.**

В том случае, когда множества *X* и *Y* – нечисловые, отображение $f: X \to Y$ иногда называется оператором. Если множество *X* – нечисловое, а множество *Y* – числовое, то отображение $f: X \to Y$ иногда называется функционалом, если же множества *X* и *Y* – числовые, то отображение $f: X \to Y$ называется функцией.

Отображение $f: X \to Y$ можно задавать описательно, указывая правило, по которому каждому элементу области определения *X* ставится в соответствие единственный элемент области значений, а также с помощью таблиц, стрелочных схем, аналитически.

Заметим, что отображение $f: X \to Y$ полностью определено, если

1) задана область определения *X*;
2) для каждого $x \in X$ задан (посредством некоторого правила) единственный элемент $y \in Y$, на который элемент *x* отображается.

Определение 4.1.2. Два отображения $f_1: X_1 \to Y_1$, $f_2: X_2 \to Y_2$ называются *равными*, если:

– равны (как множества) их области определения: $X_1 = X_2$;
– каждому элементу области определения они сопоставляют один и тот же элемент области значений: $f_1(x) = f_2(x)$ для любого $x \in X_1$ (или X_2).

Очевидно, что в случае равенства отображений $f_1: X_1 \to Y_1$ и $f_2: X_2 \to Y_2$ будут равны и их области значений.

Примеры.

1. Пусть *X* – множество людей, сопоставим каждому человеку его возраст. Таким образом, мы определили отображение (или функционал) $f: X \to Y$, где *Y* – множество положительных действительных чисел.

2. Пусть *X* – множество студентов, находящихся на занятии. Сопоставим каждому студенту стул, на котором он сидит. Таким образом, мы получили отображение (или оператор) $f: X \to Y$, где *Y* – множество стульев в рассматриваемой аудитории.

3. В школьном курсе математики, как правило, рассматриваются отображения, являющиеся функциями. Например, $y = \sqrt{x}$. Здесь очевидно, что $X = [0; +\infty)$, а правило состоит в том, что каждому $X \in [0; +\infty)$ сопоставляется арифметический квадратный корень из $x: x \to \sqrt{x}$.

4. Пусть *X* – произвольное множество, рассмотрим отображение $e_X: X \to X$, определенное равенством $e_X(x) = x$ для любого $x \in X$. Такое отображение естественно назвать *тождественным* (или единичным).

Определение 4.1.3. ***Образом множества*** $X_0 \subset X$ **(*X*$_0$ ≠ ∅) при отображении** $f: X \to Y$ **называется множество**

$$f(X_0) = \{y \in Y \mid \exists x \in X_0, y = f(x)\}.$$

Если $X_0 \neq \varnothing$, то примем по определению, что $f(\varnothing) = \varnothing$.

Область значений отображения $f: X \to Y$, естественно, является образом области определения *X*, поэтому она иногда называется *образом* при отображении $f: X \to Y$. Для области значений (или образа) отображения $f: X \to Y$ используется обозначение Im*f* или *f*(*X*). Таким образом,

$$\operatorname{Im} f = f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in X\}.$$

Определение 4.1.4. ***Прообразом элемента y* $\in$ *Y* при отображении $f: X \to Y$ называется множество** $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$**. *Прообразом множества*** $Y_0 \subset Y$ **($Y_0 \neq \varnothing$) называется множество**

$$f^{-1}(Y_0) = \{x \in X \mid f(x) \in Y_0\} = \bigcup_{y \in Y_0} f^{-1}(y).$$

Если $Y_0 \neq \varnothing$, то примем по определению, что $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Таким образом, прообразов у элемента $y \in Y$ может быть несколько, а образ элемента $x \in X$ всегда единственный.

Определение 4.1.5. **Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным* (или отображением на все *Y*, или наложением), если Im*f* = *Y*, т.е. если для каждого элемента $y \in Y$ найдется такой элемент $x \in X$, что *y* = *f* (*x*).**

Определение 4.1.6. **Отображение $f: X \to Y$ называется *инъективным* (или вложением), если**

---

[40] Наиболее полно «последовательность расширений» понятия числа выглядит так: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C \subset H \subset O$, где *H* – кватернионы, *O* – октонионы, их называют также октавами или числами Кэли. За всеми разъяснениями отсылаем читателя к книге Кириллов А.А. Что такое число. М. : ИФ «ФМЛ» ВО «Наука», 1993.

$\forall x_1 \in X,\ \forall x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,

т.е. если разные элементы множества *X* отображаются в разные элементы множества *Y*.

То же самое определение можно переформулировать в следующем виде.

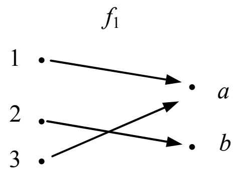
Определение 4.1.7. Отображение $f : X \to Y$ называется *инъективным*, если для любых элементов x_1, x_2 множества X верно:

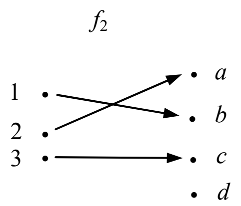
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Определение 4.1.8. **Отображение $f : X \to Y$ называется *биективным* (или взаимно однозначным, или биекцией), если оно сюръективно и инъективно.**

Примеры.

1. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y_1 = \{a, b\}$, $Y_2 = \{a, b, c, d\}$. Зададим отображения $f_i : X \to Y_i\ (i = 1, 2)$ стрелочными диаграммами:





т.е. $f_1(1) = a$, $f_1(2) = b$, $f_1(3) = a$, и $f_2(1) = b$, $f_2(2) = a$, $f_2(3) = c$, , для элемента $d \in Y_2$ нет прообраза при отображении $f_2 : X \to Y_2$.

Очевидно, что отображение $f_1 : X \to Y_1$ сюръективное, но не инъективное ($f_1(1) = f_1(3)$), отображение $f_2 : X \to Y_2$ инъективное, но не сюръективное.

Рекомендуем читателю построить аналогичным образом биективное отображение и отображение, не являющееся инъективным и сюръективным.

2. Рассмотрим отображение $x \xrightarrow{f} x^2$ на разных числовых множествах. Если $X = R$, $Y = R$, $f : X \to Y$, то отображение $x \xrightarrow{f} x^2$ не является сюръективным и не является инъективным.

Если $X = \{x \in R \mid x \geq 0\}$, $Y = R$, $f : X \to Y$, то отображение $x \xrightarrow{f} x^2$ является инъективным и не является сюръективным.

Если $X = R$, $Y = \{y \in R \mid y \geq 0\}$, $f : X \to Y$, то отображение $x \xrightarrow{f} x^2$ является сюръективным и не является инъективным.

Если $X = \{x \in R \mid x \geq 0\}$, $Y = \{y \in R \mid y \geq 0\}$, $f : X \to Y$, то отображение $x \xrightarrow{f} x^2$ является и инъективным, и сюръективным, т.е. биективным.

4.2. СУПЕРПОЗИЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

Над отображениями можно производить операции. Рассмотрим известное еще со школы, но с более общей точки зрения, понятие суперпозиции.

Определение 4.2.1. *Суперпозицией* (композицией, произведением) двух отображений $f : V \to Y$, $g : X \to V$ называется отображение $f \circ g : X \to Y$, определенное равенством $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Заметим, что если $f : X \to Y$, то справедливы соотношения $f \circ e_X = f$, $e_Y \circ f = f$, т.е. тождественное отображение в суперпозиции играет такую же роль, как единица при умножении чисел.

Аналогию между суперпозицией отображений и умножением чисел можно увидеть и в следующем утверждении.

Теорема 4.2.1. Ассоциативность суперпозиции отображений.

Если $f : X \to Z$, $g : Z \to Y$, $h : Y \to V$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Доказательство. Доказательство почти очевидно, для любого $x \in X$:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

Теорема доказана.

Суперпозиция отображений не обладает свойством коммутативности, т.е., вообще говоря, $f \circ g \neq g \circ f$. Например, пусть отображения $f : R \to R$, $g : R \to R$ определены равенствами $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$. Тогда $(f \circ g)(x) = 2x + 1$, $(g \circ f)(x) = 2(x + 1) = 2x + 2$. Поэтому $f \circ g \neq g \circ f$.

4.3. ОБРАТНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ

Продолжить аналогию между умножением чисел и суперпозицией можно дальше.

Определение 4.3.1. Пусть даны два отображения $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, такие, что $f \circ g = e_Y$, тогда *f* – *левое обратное* отображение к отображению *g*, а *g* – *правое обратное* отображение к отображению *f*. Если же $f \circ g = e_Y$ и $g \circ f = e_X$, то тогда отображение *g* называется *обратным к отображению f* (а *f* – обратным к *g*) и обозначается символом f^{-1}.

Конечно же, читатель увидит в f^{-1} «обратное число», так как если для числа a существует обратное число a^{-1}, то $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Очевидно, если для отображения f существует обратное отображение f^{-1}, то:

$$1)\ f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y); \qquad 2)\ \left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Существуют ли, вообще, обратные отображения? Рассмотрим пример.

Пример. Рассмотрим две школьные функции

$$f(x) = \sin x \text{ и } g(x) = \arcsin x.$$

Из школьного курса известны соотношения

$$\sin(\arcsin x) = x \text{ и } \arcsin(\sin x) = x \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Если мы определим отображения f и g так, чтобы $f : \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;\ 1]$, $g : [-1;\ 1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, то очевидно $f^{-1} = g$ и $g^{-1} = f$.

При введении нового определения возникает также и такой вопрос: однозначно ли определяется новое понятие? Может ли для данного отображения f существовать несколько обратных отображений? Ответ на этот вопрос дает теорема.

Теорема 4.3.1. Если обратное отображение существует, то оно единственное.

Доказательство. Предположим, что существует несколько обратных отображений для отображения f. Выделим любые два: f_1^{-1} и f_2^{-1}. Тогда $f_1^{-1} = f_1^{-1} \circ \left(f \circ f_2^{-1}\right) = \left(f_1^{-1} \circ f\right) \circ f_2^{-1} = f_2^{-1}$. Следовательно, обратное отображение может быть только одно. Теорема доказана.

Заметим, в отличие от единственного обратного отображения может существовать много односторонних обратных отображений.

Пример. Пусть $X = Y = \{ (x_1;\ x_2;\ ...,\ x_n;\ ...) \mid x_i \in R\}$ – множество бесконечных числовых последовательностей, рассмотрим отображения $f_a : X \to X$ (a – некоторое число), $g : X \to X$, определенные следующим образом:

$$(x_1;\ x_2;\ ...,\ x_n;\ ...) \xrightarrow{f_a} (a;\ x_1;\ x_2;\ ...,\ x_n;\ ...),$$
$$(x_1;\ x_2;\ ...,\ x_n;\ ...) \xrightarrow{g} (x_2;\ ...,\ x_n;\ ...).$$

Очевидно, что $g \circ f_a = e_X$. Таким образом, для отображения g существует бесконечное число правых обратных отображений.

Пример. Пусть $X = \{x \in R \mid x > 0\}$, $Y = \{ (x; y) \mid x \in R, y \in R, x > 0, y > 0\}$. Рассмотрим отображения $f : X \to Y$, $g_i : Y \to X$, $i = 1, 2, 3$, определенные равенствами:

$$f(x) = (x;\ x^2);$$
$$(x; y) \xrightarrow{g_1} x;$$
$$(x; y) \xrightarrow{g_2} \frac{x}{y};$$
$$(x; y) \xrightarrow{g_3} \sqrt{x}.$$

Очевидно, что $g_i \circ f = e_X$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, для отображения f существует не менее трех обратных левых отображений.

Поставим также следующие вопросы: для каких отображений f существует обратное отображение? Для каких отображений f существует левое обратное отображение и не существует правого обратного и наоборот?

Для ответа на первый вопрос докажем сначала лемму.

Лемма 4.3.1. Если $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ – любые отображения, для которых $f \circ g = e_Y$, то f будет сюръективно, а отображение g будет инъективным.

Доказательство. Докажем, что g – инъективное отображение. Пусть $y \neq y'$, $y \in Y$, $y' \in Y$ и $g(y) = g(y')$. Тогда

$$y = e_y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(g(y')) = (f \circ g)(y') = e_Y(y') = y'.$$

Противоречие. Следовательно, $g(y) \neq g(y')$, т.е. g – инъективное отображение.

Докажем, что f – сюръективное отображение. Пусть y – любой элемент из Y. Тогда $y = e_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$, а это и означает сюръективность f. Лемма доказана.

Теорема 4.3.2. Отображение f имеет обратное f^{-1} тогда и только тогда, когда отображение f биективно.

Доказательство. 1. Пусть для отображения $f : X \to Y$ существует обратное $f^{-1} :\ Y \to X$. Так как $f^{-1} \circ f = e_X$, то f – инъективно. Далее, $f \circ f^{-1} = e_Y$ и, следовательно, f – сюръективно. Необходимость биективности f для существования f^{-1} доказана.

2. Пусть $f : X \to Y$ – биективное отображение. Тогда для любого $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$. Тем самым мы определили отображение $g : Y \to X$, $g(y) = x$, обладающее свойствами $g \circ f = e_X$, $f \circ g = e_Y$, т.е. $g = f^{-1}$. Теорема доказана.

Следствия. 1. Из биективности $f : X \to Y$ вытекает биективность f^{-1}, причем $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

2. Если отображения $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – биективные, то биективное и отображение $g \circ f$, причем $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ввиду очевидности утверждений, докажем только $(g \circ f)^{-1} = \ = f^{-1} \circ g^{-1}$. Используя ассоциативность суперпозиции, получим

$$(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ \left(f \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\right) = g \circ \left(\left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1}\right) = g \circ g^{-1} = e_Z .$$

Аналогично можно получить, что $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = e_X$.

Заметим, что символ $f^{-1}(B)$ прообраза множества $B \subset Y$ ассоциируется с символом f^{-1} обратной функции, однако следует иметь в виду, что прообраз множества определен для любого отображения $f: X \to Y$, даже если оно не является биективным, и, следовательно, не имеет обратного.

Ответ на последний поставленный вопрос мы дадим в виде задачи.

Задача. Доказать, что:

1) отображение f инъективно в том и только в том случае, если оно обладает левым обратным отображением;

2) отображение f сюръективно в том и только в том случае, если оно обладает правым обратным отображением.

К ГЛАВЕ 4

4.1. Привести пример отображения, которое:

а) является инъективным, но не является сюръективным;

б) не является инъективным, но является сюръективным;

в) не является инъективным и не является сюръективным;

г) является биективным.

4.2. Для данного отображения $f: X \to Y$, $X = R, Y = R$ найти образ $f(A)$ множества A и прообраз $f^{-1}(B)$ множества B:

а) $f(x) = x$, $A = [0;1]$, $B = [0;1]$;

б) $f(x) = x^2$, $A = [0;1]$, $B = [0;1]$;

в) $f(x) = \sin x$, $A = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, $B = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

4.3. Пусть $f: X \to Y$ – некоторое отображение, $A \subset X$, $B \subset Y$. Доказать следующие соотношения:

а) $f^{-1}(f(A)) \supset A$;

б) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$;

в) $f(X \setminus A) \supset f(X) \setminus f(A)$;

г) $f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$.

4.4. Доказать, что, вообще говоря, справедливы соотношения:

а) $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$ (тем самым $f^{-1}(f(A)) \neq A$);

б) $f\left(f^{-1}(B)\right) \not\supset B$ (тем самым $f\left(f^{-1}(B)\right) \neq B$);

в) $f(X \setminus A) \not\subset f(X) \setminus f(A)$ (тем самым $f(X \setminus A) \neq f(X) \setminus f(A)$).

4.5. Верны ли соотношения (если какое-то из этих равенств неверно, то привести соответствующий пример)?

а) $f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$.

б) $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.

4.6. Пусть $A_i \subset X$, $A_i \neq \varnothing$, $B_i \subset Y$, $B_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2$. Доказать следующие соотношения:

а) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

б) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

в) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$;

г) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

д) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

е) $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

4.7. Доказать, что, вообще говоря, справедливы соотношения:

а) $f(A_1 \cap A_2) \not\supset f(A_1) \cap f(A_2)$, тем самым $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$;

б) $f(A_1 \setminus A_2) \not\subset f(A_1) \setminus f(A_2)$, тем самым $f(A_1 \setminus A_2) \neq f(A_1) \setminus f(A_2)$.

4.8. Докажите, что отображение $f: X \to Y$ сюръективно тогда и только тогда, когда для любого множества $B \subset Y$ справедливо равенство $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

4.9. Докажите эквивалентность следующих утверждений относительно отображения $f : X \to Y$:

а) f – инъективное отображение;

б) $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$ для любого множества $A \subset X$;

в) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ для любой пары A_1, A_2 подмножеств X;

г) $f(A_1) \cap f(A_2) = \varnothing \Leftrightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing$ для любой пары A_1, A_2 подмножеств X;

д) $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$ для любой пары A_1, A_2 ($A_1 \supset A_2$) подмножеств X.

5. ОТНОШЕНИЯ

5.1. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. БИНАРНОЕ ОТНОШЕНИЕ

В математике часто приходится изучать связи (или отношения) между элементами множества. Например, при изучении натуральных чисел N вводится понятие «больше», так например, $3 > 2$. Это отношение связывает два элемента множества N. На множестве треугольников вводится отношение, определяемое понятием «подобие», причем это отношение также применяется к паре треугольников.

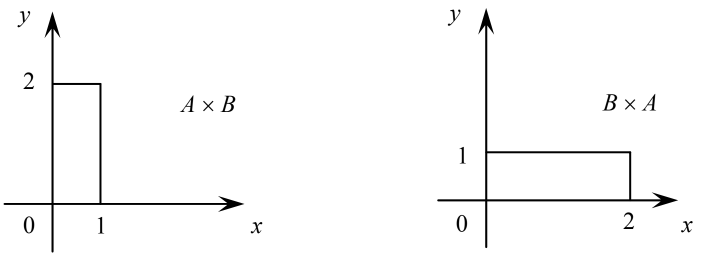
Таким образом, можно сказать, что часто задание некоторого отношения между элементами некоторых множеств равносильно описанию некоторого множества пар элементов этих множеств. Попытаемся выразить эту ситуацию на языке теории множеств.

Пусть A и B – два непустых множества.

Определение 5.1.1. *Декартовым* (или *прямым*) *произведением множеств A и B* называется множество $A \times B$ всех упорядоченных пар $(x; y)$, где $x \in A$, $y \in B$.

Декартово произведение множеств – это еще одна операция над множествами.

Пример. Пусть $A = [0; 1]$, $B = [0; 2]$. Изобразим множества $A \times B$ и $B \times A$ – эти множества будут состоять из точек соответствующих прямоугольников:



Таким образом, $A \times B \neq B \times A$. Следовательно, операция декартового произведения множеств не является коммутативной.

Аналогично можно определить декартово произведение любого числа множеств: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Если $A = B$ – непустое множество, то часто вместо $A \times B$ пишут A^2. Например, если $A = B = R$ – множество точек на числовой оси, то $A^2 = R^2 = \{(x; y) | x \in R, y \in R\}$ можно представить как множество точек на плоскости, а $A^3 = R^3 = \{(x; y; z) | x \in R, y \in R, z \in R\}$ – как множество точек пространства.

Определение 5.1.2. *Бинарным отношением* φ *на множествах A и B* называется подмножество декартова произведения $A \times B$. Если упорядоченная пара $(x; y) \in A \times B$ является элементом бинарного отношения $\varphi \subset A \times B$, то говорят, что для элементов $x \in A$ и $y \in B$ выполнено отношение φ и обозначают это следующим образом: $x\varphi y$ или $(x; y) \in \varphi$. Если $A = B$, то говорят о *бинарном отношении* φ *на множестве A* ($\varphi \subset A^2$).

Пример. Пусть A – множество людей, B – множество стран. Рассмотрим бинарное отношение φ на множествах A и B – «быть жителем данной страны». Тогда $(a; b) \in \varphi$ в том и только том случае, если человек $a \in A$ живет в стране $b \in B$.

Понятие бинарного отношения обобщается на случай n-арного отношения ($n \in N$), как подмножество φ декартова произведения n множеств: $\varphi \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Частным случаем n-арного отношения является унарное отношение (т.е. 1-арное отношение): $\varphi \subset A$. В данном случае это ничто иное, как подмножество A, следовательно, при необходимости всякое подмножество можно рассматривать как пример некоторого унарного отношения. Отметим некоторые частные случаи отношений.

Определение 5.1.3. Бинарное отношение $\varphi \subset A^2$ называется:

– *рефлексивным*, если $\forall x \in A : (x; x) \in \varphi$ (для любого элемента $x \in A$ выполнено $(x; x) \in \varphi$);

– *антирефлексивным*, если $\forall x \in A : (x; x) \notin \varphi$;

– *симметричным*, если $\forall x, y \in A : (x; y) \in \varphi \Rightarrow (y; x) \in \varphi$;

– *антисимметричным*, если $\forall x, y \in A : (x; y) \in \varphi$ и $(y; x) \in \varphi \Rightarrow x = y$;

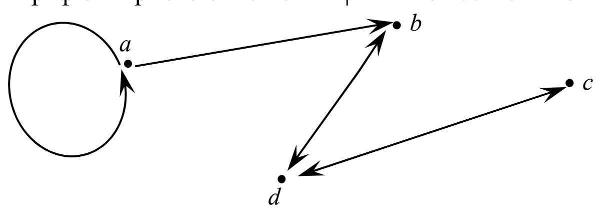
– *транзитивным*, если $\forall x, y, z \in A : (x; y) \in \varphi$ и $(y; z) \in \varphi \Rightarrow (x; z) \in \varphi$.

Рассмотрим один из наглядных способов представления бинарного отношения на конечном множестве A. Пусть A – непустое конечное множество и φ – бинарное отношение на множестве A. Представим элементы множества A точками и назовем их *вершинами ориентированного графа*. Каждой паре $(a; b) \in \varphi$ при $a \neq b$ поставим в соответствие стрелку от a к b и назовем ее *ориентированным ребром графа* (или просто *ребром графа*). Паре $(a; a) \in \varphi$ соответствует ребро в виде «петли». Изобразив все вершины и все ребра, мы получим *ориентированный граф* для бинарного отношения φ на множестве A.

Пример. Пусть $A = \{a; b; c; d\}$ и бинарное отношение φ на множестве A определяется следующим образом

$$\varphi = \{(a; a); (a; b); (c; d); (d; c); (b; d); (d; b)\}.$$

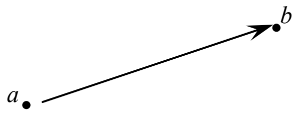
Для нашего случая ориентированный граф бинарного отношения φ на множестве A можно изобразить так:



Заметим, что ребро (a; a) начинается и заканчивается в вершине a (т.е. получается «петля»), ребра (c; d) и (d; c) (как и ребра (d; b), (b; d)) обозначены одной (с целью упрощения структуры графа) «двусторонней» стрелкой.

Ориентированный граф является универсальным способом представления бинарного отношения на конечном множестве, так как каждое бинарное отношение на конечном множестве можно представить ориентированным графом и, наоборот, каждый ориентированный граф определяет некоторое бинарное отношение на множестве его вершин. Причем этот способ позволяет быстро выявить свойства рассматриваемого бинарного отношения. Если бинарное отношение рефлексивное, то в ориентированном графе в каждой вершине имеется петля. Если бинарное отношение антирефлексивное, то ни одна из вершин не имеет петли. Если бинарное отношение симметричное, то все ребра графа являются двусторонними стрелками. Если бинарное отношение антисимметричное, то ребра графа имеют только по одной стрелке и возможно есть петли. Если бинарное отношение транзитивное, то для каждой пары ребер (a; b) и (b; c) есть замыкающее ребро (a; c). Например, в предыдущем примере отношение φ не является рефлексивным, не является антирефлексивным, не является симметричным, не является антисимметричным, не является транзитивным.

Рассмотрим такой вопрос: антисимметрично ли бинарное отношение φ на множестве $A = \{a;\, b\}$, заданное ориентированным графом:



т.е. $\varphi = \{(a;\, b)\} \subset A^2$ Ответ на этот вопрос затрудняется тем, что нет таких элементов $a \in A$, $b \in B$, что $(a; b) \in \varphi$ и $(b; a) \in \varphi$. В дальнейшем мы такие ситуации рассматривать не будем, и будем считать, что в подобной ситуации вопрос, поставленный вначале, не корректен.[41]

Понятие отношения (в частности, бинарного отношения) является инструментом, с помощью которого можно изложить основные понятия математики на основе теории множеств. Покажем, например, как можно ввести понятие отображения, основываясь на понятии бинарного отношения.

Основная идея этого шага состоит в том, что для отображения можно ввести понятие графика отображения (по аналогии с «школьным понятием» графика функции), как множество упорядоченных пар и отождествить само отображение и график отображения (так как всю информацию об отображении можно получить из графика отображения).

Определение 5.1.4. Бинарное отношение f на множествах A и B называется *функциональным*, если: $(x; y_1) \in f$ и $(x; y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$ (или для каждого $x \in A$ существует не более одного $y \in B$, при котором $(x; y) \in f$).

Те элементы $x \in A$, для которых существует такой $y \in B$, что $(x; y) \in f$ называются *областью определения* функционального отношения f и обозначаются $\mathrm{Dom}\, f$ ($\mathrm{Dom}\, f \subset A$). Для любого $x \in \mathrm{Dom}\, f$ определяется *значение f на аргументе* $x \in \mathrm{Dom}\, f$ как тот единственный элемент $y \in B$, для которого $(x; y) \in f$. Этот элемент записывается как $f(x)$. Все такие элементы y образуют *множество значений f* и обозначаются $\mathrm{Im} f$ ($\mathrm{Im} f \subset Y$).

Функциональное отношение f на множествах A и B называется также отображением на множествах A и B. Если область определения f совпадает с множеством A ($\mathrm{Dom}\, f = A$), то принято писать $f : A \to B$ и функциональное отношение f называется *отображением, определенном на множестве A со значениями в множестве B*. После этого можно излагать все, что нам известно из главы «Отображения».

---

[41] Мы не будем обсуждать причин для такого решения, так как это приведет к вопросам, лежащим далеко за нашим изложением. Скажем только, что импликация (или: материальная импликация) $\left(\forall a \in A, \forall b \in A, \left((a;b) \in \varphi\right) \wedge \left((b;a) \in \varphi\right)\right) \Rightarrow (a = b)$ в рамках математической логики (или: классической логики) в случае ложного основания, конечно, является истинной. Но материальная имликация является формальным аналогом условного высказывания (вспомните определение импликации !) – «… схватывая многие важные черты логического поведения условного высказывания, материальная импликация не является достаточно адекватным его описанием.» (Горский, А.А. Краткий словарь по логике / А.А. Горский и др. – М. : Просвещение, 1991. – С. 61). Даже более того, «ряд законов классической логики, содержащих материальную импликацию и не согласующихся с обычными, или интуитивными, представлениями о логических связях, получили название *парадоксов материальной импликации*. В числе этих парадоксов *закон Дунса Скота …*» (там же, с. 61). Таким образом, классическая логика с материальной импликацией не может быть признана удачным описанием условной связи, а значит и логического следования.

Более удовлетворительное описание условной связи и логического следования было дано в 50-е гг. прошлого столетия В. Аккерманом, А.Андерсоном, Н. Белнапом в *релевантной логике*. Введенная ими непарадоксальная имликация получила название релевантой (т.е. уместной), поскольку ею могли связываться только высказывания, имеющие какое-то общее содержание. Отметим, что в релевантой логике нельзя выводить из ложного высказывания какое угодно высказывание.

Таким образом, в каком случае нужно считать импликацию $A \Rightarrow B$ истинной в рамках логики – вопрос далеко не очевидный.

Повторим еще раз, что обсуждение подобных вопросов выходит далеко за рамки нашего изложения и, чтобы не вдаваться в них, мы принимаем соответствующее решение.

5.2. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ. ФАКТОРМНОЖЕСТВО. РАЗБИЕНИЕ НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Среди бинарных отношений особенно важно отношение эквивалентности, являющееся обобщением понятия равенства элементов.

Определение 5.2.1. Бинарное отношение ~ на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивное, симметричное, транзитивное. При этом элементы, находящиеся в этом отношении, называются *эквивалентными*.

Примеры.

1. В курсе геометрии вводится понятие сонаправленности и противоположной направленности лучей a и b: $a \uparrow\uparrow b$ и $a \uparrow\downarrow b$. Бинарное отношение сонаправленности на множестве всех лучей пространства, очевидно, рефлексивное: $a \uparrow\uparrow a$, симметричное: $a \uparrow\uparrow b \Rightarrow b \uparrow\uparrow a$, транзитивное: $a \uparrow\uparrow b$ и $b \uparrow\uparrow a \Rightarrow a \uparrow\uparrow c$, следовательно, бинарное отношение сонаправленности на множестве лучей – отношение эквивалентности. Бинарное отношение противоположной направленности на множестве всех лучей не является рефлексивным, симметричное не является транзитивным. Следовательно, это бинарное отношение не является отношением эквивалентности.

2. На множестве Z целых чисел бинарное отношение d «сравнимость по модулю $n\left(n \in N\right)$» определяется следующим образом:

$$d = \left\{(x;y) \middle| (x-y) \middle| n,\ n \in N\right\}$$

(т.е. xdy тогда и только тогда, когда $x - y$ делится нацело на число n или тогда и только тогда, когда x и y при делении на n дают одинаковые остатки).

Отношение d рефлексивное ($x - x = 0$ делится на любое $n \in N$ без остатка), симметричное ($\forall x,\ y \in Z\ \ x - y$ делится на n без остатка $\Rightarrow y - x$ делится на n без остатка), транзитивное

$$(\forall x, y, z \in Z\ \ x - y \mid n,\ \ y - z \mid n \Rightarrow x - z = (x-y) + (y-z) \mid n).$$

Следовательно, бинарное отношение d является отношением эквивалентности.

3. Рассмотрим множество V направленных отрезков (включая и отрезки нулевой длины) в пространстве. Введем на V отношение равенства. Два направленных отрезка и $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если они имеют одинаковую длину и одно и то же направление (это значит, что лучи AB и CD сонаправлены). Очевидно, что это бинарное отношение рефлексивное, симметричное, транзитивное, т.е. является отношением эквивалентности.

4. Рассмотрим на множестве U всевозможных уравнений бинарное отношение равносильности. Два уравнения называются равносильными, если они имеют одинаковые множества решений. Очевидно, что это бинарное отношение также является отношением эквивалентности.

Определение 5.2.2. Пусть на непустом множестве A задано отношение эквивалентности ~, $x \in A$ – некоторый элемент из A. Множество $\overline{x} = \left\{y \in A \middle| y \sim x\right\}$ элементов, эквивалентных данному x, называется *классом эквивалентности по отношению ~, содержащим элемент x* (или просто *классом эквивалентности элемента x*).

Примеры.

1. Как мы уже видели, отношение сонаправленности является отношением эквивалентности на множестве всех лучей. Это отношение эквивалентности распределяет все лучи по классам эквивалентности. Два луча относятся к одному классу эквивалентности, если они сонаправленные. Это обстоятельство позволяет ввести понятие направления. Класс эквивалентности некоторого луча по отношению сонаправленности называется *направлением* этого луча. Таким образом, два луча имеют одинаковое направление, если они принадлежат одному классу эквивалентности по отношению сонаправленности.

2. Отношение d «сравнимость по модулю n» также является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности целого числа x по отношению d называется *классом вычетов по модулю n*. Очевидно, что $\overline{x} = \left\{y \in Z \middle| y = x + nk,\ k \in Z\right\}$. Сколько будет таких классов вычетов по модулю n? Пусть, например, $n = 3$. Легко увидеть, что:

$\overline{0} = \overline{3} = \overline{6} = \ldots = \overline{3k},\ \ \overline{1} = \overline{4} = \overline{7} = \ldots = \overline{3k+1},\ \ \overline{2} = \overline{5} = \overline{8} = \ldots = \overline{3k+2},$

т.е. таких классов эквивалентности будет всего три, их можно обозначить как $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$. Поступая аналогично, можно увидеть, что классов вычетов по модулю n всего n штук: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}$ (т.е. при делении целого числа на число n($n \in N$) может получиться остаток 0, или 1, или 2, ... , или $n - 1$).

3. Отношение равенства на множестве направленных отрезков также является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности направленного отрезка по отношению равенства называется *свободным вектором*.

4. Отношение равносильности на множестве всех уравнений, как мы видели, тоже является отношением эквивалентности. При решении уравнения[42] мы просто перебираем представителей одного класса эквивалентности по отношению равносильности, пока не придем к наиболее простому представителю, например, $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = 0$.

Определение 5.2.3. *Фактормножеством*[43] A/~ непустого множества A по отношению эквивалентности ~ называется множество всех классов эквивалентности по отношению ~.

Если проанализировать рассмотренные примеры, то мы заметим, что два разных класса эквивалентности не пересекаются, и что каждый элемент принадлежит к какому-то классу эквивалентности. На самом деле это общие свойства всех классов эквивалентности по отношению эквивалентности, связанные с понятием разбиения.

---

[42] Если делать только равносильные преобразования.

[43] Встречается и такой вариант написания этого слова *фактор-множество*.

Определение 5.2.4. *Разбиением множества A* называется такое семейство его непустых подмножеств, что каждый элемент множества A входит в точности в одно подмножество из этого семейства (или *разбиение множества A* есть семейство непустых непересекающихся его подмножеств, объединение которых есть все множество A).

Теорема 5.2.1. Пусть на непустом множестве A задано отношение эквивалентности ~. Тогда фактормножество $A/\sim$ является разбиением множества A.

Доказательство. Каждый элемент $a \in A$ принадлежит классу эквивалентности $\overline{a}$ $(a \sim a)$. Осталось доказать, что каждый элемент множества A принадлежит в точности одному подмножеству семейства $A/\sim$. Для этого достаточно показать, что классы эквивалентности, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают.

Пусть $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – классы эквивалентности, имеющие общий элемент c. Тогда, если $x \in \overline{a}$, то $x \sim a$, $a \sim c$ и $c \sim b$. Далее, в силу свойств отношения эквивалентности $x \sim b$, т.е. $x \in \overline{b}$. Таким образом, $\overline{a} \subset \overline{b}$. Аналогично доказывается, что $\overline{b} \subset \overline{a}$. Следовательно, $\overline{a} = \overline{b}$. Итак, фактормножество $A/\sim$ является разбиением. Теорема доказана.

Следствие. Пусть на непустом множестве A задано отношение эквивалентности ~, тогда:

1) $a \in \overline{a}$, $\forall a \in A$;
2) $\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow a \sim b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in A$;
3) $\overline{a} \neq \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} = \varnothing$, $\forall a \in A$, $\forall b \in A$;
4) $A = \bigcup\limits_{a \in A} \overline{a}$.

Верно и обратное утверждение к теореме 5.2.1.

Теорема 5.2.2. Пусть S – некоторое разбиение непустого множества A. Тогда на множестве A существует бинарное отношение s такое, что $A/s = S$.

Доказательство. Определим на множестве A бинарное отношение s следующим образом: $xsy \Leftrightarrow x$ и y принадлежат одному и тому же множеству семейства S. Очевидно, что это бинарное отношение является отношением эквивалентности, причем фактормножество $A/s = S$. Теорема доказана.

Пример. Представим множество R^2 как объединение непересекающихся окружностей с центром в точке (0; 0). Таким образом, мы получаем разбиение множества R^2. Соответствующее отношение эквивалентности на множестве R^2 для этого разбиения определяется так:

$$(x_1; y_1) \sim (x_2; y_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} = \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}\,.$$

5.3. ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

При рассмотрении натуральных чисел обычно располагают их в определенном порядке: 1, 2, 3, … . Тем самым подчеркивается, что на множестве N задано некоторое отношение, позволяющее расположить натуральные числа одно за другим. Выпишем некоторые свойства этого отношения:

1) если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$;
2) если $a \le b$ и $b \le a$, то $a = b$.

Естественно, эти свойства 1) – 2) отождествить с понятием порядка на множестве N. Обобщим эту ситуацию. Введем определение.

Определение 5.3.1. Бинарное отношение $\lhd$ на множестве A называется *отношением частичного порядка на множестве A* (или *частичным порядком на множестве A*), если оно обладает следующими свойствами:

1) транзитивность;
2) антисимметричность.

Множество A с заданным на нем частичным порядком называется *частично упорядоченным*. Два элемента x, y частично упорядоченного множества называются *сравнимыми*, если $x \lhd y$ или $y \lhd x$. Заметим, что определение частичного порядка не требует, чтобы любые два элемента множества были сравнимыми. Добавив это требование, получим определение полного порядка на множестве A.

Определение 5.3.2. Отношение $\lhd$ частичного порядка на множестве A называется *отношением полного* (или *линейного*) *порядка на множестве A*, если для любых $a \in A$ и $b \in A$ $(a \neq b)$ верно $a \lhd b$ или $b \lhd a$.[44] Множество A с заданным на нем отношением полного порядка называется *полностью упорядоченным* (или *линейно упорядоченным*, или *цепью*).

Примеры.

1. Любое непустое подмножество множества R с обычным отношением $\le$ (или $<$) является полностью упорядоченным множеством.

2. Пусть U – произвольное непустое множество. Тогда на множестве всех подмножеств множества U отношение включения $\subset$ будет частичным порядком.

3. Пусть есть несколько картонных коробок, которые образуют множество X. Будем говорить, что $x \lhd y$, если коробка x целиком помещается внутрь коробки y (или если x и y – одна и та же коробка). В зависимости от набора коробок X этот порядок может быть или не быть полным.

4. Пусть A и B – частично упорядоченные множества, на которых определены частичные порядки $\lhd_A$ и $\lhd_B$, соответственно. Можно определить отношение порядка на множестве $A \times B$ разными способами. Можно считать, что $(a_1; b_1) \lhd (a_2; b_2)$, если $a_1 \lhd a_2$ и $b_1 \lhd b_2$ (покоординатное сравнение). Этот порядок не будет полным, даже если порядки

[44] В некоторых учебниках это свойство бинарного отношения называют *связанностью*.

$\lhd_A$ и $\lhd_B$ были полными. Чтобы получить полный порядок, определим его так: $(a_1; b_1) \lhd (a_2; b_2)$, если $a_1 \lhd_A a_2$ или $a_1 = a_2$ и $b_1 \lhd_B b_2$.

5. Бинарное отношение равенства является частичным порядком на любом непустом множестве A: $a \lhd b \Leftrightarrow a = b$. Для такого частичного порядка никакие два различных элемента не сравнимы.

Понятие отношения порядка (полного или частичного) на множестве A можно уточнить. Пусть A – непустое множество.

Определение 5.3.3. Бинарное отношение $\lhd$ на множестве A называется *отношением строгого порядка на множестве A* (или *строгим порядком на множестве A*), если оно обладает следующими свойствами:

1) транзитивность;
2) антисимметричность;
3) антирефлексивность.

Определение 5.3.4. Бинарное отношение $\lhd$ на множестве A называется *отношением нестрогого порядка на множестве A* (или *нестрогим порядком на множестве A*), если оно обладает следующими свойствами:

1) транзитивность;
2) антисимметричность;
3) рефлексивность.

Конечно, бинарное отношение $\lhd$ на множестве A является отношением строгого (нестрогого) порядка на множестве A, если оно является отношением частичного порядка на множестве A и антирефлексивно (рефлексивно).

Отношение строгого (нестрогого) порядка на множестве A обозначается, как правило, символом $\prec$ ($\times$), что является, очевидно, отражением символа < (≤). Используя эти символы можно записать: $x \times y \Leftrightarrow x \prec y$ или $x = y$, т.е. если к бинарному отношению $\prec$ добавить все элементы вида $(x; x)$, то получим бинарное отношение $\times$ и, наоборот, если из бинарного отношения $\times$ удалить элементы вида $(x; x)$, то получим бинарное отношение $\prec$.

Примеры.

1. Бинарное отношение < (≤) на любом непустом подмножестве R является отношением полного строгого (нестрогого) порядка.

2. На множестве функций с действительными аргументами и значениями можно ввести частичный строгий (нестрогий) порядок, считая, что $f \prec g$ ($f \times g$), если $f(x) < g(x)$ ($f(x) \le g(x)$).

3. На буквах русского алфавита традиционно определяется некоторый порядок (а $\prec$ б $\prec$ в $\prec$ … $\prec$ я). Этот порядок является полным строгим.

4. На словах русского алфавита определен *лексикографический* порядок (как в словарях). Этот порядок можно определить так: если слово x является началом слова y, то $x \prec y$ (например, маг $\prec$ магистр). Если ни одно из слов не является началом другого, смотрим на первую по порядку букву, в которой слова отличаются: то слово, где эта буква меньше в алфавитном порядке, и будет меньше. Этот порядок также полный (что иначе бы делали составители словарей?) и строгий.

Пусть A – частично упорядоченное множество.

Определение 5.3.5. Элемент $a \in A$ называется *наименьшим* (*наибольшим*) в множестве A, если для любого $x \in A$, $x \ne a$ верно $a \lhd x$ ($x \lhd a$).

Определение 5.3.4. Полностью упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Очевидно, что любое частично упорядоченное множество имеет только один наименьший (наибольший) элемент.

Примеры.

1. Любое конечное полностью упорядоченное множество является вполне упорядоченным.
2. Множество N, очевидно, вполне упорядоченное.
3. Множество Z, взятое в естественном порядке: …, –3,–2,–1, 0, 1, 2, 3, … не является вполне упорядоченным.

Теорема 5.3.1. (Теорема Цермело) Всякое множество путем введения некоторого отношения порядка можно сделать вполне упорядоченным.

Пример. Как мы уже знаем, множество Z, взятое в естественном порядке, не является вполне упорядоченным. Но, расположив его элементы в специальном порядке, например 0, –1, 1, –2, 2, …, мы можем сделать его вполне упорядоченным.

5.4. ТРАНСФИНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Очень часто при доказательстве математических утверждений используется *метод математической индукции,* состоящий в следующем.

Пусть имеется некоторое утверждение $P(n)$, которое формулируется для каждого натурального числа n. Если:

1) утверждение $P(1)$ верно,
2) из того, что $P(k)$ верно для всех $k \le n$ следует, что $P(n + 1)$ верно,

то утверждение $P(n)$ верно для любого $n \in N$.

Аналогичный метод доказательств может быть использован с заменой натуральных чисел на любое вполне упорядоченное множество. В этом случае он носит название *трансфинитной индукции*. Итак, метод трансфинитной индукции состоит в следующем.

Пусть дано некоторое утверждение $P(a)$, формулируемое для каждого $a \in A$, где A – вполне упорядоченное множество. Если:

1) верно утверждение $P(a_1)$, где a_1 – наименьший элемент множества A;
2) из того, что утверждение $P(a)$ верно для всех $a \times b$ ($a \ne b$) следует, что $P(b)$ верно,

тогда $P(a)$ верно для всех $a \in A$.

Действительно, если бы существовали элементы в A, для которых $P(a)$ не имеет места, то в множестве таких элементов нашелся бы наименьший, обозначим его a' (очевидно $a_1 \times a'$), и мы пришли бы к противоречию, так как для всех $a \times a'$ ($a \ne a$) утверждение $P(a)$ было бы верно и в силу 2) $P(a')$ тоже должно быть верно.

Мы не будем рассматривать примеры на применение трансфинитной индукции. Желающим познакомиться с подобными примерами можно рекомендовать, например, книгу: Верещагин, Н.К. Начала теории множеств / Н.К. Верещагин, А. Шень. – М. : МЦНМО, 1999, где с использованием трансфинитной индукции доказано, например, что куб нельзя разрезать на части, из которых можно было бы составить правильный тетраэдр (что составляет решение третьей проблемы Гильберта[45]).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 5

5.1. Сколько элементов содержит множество $A \times B$, если A имеет n элементов, а множество B – m элементов?

5.2. Показать на примерах, что приведенные ниже равенства верны не для любых множеств A, B и C:

а) $A \times B = B \times A$;

б) $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.

5.3. Докажите, что для произвольных множеств A, B, C справедливы равенства:

а) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

б) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

в) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

5.4. Пусть A и B – конечные множества, в множестве A – n элементов, в множестве B – m. Сколько существует бинарных отношений на множествах A и B?

5.5. Рассмотреть следующие отношения с точки зрения наличия свойств рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности:

а) $\{(x;y) | x \in Z, y \in Z, x \le y+1\}$;

б) $\{(x;y) | x \in Z, y \in Z, x^2 = y^2\}$;

в) $\{(x;y) | x \in Z, y \in Z, |x| = |y|\}$;

г) $\{(X;Y) | X \subset Z, Y \subset Z, X \cap Y = \varnothing\}$;

д) $\{(x;y) | x \in Z, y \in Z, x < y\}$;

е) $\{(x;y) | x \in R, y \in R, x + y = 1\}$;

ж) $\{(x;y) | x \in N, y \in N, x \le y\}$;

з) $\{(x;y) | x \in N, y \in N, x \ne y\}$;

и) $\{(x;y) | x \in R, y \in R, x^2 + x = y^2 + y\}$;

к) $\{(x;y) | x \in R, y \in R, x^2 + y^2 = 1\}$.

5.6. Пусть $A = \{a; b; c; d\}$. Построить на множестве A, как на вершинах, ориентированный граф, соответствующий бинарному отношению φ на множестве A, которое является:

а) рефлексивным, симметричным, транзитивным;

б) антирефлексивным, антисимметричным, транзитивным.

5.7. Пусть на множестве R^2 определено бинарное отношение φ. Рассмотрим множество φ как множество на координатной плоскости R^2. Какими свойствами должно обладать множество φ, чтобы бинарное отношение φ было:

а) рефлексивным;

б) антирефлексивным;

в) симметричным;

г) антисимметричным;

д) транзитивным.

5.8. Доказать, что бинарное отношение φ на множестве R^2, определенное равенством $\varphi = \{((x;y);(x_1;y_1)) \,|\, |x| = |x_1|\} \subset R^2 \times R^2$, является отношением эквивалентности. Описать фактормножество R^2/φ.

5.9. Является ли отношением эквивалентности бинарное отношение φ на множестве R^2, определенное равенством

$$\varphi = \{((x;y);\ (x_1;y_1)) \,|\, (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \le r^2\} \subset R^2 \times R^2 \ ?$$

5.10. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на трехэлементном множестве $\{a; b; c\}$?

5.11. Задано разбиение $A_1 = \{1; 2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4; 5\}$, $A_4 = \{6; 7; 8; 9\}$ множества $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Образовать множество всех пар из $A \times A$, которые принадлежат отношению эквивалентности, соответствующему данному разбиению.

---

[45] На Втором Международном конгрессе математиков в 1900 году в Париже немецкий математик Давид Гильберт прочитал знаменитый доклад «Математические проблемы», в котором сформулировал 23 проблемы, которые должны были определить дальнейшее развитие математики. Все эти проблемы относились к современной (для того времени) математике. И лишь одна проблема – третья – связана с «школьной» геометрией. Эта проблема состояла в доказательстве невозможности построения теории объемов многогранников на идее равносоставленности (простое и подробное изложение этого вопроса можно найти, например, в книгах: Энциклопедический словарь юного математика. – М. : Педагогика, 1989. – С. 264; Энциклопедия для детей. Математика. – М. : Аванта, 2002. – С. 364). Эта проблема была первой из решенных. В 1900 году она была решена немецким математиком М. Деном.

5.12. Задано множество упорядоченных пар (1; 1), (1; 2), (2; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5) из $A \times A$, где $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Проверить, что это множество упорядоченных пар задает отношение эквивалентности на A, и указать, на какие классы эквивалентности разбивается A.

5.13. На множестве A определено отношение порядка. Как можно определить отношение порядка на множестве A^2?

5.14. Сколькими способами можно ввести полный порядок на конечном множестве из n элементов?

5.15. Пусть на подмножествах множества A задано отношение включения. Указать наименьший и наибольший элементы.

5.16. Изобразить ориентированный граф для бинарного отношения на конечном множестве $A = \{a; b; c; d\}$, которое является:

а) отношением полного строгого порядка;

б) отношением полного нестрогого порядка;

в) отношением частичного строгого порядка;

г) отношением частичного нестрогого порядка.

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейным уравнением относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,, \tag{1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b – некоторые числа. При этом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются коэффициентами уравнения, а b – свободным числом.

Упорядоченная последовательность n чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ называется *решением уравнения* (1), если после подстановки $x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n$ в данное уравнение оно превратится в верное числовое соотношение.

Пример. Линейное уравнение $x_1 + 3x_2 - 5x_3 + \sqrt{2}x_4 = 2$ обладает решением 5, 0, 1, $\sqrt{2}$, так как после подстановки $x_1 = 5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$; $x_4 = \sqrt{2}$ получаем верное числовое соотношение $5 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$. Последовательность чисел 1, 2, 3, 0 не является решением вышеуказанного уравнения, так как полученное после подстановки $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 0$ числовое соотношение $1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 3 + \sqrt{2}\cdot 0 = 2$ не верно. Очевидно, что указанное решение не единственное. Выпишите еще два решения вышеуказанного линейного уравнения.

Заметим, что последовательность чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *составляет одно решение линейного уравнения (1) (а не* n *решений), поэтому решение уравнения (1) записывается в круглых скобках в виде (*$k_1; k_2; \ldots; k_n$*).*

Решения уравнения (1) $K = (k_1;\ k_2;\ \ldots;\ k_n)$ и $L = (l_1;\ l_2;\ \ldots;\ l_n)$ называются *одинаковыми* тогда и только тогда, когда $k_1 = l_1$; $k_2 = l_2$; ..., $k_n = l_n$. Если хотя бы одно из равенств не выполняется, то решения называются различными.

Решить уравнение (1) – значит найти множество решений данного уравнения (которое может быть и пустым). Два уравнения называются равносильными, если их множества решений совпадают.

Очевидно, что если данное уравнение подвергнуть одному из преобразований:

1) перенос членов (т.е. $a_i\,x_i$ или b) из одной части уравнения в другую;

2) почленное умножение обеих частей уравнения на одно и то же, отличное от нуля, число,

то получим уравнение, равносильное данному.

В зависимости от того, каковы числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$*, можно определить, имеет линейное уравнение (1) решение или нет, а также количество этих решений. Возможны только следующие три случая:*

1) $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0,\ b \neq 0$;

2) $a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0,\ b = 0$;

3) хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ отлично от нуля.

В *первом* случае линейное уравнение (1) имеет вид

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = b,\ \ b \neq 0 \tag{2}$$

и не имеет решений. Покажем это. Пусть $(k_1;\ k_2;\ \ldots,\ k_n)$ – решение этого уравнения, тогда $0\cdot k_1 + 0\cdot k_2 + \ldots + 0\cdot k_n = b$ должно быть верным числовым соотношением, что невозможно, так как $b \neq 0$. Следовательно, у данного линейного уравнения пустое множество решений. Линейное уравнение (2) называется *противоречивым*.

Во *втором* случае линейное уравнение (1) имеет вид

$$0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n = 0, \tag{3}$$

и каждая последовательность $(k_1;\ k_2;\ \ldots,\ k_n)$ является решением этого уравнения. Линейное уравнение (3) называется *тривиальным*.

В *третьем* случае предположим, что $a_1 \neq 0$ (в противном случае можно переобозначить слагаемые в левой части линейного уравнения (1)). Перенесем все слагаемые из левой части линейного уравнения (1), кроме слагаемого a_1x_1, в правую часть, а затем разделим обе части уравнения на коэффициент $a_1 \neq 0$. Тогда получим

$$x_1 = c_0 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\,, \tag{4}$$

где $c_0 = \dfrac{b_0}{a_1};\ c_i = -\dfrac{a_i}{a_1};\ i = 2, 3, \ldots, n.$

Линейные уравнения (1) и (4) равносильны, поэтому для того, чтобы решить уравнение (1), достаточно найти все решения уравнения (4).

Неизвестное x_1 называется *главным,* а неизвестные $x_2, \ldots, x_n$ – *свободными*. Придавая свободным неизвестным $x_2, \ldots, x_n$ линейного уравнения (4) произвольные значения $k_2, \ldots, k_n$, мы будем находить значение главной переменной $x_1 = c_0 + c_2k_2 + \ldots + k_nx_n$. Очевидно, что

$$K = (c_0 + c_2k_2 + \ldots + c_nk_n;\ k_2;\ \ldots;k_n)$$

является решением уравнения (4) и тем самым уравнения (1). Уравнения (4), как и уравнение (1), имеет бесконечное множество решений, так как значение для неизвестных $x_2, \ldots, x_n$ можно выбирать бесконечным числом различных способов.

Итак, при $n > 1$ уравнение (1) либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

6.2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим систему m линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \ ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \,(1)'_2 \ ; \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \ . \end{cases}$$

Уравнения системы будем считать пронумерованными – первое, второе и т.д. Коэффициенты при неизвестных в i-м уравнении системы обозначим через $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ (первый индекс указывает номер уравнения, второй – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент), а свободное число i-го уравнения – через b_i. Числа $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ называются коэффициентами системы линейных уравнений, а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные числа системы. Если все свободные числа системы линейных уравнений равны нулю $b_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$, то система линейных уравнений называется *однородной*.

Определение 6.2.1. *Решением системы линейных уравнений* (1) называется такая упорядоченная последовательность чисел $k_1,\ k_2, \ldots, k_n$, которая является решением каждого уравнения системы.

Если воспользоваться терминологией теории множеств, то можно сказать, что множество решений системы линейных уравнений – это пересечение множеств решений всех уравнений, входящих в систему.

Система уравнений, которая имеет хотя бы одно решение, называется *совместной*.

Пусть система линейных уравнений содержит противоречивое уравнение. Тогда каждое решение этой системы должно быть решением противоречивого уравнения, но так как противоречивое уравнение не имеет решений, то система, содержащая противоречивое уравнение, не является совместной (или *несовместна*). Рассмотрим примеры.

1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 - x_3 = 1; \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 3. \end{cases}$$

Так как последнее уравнение системы является противоречивым, то согласно вышеприведенному рассуждению – система несовместная. Заметим, что эту систему можно было бы записать в более компактном виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \qquad 2x_2 - x_3 = 1, \\ \qquad\qquad\quad 0 = 3. \end{cases}$$

2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ \qquad\quad x_2 + 4x_3 = 2, \\ \qquad\qquad\quad 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение этой системы довольно очевидно. Из последнего уравнения находим $x_3 = 1$. Подставим во второе уравнение $x_3 = 1$ и найдем $x_2 = -2$. Подставим $x_2 = -2$, $x_3 = 1$ в первое уравнение и найдем x_1:

$$3x_1 - 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = 1,$$
$$3x_1 + 1 = 1,$$
$$x_1 = 0.$$

Таким образом, данная система является совместной и имеет единственное решение (0; –2; 1).

3. Рассмотрим еще систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ \quad -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Подбором легко найти несколько решений этой системы, например, (–7; 1; 1), (–15; 2; 2). А есть ли еще решения этой системы? Заметим, что в этой системе переменные x_1 и x_2 можно выразить через переменную x_3:

$$x_2 = x_3,$$
$$x_1 = 1 - 3\,x_2 - 5\,x_3 = 1 - 8\,x_3.$$

Если придавать переменной x_3 различные значения и находить по указанным формулам x_1 и x_2, то мы будем получать решение нашей системы. Таким образом, можно сказать, что любая последовательность чисел вида $(1 - 8t;\ t;\ t)$, $t \in R$ является решением нашей системы и других решений нет.

Заметим, что в примере 2 система линейных уравнений имеет единственное решение (такие системы линейных уравнений называются *определенными*), в примере 3 система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений (такие системы линейных уравнений называются *неопределенными*), которое записано в виде *общего решения*, т.е. буквенного выражения, которое при частных значениях для букв дает все решения данной системы линейных уравнений. В примере 1 система линейных уравнений не имеет решений. Такие системы линейных уравнений, как мы уже знаем, называются *несовместными*. Как мы позже докажем, эти три случая охватывают все возможные варианты для множества решений системы линейных уравнений.

6.3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СТУПЕНЧАТОГО ВИДА

Во всех трех вышеприведенных примерах нам удалось без особого труда найти множество решений систем. Причина этого в том, что системы линейных уравнений в этих примерах имели специальный «ступенчатый» вид, позволивший решить системы, двигаясь снизу вверх.

Рассмотрим систему линейных уравнений ступенчатого вида более подробно. В самом общем виде система линейных уравнений ступенчатого вида может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \quad \ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1 ; \\ \quad a_{2k}x_k + \quad \ldots \quad + a_{2n}x_n = b_2 ; \\ \quad\quad a_{3l}x_k + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 ; \\ \quad\quad\quad \cdots \\ \quad\quad a_{rs}x_s + \ldots + a_{rn}x_n = b_r ; \\ \quad\quad\quad\quad 0 = b_{r+1} ; \\ \quad\quad\quad \ldots \\ \quad\quad\quad\quad 0 = b_m . \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $a_{11} \cdot a_{2k} \cdot \ldots \cdot a_{rs} \neq 0$, $1 < k < l < \ldots < s$. Может оказаться, что $r = m$ (см. примеры 2 и 3) и поэтому уравнений вида: $0 = b_i$ с правой частью $b_i \neq 0$ в ступенчатой системе линейных уравнений не будет. Может оказаться, что $r = n$ (см. пример 2) и тогда систему линейных уравнений естественно назвать *треугольной.*

Очевидно, что если система (1) содержит уравнение вида: $0 = b_i$ с правой частью $b_i \neq 0$, то эта система несовместная (см. пример 1). Докажем, что если таких уравнений в системе (1) нет, то эта система совместная.

Пусть числа $b_i = 0$ при $i > r$. Назовем неизвестные $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$, с которых начинаются первое, второе, …, r-е уравнения, *главными*, а остальные неизвестные, если таковые имеются, – *свободными*. Главных неизвестных по определению всего r.

Придадим свободным неизвестным произвольные значения и подставим их в уравнения системы (1). Тогда для x_s получится одно (r-е) уравнение вида: $a\,x_s = b$ с $a = a_{rs} \neq 0$, которое имеет единственное решение $x_s = \dfrac{b}{a}$. Подставляя найденное значение $x_s = \dfrac{b}{a}$ в первые $r – 1$ уравнений и поднимаясь так снизу вверх по системе (1), мы убедимся в том, что значения для главных неизвестных определяются однозначно при любых значениях для свободных неизвестных. Причем очевидно, что таким способом мы сможем получить любое решение системы (1).

На основании вышеизложенных рассуждений сформулируем теорему.

Теорема 6.3.1. Для совместности системы линейных уравнений ступенчатого вида (1) необходимо и достаточно, чтобы в ней не оказалось уравнений вида: $0 = b_i$ с правыми частями $b_i \neq 0$. Если это условие выполнено, то свободным неизвестным можно придавать произвольные значения, главные неизвестные – при заданных значениях для свободных – однозначно определяются из системы.

Выясним, когда система (1) будет определенной в предположении, что введенное нами условие совместности выполнено. Если в системе (1) имеются свободные переменные, то система заведомо неопределенная – мы можем придавать свободным неизвестным любые значения, выражая через них (по предыдущей теореме) главные неизвестные. Если же свободных неизвестных нет и все неизвестные главные, то система (1) будет треугольной и все неизвестные определяются из системы однозначно, так что система будет являться определенной. Осталось заметить, что отсутствие свободных неизвестных равносильно условию $r = n$.

Таким образом мы доказали теорему.

Теорема 6.3.2. Совместная ступенчатая система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда она является треугольной (или $r = n$).

6.4. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если система линейных уравнений имеет ступенчатый вид, то решение ее не представляет труда. А если система линейных уравнений имеет не ступенчатый вид, то можно свести ее с помощью преобразований, не изменяющих множество решений, к ступенчатому виду, а затем ее решить.

Отметим преобразования системы (назовем их *элементарные преобразования*), не изменяющие множество решений системы и которые удобно применять для приведения системы к ступенчатому виду:

1) вычеркивание уравнения системы, у которого все коэффициенты при неизвестных и свободное число равны нулю, т.е. вычеркивание тривиального уравнения $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$;

2) изменение порядка следования уравнений системы;

3) умножение уравнения системы на число, отличное от нуля;

4) прибавление к одному уравнению системы другого уравнения системы, умноженного на некоторое число.

Теорема 6.4.1. Элементарные преобразования переводят данную систему линейных уравнений в равносильную ей систему (т.е. имеющую то-же множество решений).

Доказательство. Равносильность систем при элементарных преобразованиях 1–3 очевидна. Рассмотрим элементарное преобразование 4. Пусть дана система линейных уравнений (выделим в системе только *i*-е и *j*-е уравнения):

$$\begin{cases} \qquad\qquad ... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i \; ; \\ \qquad\qquad ... \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j \; ; \\ \qquad\qquad ... \end{cases} \tag{1}$$

После прибавления к *i*-му уравнению системы (1) ее *j*-го уравнения, предварительно умноженного на число *k*, получим систему

$$\begin{cases} \qquad\qquad ... \\ (a_{i1} + ka_{j1})x_1 + (a_{i2} + ka_{j2})x_2 + ... + (a_{in} + ka_{jn})x_n = b_i + kb_j \; ; \\ \qquad\qquad ... \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n = b_j \; ; \\ \qquad\qquad ... \end{cases} \tag{2}$$

Покажем, что системы (1) и (2) равносильны, т.е. любое решение системы (1) является решением системы (2) и наоборот.

Пусть $(l_1; l_2; ...; l_n)$ – произвольное решение системы (1), т.е.

$$\begin{cases} \qquad\qquad ... \\ a_{i1}l_1 + a_{i2}l_2 + ... + a_{in}l_n = b_i \; ; \\ \qquad\qquad ... \\ a_{j1}l_1 + a_{j2}l_2 + ... + a_{jn}l_n = b_j \; ; \\ \qquad\qquad ... \end{cases} \tag{3}$$

верные числовые равенства. Прибавим к *i*-му равенству системы (3) *j*-е равенство, умноженное на число *k*. Тогда равенства (3) превратятся в следующие верные числовые соотношения:

$$\begin{cases} \qquad\qquad ... \\ (a_{i1} + ka_{j1})l_1 + (a_{i2} + ka_{j2})l_2 + ... + (a_{in} + ka_{jn})l_n = b_i + kb_j \; ; \\ \qquad\qquad ... \\ a_{j1}l_1 + a_{j2}l_2 + ... + a_{jn}l_n = b_j \; ; \\ \qquad\qquad ... \end{cases} \tag{4}$$

Из истинности равенств (4) следует, что $(l_1; l_2; ...; l_n)$ является решением системы уравнений (2). Этим установлено, что каждое решение системы уравнений (1) является решением системы уравнений (2).

Пусть теперь $(l_1; l_2; ...; l_n)$ – произвольное решение системы (2). Тогда справедливы числовые равенства (4). Теперь прибавим к *i*-му равенству из (4) *j*-е равенство, умноженное на число $(-k)$. Выполнив это преобразование, получаем верные числовые равенства (3), т.е. $(l_1; l_2; ...; l_n)$ – решение системы (1). Теорема доказана.

Покажем, как элементарные преобразования используются для приведения системы линейных уравнений к ступенчатому виду. Среди уравнений системы найдем такое, у которого $a_{i1} \neq 0$. Такое уравнение обязательно существует, иначе бы переменная x_1 отсутствовала в системе. Поставим найденное уравнение на первое место (элементарное преобразование 2), запишем его в виде

$$a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 .$$

Остальные уравнения системы расположим в естественном порядке, переобозначив коэффициенты системы и свободные числа как a'_{ij} и b'_i. Вычтем из i-го ($i = 2, 3, \ldots, m$) уравнения новой системы первое уравнение, обе части которого умножены на $\frac{a'_{i1}}{a'_{11}}$ (элементарное преобразование 4). В результате этих действий мы получим систему, в которой x_1 входит только в первое уравнение. При этом может оказаться, что x_2 также не входит во все уравнения с номером $i > 1$. Пусть x_k – неизвестная с наименьшим номером, которая входит в какое-нибудь уравнение, не считая первого. Мы получим систему:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 ; \\ a''_{2k}x_k + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2 ; \\ \quad \ldots \\ a''_{mk}x_k + \ldots + a''_{mn}x_n = b''_m . \end{cases}$$

Здесь $k > 1$, $a'_{11} \neq 0$. Тем самым получилась «первая ступенька», так как x_1 входит только в первое уравнение – из остальных уравнений мы его исключили.

Начнем построение «второй ступеньки» с поиска коэффициента при x_k, отличного от нуля. Поменяем уравнения (элементарное преобразование 2), если это необходимо, и применяя элементарное преобразование 4), мы исключим x_k из третьего, четвертого, …, m-го уравнений системы – получилась «вторая ступень».

Будем продолжать этот процесс пока это возможно. Так как число уравнений в системе линейных уравнений конечно, то на каком-то конечном шаге мы получим систему ступенчатого вида.

Тем самым доказана теорема.

Теорема 6.4.2. Любая система линейных уравнений равносильна системе, имеющей ступенчатый вид.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 ; \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 1 ; \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 2 . \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на (–1) и сложим со вторым:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 ; \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 ; \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 2 . \end{cases}$$

Умножим снова первое уравнение на (–2) и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 ; \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 ; \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 . \end{cases}$$

Теперь умножим второе уравнение системы на (–1) и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 ; \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 ; \\ \qquad 0 = 0 . \end{cases}$$

Зачеркиваем тривиальное уравнение (третье уравнение системы):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 ; \\ \quad -x_2 + x_3 = 0 . \end{cases}$$

Заметим, что последнее преобразование системы можно было сделать и на том основании, что если в системе уравнений есть два одинаковых уравнения, то в этой системе можно оставить только одно из них.

Итак, мы получили ступенчатую систему линейных уравнений, равносильную первоначальной системе и совпадающую с системой из примера 3 в 6.2. Как мы уже знаем, общее решение этой системы $(1-8t;\ t;\ t)$, $t \in R$.

6.5. МЕТОД ГАУССА. ПРИМЕРЫ

Приведенный метод решения систем линейных уравнений называется *методом Гаусса* или *методом последовательного исключения неизвестных.*

Сделаем одно полезное дополнение. В методе Гаусса все преобразования системы сводятся к преобразованиям коэффициентов при неизвестных. Учитывая это, можно сократить запись и представлять в процессе решения систему линейных уравнений просто набором ее коэффициентов в виде таблицы (такие таблицы чисел, как мы узнаем позже, называются *матрицами*), т.е. в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Для наглядности мы отделили свободные числа вертикальной чертой. Такую матрицу естественно назвать *расширенной матрицей системы линейных уравнений* (если рассматривать только коэффициенты при неизвестных без свободных чисел, то получающаяся матрица называется *матрицей системы линейных уравнений*).

Вот так можно было бы записать в символическом виде в предыдущем примере приведение системы линейных уравнений к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 11 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[-2\cdot(1)+(3)]{-1\cdot(1)+(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-1\cdot(2)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Элементарные преобразования рассмотренной системы линейных уравнений приводили каждый раз к целым коэффициентам при неизвестных. Так, к сожалению, бывает не всегда – возможно будут появляться дробные коэффициенты, что, вообще-то, сделает применение метода Гаусса более хлопотным. Избежать появления дробных коэффициентов можно следующим образом.

Выделим две строчки в преобразуемой матрице (мы сознательно упростили обозначения и считаем, что $a \neq 0$ и $a_1 \neq 0$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \dots & & \dots \\ a & b & c & d \\ & \dots & & \dots \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ & \dots & & \dots \end{array}\right)$$

Умножим первую выделенную строчку на $(-a_1)$ $(a_1 \neq 0!)$, а вторую выделенную строчку – на a $(a \neq 0!)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \dots & & \dots \\ -a_1a & -a_1b & -a_1c & -a_1d \\ & \dots & & \dots \\ aa_1 & ab_1 & ac_1 & ad_1 \\ & \dots & & \dots \end{array}\right)$$

Прибавим ко второй выделенной строчке первую выделенную и умножим первую выделенную строчку на $\left(-\frac{1}{a_1}\right)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \dots & & \dots \\ a & b & c & d \\ & \dots & & \dots \\ 0 & ab_1 - a_1b & ac_1 - a_1c & ad_1 - a_1d \\ & \dots & & \dots \end{array}\right)$$

Введем удобное обозначение $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - a_1b$ (как мы узнаем позже, это определитель порядка 2). Тогда можно записать так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & \dots & & \dots \\ a & b & c & d \\ & \dots & & \dots \\ 0 & \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & d \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \\ & \dots & & \dots \end{array}\right)$$

Тем самым видна закономерность преобразования коэффициентов при неизвестных, которую очень удобно использовать при применении метода Гаусса, т.е. можно делать «быстрые» преобразования – переходить от (1) сразу к (2) (заметим, что у всех определителей первый столбец один и тот же, а меняется только второй).

Далее, если $a \neq 0$, $a_1 = 0$, то необходимости в этом шаге метода Гаусса нет – нуль уже стоит на нужном месте. Если $a = 0$, $a_1 \neq 0$, то подобные «быстрые» преобразования недопустимы в методе Гаусса – они могут привести к неравносильной системе.

Пример. Рассмотрим систему линейных уравнений $\begin{cases} y=0\ ; \\ -x+y+z=0\ . \end{cases}$ Расширенная матрица системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Попробуем применить «быстрое» преобразование:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ясно, что система линейных уравнений, соответствующая новой матрице, т.е. $\begin{cases} y=0\ ; \\ y=0\ , \end{cases}$ неравносильна первоначальной системе (вопрос к читателю: какое множество решений новой системы?).

Причина такого положения дел очевидна – в процессе преобразования уравнений, которые сворачиваются в «быстрые» преобразование, есть умножение уравнения на a. Поэтому, если $a = 0$, то данное преобразование системы не сохраняет, вообще говоря, множество решений системы.

Поэтому в случае $a = 0$, $a_1 \neq 0$ шаг метода Гаусса должен быть другим – нужно просто поменять местами два уравнения системы (элементарное преобразование 2).

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1+6x_2+2x_3+2x_4=5\ ; \\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=-4\ ; \\ 6x_1+5x_2+4x_3+4x_4=19\ . \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -4 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -26 \\ 0 & -16 & 4 & 4 & 46 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -16 & 4 & 4 & 46 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -26 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -8 & 2 & 2 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -13 \end{array}\right).$$

Сделаем необходимые пояснения. Во время второго преобразования мы поменяли местами вторую и третью строчки расширенной матрицы системы. Во время третьего преобразования мы умножили вторую и третью строчки на $\frac{1}{2}$.

Запишем систему линейных уравнений, соответствующую последней матрице:

$$\begin{cases} 4x_1+6x_2+2x_3+2x_4=5\ ; \\ \quad -8x_2+2x_3+2x_4=23\ ; \\ \qquad\qquad 2x_4=-13\ . \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_4=-\frac{13}{2}$. Выразим x_2 через x_3 из второго уравнения:

$$,\qquad x_2=-\frac{9}{2}+\frac{1}{4}x_3,$$

из первого уравнения выразим x_1 через x_3:

$$.\qquad x_1=\frac{45}{4}-\frac{7}{8}x_3.$$

Таким образом, общее решение системы линейных уравнений

$$\left(\frac{45}{4}-\frac{7}{8}x_3\ ;\ -\frac{9}{2}+\frac{1}{4}x_3\ ;\ x_3\ ;\ -\frac{13}{2}\right),\ x_3 \in R\ .$$

6.6. ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим в заключение однородную систему линейных уравнений. Очевидно, что однородная система линейных уравнений всегда совместная, так как всегда обладает нулевым решением $(0;\ 0;\ ...;\ 0)$. В каком случае однородная система линейных уравнений обладает еще и другими (ненулевыми) решениями?

Теорема 6.6.1. Однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, всегда имеет ненулевые решения.

Доказательство. Приведем рассматриваемую однородную систему линейных уравнений к ступенчатому виду. Число шагов, выполненных для этого при помощи метода Гаусса, равно числу уравнений в системе ступенчатого вида (конечно, мы не учитываем тривиальные уравнения), которое, в свою очередь, не превышает числа уравнений в исходной системе.

Так как по условию число уравнений в исходной системе меньше числа неизвестных, то и число уравнений в системе ступенчатого вида меньше, чем число неизвестных. Следовательно, ступенчатая система имеет бесчисленное число решений и в том числе, конечно, ненулевые. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6

Решить системы уравнений методом Гаусса.

6.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 ; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 ; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 . \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 ; \\ 2x - y - z = 2 ; \\ 4x - 2y - 2z = -3 . \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 1 ; \\ 2x + y - 5z = -1 ; \\ x - y - z = -2 . \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 ; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8 ; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10 ; \\ \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 . \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 ; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8 ; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10 ; \\ \quad 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 . \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 ; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8 ; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10 ; \\ \quad 2x_2 - x_3 + -3x_4 = -6 . \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 ; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 ; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 . \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 ; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 ; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 . \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 ; \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 ; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 ; \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 . \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 ; \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 ; \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 5x_4 = 2 ; \\ 2x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 4 . \end{cases}$

7. МАТРИЦЫ

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение 7.1.1. *Матрицей размеров* $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Матрицы, как правило, обозначаются большими буквами: A, B, C, … Если нужно указать размеры матрицы, то будем делать это так: $A_{m\times n}$, где m – число строк матрицы; n – число столбцов матрицы. Например, $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Элементы матрицы удобно обозначать соответствующими маленькими буквами с двумя индексами: a_{ij}, где i – номер строки, в которой находится данный элемент; j – номер столбца, в котором находится данный элемент. Например, для предыдущей матрицы $A_{2\times 3}: a_{11} = 1,\ a_{23} = 6$. В общем виде матрицу размеров $m \times n$ можно записать так:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \left(a_{ij}\right),\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ m\ ;\ \ j = 1,\ 2,\ \dots,\ n.$$

Определение 7.1.2. Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $A \ne B$, так как $a_{21} \ne b_{21}$.

Если размеры матрицы $1 \times n$, то такую матрицу называют *матрицей-строкой* (или просто *строкой*). Если размеры матрицы $m \times 1$, то такую матрицу называют *матрицей-столбцом* (или просто *столбцом*). Иногда удобно считать, что матрица $A_{m\times n}$ составлена из n столбцов размера $m \times 1$, которые будем обозначать $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

Пример. Если $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, то $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ – первый столбец матрицы $A_{3\times 3}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ – второй столбец матрицы $A_{3\times 3}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ – третий столбец матрицы $A_{3\times 3}$.

Если размеры матрицы одинаковы $m = n$, то такую матрицу называют *квадратной*. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы называются *главной диагональю* матрицы, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побочной диагональю* матрицы. Квадратная матрица называется *диагональной*, если у нее все элементы вне главной диагонали равны 0. Каждая диагональная матрица размера $n \times n$ имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Среди всех диагональных матриц стоит выделить нулевые и единичные матрицы. Если все элементы матрицы равны 0, то такая матрица называется *нулевой*. Диагональная матрица называется *единичной*, если $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$. Единичная матрица обозначается E (или $E_{n\times n}$, если необходимо указать размер матрицы) и составлена из n столбцов вида $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (на i-м месте 1, остальные элементы 0). Таким образом, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Заметим, что в дальнейшем мы будем рассматривать только матрицы, состоящие из чисел (или числовые матрицы). Но можно рассматривать также и матрицы, состоящие из функций (такие матрицы называются функциональными). Вся терминология в этом случае, конечно же, сохраняется.

7.2. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Определение 7.2.1. *Суммой* (*разностью*) *двух матриц* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ одинаковых размеров называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ тех же размеров, элементы которой определяются равенствами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij})$.

Для обозначения суммы (разности) двух матриц используется запись $C=A+B$ $(C=A-B)$. Из определения суммы матриц вытекает, что опера-ция сложения матриц обладает теми же свойствами, что и сумма чисел. Например:

1. $A+B=B+A$ (коммутативность);
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (ассоциативность).

Эти свойства позволяют не заботиться о порядке следования слагаемых матриц при сложении двух или большего числа матриц. Отметим также такое очевидное свойство: $(A+B)_i=A_i+B_i$, где $(A+B)_i, A_i, B_i$ – *i*-е столбцы матриц $A+B$, A, B, соответственно.

Определение 7.2.2. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на число* λ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$, элементы которой определяются равенствами $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C=\lambda A$ или $C=A\lambda$. Очевидно, что данная операция обладает следующими свойствами:

1. $(\lambda\,\mu)\,A=\lambda\,(\mu\,A)$;
2. $\lambda\,(A+B)=\lambda\,A+\lambda\,B$;
3. $(\lambda+\mu)\,A=\lambda\,A+\mu\,A$.

Используя операцию умножения матрицы на число, разность $A-B$ двух матриц одинаковых размеров можно записать как $A-B=A+(-1)\,B$.

Определение 7.2.3. *Произведением матрицы* $A_{m\times n}=(a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times k}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k}=(c_{ij})$, элементы которой определяются равенствами $c_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\,b_{lj}$ (элемент c_{ij}, стоящий на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца, матрицы *C* равен сумме попарных произведений соответствующих элементов *i*-й строки матрицы *A* и *j*-го столбца матрицы *B*).

Для обозначения произведения матриц используется запись $C=A\cdot B$. Обратим внимание, что матрицу *A* можно умножить не на всякую матрицу *B*. Согласно определению, матрицу *A* можно умножить только на такую матрицу *B*, у которой число строк равно числу столбцов матрицы *A*.

Пример. Найдем произведение $C=A\,B$, где $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&3&1\end{pmatrix}$, $B_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}$. Заметим, что число столбцов матрицы *A* равно числу строк

матрицы *B* (иначе умножать матрицы *A* и *B* нельзя). Матрица *C* будет иметь размеры 2×2. Таким образом:

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}.$$

Найдем элементы c_{ij}:

$$c_{11}=\sum_{l=1}^{3}a_{1l}\,b_{l1}=a_{11}\,b_{11}+a_{12}\,b_{21}+a_{13}\,b_{31}=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3=14;$$

$$c_{12}=\sum_{l=1}^{3}a_{1l}\,b_{l2}=a_{11}\,b_{12}+a_{12}\,b_{22}+a_{13}\,b_{32}=1\cdot3+2\cdot2+3\cdot1=10;$$

$$c_{21}=\sum_{l=1}^{3}a_{2l}\,b_{l1}=a_{21}\,b_{11}+a_{22}\,b_{21}+a_{23}\,b_{31}=4\cdot1+3\cdot2+1\cdot3=13;$$

$$c_{22}=\sum_{l=1}^{3}a_{2l}\,b_{l2}=a_{21}\,b_{12}+a_{22}\,b_{22}+a_{23}\,b_{32}=4\cdot3+3\cdot2+1\cdot1=19.$$

Окончательно, $C=\begin{pmatrix}14&10\\13&19\end{pmatrix}$. Попробуйте найти произведение $B\cdot A$ самостоятельно (мы только сообщим результат $B\cdot A=\begin{pmatrix}13&11&6\\10&10&8\\7&9&10\end{pmatrix}$).

Заметим, что оба произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ матриц *A* и *B* можно рассматривать лишь в том случае, если число столбцов матрицы *A* совпадает с числом строк матрицы *B*, а число строк матрицы *A* совпадает с числом столбцов матрицы *B* (например, $A_{3\times 2}$ и $B_{2\times 3}$). При этом обе матрицы $A\cdot B$ и $B\cdot A$ будут квадратными, но размеры их, вообще говоря, различны.

Для того чтобы оба произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$ не только были определены, но и имели одинаковые размеры, необходимо и достаточно, чтобы обе матрицы *A* и *B* были квадратными одного и того же размера. Но даже в этом случае произведение матриц не обладает, вообще говоря, коммутативностью.

Пример. $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Используя столбцы A_i, составляющие матрицу A, можно записать, что произведением матрицы $A_{m\times n}$ и столбца $B_{n\times 1}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ является столбец $C_{m\times 1}$, равный $C_{m\times 1}=A_1\cdot b_1+A_2\cdot b_2+\ldots+A_n\cdot b_n$.

Примеры.

1. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. Тогда

$$A\cdot B=2\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\31\end{pmatrix}.$$

2. Удобно использовать матрицы и операции над матрицами при изучении систем m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \qquad\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m;\end{cases}$$

Если ввести обозначения

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\ &&\ldots&\\ a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

(матрица A называется *матрицей системы линейных уравнений*, столбец B называется *столбцом свободных чисел*, столбец X называется *столбцом неизвестных*), то систему линейных уравнений можно записать в *матричном виде* $A\cdot X=B$.

Лемма 7.1. Столбцы $(A\cdot B)_j$ матрицы $A\cdot B$ равны: $(A\cdot B)_j=A\cdot B_j$, где B_j – j-й столбец матрицы B.

Доказательство.

$$(A\cdot B)_j=\begin{pmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{mj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{1j}+&\ldots&a_{1n}\cdot b_{nj}\\ &\ldots&\\ a_{m1}b_{1j}+&\ldots&a_{mn}\cdot b_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{1j}\\ \ldots\\ a_{m1}\cdot b_{1j}\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}a_{1n}\cdot b_{nj}\\ \ldots\\ a_{mn}\cdot b_{nj}\end{pmatrix}=$$

$$=A_1\cdot b_{1j}+\ldots+A_n\cdot b_{nj}=A\cdot B_j.$$

Лемма доказана.

Отметим еще некоторые **свойства** операции произведения матриц.

1. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$, где α – число;
2. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$ и $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$;
3. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ (ассоциативность произведения матриц);
4. $A\cdot E=E\cdot A=A$.

Доказательство. 1. Обозначим $C'=\alpha\cdot(A\cdot B)=(c'_{ij})$, $C''=(\alpha\cdot A)\cdot B=(c''_{ij})$. Матрицы C' и C'' одинаковых размеров и состоят из одинаковых элементов: $c'_{ij}=\alpha\cdot\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}\cdot b_{lj}=\sum\limits_{l=1}^{n}(\alpha\cdot a_{il})\cdot b_{lj}=c''_{ij}$. Следовательно, они равны или $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B$. Второе равенство доказывается аналогично. Свойство доказано.

2. Докажем первое равенство свойства 2. Матрицы $(A+B)\cdot C$ и $A\cdot C+B\cdot C$ имеют одинаковые размеры. Убедимся, что соответствующие
столбцы матриц $(A+B)\cdot C$ и $A\cdot C+B\cdot C$ равны. По лемме 7.1 $((A+B)\cdot C)_i=\ =(A+B)\cdot C_i$. Далее, обозначив i-й столбец матрицы C как $C_i=\begin{pmatrix}c_{1i}\\ \vdots\\ c_{ni}\end{pmatrix}$, получим:

$$(A+B)\cdot C_i=(A+B)_1\cdot c_{1i}+\ldots+(A+B)_n\cdot c_{ni}=(A_1+B_1)\cdot c_{1i}+\ldots+(A_n+B_n)\cdot c_{ni}=$$
$$=(A_1\cdot c_{1i}+\ldots+A_n\cdot c_{ni})+(B_1\cdot c_{1i}+\ldots+B_n\cdot c_{ni})=AC_i+BC_i.$$

Таким образом, $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$. Второе равенство устанавливается аналогично. Свойство доказано.

3. Докажем свойство 3. Рассмотрим вначале частный случай, а именно, пусть $C = S_{n\times 1} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}$ – столбец размера $n \times 1$.

Тогда

$$(A \cdot B) \cdot S = (A \cdot B)_1 \cdot s_{11} + \ldots + (A \cdot B)_n \cdot s_{1n}.$$

По лемме 7.1

$$(A \cdot B)_1 \cdot s_{11} + \ldots + (A \cdot B)_n \cdot s_{1n} = (A \cdot B_1) \cdot s_{11} + \ldots + (A \cdot B_n) \cdot s_{1n}.$$

По свойствам 1 и 2 получаем:

$$(A \cdot B)_1 \cdot s_{11} + \ldots + (A \cdot B)_n \cdot s_{1n} = A \cdot (B_1 \cdot s_{11}) + \ldots + A \cdot (B_n \cdot s_{1n}) =$$
$$= A \cdot (B_1 \cdot s_{11} + \ldots + B_n \cdot s_{1n}) = A \cdot (B \cdot S).$$

В частном случае свойство доказано. Рассмотрим теперь общий случай, пусть C – матрица соответствующих размеров. Сравним, используя лемму 7.1 и доказанный частный случай, соответствующие столбцы матриц $A \cdot (B \cdot C)$ и $(A \cdot B) \cdot C$:

$$((A \cdot B) \cdot C)_j = (A \cdot B) \cdot C_j = A \cdot (B \cdot C_j), \quad (A \cdot (B \cdot C))_j = A \cdot (B \cdot C)_j = A \cdot (B \cdot C_j).$$

Они одинаковые, следовательно, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$. Свойство доказано.

4. Свойство 4 доказывается по той же схеме, что и предыдущие свойства. Во-первых, матрицы $A \cdot E$, $E \cdot A$ и A одинаковых размеров, во-вторых, соответствующие столбцы этих матриц совпадают: $(A \cdot E)_i = A \cdot E_i = A_i$, $(E \cdot A)_i = E \cdot A_i = A_i$. Это и доказывает, что $A \cdot E = E \cdot A = A$. Свойство доказано.

Определение 7.2.4. *Транспонированной матрицей для матрицы* $A_{m\times n} = (a_{ij})$ называется матрица $B_{n\times m} = (b_{ij})$, элементы которой определены равенствами $b_{ij} = a_{ji}$ (элементы i-й строки матрицы $B_{n\times m}$ равны соответствующим элементам i-го столбца матрицы $A_{m\times n}$ или, что тоже самое, элементы j-го столбца матрицы $B_{n\times m}$ равны соответствующим элементам j-й строки матрицы $A_{m\times n}$).

Транспонированная матрица для матрицы A обозначается символом A^T.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Отметим некоторые **свойства** операции транспонирования:

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(a \cdot A)^T = a \cdot A^T$, где a – число;
3. Если матрицы A и B таковы, что $A + B$ имеет смысл, то $(A + B)^T = A^T + B^T$;
4. Если матрицы A и B таковы, что $A \cdot B$ имеет смысл, то $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Доказательство. Докажем только свойство 4.

Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Заметим, что размеры матриц $(A \cdot B)^T$ и $B^T \cdot A^T$ совпадают. Далее, элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы $(A \cdot B)^T$, равен элементу, стоящему в j-й строке и i-м столбце матрицы $A \cdot B$, т.е. равен $a_{j1} \cdot b_{1i} + a_{j2} \cdot b_{2i} + \ldots + a_{jn} \cdot b_{ni}$. Но это выражение есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы B^T на соответственные элементы j-го столбца матрицы A^T, так что элементы матриц $(A \cdot B)^T$ и $B^T \cdot A^T$, стоящие на одинаковых местах, совпадают. Следовательно, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Свойство доказано.

Определение 7.2.5. Квадратная матрица A называется *симметрической* (*кососимметрической*), если $A^T = A$ $\left(A^T = -A\right)$.

Если обозначить $A = (a_{ij})$, то для элементов симметрической матрицы верно равенство $a_{ij} = a_{ji}$. Элементы кососимметрической матрицы удовлетворяют равенству $a_{ij} = -a_{ji}$, а элементы кососимметрической матрицы, стоящие на главной диагонали, равны 0 ($a_{ii} = 0$).

Пример. Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ является симметрической, матрица $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – кососимметрической.

7.3. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ МАТРИЦ

Пусть A – квадратная матрица, определим целую неотрицательную степень матрицы A. А именно, $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ \text{раз}}$, $n \in N$ и $A^0 = E$. Заметим, что справедливо равенство $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$, где p, q – целые неотрицательные числа.

Пусть $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ – известный многочлен.

Определение 7.3.1. *Значением многочлена* $P(x)$ *от матрицы* A называется матрица, обозначаемая символом $P(A)$ и определяемая равенством $P(A)=a_n\cdot A^n + a_{n-1}\cdot A^{n-1}+...+a_1\cdot A + a_0\cdot E$.

Пример. Пусть $P(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

Найдем матрицу $P(A)$. Для этого найдем вначале необходимые степени матрицы A:

$$A^1=A;\ A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\ A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};\ A^4=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Окончательно значение многочлена $P(x)$ от матрицы A равно

$$P(A)=A^4+A^3+A^2+A+E=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 7

7.1. Даны матрицы A и B. Найти: $A+B$, $3\cdot A$, $A-4\cdot B$, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1&8\\2&3\\0&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&5\\3&0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\2&3&1\end{pmatrix}$.

7.2. Даны матрицы A и B. Найти: $A\cdot B$ и $B\cdot A$, если:

а) $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&5&2\\0&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\3&0&1\\3&4&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&-1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&7\\3&4\\1&0\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3&2\end{pmatrix}$.

7.3. Даны матрицы A, B и C. Найти $(A\cdot B)\cdot C$ и $A\cdot(B\cdot C)$. Проверить равенство $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

$$A=\begin{pmatrix}5&9&7\\0&3&-2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}5&9\\2&1\\0&3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}3&4\\2&0\end{pmatrix}.$$

7.4. Для матрицы A найти все перестановочные (коммутирующие) с ней матрицы B. Проверить равенство $A\cdot B=B\cdot A$.

а) $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3&5\\1&2\end{pmatrix}$.

7.5. Найти значение многочлена $P(x)$ от матрицы A.

а) $P(x)=x^3-3x^2+x-2$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$;

б) $P(x)=3x^3-2x^2+5$, $A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&3\\0&1&4\end{pmatrix}$.

7.6. Доказать, что матрица $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

7.7. Найти все матрицы размером 2×2, квадрат которых равен нулевой матрице.

7.8. Найти все матрицы размером 2×2, квадрат которых равен единичной матрице.

7.9. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$;   б) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

7.10. Доказать, что любая квадратная матрица есть сумма симметрической и кососимметрической матриц.

8. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ ($n \le 3$)

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ. СВОЙСТВА

Определение 8.1.1. *Определителем квадратной матрицы* $A_{n\times n}$ ($n \le 3$) называется число, обозначаемое $\det A$[46] и определяемое следующим образом:

1) если $n = 1$ (или матрица имеет вид $A_{1\times 1} = \left(a_{11}\right)$), то

$$\det A = a_{11};$$

2) если $n = 2$ (или матрица имеет вид $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$), то

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

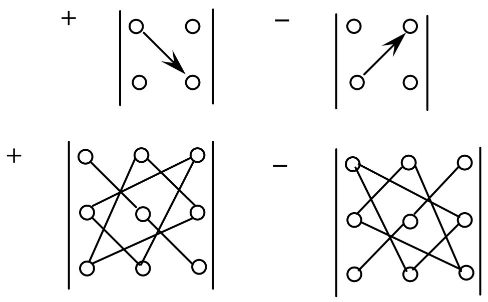
3) если $n = 3$ (или матрица имеет вид $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$), то

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}. \quad (1)$$

Заметим, что для случаев $n = 2$ и $n = 3$ выражения для $\det A$ получаются по следующим схемам[47]:

$n = 2$

$n = 3$



Элементом определителя, строкой определителя, столбцом определителя называются, соответственно, элемент, строка, столбец матрицы, для которой рассматривается определитель.

Примеры.

Найти определители матриц $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Согласно определению, получим:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2;\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 7\cdot 2\cdot 6 + 4\cdot 3\cdot 8 - 7\cdot 5\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 9 - 1\cdot 8\cdot 6 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Пусть $A_{n\times n} = \left(a_{ij}\right)$ – некоторая квадратная матрица ($n = 2, 3$).

Определение 8.1.2. *Минором* M_{ij} *элемента* a_{ij} *матрицы A* называется определитель матрицы, полученной из матрицы A при вычеркивании i-й строки и j-го столбца.

Определение 8.1.3. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} *элемента* a_{ij} *матрицы A* называется число, равное произведению множителя $(-1)^{i+j}$ и минора M_{ij}, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Примеры. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, то минор элемента a_{12} равен

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 42 = -6,$$

минор элемента a_{22} равен

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12,$$

---

[46] Встречаются также обозначения $|A|$, Δ_A.

[47] Для $n = 3$ эта схема носит название схемы Саррюса или правила треугольников.

алгебраическое дополнение элемента a_{12} равно

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -(-6) = 6 ,$$

алгебраическое дополнение элемента a_{22} равно

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = -12 .$$

Рассмотрим основные свойства определителя.

Свойство 1 (основное). Сумма произведений элементов строки (столбца) определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера строки (столбца) и равна этому определителю:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj} ,\ i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2,\ 3;\ n = 2,\ 3 .$$

Доказательство. Докажем, например, равенство для второй строки (i = 2) матрицы размера 3 × 3 (n = 3):

$$\det A = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} \cdot A_{2k} = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} .$$

Для этого преобразуем выражение (1) для определителя матрицы при n = 3:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$
$$= -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) =$$
$$= (-1)^{1+2} a_{21} \cdot M_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} \cdot M_{22} + (-1)^{2+3} a_{23} \cdot M_{23} =$$
$$= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} .$$

Аналогично устанавливаются равенства в остальных случаях. Свойство доказано.

Представление определителя матрицы A в виде $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik}$ называется *разложением определителя матрицы A по i-й строке*, а в виде $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}$ – *разложением определителя матрицы A по j-му столбцу*.

Свойство 1 удобно применять для вычисления определителей, если в какой-то строке (столбце) присутствуют нули.

Пример. Для вычисления определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ удобно применить разложение по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} = 3 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (2 - 9) = 21 .$$

Свойство 2. При транспонировании матрицы определитель не изменяется: $\det A = \det A^T$.

Доказательство. Для случая n = 2 свойство легко проверить непосредственно. Действительно,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A^T .$$

Доказать свойство 2 в случае n = 3 тоже можно непосредственно, используя (1), однако, достаточно заметить, что разложение по любой строке определителя матрицы является разложением по соответствующему столбцу определителя транспонированной матрицы. Далее воспользоваться свойством 1. Свойство доказано.

Смысл свойства 2 в том, что строки и столбцы определителя «равноправны», т.е. любое свойство определителя с участием строк можно переформулировать в свойство определителя с участием столбцов. Эту равноправность строк и столбцов уже можно увидеть в свойстве 1.

Свойство 3. Если поменять местами две строки (два столбца) определителя, то определитель изменит знак.

Доказательство. Рассмотрим это свойство для строк. Для случая n = 2 свойство легко проверить непосредственно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Доказать свойство 3 в случае n = 3 тоже можно непосредственно, используя (1), однако, достаточно воспользоваться свойством 1 и разложить определитель по строке, не изменившей своего расположения. Перестановка строк приведет к тому, что в каждом миноре из рассматриваемого разложения тоже произойдет перестановка строк. Тем самым, каждое из слагаемых из рассматриваемого разложения (а также определитель матрицы) изменит знак. Таким образом, свойство для строк доказано. Справедливость свойства 3 для столбцов вытекает из свойства 2. Свойство 3 полностью доказано.

Свойство 4. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

Доказательство. Если поменять местами две одинаковые строки (или два одинаковых столбца) определителя Δ_A, то, с одной стороны, определитель Δ_A изменит знак (по свойству 3), с другой стороны, определитель Δ_A не изменится (так как матрица A не изменится). Следовательно, $\Delta_A = -\Delta_A$. Это и означает, что $\Delta_A = 0$. Свойство доказано.

Свойство 5. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Доказательство. Достаточно доказать это свойство только для строк (для столбцов справедливость свойства будет следовать из свойства 2). Пусть элементы i-й строки матрицы A отличаются от соответствующих элементов i-й строки матрицы A' одним и тем же множителем k. Разложим определитель матрицы A по i-й строке и преобразуем: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (ka_{ik}) \cdot A_{ik} = k \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = k \det A'$. Из полученного равенства вытекает справедливость данного свойства. Свойство доказано.

Свойство 5 можно переформулировать в таком виде: если все элементы некоторой строки (столбца) определителя умножить на одно и то же число, то сам определитель умножится на это число.

Свойство 6. Если i-й столбец A_i определителя Δ_A равен сумме двух столбцов $A_i = A_i' + A_i''$, то определитель Δ_A равен сумме двух определителей, у которых i-е столбцы равны, соответственно, A_i' и A_i''.

Доказательство. Обозначим элементы столбцов A_i, A_i' и A_i'' как a_{ki}, a_{ki}' и a_{ki}'', соответственно. Тогда $a_{ki} = a_{ki}' + a_{ki}''$, k = 1, …, n. Разложим Δ_A по i-му столбцу и преобразуем:

$$\Delta_A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}' + a_{ik}'') \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}' \cdot A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}'' \cdot A_{ik} .$$

Из этого равенства и вытекает справедливость свойства 6. Свойство доказано.

Аналогичное свойство справедливо и для строк (в силу свойства 2).

Свойство 7. Если к одной строке (столбцу) определителя прибавить другую строку (столбец), умноженную на некоторое число, то определитель не изменится.

Доказательство. Применяя поочередно свойства 6, 5 и 4, мы докажем свойство 7.

Свойство 7 удобно применять при вычислении определителей.

Пример. Для вычисления определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

удобно применить следующие преобразования строк матрицы A (в силу свойства 7, они не изменяют определителя матрицы A):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{-2\cdot(1)+(2) \\ -3\cdot(1)+(3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} \overset{-2\cdot(2)+(3)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-3) = 6 \cdot$$

Поясним, что при первом переходе мы умножили первую строку на –2 и сложили со второй строкой, затем снова умножили первую строку на –3 и сложили с третьей строкой. При втором переходе мы умножили вторую строку на –2 и сложили с третьей строкой.

Свойство 8. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Доказательство. Для случая n = 1 или n = 2 это равенство легко можно проверить непосредственно, сравнив выражения $\det(A \cdot B)$ и $\det A \cdot \det B$. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, тогда $A \cdot B = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$ и

$$\det(A \cdot B) = (ax+bz)(cy+dt) - (ay+bt)(cx+dz) =$$
$$= axcy + axdt + bzcy + bzdt - aycx - aydz - btcx - btdz = axdt + bzcy - aydz - btcx .$$

С другой стороны, $\det A \cdot \det B = (ad - bc)(xt - yz) = adxt - adyz - bcxt + bcyz$. Сравнивая эти два выражения, получаем $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Для случая n = 3 доказательство может быть проведено аналогично, только это будет связано с более громоздкими преобразованиями. Свойство доказано.

8.2. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть A – квадратная матрица.

Определение 8.2.1. Матрица B называется *правой обратной* для квадратной матрицы A, если $A \cdot B = E$. Матрица C называется *левой обратной* для квадратной матрицы A, если $C \cdot A = E$.

Заметим, что так как матрицы A и E квадратные и одного размера, то матрицы B и C (если они существуют) тех же размеров. Далее, для матриц размера 1×1 выполняется $B = C$ (при условии, что $A_{1\times1} \neq 0$), а для квадратных матриц других размеров всегда ли выполняется это равенство? Так как, вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$, то нельзя бездоказательно утверждать, что правая обратная матрица B является левой обратной матрицей. Поэтому ответ на заданный вопрос, по крайней мере, не очевиден. Попытаемся разобраться в этой ситуации.

Теорема 8.2.1. Если правая обратная матрица B и левая обратная матрица C для данной квадратной матрицы A существуют, то они равны.

Доказательство. На основании равенств $A \cdot B = E$, $C \cdot A = E$ и свойства ассоциативности умножения матриц получим:

$$C = C \cdot E = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = E \cdot B = B .$$

Таким образом, $C = B$. Теорема доказана.

Следовательно, не может существовать разных правой и левой обратных матриц для данной квадратной матрицы A.

Теорема 8.2.2. Если для квадратной матрицы A существует хотя бы одна правая или левая обратная матрица, то определитель $\det A$ матрицы A отличен от нуля[48].

Доказательство. Пусть для матрицы A существует, например, правая обратная матрица B. Тогда $A \cdot B = E$ и $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det E = 1$, откуда вытекает, что $\det A \neq 0$. Аналогично для левой обратной матрицы. Теорема доказана.

Лемма 8.2.1. Сумма произведений элементов строки (столбца) определителя на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Доказательство проведем для строк (для столбцов оно проводится аналогично). Запишем разложение по i-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} .$$

Заметим, что поскольку алгебраические дополнения A_{i1}, A_{i2}, A_{i3} не зависят от элементов i-й строки a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, то разложение по i-й строке является тождеством относительно a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} и сохраняется при замене чисел a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} любыми другими тремя числами. Заменив a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} соответствующими элементами любой (отличной от i-й) k-й строки a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, мы получим в разложении определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю согласно свойству 4. Таким образом, $a_{k1} \cdot A_{i1} + a_{k2} \cdot A_{i2} + a_{k3} \cdot A_{i3} = 0$ для любых несовпадающих i и k ($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$). Лемма доказана.

Теорема 8.2.3. Если определитель $\det A$ матрицы A отличен от нуля, то для матрицы A существуют правая и левая обратные матрицы (более того, они равны).

Доказательство. Рассмотрим для определенности случай $n = 3$. Пусть определитель $\Delta = \det A$ отличен от нуля. Рассмотрим следующую матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы A (заметим, что индексы этих алгебраических дополнений записаны в «транспонированном виде»). Убедимся в том, что эта матрица B является как правой, так и левой обратной для матрицы A. Достаточно доказать, что оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ являются единичной матрицей. Далее, у обоих произведений любой элемент, не лежащий на главной диагонали, после выноса множителя $\frac{1}{\Delta}$, равен сумме произведений одной строки (или одного столбца) на соответствующие алгебраические дополнения другой строки (или другого столбца) и по лемме 8.2.1 равен нулю. Что же касается элементов, лежащих на главной диагонали, то после выноса множителя $\frac{1}{\Delta}$, они являются суммами произведений элементов и соответствующих алгебраических дополнений одной строки (одного столбца) и по свойству 1 равны Δ. Последующее умножение на множитель $\frac{1}{\Delta}$ делает их равными 1. Таким образом, $A \cdot B = B \cdot A = E$. Аналогично доказывается теорема для случая $n = 2$, заметим только, что в этом случае $B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix}$. Для $n = 1$ эта теорема очевидна. Теорема полностью доказана.

Определение 8.2.2. Матрица B называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Обратная матрица для матрицы A обозначается A^{-1}. Таким образом, обратная матрица A^{-1} является одновременно и правой, и левой обратной для квадратной матрицы A. Из теоремы 8.2.3 вытекает, что если $\det A \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. С другой стороны, если для матрицы A существует A^{-1}, то:

1) она является одновременно и правой, и левой обратной матрицей;
2) других правых или левых обратных матриц не существует (по теореме 8.2.1);
3) $\det A \neq 0$ (по теореме 8.2.2).

Эти выводы позволяют сформулировать следующую теорему.

---

[48] Квадратная матрица A, у которой $\det A \neq 0$, называется *невырожденной*. В противном случае матрица называется *вырожденной*.

Теорема 8.2.4. Следующие утверждения для квадратной матрицы A равносильны:

1) $\det A \neq 0$;

2) для матрицы A существуют единственные правая и левая обратные матрицы, которые совпадают;

3) для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}.

Причем, обратную матрицу A^{-1} можно найти по формулам:

1) в случае $n = 1$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_{11}} \end{pmatrix}$;

2) в случае $n = 2$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{21}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} \end{pmatrix}$;

3) в случае $n = 3$: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta} & \dfrac{A_{21}}{\Delta} & \dfrac{A_{31}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta} & \dfrac{A_{22}}{\Delta} & \dfrac{A_{32}}{\Delta} \\ \dfrac{A_{13}}{\Delta} & \dfrac{A_{23}}{\Delta} & \dfrac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix}$.

Таким образом, обращение квадратных матриц оказалось тесно связанным с понятием определителя матрицы.

Пример. Найдем обратную матрицу A^{-1}, если она существует, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем сначала определитель матрицы A:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{-1\cdot(3)+(2) \\ -2\cdot(3)+(1)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

следовательно, A^{-1} существует и единственна. Найдем A^{-1}, для этого найдем все алгебраические дополнения элементов матрицы A: $A_{11} = -2$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 4$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = -5$, $A_{33} = -6$. По формуле для A^{-1} получим:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2}{-8} & \dfrac{3}{-8} & \dfrac{-7}{-8} \\ \dfrac{2}{-8} & \dfrac{1}{-8} & \dfrac{-5}{-8} \\ \dfrac{4}{-8} & \dfrac{-2}{-8} & \dfrac{-6}{-8} \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

8.3. МАТРИЧНЫЙ СПОСОБ И ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Понятия обратной матрицы A^{-1} и определителя матрицы $\det A$ удачно применяются при решении квадратных[49] систем линейных уравнений. Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений[50]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad\qquad \ldots \qquad\qquad ; \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

которую запишем в матричном виде $A \cdot X = B$, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ –

[49] Система линейных уравнений называется *квадратной*, если число уравнений этой системы совпадает с числом неизвестных.

[50] При первом ознакомлении с данными вопросами, с целью упрощения, следует считать, что $n \leq 3$.

матрица данной системы уравнений; $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных чисел; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных. Допустим, что $\det A \neq 0$, тогда существует обратная матрица A^{-1}. Выразив столбец неизвестных X из матричного равенства $A \cdot X = B$:

$$A \cdot X = B;$$
$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B;$$
$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$
$$X = A^{-1} \cdot B,$$

мы получим формулу, по которой можно найти столбец неизвестных X. Способ решения систем линейных уравнений, основанный на формуле $X = A^{-1} \cdot B$, называется *матричным способом*. Сформулируем вывод в виде теоремы.

Теорема 8.3.1. Если матрица A квадратной системы линейных уравнений $A \cdot X = B$ имеет не равный нулю определитель $\det A \neq 0$, то $X = A^{-1} \cdot B$.

Матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B$ можно расписать по координатам и получить выражения для каждой неизвестной x_i. Для случая $n = 3$ это будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + b_3 \cdot A_{31} \\ b_1 \cdot A_{12} + b_2 \cdot A_{22} + b_3 \cdot A_{32} \\ b_1 \cdot A_{13} + b_2 \cdot A_{23} + b_3 \cdot A_{33} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что выражение $b_1 \cdot A_{1i} + b_2 \cdot A_{2i} + b_3 \cdot A_{3i}$, $i = 1, 2, 3$ можно представить как определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца матрицы A на столбец B. Если обозначить такой определитель Δ_i, то получим следующие формулы для неизвестных: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2, 3$. Эти формулы называются *формулами Крамера*[51]. Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 8.3.2 (Формулы Крамера). Если матрица A квадратной системы линейных уравнений имеет не равный нулю определитель $\Delta \neq 0$, то неизвестные x_i, $i = 1, \ldots, n$ можно найти по формулам $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i – определитель матрицы, полученной заменой i-го столбца матрицы A на столбец B.

Пример. Решим систему линейных уравнений $\begin{cases} 2x - 4y + z = 1; \\ x - 5y + 3z = 1; \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ матричным способом и по формулам Крамера. Заметим, что матрица системы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ является квадратной и $\det A = -8 \neq 0$ (см. предыдущий пример в 8.2), поэтому матричный способ и формулы Крамера применимы. Нам уже известна, из предыдущего примера, обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$. Поэтому, согласно матричному способу:

$$X = A^{-1} B = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Далее, для применения формул Крамера, найдем определители Δ_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{-1\cdot(1)+(2) \\ -1\cdot(1)+(3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

[51] Крамер Габриэль (Cramer Gabriel, 1704 – 1752) – швейцарский математик.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{-1\cdot(3)+(2)\\ -2\cdot(3)+(1)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\,;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{-1\cdot(3)+(2)\\ -2\cdot(3)+(1)}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -4\,.$$

Теперь найдем неизвестные

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4};\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4};\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}\,.$$

Естественно, решение системы, полученное при первом и втором способах, совпадают.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 8

8.1. Вычислить определитель матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \cos x & \cos x \\ \sin x & \sin x \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$.

8.2. Вычислить определитель матрицы: 1) используя правило треугольников; 2) разложением по второй строке; 3) разложением по третьему столбцу; 4) получением нулей в строке (столбце):

1) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

8.3. Доказать равенства:

1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$; 2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a_{31}a_{22}a_{13}$.

8.4. Доказать, что определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

8.5. Доказать, что определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю (две строки (столбца) *пропорциональны*, если элементы одной строки (столбца) получаются из соответствующих элементов другой строки (столбца) умножением на одно и то же число, может быть, равное нулю).

8.6. Решить уравнение:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

8.7. Решить неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

8.8. Доказать, что если все элементы матрицы ($n > 1$) равны ±1, то определитель этой матрицы есть четное число.

8.9. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель матрицы размера 3×3, при условии, что элементы матрицы равны ±1.

8.10. 1) Доказать, что для равенства нулю определителя матрицы размера 2×2 необходимо и достаточно, чтобы строки (столбцы) матрицы были пропорциональны. 2) Верно ли это утверждение для матрицы размера 3×3?

8.11. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель матрицы размера 3×3, при условии, что элементы матрицы равны 0 или 1.

8.12. Пусть три точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ лежат на одной прямой.

Найти значение определителя $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

8.13. Существует ли такая квадратная матрица, что для нее существует правая обратная и не существует левая обратная матрица или, наоборот, существует левая обратная и не существует правая обратная матрица?

8.14. Найти обратную матрицу для данной матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & -5 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

8.15. Доказать следующие свойства обратной матрицы:

1) $\det\left(A^{-1}\right) = (\det A)^{-1}$;

2) если квадратные матрицы A и B невырожденные, то их произведение тоже невырожденно и $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;

4) $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.

8.16. Решить матричным способом и по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 12; \\ 2x + 4y = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 0; \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8; \\ 2x + 4y - 5z = 11; \\ 4x - 3y + 2z = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2; \\ 4x - 5y + 2z = 1; \\ 5x - 6y + 4z = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5; \\ x - 2y + 2z = 17; \\ x + y + 3z = 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + y + z = 2; \\ 5x + y + 3z = 14; \\ 2x + y + 2z = 5. \end{cases}$

8.17. Привести пример квадратной (для $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$) системы линейных уравнений, матрица которой имеет определитель равный нулю и которая 1) была бы несовместная, 2) была бы неопределенной.

9. ПОДСТАНОВКИ

9.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть X – конечное множество, состоящее из n элементов. Обозначим их 1; 2; 3; …; n.

Определение 9.1.1. Биективное (или взаимно однозначное) отображение $\alpha : X \to X$ называется *подстановкой* α *на множестве X*.

Так как множество X конечное, то α можно полностью определить, задав для каждого $i \in X$ образ $\alpha(i)$. Поэтому подстановки α естественно обозначать в виде матрицы с двумя строками:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix},$$

в которой первая строка есть область определения α, а вторая строка – соответствующие образы элементов $i \in X$. В том случае, когда выделение или упоминание множества X не существенно, мы вместо подстановок на множестве X будем говорить просто о подстановках.

Примеры.

1) $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ – *тождественная подстановка на множестве* $X = \{1, 2, 3, 4\}$, которая соответствует тождественному отображению $e : X \to X$.

2) $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ – не является подстановкой на множестве $X = \{1, 2, 3, 4\}$, так как соответствующее отображение $\varepsilon : X \to X$ не является биективным ($\varepsilon(1) = \varepsilon(2) = 2$) на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

Теорема 9.1.1. Число всех подстановок на множестве $X = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ равно $n!$.

Доказательство. Подстановки на множестве X отличаются только второй строкой. Поэтому число подстановок на множестве X равно числу способов упорядочить n элементов во второй строке, т.е. $n!$. Теорема доказана.

Определение 9.1.2. Подстановки α и β на множестве X называются *равными*, если они равны как отображения $\alpha : X \to X$ и $\beta : X \to X$ (т.е. $\alpha(i) = \beta(i)$ для любого $i \in X$).

Определение 9.1.3. *Произведением подстановок* α и β называется подстановка γ, соответствующая отображению $\gamma : X \to X$, равному суперпозиции $\alpha \circ \beta$ отображений $\alpha : X \to X$ и $\beta : X \to X$.

Произведение подстановок α и β обозначается $\alpha\beta$.

Пример. Найдем произведение $\alpha\beta$ подстановок

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Надо найти образ $(\alpha\beta)(i)$ каждого элемента $i \in X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$ (напомним, что, согласно определению суперпозиции отображений, $(\alpha\beta)(i) = \alpha(\beta(i))$ для любого $i \in X$):

$$(\alpha\beta)(1) = \alpha(\beta(1)) = \alpha(2) = 3;$$
$$(\alpha\beta)(2) = \alpha(\beta(2)) = \alpha(4) = 1;$$
$$(\alpha\beta)(3) = \alpha(\beta(3)) = \alpha(1) = 4;$$
$$(\alpha\beta)(4) = \alpha(\beta(4)) = \alpha(3) = 2.$$

Таким образом, $\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Отметим основные свойства произведения подстановок, которые вытекают из свойств отображений:

1) $\alpha e = e\alpha = \alpha$,

2) $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ (вообще говоря),

3) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Определение 9.1.4. *Обратной подстановкой для подстановки* α называется такая подстановка β, что $\alpha\beta = \beta\alpha = e$.

Обратная подстановка для подстановки α обозначается α^{-1}. Очевидно, обратная подстановка α^{-1} соответствует обратному отображению к отображению $\alpha : X \to X$. Так как отображение $\alpha : X \to X$ является биективным, то обратная подстановка α^{-1} всегда существует и является единственной. Заметим, что $\left(\alpha^{-1}\right)^{-1} = \alpha$.

Пример. Обратной подстановкой для подстановки $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ будет подстановка $\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. В чем легко убедиться непосредственно: $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e$.

Определение 9.1.5. *Транспозицией* τ_{ij} *на множестве* $X = \{1; 2; 3; \dots; n\}$ называется подстановка вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots & i & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что 1) $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ и 2) $\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$ (т.е. $\tau_{ij}\tau_{ij} = e$). Транспозиции являются наиболее «простыми» подстановками по своей структуре, после тождественной, среди всех подстановок.

9.2. ЧЕТНОСТЬ И НЕЧЕТНОСТЬ ПОДСТАНОВКИ

Определение 9.2.1. Неупорядоченная пара элементов $\{i; j\}$, $i \in X$, $j \in X$ $(i \neq j)$ называется *правильной для подстановки* α , если

$$\frac{i-j}{\alpha(i)-\alpha(j)} > 0 ,$$

и *неправильной* (или *инверсией*) *для подстановки* α , если

$$\frac{i-j}{\alpha(i)-\alpha(j)} < 0 .$$

Заметим, что неупорядоченность пар элементов $\{i; j\}$, $i \in X$, $j \in X$ $(i \neq j)$ в этом определении равносильна условию $i < j$ для пар элементов $\{i; j\}$, $i \in X$, $j \in X$.

Определение 9.2.2. Если число инверсий для подстановки α четно, то подстановка α называется *четной*, если нечетно, то – *нечетной*.

Примеры.

1) Тождественная подстановка e является четной подстановкой, так как число инверсий равно нулю ($\frac{i-j}{e(i)-e(j)} = \frac{i-j}{i-j} = 1 > 0$, для любых $i \in X$, $j \in X$, $i \neq j$).

2) Найдем число инверсий для подстановки $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Выпишем все неупорядоченные пары элементов: {1; 2}, {1; 3}, {2; 3} (отметим, что пары элементов, например, {1; 2} и {2; 1} – это одна и та же неупорядоченная пара элементов). Далее,

$\frac{1-2}{\alpha(1)-\alpha(2)} = \frac{1-2}{3-1} < 0$, следовательно, {1; 2} – инверсия для α ;

$\frac{1-3}{\alpha(1)-\alpha(3)} = \frac{1-3}{3-2} < 0$, следовательно, {1; 3} – инверсия для α ;

$\frac{2-3}{\alpha(2)-\alpha(3)} = \frac{2-3}{1-2} > 0$, следовательно, {2; 3} – правильная пара для α.

Таким образом, число инверсий для подстановки α четно и подстановка α является четной.

Теорема 9.2.1. Любая транспозиция является нечетной подстановкой.

Доказательство. Рассмотрим транспозицию

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & j & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & j & \dots & i & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем инверсии для этой транспозиции. Неупорядоченная пара $\{i;\ j\}$ является инверсией, так как $\frac{i-j}{\tau_{ij}(i)-\tau_{ij}(j)} = \frac{i-j}{j-i} = -1 < 0$. Рассмотрим неупорядоченные пары вида $\{s; i\}$, $s \neq i$, $s \neq j$:

$$\frac{s-i}{\tau_{ij}(s)-\tau_{ij}(i)} = \frac{s-i}{s-j} = \begin{cases} > 0, \text{при } s < i < j \text{ и } s > j, \\ < 0, \text{при } i < s < j. \end{cases}$$

Таким образом, инверсий вида $\{s; i\}$ будет $j - i - 1$ штука. Рассмотрим неупорядоченные пары вида $\{s; j\}$, $s \neq i$, $s \neq j$:

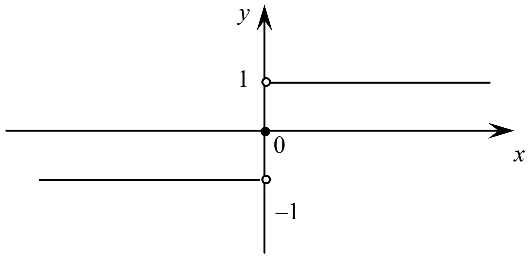
$$\frac{s-j}{\tau_{ij}(s)-\tau_{ij}(j)} = \frac{s-j}{s-i} = \begin{cases} > 0, \text{при } s < i < j \text{ и } s > j, \\ < 0, \text{при } i < s < j. \end{cases}$$

Таким образом, инверсий вида $\{s;\ j\}$ тоже $j - i - 1$ штука. Всего инверсий для транспозиции τ_{ij} будет $1+(j-i-1)+(j-i-1) = 1+2(j-i-1)$ – нечетное число. Следовательно, транспозиция τ_{ij} – нечетная подстановка. Теорема доказана.

Для дальнейшего нам будет удобно использовать функцию $y = \operatorname{sgn}(x)$.[52] Напомним определение этой функции:

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции выглядит так:



Определим, по аналогии со «знаком числа», понятие знак подстановки.

Определение 9.2.3. Пусть α – некоторая подстановка. *Знак подстановки* α определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha - \text{четная подстановка}; \\ -1, & \text{если } \alpha - \text{нечетная подстановка}. \end{cases}$$

Теорема 9.2.2. $\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}\left(\prod\limits_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \dfrac{i - j}{\alpha(i) - \alpha(j)} \right)$.

Доказательство. Докажем теорему для четных подстановок (для нечетных подстановок доказательство аналогичное). Если α – четная подстановка $(\operatorname{sgn}(\alpha) = 1)$, то число инверсий для подстановки α четное число. Поэтому в произведении $\prod\limits_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \dfrac{i - j}{\alpha(i) - \alpha(j)}$ множителей, равных –1, четное число. Следовательно, $\operatorname{sgn}\left(\prod\limits_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \dfrac{i - j}{\alpha(i) - \alpha(j)} \right) = 1 = \operatorname{sgn}(\alpha)$. Теорема доказана.

Теорема 9.2.3. Если подстановки α и β на одном множестве *X*, то $\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\beta)$.

Доказательство. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \ldots & \alpha(n) \end{pmatrix} \text{ и } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \beta(3) & \ldots & \beta(n) \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 9.2.2, получаем:

$$\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}\left(\prod_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \frac{i - j}{(\alpha\beta)(i) - (\alpha\beta)(j)} \right) =$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\prod_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \frac{i - j}{\beta(i) - \beta(j)} \cdot \frac{\beta(i) - \beta(j)}{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))} \right) =$$

$$= \operatorname{sgn}\left(\prod_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \frac{i - j}{\beta(i) - \beta(j)} \right) \cdot \operatorname{sgn}\left(\prod_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))} \right) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\beta)\operatorname{sgn}\left(\prod_{\substack{i \in X,\, j \in X: \\ i < j}} \frac{\beta(i) - \beta(j)}{\alpha(\beta(i)) - \alpha(\beta(j))} \right).$$

[52] Эта функция называется «сигнум *x*» (в переводе с латинского слово «сигнум» переводится как знак) и не является элементарной. В литературе встречается также обозначение $y = \operatorname{sign}(x)$.

Обозначим больший из элементов $\beta(i)$ и $\beta(j)$ множества X символом j', а меньший – i' (это всегда можно сделать, так как $\beta(i) \neq \beta(j)$). Тогда $\dfrac{\beta(i)-\beta(j)}{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))} = \dfrac{i'-j'}{\alpha(i')-\alpha(j')}$. Более того, для любой пары элементов i' и j' ($i' < j'$) множества X найдется такая пара элементов i и j ($i < j$) множества X, что

$$\frac{i'-j'}{\alpha(i')-\alpha(j')} = \frac{\beta(i)-\beta(j)}{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))}$$

(действительно, пусть $i' = \beta(i'')$ и $j' = \beta(j'')$, обозначив больший из элементов i'' и j'' как j, а меньший – как i, получим требуемое равенство). Таким образом, мы доказали равенство

$$\prod_{\substack{i\in X,\, j\in X:\\ i<j}} \frac{\beta(i)-\beta(j)}{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))} = \prod_{\substack{i'\in X,\, j'\in X:\\ i'<j'}} \frac{i'-j'}{\alpha(i')-\alpha(j')}\ .$$

Окончательно,

$$\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}(\beta)\operatorname{sgn}\left(\prod_{\substack{i\in X,\, j\in X:\\ i<j}} \frac{\beta(i)-\beta(j)}{\alpha(\beta(i))-\alpha(\beta(j))}\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\beta)\operatorname{sgn}\left(\prod_{\substack{i'\in X,\, j'\in X:\\ i'<j'}} \frac{i'-j'}{\alpha(i')-\alpha(j')}\right) = \operatorname{sgn}(\beta)\operatorname{sgn}(\alpha)\ .$$

Теорема доказана.

Из данной теоремы легко получаются следующие соотношения.

1. $\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha^{-1})$.

Действительно,

$$\operatorname{sgn}(\alpha\alpha^{-1}) = \operatorname{sgn}(e) = 1\,,$$

далее,

$$\operatorname{sgn}(\alpha\alpha^{-1}) = \operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(\alpha^{-1}) = 1\,.$$

Следовательно, числа $\operatorname{sgn}(\alpha)$ и $\operatorname{sgn}(\alpha^{-1})$ одного знака, т.е. $\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha^{-1})$.

2. Если $\alpha = \tau\tau_{ij}$, то $\operatorname{sgn}(\alpha) = -\operatorname{sgn}(\tau)$.

Это равенство тоже простое следствие предыдущей теоремы:

$$\operatorname{sgn}(\tau_{ij}) = -1\,,\ \operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\tau_{ij}) = -\operatorname{sgn}(\tau)\,.$$

Теорема 9.2.4. Число четных подстановок на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n\}$ равно числу нечетных подстановок на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ n\}$ и равно $\dfrac{n!}{2}$.

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_k\ – \tag{1}$$

все четные подстановки на множестве X, взятые по одному разу. Умножим каждую четную подстановку из (1) на какую-нибудь транспозицию τ_{ij}, получим нечетные (согласно 2) подстановки:

$$\tau_{ij}\alpha_1,\ \tau_{ij}\alpha_2,\ ...,\ \tau_{ij}\alpha_k\,. \tag{2}$$

Заметим, что:

1) любая нечетная подстановка β присутствует в (2). Действительно, пусть β – некоторая нечетная подстановка, тогда $\tau_{ij}\beta$ будет четной подстановкой. Следовательно, обязательно существует некоторая подстановка α_k из (1), равная $\tau_{ij}\beta$: $\alpha_k = \tau_{ij}\beta$. Тогда в (2) содержится нечетная подстановка $\tau_{ij}\,\alpha_k = \tau_{ij}(\tau_{ij}\beta) = (\tau_{ij}\tau_{ij})\beta = e\beta = \beta$;

2) все подстановки в (2) различные, так как если $\tau_{ij}\alpha_l = \tau_{ij}\alpha_s$ $(l \neq s)$, то умножив слева на τ_{ij}, получим противоречивое равенство $\alpha_l = \alpha_s$.

Таким образом, в (2) присутствуют все нечетные подстановки на множестве X и по одному разу. Причем их столько же, сколько и четных в (1). Поэтому четных и нечетных подстановок на множестве X поровну, т.е. $\dfrac{n!}{2}$. Теорема доказана.

9.3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОДСТАНОВКИ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ЦИКЛОВ

Определим целую степень подстановки.

Определение 9.3.1. Пусть $s \in Z$, тогда

$$\alpha^s = \begin{cases} \alpha\alpha^{s-1}, & \text{если } s > 0; \\ e, & \text{если } s = 0; \\ \alpha^{-1}\alpha^{s+1}, & \text{если } s < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что если $s > 0$, то $\alpha^s = \underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{s \text{ раз}}$; если $s < 0$, то

$$\alpha^s = \underbrace{\alpha^{-1}\alpha^{-1}\ldots\alpha^{-1}}_{|\,s\,| \text{ раз}}.$$

Справедливы также равенства $\alpha^s\alpha^m = \alpha^{s+m} = \alpha^m\alpha^s$ для любых $s \in Z$ и $m \in Z$.

Определение 9.3.2. Элемент $j \in X$ называется *действительно перемещаемым подстановкой* α, если $\alpha(j) \neq j$.

Пусть подстановка α на множестве X не является тождественной. Рассмотрим образы действительно перемещаемого подстановкой α элемента j (так как α не тождественная подстановка, то они существуют) при действии неотрицательных степеней подстановки α:

$$j = \alpha^0(j),\ \alpha^1(j),\ \alpha^2(j),\ \ldots,\ \alpha^l(j),\ \ldots \tag{1}$$

Так как каждый из элементов $\alpha^i(j) \in X$, а в множестве X конечное число элементов, то существует такая наименьшая степень $s \in N$, что $\alpha^s(j) = j$. Таким образом, последовательность (1) имеет циклический характер:

$$j = \alpha^0(j), \alpha^1(j), \alpha^2(j), \ldots, \alpha^{s-1}(j),\ j, \alpha^1(j), \alpha^2(j), \ldots \tag{2}$$

Рассмотрим первые s элементов:

$$j = \alpha^0(j), \alpha^1(j), \alpha^2(j), \ldots, \alpha^{s-1}(j)\ . \tag{3}$$

В (3) все элементы различны. Так как если $\alpha^k(j) = \alpha^l(j)$, $0 \le l < k \le s-1$, то $\alpha^{-l}\left(\alpha^k(j)\right) = \alpha^{-l}\left(\alpha^l(j)\right)$ или $\alpha^{k-l}(j) = j$, $0 < k-l < s-1 < s$, что противоречит выбору числа s.

Может случиться так, что в (3) содержатся все действительно перемещаемые подстановкой α элементы множества X (которые, однако, могут не заполнять все множество X). В этом случае подстановка α является циклом на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ n\}$. Дадим точное определение.

Определение 9.3.3. Подстановка α на множестве X называется *циклом на множестве X*, если: для любых действительно перемещаемых подстановкой α элементов $i \in X$ и $j \in X$ существует такая целая степень k, что $\alpha^k(i) = j$.

Заметим еще раз, что все элементы множества X не обязаны быть действительно перемещаемыми циклом α. Например, тождественная подстановка e на множестве X тоже является циклом на множестве X.

Определение 9.3.4. Пусть α – цикл на множестве X. Наименьшее положительное число l такое, что $\alpha^l = e$ называется *длиной цикла на множестве X* (или просто *длиной цикла* α).

Очевидно, что если существуют действительно перемещаемые циклом α элементы, то их количество совпадает с длиной цикла α на множестве X.

Пример. 1) Тождественная подстановка, согласно определению, тоже является циклом, и длина этого цикла равна 1.

2) Рассмотрим подстановку $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Возьмем один из действительно перемещаемых подстановкой α элемент, например, $j = 1$. Тогда $\alpha(j) = \alpha(1) = 3$, $\alpha^2(j) = \alpha^2(1) = \alpha(3) = 2$, $\alpha^3(j) = \alpha^3(1) = 4$, $\alpha^4(j) = \alpha^4(1) = 1$. Таким образом, $s = 4$. Легко увидеть, что α является циклом на множестве $X = \{1; 2; 3; 4\}$ длиной 4 (действительно, все элементы из X действительно перемещаемые и для любых действительно перемещаемых подстановкой α элементов i и j можно указать нужное число k, что проверяется простым перебором, кроме того, $\alpha^l = \alpha^4 = e$).

Учитывая структуру циклов, их удобнее записывать (причем начинать можно с любого действительно перемещаемого элемента j) в виде $\left(j\alpha(j)\alpha^2(j)\ldots\alpha^{s-1}(j)\right)$, опуская элементы из X, не являющиеся действительно перемещаемыми. При этом, однако, надо помнить множество X, так как не все элементы из X могут быть действительно перемещаемыми.

Примеры.

1) Цикл α из предыдущего примера можно записать в виде α = (1324), а также в любом из следующих видов α = (3241) = (2413) = (4132).

2) Рассмотрим подстановку $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&4&5\end{pmatrix}$. Очевидно, подстановка β является циклом на множестве $X=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5\}$, причем β = (123). Элементы 4, 5 не являются действительно перемещаемыми и поэтому мы их не пишем в представлении β = (123), но мы их обязаны помнить, поэтому, и говорим о подстановке β = (123) на множестве $X=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5\}$.

3) Любая транспозиция $\tau_{ij}=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&i&\dots&j&\dots&n-1&n\\1&2&3&\dots&j&\dots&i&\dots&n-1&n\end{pmatrix}$ является циклом длины 2 на множестве $X=\{1;\,2;\,3;\,...;\,n\}$. Согласно сделанным замечаниям ее можно записать в виде $\tau_{ij}=(ij)=(ji)$.

Определение 9.3.5. Циклы на множестве *X* называются *независимыми*, если множества их действительно перемещаемых элементов не пересекаются.

Пример. Рассмотрим подстановку $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&2&1&6&5&7\end{pmatrix}$ на множестве $X=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7\}$. Подстановка α на множестве *X* не является циклом (например, элементы 5 и 1 действительно перемещаемые, но для любого целого числа *k* $\alpha^k(5)\neq 1$), но если ограничиться множеством $X'=\{1;\,2;\,3;\,4\}\subset X$, то подстановка α совпадет с подстановкой одного из предыдущих примеров и, естественно, будет являться циклом на множестве X'. Аналогично можно увидеть, что подстановка α на множестве $X''=\{5;\,6\}$ тоже является циклом. На множестве $X'''=\{7\}$ подстановка α является тождественной подстановкой. Заметим, что подстановку α на множестве $X'=\{1;\,2;\,3;\,4\}$ можно записать как $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}=(1324)$, на множестве $X''=\{5;\,6\}$ – как $\begin{pmatrix}5&6\\6&5\end{pmatrix}=(56)$, на множестве $X'''=\{7\}$ – как $\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}=(7)$. Таким образом, подстановка α по существу оказалась «разложенной на три части», каждая из которых перемещает элементы своей области определения.

Сделанные ранее замечания по поводу записи циклов позволят нам представить подстановку α в виде произведения независимых циклов. Представим циклы на множествах X', X'', X''', как циклы на одном множестве $X=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7\}$:

$(1324)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&2&1&5&6&7\end{pmatrix}$ – мы «добавили» элементы 5, 6, 7, не изменив структуры цикла,

$(56)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&6&5&7\end{pmatrix}$ – снова мы «добавили» элементы 1, 2, 3, 4, 7, расширяющие область определения подстановки, не изменив первоначальный цикл,

$(7)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}$ – это та же тождественная подстановка, но на «большем» множестве *X*. Таким образом,

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&2&1&6&5&7\end{pmatrix}=(1324)(56)(7)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&2&1&5&6&7\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&6&5&7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}.$$

Заметим следующее: 1) так как циклы независимы, то их можно переставлять в произведении, 2) тождественную подстановку, как не изменяющую произведение подстановок, можно не писать в данном произведении. Учитывая все сказанное, получим представление подстановки α в виде произведения независимых циклов: α = (1324)(56) = (56)(1324). Оказывается, что подобным образом можно любую подстановку представить в виде произведения независимых циклов. Уточним это утверждение.

Теорема 9.3.1. Любая подстановка α, не являющаяся тождественной, представляется в виде произведения независимых циклов длины не менее 2, причем единственным образом (с точностью до порядка множителей).

Доказательство. Рассмотрим на множестве *X* бинарное отношение ~, определенное следующим образом: $i\sim j$, $i\in X, j\in X \Leftrightarrow$ существует такое число $k\in Z$, что $\alpha^k(i)=j$. Это бинарное отношение является:

1) рефлексивным (так как $\alpha^0(i)=e(i)=i$, поэтому $i\sim i$ для любого $i\in X$);

2) симметричным (так как, если $\alpha^k(i)=j$, то $\alpha^{-k}(j)=i$, и поэтому $i\sim j\Rightarrow j\sim i$ для любых $i\in X, j\in X$);

3) транзитивным (так как, если $\alpha^k(i)=j$ и $\alpha^l(j)=s$, то $\alpha^{k+l}(i)=s$, и поэтому $i\sim j, j\sim s\Rightarrow i\sim s$ для любых $i\in X, j\in X, s\in X$).

Следовательно, это бинарное отношение на множестве *X* является отношением эквивалентности. Далее, множество *X* разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности: $X=X_1\cup X_2\cup...\cup X_t$. Таким образом, любой элемент $i\in X$ находится только в одном классе эквивалентности (обозначим его X_i), и этот класс эквивалентности состоит из образов элемента *i* при действии различных степеней подстановки α: $X_i=\{...,\,\alpha^{-2}(i),\alpha^{-1}(i),\,i,\alpha(i),\alpha^2(i),\,...\}$. Уточним состав элементов класса эквивалентности X_i. Рассмотрим образы элемента *i* при действии неотрицательных степеней подстановки α:

$i, \alpha(i), \alpha^2(i), \ldots$, так как в множестве X_i содержится конечное число элементов, то эта последовательность будет периодически повторяться. Обозначим l_i – такое наименьшее положительное число, что $\alpha^{l_i}(i) = i$. Тогда, удаляя повторяющиеся элементы X_i, получим $X_i = \{\ldots, \alpha^{-2}(i), \alpha^{-1}(i), i, \alpha(i), \alpha^2(i), \ldots, \alpha^{l_i-1}(i)\}$. Далее, образ *i* при действии любой отрицательной степени подстановки α совпадет с образом *i* при действии некоторой неотрицательной степени подстановки α. Действительно, для любого числа $k < 0$ найдется такое натуральное число *n*, что $(n-1)l_i < |k| \le nl_i$. Следовательно, $0 \le k + nl_i < l_i$. Поэтому $\alpha^k(i) = \ = \alpha^k\left(\alpha^{nl_i}(i)\right) = \alpha^{k+nl_i}(i) = \alpha^p(i)$, где p – некоторое неотрицательное число, $0 \le p < l_i$. Таким образом, записывая только различные элементы X_i, получим $X_i = \{i, \alpha(i), \alpha^2(i), \ldots, \alpha^{l_i-1}(i)\}$, где l_i – некоторое положительное число. Обозначим $\alpha_i = \left(i\,\alpha(i)\,\alpha^2(i)\ldots\alpha^{l_i-1}(i)\right)$ – цикл длиной l_i (или $\alpha_i(j) = \begin{cases} j, & \text{если } j \notin X_i; \\ \alpha(j), & \text{если } j \in X_i \end{cases}$). Так как классы эквивалентности не пересекаются, то циклы (типа α_i), им соответствующие, будут независимыми. Далее, подстановка α на множестве *X* может быть представлена в виде $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t$. Если опустить циклы длины 1 (как соответствующие тождественной подстановке), то $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$ $(p \le t)$. Причем, любой из циклов α_1, α_2, ..., α_p имеет длину не менее 2. Возможность представления подстановки α в виде произведения независимых циклов длины не менее 2 доказана.

Докажем единственность (с точностью до перестановки циклов в их произведении) такого представления. Допустим, что есть еще одно такое представление подстановки α: $\alpha = \beta_1\beta_2\ldots\beta_m$. Пусть $i \in X$ действительно перемещаемый элемент подстановкой α. Так как циклы в представлениях $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p = \beta_1\beta_2\ldots\beta_m$ независимы, то *i* является действительно перемещаемым элементом только для одного цикла для каждого из представлений. Учитывая, что независимые циклы в произведениях можно переставлять, считаем, что это циклы α_1 и β_1, тогда

$$\alpha_1 = \left(i\alpha_1(i)\alpha_1^2(i)\ldots\right) = \left(i\alpha(i)\alpha^2(i)\ldots\right)$$

и

$$\beta_1 = \left(i\beta_1(i)\beta_1^2(i)\ldots\right) = \left(i\alpha(i)\alpha^2(i)\ldots\right).$$

Следовательно, циклы α_1 и β_1 состоят из одних и тех же элементов и поэтому $\alpha_1 = \beta_1$. Аналогично доказывается, что $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_q = \beta_q$, где *q* – меньшее из чисел *p* и *m*. Отсюда вытекает, что *p* = *m*, и подстановка α может иметь представления в виде произведения независимых циклов, отличающиеся только порядком множителей. Теорема доказана.

9.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОДСТАНОВКИ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРАНСПОЗИЦИЙ И ЧЕТНОСТЬ ПОДСТАНОВКИ

Доказанная теорема 9.3.1 позволяет любую подстановку свести к подстановкам «простой структуры» – независимым циклам длины не менее 2. Оказывается, что подстановки можно представлять как результат произведения «самых простых» (не считая тождественной) подстановок – транспозиций. Уточним это утверждение.

Теорема 9.4.1. Пусть множество *X* содержит не менее 2 элементов. Тогда любая подстановка α на множестве *X* представляется в виде произведения транспозиций.

Доказательство. Заметим сразу, что теорема верна для тождественной подстановки: $e = \tau_{ij}\tau_{ij}$, где $i \in X, j \in X$. Для остальных подстановок, в силу теоремы 9.3.1, достаточно доказать, что цикл длины не менее 2 представляется в виде произведения транспозиций.

Пусть нам дан цикл длиной *q*: $(i_1 i_2 i_3 \ldots i_{q-1} i_q)$. Докажем справедливость равенства $(i_1 i_2 i_3 \ldots i_{q-1} i_q) = (i_1 i_q)\,(i_1 i_{q-1})\ldots(i_1 i_3)\,(i_1 i_2)$. Напомним, что транспозиции в правой части равенства – это подстановки следующего вида:

$$\gamma_2 = (i_1 i_2) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i_1 & \ldots & i_2 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i_2 & \ldots & i_1 & \ldots & n \end{pmatrix};$$

$$\gamma_3 = (i_1 i_3) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i_1 & \ldots & i_3 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i_3 & \ldots & i_1 & \ldots & n \end{pmatrix};$$

$$\ldots$$

$$\gamma_{q-1} = (i_1 i_{q-1}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i_1 & \ldots & i_{q-1} & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i_{q-1} & \ldots & i_1 & \ldots & n \end{pmatrix};$$

$$\gamma_q = (i_1 i_q) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i_1 & \ldots & i_q & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i_q & \ldots & i_1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведение транспозиций

$$(i_1 i_q)(i_1 i_{q-1})\ldots(i_1 i_3)(i_1 i_2) = \gamma_q\gamma_{q-1}\ldots\gamma_3\gamma_2 = \gamma\ .$$

Найдем образы элементов i_j $(j=1, ..., q)$ при действии подстановки γ (напомним, что если элемент x при отображении f переходит в элемент y, то одно из обозначений для этой ситуации: $x \xrightarrow{f} y$):

$$i_1 \xrightarrow{\gamma_2} i_2 \xrightarrow{\gamma_3} i_2 \xrightarrow{\gamma_4} \dots \xrightarrow{\gamma_{q-2}} i_2 \xrightarrow{\gamma_{q-1}} i_2 \xrightarrow{\gamma_q} i_2 \Rightarrow i_1 \xrightarrow{\gamma} i_2;$$

$$i_2 \xrightarrow{\gamma_2} i_1 \xrightarrow{\gamma_3} i_3 \xrightarrow{\gamma_4} \dots \xrightarrow{\gamma_{q-2}} i_3 \xrightarrow{\gamma_{q-1}} i_3 \xrightarrow{\gamma_q} i_3 \Rightarrow i_2 \xrightarrow{\gamma} i_3;$$

$$\dots$$

$$i_{q-1} \xrightarrow{\gamma_2} i_{q-1} \xrightarrow{\gamma_3} i_{q-1} \xrightarrow{\gamma_4} \dots \xrightarrow{\gamma_{q-2}} i_{q-1} \xrightarrow{\gamma_{q-1}} i_1 \xrightarrow{\gamma_q} i_q \Rightarrow i_{q-1} \xrightarrow{\gamma} i_q;$$

$$i_q \xrightarrow{\gamma_2} i_q \xrightarrow{\gamma_3} i_q \xrightarrow{\gamma_4} \dots \xrightarrow{\gamma_{q-2}} i_q \xrightarrow{\gamma_{q-1}} i_q \xrightarrow{\gamma_q} i_1 \Rightarrow i_q \xrightarrow{\gamma} i_1.$$

Следовательно, $\gamma = \left(i_1 i_2 i_3 \dots i_{q-1} i_q\right)$. Теорема доказана.

Примеры.

1. Разложим цикл (1342) на множестве $X = \{1; 2; 3; 4\}$ в произведение транспозиций: (1342) = (12)(14)(13). Проверим это равенство:

$$(12)(14)(13) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1342).$$

2. Разложим подстановку $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ в произведение транспозиций. Сначала разложим подстановку α в произведение независимых циклов: α = (1324)(567)(8)(9) или α = (1324)(567), если циклы длины 1, т.е. (8) и (9), отождествить с тождественной подстановкой на множестве $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Далее, разложив каждый из циклов в произведение транспозиций, получим: α = (14)(12)(13)(57)(56).

Теорема 9.4.2. Любая подстановка α на множестве X представляется в виде произведения $n-s$ транспозиций, где n – количество элементов в множестве X; s – количество циклов в представлении подстановки α в виде произведения независимых циклов (включая циклы длины 1).

Доказательство. Подстановку α можно разложить в произведение независимых циклов (среди которых могут быть циклы длины 1):

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix} = \left(i_1 \dots i_{k_1}\right)\left(j_1 \dots j_{k_2}\right)\dots\left(l_1 \dots l_{k_s}\right).$$

Оставим в данном представлении циклы длины 1, и поэтому $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$. Далее, каждый цикл представляется в виде произведения $k_i - 1$ транспозиций $(i = 1, 2, ..., s)$. Действительно, если цикл длины k_i не менее 2, то это вытекает из теоремы 9.4.1, если же цикл длины $k_i = 1$, то он никакого влияния на количество транспозиций не оказывает (при разложении подстановки в произведение независимых циклов или транспозиций мы такие циклы не указываем, отождествляя их с тождественной подстановкой на множестве X) – что соответствует $k_i - 1 = 1 - 1 = 0$ транспозициям. Подсчитаем общее количество транспозиций в данном разложении:

$$\left(k_1 - 1\right) + \left(k_2 - 1\right) + \dots + \left(k_s - 1\right) = \left(k_1 + k_2 + \dots + k_s\right) - s = n - s.$$

Теорема доказана.

Определение 9.4.1. Число $n-s$, где n – число элементов в множестве X, s – количество циклов, включая циклы длиной 1, в разложении подстановки α в произведение независимых циклов, называется *декрементом подстановки* α.

Теорема 9.4.3. Четность подстановки α совпадает с четностью декремента подстановки α: $\operatorname{sgn}(\alpha) = (-1)^{n-s}$.

Доказательство. По теореме 9.4.2 подстановку α можно представить в виде произведения $n-s$ транспозиций: $\alpha = \tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-s}$, где τ_i – транспозиция $(i = 1, 2, ..., n-s)$. По теоремам 9.2.1 и 9.2.3 получим:

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \operatorname{sgn}\left(\tau_1 \tau_2 \dots \tau_{n-s}\right) = \operatorname{sgn}\left(\tau_1\right)\operatorname{sgn}\left(\tau_2\right)\dots\operatorname{sgn}\left(\tau_{n-s}\right) = (-1)^{n-s}.$$

Теорема доказана.

Пример. Определим четность подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 6 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Как мы уже знаем, α = (1324)(567)(8)(9). Таким образом, $n = 9$, $s = 4$, $n - s = 5$ – нечетное число, следовательно, подстановка α нечетная.

Обратим внимание на то, что в теоремах 9.4.1 и 9.4.2 ничего не говорится о единственности представления подстановки в виде произведения транспозиций. Легко убедиться, что представление подстановки в виде произведения транспозиций не является единственным. В одном из предыдущих примеров мы могли бы написать для цикла (1342) = (12)(14)(13) и другое представление в виде произведения транспозиций, например такое: $(1342)=(12)(14)(13)\underbrace{(23)(32)}_{e}$. Однако при разложении подстановки в произведение транспозиций есть инвариант. Так как любая подстановка или четная, или нечетная, то число транспозиций в любом представлении подстановки в виде произведения транспозиций тоже должно быть или четным, или нечетным, соответственно. Действительно, допустим, что подстановка α допускает какое-то представление в виде произведения d транспозиций, тогда $\operatorname{sgn}(\alpha)=(-1)^d$. Следовательно, четность подстановки α и числа d должна быть одинакова.

Таким образом, *четность числа транспозиций* в представлении подстановки в виде произведения транспозиций и есть тот инвариант, о котором шла речь.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 9

9.1. Перемножить подстановки в указанном и обратном порядке:

1) $\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&1&5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&2&4\end{pmatrix}$;

2) $\alpha\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&6&4&5&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&1&5&6&3\end{pmatrix}$.

9.2. Найти обратную подстановку для указанной подстановки:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&4&1&7&3&6&2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&7&5&2&4\end{pmatrix}$.

9.3. Записать подстановки: а) в виде произведения независимых циклов; б) в виде произведения транспозиций:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&4&1&7&3&6&2\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&7&5&2&4\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&7&6&5&1&2&4\end{pmatrix}$.

9.4. Записать произведение циклов в виде одной подстановки с двумя строками, считая, что $X=\{1;\,2;\,3;\,4;\,5;\,6;\,7;\,8;\,9\}$:

1) (15)(234);
2) (13)(25)(4);
3) (7531)(246)(8)(9).

9.5. Пусть α – цикл длины l. Для каких степеней k верно равенство $\alpha^k=e$, где e – тождественная подстановка.

9.6. Пусть подстановка α есть произведение двух независимых циклов длин l_1,l_2, соответственно: $\alpha=\alpha_1\alpha_2$. Для каких степеней k верно равенство $\alpha^k=e$, где e – тождественная подстановка.

9.7. Обобщить предыдущие задачи на случай: $\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – независимые циклы длин $l_1,l_2,\ldots,l_n$, соответственно.

9.8. Для подстановок из 9.3), 9.4) найти *порядок* (т.е. такую наименьшую натуральную степень k, для которой верно равенство $\alpha^k=e$, где e – тождественная подстановка).

9.9. Определить четность подстановки:

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&5&2&3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&1&4&2&3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&1&3&6&5&7&4&2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\5&8&9&2&1&4&3&6&7\end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\ldots&2n-1&2n\\2&1&4&3&\ldots&2n&2n-1\end{pmatrix}$.

9.10. Дана подстановка $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&k&\ldots&n\\\tau(1)&\tau(2)&\tau(3)&\ldots&\tau(k)&\ldots&\tau(n)\end{pmatrix}$.

Найти число инверсий вида (ik), где k – фиксированное число, $i\in X$, $i\neq k$, если: 1) $\tau(k)=1$; 2) $\tau(k)=n$.

9.11. Определить наибольшее число инверсий для подстановки на множестве $X=\{1;\,2;\,3;\,\ldots;\,n\}$. Привести пример такой подстановки.

9.12. Число инверсий подстановки $\alpha_1=\begin{pmatrix}1&2&3&\ldots&n-1&n\\a_1&a_2&a_3&\ldots&a_{n-1}&a_n\end{pmatrix}$ равно k. Найти число инверсий подстановки

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

9.13. Доказать, что для любого числа $k : 0 \le k \le C_n^2$ существует подстановка на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ n\}$ с k инверсиями.

9.14. Доказать, что любую четную подстановку на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ n\}$ $(n \ge 3)$ можно разложить в произведение циклов длины 3.

9.15. Доказать, что любую подстановку на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ n\}$ можно представить в виде произведения транспозиций вида (12), (23), (34), …, $(n - 1n)$.

9.16. Доказать, что любую подстановку на множестве $X = \{1;\ 2;\ 3;\ \dots;\ n\}$ можно представить в виде произведения подстановки $\alpha = (12)$ и целых степеней подстановки $\beta = (123\dots n)$.

Список литературы

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру / А.И. Кострикин. – М. : Наука, 1977.
2. Глухов, М.М. Алгебра / М.М. Глухов, В.П. Елизаров, А.А. Нечаев. – М. : Гелиос АРВ, 2003. – Т. 1, 2.
3. Самсонов Б.Б. Компьютерная математика (основание информатики) / Б.Б. Самсонов, Е.М. Плохов, А.И. Филоненков. – Ростов н/Д. : Феникс, 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ