# ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ГОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»**

# ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические рекомендации и контрольные задания
для студентов 2 курса инженерно-технических специальностей
дневной формы обучения

Тамбов
Издательство ТГТУ
2007

УДК 517.53
ББК В161.55я73-5
Ф948

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики ТГТУ
*А.В. Медведев*

Составители:

*А.Д. Нахман*
*Е.А. Петрова*

Ф948 Функции комплексного переменного : методические рекомендации и контрольные задания / сост. : А.Д. Нахман, Е.А. Петрова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 40 с. – 400 экз.

Изложены основные положения комплексного анализа, предписанные к изучению действующим образовательным стандартом в области естественно-математических дисциплин.

Предназначены для студентов 2 курса инженерно-технических специальностей.

УДК 517.53
ББК В161.55я73-5

Учебное издание

# ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Методические рекомендации и контрольные задания

Составители:

НАХМАН Александр Давидович
ПЕТРОВА Елена Анатольевна

Редактор Е.С. М о р д а с о в а
Компьютерное макетирование Е.В. К о р а б л е в о й

Подписано в печать 15.11.07
Формат 60 × 84/16. 2,32 усл. печ. л. Тираж 400 экз. Заказ № 730

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

# ВВЕДЕНИЕ

В данных методических рекомендациях изложены основные вопросы теории функций комплексного переменного в соответствии с действующей программой по высшей математике для студентов инженерно-технических специальностей вуза. Каждый из выделенных параграфов содержит краткое изложение основных теоретических сведений, практическое руководство по решению стандартных математических задач. В конце блока предлагаются задачи для осуществления самоконтроля. Кроме того, приведена итоговая подборка заданий, позволяющих подготовиться к зачету или экзамену.

## 1. КОМПЛЕСНЫЕ ЧИСЛА В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМАХ. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. *Основные понятия.*

**Определение.** *Комплексным** *числом* $z$ называется выражение вида

$$x + yi\,,$$

где $x$, $y$ – действительные числа ( $x \in R$ , $y \in R$ ); $i$ – число, квадрат которого равен минус единице ( $i^2 = -1$ ); число $i = \sqrt{-1}$ называется *мнимой единицей*.

Число $x$ называется *действительной частью* комплексного числа $z$ , обозначается $x = \operatorname{Re} z$ ; $y$ называется *мнимой частью* комплексного числа $z$ и обозначается $y = \operatorname{Im} z$ . Выражение $z = x + yi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа. *Множество комплексных чисел* обозначается $C$, а $z \in C$ – элемент множества. Очевидно, что $R \subset C$ .

*ПРИМЕР.* Нахождение действительной и мнимой частей комплексных чисел. Записать действительную и мнимую части чисел:

$$z_1 = 1 - 2i,\ \ z_2 = -3i,\ \ z_3 = i - 2,\ \ z_4 = 5\,.$$

Решение. Имеем $\operatorname{Re} z_1 = 1, \operatorname{Im} z_1 = -2$ . Далее $z_2 = 0 - 3i$ , $\operatorname{Re} z_2 = 0,\ \ \operatorname{Im} z_2 = -3$ . Число $z_3 = i - 2$ следует записать в стандартном виде $z_3 = -2 + i$ ; тогда $\operatorname{Re} z_3 = -2, \operatorname{Im} z_3 = 1$ . Наконец $z_4 = 5 + 0i$ , т.е. $\operatorname{Re} z_4 = 5,\ \ \operatorname{Im} z_4 = 0$ .

Определение. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

---

* Название «комплексное» происходит от слова «составное»: по виду выражения x + yi.

Задание комплексного числа $z$ можно рассматривать как задание точки на плоскости, абсциссой которой является $x = \operatorname{Re} z$ , ординатой $y = \operatorname{Im} z$ , т.е. числу $z = x + yi$ соответствует точка $(x, y)$. Между множеством точек XOY и множеством комплексных чисел (множество С), таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие. Плоскость XOY при этом называется комплексной плоскостью.

Числа вида $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ называются сопряженными.

2. Арифметические операции над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

1) Суммой (разностью) комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется число $z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$.

При сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) действительные и мнимые части соответственно**.**

2) *Умножение на постоянное число*: $\lambda z = \lambda x + \lambda y i$ . Заметим, что $z_1 - z_2 = z_1 + (-1) z_2$ .

3) *Произведением* двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называется число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i\,.$$

Комплексные числа перемножаются как двучлены, при этом учитывается, что $i^2 = -1$ . В частности, имеем $z^2 = z\,z = (x^2 - y^2) + 2xyi$ .

4) *Частным* от деления числа $z_1$ на $z_2$ ( $z_2 \neq 0$ ) называется число $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, такое, что справедливо равенство $z_1 = z\,z_2$ .

Чтобы разделить число $z_1$ на $z_2$ ( $z_2 \neq 0$ ), следует числитель и знаменатель дроби $\dfrac{z_1}{z_2}$ умножить на число $\bar{z}_2$, сопряженное знаменателю.

*Пример. алгебраические действия с комплексными числами.*

Вычислить $\dfrac{2i}{1-i}$ .

*Решение*. Имеем: $\dfrac{2i}{1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i + 2i^2}{1 - i^2} = \dfrac{-2 + 2i}{2} = -1 + i.$

3. *Тригонометрическая форма комплексного числа.*

Если $x$ и $y$ – декартовы координаты точки плоскости, то, перейдя на плоскости к полярным координатам $(\rho, \varphi)$ (рис. 1.1), получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа:

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.1)$$

Связь полярных и декартовых координат точки $z$ может быть также представлена в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.2)$$

Число $\rho$ – длина радиуса-вектора точки $(x, y)$ называется *модулем* комплексного числа $z = x + iy$ . Обозначение: $|z| = \rho$ .

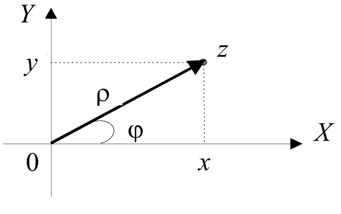


**Рис. 1.1**

Учитывая соотношения (1.2) получаем формулу для нахождения модуля числа $z = x + iy$ :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.3}$$

Угол $\varphi$ поворота оси $OX$ до совмещения с вектором $OZ$ называется *аргументом* комплексного числа $z$ и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Заметим, что $\operatorname{Arg} z$ определяется неоднозначно, с точностью до $2\pi k,\ k \in Z$ :

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Если $-\pi < \arg z \le \pi$, то $\varphi = \arg z$ называется *главным значением аргумента*.

При решении задач для вычисления аргумента рекомендуется пользоваться формулой (1.4).

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x),\ x > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi,\ x < 0, y > 0; \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi,\ x < 0, y < 0; \\ \pi/2,\ x = 0, y > 0; \\ -\pi/2,\ x = 0, y < 0; \\ 0, \text{если } x > 0, y = 0; \\ \pi, \text{если } x < 0, y = 0; \\ \text{не определен, если } x = 0,\ y = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

*Пример. приведение к тригонометрической форме комплексного числа*. Записать в тригонометрической форме числа а) $z = -\sqrt{3} - i$ ; б) $z = 3i$ .

*Решение*. а) Находим по формуле (1.3) модуль $\rho = |z| = \ = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$. Так как $x = -\sqrt{3} < 0$ , $y = -1 < 0$ , т.е. точка расположена в третьей четверти, то по (1.4) получаем $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \ = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$. Записываем $z$ в тригонометрической форме (см. соотношение (1.1)), учитывая, что $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$, $-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$: $z = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

б) Находим модуль $|z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$. Для числа $z = 3i$ имеем $x = 0,\ y = 3 > 0$ (точка расположена на оси $OY$), тогда по формуле (1.4) $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Получаем тригонометрическую форму

$$z = 3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

## УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1**. Изобразить данные и сопряженные к ним числа точками плоскости
а) $1+i$ ; б) $-2-3i$ ; в) $5$ ; г) $-1+2i$ ; д) $-4i$ .

2. Вычислить

а) $(2+i)(-4+3i) + \operatorname{Im}(5-i)$; б) $\frac{3+4i}{i} + \frac{5i}{2+i}$ ; в) $\frac{37i}{6-i} - i|-3+4i|$ ;

г) $i\operatorname{Re}(2+3i)^2 - \frac{1}{2i}$ ; д) $(2i(2-i))^2$ ; е) $\left[\frac{4+i}{i^3} - \operatorname{Im}(i(3-4i))\right]^2$.

3. Доказать равенства

а) $\frac{6-i}{3+4i} = \frac{13+41i}{-25+25i}$ ; б) $\operatorname{Re}\left(\frac{9-7i}{2-3i}\right) = 3$ ;) в) $|\bar{z}+z|^2 + |\bar{z}-z|^2 = 4|z|^2$.

4. Что можно сказать о двух комплексных числах, если их сумма и разность одновременно представляют собой: а) действительные числа; б) чисто мнимые числа?

5. При каком действительном значении $a$ выражение $3i^3 - 2ai^2 + (1-a)i + 5$ будет числом: а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю?

6. Найти комплексное число $z$ из уравнения $(2-3i)z = -1-5i$ .

7. Найти модуль и аргумент (главное значение) комплексных чисел

$$z_1 = 1-3i,\ z_2 = 1+\sqrt{2}i,\ z_3 = \left(1+\sqrt{2}\right)i,\ z_4 = 1-\sqrt{2}.$$

**8. НАЙТИ $|\bar{z}|$ И $\arg\bar{z}$, ЕСЛИ** $z = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$, $z_1 = i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ **.**

9. Записать в тригонометрической форме числа

$$z_1 = -2i,\ z_2 = 5,\ z_3 = \sqrt{3} - i,\ z_4 = \frac{-1+i}{2}.$$

## 2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1. *Возведение в натуральную степень.*

Если $z = x + iy = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то для любого натурального числа *n* имеет место формула:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots . \qquad (2.1)$$

Другими словами, при возведении в степень $n \in N$ – модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на *n*.

***Пример.*** *Вычисление* $w = z^n$. Вычислить $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{12}$.

*Решение.* Найдем модуль и аргумент числа $z = -1 + i\sqrt{3}$. Имеем $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Поскольку точка $z$ расположена во 2-й четверти, то $\varphi = \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно, в тригонометрической форме $z = 2\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Теперь согласно формуле (2.1) получаем:

$$z^{12} = 2^{12}\cdot\left(\cos 12\frac{2\pi}{3} + \sin 12\frac{2\pi}{3}\right) = 4096\cdot(\cos 8\pi + i\sin 8\pi) = 4096.$$

В алгебраической форме $z^{12} = 4096.$

2. **Определение.** *Корнем n-й степени* из комплексного числа *z* называется число $w = \sqrt[n]{z}$ такое, что $w^n = z$.

Для любого комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$ существует ровно *n* различных значений корня, которые имеют вид

$$w_к = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ \ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (2.2)$$

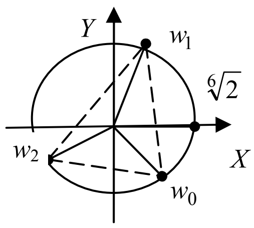


**РИС.**

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является многозначной – каждому значению аргумента отвечает *n* различных значений корня.

***Пример.*** *Вычисление корня n-й степени из комплексного числа.* Вычислить и изобразить на комплексной плоскости значения $w = \sqrt[3]{-1-i}$.

*Решение.* Для $z = -1 - i$ имеем $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Точка $z$ расположена в 3-й четверти: $\varphi = \arg z = -\pi + \operatorname{arctg}1 = -\pi + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4}$.

Тогда по формуле (2.2) имеем

$$w_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Следовательно, $w_0 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$,

$$w_1 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right),\quad w_2 = \sqrt[6]{2}\cdot\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Изобразим результаты на комплексной плоскости (рис. 2.1).

3. По определению для всякого $y \in R$ полагаем $e^{iy} = \cos y + i\sin y$. Тогда, если $z = x + yi$, то значение функции $w = e^z$ вычисляется по формуле $w = e^z = e^x e^{iy}$ или

$$w = e^x(\cos y + i\sin y). \qquad (2.3)$$

Последнее представление можно понимать как тригонометрическую форму записи *w*.

***Пример.*** *Вычисление значения функции* $w = e^z$. Вычислить $e^{1 - i\frac{\pi}{4}}$.

*Решение*. Используя формулу (2.3) получаем

$$e^{1-i\frac{\pi}{4}}=e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{e\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

4. *Тригонометрические функции*. Функции $w=\cos z$ и $w=\sin z$ определяют в виде

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\ \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{2.4}$$

Тангенс и котангенс комплексного переменного определяем по формулам

$$\mathrm{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\ \mathrm{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}$$

во всех точках $z$, где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль.

***Пример.*** *Вычисление значений тригонометрических функций.* Вычислить значение $w=\sin\frac{\pi i}{2}$.

*Решение.* Согласно (2.4) имеем

$$w=\sin\frac{\pi i}{2}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}}{2i}=-i\,\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}.$$

5. *Гиперболические синус* и *косинус* определяются по формулам

$$\mathrm{sh}z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\ \mathrm{ch}z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}.$$

Имеют место соотношения:

$$\mathrm{ch}z=\cos(iz),\ \mathrm{sh}z=-i\sin(iz),\ \mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=1. \tag{2.5}$$

***Пример.*** *Вычисление значений гиперболических функций.* Вычислить $w=\mathrm{sh}\left(-i^3\right)$.

*Решение.* Запишем $\mathrm{sh}\left(-i^3\right)=\mathrm{sh}\left(-i\,i^2\right)=\mathrm{sh}i$. Тогда, согласно соотношению (2.5), имеем $\mathrm{sh}\,i=-i\sin(i\,i)=-i\sin(-1)$. Учитывая нечетность синуса, получаем $w=i\sin 1$.

***Пример.*** *Вычисление значений тригонометрических функций посредством перехода к гиперболическим.* Вычислить $w=\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$.

*Решение.* Воспользуемся известной формулой косинуса суммы:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos i-\sin\frac{\pi}{4}\sin i=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos i-\sin i).$$

Применяя соотношения (2.5) получаем $\cos i=\mathrm{ch}1$, $\sin i=i\mathrm{sh}1$. Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\mathrm{ch}1-i\mathrm{sh}1)$.

6. **Определение.** *Логарифмом* (натуральным логарифмом) числа $z$ называется такое число $w$, что $e^w=z$, где $z\neq 0$. Значения логарифмической функции $w=\mathrm{Ln}z$ вычисляются по формуле

$$\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k\in Z.$$

Величину $\ln z=\ln|z|+i\arg z$ называют *главным значением логарифма.* Логарифмическая функция определена при всех $z\neq 0$ и многозначна.

Известные нам свойства логарифма сохраняются и в случае комплексной переменной.

***Пример.*** *Вычисление значений логарифма.* Вычислить $\mathrm{Ln}(-1)$.

*Решение.* Так как $-1=\cos\pi+i\sin\pi$, то

$$\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i(\pi+2\pi k)=i\pi(1+2k),\ k\in Z.$$

7. В основу определения *показательной функции* положено известное (для случая действительной переменной) свойство

$$a^x=\left(e^{\ln a}\right)^x=e^{x\ln a},a>0.$$

Полагаем теперь для любых комплексных $a\neq 0$ и $z$

$$a^z=e^{z\mathrm{Ln}a}. \tag{2.6}$$

Эта функция также является многозначной в силу многозначности логарифма.

***Пример.*** *Вычисление значений показательной функции.* Вычислить $i^{-i}$.

*Решение.* По формуле (2.6) $i^{-i}=e^{-i\mathrm{Ln}i}$. При этом $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$, значит $\mathrm{Ln}i=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)$. Теперь $-i\mathrm{Ln}i=\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)$, а тогда $i^{-i}=e^{\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)}$, $k\in Z$.

8. *Обратные тригонометрические функции* определяются как функции, обратные по отношению к синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу.

Значения обратных тригонометрических функций комплексного переменного вычисляются по формулам:

$$\mathrm{Arcsin}z=-i\mathrm{Ln}\left(zi+\sqrt{1-z^2}\right);\ \mathrm{Arccos}z=-i\mathrm{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\mathrm{Arctg}z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz};\ \mathrm{Arcctg}z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}.$$

***Пример.*** *Вычисление значений обратных тригонометрических функций.* Вычислить $\mathrm{Arc}\sin 2$.

*Решение.* $\mathrm{Arcsin}2=-i\mathrm{Ln}\left(2i+\sqrt{-3}\right)=-i\mathrm{Ln}\left(2i\pm\sqrt{3}i\right)=-i\mathrm{Ln}\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$; здесь $\pm\sqrt{3}$ – значения уже арифметического корня из действительного числа. Поскольку числа $\left(2\pm\sqrt{3}\right)i$ имеют аргументом $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, то имеем два ответа:

$$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)\ \text{и}\ \ln\left(2-\sqrt{3}\right)+i\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right),\quad k\in Z.$$

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти все значения корня и изобразить их на комплексной плоскости: а) $\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$; б) $\sqrt[4]{-16}$; в) $\sqrt[3]{\frac{i}{8}}$; г) $\sqrt[4]{i^3}$.

2. Вычислить значения: а) $\left(3-\sqrt{3}i\right)^6$; б) $\frac{(-2+2i)^8}{16}$; в) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; г) $e^{i-3}$.

3. Представить в алгебраической форме: 1) $\sin^2\frac{i}{2}$; 2) $\cos\left(8i^3\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-5i\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$; 5) $\mathrm{sh}\left(2-\pi i\right)$; 6) $\mathrm{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)$; 7) $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{\sqrt{5}}\right)$; 8) $\mathrm{Ln}\,(2i\,(i-1))$; 9) $-i\mathrm{Ln}\left(-e^2\right)$; 10) $i^{1+i}$; 11) $1^{2i}$; 12) $(-i)^{-5i}$; 13) $\mathrm{Arc}\cos\left(-3i\right)$; 14) $\mathrm{Arc}\sin 4$; 15) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.

4. Решить уравнения: а) $\ln\left(z+1\right)=\pi i$; б) $e^z+1=0$; в) $e^{z+1}=\pi i$.

## 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. *Производная функции комплексного переменного.*

Пусть $w=f\left(z\right)$ определена в точке $z=x+yi$ и некоторой ее окрестности. Пусть $x$ получает некоторое приращение $\Delta x$, а $y$ – приращение $\Delta y$. Тогда $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ – соответствующее приращение переменной $z$. Пусть $\Delta w=f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)$.

**Определение.** Если существует предел вида $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$, то он называется производной функции $f\left(z\right)$ в точке $z$; обозначается $f'\left(z\right)$; $w', \frac{dw}{dz}, \frac{df}{dz}$. Функция же $f\left(z\right)$ называется дифференцируемой в точке $z$.

2. *Правила дифференцирования.* Справедливы правила дифференцирования, известные из действительного анализа. Например, если $f\left(z\right)=C$, где $C=\mathrm{const}$ (постоянное комплексное число), то $f'\left(z\right)=0$; $\left(Cf\left(z\right)\right)'=Cf'\left(z\right)$, $C=\mathrm{const}$ и т.п.

3. *Условия дифференцируемости.* Пусть $w=f\left(z\right)$ определена в точке $z=x+iy$ и в некоторой ее окрестности. Запишем $f\left(z\right)$ в виде $f\left(z\right)=u\left(x,\ y\right)+iv\left(x,\ y\right)$.

Необходимыми и достаточными условиями *дифференцируемости* $f\left(z\right)$ *в точке* $z$ являются дифференцируемость функций $u\left(x,\ y\right)$ и $v\left(x,\ y\right)$ в точке $\left(x,\ y\right)$ и выполнимость следующих условий Коши-Римана:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}\qquad(3.1)$$

Производная дифференцируемой функции может быть записана по одной из формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x};\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y};\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

4. **Определение.** Функция $w=f(z)$, дифференцируемая в точке $z_0$ и некоторой ее окрестности, называется *аналитической в точке* $z_0$.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области *G*, называется *аналитической в этой области.*

Точки $z$ комплексной плоскости, в которых однозначная $f(z)$ является аналитической, называются *правильными* точками этой функции, а все остальные точки (в частности, те, где $f(z)$ не определена) – *особыми* для $f(z)$.

Согласно п. 3 критерием аналитичности $f(z)$ в данной точке $z$ (в данной области *G*) является выполнение условий Коши-Римана (3.1) в этой точке и некоторой ее окрестности (в области *G*).

***Пример.*** *Исследование дифференцируемости и аналитичности функции.* Найти точки, в которых функция $f(z)$: 1) дифференцируема;
2) аналитична: а) $f(z)=z^2$; б) $f(z)=z\operatorname{Im} z$.

*Решение.* а) Выделим действительную и мнимую части $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$. Поскольку $f(z)=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi,$ то $u(x,\ y)=x^2-y^2,\ v(x,\ y)=2xy$.

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

Условия Коши-Римана (3.1) выполнены, очевидно, при всех *x* и *y*, т.е. во всех точках комплексной плоскости функция $f(z)$ дифференцируема. Следовательно, $w=z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

2) Рассмотрим $f(z)=z\operatorname{Im} z$. Имеем:

$$f(z)=(x+yi)y=xy+iy^2,\ \text{т.е.}\ u=(x,\ y)=xy,\ v(x,\ y)=y^2.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y.$$

Проверяем условия Коши-Римана (3.1):

$$\begin{cases} y=2y; \\ -x=0, \end{cases} \text{отсюда получаем}\quad x=y=0.$$

Итак, в единственной точке $z=0$ условия Коши-Римана выполнены, и, следовательно, в этой точке функция $f(z)$ имеет производную. Значит, функция ни в одной точке не аналитична (точка дифференцируемости – единственная, и не существует ее окрестности, где дифференцируемость сохраняется).

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти точки, в которых функция $f(z)$: 1) дифференцируема; 2) аналитична.

а) $f(z)=z^2+2z-1$; б) $f(z)=\cos 2z$; в) $f(z)=\bar{z}\operatorname{Re}(z-2)$;

г) $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$; д) $f(z)=z(|z|+2)$; е) $f(z)=\dfrac{\operatorname{Im} z^2}{2i}$.

2. Вычислить производную функции $f(z)$ в точке $z_0$:

1) $f(z)=z^2-4z+5,\ z_0=-1+2i$; 2) $f(z)=\dfrac{\sin z}{2},\ z_0=\pi-i$;

3) $f(z)=e^{6-5i},\ z_0=3-i\dfrac{\pi}{2}$.

3. Найти $|f'(z_0)|$, $\arg f'(z_0)$, если $f(z)=e^{2z}$ и $z_0=i$.

## 4. ИНТЕГРАЛЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Понятие интеграла функции $w = f(z)$ непрерывной в области $G$ по линии $L \subset G$ вводится аналогично понятию криволинейного интеграла функции действительного переменного. Пусть функция $f(z)$ определена на некоторой кривой $L$, кривая предполагается гладкой (или кусочно-гладкой). Дуга $AB$ кривой $L$ разбивается произвольным образом на $n$ частей точками $z_0, z_1, \ldots, z_n$ в направлении от $A$ к $B$, при этом $z_0$ совпадает с точкой $A$, $z_n$ с точкой $B$.

*Интегралом от функции комплексного переменного по дуге* $\cup AB$ линии $L$ называется предел последовательности интегральных сумм:

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k , \tag{4.1}$$

где $\xi_k$ – точка, произвольно выбранная на дуге $\cup z_{k-1}z_k$ разбиения кривой; $\Delta z_k$ – приращение аргумента функции на этом участке разбиения, $\lambda = \max\limits_k |\Delta z_k|$ – шаг разбиения; $|\Delta z_k|$ – длина хорды, соединяющей концы дуги $\cup z_{k-1}z_k$.

При сформулированных выше условиях на функцию $f(z)$ и дугу линии $L$ предел (4.1) существует и не зависит от способа разбиения $\cup AB$ на части точками $z_k$ и от выбора «промежуточных» точек $\xi_k$.

Имеют место свойства интеграла, известные из математического анализа.

Существует несколько способов вычисления интегралов в комплексной области.

2. *Первый способ.* Интеграл вычисляется сведением к определенному интегралу (путь интегрирования $\cup AB$ задается в параметрической форме $z = z(t)$ ) – применяется формула:

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(z(t)\right)z'(t)dt .$$

***Пример.*** *Вычисление интеграла первым способом.* Вычислить интеграл $J = \int\limits_L |z|\,\bar{z}\,dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 4$, обходимой против часовой стрелки от точки $z_1 = -4i$ до $z_2 = 4i$.

*Решение.* Окружность $|z| = 4$ имеет центр в начале координат и радиус $r = 4$, поэтому ее параметрические уравнения имеют вид $\begin{cases} x = 4\cos t; \\ y = 4\sin t, \end{cases}$

т.е. $z = 4\cdot(\cos t + i\sin t)$. При этом $\bar{z} = 4\cdot(\cos t - i\sin t)$, $dz = 4\cdot(-\sin t + i\cos t)dt =$ $= 4i(\cos t + i\sin t)dt$. Подставляя $|z| = 4$, и учитывая, что $-\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ на дуге $\cup z_1 z_2$, имеем

$$J = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4^3\cdot(\cos t - i\sin t)i(\cos t + i\sin t)dt = 64i\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt =$$

$$= 64it\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 64\pi i.$$

3. *Второй способ.* Интеграл вычисляется сведением к криволинейным интегралам от функций действительных переменных – применяется формула:

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = \int\limits_{\cup AB} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int\limits_{\cup AB} v(x, y)dx + u(x, y)dy,$$

где $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ и $dz = dx + idy$.

***Пример.*** *Вычисление интеграла вторым способом.* Вычислить интеграл $J = \int\limits_{\cup AB} z\operatorname{Im} z^2\,dz$ вдоль отрезка прямой от точки $z_1 = 1 + i$ до $z_2 = 2$.

*Решение.* Для точки $z_1$ имеем $x_1 = 1,\ y_1 = 1$; для $z_2$ имеем $x_2 = 2,\quad y_2 = 0$. Запишем уравнение прямой, соединяющей эти точки: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-1}$, откуда $y = 2 - x$.

Следовательно, $z = x + iy$ можно записать в виде

$$z = x + i(2 - x),\ \ 1 \le x \le 2;$$

тогда $z^2 = x^2 + 2xi(2 - x) - (2 - x)^2$, $\operatorname{Im} z^2 = 4x - 2x^2$; $dz = (1 - i)dx.$

Имеем:

$$J=\int_1^2 (x+i(2-x))(4x-2x^2)(1-i)dx=2(1-i)\int_1^2 \left(2x^2-x^3+i\left(4x-4x^2+x^3\right)\right)dx=$$

$$=2\cdot(1-i)\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+i\left(2x^2-4\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\right)\Bigg|_1^2=2\cdot(1-i)\left(\frac{4}{3}+i\frac{4}{3}-\left(\frac{5}{12}+i\frac{11}{12}\right)\right)=$$

$$=2\cdot(1-i)\frac{11+5i}{12}=\frac{16-6i}{6}=\frac{8-3i}{3}.$$

4. *Третий способ.* Вычисление интегралов от аналитической функции в односвязных областях – применяется формула

$$\int_{\cup AB} f(z)dz=\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz=F(z)\Big|_{z_1}^{z_2}=F(z_2)-F(z_1),$$

где $F(z)$ – первообразная для $f(z)$.

***Пример.*** *Вычисление интеграла третьим способом.* Вычислить интеграл от аналитической функции: $\int_0^{2i}\cos^2 z\,dz$.

*Решение.* Здесь $f(z)=\cos^2 z$ аналитична во всей комплексной плоскости. Первообразную находим, используя известные из математического анализа методы интегрирования:

$$\int_0^{2i}\cos^2 z\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{2i}(1+\cos 2z)dz=\frac{1}{2}\cdot\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Bigg|_0^{2i}=i+\frac{\sin 4i}{4}=i\left(1+\frac{\text{sh}4}{4}\right).$$

В случае аналитических функций рекомендуется использовать наиболее простой – третий способ вычисления интеграла.

5. *Интегральная теорема Коши.* Пусть $L$ – замкнутый контур, целиком расположенный в области $G$. Будем считать, что $L$ задан уравнением $z=z(t)$ с непрерывной $z'(t)$, т.е. контур гладкий (или кусочно-гладкий).

**Теорема Коши.** Пусть $f$ аналитична в $G$, и контур $L$ ограничивает односвязную область $D\subset G$. Тогда

$$\oint_L f(z)dz=0.$$

6. *Формула Коши.* Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в области $G$, $L$ – контур, ограничивающий односвязную область $D\subset G$ и обходимый против часовой стрелки; характер линии $L$ описан в п. 5 параграфа 4. Тогда для любой точки $a$, лежащей в $D$ (т.е. расположенной внутри $L$), имеет место следующая *интегральная формула*:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)dz}{z-a}.$$

Кроме того, для любого $n$ в каждой точке $a\in D$ существует производная $f^{(n)}(z_0)$ и для нее справедливо соотношение

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

***Правило вычисления интегралов по замкнутому контуру от функции комплексного переменного.***

При вычислении интегралов вида $\oint_L f(z)dz$, где $f(z)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ($\varphi(z)$ – аналитическая в $G$, $\psi(z)$ – многочлен, не имеющий нулей на контуре $L$) можно выделить четыре случая, и всякий раз рекомендуется использовать соответствующий прием.

1) В области $D\subset G$ нет нулей многочлена $\psi(z)$. Тогда $f(z)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ функция аналитическая и, применяя интегральную теорему Коши, получаем

$$\oint_L f(z)dz=0.$$

2) В области $D\subset G$ расположен один простой нуль $z=a$ многочлена $\psi(z)$. Тогда записываем дробь в виде $\frac{g(z)}{z-a}$, где $g(z)$ – функция аналитическая в $G$. Применяя интегральную формулу Коши, получаем

$$\oint_L\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}dz=\oint_L\frac{g(z)}{z-a}dz=2\pi i\,g(a).$$

3) В области $D\subset G$ расположен один кратный нуль $z=a$ многочлена $\psi(z)$ (кратности $n$). Тогда записываем дробь в виде $\frac{g(z)}{(z-a)^n}$, где $g(z)$ – функция аналитическая в $G$. Применяя обобщенную интегральную формулу Коши, получаем

$$\oint_L \frac{g(z)}{(z-a)^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}g^{(n-1)}(a).$$

4) В области $D \subset G$ расположены два нуля многочлена $\psi(z)$: $z_1 = a$ и $z_2 = b$. Тогда запишем интеграл в виде

$$\oint_L f(z)dz = \oint_{L_1} f(z)dz + \oint_{L_2} f(z)dz,$$

где $L_1$ и $L_2$ – границы непересекающихся окрестностей точек $z_1$ и $z_2$. Для каждого из полученных интегралов проводим далее вычисления в соответствии с пунктами 2 и 3.

***Пример* 1.** *Вычисление интеграла по замкнутому контуру.* Вычислить $J = \oint_L \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz$ вдоль окружности: а) $|z| = \frac{1}{2}$; б) $|z+2i| = 1$; в) $|z+2| = 1$. Направление обхода – против часовой стрелки.

*Решение.* а) Находим нули знаменателя – особые точки подынтегральной функции. Это точки $z_1 = 0, z_2 = -2i$. Определим расположение точек относительно контура интегрирования. Контур – окружность с центром в точке $z_0 = 0$ и радиусом $R = \frac{1}{2}$. Внутри окружности $|z| = \frac{1}{2}$ содержится только одна точка $z_1 = 0$. Поэтому, применяя п. 2 правила (интегральная формула Коши), записываем подынтегральную функцию в виде дроби $\dfrac{\frac{2+\sin z}{z+2i}}{z}$, где числитель $g(z) = (2+\sin z)(z+2i)^{-1}$ – функция аналитическая в указанном круге. Применяя интегральную формулу Коши, получаем ответ:

$$J = \oint_L \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}dz = 2\pi i\left(\frac{2+\sin z}{z+2i}\right)\Big|_{z=0} = 2\pi i\,\frac{2+\sin 0}{2i} = 2\pi.$$

б) Внутри окружности $|z+2i| = 1$ с центром $(-2i)$ радиуса $R = 1$ содержится одна точка $z_2 = -2i$. Поэтому, применяя также п. 2 правила, записываем подынтегральную функцию в виде дроби $\dfrac{\frac{2+\sin z}{z}}{z+2i}$, где функция $g(z) = (2+\sin z)z^{-1}$ аналитическая в указанном круге. Вычисляем интеграл:

$$J = \oint_L \frac{(2+\sin z)z^{-1}}{(z-(-2i))}dz = 2\pi i\,(2+\sin(-2i))(-2i)^{-1} = -\pi(2-\sin 2i) = \pi(i\,\mathrm{sh}2 - 2).$$

в) $f(z) = \frac{2+\sin z}{z(z+2i)}$ является аналитической в круге $|z+2| \le 1$, так как нули знаменателя $z_1 = 0$ и $z_2 = -2i$ лежат вне этого круга. Следовательно, по теореме Коши (для односвязной области) получаем $J = 0$.

***Пример* 2.** *Вычисление интеграла по замкнутому контуру.* Вычислить $J = \oint_\gamma \frac{(e^z+2)dz}{(z^2+4)^2}$ вдоль окружности $|z-i| = 2$, обходимой в направлении против часовой стрелки.

*Решение.* Приведем интеграл *J* к виду

$$J = \oint_\gamma \frac{(e^z+2)\,dz}{(z^2+4)^2} = \oint_\gamma \frac{(e^z+2)dz}{(z^2-(2i)^2)^2} = \oint_\gamma \frac{(e^z+2)dz}{(z-2i)^2(z+2i)^2}.$$

Заметим, что в круге $|z-i| \le 2$ содержится лишь одна из двух точек $z = \pm 2i$ (именно $z = 2i$), в которой знаменатель обращается в ноль. Записываем интеграл в виде

$$J = \oint_\gamma \frac{(e^z+2)dz}{(z-2i)^2(z+2i)^2} = \oint_\gamma \frac{(e^z+2)(z+2i)^{-2}\,dz}{(z-2i)^2}.$$

Применяем п. 3 правила при $n = 2,\ z_0 = 2i$:

$$J = 2\pi i\left((z+2i)^{-2}(e^z+2)\right)'\Big|_{z=2i} = 2\pi i\left(-2\cdot(z+2i)^{-3}(e^z+2) + (z+2i)^{-2}e^z\right)\Big|_{z=2i} =$$

$$= 2\pi i\left(-2\cdot(4i)^{-3}(e^{2i}+2) + (4i)^{-2}e^{2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{e^{2i}+2}{32i} + \frac{e^{2i}}{-16}\right) =$$

$$= -2\pi i\left(\frac{e^{2i}}{32}(i+2)+\frac{i}{16}\right) = -\frac{\pi i}{16}\left((\cos 2 + i\sin 2)(i+2)+2i\right) =$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(\cos 2 + 2\sin 2 + 2 + i(\sin 2 - 2\cos 2)\right).$$

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Вычислить интегралы (рекомендуется первый способ вычисления).

1) $\int\limits_L \bar{z}^2\, dz$ вдоль линии $z = x + ix^2$ от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$;

2) $\int\limits_L \left(z^2 + 7z + 1\right) dz$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки:

а) $z_1 = 1$ и $z_2 = 1 - i$; б) $z_1 = -2$ и $z_2 = 4i$;

3) $\int\limits_L |z|^2 dz$ вдоль ломанной, соединяющей точки $z_1 = 0,\ z_2 = -1 + i,\ z_3 = 1 + i$;

4) $\int\limits_L z dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \ge 0$ обходимой против часовой стрелки;

5) $\int\limits_L 3z^2\, dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \ge 0$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, обходимой против часовой стрелки;

6) $\int\limits_L z|z| dz$ вдоль дуги окружности $z = 2e^{i\varphi}$ в направлении против часовой стрелки от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2i$;

7) $\int\limits_L |z| \operatorname{Re} z^3 dz$ вдоль дуги окружности $|z| = 4$, обходимой против часовой стрелки от точки $z_1 = 4$ до точки $z_2 = -4$.

2. Вычислить интеграл по замкнутому контуру $L$ в направлении против часовой стрелки:

1) $\oint\limits_L \frac{dz}{z^2 - 5z + 4}$; $L$: $|z-1| = 2$; 2) $\oint\limits_L \frac{e^{zi} + 2}{z(z-4)}\, dz$; $L$: $|z| = 2$;

3) $\oint\limits_L \frac{ze^{-z}}{z^2 + 1} dz$; $L$: а) $|z - i| = 1$; б) $|z + i| = 1$; в) $|z| = 2$; г) $|z - 3i| = 1$.

4) $\oint\limits_L \frac{\cos^2 z + 1}{z^2 - \pi^2} dz$; $L$: $|z - 2| = 3$; 5) $\oint\limits_L \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^4} dz$; $L$: $|z - i| = 4$;

6) $\oint\limits_L \frac{z + i}{z(z-1)^2} dz$; $L$: $|z - 1| = \frac{4}{5}$; 7) $\oint\limits_L \frac{\sin iz + 3}{\left(z^2 + 9\right)^2} dz$; $L$: $|z + 3i| = 1$.

## 5. РЯДЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ. РЯД ТЕЙЛОРА ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. *Числовые ряды с комплексными членами.*

Пусть $w_n = u_n + iv_n, n = 1, 2, \ldots$ . Выражение вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} w_n \qquad (5.1)$$

называется числовым рядом. Если существует *число* $S = \lim\limits_{n\to\infty}(w_1 + w_2 + \ldots + w_n)$, то ряд (5.1) называется *сходящимся*, а $S$ называется его суммой. В противном случае ряд (5.1) называется *расходящимся*.

Свойства рядов с действительными членами сохраняются и для рядов с комплексными членами.

2. *Степенные ряды.* Пусть в области $G$ задана бесконечная последовательность однозначных функций $\{u_n(z)\},\ n = 1, 2, \ldots$ .

**Определение.** Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \qquad (5.2)$$

называется *функциональным рядом*.

При $z = z_0 \in G$ получаем *числовой* ряд из комплексных чисел $u_n(z_0)$. Если получаемый числовой ряд сходится, то $z_0$ называется его точкой сходимости, а если расходится – то точкой расходимости. На множестве $G_0 \subset G$ всех точек сходимости ряда (5.2) задана функция $S = S(z)$, называемая суммой ряда (5.2), где $S(z_0)$ есть обозначение суммы ряда (5.2) в точке $z_0$.

Пусть $\{z^n\},\ n = 1,\ 2,\ \ldots,$ – последовательность степенных функций, $\{c_n\},\ n = 0,\ 1,\ \ldots$ – последовательность комплексных чисел.

**Определение.** Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{5.3}$$

называется *степенным*; обозначение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Любой степенной ряд сходится абсолютно в некотором круге $|z| < R$ и расходится вне его, т.е. при $|z| > R$. Число $R$ называется радиусом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости *R* можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D}, \text{ где } D = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \tag{5.4}$$

или

$$R = \frac{1}{K}, \quad K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \tag{5.5}$$

В частности формулы (5.4), (5.5) остаются справедливыми:

1) если $D = 0$ или $K = 0$; тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся комплексная плоскость,

2) если $D = +\infty$ $(K = +\infty)$; тогда $R = 0$, т.е. областью сходимости является единственная точка $z_0 = 0$.

Рассмотрим ряд по степеням разности $(z - z_0)$, где $z_0$ – данное комплексное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \ldots + C_n (z - z_0)^n + \ldots .$$

Его исследование сводится к (5.3) заменой $Z = z - z_0$.

***Пример* 1.** *Нахождение области сходимости ряда.* Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{i^n (z + 2i)^n}{\sqrt{n^2 + 4}}$.

*Решение.* Имеем ряд по степеням разности $Z = z - (-2i)$. Для нахождения области сходимости найдем радиус сходимости *R*. Воспользуемся формулой (5.4), где $c_n = \dfrac{i^n}{\sqrt{n^2 + 4}}$, $c_{n+1} = \dfrac{i^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2 + 4}}$

$$R = \frac{1}{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|i^n|}{\sqrt{n^2+4}} \frac{\sqrt{(n+1)^2+4}}{|i^{n+1}|} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{i^n}{i^{n+1}} \right| \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 5}{n^2 + 4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|i|} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}}} = 1.$$

Итак, при $|z + 2i| < 1$ ряд абсолютно сходится, при $|z + 2i| > 1$ расходится. Поведение ряда на окружности $|z + 2i| = 1$ требует дополнительного исследования, которое мы здесь не приводим.

***Пример* 2.** *Нахождение области сходимости ряда.* Установить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{2^n\, n!}$ абсолютно сходится во всей комплексной плоскости.

*Решение.* Вычислим радиус сходимости по формуле (5.4)

$$R = \frac{1}{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n\, n!} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n!(n+1)}{n!} = 2 \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty .$$

Следовательно, областью сходимости ряда является вся комплексная плоскость.

***Пример* 3.** *Нахождение области сходимости ряда.* Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ обладает единственной точкой сходимости $z = 0$.

*Решение.* Действительно, $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$, и, следовательно, областью сходимости является единственная точка $z = 0$.

3. *Ряд Тейлора.*

**Определение.** Пусть $w = f(z)$ однозначна и аналитична в круге *G* с центром в некоторой точке $z_0$. Тогда имеет место разложение в степенной ряд функции $f(z)$ по степеням разности $(z - z_0)$:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots . \qquad (5.6)$$

Такой степенной ряд называется *рядом Тейлора*.

Разложение (5.6) может быть записано в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n,$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}};$$

γ – любая окружность с центром в точке $z_0$, обходимая против часовой стрелки и целиком лежащая в области *G*.

Если $z_0 = 0$, то ряд (5.6) называется *рядом Маклорена.*

3. *Стандартные разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.*

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; 2) $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$; 3) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$;

4) $\operatorname{sh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$; 5) $\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; 6) $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$;

7) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Ряды 1) – 5) имеют областью сходимости всю комплексную плоскость, а 6)-7) – круг $|z| < 1$.

***Пример.*** *Разложение функций в ряд с использованием стандартных разложений.*

1) Разложить функцию $f(z) = e^{2z}$ в ряд по степеням $(z - i)$.

*Решение.* Представим функцию $e^{2z}$ в виде $e^{2z} = e^{2(z-i)+2i} = e^{2i}\, e^{2(z-i)}$. Тогда, в силу стандартного разложения функции $e^z$, получим

$$e^{2z} = e^{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (z-i)^n}{n!} = e^{2i}\left(1 + 2\cdot(z-i) + \frac{2^2\cdot(z-i)^2}{2!} + \ldots\right).$$

2) Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z+1}$ в ряд по степеням $(z - i)$. Определить область сходимости.

*Решение.* Центром круга, в котором будет происходить разложение, должна быть, согласно условию, точка $z_0 = i$. Представим функцию $f(z) = \frac{1}{z+1}$ в виде: $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z - i + 1 + i} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)}$. Теперь, используя стандартное разложение $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, получим

$$\frac{1}{1+i}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-i}{1+i}\right)} = \frac{1}{1+i}\left(1 - \frac{z-i}{1+i} + \frac{(z-i)^2}{(1+i)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^n}.$$

Следовательно, область сходимости ряда определяется условием $\left|-\frac{z-i}{1+i}\right| < 1$, т.е. $|z-i| < |1+i|$, $|z-i| < \sqrt{2}$.

3) Разложить функцию $f(z) = z\sin^2 z$ в ряд по степеням $z$. Определить область сходимости.

*Решение.* Запишем функцию в виде $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$. Тогда, используя стандартное разложение $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, получим

$$\sin^2 z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots\right) = \frac{2z^2}{2!} - \frac{2^3 z^4}{4!} + \frac{2^5 z^6}{6!} - \dots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n}}{(2n)!}.$$

Почленно умножая на $z$, получаем разложение

$$f(z) = \frac{2z^3}{2!} - \frac{2^3 z^5}{4!} + \frac{2^5 z^7}{6!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} z^{2n+1}}{(2n)!} + \dots \ .$$

Область сходимости ряда – вся комплексная плоскость ($C$).

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти области сходимости рядов

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{5^{n-1} \cdot 3^{1-n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{e^{in}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^n}{(1-i)^n}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, z^n}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(z+i)^n}{(2i)^n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n+1)!}$.

2. Разложить данную функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности данной точки $z_0$, пользуясь стандартными разложениями:

а) $f(z) = (z+2)e^z$; $z_0 = -2$; б) $f(z) = \cos^2 \frac{z}{4}$; $z_0 = 0$;

в) $f(z) = \sin z$; $z_0 = \frac{\pi}{4}$; г) $f(z) = \frac{z}{z+2}$; $z_0 = 1$;

д) $f(z) = \ln(z+2)$; $z_0 = -1$; е) $f(z) = \frac{2z-5}{z^2 - 5z + 6}$; $z_0 = 0$.

## 6. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

1. **Определение.** Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке $z_0$. Точка $z_0$ называется *нулем функции* $f(z)$, если ее значение в этой точке равно нулю, т.е. $f(z_0) = 0$.

В разложении функции в ряд Тейлора в окрестности нуля этой функции отсутствует свободный член: $C_0 = f(z_0) = 0$. Если при этом $C_1 = \dots = C_{n-1} = 0$, т.е. разложение имеет вид: $f(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} C_k (z - z_0)^k$ или $f(z) = C_n (z-z_0)^n + C_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots$, $C_n \neq 0$, то точка $z_0$ называется *нулем порядка n* функции $f(z)$.

Нуль первого порядка $(n = 1)$ называется простым нулем.

Следующие условия равносильны наличию в точке $z_0$ нуля порядка *n*:

а) $f^{(n)}(z_0) \neq 0,\ f^{(k)}(z_0) = 0,\ k = 0, 1, \dots, (n-1)$; (6.1)

б) $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),\ \varphi(z_0) = C_n \neq 0$. (6.2)

***Пример.*** *Нахождение нулей функции и определение их порядка*.

1) Найти нули функции и определить их порядок: $f(z) = (z^2+1)^3 e^{-\pi z}$.

*Решение.* Разложим многочлен на множители

$$z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z-i)(z+i).$$

Тогда $f(z)$ можно записать в виде $f(z) = (z-i)^3 \left((z+i)^3 e^{-\pi z}\right)$ или $f(z) = (z+i)^3 \left((z-i)^3 e^{-\pi z}\right)$.

В первом случае $z_0 = i$ является нулем 3-го порядка для $f(z)$, так как при $\varphi(z) = (z+i)^3 e^{-\pi z}$ получаем

$$\varphi(i) = (2i)^3 e^{-\pi i} = -8i(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = 8i \neq 0.$$

Во втором случае $z_0 = -i$ является нулем 3-го порядка для $f(z)$. Здесь $\varphi(z) = (z-i)^3 e^{-\pi i}$ и $\varphi(-i) = (-2i)^3 e^{\pi i} = -8i \neq 0$.

Итак, $f(z)$ имеет нулями 3-го порядка точки $i$ и $-i$.

2) Определить порядок нуля $z_0 = 0$ для функций:

а) $f(z) = e^{2z^2} - 1 - z^2$; б) $f(z) = \sin^3 z - 1 + \cos z$.

*Решение.* а) Для определения порядка нуля $z_0 = 0$ удобно использовать определение, т.е. разложить функцию по степеням *z*. Получаем

$$e^{2z^2}-1-2z^2=\left(1+2z^2+\frac{\left(2z^2\right)^2}{2!}+\ldots\right)-1-2z^2=\frac{4z^4}{2!}+\frac{8z^6}{3!}+\ldots .$$

Так как в полученном разложении коэффициент $C_4=2\neq 0$, а $C_0=C_1=C_2=C_3=0$, то делаем вывод, что точка $z_0=0$ является нулем четвертого порядка для данной функции.

б) В данном случае удобно использовать условие (6.1). Находим значения производных функции в точке $z_0=0$:

$$f'(z)=3\sin^2 z\cos z-\sin z,\ \ f'(0)=0;$$

$$f''(z)=6\sin z\cos^2 z-3\sin^3 z-\cos z,\ \ f''(0)=-1\neq 0 .$$

Следовательно, точка $z_0=0$ является нулем второго порядка данной функции.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти нули функции и определить порядок каждого из них:

а) $f(z)=z^5-z^4+4z^3-4z^2$; б) $f(z)=\left(z^2+9\right)^2\left(z^4-1\right)$;

в) $f(z)=\sin z^2$; г) $f(z)=\cos^2 z-1-z^2$.

2. Определить порядок нуля $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=z^2(e^{z^2}-1)$; б) $f(z)=e^{\sin z}-e^{\operatorname{tg} z}$.

## 7. РЯД ЛОРАНА. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ФУНКЦИИ

1. *Теорема Лорана* (о разложении функции в ряд по целым степеням). Функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$, $r\geq 0,\ R\leq\infty$ представляется в этом кольце сходящимся рядом по целым степеням, т.е. имеет место соотношение:

$$f(z)=\ldots+\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+$$

$$+C_1(z-z_0)+C_2(z-z_0)^2+\ldots+C_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n. \quad (7.1)$$

Коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz,\ \ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots, \quad (7.2)$$

где $\gamma$ – произвольный контур, (например, окружность) принадлежащий кольцу и охватывающий точку $z_0$.

**Определение.** Ряд (7.1), коэффициенты которого вычисляются по формуле (7.2), называется *рядом Лорана* функции $f(z)$.

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ называется *правильной частью ряда Лорана*, члены с отрицательными степенями образуют *главную часть ряда Лорана*:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}C_n(z-z_0)^n \ \text{ или } \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} .$$

На границах кольца сходимости ряда Лорана есть хотя бы по одной особой точке функции $f(z)$ – его суммы.

*Частные случаи рядов Лорана*:

1. При $r=0$ получаем частный случай кольца – вырожденное кольцо $0<|z-z_0|<R$ (круг с выколотым центром). Точка $z_0$ – особая точка функции, и разложение в этом случае называется разложением функции в окрестности особой точки.

2. При $R=\infty$ область $|z-z_0|>r$ есть внешность круга. Разложение в этом случае называется разложением в окрестности бесконечно удаленной точки и имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n.$$

При построении разложений в ряд Лорана могут быть использованы стандартные разложения и действия над рядами.

**Правило разложения рациональных дробей в ряд Лорана**

1) Выделяется целая часть в случае неправильной дроби.

2) Правильная дробь записывается в виде суммы элементарных дробей, для разложения которых используется формула суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+q}=1-q+q^2-\ldots+(-1)^n q^n+\ldots;\qquad |q|<1\,.$$

При этом элементарные дроби преобразуются следующим образом:

– для получения правильной части, т.е. ряда, сходящегося в круге $|z-z_0|<R$, разложение элементарной дроби записывается в виде

$$\frac{1}{a-(z-z_0)}=\frac{\dfrac{1}{a}}{1-\dfrac{z-z_0}{a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{a^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\qquad(7.3)$$

где $C_n=\dfrac{1}{a^{n+1}},\ |z-z_0|<|a|,\ a\neq 0$;

– для получения главной части, т.е. ряда, сходящегося вне круга $|z-z_0|>r$, разложение элементарной дроби записывается в виде

$$\frac{1}{a-(z-z_0)}=\frac{-\dfrac{1}{z-z_0}}{1-\dfrac{a}{z-z_0}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(z-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n};\qquad(7.4)$$

где $C_{-n}=-a^{n-1},\ \left|\dfrac{a}{z-z_0}\right|<1,$ т.е. $|z-z_0|>|a|$.

***Пример.*** *Разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $(z-z_0)$.*

Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-z-2}$ в ряд Лорана по степеням *z*.

*Решение.* Функция является аналитическая всюду, кроме точек $z_1=-1$ и $z_2=2$, т.е. разложение нужно вести в трех областях: в круге $|z|<1$, в кольце $1<|z|<2$ и в окрестности бесконечно удаленной точки $|z|>2$ (рис. 7.1).

В круге $|z|<1$ функция раскладывается в ряд Тейлора. Для этого разложим ее на элементарные дроби. Представим дробь в виде

$$\frac{z-1}{z^2-z-2}=\frac{z-1}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}\,,$$

где *A*, *B* – неопределенные коэффициенты, которые находим из тождества $z-1=A(z-2)+B(z+1)$. Полагая последовательно $z=-1$, $z=2$, получаем $A=\dfrac{2}{3}$, $B=\dfrac{1}{3}$. Записываем дробь в виде суммы дробей

$$\frac{z-1}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{2}{3}}{z+1}+\frac{\frac{1}{3}}{z-2}\,.$$

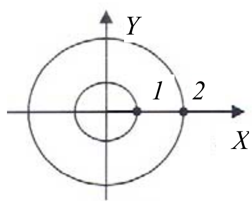

**РИС.**

Раскладываем по степеням *z* каждую элементарную дробь:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,|z|<1\,;$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2\,.$$

В общей области сходимости $|z|<1$ записываем сумму рядов:

$$\frac{z-1}{z^2-z-2}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,.$$

Рассмотрим разложение функции $f(z)=\dfrac{\frac{2}{3}}{z+1}+\dfrac{\frac{1}{3}}{z-2}$ в кольце. Первое слагаемое раскладываем в области $|z|>1$, т.е. записываем главную часть ряда, второе – в круге $|z|<2$ – правильная часть. Получаем разложения:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{\dfrac{1}{z}}{1+\dfrac{1}{z}}=\frac{\dfrac{1}{z}}{1-\left(-\dfrac{1}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n},\quad\left|-\frac{1}{z}\right|<1,\ |z|>1\,;$$

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ |z|<2.$$

Записываем окончательный результат:

$$\frac{z-1}{z^2-z-2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}},\ 1<|z|<2.$$

Здесь первое слагаемое – главная часть, а второе – правильная часть ряда Лорана в кольце $1<|z|<2$.

Чтобы получить разложение в области $|z|>2$ – окрестности бесконечно удаленной точки, нужно и второе слагаемое разложить по отрицательным степеням:

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{z}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}},\ \left|\frac{2}{z}\right|<1 \text{ или } \frac{1}{z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n},\ |z|>2.$$

В результате получаем:

$$\frac{z-1}{z^2-z-2}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n-1}+2^{n-1}}{3}\frac{1}{z^n},\ |z|>2.$$

Заметим, что главная часть ряда отсутствует, так как в разложении присутствуют только члены с отрицательными степенями.

2. *Изолированные особые точки.*

**Определение.** Точка $z_0$, принадлежащая комплексной плоскости, называется *изолированной* особой точкой функции $f(z)$, если $f(z)$ аналитична в некотором круге $0<|z-z_0|<r$, но не аналитична в точке $z_0$.

Изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ называется:

1) *устранимой особой* точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и конечен;

2) *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

3) *существенно особой* точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Приведем ряд утверждений об особых точках.

**Утверждение 1.** Для того, чтобы особая точка функции $f(z)$ была *устранимой*, необходимо и достаточно, чтобы в разложении функции в ряд Лорана в окрестности этой точки отсутствовала главная часть.

Это означает, что если $z_0$ – устранимая особая точка, то ряд Лорана функции $f(z)$ имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\ 0<|z-z_0|<r.$$

**Утверждение 2.** Для того, чтобы особая точка функции была *полюсом*, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции в окрестности этой точки содержала конечное число членов.

Ряд Лорана функции $f(z)$ в этом случае имеет вид:

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}C_k(z-z_0)^k,\ 0<|z-z_0|<r. \tag{7.5}$$

Номер старшего члена главной части ряда Лорана функции в ее разложении в окрестности полюса называется *порядком полюса*. Так, точка $z_0$ является полюсом порядка *n* функции $f(z)$, если в разложении (7.5) $C_{-n}\neq 0,\ C_k=0$ при $k<-n$.

**Утверждение 3.** Для того, чтобы особая точка функции была ее *существенно особой* точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции в окрестности этой точки содержала бесконечное число членов. Ряд Лорана функции $f(z)$ в существенно особой точке имеет вид:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,\ 0<|z-z_0|<r.$$

**Утверждение 4.** Точка $z_0$ тогда и только тогда является полюсом *n*-го порядка, когда существует аналитическая в точке $z_0$ функция $\varphi(z)$, такая, что $\varphi(z_0)\neq 0$ и

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}. \tag{7.6}$$

Согласно (7.6), $z=z_0$ – полюс *n*-го порядка для $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта точка является нулем *n*-го порядка для функции $\frac{1}{f(z)}$.

***Пример.*** *Определение типа особых точек.* Найти конечные особые точки следующих функций и определить их тип:

а) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+2)(z-1)^3}$; б) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3}$;

в) $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$; г) $f(z)=\dfrac{\sin \pi z}{z}$.

*Решение.* а) Изолированными особыми точками являются $z_1=-2$ и $z_2=1$. Рассмотрим случай $z_1$; запишем функцию $f(z)$ в виде:

$$f(z)=\frac{\dfrac{z^2}{(z-1)^3}}{z+2}=\frac{\varphi(z)}{z+2},\quad \text{где } \varphi(z)=\frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

В точке $z_1=-2$ функция $\varphi(z)$ аналитична, при этом $\varphi(z_1)=\dfrac{(-2)^2}{(-2-1)^3}=-\dfrac{4}{27}\neq 0$. Согласно (7.6) делаем вывод, что $z=-2$ – полюс первого порядка (простой полюс).

Рассмотрим случай $z_2$:

$$f(z)=\frac{\dfrac{z^2}{(z+2)}}{(z-1)^3}=\frac{\varphi(z)}{(z-1)^3},\quad \text{где } \varphi(z)=\frac{z^2}{(z+2)}.$$

Функция $\varphi(z)$ аналитична в точке $z_2=1$ и $\varphi(z_1)=\dfrac{1^2}{(1+2)}=\dfrac{1}{3}\neq 0$; таким образом точка $z_2=1$ – полюс третьего порядка.

б) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3}$. Изолированной особой точкой является $z=0$. Чтобы определить тип особой точки используем разложение функции по степеням $z$:

$$\frac{1-\cos z}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)\right)=\frac{1}{2!\,z}-\frac{z}{4!}+\ldots.$$

Главная часть разложения содержит конечное число членов, поэтому (на основании утверждения 2) точка $z=0$ для $f(z)$ является полюсом. Кроме того, в разложении старшая отрицательная степень равна 1, то, согласно утверждению 2, получаем, что точка $z=0$ является полюсом первого порядка.

в) Используем разложение функции $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$ по степеням $(z-1)$:

$$e^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!\,(z-1)^2}+\ldots.$$

Из этого представления вытекает, что точка $z=1$ является существенно особой точкой (см. утверждение 3), так как в разложении главная часть содержит бесконечное число членов.

г) Особой является точка $z_0=0$, при этом $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin \pi z}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin \pi z}{\pi z}\pi=\pi$, согласно первому замечательному пределу. Следовательно, $z_0=0$ есть устранимая особая точка.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Разложить в ряд Лорана данную функцию $f(z)$ в окрестности данной точки $z_0$:

а) $f(z)=\dfrac{1}{z+4}$, $z_0=2$; б) $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z+1)}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{3z}{z-i}$, $z_0=i$; г) $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $z_0=i$;

д) $f(z)=(z-2)^4\sin\dfrac{1}{z-2}$; $z_0=2$; е) $f(z)=z^2\ln\dfrac{2z-1}{2z}$; $z_0=0$.

2. Записать все разложения функции $f(z)=\dfrac{z^2-2z-3}{z^2+2z-3}$ по степеням $z$.

3. Разложить $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(1-2z)}$ по степеням $z$ в кольце $\dfrac{1}{2}<|z|<1$.

4. Найти конечные изолированные особые точки функций и определить их тип (для полюсов – указать их порядок):

а) $f(z)=\dfrac{1}{\sin 2z}$; б) $f(z)=e^{\frac{1}{z+5}}$; в) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$;

г) $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$; д) $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

5. Определить тип особой точки $z=0$ для данной функции

а) $f(z)=\dfrac{e^z-1-z}{z^3}-\dfrac{1}{2z}$; б) $f(z)=\sin\left(1+\dfrac{1}{z}\right)$; в) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$.

## 8. ВЫЧЕТ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ В ОСОБОЙ ТОЧКЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫЧЕТОВ

1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в области $D$ за исключением точки $z_0$. Разложим $f(z)$ в окрестности этой точки в ряд Лорана.

Коэффициент $C_{-1}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана (в окрестности точки $z_0$) называется *вычетом* $f(z)$ в точке $z_0$ и обозначается $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)$.

Если $\gamma$ – произвольный кусочно-гладкий замкнутый контур, расположенный в области $D$ и содержащий внутри себя точку $z_0$, то, согласно общей формуле для коэффициентов ряда Лорана (7.2), получаем

$$C_{-1}=\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(t)dt .$$

2. *Вычисление вычетов в особых точках.*

1) Вычет в устранимой особой точке равен нулю.

***Пример.*** *Вычисление вычета в устранимой особой точке.* Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\dfrac{(1-\cos z)^2}{z^4}$.

*Решение.* Эта функция имеет единственную особую точку – $z=0$. Докажем, что это устранимая особая точка: $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{(1-\cos z)^2}{z^4}=$

$=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\left(2\sin^2\frac{z}{2}\right)^2}{z^4}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^4\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}\right)^4}=\dfrac{1}{4}\neq 0$, поэтому $z=0$ – устранимая особая точка. Следовательно, вычет в этой точке равен нулю.

2). Вычеты в полюсах. Изложим полезные для вычислений вычетов утверждения.

**Теорема 1.** Если $z_0$ – простой полюс функции $f(z)$, то $\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left[(z-z_0)f(z)\right]$.

**Теорема 2.** Пусть $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – аналитические в окрестности точки $z_0$ функции. Если $z_0$ – простой нуль функции $\psi(z)$, и $\varphi(z_0)\neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} . \tag{8.1}$$

***Пример.*** *Вычисление вычета в простом полюсе.*

Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\operatorname{ctg} z$.

*Решение.* Особые точки – те, в которых $\sin z=0: z_k=k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ . Эти точки являются простыми нулями знаменателя, так как $(\sin z)'\big|_{z_k}=\cos z\big|_{z_k}=\pm1\neq 0$. Числитель $\cos z_k\neq 0$, поэтому точки $z_k$ – простые полюса. Вычеты находим по формуле (8.1): $\operatorname*{res}_{z_k}(\operatorname{ctg} z)=$

$=\dfrac{\cos z_k}{(\sin z)'\big|_{z=z_k}}=\dfrac{\cos z_k}{\cos z_k}=1$.

**Теорема 3.** Если $z_0$ – полюс функции $f(z)$ $n$-го порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right)\right]. \tag{8.2}$$

***Пример.*** *Вычисление вычета в полюсе порядка n.*

Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}$.

*Решение.* Функция $f(z)$ имеет два полюса: $z=-1$ – полюс второго порядка и $z=3$ – простой полюс. Для нахождения вычета в точке $z=-1$ применим формулу (8.2) при $n=2$:

$$\operatorname*{res}_{z_0=-1} f(z)=\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[\left((z+1)^2\frac{z+2}{(z+1)^2(z-3)}\right)\right]=\lim_{z\to-1}\frac{d}{dz}\left[\frac{z+2}{z-3}\right]=$$

$$=\lim_{z\to-1}\left[\frac{-5}{(z-3)^2}\right]=-\frac{5}{16}.$$

Для определения вычета в точке $z=3$ воспользуемся формулой (8.1):

$$\operatorname*{res}_{z_0=3} f(z)=\left.\frac{\dfrac{z+2}{(z+1)^2}}{(z-3)'}\right|_{z=3}=\left.\frac{z+2}{(z+1)^2}\right|_{z=3}=\frac{5}{16}.$$

3) Вычет в существенно особой точке находится из разложения функции в ряд Лорана.

***Пример.*** *Вычисление вычета в существенно особой точке.* Найти вычеты в особых точках функции $f(z)=(z-2)e^{\frac{2}{z-2}}$.

*Решение.* Особая точка: $z=2$. Согласно представлению: $e^w=1+w+$ $+\dfrac{w^2}{2!}+\ldots+\dfrac{w^n}{n!}+\ldots$. При $w=\dfrac{2}{z-2}$ имеем

$$e^{\frac{2}{z-2}}=1+\frac{2}{z-2}+\frac{2^2}{2!\cdot(z-2)^2}+\ldots+\frac{2^n}{n!\,(z-2)^n}+\ldots.$$

Тогда $f(z)=(z-2)+2+\dfrac{2^2}{2!\cdot(z-2)}+\ldots+\dfrac{2^n}{n!(z-2)^{n-1}}+\ldots$. Здесь $C_{-1}=\dfrac{2^2}{2!}=2$, т.е. $\operatorname*{res}_{z_0=2} f(z)=C_{-1}=2$.

3. *Основная теорема о вычетах.* Пусть функция $f(z)$ аналитична во всех точках ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ (границей которой является контур $L$) за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$, расположенных внутри $L$. Тогда

$$\oint_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k} f(z). \qquad (8.3)$$

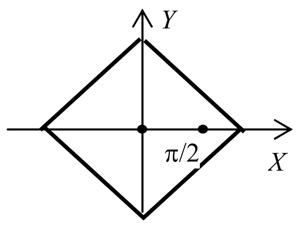

*Рис. 8.1*

***Пример.*** *Вычисление интегралов с помощью основной теоремы о вычетах.* Вычислить $\oint_L \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz$, где $L$ – квадрат $|x|+|y|=2$.

*Решение.* Обе особые точки подынтегральной функции: $z_1=0$ и $z_2=\dfrac{\pi}{2}$ расположены внутри контура $L$ (рис. 8.1), поэтому, согласно формуле (8.3) имеем $\oint_L \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz==2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z_1} f(z)+\operatorname*{res}_{z_2} f(z)\right)$. Точка $z_1=0$ – полюс первого порядка, $\operatorname*{res}_{z_1} f(z)=\lim_{z\to0}(z\,f(z))=\lim_{z\to0}\left(\dfrac{\cos z}{\dfrac{\pi}{2}-z}\right)=\dfrac{2}{\pi}$. Точка $z_2=\dfrac{\pi}{2}$ – нуль первого порядка и для числителя и для знаменателя; докажем, что это – устранимая особая точка подынтегральной функции.

Пусть $t=\dfrac{\pi}{2}-z$, тогда $\cos z=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$, и $\lim_{z\to0} f(z)==\lim_{t\to0}\dfrac{\sin t}{(\pi/2-t)t}=\dfrac{2}{\pi}$. Предел существует и конечен, поэтому $z_2=\dfrac{\pi}{2}$ – устранимая особая точка, и $\operatorname*{res}_{z_2} f(z)=0$. По основной теореме о вычетах $\oint_L \dfrac{\cos z}{z\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)}dz=2\pi i\left(\dfrac{2}{\pi}+0\right)=4i$.

**Упражнения для самостоятельного решения**

1. Найти вычеты в особых точках функции

а) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z-4}$; б) $f(z)=\dfrac{z+5}{(z-3)^2z^2}$;

в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(z+\pi)}$;  г) $f(z)=\dfrac{e^{z+1}}{(z+1)^2}$.

2. Найти вычеты следующих функций в точке $z=0$:

$f_1(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$; $f_2(z)=\dfrac{\sin 1}{z^2}$; $f_3(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}$; $f_4(z)=\dfrac{z^2}{\sin z}$.

3. Вычислить с помощью вычетов интегралы

а) $\oint\limits_{|z-2|=3}\dfrac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=3} z^2 e^{\frac{1}{z-2}}dz$; в) $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)(z+i)(z-4i)}dz$.

## ПРИМЕРЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. Вычислить: а) $\dfrac{4+i}{2-i}+\dfrac{5-2i}{3+i}$; б) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2+\dfrac{3+2i}{i(6-8i)}$.

2. Доказать равенство $\dfrac{6-i}{3+4i}=\dfrac{13+41i}{-25+25i}$.

3. Представить в тригонометрической форме числа

а) $z=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $z=-4+4i$; в) $z=\dfrac{1}{2}$; г) $z=-3i$.

4. Вычислить все значения корня: а) $\sqrt{-9i}$; б) $\sqrt[3]{-i+1}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$.

5. Вычислить значение функции $w=e^z$ при:

а) $z=\pi(1-i)$; б) $z=1+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)$.

6. Представить в алгебраической форме числа

а) $z=\dfrac{i}{2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$, б) $z=\left(i-\sqrt{3}\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{12}-i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)(1-i)^{-1}$,

в) $\operatorname{Ln}(2+2i)$; г) $\operatorname{Ln}(ei)$; д) $2^{3i}$; е) $5^{1-i}$; ж) $3^{-\frac{1}{2}}$;

з) $(-i)^{1+i}$; и) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-6i}$.

7. Вычислить значение функций: а) $\cos\left(i+\dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $\sin(\pi-i)$;

в) $\operatorname{ch}(i\pi-1)$; г) $\operatorname{Arc}\sin 3$; д) $\operatorname{Arctg}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

8. Проверить, является ли функция $w=f(z)$ дифференцируемой. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке $z_0$:

а) $w=(iz)^3$, $z_0=-1+i$; б) $w=e^{-z^2}$, $z_0=i$.

9. В каких точках функция: а) дифференцируема; б) аналитична.

1) $w=i\left(1-z^2\right)-2z$; 2) $w=z+\operatorname{Im}(2z+3i)$; 3) $w=z^{-2}$;

4) $w=i|z+i|^2-\bar{z}$.

10. Вычислить интеграл $J=\int\limits_{\cup AB}(z+1)\operatorname{Re} z^2 dz$ вдоль отрезка прямой $AB$: $z_A=0$, $z_B=1+2i$.

11. Вычислить интеграл $J=\int\limits_L \bar{z}\operatorname{Im} z\, dz$, вдоль кривой $L$: $\{|z|=1, \operatorname{Re} z\le 0\}$, обходимой против часовой стрелки.

12. Вычислить интегралы от аналитических функций: а) $\int\limits_0^{1+i} z^3 dz$;

б) $\int\limits_{-i}^{1}\dfrac{dz}{(z-i)^2}$ (путь интегрирования не проходит через точку $i$).

13. Вычислить интеграл: а) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{z^2+3}{z(z+2)}dz$; б) $\int\limits_{|z|=3}\dfrac{\cos z^2-1}{z^4}dz$.

14. Вычислить интеграл $\int\limits_L\dfrac{\sin z}{z^3+16z}dz$ в следующих случаях задания контура $L$: а) $|z|=2$; б) $|z+1+i|=2$; в) $|z+4i|=2$.

15. Найти область сходимости рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n n^2}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(n+1)^n}$.

16. Разложить данную функцию $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности данной точки $z_0$, пользуясь стандартными разложениями:

а) $f(z)=\cos z;\ z_0=\frac{\pi}{3}$; б) $f(z)=\ln(z+1);\ z_0=2$;

в) $f(z)=\frac{2z-1}{z+2};\ z_0=0$; г) $f(z)=\frac{z}{z^2-i};\ z_0=0$

17. Найти все нули функции и определить их порядок:

а) $f(z)=\left(z^4+2z^2+1\right)\left(z^2-2z+2\right)$; б) $f(z)=\frac{\sin^2 z}{z(z-\pi)^2}$.

18. Разложить в ряд Лорана данную функцию $f(z)$ в окрестности данной точки $z_0$: а) $f(z)=\frac{1}{z-2i};\ z_0=-i$; б) $f(z)=\sin\frac{z}{z+1};\ z_0=-1$;

в) $f(z)=z^4\cos\frac{1}{z-1};\ z_0=1$; г) $f(z)=ze^{\frac{z}{z+3}}\ z_0=-3$.

19. Найти конечные изолированные особые точки функций и определить их тип (для полюсов – указать их порядок):

а) $f(z)=\frac{1}{\sin z^2}$; б) $f(z)=\frac{1-2z^2-\cos 2z}{z^3\sin^2 z}$;

в) $f(z)=\frac{(z^2+i)^2(z+3)}{\left(z^2+1\right)(z+i)}$; г) $f(z)=\frac{z}{e^z-1+z}$.

20. Определить тип особой точки $z=0$ для данной функции

а) $f(z)=z\,e^{\frac{4}{z^3}}$; б) $f(z)=\frac{e^{7z}-1}{\cos z-1+z^2/2}$; в) $f(z)=\frac{1}{z\left(1-e^{-2z}\right)}$.

21. Найти вычеты в особых точках функций:

а) $f(z)=\frac{z+1}{(z^2+z-2)^2}$; б) $f(z)=z\cos\frac{1}{z-i}$; в) $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2}$.

22. Найти вычеты следующих функций в точке $z=0$:

$f_1(z)=\frac{\sin 2z-2z}{(1-\cos z)^2}$; $f_2(z)=\frac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$; $f_3(z)=\frac{(1-\operatorname{ch}z)\operatorname{sh}z}{(1-\cos z)\sin^2 z}$.

23. Вычислить с помощью вычетов интеграл

а) $\oint\limits_{|z-i|=1}\frac{e^z}{z-i}dz$; б) $\oint\limits_{|z-1|=2}\sin\left(1+\frac{1}{z}\right)dz$; в) $\oint\limits_{|z+4|=5}\frac{z}{z+3}e^{\frac{1}{3z}}dz$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лунц, Г.Л. Функции комплексного переменного : учебник для вузов / Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – 2-е изд. – СПб. : Издательство «Лань», 2002. – 304 с.

2. Нахман, А.Д. Элементы теории функции комплексного переменного : учебное пособие / А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 187 с.

3. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. – М. : Высшая школа, 2001. – 445 с.